ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TAM ve KARMA SAYI DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN DIŞBUKEYLİĞİ ve OPTİMİZASYONU

Emre TOKGÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

TEZ ONAYI

Emre TOKGÖZ tarafından hazırlanan " **Tam ve Karma Sayı Değişkenli Fonksiyonların Dış Bükeyliği ve Optimizasyonu**" adlı tez çalışması 27/07/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. F.Nejat EKMEKCİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:

Başkan: Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç.Dr.Mustafa ÖZKAN
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. F.Nejat EKMEKCİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.
Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

27/07/2017

Emre T.

Emre TOKGÖZ

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

27/07/2017

Emre TOKGÖZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TAM ve KARMA SAYI DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN DIŞBUKEYLİĞİ ve OPTİMİZASYONU

Emre TOKGÖZ

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tam ve karma sayı değişkenli fonksiyonların dış bükeyliği ve optimizasyonu ile ilgili temel kavramlar ve literatür bilgileri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tamsayı değişkenli fonksiyonların dış bükeyliği ve optimizasyonu ile ilgili tanımlar, sonuçlar, ve örnekler sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, karma değişkenli fonksiyonların dış bükeyliği ve optimizasyonu ile ilgili tanımlar, sonuçlar, ve örnekler sunulmuştur.

Son bölümde, tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Temmuz 2017, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler : Tamsayı değişkenli fonksiyon, Karma değişkenli fonksiyon, Dışbükeylik, Optimizasyon.

ABSTRACT

Master Thesis

DISCRETE and MIXED VARIABLE FUNCTIONS' CONVEXITY and OPTIMIZATION

Emre TOKGÖZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter has the literature review on discrete and mixed variable functions conveity and optimization.

The third chapter outlines condense mixed variable functions' convexity and optimization results as well as the associated definitions.

The fourth chapter includes mixed variable functions' convexity and optimization results as well as the associated definitions.

In the last chapter, the results obtained in the thesis are summarized.

July 2017, 42 pages

Key Words: Discrete variable functions, mixed variable functions, convexity, optimization.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren ve karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen, akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de fikirleriyle yetişme ve gelişmeme yardımcı olan büyük bir sabır ve titizlikle beni yönlendiren, saygı değer hocam, Sayın Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'na ve bana her zaman destek olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Emre Tokgöz

Ankara, Temmuz 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\lfloor . \rfloor$	Alt tamsayıya tamamlama
det	Determinant
∇	Fark operatörü
$\|, \|$	Norm
$\mathbb{R}$	Reel uzay
$\lceil . \rceil$	Üstel tamsayıya tamamlama
$\mathbb{Z}$	Tam sayı uzayı
$\sum$	Toplam Sembolü

Kısaltmalar

max	Maksimum değer
min	Minimum değer
YKD	Yoğun Karışık Dışbükey

1. GİRİŞ

Karmaşık yapılı sistemlerin optimizasyonu için tasarlanan modeller tamsayı ve reel değişkenlerin her ikisine de sahip olabilir. Bu modellere örnek olarak telekominikasyon sistemlerindeki Erlang gecikme ve Erlang kayıp fonksiyonlarının yanı sıra Das (1977) tarafından önerilen $(S-1, S)$ envanter modeli ile Kumin (1973) tarafından tanıtılan $M/E_k/1$ sıralama (queue) sistem modeli verilebilir. Reel değişkenli dışbükeylik için kullanılabilecek optimizasyon sonuçlarından bir tanesi belirli koşullar altında yerel minimum noktasının aynı zamanda genel minimum olmasıdır. Reel değişkenli dışbükeylik tanımı tektir; ancak, tamsayı değişkenli fonksiyon dışbükeyliği birçok farklı şekilde tanımlanmıştır. Fonksiyonların tamsayı dışbükeyliği yapılan tanıma göre değişebilir. Tamsayı değişkenli fonksiyonların dışbükeyliğinin tanımlarında kombinatoryal (combinatorial) özellikleri kullanılıp algoritmik teknikler genellikle bu fonksiyonların optimizasyon sonuçlarının elde edilmesinde kullanılır. Reel değişkenli fonksiyonların dışbükeylik koşullarını belirlemek için Hessian matrisini kullanmak pratik metodlardan bir tanesidir. Bu durumda doğal olarak akla gelen soru tamsayı ve karma değişkenli fonksiyonların dışbükeyliği için reel sayıların Hessian matrisine benzer bir matris tanımlanıp kullanılabilir mi? Bu soruya ek olarak tamsayı ve karma değişkenli fonksiyonların dışbükeyliğinin sağlanması durumunda optimizasyon sonuçları nasıl elde edilebilir? Bu tezde bu sorulara yanıtlar arayacağız.

Literatürde yer alan tam ve reel değişkenli fonksiyonların $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ tanım uzayındaki dışbükeyliği iki farklı şekilde elde edilmiştir: (1) Reel değişkenler sabit kabul edilip fonksiyonun tamsayı değişkenlerine göre dışbükeylik özelliklerinin incelenmesi; (2) tamsayı değişkenleri sabit kabul edilip fonksiyonun reel değişkenlerine göre dışbükeylik özellillerinin incelenmesi. Örneğin, Harel (2010) ikiden fazla sunucu varsayımı altında Erlang gecikme fonksiyonunun trafik yoğunluğu (ρ) reel değişkenine göre dışbükeyliğini göstermek için tamsayı değişkeninin sabit olduğunu varsayıyor.

Sıralama sistemlerinin bir parçası olarak kullanılan ve literatürde sıkça kullanılan değişkenler aşağıda sıralanmıştır:

μ : Sistemdeki öğeye hizmet oranı

λ : Öğenin sisteme ulaşma oranı

s : Sunucu (server) sayısı

ρ : Trafik yoğunluğu ($= \dfrac{\lambda}{s\mu}$)

a : Sistemde öngörülen yükleme kapasitesi

B : $M/M/s$ sistemindeki sunucuların yoğun olma olasılığı

W_q : $M/M/s$ sistemindeki öğelerin ortalama bekleme süresi

L_q : Sırada servis bekleyen öğe sayısı

L : Sistemde bekleyen öğe sayısı

Aşağıda yer alan çizelge 1.1′de literatürde yer alan bazı sıralama sistemlerinin modellerini, hangi yıl ve kim tarafından tanıtıldıklarını ve elde edilen dışbükeylik sonuçlarını göstermektedir. Bu tezde sunulan bilgilerin ana şemasını Tokgöz, Nourazari ve Kumin (2011) tarafından tanıtılan $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tipindeki fonksiyonların yoğun dışbükeyliği ile karşılık gelen Hessian matrisi ve optimizasyon sonuçlarının yanı sıra Tokgöz (2012) tarafından tanıtılan $g : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tipindeki fonksiyonların yoğun dışbükeyliği ile karşılık gelen Hessian matrisi ve optimizasyon sonuçlarından oluşturmaktadır. Bu sonuçların bir parçası olarak $D_1 \subset \mathbb{Z}^n$ ve $D_2 \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ setlerinin dışbükeyliği tanımlanmıştır. Bu sonuçların elde edilmesinde her iki tip fonksiyon için tanımlanan Hessian matrisi önemli bir role sahiptir. Literatürde bilinen f ve g tipindeki fonksiyonlar ile ilgili dışbükeylik ve optimizasyon sonuçlarınada bu tezde kısaca yer verilmiştir.

Çizelge 1.1 Fonksiyon ve dışbükeylik

Sistem	**Matematiksel model ve dışbükeyliği**	**Yazar**
$M/D/s$	$W_q\left(s\right) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-na}\left[\sum_{j=ns}^{\infty}\frac{(na)^j}{j!} - \frac{s}{a}\sum_{j=(n+1)s}^{\infty}\frac{(na)^j}{j!}\right]$ W_q fonksiyonu $s \in \mathbb{Z}$ dışbükey.	$Rolfe$ (1971)
$M/M/s$	$W_q\left(s\right) = \frac{\rho^s}{s!\left(1-\frac{\rho}{s}\right)^2 s\mu}\left[\sum_{j=0}^{s-1}\frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^s}{s!\left(1-\frac{\rho}{s}\right)}\right]$ W_q fonksiyonu $s \in \mathbb{Z}$ dışbükey.	$Dyer\ ve\ Proll$ (1977)
$M/M/s$	$W_q\left(\rho\right) = \frac{B}{(1-\rho)s\mu}$, $(B : Erlang\ erteleme)$ W_q fonksiyonu $\rho \in \mathbb{R}$ dışbükey.	$Lee\ ve\ Cohen$ (1983)
$M/M/s$	$L\left(\rho\right) = s\rho + B\frac{\rho}{1-\rho}$ L fonksiyonu $\rho \in \mathbb{R}$ dışbükey.	$Grassmann$ (1985)
$M/M/s$	$L_q\left(\rho\right) = \frac{\rho}{1-\rho}B$ L_q fonksiyonu $\rho \in \mathbb{R}$ dışbükey.	$Lee\ ve\ Cohen$ (1985)
$M/M/s$	$Erlang\ gecikme\ ve\ kayıp\ formulleri,$ $\rho \in \mathbb{R}\ conveks$	$Harel$ (2010)

2. KURAMSAL TEMELLER

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesine sunulan bu tezde yer alan biligilerin ana şeması Tokgöz (2012) ile Tokgöz vd (2011) tarafından tanıtılan tam ve karma (tamsayı ve reel) değişkenli fonksiyonların ve setlerin dışbükeylik tanımlarının yanı sıra bu fonksiyonlar için elde edilen dışbükeylik ve optimizasyon sonuçlarından oluşmaktadır. Bu ünitede bu iki çeşit dışbükeylik ile ilgili literatürde elde edilen araştırma sonuçlarının yanı sıra bilinen reel, tam ve karma (tamsayı ve reel) değişkenli fonksiyonlar ve setler ile ilgili tanım ve sonuçlar özetlenmiştir.

Temel Kavramlar

Literatürde yer alan fonksiyon ve set kavramlarının dışbükeyliği ile ilgili notlar 1950'li yılların başında Princeton Üniversitesinde (Rockafellar 1970) ders sırasında alınan notlar ile şekillenmiştir. Fenchel (1953, 1971, 1974 ve 1987), Bonnesen (1971, 1974 ve 1987) ve Rockafellar (1970, 1974 ve 1998) dışbükeylik konusunda araştırmaları ile ön plana çıkmış 1900'lü yılların araştırmacıları arasında yer alır. Bu bölümde tanımlanan set ve fonksiyon dışbükeyliği analizde bilinen temel tanımlar arasındadır. Bir $D \subset \mathbb{R}^m$ seti $0 \leq a \leq 1$ için ve herbir $x, y \in D$ için $ax + (1-a)\, y \in D$ koşulunu sağlarsa bu durumda D setine reel $\mathbb{R}^m$ uzayında dışbükey set denir.

Tanım 2.1. (Dışbükey fonksiyon): Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fonksiyonunun $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dışbükey setinde dışbükey olması için gerekli ve yeter koşul $\forall\ x, y \in D$ ve $0 \leq a \leq 1$ için

$$f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y) \tag{2.1}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Fenchel 1953).

