

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SABİT ADIMLI HAREKETLER VE KİNEMATİK UYGULAMALARI

Derya KAHVECİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

SABİT ADIMLI HAREKETLER VE KİNEMATİK UYGULAMALARI

Derya KAHVECİ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez çalışmasında, 3–boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında sabit adımlı (persistan) hareketlerin geometrik kinematiki incelenmeye çalışılmıştır. Bir hareketin persistan olması kavramı, hareketin ani bükümünün sabit bir adıma sahip olması özelliği ile tanımlanır. Bu tanımlama ile, sabit adımlı (persistan) hareketleri aksode yüzeyleri açısından incelemek mümkündür. Böylece persistan katı hareketler eğrilerin ve regle yüzeylerin klasik diferensiyel geometrisindeki bazı çözümleri zor bağlantıları ortaya çıkarır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tezin kapsamı, amacı, önemi ve literatüre sağladığı katkıları içeren giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan bazı kavramları, tanımları ve teoremleri sağlayan temel kavramlar kısmına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3–boyutlu Öklid uzayında sabit adımlı (persistan) hareketlerin kinematiki ele alınmıştır. Frenet-Serret, Bishop, doğruya göre simetrik ve uyarlanmış çatı hareketleri gibi düzgün bir eğriye bağlı ve yine bu eğri boyunca hareket eden çatı tarafından üretilen bazı özel katı cisim hareketleri araştırılmış ve bunların persistan olup olmayacağı incelenmiştir. Daha sonra bu özel hareketlerin aksode yüzeyleri açısından sınıflandırmaları elde edilmiştir. Ayrıca slant helisler üzerinde hem Frenet-Serret hem de uyarlanmış çatı hareketinin persistan olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, 3–boyutlu Minkowski uzayında sabit adımlı (persistan) hareketlerin kinematiki ele alınmıştır. Frenet-Serret, uyarlanmış çatı ve Bishop hareketleri dahil olmak üzere bir eğriye bağlı ve yine bu eğri boyunca hareket eden çatı tarafından üretilen bazı önemli çatı hareketlerinin persistan olmasını modellemek için gerekli ve yeterli kriterler belirlenmiştir. Daha sonra bu hareketlerin aksode yüzeyleri ve onların geometrik kavramları tanımlanmıştır. 3–boyutlu Minkowski uzayında özel çatı hareketlerinin kapsamlı bir işleyişi için bu tez çalışması, persistan katı hareketlerin ve aksode yüzeylerinin bazı açıklayıcı örneklerini ortaya koymuştur.

Son bölümde ise, yapılan çalışmaların genel bir değerlendirmesi yapılmış ve gelecekteki çalışmalara yön verebilecek bazı olası problemlerden bahsedilerek tez çalışması tamamlanmıştır.

Ekim 2022, 87 sayfa

Anahtar Kelimeler: Katı cisim hareketleri, özel Öklid grubu, regle yüzeyler, aksode yüzeyleri, slant helisler, Lorentz grubu, Poincaré grubu, Lie grubu, Lie cebiri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

MOTIONS WITH CONSTANT PITCH AND THEIR KINEMATIC APPLICATIONS

Derya KAHVECİ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis investigates the geometric kinematics of motions with constant pitch (persistent) in three-dimensional Euclidean and Minkowski spaces. The notion of persistence of a motion is identified by the property that the instantaneous twist of the motion has a constant pitch. With this definition, it is feasible to examine motions with constant pitch (persistent) in terms of their axode surfaces. Thus, some subtle connections between persistent rigid motions and the classical differential geometry of curves and ruled surfaces are revealed.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction part, which includes the scope, purpose, importance, and contributions of the thesis to the literature. The second chapter is dedicated to the preliminaries part, which provides for some concepts, definitions, and theorems required in the thesis.

The third chapter discusses the kinematics of motions with constant pitch (persistent) in three-dimensional Euclidean space. We examine some special rigid-body motions and investigate whether they can be persistent. These motions include Frenet-Serret, Bishop, line-symmetric, and adapted frame motions, which are constructed by a frame connected to and moving through a smooth curve. Following that, these special motions are classified according to their axode surfaces. It has also been demonstrated that both Frenet-Serret and adapted frame motion are persistent on the slant helices.

The fourth chapter discusses the kinematics of motions with constant pitch (persistent) in three-dimensional Minkowski space. This thesis establishes necessary and sufficient criteria for modeling the persistence of some significant frame motions connected to and moving through a smooth curve, including Frenet-Serret, adapted frame, and Bishop motions. Then, the axode surfaces of these special motions and their geometric concepts are defined. For a thorough treatment of special frame motions in three-dimensional Minkowski space, this thesis reveals some illustrative examples of persistent rigid motions and axode surfaces.

In the last chapter, a general assessment of the investigations is provided, some potential problems that might guide future studies are mentioned, and the thesis is concluded.

Oct 2022, 87 pages

Key Words: Rigid-body motions, special Euclidean group, ruled surfaces, axode surfaces, slant helices, Lorentz group, Poincaré group, Lie group, Lie algebra.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim hayatım boyunca beni yönlendiren, destekleyen ve çalışmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, araştırmalarım boyunca desteklerini her zaman hissettiğim ve önemli fikirleri ile hep yanımda olan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye ve Prof. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, kıymetli zamanını ayırarak çalışmalarına destek olan tez izleme kurulu üyesi Sayın Doç. Dr. Murat BEKAR (Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı)'a ve tez savunma jüri üyesi Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çocukluğumdan bu yana eğitim hayatları ile bana rol model olan, akademiye yönelmemdeki en büyük katkıları bana sağlayan ablalarım Prof. Dr. Ayşegül KÖROĞLU (Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi)'na, Prof. Dr. Ayşe Mine GENÇLER ÖZKAN (Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi)'a, Prof. Dr. Ceyda Sibel ERDURAK KILIÇ (Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi)'a, Doç. Dr. Gülderen YILMAZ (Ankara Üniversitesi Eczacılık Fakültesi)'a ve Dr. Öğr. Üye. Gülnur EKŞİ BONA (Medipol Üniversitesi Eczacılık Fakültesi)'ya bütün içten duygularıyla teşekkür ederim.

Lisansüstü eğitim hayatımın üzerimde oluşturduğu ağır yükü sırtlanırken, hayatımın her anında olduğu gibi bu süreçte de büyük fedakarlıklarla yanımda olan, bir şeyleri başara-bileceğime dair olan inancı bana veren, emeklerini hiçbir zaman ödeyemeyeceğim babam Mustafa KAHVECİ, annem Ayşe KAHVECİ ve abim Deniz KAHVECİ'ye, bu zorlu süreçte bütün stresimi alarak içimi sevgi ile dolduran kedilerim Pamuk, Deniz, Derya, Ebru ve Tarçın'a ve her daim yanımda olan bütün değerli dostlarıma en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK 2211-A Yurtiçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Akademik çalışmalarına sağladığı destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Derya KAHVECİ
Ankara, Ekim 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 İnvaryant ve Persistan Vida Sistemleri	1
1.2 Persistan Manifoldlar	4
1.3 Sabit Adımlı (Persistan) Katı Cisim Hareketleri	5
1.4 Tezin Kapsamı ve Önemi	8
2. TEMEL KAVRAMLAR	10
2.1 Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar	10
2.2 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar	14
3. ÖKLİD UZAYINDA SABİT ADIMLI HAREKETLER	19
3.1 Study'nin Ribaucour Problemi	19
3.2 Bir Parametrelili Uzay Hareketleri	22
3.3 Persistan Katı Cisim Hareketleri	24
3.4 Persistan Frenet-Serret Hareketleri	27
3.4.1 Persistan olma	29
3.4.2 Sabit ve hareketli aksode yüzeyleri	30
3.5 Bishop Hareketleri	33
3.5.1 Aksodeler	35
3.5.2 Bishop hareketlerinin inşası	36
3.6 Persistan Aeroplano Hareketleri	38
3.7 Doğruya Göre Simetrik Persistan Hareketler	40
3.8 Persistan Uyarlanmış Çatı Hareketleri	45
3.9 Slant Helisler ve Persistan Hareketler	48
4. MINKOWSKI UZAYINDA SABİT ADIMLI HAREKETLER	56
4.1 Katı Hareketlerin İncelenmesi	56
4.2 Persistan Katı Hareketler	58
4.3 Persistan Frenet-Serret Hareketleri	59
4.3.1 Persistan olma	60
4.3.2 Sabit ve hareketli aksode yüzeyleri	64
4.4 Persistan Uyarlanmış Çatı Hareketleri	69
4.4.1 Persistan olma	71
4.4.2 Sabit ve hareketli aksode yüzeyleri	73
4.5 Bishop Hareketleri	74
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	80
KAYNAKLAR	82
ÖZGEÇMİŞ	87

SİMGELER DİZİNİ

Σ	Toplam
\mathbb{R}^n	n -boyutlu Öklid uzayı
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Standart iç çarpım
$\ \cdot\ $	Öklid uzayında norm
\wedge	Öklid uzayında vektörel çarpım
$GL(n, \mathbb{R})$	Genel lineer grup
$SL(n, \mathbb{R})$	Özel lineer grup
$[\cdot, \cdot]$	Parantez operatörü
$O(3)$	Ortogonal grup
$SO(3)$	Özel ortogonal grup (Lie grubu)
$\mathfrak{so}(3)$	$SO(3)$ Lie grubunun Lie cebiri
$SE(3)$	Özel Öklid grubu (katı hareketler grubu)
$\mathfrak{se}(3)$	$SE(3)$ grubunun Lie cebiri
$\mathbb{R}^{n-1,1}$	n -boyutlu Minkowski uzayı
$\langle \cdot, \cdot \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\ \cdot\ _L$	Minkowski uzayında norm
\wedge_L	Minkowski uzayında vektörel çarpım
$O(2, 1)$	Belirsiz ortogonal grup
$SO(2, 1)$	Belirsiz özel ortogonal grup (Lorentz grubu)
$\mathfrak{so}(2, 1)$	$SO(2, 1)$ grubunun Lie cebiri
$ISO(2, 1)$	Poincaré grubu ($\mathbb{R}^{2,1}$ uzayının izometrilere grubu)
$\mathfrak{iso}(2, 1)$	$ISO(2, 1)$ Poincaré grubunun Lie cebiri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	(a) Helikoidal bir bağlantı ile ilişkili sonlu adımlı büküm (b) Döner mafsal ile ilişkili 0–adımlı büküm (c) Prizmatik bağlantı ile ilişkili ∞ –adımlı büküm (Wu ve Carricato 2020)	2
Şekil 1.2	Anahtar	2
Şekil 1.3	Bir persistan kinematik zincir (Carricato 2017)	4
Şekil 3.1	(a) $\kappa = \frac{(1-t^2)}{3(t^2+1)}$ ve $\tau = \frac{(t+1)^2}{3(t^2+1)}$ olan eğri üzerindeki $p_f = \frac{3}{2}$ adımlı persistan Frenet-Serret hareketi (b) $\kappa = \frac{10s}{1+0.25s^2}$ ve $\tau = \frac{5s^2}{1+0.25s^2}$ olan eğri üzerindeki $p_f = \frac{1}{20}$ adımlı persistan Frenet-Serret hareketi (c) $\kappa = \frac{4(1-t^2)}{3(t^2+1)}$ ve $\tau = \frac{4(t+1)^2}{3(t^2+1)}$ olan eğri üzerindeki $p_f = \frac{3}{8}$ adımlı persistan Frenet-Serret hareketi	31
Şekil 3.2	Sabit aksodesi bir dairesel helisin teğeti olan Bishop hareketi	38
Şekil 3.3	$d = \frac{1}{3}$ sabit dağılma parametrelili bir Cayley kübik regle yüzey (Selig ve Carricato 2017)	45
Şekil 3.4	$\alpha(s)$ slant helisinin $T(s)$ teğetler göstergesi	52
Şekil 3.5	$\alpha(s)$ slant helisi	53
Şekil 3.6	(a) $\alpha(s)$ slant helisi üzerindeki Frenet-Serret hareketi (b) $\alpha(s)$ slant helisi üzerindeki uyarlanmış çatı hareketi	54
Şekil 3.7	(a) $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde Frenet-Serret hareketi persistan olan regle yüzey (b) $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde uyarlanmış çatı hareketi persistan olan regle yüzey	55
Şekil 4.1	(a) $\kappa = \frac{2(1-t^2)}{3(t^2+1)}$ ve $\tau = \frac{2(t+1)^2}{3(t^2+1)}$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen ve $p_f = \frac{3}{4}$ adımlı bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan timelike normalli spacelike bir eğri (b) $\kappa = \frac{2t}{t^2-1}$ ve $\tau = \frac{2}{t^2-1}$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen ve $p_f = \frac{1}{2}$ adımlı bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan timelike binormalli spacelike bir eğri (c) $\kappa = \frac{3t}{t^2-1}$ ve $\tau = \frac{3t^2}{t^2-1}$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen ve $p_f = \frac{1}{3}$ adımlı bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan timelike bir eğri	63
Şekil 4.2	(a) $\alpha_4(t)$ boyunca belirlenen ve ani bükümü $p_f = 2 \cos(t)$ adımına sahip olan Frenet-Serret hareketi (b) $\alpha_4(t)$ boyunca belirlenen ve ani bükümü $p_a = \frac{-2 \cos(t)}{3}$ adımına sahip olan uyarlanmış çatı hareketi	76
Şekil 4.3	(a) Şekil 4.2a’da ifade edilen Frenet-Serret hareketinin sabit aksode yüzeyi (b) Şekil 4.2b’de ifade edilen uyarlanmış çatı hareketinin sabit aksode yüzeyi	77

Şekil 4.4	(a) Adımı $p_f = 1$ olan ve $\kappa = \sec(2t) \sinh(2 \operatorname{arctanh}(\tan(t)))$ ve $\tau = \sec(2t) \cosh(2 \operatorname{arctanh}(\tan(t)))$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen, bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan $\alpha_5(t)$ timelike slant helisi (b) Adımı $p_a = \frac{-1}{3}$ olan ve $f = \sec(2t)$ ve $g = 2 \sec(2t)$ eğrilik fonksiyonları ile belirlenen, bir persistan uyarlanmış çatı hareketi oluşturan $\alpha_5(t)$ timelike slant helisi	77
Şekil 4.5	(a) Şekil 4.4a'da ifade edilen persistan Frenet-Serret hareketinin sabit aksode yüzeyi (b) Şekil 4.4b'de ifade edilen persistan uyarlanmış çatı hareketinin sabit aksode yüzeyi	78
Şekil 4.6	(a) Adımı $p_f = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$ olan ve $\kappa = 2\sqrt{3} \sec(2t) \sinh(2 \operatorname{arctanh}(\tan(t)))$ ve $\tau = 2\sqrt{3} \sec(2t) \cosh(2 \operatorname{arctanh}(\tan(t)))$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen, bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan bir timelike binormalli $\alpha_6(t)$ spacelike slant helisi (b) Adımı $p_a = \frac{-\sqrt{3}}{8}$ olan ve $f = 2\sqrt{3} \sec(2t)$ ve $g = -2 \sec(2t)$ eğrilik fonksiyonları ile belirlenen, bir persistan uyarlanmış çatı hareketi oluşturan bir timelike binormalli $\alpha_6(t)$ spacelike slant helisi	78
Şekil 4.7	(a) Şekil 4.6a'da ifade edilen persistan Frenet-Serret hareketinin sabit aksode yüzeyi (b) Şekil 4.6b'de ifade edilen persistan uyarlanmış çatı hareketinin sabit aksode yüzeyi	79

1. GİRİŞ

Kinematik, geçmişten bu yana geometrinin bir dalı olarak görülmektedir. Buna rağmen, kinematiğe olan matematiksel ilgi geçtiğimiz yüzyıllarda oldukça azdı. Disiplinin mühendislik tarafında yaşanan son gelişmeler, konunun temelinde yatan klasik geometriye olan ilginin yeniden artmasına neden olmuştur.

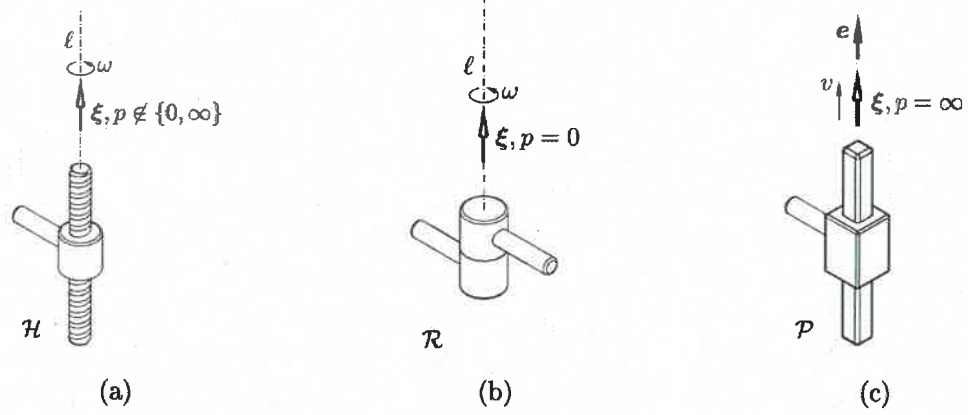
1.1 İnvaryant ve Persistan Vida Sistemleri

Kinematikte, fizikte ve özellikle robotikte, bir cismin ani hareketi bir büküm¹ ile temsil edilirken (Şekil 1.1), cisme etki eden kuvvetler sistemi bir anahtar² ile verilir (Şekil 1.2). Bükümlerin uzayı $SE(3)$ özel Öklid grubunun 6–boyutlu $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebiri iken, anahtarlar $\mathfrak{se}(3)^*$ dual uzayının elemanlarıdır. Vidalar ise, birbirinin skalar katları olan büküm (ya da anahtar) sınıflarını temsil eden daha genel bir terimdir (Carricato ve Zlatanov 2014). Böylece robotikte katı bir cismin ani hareketleri, *vida sistemleri* olarak adlandırılan, bükümlerin 6–boyutlu vektör uzayının lineer alt uzayları (yani $SE(3)$ özel Öklid grubunun $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin alt vektör uzayları) ile tanımlanır. Vida sistemleri mekanizmaların ve yapıların kinematiği ve statigi ile ilgili temel unsurlardır.

1800’lerin sonlarında Ball, katı dinamiklerdeki küçük hareketlerin problemleri yardımıyla vida sistemleri kavramını geliştirmiştir (Ball 1900). Hunt, belirli geometrik durumlara dayanarak vida sistemlerinin ayrıntılı bir sınıflandırmasını elde etmiştir (Hunt 1978). Vida sistemleri (Gibson ve Hunt 1990a), (Gibson ve Hunt 1990b), (Martinez ve Duffy 1992a), (Martinez ve Duffy 1992b) ve (Hunt ve Parkin 1995) tarafından farklı yöntemlerle yeniden türetilmiştir. (Stramigioli ve Bruyninckx 2001), (Selig 2007), (Müller 2014) ve (Wu ve Carricato 2017) vida sistemlerinin farklı matematiksel formlarını sunmuştur.

¹Büküm, hareketi (sonsuz küçük dönme, hız ve uzaysal ivme) temsil eden bir vidadır. Yön vektörü açısız kısım ve moment vektörü doğrusal kısım.

²Anahtar, yüklemeyi (kuvvet, momentum ve impuls) temsil eden bir vidadır. Yön vektörü doğrusal kısım ve moment vektörü açısız kısım.



Şekil 1.1. (a) Helikoidal bir bağlantı ile ilişkili sonlu adımlı büküm (b) Döner mafsal ile ilişkili 0–adımlı büküm (c) Prizmatik bağlantı ile ilişkili ∞ –adımlı büküm (Wu ve Carricato 2020)



Şekil 1.2 Anahtar

Bir katı cisim hareketi ile iki vida sisteminden biri diğerine hareket ettirilebiliyorsa, söz konusu vida sistemleri denk (uyumlu) olarak sınıflandırılır. Daha açık olarak, iki alt büküm uzayı S ve S' için vida sistemleri, eğer $SE(3)$ grubunun $S = Ad_G S'$ olacak şekilde bir G yer değiştirmesi varsa denktir (uyumludur). Burada Ad_G , Lie cebiri üzerindeki G grup elemanının adjoint dönüşümüdür ve $Ad_G : \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathfrak{se}(3)$ adjoint gösterimi, bir $S = (\omega, \nu)$ bükümünü, $(R\omega, t \wedge R\omega + R\nu)$ bükümüne dönüştürür. Burada R dönme matrisi, t öteleme ve ω ve ν , sırasıyla, açısal hız ve lineer hız vektörleridir. Bu denklik bağıntısı, $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin lineer alt uzaylarını sonsuz sayıda (kesişmeyen) sınıfa böler. Aynı sınıfa ait vida sistemlerinin, geometrik olarak denk (uyumlu) olduğu için, aynı şekle sahip olduklarını, dolayısıyla uzayda sadece konumları ya da duruşlarının farklı olduğunu söyleyebiliriz.

Bir θ konfigürasyonda verilen herhangi bir mekanizma için uç işlevcinin³ olası ani hareketleri, bir $S(\theta) \subset \mathfrak{se}(3)$ alt büküm uzayı ile verilir. Herhangi singüler olmayan bir θ konfigürasyonu için A , $SE(3)$ grubunun bir \mathcal{A} alt grubu olmak üzere, $S(\theta) = A$ sağlanır. Böyle bir mekanizmanın uç işlevcisinin sabit ya da invaryant bir vida sistemine sahip olduğu söylenebilir. Bu özelliğe sahip vida sistemleri Hunt tarafından tanımlanmış ve tam döngüsel mobilitiyi garanti eden vida sistemleri olarak adlandırılmıştır (Hunt 1978) ve daha sonra $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin alt cebirleriyle tanımlanmıştır (Gibson ve Hunt 1990a), (Gibson ve Hunt 1990b), (Hervé 1999).