Doğrusal olmayan reel değişkenli fonksiyonlar için elde edilen dışbükeylik sonuçları yine bu fonksiyonların optimizasyon uygulamalarında önemli yere sahiptir (Borwein ve Lewis 2000). Reel değişkenli fonksiyonların yerel ve genel dışbükeyliği arasındaki ilişki bu konuda elde edilen teorik sonuçların ve algoritmaların kullanımı ile bulunabilir. Buna ek olarak, $\mathbb{R}^n$ uzayının tamamında C^2 (ikinci dereceden kısmi türevlenebilir) olan dışbükey bir fonksiyonunun yerel minimumu aynı zamanda bu fonksiyonun $\mathbb{R}^n$ uzayındaki genel minimumuyla aynıdır ve bu dışbükeylik Hessian matrisinin pozitif tanımlı olması ile eşdeğerdir. Reel değişkenli ve koşullu fonksiyonların dışbükeylik ve optimizasyon çözümleri mühendislikte önemli bir yere sahiptir (Boyd ve Vandenberghe 2009).

Tanım 2.2. (Tek Tamsayı Değişkenli Fonksiyonların Dışbükeyliği) Tek tamsayı değişkenli ve reel değerli $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tipindeki fonksiyonların dışbükeylik tanımı 1966 yılında Fox tarfından f fonksiyonun eksilmeden artan ikinci dereceden farkı olarak

$$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) \geq 0$$

şekilde tanımlanmıştır (Fox 1996).

Tamsayı değişkenli ve reel değerli fonksiyonların dışbükeylik tanımlarının arasında iki farklı tanım 1971 yılında Miller tarafından ve 1990 yılında Favati ve Tardella (integralli-dışbükey tanımı) tarafından yapılmıştır. M, L, $\mathrm{M}^\natural$, ve $\mathrm{L}^\natural$ dışbükeylik tanımları sırasıyla Murota (1996), Murota (1998), Murota ve Shioura (1999), ile Fujishige ve Murota (2000) tarafından yapılmıştır. M, L, $\mathrm{M}^\natural$, ve $\mathrm{L}^\natural$ dışbükeylik sonuçlarının elde edilmesi için kullanılan Hessian matrisleri ise Hirai ve Murota (2004) ile Moriguchi ve Murota (2005) tarafından tanıtılmıştır. Tamsayı değişkenli ve reel değerli fonksiyonların güçlü dışbükeyliği Yüceer tarafından 2002 yılında tanıtılmıştır. Daha sonrasında Ui tarafından 2006 yılında tanıtılan D-dışbükeylik tanımı integral-dışbükey, M, L, $\mathrm{M}^\natural$, ve $\mathrm{L}^\natural$ dışbükeylik tanımlarını kapsamıştır. Tokgöz, Nourazari ve Kumin 2011 yılında Fox (1966) tarafından tanıtılan tek tamsayı değişkenli dışbükeyliği genelleştirerek birden fazla tamsayı değişkenli fonksiyonların yoğun dışbükeyliğini tanıttı. Bu dışbükeylik ile bağdaşan bir Hessian matriside yine bu makalede tanıtılıp ilgili sonuçlar yine bu makalede elde edilmiştir.

Karma değişkenli programlama problemleri (mixed integer programming problems) mühendislik ve matematik yöneylem araştırmasında (operations research) pek çok uygulamaya sahiptir. Bu konuda elde edilen teorik dışbükeylik ve optimizasyon sonuçlarının yanı sıra algoritmik yaklaşımlar kullanırak karma değişkenli programlama problemlerinin nümerik çözümlerinin elde edilmesi mühendislik ve matematik uygulamalarında önemli bir yere sahiptir.

Tokgöz (2012), $f : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tipindeki fonksiyonların yoğun karma dışbükeyliğini Tokgöz, Nourazari ve Kumin (2011) tarafından tanımlanan $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ tipindeki fonksiyonların yoğun dışbükeyliğini kullanılarak tanımlamıştır. Bu tanımlanan yoğun karma fonksiyonların dışbükeyliği yerel ve genel karma teorik dışbükeylik ve optimizasyon sonuçlarının elde edilmesi için kullanılmıştır. Yoğun karma fonksiyonların bu tanımı ve elde edilen teorik sonuçlar $(S-1, S)$ envanter, $M/M/s$ sıralama, ve telekominikasyon sistemlerinde yer alan $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tipindeki karma değişkenli fonksiyonların dışbükeyliği ile optimizasyon sonuçlarının elde edilmesinde Tokgöz (2012) tarafından uygulanmıştır.

Tezin geri kalan kısmı şu şekilde organize edilmiştir: İkinci bölümde tamsayı değişkenli ayrık fonksiyonların dışbükeyliği ile yine bu fonksiyonların optimizasyon sonuçları yer almaktadır. Üçüncü bölümde yoğun karma fonksiyonların dışbükeyliği ile yine bu fonksiyonların optimizasyon sonuçları işlenmiştir. Bunlara ek olarak hem tamsayı hemde karma değişkenli fonksiyonların yerel ve genel minimumları arasındaki bağ bu iki bölümde gösterilmiştir.

Bu tezde yer alan tamsayı ve karma değişkenli fonksiyonlar için elde sonuçlar sadece reel değerlidir. Benzer sonuçlar tam sayı değerli tamsayı ve karma değişkenli fonksiyonlar için elde edilebilir.

3. TAMSAYI DEĞİŞKENLİ DIŞBÜKEYLİK ve OPTİMİZASYON

Bu bölümde Tokgöz, Nourazari ve Kumin tarafından 2011 yılında tanımlanan $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ tipindeki birden fazla değişkenli yoğun dışbükey fonksiyonlar işlenecektir. Tamsayı değişkenli fonksiyonların yoğun dışbükeyliği Fox (1966) tarafından tanımlanan tek tamsayı değişkenli fonsksiyonların dışbükeylik tanımı esas alınıp bu tanımın genelleştirilmesiyle elde edilmiştir. Kiselman ve Christer (2010) tarafından tanımlanan fark operatörünün tanımına benzer şekilde Tokgöz, Nourazari ve Kumin (2011) $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ tipindeki fonksiyonların **ilk fark operatörünü**

$$\nabla_i f(x) = f(x + e_i) - f(x)$$

şeklinde ve birinci farkın farkı olarak tanımlanan **ikinci fark operatörü**

$$\nabla_{ij}(f(x)) = f(x + e_i + e_j) - f(x + e_i) - f(x + e_j) + f(x)$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu tanımdaki e_i vektörü $\mathbb{Z}^n$ uzayındaki $e_i^2 = 1$ ve $e_i e_j = 0$ koşulunu sağlayan birim vektördür. ∇_{ij} operatörü tamsayı degişkenli fonksiyonların elde edilmesinde kullanılan Hessian matrisinin oluşturulmasında kullanılmıştır.

3.1 Yoğun Tamsayı Değişkenli Dışbükeylik

Birden fazla tamsayı değişkenli M−dışbükey ve L-dışbükey fonksiyon kavramları sırasıyla 1996 ve 1988 yıllarında Murota tarafından, $M^{\#}$ dışbükeyliği 1999'da Murota, Shioura tarafından, ve $L^{\#}$ dışbükeyliği 2000'de Fujishige ve Murota tarafından tanıtılmıştır.

Birden fazla tamsayı değişkenli L, $L^{\#}$, M, ve $M^{\#}$ fonksiyonlarının dışbükeylik sonuçları bu fonksiyonlara karşılık gelen Hessian matrisler kullanılarak Hirai ve Murota (2004) ile Moriguchi ve Murota (2005) tarafından elde edilmiştir. L, $L^{\#}$, M, ve $M^{\#}$ fonksiyonlarının dışbükeyliğinin ve içbükeyliğinin önemli uygulamaları arasında ağ (network) akış (flow) analizi vardır (detaylar için Murota (2003) bakınız). Doğrusal olmayan tamsayı değişkenli ve tamsayı değerli fonksiyonların dışbükeylik özellikleri teorik ve algoritmik yaklaşımlarla Murota'nın (1996) yanı sıra Favati ve Tardella (1990) tarafından incelenmiştir.

S kümesinin $\mathbb{Z}^n$ uzayının bir alt kümesi olduğunu varsayalım. Yüceer (2002) bütün $x, y \in S$ ile $\alpha > 0$ değerleri için $f : S \to \mathbb{R}$ tipindeki bir fonksiyonun dışbükeyliğini Miller (1971) tarafından tanımlanan dışbükeyliği kullanarak

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geq \min_{u \in N(z)} f(u) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlamıştır öyle ki

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + (1-\alpha) y, \\ N(z) &= \{u \in S : \|u - z\| < 1\}, \\ \|u\| &= \max\{|u_i| : 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Bu dışbükeylik tanımı fonksiyonun ikinci ön farklılıklarının herbir bileşenine göre pozitif olmasını ve ikinci farklardan oluşan simetrik matrisinin çarpraz bileşenlerine göre pozitif tanımlı olmasını sağlar.

Tokgöz vd (2011), bir $D \subset \mathbb{Z}^n$ kümesinin yoğun dışbükeyliğini bu kümenin bir reel dışbükey set ile $\mathbb{Z}^n$ uzayanın bir alt kümesinin kesişiminden oluşması şeklinde tanımlamıştır öyle ki bu D kümesi üzerinde tanımlı olan fonksiyonun ikinci farkı tanımlı olsun. Bu varsayıma ek olarak iki yoğun kümenin kesişimlerinin ve birleşimlerininde yoğun kümeler olduğu varsayılmıştır. Sıradaki tanımlanacak n-tamsayı değişkenli fonksiyon dışbükeyliği belirli bir sınıfa mensup fonksiyonlar için geçerlidir.

Tanım 3.1.1. Bir $D \subset \mathbb{Z}^n$ kümesinde tanımlı $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun yoğun ayrık dışbükey olması için

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlı olduğu D kümesinin herbir alt kümesinde pozitif tanımlı olması şartı sağlanmalıdır öyle ki A simetrik pozitif tanımlı bir matris olmalıdır. $-f$ fonksiyonu yoğun dışbükey ise f fonksiyonu yoğun içbükey fonksiyon olarak tanımlanır. A matrisine f fonksiyonunun katsayı matrisi adı verilir (Tokgöz vd 2011).

Önerme 3.1.1. $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $D \subseteq \mathbb{Z}^n$ yoğun bir dışbükey kümesinde tanımlı yoğun dışbükey fonksiyon olduğunu varsayalım. f fonksiyonunun ikinci farklarından oluşan $A = [\nabla_{ij}(f)]_{n\times n}$ katsayı matrisi simetriktir (Tokgöz vd 2011).

İspat: İlk önce $[\nabla_{ij}(f)]_{n\times n}$ matrisinin simetri özelliğini ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
\nabla_{ij} f(x) &= \nabla_i \left(f(x+e_j) - f(x)\right) \\
&= f(x+e_i+e_j) - f(x+e_i) - f(x+e_j) + f(x) \\
&= \nabla_j \left(f(x+e_i) - f(x)\right) \\
&= \nabla_j \left(\nabla_i f(x)\right) \\
&= \nabla_{ji} f(x)
\end{aligned}$$

sağlanır. A matrisinin simetri özelliğini kullanarak bütün i ve j değerleri için

$$\begin{aligned}
\nabla_{ij}(f(x)) &= \frac{1}{2}\nabla_i \left((x+e_j)^T A (x+e_j) - x^T A x\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla_i \left(x^T A (x+e_j) + e_j^T A (x+e_j) - x^T A x\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla_i \left(x^T A x + x^T A e_j + e_j^T A x + e_j^T A e_j - x^T A x\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla_i \left(x^T A e_j + e_j^T A x + e_j^T A e_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((x+e_i)^T A e_j - x^T A e_j + e_j^T A (x+e_i) - e_j^T A x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^T A e_j + e_i^T A e_j - x^T A e_j + e_j^T A x + e_j^T A e_i - e_j^T A x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e_i^T A e_j + e_j^T A e_i\right) \\
&= a_{ij}
\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$A_f = [a_{ij}]_{n\times n} = [\nabla_{ij} f]_{n\times n}$$

eşitliğiyle ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.2. 3.1.1 önermesinde yer alan $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun katsayı matrisi olan A_f, dışbükey fonksiyonlar için tanımlanan Hessian matrisi aşağıda sıralanan karakteristik özellikleri sağlar:

1. $f_i : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $i = 1, 2$ için yoğun dışbükey olsunlar. A_{f_i} matrisi f_i fonksiyonlarına göre lineerdir: $A_{f_1+f_2} = A_{f_1} + A_{f_2}$.
2. A_f simetriktir.
3. f fonksiyonunun düzlemsel olması durumunda $A_f = \mathbf{0}$ (Tokgöz vd 2011).

İspat:

$$A_{f_1+f_2} = [\nabla_{ij} (f_1 + f_2)]_{n\times n} = [\nabla_{ij} (f_1)]_{n\times n} + [\nabla_{ij} (f_2)]_{n\times n} = A_{f_1} + A_{f_2}$$

sağlanır. Dolayısıyla yoğun fonksiyonların ikinci fark operatörüde f fonksiyonuna göre lineerdir ve birinci koşul ispatlanmış olur.

İkinci koşulun ispatı 3.1.1 önermesinde gösterilmiştir. Yoğun tamsayı değişkenli

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

tipindeki lineer fonksiyonlar göz önüne alındığında bütün i ve j değerleri için $\nabla_i (f) = b_i$ ve $\nabla_{ij} (f) = 0$ olması nedeniyle ikinci fark operatörü sıfır değerine sahiptir. İspat tamamlanır.

Teorem 3.1.1. Bir $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun yoğun dışbükey olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Hessian matrisinin D kümesinde pozitif tanımlı olmasıdır (Tokgöz vd 2011).

İspat: Herbir $x \in \mathbb{Z}^2$ için

$$f(x) = x^T A_f x = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j$$

tipindeki fonksiyonları bütün $i, j \in \{1, 2\}$ değerleri için göz önüne alalım. Teoremin 2×2 tipindeki matrisler için ispatlanması genel durumdaki $n \times n$ matrisinin ispatlanması için yeterlidir çünkü bu genel durumun ispatı reel dışbükeylikte olduğu gibi 2×2 matrislerin kullanımıyla elde edilir. A_f matrisinin pozitif tanımlı olduğunu varsayalım.

1. Durum: $x = (1, 0)$ olduğunu varsayarak

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11} > 0$$

elde edilir.

2. Durum: $x = (0, 1)$ olduğunu varsayarak

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{22} > 0$$

elde edilir. Herbir $x \neq 0$ için $A_f > 0$ olduğunu göstermek için aşağıdaki farklı durumları göz önünde bulunduruyoruz.

1. Durum: $x_1 \neq 0$ iken $x = (x_1, 0)$ olduğunu varsayarak

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 > 0 \Leftrightarrow a_{11} > 0$$

elde edilir.

2. Durum: $x_2 \neq 0$ iken $x = (x_1, x_2)$ olduğunu ve bazı $t \in \mathbb{R}$ için $x_1 = tx_2$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla

$$f(x) = \left(a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22}\right) x_2^2$$

olup

$$f\left(x\right)>0\Leftrightarrow\varphi\left(t\right)=a_{11}t^{2}+2a_{12}t+a_{22}>0$$

sağlanır. Ek olarak

$$\begin{aligned}\varphi'\left(t\right) &= 2a_{11}t+2a_{12}=0\Rightarrow t^{*}=-\frac{a_{12}}{a_{11}}\\ \varphi''\left(t\right) &= 2a_{11}\end{aligned}$$

sağlanır. Eğer $a_{11}>0$ ise o zaman

$$\begin{aligned}\varphi\left(t\right) &\geq \varphi\left(t^{*}\right)=\varphi\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)=\frac{-a_{12}^{2}}{a_{11}}+a_{22}\\ &= \frac{1}{a_{11}}\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $a_{11}>0$ şartı sağlanır ve yukarıda belirtilen determinant değeri pozitif ise o zaman bütün $t\in\mathbb{R}$ için $\varphi\left(t\right)>0$ eşitsizliği sağlanır. Tersine, eğer $f\left(x\right)>0$ eşitsizliği herbir $x\neq0$ için sağlanırsa o zaman bazı t değerleri için $\varphi\left(t\right)>0$ eşitsizliği sağlanır, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\varphi\left(t\right) &> 0\Rightarrow a_{11}>0 \text{ ve } 4a_{12}^{2}-4a_{11}a_{22}=-4\det\left(A_{f}\right)<0,\\ \varphi\left(t\right) &> 0\Leftrightarrow a_{11}>0 \quad\text{ve}\quad \det\left(A_{f}\right)>0\end{aligned}$$

sağlanıp ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.1.1. Yoğun dışbükey fonksiyona örnek olarak $f:\mathbb{Z}^{2}\rightarrow\mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $f\left(x,y\right)=e^{x}+e^{y}$ fonksiyonunu

$$S_{1}=\left\{\left(0,0\right),\left(1,1\right),\left(0,1\right),\left(0,2\right),\left(1,0\right),\left(2,0\right)\right\}\subset\mathbb{Z}^{2}$$

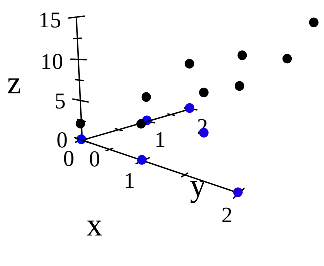
kümesinde göz önüne alalım. İlk önce f fonksiyonuna karşılık gelen tamsayı değişkenli ikinci dereceden polinomun elde edilip edilemeyeceğinin sorgulanması gerekir. Bu ikinci dereceden fonksiyon

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + c \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\right) + b_1x_1 + b_2x_2 + c \end{aligned}$$

olup f fonksiyonuna karşılık gelen katsayıların hesaplanması önem kazanır. Bu şekilde tanımlanan L fonksiyonu S_1 kümesinde f fonksiyonuna karşılık gelir. Şimdi L fonksiyonunun katsayıları olan $a_{ij}, b_i,$ ve c değerlerini sıradaki denklem sistemini çözerek elde edelim:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= e^0 + e^0 = 2 = c \\ f(1,1) &= \frac{1}{2}\left(a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)(1) + a_{21}(1)(1) + a_{22}1^2\right) + b_1(1) + b_2(1) + c \\ f(0,1) &= \frac{1}{2}a_{22}(1)^2 + b_2(1) + c \\ f(0,2) &= \frac{1}{2}a_{22}(2)^2 + b_2(2) + c \\ f(1,0) &= \frac{1}{2}a_{11}(1)^2 + b_1(1) + c \\ f(2,0) &= \frac{1}{2}a_{11}(2)^2 + b_1(2) + c \end{aligned}$$

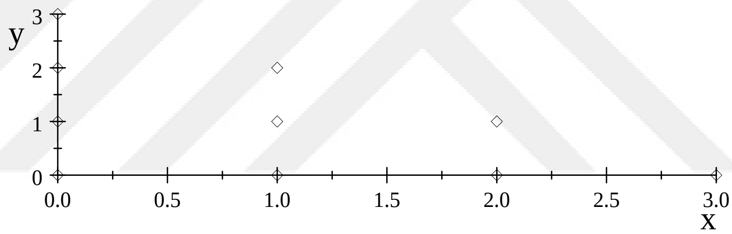
Temel lineer cebirden bilindiği üzere bu denklem sisteminin çözümü olduğu sürece f fonksiyonun S_1 kümesinde ikinci dereceden bir fonksiyon temsilcisi vardır. Bu değerler aynı zamanda f fonksiyonun S_1 kümesindeki Hessian matrisinin elde edilmesinde kullanılır. Yukarıda tanımladığımız tamsayı değişkenli f fonksiyonuna S_1 kümesinde karşılık gelen L fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.1 $f(x,y) = e^x + e^y$ fonksiyonunun S_1 kümesindeki görünümü.

şeklindedir. Hesaplamalardan da anlaşılacağı üzere bir f fonksiyonu tanım kümesi S üzerinde ikinci dereceden tamsayı değişkenli polinom şeklinde ifade edilebilirse bu durumda f fonksiyonunun S kümesinde Hessian matrisi elde edilebilir. f fonksiyonunun tanım kümesinin $S \subset \mathbb{Z}^n$ olduğunu varsayarsak bu fonksiyonunun S üzerinde ikinci dereceden bir temsilcisinin belirlenmesi için ve dolayısıyla ikinci farkının tanımlı olması için S kümesinde en az $\frac{1}{2}\left(n^2+3n+2\right)$ elemanın mevcut olması gerekir. Bu nedenle tezin geri kalan kısmında herhangi bir yoğun dışbükey S seti göz önüne alındığı zaman S kümesinde tanımlı olan fonksiyonların ikinci farkları hesaplanabilecek kadar noktanın mevcut olduğunu varsayacağız.Yukarıda verilen örneğin devamı olarak S_1 setini genişleterek S_3 kümesini tanımlıyoruz:

$$S_3 = S_1 \cup S_2 = \{(0,0),(1,1),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0)\} \cup \{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}$$

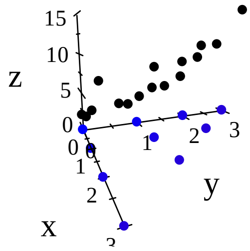


Şekil 3.2 S_3 setinin grafiği

Bu durumda

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(1,0),(2,0),(3,0),(1,1),(1,2),(2,1)\}, \\ D_2 &= \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(2,1)\} \end{aligned}$$

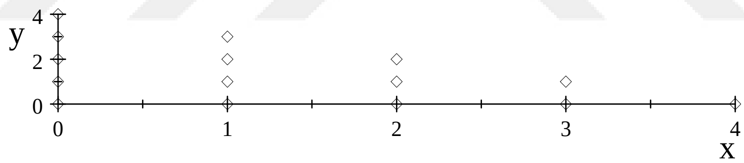
şeklinde tanımlanan alt kümelerinde f fonksiyonunun S_3 komşuluğunda iki tane ikinci dereceden tamsayı değişkenli temsilcisi olup karşılık gelen ikinci farkları elde edilebilir. Bu iki fonksiyon f fonksiyonunun S_3 kümesindeki yoğun dışbükeyliğinin elde edilmesinde kullanılır.



Şekil 3.3 $f(x,y) = e^x + e^y$ fonksiyonunun S_3 kümesindeki görünümü.

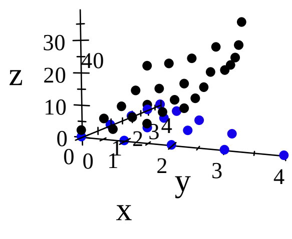
Bu şekilde S_3 seti genişletilerek f fonksiyonunun $\mathbb{Z}^2$ uzayının tamamındaki yoğun dışbükeyliği sorgulanabilir. Bu genişletmeye örnek olarak S_3 kümesini aşağıdaki şekilde tanımlı S_4 kümesine genişletelim:

$$S_4 = S_3 \cup S_5 = \{(0,0),(1,1),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0),(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\} \cup \{(4,0),(3,1),(2,2),(1,3),(0,4)\}$$



Şekil 3.4 S_4 kümesinin grafiği.