Yakın tarihte yayımlanan bir dizi makalede Carricato ve meslektaşları, ilk kez, *persistan vida sistemi* olarak adlandırdıkları, uç işlevci büküm sistemi singüler konfigürasyonlardan uzakta, keyfi sonlu yer değiştirmeler altında, bir katı cisim hareketine kadar invaryant kalan mekanizmalar (yani $S(\theta)$ mutlaka sabit olmamasına rağmen, sabit bir vida sistemi sınıfına sahip mekanizmalar) ile ilişkili özellikler sunmuşlar ve persistan vida sistemleri ile ilgili kapsamlı bir sınıflandırma vermişlerdir (Carricato ve Martinez 2010), (Carricato ve Zlatanov 2014). Bu durumda, çıkış vida sistemi iç düzenini ve şeklini korur, ancak uzayda katı bir cisim gibi hareket eder.

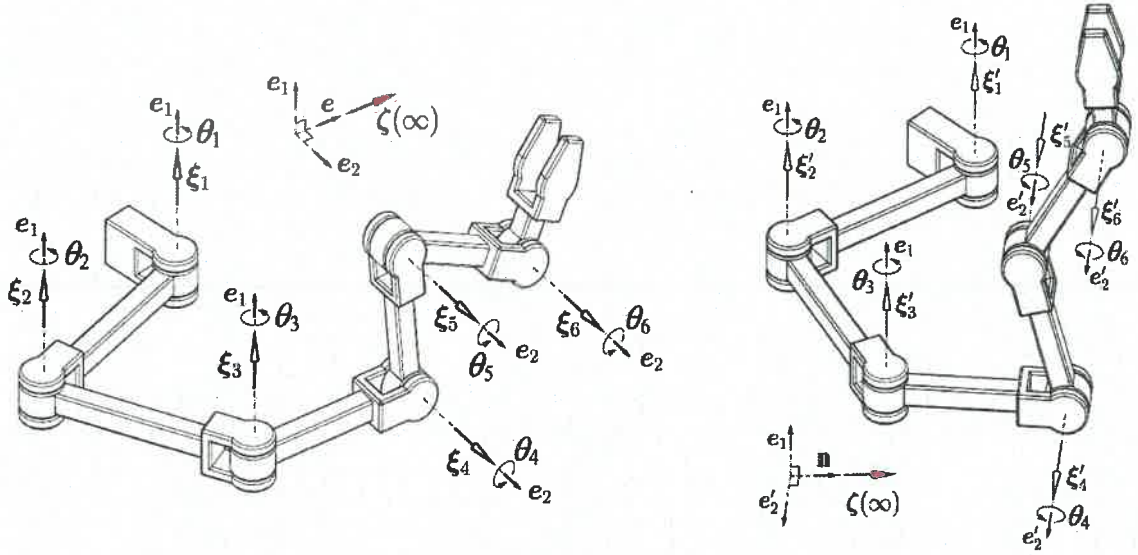
Persistan vida sistemleri $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin alt cebiri olmasa da, hem uzayın boyutunun hem de ana vidaların adımlarının korunması gibi bazı önemli özelliklere sahiptir. İnvaryant vida sistemlerinin bir genellemesi olan persistan vida sistemleri, katı cisim mekanizmalarının ve yapılarının kinematikinde geometrik kavramlar ve temel araçlar sağlar. Ayrıca, persistan vida sistemlerinin, özellikle uzaysal paralel manipülatörler⁴ olmak üzere, mobilite analizi⁵ ve tip sentezinde⁶ büyük öneme sahip olduğu düşünülmektedir (Şekil 1.3).

³Robotikte bir uç işlevci, bir robot kolunun ucuna bağlanan ve robotun çevre ile etkileşimini sağlayan bir cihaz ya da araçtır.

⁴Uç işlevciyi desteklemek için bilgisayar kontrollü birkaç seri zincir kullanan mekanik sistemler.

⁵Bir yerden başka bir yere olan hareket planlamasının tüm yönlerinin derinlemesine incelenmesi.

⁶Bir robotun çalışma özellikleri, temel özellikleri ve tasarım özellikleri.



Şekil 1.3 Bir persistan kinematik zincir (Carricato 2017)

1.2 Persistan Manifolflar

$SE(3)$ grubunun çıkış büküm sistemi tarafından örtülen alt manifoldu bir *persistan manifold* olarak adlandırılabilir. Böylece bir hareket manifoldunun persistan olması, yani $SE(3)$ Öklid yer değıştirmeler grubunun bir manifoldunun persistan olması, teğet uzayların her noktada karşılıklı olarak uyumlu olması kriteri ile karakterize edilir (Carricato ve Zlatanov 2014). Persistan manifoldlar, uç işlevcinin sonlu mobilitesi ile birçok kompleks uzayın kinematik zincirinde⁷ gözlemlenebilir.

Üç önemli persistan manifold türü vardır. Bunlar Lie alt grupları, persistan üstel çarpım manifoldları ve simetrik alt uzaylardır, tümü Wu ve Carricato tarafından tartışılmıştır (Wu ve Carricato 2020). Carricato ve Martinez, sıralı kinematik zincirler tarafından üretilebilen ve $SE(3)$ grubunun boyutu 5'ten küçük olan alt gruplarının çarpımı tarafından belirlenen tüm persistan alt manifoldları incelemiştir (Carricato ve Martinez 2011), (Carricato 2012), (Carricato 2014).

Persistan olma kavramı daha geniş bir uygulanabilirliğe sahiptir ve $SE(3)$ grubunun alt manifoldlarını üreten genel zincirler için geçerlidir. Yani, bazı alt manifoldlar

⁷Mekanik bir sistem için matematiksel model olan ve istenen hareketi sağlamak için birbirine bağlanan katı cisimlerin bir birleşimi.

persistan olma özelliğine sahipken, bazıları bu özelliğe sahip değildir. Sıralı zincirler (yani alt grupların çarpımı) tarafından üretilemeyen, ancak yine de önemli uygulamalara sahip olan persistan alt manifoldlar vardır. Kayda değer bir örnek, persistan olma özelliği doğruya göre simetrik kinematik zincirlerin paralel bağlantılarından ortaya çıkan homokinetik eşleşmeler ya da sıfır-torsiyon paralel manipulatörler tarafından sağlanır (Bonev vd. 2002), (Hunt 1973), (Wu ve Carricato 2017).

Simetrik alt uzaylar olan persistan manifoldlar, yani her nokta için bir inversiyon simetrisine sahip düzgün manifoldlar, (Löwe vd. 2016), (Wu vd. 2016), (Wu ve Carricato 2017) ve (Wu ve Carricato 2018) tarafından incelenmiştir. $SE(3)$ grubunun persistan alt manifoldlarının bir sınıfı Liu ve diğerleri tarafından daha yakın tarihli bir yayında tanıtılmıştır (Liu vd. 2019).

1913 yılında Study, *Ribaucour problemi* olarak adlandırdığı şeyi tanımlamış ve bir persistan manifold olarak ifade edilen $SE(3)$ grubunun 1–boyutlu alt manifoldları için genel bir çözüm sunmuştur (Study 1913). Selig ve Carricato, bu genel çözümlerin belirli bir persistan alt manifold türü olduğunu göstermiş ve Study'nin Ribaucour problemini keyfi adımlara genelleştirmiştir. Böylece Study tarafından tanımlanan 1–boyutlu Ribaucour manifoldlarının elde edilmesine benzer bir mantıkla, $SE(3)$ grubunun bütün 1–boyutlu persistan alt manifoldlarının karakterizasyonlarını vermişlerdir (Selig ve Carricato 2017).

Ne yazık ki daha yüksek boyutlu alt manifoldlar için Study'nin Ribaucour problemine çözümler ve bir persistan alt manifold kavramı birbirinden ayrılır. Bu nedenle birinin bilgisi diğerini incelemeye yardımcı olmaz.

1.3 Sabit Adımlı (Persistan) Katı Cisim Hareketleri

Bu tez boyunca, ani bükümün adımının sabit olması ile karakterize edilen sabit adımlı hareketler, kolaylık sağlaması açısından, *persistan hareketler* olarak adlandırılacaktır.

$SE(3)$ özel Öklid grubundaki persistan katı cisim hareketleri Carricato, Martinez ve Zlatanov tarafından tanıtılan yeni bir araştırma konusudur

(Carricato ve Martinez 2010), (Carricato ve Zlatanov 2014). Kinematik, özellikle robotik ve mekanizma teorisindeki önemli uygulamalarına rağmen, persistan katı cisim hareketlerine ayrılmış literatür oldukça sınırlıdır.

$SE(3)$ özel Öklid grubundaki bir eğri, katı bir hareketin yörüngesi olarak düşünülebilir (Selig 2007). Bu nedenle, bir katı cisim hareketini belirlemenin başka bir yolu da bir eğri kullanmaktır (Bottema ve Roth 1979).

Bu tez çalışması için ana ilham kaynağı olan çalışmalarında Selig ve Carricato, belirli bir eğriye bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden bir Frenet-Serret çatısı tarafından belirlenen, Frenet-Serret hareketleri gibi, 1-parametrelili hareketlere bakarak $SE(3)$ grubunun 1-boyutlu persistan manifoldlarını incelemiştir (Selig ve Carricato 2017). Özellikle, bir Frenet-Serret hareketinin persistan olması için gerekli ve yeterli bir kriter sağlamışlardır, yani $\frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} = \text{sabit}$, burada κ ve τ hareketin dayandığı eğrinin eğriligi ve torsiyonudur.

Kahveci ve Yaylı, her noktada asli normalinin sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapması ile tanımlanan slant helislere bağlı ve bu slant helisler boyunca hareket eden persistan katı cisim hareketlerini gözden geçirmiştir (Kahveci ve Yaylı 2019). $\{T, N, B\}$ standart Frenet-Serret çatısına alternatif olan uyarlanmış bir çatıyı göz önüne alıp (yani $C = \frac{N'}{\|N'\|}$ ve $W = N \wedge C$ sağlayan $\{N, C, W\}$ uyarlanmış çatısı) Frenet-Serret hareketlerine ek olarak, uyarlanmış çatı hareketleri için de persistan olma kriterlerini sunmuşlardır⁸. Ayrıca bir slant helis üzerinde hem Frenet-Serret hem de uyarlanmış çatı hareketinin persistan olabileceğini öne sürmüşlerdir.

Frenet-Serret hareketleri ile ilgili bazı önemli uygulamalar takip eden çalışmalarda ele alınmıştır (Barbaresco ve France 2020), (Selig ve Wu 2006), (Selig 2007), (Selig 2013), (Tsamparlis 2010).

Vishesh ve Haribaskar, Mannheim eğriler⁹ ve sabit adımlı eğriler arasındaki ilişkiyi araştırmıştır (Vishesh ve Haribaskar 2018). Herhangi bir düzgün uzay eğrisi için bir

⁸Burada üstel, çatının üzerinde bulunduğu eğrinin zaman parametresine göre türevi temsil eder.

⁹Öklid uzayında κ eğriligi ve τ torsiyonu ile verilen bir eğrinin Mannheim eğri olması için gerek ve yeter koşul, λ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $\frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} = \lambda$ olmasıdır (Blum 1966).

yarıçap ve bir adım fonksiyonu tanımlamışlar ve bu fonksiyonlar aracılığıyla bu iki eğri sınıfını karakterize etmişlerdir. Özellikle sabit aksodenin açılabilir olması için gerek ve yeter koşulun hareketin yörüngesinin Mannheim eğrisi olması olduğunu göstermişlerdir. Belirli bir Mannheim eğriyi, sabit adımlı eğriye ve sabit adımlı bir eğriyi de, Mannheim eğriye dönüştürmek için bir yöntem bulmuşlardır.

Lorentz geometrisi, modern diferensiyel geometri ile matematiksel fizik arasında bağlantı kurmada önemli bir rol oynamasına ve kinematik, Minkowski uzayı ile ilgili literatürde birçok şekilde tartışılmasına rağmen (Ekici vd. 2008), (Freudenstein 1973), (Hervé 1999), (Karsai 2001), (Kazaz vd. 2009), (Sahiner vd. 2016), (Soler 2006), yazarlar persistan katı hareketleri yaygın bir biçimde dikkate almamışlardır. Katı hareketlerin persistan olması teorisindeki bu boşluğu doldurmak ve persistan çatı hareketlerinin kapsamlı bir incelemesini sağlamak için, bu tez çalışmasında, Öklid geometrisinin yanı sıra, izometrilereyle Minkowski uzayının çalışılması olarak tanımlanan Lorentz geometrisi de kullanılmıştır. Öklid uzayındaki duruma benzer olarak, tanjant uzayların tüm noktalarda karşılıklı olarak uyumlu olması kriteri, 3–boyutlu Minkowski uzayının izometrilere grubunu tanımlayan $ISO(2, 1)$ Poincaré grubunun bir hareket manifoldunun persistan olmasını belirler.

Kahveci ve Yaylı, 3– boyutlu Minkowski uzayında persistan katı hareketlerin geometrik kinematığını incelemek için Lorentz geometrisinin sistematik olarak uygulanıp uygulanamayacağını araştırmıştır (Kahveci ve Yaylı 2022). Bir parametrelili bir katı hareketin persistan olması kavramının, hareketin ani bükümünün sabit bir adıma sahip olması özelliği ile tanımlandığı iyi bilinmektedir. 3–boyutlu Öklid ve Minkowski uzayları arasındaki temel fark, hareketlerin dayandığı eğrinin causal karakterine bağlı olarak, bükümlerin adımının Minkowski uzayında üç farklı değer almasıdır. Ayrıca, Kahveci ve Yaylı, vida teorisinin temellerine dayanarak, Frenet-Serret, uyarlanmış çatı ve Bishop hareketleri dahil olmak üzere, bazı önemli çatı hareketlerinin persistan olmasını modellemek için gerekli ve yeterli kriterleri belirlemiştir. Daha sonra bu özel hareketlerin aksode yüzeyleri ve onların geometrik özelliklerini tanımlamışlardır. Son olarak, 3–boyutlu Minkowski uzayında özel çatı hareketlerinin kapsamlı bir işleyişi için, persistan katı hareketlerin ve aksode yüzey-

lerinin bazı açıklayıcı örneklerini ortaya koymuşlardır.

1.4 Tezin Kapsamı ve Önemi

Katı cisim hareketlerinin geometrisini anlamak, robotikte temel problemlerden biridir. Bu amaçla, robotun bağlantıları genellikle katı cisimler olarak varsayılır ve böylece bir robotun uç işlevcisinin hareketi $SE(3)$ grubunda bir eğri ile temsil edilebilir. Bu tür eğrilerin geometrisinin detaylı bir incelemesi robotikte ve özellikle mekanizma teorisinde birçok önemli uygulamaya sahiptir. Bu tezin amacı, ani bükümünün sabit bir adıma sahip olması özelliği ile tanımlanan sabit adımlı (persistan) hareketlerin kapsamlı bir sınıflandırmasını vermek ve bu hareketlerin kinematikteki olası uygulamalarını sağlamaktır. Bununla birlikte, bu tez çalışmasının ana odak noktalarından bir diğeri ise, bazı özel katı hareketleri incelemek ve onların persistan olması için gerekli ve yeterli koşulları sunmaktır. Özellikle, uzayda bir eğriye bağlı ve yine bu eğri boyunca hareket eden bir çatı tarafından belirlenen hareketlere ve bu hareketlerin aksode yüzeyleri ile ilgili bazı geometrik özelliklere odaklanıyoruz.

Takip eden tartışma temelde şu katkıları sunmaktadır:

1. 3–boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında bazı özel persistan çatı hareketlerinin inşası.
2. Persistan çatı hareketleri ile eğrilerin ve regle yüzeylerin diferensiyel geometrisi arasındaki bazı çözümü zor bağlantıların ortaya çıkarılması.
3. Elde edilen teorik bulguların kinematiğe olan katkılarının ifadesi ve bazı önemli örnekler yardımıyla mevcut tezinin şekillendirilmesi.

Bu tez çalışmasının ana hatları aşağıdaki gibidir. Giriş bölümünde tezin kapsamı, amacı, önemi ve konunun literatüre sağladığı katkılar açıklanmıştır. İkinci bölüm tezde ihtiyaç duyulan bazı matematiksel ön bilgileri içeren temel tanım ve kavramlara ayrılmıştır.

Tezin üçüncü bölümü Öklid uzayında sabit adımlı hareketlerin kinematiğine ayrılmıştır. Bu bölümde 1–parametrelili sabit adımlı (persistan) hareketlerin Study tarafından Ribaucour hareketleri olarak adlandırılan bir hareket sınıfının genellemesi olduğu gösterilmiştir. Bu gösterim, söz konusu hareketlerin aksode yüzeyleri açısından basit bir tanımını sağlar. Daha sonra, Frenet-Serret, Bishop, doğruya göre simetrik hareketler gibi diğer özel katı cisim hareketleri araştırılmış ve bunların persistan olup olamayacağı incelenmiştir. Böylece özel hareketlerin persistan olması için geometrik şartların ne olduğu bulunabilir ve çoğu durumda aksode yüzeyleri biraz daha ayrıntılı olarak tanımlanabilir. Ayrıca, $\{T, N, B\}$ standart Frenet-Serret çatısına alternatif bir $\{N, C, W\}$ uyarlanmış çatısı ele alınarak, uyarlanmış çatı hareketleri için de persistan olma kriterleri sunulmuştur. Dahası, Frenet-Serret hareketinin adımı ile uyarlanmış çatı hareketinin adımı arasındaki bağlantıyı ifade ederek, slant helisler üzerinde hem Frenet-Serret hem de uyarlanmış çatı hareketinin persistan olduğu ispatlanmıştır.

Tezin dördüncü bölümü Minkowski uzayında sabit adımlı hareketlerin kinematiğine ayrılmıştır. 3–boyutlu Minkowski uzayında katı hareketler¹⁰ ve onların persistan olma ilkeleri tamamlanmıştır. Daha sonra, Frenet-Serret ve uyarlanmış çatı hareketleri dahil olmak üzere, bir eğriye bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden çatı hareketleri sınıflandırılmış ve bu hareketlerin persistan olmaları için gerekli ve yeterli koşullar türetilmiştir. Ayrıca, hareketin taban eğrisinin causal karakterine bağlı olarak üç farklı durumun mevcut olması dışında, birçok yönden Öklid geometrisindeki durum ile özdeş olan sabit ve hareketli aksode yüzeyleri bu bölümde tanımlanmıştır. Dahası, 3–boyutlu Minkowski uzayında Bishop hareketlerine kısa bir genel bakış sunulmuştur. Son olarak, hem persistan çatı hareketlerine hem de bunların aksode yüzeylerine ilişkin bazı açıklayıcı örnekler sunarak bölüm tamamlanmıştır.

Tezin beşinci ve son bölümünde ise tezin kısa bir değerlendirmesi yapılmış, elde edilen sonuçlara değinilmiş ve gelecekteki çalışmalara rehberlik edebilecek bazı problemler sunulmuştur.

¹⁰Öklid uzayının aksine, Minkowski uzayında katı cisim hareketi kavramı özel relativite ile bağdaşmadığından, Minkowski uzayının izometrisini katı hareketler olarak düşünmeyi öneriyoruz, ki bu sadece bir adlandırmadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde ihtiyaç duyulabilecek bazı matematiksel önbilgilerden söz edilmiştir.

2.1 Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Öklid Uzayı) n -boyutlu \mathbb{R}^n standart reel vektör uzayını ele alalım. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, \mathbb{R}^n uzayının her x ve y elemanı için,

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan \langle, \rangle fonksiyonu \mathbb{R}^n uzayında bir iç çarpımdır ve *Öklid anlamındaki iç çarpım* ya da \mathbb{R}^n uzayındaki *standart iç çarpım* olarak adlandırılır. Bu iç çarpımla birlikte, \mathbb{R}^n uzayı n -boyutlu *Öklid uzayı* adını alır (Hacısalıhoğlu 1996a).

- Özel olarak $n = 3$ alınırsa, 3-boyutlu \mathbb{R}^3 Öklid uzayı elde edilir.

Tanım 2.1.2 (Norm) \mathbb{R}^n Öklid uzayında her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elemanı için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona x vektörünün *normu* denir. Normu 1 olan vektöre de *birim vektör* adı verilir (Hacısalıhoğlu 1998).

Tanım 2.1.3 (Vektörel Çarpım) \mathbb{R}^3 Öklid uzayında her $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ elemanı için *vektörel çarpım*,

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu 1998).

Tanım 2.1.4 (Lagrange Formülü) \mathbb{R}^3 uzayının elemanları, α , β ve γ olmak üzere,

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \gamma$$

ile ifade edilen eşitlik *Lagrange Formülü* olarak adlandırılır (Jeffreys 1950).

Tanım 2.1.5 (Anti-Simetrik Matris) A , $n \times n$ tipinde bir reel matris olsun. Eğer

$$A^T = -A$$

gerçekleniyorsa, A matrisine *anti-simetrik matris* denir (Hacısalıhoğlu 1996a).

Teorem 2.1.1 A , $n \times n$ tipinde bir reel matris olmak üzere,

$$C = A - A^T$$

oluyorsa, C anti-simetrik matristir (Hacısalıhoğlu 1996a).

Lemma 2.1.1

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

bir anti-simetrik matris ve B anti-simetrik matrisinin bağımsız elemanları ile ifade edilen vektör $b = (b_1, b_2, b_3)$ olsun. Matris çarpımı ile vektörel çarpım arasında, \mathbb{R}^3 uzayının bütün x elemanları için,

$$Bx = b \wedge x$$

ile temsil edilen bir ilişki vardır (McCarthy 1990).

Tanım 2.1.6 (Ortogonal Matris) A , $n \times n$ tipinde bir reel matris olsun. Eğer

$$A^{-1} = A^T$$

gerçekleniyorsa, A matrisine *ortogonaldir* denir (Hacısalıhoğlu 1996a).

Tanım 2.1.7 (Cayley Formülü) B bir anti-simetrik matris olmak üzere,

$$A = (I + B)(I - B)^{-1}$$

ile verilen eşitlik *Cayley formülü* olarak adlandırılır. Cayley formülü ile, her B anti-simetrik matrisi bir ortogonal matris tanımlar (McCarthy 1990).