Tamsayı değişkenli $f(x,y) = e^x + e^y$ fonksiyonunun S_4 kümesindeki grafiği aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.5 $f(x,y) = e^x + e^y$ fonksiyonunun S_4 kümesindeki görünümü.

Bu şekilde S_4 kümesinin $\mathbb{Z}^2$ uzayına genişletilmesi sonucu $f = e^x + e^y$ fonksiyonuna karşılık gelen katsayı matrisi bu fonksiyonun ikinci farklarından oluşup aynı zamanda bu fonksiyonun Hessian matrisi şeklini alır:

$$H = \begin{bmatrix} e^x\left(e^2 - 2e + 1\right) & 0 \\ 0 & e^y\left(e^2 - 2e + 1\right) \end{bmatrix}$$

Bu Hessian matrisi herbir $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ için pozitif tanımlıdır (Tokgöz 2012).

3.2 Tamsayı Değişkenli Fonksiyon Optimizasyonu

Bu bölüm yoğun dışbükey fonksiyonların minimizasyonu ile ilgili tanımlar ve sonuçlardan oluşmaktadır. Bu optimizasyon sonuçları C^1 özelliğine sahip yoğun dışbükey fonksiyonlar için elde edilecektir. $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ tipindeki yoğun dışbükey fonksiyonların C^1 özelliğinden kasıt f fonksiyonunun reel boyutlu uzaya uzantısı olan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun C^1 olmasıdır. Bu reel uzantı verilen fonkiyona göre değişir ancak değişmeyen bir özelliği f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ uzayındaki uzantısının $\mathbb{Z}^n$ uzayındaki karşılığı ile aynı olmasıdır. Bazı durumlarda bu uzantı fonksiyonu verilen cebirsel ifadesinin değişkenlerinin $x \in \mathbb{Z}^n$ yerine $x \in \mathbb{R}^n$ varsayımı ile mümkündür. Örneğin $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ için $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$ fonksiyonunun reel uzantısı $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ varsayımı sonucu yine kendisidir. Bu bölümün geri kalan kısmında yoğun dışbükey fonksiyonlar için yerel ve genel minimum kavramlarını tanımladıktan sonra C^1 yoğun dışbükey fonksiyonlar için yerel ve genel minimum sonuçları gösterilecektir. Yoğun içbükey fonksiyonların maximum değer hesaplamaları ve sonuçları yoğun dışbükey fonksiyonların minimum değer hesaplamaları ve sonuçlarına benzer şekilde elde edilir.

Bütün i indeks değerleri için $S_i \neq \emptyset$ setinin f fonksiyonunun ikinci dereceden polinom karşılığının tanımlı olduğu yeterince küçük bir set olduğunu varsayalım öyle ki $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i = \mathbb{Z}^n$ ve $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} S_i = \emptyset$. Aynı zamanda J sonlu bir indeks seti ve $\{s_i\}$ setininde $\mathbb{Z}^n$ uzayında tekil set olduğunu varsayalım. Birinci dereceden kısmi türevlenebilir $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun **kısmi türev operatörü**

$$\partial f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1. Bir sayının C^1 olan $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ yoğun dışbükey fonksiyonunun $\mathbb{Z}^n$ uzayında **yerel minimum değeri** olması için o sayının f fonksiyonunun $\underset{i \in I}{\cup} S_i$ komşuluğundaki minimum değerinin olmasının yanı sıra $N = \underset{j \in J}{\cup} \left(\underset{i \in I_j}{\cup} S_i \right)$ komşuluğunda bütün $i, j \in \mathbb{Z}^+$ için minimum değeri ile aynı olması şartı aranır. f fonksiyonunun **genel minimum değeri** ise $\mathbb{Z}^n$ uzayındaki tanım kümesinde f için elde edilebilecek en küçük değeridir (Tokgöz vd 2011).

C^1 özelliğine sahip $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ yoğun dışbükey fonksiyonunun yerel minimum kümesini

$$\Psi = \{\rho = (\rho_1, ..., \rho_n) : \rho_i \in \{\lceil \gamma_i \rceil, \lfloor \gamma_i \rfloor\} \subset \mathbb{Z} \text{ , } \forall i\} \subset \mathbb{Z}^n$$

şeklinde tanımlıyoruz öyle ki herbir $\gamma \in \mathbb{R}^n$ için $\partial f(\gamma) = 0$ sağlanır. Tanım kümesinin $\mathbb{Z}^n$ olması varsayımından dolayı f fonksiyonunun Ψ çözüm kümesinde $\rho_i = \lceil \gamma_i \rceil$ ve $\rho_i = \lfloor \gamma_i \rfloor$ değerleri mevcuttur.

Örnek 3.2.1. Reel değerli $\mathbb{Z}^2$ uzayında tanımlı

$$f(m,n) = \left(n - \frac{3}{100}m - \frac{1}{100} \right)^2 + \epsilon \left[(m-33)^2 + (n-1)^2 \right]$$

fonksiyonunu

$$\epsilon = \frac{1}{(33^2+1)\,100^2}$$

varsayımı ile ele alalım. Bu fonksiyonun Hessian matrisi olan

$$H = \begin{bmatrix} \frac{18}{10^4} + 2\epsilon & \frac{-6}{100} \\ \frac{-6}{100} & 2 + 2\epsilon \end{bmatrix}$$

pozitif tanımlıdır. f fonksiyonunun yerel minimum değerini $(0,0)$ noktasından başlayarak aramaya başlayalım. Yerel minimumu elde edebilmek için ilk önce tanım kümesinin

$$S_1 = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$$

olduğunu varsayalım. S_1 setinde f fonksiyonunun değeri $f(0,0) = 0.0002$ şeklindedir. Varsayalım

$$S_2 = \{(0,2), (1,1), (2,0)\}$$

sağlanır. S_2 kümesindeki f fonksiyonunun minimum değeri

$$\begin{aligned} f(0,2) &= 3.9602, \\ f(1,1) &= 0.92169, \\ f(2,0) &= 4.9883 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

hesaplamaları sonucunda $(2, 0, 4.988\,3 \times 10^{-3})$ olarak elde edilir. Tanım kümesini $N_2 = \bigcup_{1 \leq i \leq 2} S_i$ şeklinde genişletirsek N_2 kümesindeki yerel minimum $(0, 0, 0.0002)$ şeklinde elde edilir. Bu durumu genelleştirmek için

$$\begin{aligned} S_k &= \{(i,j) : \forall i,j \text{ için } k = i + j\}, \\ N_k &= \bigcup_{1 \leq l \leq k} S_l \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıyoruz. $N_{40} \subset \mathbb{Z}^2$ komşuluğunu göz önünde bulundurursak bu komşuluktaki yerel minimum değerinin N_{34} komşuluğundaki $(33,1)$ noktasında sıfır olarak elde edilebileceğini hesaplamak zor değildir. Bu yerel değerin hesaplanmasında yapılacak hesaplamalar algoritmik yöntemlerin takip edilmesi sonucunda zaman kaybının yanı sıra bir çok işlem hesaplamalarına neden olur. Algoritmik çözüm yerine f fonkiyonunun yerel yoğun dışbükeylik sonuçları elde edildikten sonra C^1 olmasından dolayı $\partial f = 0$ hesaplanarak yerel minimum değeri pratik bir biçimde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial m} &= -\frac{6}{100}\left(n - \frac{3}{100}m - \frac{1}{100}\right) + \frac{2}{(33^2+1)\,100^2}(m-33) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= 2\left(n - \frac{3}{100}m - \frac{1}{100}\right) + \frac{2}{(33^2+1)\,100^2}(n-1) = 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Bu hesaplamardanda görüleceği üzere $(m,n) = (33,1)$ noktası için yerel minimum elde edilir. Bu durumda yerel minimum değerinin genel minimum değeri olduğunu görmek zor değildir (Tokgöz 2012).

Lemma 3.2.1. $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $N \subset \mathbb{Z}^n$ tanım kümesinde C^1 yoğun dışbükey olduğunu varsayalım. Bu durumda $N \subset \mathbb{Z}^n$ setinde bir yerel minimuma sahiptir öyle ki

$$f_0 = \min_{\beta \in \Psi} \{f(\beta)\}$$

sağlanır (Tokgöz vd 2011).

İspat: $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $N \subset \mathbb{Z}^n$ tanım kümesinde C^1 yoğun dışbükey olduğunu varsayalım. Tanım 3.1 gereğince f fonksiyonu $f(x_0)$ yerel minimum değerine bir $S = \underset{i \in I}{\cup} S_i$ komşuluğunda sahiptir. N setinin tanımı gereği $\underset{i \in I}{\cup} S_i \subseteq N$ olup $f(x_0)$ aynı zamanda N komşuluğununda yerel minimumudur. Bilindiği üzere C^1 olan bir f fonksiyonunun yerel minimum değeri

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = 0$$

denklem sisteminin çözümü ile bütün i, $1 \leq i \leq n$, değerleri için elde edilir. İlk önce $\partial f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulacağız öyle ki bütün i değerleri için $\gamma_i \in \mathbb{R}$ değerlerinin varlığını gösterelim. Tanım kümesinin $\mathbb{Z}^n$ olduğunu göz önünde bulundurarak yerel minimum değerlerini elde etmek için γ_i vektör bileşenlerinin tavan $\lceil \gamma_i \rceil$ ve zemin $\lfloor \gamma_i \rfloor$ değerlerini bütün i, $1 \leq i \leq n$, değerleri için hesaplamamız gerekir. Bu çözüm bize bir yerel minimum noktası olan $\beta \in \Psi$ verir öyle ki $f_0 = \min_{\beta \in \Psi} \{f(\beta)\}$ sağlanır. İspat tamamlanır.

Lemma 3.1 göz önüne alınacak olursa f fonksiyonunun β minimum değerini Ψ setinde elde etmemiz gerekir. Ψ setinin tanımı gereği $\partial f(x) = 0$ şartının sağlanması aranır dolayısıyla Ψ setinde bir β değerinin olduğunu varsayıyoruz öyle ki $\partial f(x) = 0$ eşitliği sağlanır. Bu şekilde bir β değerinin bulunmaması durumunda f_0 şeklinde bir değerin bulunamayacağı açıktır.

Sıradaki teorem reel dışbükey analizinde reel değişkenli dışbükey fonksiyonlar için elde edilen sonuca benzer bir sonuçtur.

Teorem 3.2.1. $f:\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ fonsiyonunun C^1 yoğun dışbükey olduğunu varsayalım. f fonksiyonunun yerel ve genel minimum setleri aynı settir (Tokgöz vd 2011).