Tanım 2.1.8 (Regüler Matris) Bir matrisin determinanı sıfırdan farklı ise bu matrise *regüler* denir (Hacısalıhoğlu 1996a).

Tanım 2.1.9 (Genel ve Özel Lineer Grup) \mathbb{R}_n^n uzayındaki bütün regüler matrislerin cümlesinin çarpma işlemi ile birlikte oluşturduğu gruba *genel lineer grup* denir. Bu grup $GL(n, \mathbb{R})$ ya da $GL_n(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $GL(n, \mathbb{R})$ cümlesi,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}_n^n : \det A \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanır. $GL(n, \mathbb{R})$ içinde determinanı 1 olan bütün $n \times n$ tipindeki matrislerin cümlesinin çarpma işlemi ile birlikte oluşturduğu gruba *özel lineer grup* denir. Bu grup, $SL(n, \mathbb{R})$ ya da $SL_n(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $SL(n, \mathbb{R})$ cümlesi,

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{B : \det B = 1\}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu 1996a).

Tanım 2.1.10 (Lie Grubu) *Lie grubu*, diferensiyellenebilir grup operatörlerine sahip diferensiyellenebilir bir manifolddur. Yani,

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \mu(a, b) = ab$$

grup operatörü ve

$$\xi : G \rightarrow G, \xi(a) = a^{-1}$$

inversiyon operatörü olmak üzere, bu iki dönüşüm de diferensiyellenebilirdir (Karger ve Novak 1978).

Tanım 2.1.11 (Lie Cebiri) V bir vektör uzayı olmak üzere,

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y] = [Y, X] = XY - YX$$

ile tanımlı parantez operatörü,

1. $[,]$ bilineerdir. (Bilineer)
2. V uzayının bütün X ve Y elemanları için $[X, Y] = -[Y, X]$ sağlanır. (Antisimetrik)
3. V uzayının bütün X, Y ve Z elemanları için $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ sağlanır. (Jacobi Özdeşliği)

özelliklerine sahip ise $(V, [,])$ ikilisine bir *Lie cebiri* denir (Hacısalıhoğlu 1996a).

Tanım 2.1.12 (\mathbb{R}^n Uzayında İzometri) d , \mathbb{R}^n n -boyutlu Öklid uzayı üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için,

$$d(f(X), f(Y)) = d(X, Y) ; X, Y \in \mathbb{R}^n$$

gerçekleniyorsa, f fonksiyonuna \mathbb{R}^n uzayının bir *izometrisi* denir (Hacısalıhoğlu 2012).

Tanım 2.1.13 (Genel Hareket) \mathbb{R}^n , n -boyutlu Öklid uzayı, A , $n \times n$ tipinde bir ortogonal matris ve C , bir ötelemeye tekabül eden $n \times 1$ tipinde bir matris olmak üzere,

$$Y = AX + C$$

denklemleri ile verilen izometrilere her birine \mathbb{R}^n uzayında bir *genel hareket* denir.

- Özel olarak, \mathbb{R}^3 uzayında $C = 0$ olması durumunda,

$$Y = AX$$

ile verilen genel hareket *dönme hareketi* ya da *küresel hareket* olarak adlandırılır.

Burada A matrisi, dönme hareketini yaptıran,

$$A^T A = A A^T = I_3 \quad \text{ve} \quad \det A = 1$$

özelliklerine sahip bir matristir ve *dönme matrisi* olarak adlandırılır (Bottema ve Roth 1979).

Tanım 2.1.14 (*SO(3) Lie Grubu ve so(3) Lie Cebiri*) Ortogonal matrislerin $O(3)$ kümesi,

$$O(3) = \{A \in \mathbb{R}_3^3 : A^T A = AA^T = I_3\}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu küme matris çarpım işlemi ile birlikte bir gruptur ve *ortogonal grup* olarak adlandırılır. Buradan hareketle, determinantı 1 olan ortogonal matrislerin $SO(3)$ kümesi,

$$SO(3) = \{B \in O(3) : \det B = 1\}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu küme matris çarpım işlemi ile birlikte bir gruptur ve *özel ortogonal grup* olarak adlandırılır. $SO(3)$ grubu manifold yapısıyla ele alındığında ise 3–boyutlu bir manifolddur. Dolayısıyla, $SO(3)$ bir Lie grubudur. $SO(3)$ Lie grubunun $\mathfrak{so}(3)$ Lie cebiri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mathfrak{so}(3) = \{\Omega \in \mathbb{R}_3^3 : \Omega^T = -\Omega\}.$$

\mathbb{R}^3 uzayının bir elemanı $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olmak üzere, $\mathfrak{so}(3)$ Lie cebirinin elemanları,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

formuna sahip anti-simetrik matrislerdir (Hacısalihoglu 1996a).

2.2 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.2.1 (*Minkowski Uzayı*) $\mathbb{R}^{n-1,1}$ uzayında herhangi iki vektör çifti $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, n –boyutlu $\mathbb{R}^{n-1,1}$ Minkowski uzayı,

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

tarafından tanımlanan belirsiz bir metrik tensöre sahip bir \mathbb{R}^n reel vektör uzayıdır. Burada \langle, \rangle_L fonksiyonu, \mathbb{R}^n uzayında pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpımdır ve *Lorentz iç çarpımı* olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

- Özel olarak $n = 3$ alınırsa, 3–boyutlu $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski uzayı elde edilir.

Tanım 2.2.2 (Timelike, Spacelike ve Lightlike(Null) Vektör) \langle, \rangle_L belirsiz bir metrik olmak üzere, $\mathbb{R}^{n-1,1}$ uzayının keyfi bir x vektörü aşağıdaki causal karakterlerden birine sahip olabilir:

- $\langle x, x \rangle_L < 0$ ise timelike,
- $\langle x, x \rangle_L > 0$ ya da $x = 0$ ise spacelike ve
- $\langle x, x \rangle_L = 0$ ve $x \neq 0$ ise lightlike

(O'Neill 1983).

Tanım 2.2.3 (Causal Karakter) $\mathbb{R}^{n-1,1}$ uzayının bir x vektörünün ε_x causal karakteri,

$$\varepsilon_x = \begin{cases} -1, & \text{timelike ise} \\ 0, & \text{lightlike ise} \\ 1, & \text{spacelike ise} \end{cases}$$

ile tanımlanabilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.4 (Timelike, Spacelike ve Lightlike (Null) Eğri) Benzer şekilde, 3–boyutlu Minkowski uzayında bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $t \mapsto \alpha(t)$ regüler eğrisinin, eğer $\frac{d\alpha}{dt}$ hız vektörü bütün $t \in I$ için timelike (sırasıyla, spacelike, lightlike) ise, timelike (sırasıyla, spacelike, lightlike) olduğu söylenir (López 2014).

Tanım 2.2.5 (Norm) $\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski uzayında bir x vektörünün normu

$$\|x\|_L = \sqrt{|\langle x, x \rangle_L|}$$

ile tanımlanır. Normu 1 olan vektör *birim vektör* olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.6 (Birim Hızlı Eğri) Bir $\alpha = \alpha(t)$ regüler eğrisinin hız vektörü

$$\left\| \frac{d}{dt} \alpha(t) \right\|_L = 1$$

eşitliğini sağlıyorsa, o zaman eğriye *birim hızlı eğri* denir (López 2014).

Tanım 2.2.7 (Vektörel Çarpım) $\mathbb{R}^{2,1}$ 3–boyutlu Minkowski uzayında herhangi iki vektör çifti $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere, \wedge Öklid vektörel çarpımının $z = 0$ düzlemine göre yansıması olan \wedge_L Minkowski vektörel çarpımı,

$$x \wedge_L y = \begin{vmatrix} -i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_3 y_2 - x_2 y_3, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlanır (López 2014).

Tanım 2.2.8 (Lagrange Formülü) $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayının elemanları, x , y ve z olmak üzere,

$$x \wedge_L (y \wedge_L z) = \langle x, y \rangle_L z - \langle x, z \rangle_L y$$

ile ifade edilen eşitlik 3–boyutlu Minkowski uzayında *Lagrange Formülü* olarak adlandırılır (López 2014).

Teorem 2.2.1 $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayının elemanları, x , y ve z olmak üzere, Minkowski iç çarpımı ve Minkowski vektörel çarpımı arasında

$$\langle x \wedge_L y, z \rangle_L = \det(x, y, z)$$

bağıntısı vardır (López 2014).

Tanım 2.2.9 (Yarı Anti-Simetrik Matris) A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer

$$A^T = -\varepsilon A \varepsilon$$

gerçekleniyorsa, A matrisine *yarı anti-simetrik matris* denir. Burada ε ,

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ile tanımlı işaret matrisidir (O'Neill 1983).

Teorem 2.2.2 A , $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere,

$$C = A - \varepsilon A^T \varepsilon$$

oluyorsa, C matrisi yarı anti-simetrik bir matristir (O'Neill 1983).

Lemma 2.2.1

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

bir yarı anti-simetrik matris ve $b = (b_1, b_2, b_3)$ olsun. Matris çarpımı ile Minkowski vektörel çarpımı arasında, $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayının bütün x elemanları için,

$$Bx = b \wedge_L x$$

ile temsil edilen bir ilişki vardır (Özkaldı ve Gündoğan 2010).

Tanım 2.2.10 (Yarı Ortogonal Matris) A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer

$$A^T \varepsilon A = \varepsilon$$

gerçekleniyorsa, A matrisine *yarı ortogonaldir* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.11 ($SO(2,1)$ Lie Grubu ve $\mathfrak{so}(2,1)$ Lie Cebiri) Determinantı 1 olan elemanları içeren bir Lorentz grubu olan belirsiz özel ortogonal grubun cümlesi,

$$SO(2,1) = \{R \in O(2,1) \mid \det R = 1\}$$

ile tanımlanır. Burada $O(2,1)$, $\epsilon = \text{diag}[-1, 1, 1]$ olmak üzere, $R^T \epsilon R = \epsilon$ eşitliğini sağlayan ve \mathbb{R}_3^3 uzayının bütün R matrislerinin bir cümlesi olan belirsiz bir ortogonal gruptur (Lorentz grubu olarak da bilinir). Ek olarak, $SO(2,1)$ grubunun $\mathfrak{so}(2,1)$ Lie cebiri, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir vektör olmak üzere, elemanları

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı yarı anti-simetrik matrisler olan

$$\mathfrak{so}(2,1) = \{\Omega \in \mathbb{R}_3^3 \mid \Omega^T = -\epsilon \Omega \epsilon\}$$

cümlesi ile ifade edilir (O'Neill 1983).

3. ÖKLİD UZAYINDA SABİT ADIMLI HAREKETLER

Selig ve Carricato, $SE(3)$ grubunun 1–boyutlu persistan manifoldları ve dahası Frenet-Serret hareketleri gibi, özellikle verilen bir eğriye bağlı ve yine bu eğri boyunca hareket eden bir çatı ile tanımlı bir parametrelili hareketleri çalışmıştır (Selig ve Carricato 2017). Genelde bir eğriye bağlı herhangi bir çatı hareketinin persistan olması, kayan ve yuvarlanan hızların oranı ile tanımlanan ani bükümün adımı ile karakterize edilir. Bu bölümdeki teoremler ve sonuçlar Selig ve Carricato tarafından inşa edilen teori yardımıyla yeniden ele alınmış ve bir eğri üzerinde farklı persistan çatı hareketleri inşa etmenin mümkün olduğu vurgulanmıştır.