İspat: $f:\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ fonsiyonunun C^1 yoğun dışbükey olduğunu, $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} S_i = \mathbb{Z}^n$, ve $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} S_i = \emptyset$ olduğunu varsayalım öyle ki herbir S_i seti bütün i değerleri için f fonksiyonunun ikinci dereceden polinomlarının tanımlı olduğu yeterince küçük set olsun. Ω_1 ve Ω_2 setleri sırasıyla f fonksiyonunun $\mathbb{Z}^n$ uzayındaki yerel ve genel minimum noktalarının setleri olsunlar. f fonksiyonunun genel minimum değerlerinin $\mathbb{Z}^n = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} S_i$ uzayında var olduğunu varsayalım. f fonksiyonunun sonlu sayıda S_i setlerinden oluşan bir $\underset{i\in I_0}{\cup} S_i$ komşuluğunda genel minimum noktaları vardır. Bu durumda bütün $j, 1 \leq j \leq n$, değerleri için $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0$ eşitliğinin çözümü sonucu S_i setlerindeki yerel minimum noktaları elde edilir. Dolayısıyla bütün $x \in \Omega_2$ değerleri için en az bir $y \in \Omega_1$ tamsayı vektörü bulunabilir öyle ki $\min\limits_{x\in\Omega_1} f(x) = f(y)$ eşitliği sağlanır ve $\underset{i\in I_0}{\cup} S_i \subset N \subset \mathbb{Z}^n$ olmasından dolayı $\Omega_2 \subset \Omega_1$ elde edilir.

Şimdi bir x_0 vektörünün $\mathbb{Z}^n$ uzayının bir yerel minimumu olduğunu ve bu vektörün bir $S = \underset{i\in I_1}{\cup} S_i$ komşuluğunda var olduğunu varsayalım öyle ki $x_0 \notin \Omega_2$ olsun. Dolayısıyla x_0 vektörü S setinde yerel minimum olup genel minimum özelliğine sahip değildir. Bu durumdan dolayı $N = \underset{j\in J}{\cup}\left(\underset{i\in I_j}{\cup} S_i\right) \supset S$ setinde x_1 ve x_2 vektörleri bulunabilir öyle ki $f(x_0) > f(x_1) > f(x_2)$ olup x_2 vektörü N komşuluğunun yeni yerel minimumudur ve x_0 vektörü N setinin yerel minimumu değildir. Bu şekilde yerel komşuluğu genişleterek $\mathbb{Z}^n$ uzayını elde edip bu uzayda bir D yerel komşuluğu bulabiliriz öyle ki bu komşulukta yerel minimum noktaları olan $x \in \Omega_1$ bütün $\overline{x} \in \mathbb{Z}^n - D$ değerleri için $f(x) < f(\overline{x})$ eşitsizliğini sağlar. $\mathbb{Z}^n$ uzayına olan bu genişlemenin sonucunda x_0 vektörünün herbir set genişlemesi sonucu $\mathbb{Z}^n$ uzayının yerel minimum olarak kalmaması x_0 vektörünün $\mathbb{Z}^n$ uzayının yerel minimum olması ile çelişir dolayısıyla $x \in \Omega_2$ olup $\Omega_1 \subset \Omega_2$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlamış olur.

Örnek 3.2.2. Yüceer (2002) Rosenbrock fonksiyonuna benzer şekilde $k, \mu \in \mathbb{Z}$ için

$$g(k,\mu) = 25(2\mu - k)^2 + \frac{1}{4}(2-k)^2 \tag{3.3}$$

fonksiyonunu ele alıp bu fonksiyonun tanım kümesinin reel uzaydan tamsayı uzayına değiştirilmesi durumunda dışbükeylik koşullarını sağlamadığını göstermiştir. Bu bölümde ilk önce (3.3) eşitliği ile verilen fonksiyonunun yoğun dışbükey olduğunu ve daha sonra yerel minimum nokta kümesinin genel minimum nokta kümesi ile aynı olduğunu göstereceğiz. $g(k,\mu)$ fonksiyonun birinci ve ikinci değişkenlerine göre ikinci farkları

$$\begin{aligned}
\nabla_{11} g(k,\mu) &= 25(2\mu - k - 2)^2 + \frac{1}{4}k^2 - 50(2\mu - k - 1)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}(1-k)^2 + 25(2\mu - k)^2 + \frac{1}{4}(2-k)^2 \\
&= \frac{101}{2} > 0 \\
\nabla_{22} g(k,\mu) &= 25(2\mu + 4 - k)^2 - 50(2\mu + 2 - k)^2 + 25(2\mu - k)^2 \\
&= 200
\end{aligned}$$

şeklindedir. Hessian matrisinin simetri özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla_{12} g &= \nabla_{21} g = 25(2\mu + 2 - k - 1)^2 - 25(2\mu - k - 1)^2 \\
&\quad -25(2\mu + 2 - k)^2 + 25(2\mu - k)^2 \\
&= -100
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\det(H) = 200\frac{101}{2} - (100)^2 = 100$$

olup bu hesaplamalar Hessian matrisinin pozitif tanımlı olduğunu gösterir. Teorem 3.1 gereğince (3.3) eşitliği ile tanımlanan fonksiyon $\mathbb{Z}^2$ uzayında yoğun dışbükeydir. Bir fonksiyonun yoğun dışbükeyliğinin elde edilmesinin önemli uygulamalarından birisi karşılık gelen optimizasyon sonuçlarının elde edilebilmesidir, yani yerel ve genel minimum noktaları arasındaki bağın kurulmasıdır. Yüceer (2002) kendi tanımını kullanarak (3.3) eşitliği ile verilen fonksiyonun tamsayı değişkenli dışbükey olmadığını gösterilmiştir ancak yukarıdaki hesaplamalardanda görüldüğü üzere (3.3) ile verilen fonksiyon yoğun dışbükeydir. Dolayısıyla Yüceer (2002) tarafından kullanılan tanım aracılığıyla optimizasyon sonuçlarının elde edilmesi kolay olmazken yoğun dışbükeylik kullanılarak (3.3) fonksiyonunun optimizasyon sonuçları kolaylıkla elde edilebilir. Algoritmik olarak Miller (1971) tarafından tanımlanan dışbükeylik ve karşılık gelen optimizasyon sonuçları ile yoğun dışbükeylik tanımı ve karşılık gelen optimizasyon hesaplamaları arasında pratik hesaplamalar açısından fark vardır. Lemma 3.1 göz önüne alınacak olursa yoğun dışbükey olan fonksiyonlar için elde edilebilecek minimum noktaların sayısı sonsuz olabilir ancak elde edilen minimum fonksiyon değeri tektir. Şimdi (3.3) fonksiyonu için elde edilebilecek yerel minimum değerlerinin aynı zamanda genel minimum olduğunu gösterelim. Açık olarak, g fonksiyonu C^1 olup

$$\partial g\,(k,\mu) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial k} = -50(2\mu - k) - \frac{1}{2}(2-k) = 0 \\ \qquad \frac{\partial g}{\partial \mu} = 100(2\mu - k) = 0 \end{cases}$$

bu iki denklemin çözümü sonucu $k = 2$ ve $\mu = 1$ elde edilir. Dolayısıyla minimum değer $g(2,1) = 0$ olup verilen fonksiyon C^1 yoğun dışbükey fonksiyon olduğu için yerel minimum seti olan $\{(2,1,0)\}$ aynı zamanda genel minimum setidir (Tokgöz vd 2011).

4. YOĞUN KARMA DIŞBÜKEYLİK ve OPTİMİZASYON

Bu ünitede tam ve reel (karma) değişkenli fonksiyonlar ile bu fonksiyonların tanımlı olduğu set olgusu tanımlanıp literatürde bilinen sonuçlar özetlenecektir. Buna ek olarak Tokgöz (2012) tarafından elde edilen yoğun karma dışbükey (YKD) set ve fonksiyon tanımlarının yanı sıra YKD ile ilgili elde edilen literatürdeki bazı sonuçlar gösterilecektir. YKD olan ve olmayan fonksyonlara örnek bu ünitenin sonunda verilecektir. Karma değişkenli fonksiyonların uygulumaları queueing (sıralama) ve network (ağ) teorilerinde yaygın bir biçimde görülmektedir.

4.1 Tanımlar ve Sonuçlar

$V_1 \subseteq \mathbb{Z}^n$ kümesinin yoğun dışbükey set ve $V_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ kümesininde reel dışbükey set olduklarını varsayalım. Bir V setinin YKD seti olması için $V = V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ tipinde bir set olması şartı aranır. Aksi ifade edilmediği sürece tezin geri kalan kısmında g fonksiyonunun reel değişkenlerine göre C^2 fonskiyon olduğunu varsayıyoruz. Tezin devamında tamsayı değişkenleri için i ve j indekslerini, reel değişkenler için ise k ve l indeksleri kullanılacaktır.

Tanım 4.1.1. Bir $g : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun karma değişkenli dışbükey $V \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ setinde YKD olması için g fonksiyonunun V setindeki ikinci dereceden temsilcisi olan

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x^T Ax + x^T B^T y + \frac{1}{2}y^T Cy + b^T x + c^T y + d \tag{4.1}$$

fonksiyonun pozitif tanımlı olması şartı aranır öyle ki A ve C katsayı matrisleri sırasıyla x ve y değişkenlerine göre simetriktirler. $-g$ fonksiyonunun YKD olması durumunda g fonksiyonuna yoğun karma içbükey fonksiyon denir (Tokgöz 2012).

Önerme 4.1.1. $g : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $V \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ karma dışbükey setinde (4.1) eşitliği şeklinde tanımlandığını varsayalım. g fonksiyonunun katsayı matrisi olan

$$H_g = \begin{bmatrix} [\nabla_{ij}(g)]_{n\times n} & \left[\frac{\partial}{\partial y_k}\nabla_j(g)\right]_{n\times m} \\ \left[\nabla_i \frac{\partial}{\partial y_l}(g)\right]_{m\times n} & \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_l}\right]_{m\times m} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

simetrik bir matristir (Tokgöz 2012).

İspat: H_g matrisinin tamsayı değişkenlerine göre olan $[\nabla_{ij}(g)]_{n\times n}$ matris kısmının simetrisi Önerme 3.1 ile ispatlanmıştır. Reel değişkenlere göre

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_l} = \frac{\partial^2 g}{\partial y_l \partial y_k}$$

şartı sağlandığı için reel değişkenlere görede H_g matrisinin simetrisi açıktır. Şu durumda H_g matrisinde simetrinin gösterilmesi diğer bir bölge g fonksiyonunun birinci kısmi türevlerinin birinci farkları ile g fonksiyonunun birinci farklarının birinci kısmi türevlerine eş olmasıdır. Bu koşulda bütün j ve k değerleri için

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_k}(\nabla_j g(x,y)) &= \frac{\partial}{\partial y_k}(g(x+e_j,y) - g(x,y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_k} g(x+e_j,y) - \frac{\partial}{\partial y_k} g(x,y) \\ &= \nabla_j \frac{\partial}{\partial y_k} g(x,y) \end{aligned}$$

olup matris formunda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_k}\nabla_j(g(x,y)) &= \frac{\partial}{\partial y_k}\left((x+e_j)^T B^T y - x^T B^T y\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_k}\left(x^T B^T y + e_j^T B^T y - x^T B^T y\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_k}\left(e_j^T B^T y\right) \\ &= b_{jk} \end{aligned}$$

sağlanır. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ simetrik olup Önerme 3.1 gereğince

$$\nabla_{ij}(g(x)) = a_{ij}$$

bütün i ve j değerleri için sağlanır. Dolayısıyla

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}=\left[\nabla_{ij}g\right]_{n\times n}$$

sağlanır. Basit hesaplamalar sonucu

$$\left[\frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_l}\right]_{m\times m}=C$$

elde edilip H_g matrisinin simetrikliği ispatlanmış olur.

Önerme 4.1.2. Önerme 4.1.1 de kullanılan $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun katsayı matrisi olan H_g Hessian matrisi reel Hessian matrisi ile aynı özelliklere sahiptir. Dolayısıyla sıradaki üç özellik sağlanmış olunur:

1. H_g matrisi g YKD fonksiyonlarına göre lineerdir: $g_t : W \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının YKD olması durumunda $H_{g_1+g_2}=H_{g_1}+H_{g_2}$ eşitliği saglanır.
2. H_g simetriktir.
3. g fonksiyonunun karma düzlemsel (lineer) olması durumunda H_g matrisi ile 0 matrisi özdeştir (Tokgöz 2012).

İspat: $t=1,2$ değerleri için $g_t : W \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının karma yoğun olması ve W setinin karma yoğun olması durumunda karşılık gelen katsayı matrisi

$$H_{g_t}=\begin{bmatrix} A_{g_t} & B_{g_t} \\ B_{g_t} & C_{g_t} \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Ek olarak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_k}\nabla_j\left(g_1+g_2\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y_k}\left\{g_1\left(x+e_j,y\right)+g_2\left(x+e_j,y\right)-\left[g_1(x,y)+g_2(x,y)\right]\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial y_k}\left(g_1\left(x+e_j,y\right)-g_1(x,y)\right)+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(g_2\left(x+e_j,y\right)-g_2(x,y)\right)
\end{aligned}$$

olup bütün $(x, y) \in W$ için

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial y_k}\nabla_j\left(g_1+g_2\right)\right]_{n\times m} &= \left[\frac{\partial}{\partial y_k}\nabla_j\left(g_1\right)\right]_{n\times m}+\left[\frac{\partial}{\partial y_k}\nabla_j\left(g_2\right)\right]_{n\times m}\\ &= B_{g_1}+B_{g_2}\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla Önerme 4.1.1'de elde edilen simetri özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}H_{g_1+g_2} &= \begin{bmatrix}\left[\nabla_{ij}\left(g_1+g_2\right)\right]_{n\times n} & \left[\frac{\partial}{\partial y_k}\nabla_j\left(g_1+g_2\right)\right]_{n\times m}\\ \left[\frac{\partial}{\partial y_k}\nabla_j\left(g_1+g_2\right)\right]_{m\times n} & \left[\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_l}\left(g_1+g_2\right)\right]_{m\times m}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A_{g_1+g_2} & B_{g_1}+B_{g_2}\\ B_{g_1}+B_{g_2} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial y_k\partial y_l}+\frac{\partial^2 g_2}{\partial y_k\partial y_l}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A_{g_1}+A_{g_2} & B_{g_1}+B_{g_2}\\ B_{g_1}+B_{g_2} & C_{g_1}+C_{g_2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A_{g_1} & B_{g_1}\\ B_{g_1} & C_{g_1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_{g_2} & B_{g_2}\\ B_{g_2} & C_{g_2}\end{bmatrix}\\ &= H_{g_1}+H_{g_2}\end{aligned}$$

bulunur öyle ki bu sayede ikinci fark operatörünün yoğun karma fonksiyonlar için lineer olma özelliğide ispatlanmıştır. Simetri özelliği Önerme 4.1.1'de ispatlanmıştır.

Karma düzlemsel fonksiyonlar olarak bahsedilen

$$g\left(x, y\right)=\sum_{i=1}^{n} d_i x_i+\sum_{k=1}^{m} w_k y_k$$

tipindeki fonksiyonların ikinci fark operatörü sıfırdır çünkü bütün i ve j değerleri için $\nabla_i\left(g\right)=b_i$ ve $\nabla_{ij}\left(g\right)=0$ elde edilir. Benzer şekilde bütün i, k, ve l değerleri için $\nabla_i\frac{\partial}{\partial y_k}=0$ ve $\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_l}=0$ sağlanır. İspat tamamlanır.

Teorem 4.1.1. Lineer olmayan $g : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun YKD olması için gerek ve yeter şart g fonksiyonuna karşılık gelen Hessian matrisinin V tanım kümesinde pozitif tanımlı olmasıdır (Tokgöz 2012).

İspat: $m = 0$ olması durumunda ispat 3.1 teoreminin ispatından açıktır. $n = 0$ olması durumunda ise Teorem 4.1 reel analizde yaygın olarak bilinmektedir. Şu durumda

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{2}x^T Ax + x^T B^T y + \frac{1}{2}y^T Cy \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

tipindeki YKD fonksiyonlarını göz önüne alacağız öyle ki $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Söz konusu teorem 2×2 matrisler için ispatlanacaktır ve $(n+m) \times (n+m)$ matrisleri içinde benzer şekilde ispatlanabilir. $z = (x, y)$ olduğunu varsayalım. Önce H_g matrisinin pozitif tanımlı olduğunu varsayalım.

1. Durum: Varsayalım $z = (1, 0)$, dolayısıyla

$$g(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a > 0$$

sağlanır.

2. Durum: Varsayalım $z = (0, 1)$, dolayısıyla

$$g(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = c > 0$$

sağlanır. Herhangi $z \neq 0$ değeri için $H_g > 0$ olduğunu göstermek için sıradaki durumları göz önüne alacağız:

1. Durum: Eğer $x \neq 0$ için $x = (x, 0)$ ise bu durumda

$$g(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = ax^2 > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

sağlanır.

2. Durum: Eğer $y \neq 0$ ve bazı $t \in \mathbb{R}$ değerleri için $x = ty$

$$g(z) = \left(at^2 + 2bt + c\right) y^2$$

olup

$$g(z) > 0 \Leftrightarrow \varphi(t) = at^2 + 2bt + c > 0$$

sağlanır öyle ki

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= 2at + 2b = 0 \Rightarrow t^* = -\frac{b}{a} \\
\varphi''(t) &= 2a
\end{aligned}$$

sağlanır. Eğer $a > 0$ ise o zaman

$$\varphi(t) \geq \varphi(t^*) = \varphi\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^2}{a} + c = \frac{1}{a}\det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

sağlanır. Dolayısıyla $a > 0$ olması durumunda ve üstteki eşitlikteki determinant pozitif ise o zaman bütün $t \in \mathbb{R}$ değerleri için $\varphi(t) > 0$ sağlanır. Tersine, eğer bütün $z \neq 0$ değerleri için $g(z) > 0$ sağlanır ise o zaman bazı t değerleri için $\varphi(t) > 0$ olur dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &> 0 \Rightarrow a > 0, \text{ ve } 4b^2 - 4ac = -4\det(H_g) < 0, \\
\varphi(t) &> 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ ve } \det(H_g) > 0
\end{aligned}$$

sağlanır ki bu da ispatı tamamlamış olur.

YKD fonksiyonlarının minimizasyon sonuçlarının elde edilmesi için bu fonksiyonların bütün değişkenlerine göre C^1 olmasını varsayıyoruz. YKD fonksiyonları için yerel ve genel minimum nokta ibarelerini tanımladıktan sonra YKD fonksinyonları için optimizasyon sonuçları ispatlanacaktır. Yoğun karma değişkenli içbükey fonksiyonların maksimum değerleri benzer şekilde elde edilir.

Şimdi $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \times \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ olduğunu varsayıyoruz öyle ki $\emptyset \neq S_i \times R_j$ seti g fonksiyonunun ikinci dereceden temsilcisi olan ve (4.1) eşitliğiyle verilen fonksiyon tanımlanacak kadar küçük karma dışbükey bir set olsun. Bütün S_i komşulukları için $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \emptyset$ olduğunu varsayalım öyle ki S_i setleri bütün $i \in I$ için en az bir ortak elemana sahip olup, I bir indeks seti ve $\{(s,r)\} \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ tekil bir settir.

C^1 olan bir $g : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun kısmi türev operatörünü

$$\partial g\left(x\right) := \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial g}{\partial x_n}, \frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial g}{\partial y_m}\right)$$

şeklinde tanımlıyoruz.

Örnek 4.1.1. C^1 olan $g : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $\bigcup_{i \in I} S_i \times \bigcup_{j \in I} R_j$ yerel komşuluğundaki minimum değeri ayni zamanda g fonksiyonunun $M = N \times R$ komşuluğundaki en küçük değeridir öyle ki I bir indeks setidir ve $R = \bigcup_{j \in I} R_j$. YKD olan g fonksiyonunun genel minimum değeri bütün $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ uzayındaki minimum değeridir. C^1 özelliğine sahip bir g YKD fonksiyonunun yerel minimum noktalarının setini

$$\Psi := \{\rho = (\rho_1, ..., \rho_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) : \rho_i \in \{\lceil \gamma_i \rceil, \lfloor \gamma_i \rfloor\} \subset \mathbb{Z}\ \forall i, \alpha_j \in \mathbb{R}\ \forall j\} \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$$

olarak tanımlıyoruz öyle ki $\partial g\left(\gamma, \alpha\right) = 0$ eşitliği bütün $(\gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+m}$ değerleri için sağlanır. Ψ setinde $\rho_i = \lceil \gamma_i \rceil$ ve $\rho_i = \lfloor \gamma_i \rfloor$ değerlerini göz önünde bulunduracağız (Tokgöz 2012).

Lemma 4.1.1. $g : M \to \mathbb{R}$ YKD fonksiyonunun $M \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ yoğun karma tanım kümesinde C^1 olduğunu varsayalım. Bu durumda M'de bir yerel minimum değeri bulabiliriz öyle ki

$$g_0 = \min_{\beta \in \Psi} \{g\left(\beta\right)\}$$

sağlanır (Tokgöz 2012).

İspat: $g : M \to \mathbb{R}$ YKD fonksiyonunun C^1 olduğunu, $M \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ yoğun karma kümesinde tanımlı olduğunu ve $\partial g\left(x, y\right) = 0$ eşitliğinin bazı $S = \bigcup_{i \in I} S_i \times \bigcup_{j \in I} R_j \subseteq M$

komşuluklarda bütün $(x,y) \in M$ için sağlandığını varsayalım. Bu koşullar altında g fonksiyonunun yerel minimumu

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} &= \lim_{t\to 0}\frac{g(x+te_i)-g(x)}{t}=0 \\ \frac{\partial g(x)}{\partial y_j} &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümü sonucunda bütün $i,\ 1 \leq i \leq n$, ve j, $1 \leq j \leq m$ değerleri için elde edilir. Bunun sonucunda en az bir yerel minimum $(\gamma,\alpha) \in \mathbb{R}^{n+m}$ elde edilir. Tanım kümesinin $\mathbb{Z}^n$ uzayında olmasından ötürü bütün $i, 1 \leq i \leq n$, indeks değerleri için γ_i reel sayılarının fonksiyondaki $\lceil \gamma_i \rceil$ tavan ve $\lfloor \gamma_i \rfloor$ taban değerlerini bularak sonuca ulaşabiliriz. Bu sonuç tanım kümesinde en az bir yerel minimum olan $(\beta,\alpha) \in \Psi$ noktasını verecektir. Dolayısıyla $g_0 = \min\limits_{\beta\in\Psi}\{g(\beta)\}$ elde edilmiş olunur. İspat tamamlanır.

Şimdi bazı x ve y değerleri için $\partial g(x,y) \neq 0$ eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda $\partial g(x,y) > 0$ veya $\partial g(x,y) < 0$ sağlanır öyle ki her iki durumda da fonksiyonun minimum değeri M setinin sınırında elde edilir.