Bu bölümde öncelikle, bir parametrelili persistan katı cisim hareketi kavramının Study tarafından *Ribaucour hareketleri* olarak adlandırılan bir hareket sınıfının bir genellemesi olduğu gösterilmiştir. Bu gösterim, bu hareketlerin aksode yüzeyleri açısından basit bir tanımını sağlar. Daha sonra diğer özel katı cisim hareketleri araştırılmış ve bunların persistan olup olamayacağı incelenmiştir. İncelenen özel hareketler, doğruya göre simetrik hareketler ve düzgün bir eğriye bağlı hareketli çatı tarafından üretilen hareketlerdir. Özel hareketlerin persistan olması için geometrik şartların ne olduğu bulunmuş ve çoğu durumda aksode yüzeylerini biraz daha ayrıntılı olarak tanımlamanın mümkün olabileceği gösterilmiştir.

Daha sonra, Kahveci ve Yaylı tarafından verilen teori yardımıyla Frenet-Serret ve uyarlanmış çatı hareketleri gibi, verilen bir slant helise bağlı ve yine bu slant helis boyunca hareket eden herhangi bir katı cisim hareketi için persistan olmanın geometrik koşulları incelenmiştir (Kahveci ve Yaylı 2019). Slant helisler üzerinde Frenet-Serret hareketinin yanı sıra uyarlanmış çatı hareketinin de persistan olduğu ispatlanmıştır.

3.1 Study'nin Ribaucour Problemi

Study, ani büküm hızı daima bir pür dönme olan, yani adımı 0 (sıfır) olan katı cisim yer değiştirmeleri grubunun 1, 2 ve 3–boyutlu alt manifoldlarını araştırmıştır. Ele aldığımız tez çalışmasında, sadece 1–boyutlu alt manifoldlar göz önüne alınacaktır.

Bir katı cisim hareketinin, $SE(3)$ katı hareketler grubundaki $G(t)$ şeklinde bir eğri ile verildiğini varsayalım. $G(t)$ hareketinin S_d ani bükümü,

$$S_d = \frac{dG(t)}{dt}G^{-1}(t) \quad (3.1)$$

ile verilir. Bu ifade $G(t)$ eğrisinin teğet vektörüne karşılık gelen Lie cebiri elemanıdır. $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin elemanlarının adımlı doğrular olarak tanımlanabileceği iyi bilinmektedir. Eğer $G(t)$ hareketinin $SE(3)$ grubunun 4×4 tipinde bir matris temsili, ki bu homojen gösterim olarak da adlandırılır, ile verildiğini düşünürsek, bu durumda genel Lie cebirinin bir elemanı,

$$S_d = \begin{bmatrix} 0 & -P_{03} & P_{02} & P_{23} + pP_{01} \\ P_{03} & 0 & -P_{01} & P_{31} + pP_{02} \\ -P_{02} & P_{01} & 0 & P_{21} + pP_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada P_{ij} bileşenleri bükümün ekseninin Plücker koordinatlarıdır ve p adımdır. Daha genel bir ifade ile, hareket, bir eksen etrafında dönme ve yine bu eksen boyunca bir ötelemenin bileşkesi olan ani bir vida hareketidir. Dönme ve öteleme hızlarının oranı bükümün adımı ile verilmektedir. p adımı 0 (sıfır) olduğunda ($p = 0$), hareket, bir eksen etrafında ani bir pür dönme olur. p adımının sonsuz olması durumunda ise hareket, ani bir pür öteleme olur.

Ω , $\omega = (P_{01}, P_{02}, P_{03})^T$ açısal hızına karşılık gelen 3×3 tipinde bir anti-simetrik matris olmak üzere, Lie cebirinin elemanları,

$$S_d = \begin{bmatrix} \Omega & \nu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde parçalı formda da verilebilir. Lie cebirinin elemanlarını alternatif olarak,

$$S_d = \begin{pmatrix} \omega \\ \nu \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

şeklinde 6–bileşenli vektör formunda da yazmak mümkündür.

Her katı cisim hareketi, sabit bir aksode üzerinde yuvarlanan ve kayan hareketli bir aksodenin hareketi ile üretilebilir (Bottema ve Roth 1979). $SE(3)$ grubundaki bir

$G(t)$ hareketinin sabit aksodesi, t değişken iken, S_d bükümünün ekseni ile verilir. Hareketli çatıda ani büküm $S_b = G^{-1}(t)S_dG(t)$, yani sabit çatıda bükümün adjoint dönüşümü, ile verilir. S_b ani bükümü ayrıca,

$$S_b = G^{-1}(t)\frac{dG(t)}{dt} \quad (3.5)$$

bağıntısı yardımıyla da bulunabilir. Bu durumda, $SE(3)$ grubundaki bir $G(t)$ hareketinin hareketli aksodesi, t değişken iken, S_b bükümünün ekseni ile verilir. Adjoint dönüşümü bir bükümün adımını koruduğundan, sabit çatıdaki bükümü hareketli çatıdaki büküme dönüştürürken, sabit aksodeyi de hareketli aksodeye dönüştürecektir.

Study'nin 1–boyutlu Ribaucour hareketleri ile ilgili tanımı birbiri üzerinde kaymadan yuvarlanan koniler ya da silindirler ile üretilen aşık ar durumlardan ve birbiri üzerinde kaymadan yuvarlanan iki genel regle yüzey ile üretilen aşık ar olmayan durumlardan oluşmaktadır (Study 1913). Söz konusu aşık ar durumlar arasında birbiri üzerinde yuvarlanan genel koniler ile verilen sabit bir nokta etrafındaki dönmeler ve birbiri üzerinde yuvarlanan genel silindirler ile verilen düzlemsel hareketler de yer almaktadır.

Yukarıda açıklandığı gibi hareketin aksodelerini düşünürsek bu çözüm basittir. Hareketin ani bükümünün vida ekseni, söz konusu anda çakışan iki aksode yüzeyinin üreteç doğruları ile verilir. Ani bükümün adımı, kayan ve yuvarlanan hızların oranı ile verilmektedir. Bu nedenle, eğer kayma yoksa ani bükümün adımı 0 (sıfır) olacaktır, yani hareket bir pür dönme olacaktır. Dolayısıyla, bir regle yüzeyin başka bir regle yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanması yoluyla elde edilen herhangi bir hareketin bir Ribaucour hareketi üreteceği açıktır. Üstelik herhangi bir katı hareket sabit aksode üzerinde yuvarlanan ve kayan hareketli aksode ile verilebildiğinden, bu yöntem böyle bir hareketi üretmenin tek yoludur.

Varsayalım ki $G(t)$ bir Ribaucour hareketi olsun. Bu durumda S_d ani bükümünün adımı 0 (sıfır) olacaktır. L_0 , 0 (sıfır) adımlı sabit bir büküm, yani $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin bir elemanı olsun. Belirtildiği gibi bir bükümün adımı, grubun adjoint dönüşümü altında invaryanttır. Dahası adjoint dönüşümü uzayda doğrular üzerinde geçişmelidir.

Bu nedenle, $G(t)$ hareketinin ani büküm hızı, $H = H(t)$ grubun keyfi bir düzgün hareketi olmak üzere,

$$S_d = HL_0H^{-1} \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. Denklem (3.1) yardımıyla genel bir Ribaucour hareketi için,

$$\frac{dG(t)}{dt} = HL_0H^{-1}G(t) \quad (3.7)$$

diferensiyel denklemini elde edilir. Bu durumda, hareketin sabit aksodesi HL_0H^{-1} ve hareketli aksodesi de $G^{-1}HL_0H^{-1}G$ ile verilir.

3.2 Bir Parametrelili Uzay Hareketleri

\mathbb{R}^3 uzayında bir $\gamma(t)$ eğrisi boyunca 1-parametrelili bir uzay hareketi, hareketin dönme kısmı $R(t) \in SO(3)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto f(x) = R(t)x + \gamma(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ile tanımlıdır (Bottema ve Roth 1979).

Ani kinematikte, 3-boyutlu \mathbb{R}^3 uzayının 1-parametrelili uzay hareketlerinin grubu $SE(3)$ ile gösterilir ve *Öklid grubu* olarak adlandırılır. $SE(3)$ katı cisim hareketleri grubu ve $GL(4, \mathbb{R})$ genel lineer grubu arasında,

$$\begin{aligned} SE(3) &\rightarrow GL(4, \mathbb{R}) \\ (R(t), \gamma(t)) &\mapsto \begin{bmatrix} R(t) & \gamma(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ile verilen 1 : 1 bir homomorfizm vardır (Selig 2005).

Böyle bir matrisi bir noktaya uygularsak, 1-parametrelili uzay hareketlerinin alternatif bir ifadesi,

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) & \gamma(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada x ve $f(x)$, sırasıyla, orijinal ve dönüştürülmüş pozisyon vektörleridir. Kabul edelim ki bir katı hareket, $G(t) = \begin{bmatrix} R(t) & \gamma(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ile verilsin. Bu durumda $G(t)$, 1-parametrelili uzay hareketinin bir matris ifadesi olur.

$$Y(t) = \begin{bmatrix} f(x) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere, denklem (3.10) yardımıyla,}$$

$$Y(t) = G(t)X \quad (3.11)$$

olduğu kolayca görülebilir.

t zaman parametresine göre türev alınarak,

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dt} &= \frac{dG(t)}{dt}X \\ \frac{dY(t)}{dt} &= \frac{dG(t)}{dt}G^{-1}(t)Y(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir.

$S_d = \frac{dG(t)}{dt}G^{-1}(t)$, sabit referans çatıda $G(t)$ hareketinin bir ani bükümüdür. Ayrıca, $S_b = G^{-1}(t)\frac{dG(t)}{dt}$ de hareketli referans çatıda $G(t)$ hareketinin bir ani bükümüdür. Dahası, S_d ve S_b $SE(3)$ katı hareketler grubunun $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin elemanlarıdır (Selig ve Carricato 2017).

Böylece S_d ani bükümü,

$$S_d = \begin{bmatrix} \Omega & \nu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dR}{dt}R^T & \frac{d\gamma}{dt} - \omega \wedge \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

olarak da ifade edilebilir. Burada Ω , $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ açısal hızına karşılık gelen bir anti-simetrik matris ve ν , 3-bileşenli bir vektördür (Selig ve Carricato 2017).

Lie cebiri elemanı olan S_d bükümünü, $\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ hareketin lineer hızı olmak üzere, 6-bileşenli vektör formunda yazmak uygun olacaktır,

$$S_d = (\omega, \nu). \quad (3.14)$$

$S_d = (\omega, \nu)$ bükümünün adımı,

$$p = \frac{\langle \omega, \nu \rangle}{\langle \omega, \omega \rangle} \quad (3.15)$$

ile hesaplanır.