YKD fonksiyonları için ispatlanacak olan sıradaki teorem reel ve yoğun tamsayı değişkenli fonksiyonlar için elde edilen teoremlere benzerdir. Tahmin edilebileceği üzere YKD fonksiyonları birden fazla genel minimum noktasına sahip olabilir çünkü tamsayı değişkenli yoğun dışbükey fonksiyonları birden fazla minimum noktasına sahip olabilir ancak bu noktalara karşılık gelen minimum değeri tektir. Örneğin

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-0.5)^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j-0.5)^2$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa bu fonksiyon 2^{n+m} tane minimum noktasına sahiptir ancak genel minimum değeri $0.25\,(n+m)$ olarak elde edilir.

Teorem 4.1.2. $g : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ YKD fonksiyonunun C^1 olup yerel ve genel minimum noktalarına sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda g fonksiyonunun yerel minimum noktalarının seti aynı zamanda bu fonksiyonunun genel minimum noktalarınında setidir (Tokgöz 2012).

İspat: $g : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ YKD fonksiyonunun C^1 olup yerel ve genel minimum noktalarına sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i \times \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} R_j$ olduğunu varsayalım öyle ki bütün i ve j değerleri için $S_i \times R_j$ setleri g fonksiyonunun (4.1) eşitliğini sağlayan yeterince küçük setler olsun ve $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} S_i = \emptyset$ sağlansın. g fonksiyonunun $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ uzayındaki yerel ve genel minimum noktalarının setleri sırasıyla Φ_1 ve Φ_2 olsun.

g fonksiyonunun $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ uzayında genel minimum noktalarına sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda g fonksiyonun bazı i ve j değerleri için $S_i \times R_j \subset \bigcup\limits_{i \in I_0} S_i \times \bigcup\limits_{j \in I_0} R_j$ şeklinde tanım kümesinin bir altuzayı bulunabilir öyle ki bu komşuluklarda genel minimum noktaları mevcuttur. g fonksiyonunun $S_i \times R_j$ komşuluklarında (4.1) eşitliğiyle verilen ikinci dereceden polinom temsilcisi için $\partial g(z) = 0$ koşulunu sağlayan çözümler g fonksiyonunun bu komşuluklardaki yerel minimum noktalarının setini elde edilmesinde kullanılır. Dolayısıyla bütün $z_2 \in \Phi_2$ için bir $z_1 \in \Phi_1$ bulunabilir öyle ki $\min\limits_{z_1 \in \Phi_1} g(z_1) = g(z_2)$ sağlanır ve $\bigcup\limits_{i \in I_0} S_i \times \bigcup\limits_{j \in I_0} R_j \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ olmasından dolayı $\Phi_2 \subset \Phi_1$ elde edilir.

Şimdi bir $M_1 = \bigcup\limits_{i \in I_1} S_i \times \bigcup\limits_{j \in I_1} R_j$ komşuluğunda en az bir $z_0 = (x_0, y_0)$ vektörünün var olduğunu varsayalım öyle ki z_0 vektörü $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ uzayının bir yerel minimumu olsun ancak $z_0 \notin \Phi_2$. z_0 bir yerel minimum olup M_1 komşuluğunun genel minimumu değildir dolayısıyla z_1 ve z_2 vektörleri bulunabilir öyle ki $M_2 = \bigcup\limits_{j \in J} \left(\bigcup\limits_{i \in I_j} S_i \right) \times \bigcup\limits_{j \in J} \left(\bigcup\limits_{i \in I_j} R_i \right) \supset M_1$ kümesinde $g(z_0) > g(z_1) > g(z_2)$ sağlanır. Sonuç olarak z_2 vektörü M_2 komşuluğunun yerel minimumu olup z_0 vektörü M_2 komşuluğunun bir yerel minimumu değildir. Şimdi z_2 yerel minimum vektörünün genel minimum olmadığını varsayalım aksi taktirde z_2 vektörü Φ_2 setinin bir elemanı olurdu. Bu şekilde yerel komşulukların bütün $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ uzayına genişletilmesi sonucu z_0 vektörü $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ uzayının yerel minimum olma özelliğini kaybeder ki bu durum z_0 vektörünün yerel minimum olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $z \in \Phi_2$ olup $\Phi_1 \subset \Phi_2$ sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.1.2. Bir $f : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tamsayı değişkenleri sabit varsayıldığı zaman reel değişkenlerine göre dışbükey ve reel değişkenleri sabit varsayıldığı zaman tamsayı değişkenlerine göre yoğun dışbükey ise o zaman bu fonksiyonun YKD olduğu anlamına gelmez. Örneğin $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $f(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + 0.5)(\beta^2 + 1)$ şeklinde tanımlayalım. Bu YKD fonksiyonuna karşılık gelen Hessian matrisi

$$H = \begin{bmatrix} 2(\beta^2 + 1) & 2\beta(2\alpha + 1) \\ 2\beta(2\alpha + 1) & 2(\alpha^2 + 0.5) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Özel olarak $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda $\det(H) = -24$ olup f fonksiyonunun YKD olmadığını gösterir ancak bütün α sabit değerleri için $(\beta^2 + 1)$ reel dışbükey ve herbir sabit β için

$$\nabla_{11} f = \left[(\alpha + 2)^2 - 2(\alpha + 1)^2 + \alpha^2\right]\left(\beta^2 + 1\right) = 2\left(\beta^2 + 1\right)$$

olup f fonksiyonunun tamsayı değişkenine göre yoğun dışbükey olduğunu gösterir (Tokgöz 2012).

Örnek 4.1.3. Genel minimum değerin tekil ancak karşılık gelen noktanın tekil olmama koşulunu sağlayan $\Im : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tipindeki YKD fonksiyonuna bir örnek olarak

$$\Im(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - 1.5)^2 + \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j - j\right)^2$$

verilebilir öyle ki bu fonksiyonda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ olduğu varsayılmıştır. Bütün i ve j indeks değerleri için $\alpha_i = 1, 2$ ve $\beta_j = j$ iken $\Im$ fonksiyonunun genel minimum noktaları $(\alpha_i, j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ olup bu noktalar için genel minimum değeri olan $0.25n$ elde edilir (Tokgöz 2012).

4.2 YKD Olan ve Olmayan Fonksiyonlara Örnekler

Bu bölümde YKD olan ve olmayan fonksiyonlara literatürden birer örnek verilecektir.

Örnek 4.2.1. (YKD olan fonksiyonlara bir örnek) Yüceer (2002) tarafından (3.3) eşitliğinde verilen fonksiyonun güçlü dışbükey olmadığı ancak Tokgöz, Nourazari ve Kumin (2011) tarafından yoğun dışbükey olduğu karşılık gelen

$$H = \begin{bmatrix} \nabla_{11} g(x,y) & \nabla_{12} g(x,y) \\ \nabla_{21} g(x,y) & \nabla_{22} g(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & \frac{101}{2} \end{bmatrix}$$

Hessian matrisinin pozitif tanımlı olması gösterilerek ispatlanmıştı. Şimdi (3.3) eşitliğinde verilen fonksiyonun YKD olma durumunu inceleyeceğiz. Bunun için bu fonksiyonun tanım kümesini $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ olarak değiştirip karşılık gelen karma Hessian matrisinin pozitif tanımlı olup olmadığını incelememiz gerekir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{11} g(x,y) &= 25(2y-x-2)^2 + \frac{1}{4}x^2 - 50(2y-x-1)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}(1-x)^2 + 25(2y-x)^2 + \frac{1}{4}(2-x)^2 \\
&= 25(2y-x)^2 - 100(2y-x) + 100 + \frac{1}{4}x^2 \\
&\quad -50(2y-x)^2 + 100(2y-x) - 50 \\
&\quad -\frac{1}{2}(1-x)^2 + 25(2y-x)^2 + \frac{1}{4}(2-x)^2 \\
&= 50 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{4} \\
&= \frac{101}{2} > 0
\end{aligned}$$

sağlanır ve

$$\frac{d^2 g(x,y)}{dy^2} = 200$$

sağlanır. Hessian matrisinin diyagonal elemanlarıdır. Karma Hessian matrisinin simetri özelliğinden dolayı bu matrisin ters diyagonal elemanları

$$\frac{d}{dy}\left(\nabla_1 g(x,y)\right) = \nabla_1 \left(\frac{dg(x,y)}{dy}\right) = 100(2y-x-1) - 100(2y-x) = -100$$

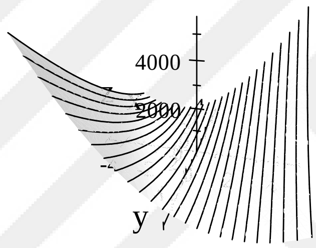
şeklindedir. Dolayısıyla

$$\det(H) = 200\frac{101}{2} - (100)^2 = 100$$

olup karma Hessian matrisinin pozitif tanımlı olduğunu gösterir. Teorem 4.1 gereğince Hessian matrisi pozitif tanımlı olduğu için (3.3) eşitliği ile verilen karma fonksiyon $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ uzayında YKD fonksiyondur. Verilen g fonksiyonu C^1 YKD olduğu için Teorem 4.2 gereğince

$$\partial g\left(x,y\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}=-50(2y-x)-\frac{1}{2}(2-x)=0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}=100(2y-x)=0 \end{cases}$$

çözümü sonucunda $g(2,1)=0$ olmasından dolayı $\{(2,1,0)\}$ seti verilen fonksiyonun genel minimum noktasıdır.



Şekil 4.1 Eşitlik 3.3 ile verilen fonksiyonun grafiği.

Örnek 4.2.2. (YKD olmayan fonksiyonlara bir örnek) Literatürde Rosenbrock fonksiyonu olarak bilinen ve

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \quad &\longmapsto \quad (1-x)^2+100\left(y-x^2\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon reel dışbükey değildir. Bu fonksiyonun $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olarak tanımlanması ile karşılık gelen Hessian matris bileşenleri

$$\begin{aligned} \nabla_{11} f\left(x,y\right) &= (1-(x+2))^2+100\left(y-(x+2)^2\right) \\ &\quad -2\left(1-(x+1)\right)^2+100\left(y-(x+1)^2\right) \\ &\quad +\left(1-x\right)^2+100\left(y-x^2\right) \\ &= -300x^2-600x-498+300y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla_1 f(x,y)\right) &= \frac{\partial}{\partial y}[(1-(x+1))^2 + 100\left(y-(x+1)^2\right) \\
&\quad - \left[(1-x)^2 + 100\,(y-x)\right]) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

sağlanır ve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

şeklindedir. Dolayısıyla Rosenbrock fonksiyonunun karma Hessian matrisi pozitif olmayıp Teorem 4.1 gereğince bu fonksiyonun YKD olmaması sonucu çıkarılır.

Rosenbrock fonksiyonunu $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlayıp değişkenlerinin tanım kümelerini değiştirmemiz durumunda karşılık gelen karma Hessian matris bileşenleri değişsede $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ uzayında YKD olmaması sonucu değişmez:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{11} f(x,y) &= (1-x)^2 + 100\left((y+2)-x^2\right) - 2\left[(1-x)^2 + 100\left(y+1-x^2\right)\right] \\
&\quad + (1-x)^2 + 100\left(y-x^2\right) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -198 \\
\nabla_1\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) &= \nabla_1\left[-2(1-x) + 100(-2x)\right] = 0
\end{aligned}
$$

sağlanır.

Örnek 4.2.3. (Sıralama Sistemlerinde YKD ve Optimizasyon Uygulamaları) Sıralama sistemlerinde kullanılan fonksiyonlar sistem servis oranının reel değişken ve sistem servis sunucu sayısının tamsayı değişkenli olmasından dolayı en az bir tamsayı ve bir reel sayı değişkenine sahiptir. Bu bölümde Kumin (1973) tarafindan tanıtılan bir $M/E_k/1$ sıralama sisteminin yoğun karma dışbükey olma durumunu inceleyeceğiz.

Otomatik bir makinanın seri olarak k sayıda operasyon performansına sahip olduğunu varsayalım. Herbir adımın aynı ortalama zamana sahip olduğunu ve bu zamanında üstel e fonksiyonu ile tanımlandığını varsayalım. Sisteme giriş süresinin Poisson olmasını varsaymamız durumunda bu sistem $M/E_k/1$ sıralama sistemi adını alır.

Kumin (1973) aşağıda f fonksiyonu ile tanımlanan sıralama sisteminin minimum maliyetini hesaplamak için sistemde yer alan herbir operasyonun maliyetini C_1, herbir üniteye yapılan servis maliyetini C_2, ve L_q uzunluğuna bağlı olarak sırada bekleme maliyetini C_3 olarak varsaymıştır. Bu sistemin fonksiyon karşılığı

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (k, \mu) \quad &\longmapsto \quad C_1 k + C_2 \mu + C_3 E(L_q) \end{aligned}$$

olup $\mu > \lambda > 0$ kısıtlamasına sahiptir öyle ki bu eşitlikte

$$E(L_q) = (\frac{\lambda}{\mu})^2 \frac{(k+1)}{2k(1-\frac{\lambda}{\mu})}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu fonksiyonun YKD olma koşulunu bulmak için karma Hessian matrisinin bileşenlerini hesaplamamız gerekir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{11} f(k, \mu) &= (C_1(k+1) + C_2\mu + C_3(\frac{(k+2)}{2(k+1)}\frac{\rho^2}{(1-\rho)}) \\
&\quad -(C_1 k + C_2 \mu + C_3(\frac{(k+1)}{2k}\frac{\rho^2}{(1-\rho)}) \\
&= \frac{C_3\lambda^2 + 2C_1 k(1+k)(\lambda-\mu)\mu}{2k(k+1)(\lambda-\mu)\mu} \\
\frac{\partial f(k,\mu)}{\partial \mu} &= \frac{C_3(k+1)\lambda^2(\lambda-2\mu) + 2C_2 k(\lambda-\mu)^2\mu^2}{2k(\lambda-\mu)^2\mu^2} \\
\nabla_{11} f(k,\mu) &= -\frac{C_3\lambda^2}{(2k+3k^2+k^3)(\lambda-\mu)\mu} \\
\frac{\partial(\nabla_1 f(k,\mu))}{\partial \mu} &= -\frac{C_3\lambda^2(\lambda-2\mu)}{2k(k+1)(\lambda-\mu)^2\mu^2} \\
\frac{\partial^2 f(k,\mu)}{\partial \mu^2} &= -\frac{C_3(k+1)\lambda^2(\lambda^2-3\lambda\mu+3\mu^2)}{k(\lambda-\mu)^3\mu^3}
\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla karma Hessian matrisi

$$H_f = \begin{bmatrix} -\dfrac{C_3\lambda^2}{(2k+3k^2+k^3)(\lambda-\mu)\mu} & -\dfrac{C_3\lambda^2(\lambda-2\mu)}{2k(k+1)(\lambda-\mu)^2\mu^2} \\ -\dfrac{C_3\lambda^2(\lambda-2\mu)}{2k(k+1)(\lambda-\mu)^2\mu^2} & -\dfrac{C_3(k+1)\lambda^2(\lambda^2-3\lambda\mu+3\mu^2)}{k(\lambda-\mu)^3\mu^3} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $k \in \mathbb{Z}^+$, $C_3 \in \mathbb{R}^+$ ile $\mu > \lambda > 0$ koşulları altında

$$\begin{aligned} \det(H_f) &= \frac{(C_3)^2\lambda^4((2+k(7+4k))\lambda^2 - 4(1+k(5+3k))\lambda\mu + 4(1+k(5+3k))\mu^2)}{4k^2(k+1)^2(k+2)(\lambda-\mu)^4\mu^4}, \\ \nabla_{11} f(k,\mu) &= -\frac{C_3\lambda^2}{(2k+3k^2+k^3)(\lambda-\mu)\mu} \end{aligned}$$

kavramları pozitiftir. Dolayısıyla $f(k,\mu)$ fonksiyonu bütün $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $\mu > \lambda > 0$ için YKD fonksiyondur. f fonksiyonu aynı zamanda μ değişkenine göre C^2 olup tamsayı değişkenine göre C^1 olmasından dolayı Teorem 4.2 gereğince yerel minimumlarının seti aynı zamanda genel minimum setidir.

5. SONUÇ

Bu tezde Tokgöz, Nourazari ve Kumin (2011) tarafından tanıtılan $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tipindeki fonksiyonların yoğun dışbükeyliği ile karşılık gelen Hessian matrisi ve optimizasyon sonuçlarının yanı sıra Tokgöz (2012) tarafından tanıtılan $g : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tipindeki fonksiyonların yoğun dışbükeyliği ile karşılık gelen Hessian matrisi ve optimizasyon sonuçları sunulmuştur. Bu sonuçların bir parçası olarak $D_1 \subset \mathbb{Z}^n$ ve $D_2 \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ setlerinin dışbükeyliği tanımlanmış ve bu dışbükeylik sonuçlarına ek olarak optimizasyon sonuçları gösterilmiştir. Bu sonuçların elde edilmesinde her iki tip fonksiyon için tanımlanan Hessian matrisi önemli bir role sahiptir. Literatürde bilinen f ve g tipindeki fonksiyonlar ile ilgili dışbükeylik ve optimizasyon sonuçlarınada bu tezde kısaca yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

Borwein, J.M. and Lewis, A.S. 2000 Convex analysis and nonlinear optimization: Theory and examples, Springer-Verlag, Berlin.

Boyd, S., and Vandenberghe, L., 2009 Convex optimization, Cambridge University Press, New York.

Das, C. 1977 The (S-1,S) Inventory model under time limit on backorders, Oper. Res., Vol. 25(5), 835-850.

Denardo, E.V. 1982 Dynamic programming, Prentice-Hall, Englewood cli3s, NJ.

Dyer, M.E. and Proll, L.G. 1977 On the validity of Marginal Analysis for Allocating Servers in M/M/c Queues, Manag. Sci., Vol. 23, 1019-1022.

Erlang, A.K. 1917 Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, Post Office Electrical Engineer's journal, Vol. 10, 189-197.

Favati, P. and Tardella, F. 1990 Convexity in Nonlinear Integer Programming, Ricerca Operativa, Vol. 53, 3-44.

Fenchel, W. 1953 Convex Cones, Sets, and Functions. Princeton, New Jersey: Princeton University Dept. of Mathematics. http://rasmusen.org /x/abros/fenchel.pdf.

Fenchel, W. and Bonnesen, T. 1971 Theorie der konvexen Körper, Bronx, New York, Chelsea Publishing Co.

Fenchel, W. and Bonnesen, T. 1974 Theorie der konvexen Körper, Berlin-New York, Springer-Verlag.

Fenchel, W. and Bonnesen, T. 1987 Theory of convex bodies, Moscow, Idaho, L. Boron, C. Christenson and B. Smith. BCS Associates.

Fox, B. 1966 Discrete optimization via marginal analysis, Manag. Sci., Vol. 13, 210–216.

Fujishige, S. and Murota, K. 2000 Notes on L-/M-convex functions and the separation theorems, Math. Program, Vol. 88, 129-146.

Grassmann, W. 1983 The Convexity of the Mean Size of the M/M/c Queue with respect to the Traffic Intensity, J. Appl. Prob., Vol. 20, 916-919.

Harel, A. 2010 Sharp and simple bounds for the Erlang delay and loss formulae, Queueing Syst., Vol. 64(2), 119-143.

Hirai, H. and Murota, K. 2004 M-convex functions and tree metrics, Japan J. Industrial Applied Math., Vol. 21, 391-403.

Kiselman, C.O. and Christer, O. 2010 Local minima, marginal functions, and separating hyperplanes in discrete optimization, In: Rajendra Bhatia (Ed.), Abstracts: Short communications; Posters. International Congress of Mathematicians, Hyderabad, August 19-27, 572-573.

Kumin, H. 1973 On characterizing the extrema of a function of two variables, one of which is discrete, Manag. Sci., Vol. 20, 126-129.

Lee, H.L. and Cohen, M.A. 1983 A note on the Convexity of Performance Measures of M/M/c Queueing Systems, J. Appl. Prob., Vol. 20, 920-923.

Lee, H.L. and Cohen, M.A. 1985 Multi-Agent Customer Allocation in a Stochastic Service System, Manag. Sci., Vol. 31, 752-763.

Miller, B.L. 1971 On minimizing nonseparable functions defined on the integers with an inventory application, SIAM J. Appl. Math., Vol. 21, 166-185.

Moriguchi, S. and Murota, K. 2005 Discrete Hessian matrix for L-convex functions, IECE Trans. Fundamentals, E88-A.

Murota, K. 1996 Convexity and Steinitz's exchange property, Adv. Math., 272-311.

Murota, K. 1998 Discrete convex analysis, Math. Prog., Vol. 83, 313-371.

Murota, K. and Shioura, A. 2000 Extension of M-convexity and L-convexity to polyhedral convex functions, Advances in Applied Mathematics, Vol. 25, 352-427.

Rockafellar, R.T. 1970 Convex analysis, Princten University Press, Princeton, NJ.

Rockafellar, R.T. 1974 Conjugate duality and optimization, SIAM Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 16, SIAM, Philadelphia.

Rockafellar, R.T. and Wets, R.J.B. 1998 Variational analysis, Springer-Verlag, Berlin.

Rolfe, A.J. 1971 A Note on the Marginal Allocation in Multi-Server Facilities, Manag. Sci., Vol. 17, 656-658.

Tokgöz, E. 2012 Mixed Convexity and Optimization Results for Functions with Integer and Real Variables with Applications to Queueing Systems, A dissertation submitted to the Industrial and Systems Engineering of the University of Oklahoma.

Tokgöz, E. Maalouf, M. and Kumin, H. 2009 A Hessian matrix for functions with integer and continuous variables, Int. J. Pure Appl. Math., Vol. 57(2), 209-218.

Tokgöz, E. Nourazari, S. and Kumin, H. 2011 Convexity and optimization of condense discrete functions, P.M. Pardalos and S. Rebennack (Eds.), LNCS 6630, 33–42, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Ui, T. 2006 A note on discrete convexity and local optimality, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 23, 21-29.

Yüceer, U. 2002 Discrete convexity: convexity for functions defined on discrete spaces., Discrete Appl. Math., Vol. 119, 297-304.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Emre TOKGÖZ
Doğum Yeri	:	Altındağ
Doğum Tarihi	:	24.09.1979

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	TED Ankara Koleji Lisesi (1993-1996)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (Eylül 1997 - Haziran 2001)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2002 - Temmuz 2017)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Quinnipiac Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Yardımcı Doçent Doktor (2014-)