Böylece, $c = \frac{\nu \wedge \omega}{\langle \omega, \omega \rangle}$ olmak üzere,

$$S_d = (\omega, c \wedge \omega + p\omega) \quad (3.16)$$

eşitliğini yazmak mümkündür.

t anında, hareketin ani vida eksenini $L = c + t\omega$ doğrusudur. Ayrıca, $(\omega, c \wedge \omega)$ doğrunun Plücker koordinatlarıdır (McCarthy 1990), (McCarthy 2013).

3.3 Persistan Katı Cisim Hareketleri

Kabul edelim ki M , $SE(3)$ uzayının bir alt manifoldu ve G , M içinde sabit bir nokta olsun. Alt manifoldun G noktasındaki tanjant uzayı $T_G M$ ile verilir. Tanjant uzayın grupta birime geri çevirilmesi, Lie cebirinin bir alt uzayı olan $(T_G M)G^{-1} \subset \mathfrak{se}(3)$ ifadesini verir. Böyle bir alt uzay genellikle *vida sistemi* olarak adlandırılır. Bu gösterim yardımıyla, bir persistan alt manifoldun tanımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Tanım 3.3.1 (Persistan Alt Manifold) G_1 ve G_2 bir $M \subseteq SE(3)$ alt manifoldu içinde herhangi iki nokta çifti olsun. M alt manifoldunun persistan olması için gerek ve yeter koşul bu noktalarındaki tanjant uzaylar tarafından belirlenen vida sistemlerinin uyumlu olmasıdır. Yani, $SE(3)$ grubunun bazı H elemanları için,

$$(T_{G_1} M)G_1^{-1} = H(T_{G_2} M)G_2^{-1}H^{-1} \quad (3.17)$$

olmalıdır (Selig ve Carricato 2017).

Bu çalışma boyunca sadece 1–boyutlu persistan katı cisim hareketleri göz önünde bulundurulacaktır. Böyle bir 1–boyutlu alt manifoldun persistan olması, herhangi bir noktada büküm hızının sabit adıma sahip olması gerektiği anlamına gelir. Diğer bir deyişle,

$$\frac{dG}{dt}G^{-1} = HL_p H^{-1} \quad (3.18)$$

olmalıdır. Burada L_p , p adımlı sabit bir büküm ve H daha önce belirtildiği gibi, grupta keyfi düzgün bir harekettir.

Uyarı 3.3.1 Eğer S_d ani bükümü 0 (sıfır) adımlı ise ($p = 0$), eğri üzerindeki çatı hareketi bir Ribaucour hareketi olacaktır.

Bu hareketlerin aksodeler cinsinden karakterizasyonu, Kesim 3.1 ile benzerdir. Artık burada, sabit ve hareketli koordinat çatılarında büküm hızları ile ilgili birkaç küçük sonuç incelenebilir.

Lemma 3.3.1 Kabul edelim ki bir persistan hareketin büküm hızı HL_pH^{-1} ile verilsin. Bu durumda, $G = HU$ katı hareket olmak üzere, hareketli çatıdaki büküm hızı,

$$U^{-1}L_pU \quad (3.19)$$

ile ifade edilir (Selig ve Carricato 2017).

İspat. Sabit aksode HL_pH^{-1} ile verildiğinden, hareketli aksode,

$$\begin{aligned} G^{-1}HL_pH^{-1}G &= U^{-1}H^{-1}(HL_pH^{-1})HU \\ &= U^{-1}L_pU \end{aligned} \quad (3.20)$$

olarak elde edilir. ■

Lemma 3.3.2 $G = HU$, HL_pH^{-1} büküm hızına sahip bir persistan hareket olsun. Bu durumda, $Z_b = H^{-1}\dot{H}$ ve $Z_d = \dot{U}U^{-1}$ olmak üzere,

$$L_p = Z_b + Z_d \quad (3.21)$$

eşitliği sağlanır (Selig ve Carricato 2017).

İspat. $G = HU$ eşitliği, (3.18) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt}G^{-1} &= HL_pH^{-1} \\ &= (\dot{H}U + H\dot{U})U^{-1}H^{-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) eşitliği, soldan H^{-1} ve sağdan H ile çarpılırsa,

$$L_p = H^{-1}\dot{H} + \dot{U}U^{-1} \quad (3.23)$$

eşitliği elde edilir. ■

Uyarı 3.3.2 Eğer H ve L_p verilirse, bu durumda U hareketi,

$$\frac{dU}{dt} = (L_p - Z_b)U \quad (3.24)$$

denkleminin integrali yardımıyla bulunabilir. Benzer şekilde, eğer U ve L_p verilirse, bu durumda H hareketi,

$$\frac{dH}{dt} = H(L_p - Z_d) \quad (3.25)$$

denkleminin integrali yardımıyla bulunabilir.

Örnekler

Uyarı 3.3.2'de bahsedilen H ve U hareketleri için diferensiyel denklemlerin integral hesabını yapmak zordur. Lie cebiri elemanlarının sabit olması ve çözümlerin sadece üstel olması istisnai durumlardır. Bu yüzden ilk örnekler olarak bunlar alınabilir.

Varsayalım ki $Z_b = H^{-1}\dot{H}$ sabit ve $Z_b = S$ olsun. Dolayısıyla, $H(0) = I$ başlangıç koşulu olarak alınırsa, $H = e^{tS}$ elde edilir. L_p , p adımlı sabit bir büküm olmak üzere, p adımlı bir p -persistan hareketi üretmek için,

$$\frac{dU}{dt} = (L_p - S)U \quad (3.26)$$

denklemini çözümler. $(L_p - S)$ çarpanı sabit olduğundan çözüm yine üsteldir. Yani, $U(0) = I$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$U = e^{t(L_p - S)}U(0) \quad (3.27)$$

şeklindedir. Böylece persistan hareket,

$$G(t) = HU = e^{tS}e^{t(L_p - S)} \quad (3.28)$$

çarpımı ile verilecektir. Burada $S_1 = S$ ve $S_2 = L_p - S$ alınır, hareketin adımı $S_1 + S_2$ bükümünün adımı ile verilmek üzere,

$$G(t) = e^{tS_1} e^{tS_2} \quad (3.29)$$

bir persistan hareket olacaktır. Bu sonuç, 2–bağlantılı keyfi bir kinematik zincir için Carricato, Martinez ve Zlatanov tarafından incelenmiştir (Carricato ve Martinez 2010), (Carricato ve Zlatanov 2014).

Bu basit koşul altında hareketin sabit ve hareketli aksodelerini de tanımlamak mümkündür. L_0 , L_p bükümü ile aynı eksenli bir doğru olmak üzere, sabit ve hareketli aksodeler, sırası ile,

$$e^{tS_1} L_0 e^{-tS_1} \quad \text{ve} \quad e^{-tS_2} L_0 e^{tS_2} \quad (3.30)$$

ile verilir. Bu yüzeylerin niteliği, üstelde yer alan bükümlerin adımına bağlıdır. Bu durumda $e^{tS} L_0 e^{-tS}$ regle yüzeyi, eğer S bükümünün adımı 0 (sıfır) ise bir küresel hiperboloid ya da S ve L_0 dik ise bir çembere teğet olan doğrular olacaktır. Eğer S bükümünün adımı sıfırdan farklı, ama sonlu, ise bu durumda regle yüzey, genel olarak, bir helikoid olacaktır. p , S bükümünün adımı olmak üzere, S ve L_0 arasındaki dik uzaklık δ ve bu eksenler arasındaki açı $\arctan\left(\frac{\delta}{p}\right)$ şeklindedir. Böyle bir durumda L_0 tarafından üretilen regle yüzey, bir helisin tanjant açılabilir yüzeyi olacaktır. Bu helis, L_0 ve S eksenleri arasındaki ortak dikme ayağı tarafından izlenen eğridir.

3.4 Persistan Frenet-Serret Hareketleri

Bir katı cisim hareketini belirlemenin bir başka yolu da bir eğri kullanmaktır. Uzayda bir eğri göz önünde bulundurulduğunda, cisim üzerinde belirli bir noktanın eğriyi takip etmesi ve yönlendirmenin eğrinin Frenet-Serret çatısı tarafından belirlenmesi gerekmektedir (Bottema ve Roth 1979).

Burada notasyonu belirlemek adına Frenet-Serret hareketleri ile ilgili bazı temel fikirleri hatırlatacağız. Bir Frenet-Serret hareketi için cismin hareketi, bir $\gamma(\mu)$ eğrisinin

Frenet çatısına göre belirlenir. Frenet çatısının denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu}t &= v\omega_f \wedge t \\ \frac{d}{d\mu}n &= v\omega_f \wedge n \\ \frac{d}{d\mu}b &= v\omega_f \wedge b\end{aligned}\quad (3.31)$$

şeklindedir. Burada t , n ve b , sırasıyla, eğrinin teğet, normal ve binormal vektörleri ve v eğrinin hızı, $\kappa = \left\| \frac{d}{d\mu}t \right\|$ ve $\tau = -\left\langle n, \frac{d}{d\mu}b \right\rangle$, sırasıyla, eğrinin eğrilik ve torsiyon fonksiyonları olmak üzere, $\omega_f = \tau t + \kappa b$ Frenet çatısının Darboux vektörüdür.

$R = [t \mid n \mid b]$ olmak üzere hareket,

$$G(\mu) = \begin{bmatrix} R & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (3.32)$$

ile verilir.

Bir Frenet-Serret hareketinin persistan olması için gerekli ve yeterli koşulları elde etmek oldukça zordur. Ancak klasik teoremler yardımıyla aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir.

Teorem 3.4.1 Hareketin dayandığı eğrinin eğrilik ve torsiyon fonksiyonları, sırasıyla, κ ve τ olsun. Bu durumda Frenet-Serret hareketinin ani bükümü,

$$p_f = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}\quad (3.33)$$

adımına sahiptir (Selig ve Carricato 2017).

İspat. Bir Frenet-Serret hareketinin ani büküm hızı,

$$\frac{dG(\mu)}{d\mu}G^{-1}(\mu) = v \begin{bmatrix} \Omega R & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} \Omega & t - \omega_f \wedge \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (3.34)$$

ile verilir. Burada Ω , ω_f vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matristir. Bu durumda,

$$t = \omega_f \wedge \left(\frac{-\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} n \right) + \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \omega_f\quad (3.35)$$

yazılabilir. Böylece hareketin ani bükümü,

$$\nu = \left(\gamma + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}n\right) \wedge \omega_f + \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}\omega_f \quad (3.36)$$

olmak üzere,

$$S_d = v \begin{pmatrix} \omega_f \\ \nu \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

şeklinde yazılabilir. Bu bükümün adımı,

$$p_f = \frac{\langle \omega_f, \nu \rangle}{\langle \omega_f, \omega_f \rangle} = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \quad (3.38)$$

olarak elde edilir. ■

Bu sonuç Bottema ve Roth tarafından 9. Bölüm, 2. Kısım, Örnek 2'de verilmiştir (Bottema ve Roth 1979).

3.4.1 Persistan olma

Teorem 3.4.1 şu basit sonuçlara sahiptir:

Sonuç 3.4.1 Hareketin dayandığı eğrinin eğrilik ve torsiyon fonksiyonları, sırasıyla, κ ve τ olsun. Bu durumda Frenet-Serret hareketinin persistan olması için gerek ve yeter koşul $p_f = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$ adımının sabit olmasıdır (Selig ve Carricato 2017).

Teorem 3.4.2 Eğer $\gamma(\mu)$ eğrisi $p_f \neq 0$ olmak üzere, p -persistan bir Frenet-Serret hareketi üretirse, yani $p_f = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$ adımı sabit ise, $\gamma(\mu)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyon fonksiyonları Φ parametresi cinsinden,

$$\kappa = \frac{1}{2p_f} \cos \Phi \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{1}{2p_f} (\sin \Phi + 1) \quad (3.39)$$

şeklinde parametrize edilebilir. Eğrilik ve torsiyon fonksiyonları alternatif olarak,

$$\kappa = \frac{1 - t^2}{2p_f(1 + t^2)} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{(1 + t)^2}{2p_f(1 + t^2)} \quad (3.40)$$

rasyonel fonksiyonları ile de parametrize edilebilir (Selig ve Carricato 2017).

İspat. Eğer $p_f \neq 0$ ise $p_f = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$ bağıntısı,

$$\kappa^2 + \left(\tau - \frac{1}{2p_f} \right)^2 = \left(\frac{1}{2p_f} \right)^2 \quad (3.41)$$

eşitliğini verecek şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu eşitlik, koordinatları κ ve τ olan düzlemde, τ eksenini boyunca $\frac{1}{2p_f}$ merkezli ve $\frac{1}{2p_f}$ yarıçaplı bir çemberi ifade eder. Bu çemberin trigonometrik parametrelendirmesi aranan sonucu verir.

$t = \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right)$ alındığında, yarım açı formülleri yardımıyla alternatif rasyonel parametrelendirme elde edilir. ■

Uyarı 3.4.1 Eğer Φ sabit ise, bu durumda κ eğriliği ve τ torsiyonu da sabit olacaktır ve $\gamma(\mu)$ eğrisi bir helis olacaktır. Ayrıca, bir Ribaucour hareketi için (yani $p = 0$ adımlı bir hareket için) $\tau = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\gamma(\mu)$ eğrisi bir düzlem eğrisi olacaktır.

Uyarı 3.4.2 $\frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$ sabitli eğriler, eğriler ve yüzeylerle ilgili klasik literatürde yaygın olarak çalışılmamıştır¹. Standart eğri teorisi, bir eğrilik ve bir torsiyon fonksiyonu verildiğinde, katı hareket boyunca bu özelliklere sahip bir tek eğrinin olduğunu söyler. Bu nedenle, yukarıdaki parametrelendirmeler ile verilen eğrilik ve torsiyon fonksiyonlarına sahip eğrilerin çizimleri sayısal olarak üretilebilir (Şekil 3.1).

3.4.2 Sabit ve hareketli aksode yüzeyleri

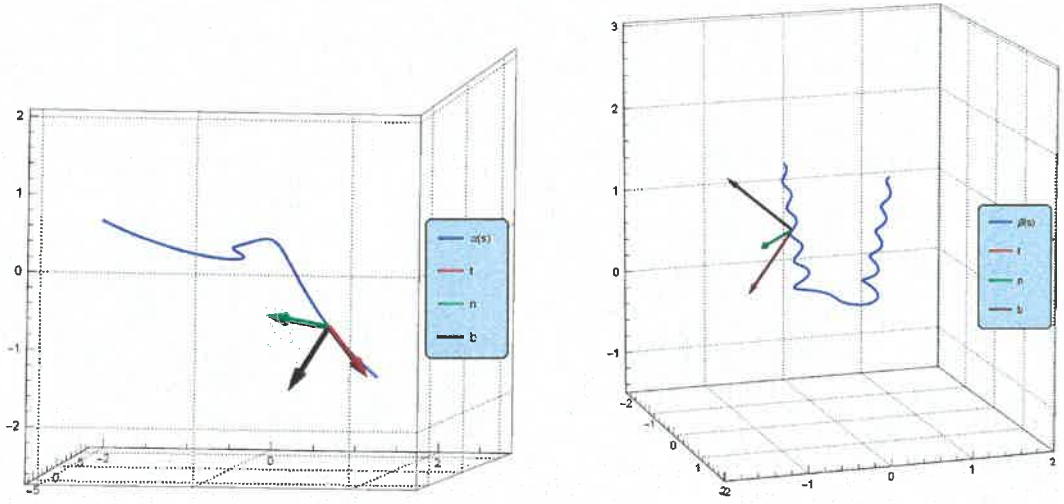
Aşağıdaki sonuçlar Bottema ve Roth tarafından verilmiştir (Bottema ve Roth 1979).

Teorem 3.4.3 Bir Frenet-Serret hareketinin sabit aksodesi, eğrinin ω_f Darboux vektörüne paralel olan ve eğrinin asli normalini boyunca hareketi oluşturan eğriden kaydırılan bir noktadan geçen üreteç doğrularından oluşur. Böylece sabit aksode yüzeyi,

$$\alpha(\mu, \lambda) = \left(\gamma(\mu) + \frac{\kappa(\mu)}{\kappa^2(\mu) + \tau^2(\mu)} n(\mu) \right) + \lambda \omega_f(\mu) \quad (3.42)$$

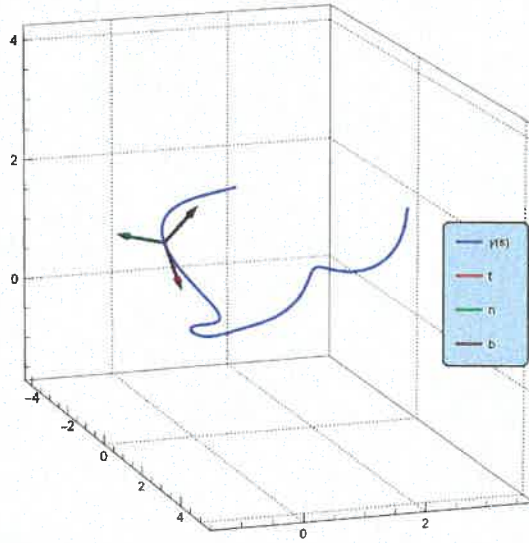
ile verilir. Genellikle bu regle yüzeyi açılabilir değildir.

¹Ancak $\tau(\kappa^2 + \tau^2)^{-1}$ ifadesi, genel bir eğrinin asli normalinden elde edilen bir regle yüzeyinin dağılma parametresi olarak bilinir (Wilmore 2012).



(a)

(b)



(c)

Şekil 3.1 (a) $\kappa = \frac{(1-t^2)}{3(t^2+1)}$ ve $\tau = \frac{(t+1)^2}{3(t^2+1)}$ olan eğri üzerindeki $p_f = \frac{3}{2}$ adimli persistan Frenet-Serret hareketi (b) $\kappa = \frac{10s}{1+0.25s^2}$ ve $\tau = \frac{5s^2}{1+0.25s^2}$ olan eğri üzerindeki $p_f = \frac{1}{20}$ adimli persistan Frenet-Serret hareketi (c) $\kappa = \frac{4(1-t^2)}{3(t^2+1)}$ ve $\tau = \frac{4(t+1)^2}{3(t^2+1)}$ olan eğri üzerindeki $p_f = \frac{3}{8}$ adimli persistan Frenet-Serret hareketi

İspat. Denklem (3.36) yardımıyla, aksode yüzeyinin

$$\gamma + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}n \quad (3.43)$$

noktasından geçtiği ve doğrultmanının ω_f olduğu görülebilir. Böylece regle yüzeyin parametrik formu elde edilir. ■

Teorem 3.4.4 Frenet-Serret hareketinin hareketli aksodesi bir konoiddir.

İspat. Bir Frenet-Serret hareketinin hareketli çatıdaki ani büküm hızı,

$$G^{-1}(\mu)\frac{dG(\mu)}{d\mu} = v \begin{bmatrix} R^T & -R^T\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega R & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} R^T\Omega R & R^T t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

ile verilir. Frenet-Serret hareketinin inşasıyla, cismin sabit çatısının koordinat eksenleri $\mu = 0$ noktasında eğrinin Frenet çatısına karşılık gelir. Öyleyse,

$$t_0 = t(0) = R^T(\mu)t(\mu) \quad (3.45)$$

ve benzerlerini yazalım. Özel olarak,

$$\omega_{f_0} = R^T(\mu)\omega_f(\mu) \quad (3.46)$$

olsun. Cismin hareketli çatıdaki büküm hızı,

$$\nu_0 = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}n_0 \wedge \omega_{f_0} + \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}\omega_{f_0} \quad (3.47)$$

olmak üzere,

$$S_b = v \begin{pmatrix} \omega_{f_0} \\ \nu_0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

olacaktır. Bu koordinatlarda $\gamma(0) = 0$ olduğu açıktır. Böylece hareketli aksodenin üreteç doğruları,

$$l(\mu) = \begin{pmatrix} \omega_{f_0} \\ \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}n_0 \wedge \omega_{f_0} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

ile verilir. Burada $\omega_{f_0} = \tau t_0 + \kappa b_0$ şeklindedir. Bu doğruların hepsi karşılıklıdır ve

$$l_n = \begin{pmatrix} n_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

sabit doğrusuna diktir. Yani hepsi ortogonal olarak doğruyla kesişir. Bu nedenle regle yüzey bir konoiddir. ■

Teorem 3.4.5 Bir persistan Frenet-Serret hareketinin hareketli aksodesi, $p \neq 0$ olmak üzere, çift kanatlı bir hiperbolik paraboloiddir².

İspat. Yukarıda verdiğimiz Teorem 3.4.4 gereği, genel bir Frenet-Serret hareketinin hareketli aksodesi, hareketli koordinatlarda,

$$\alpha(\mu, \lambda) = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} n_0 + \lambda \omega_{f_0} \quad (3.51)$$

ile verilir. t_0 , n_0 ve b_0 eksenleri boyunca, sırasıyla, x , y ve z koordinatlarını alırsak, yüzey üzerinde bir nokta,

$$\begin{aligned} x(\mu, \lambda) &= \lambda \tau \\ y(\mu, \lambda) &= \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \\ z(\mu, \lambda) &= \lambda \kappa \end{aligned} \quad (3.52)$$

parametrik denklemleri ile verilir. Persistan bir Frenet-Serret hareketi için $p_f = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$ olduğunu biliyoruz. Böylece yukarıdaki parametrizasyonda $y(\mu, \lambda) = \frac{p_f \kappa}{\tau}$ olur. κ , τ ve λ ifadelerinin sadeleştirilmesi ile,

$$xy = p_f z \quad (3.53)$$

çift kanatlı hiperbolik paraboloid denklemi elde edilir. ■

3.5 Bishop Hareketleri

Bishop hareketleri, önceki kısımda çalışılan Frenet-Serret hareketlerine benzerdir. Tek fark, eğrinin Bishop çatısını takip etmek için cismin yönlendirmesinin gerekli olmasıdır. Bu tür hareketler yıllar boyunca robotikte ve bilgisayar destekli tasarımda farklı uygulamalar için birçok yazar tarafından incelenmiştir (Klok 1986), (Ravani ve Meghdari 2004), (Selig 2007).

²Aynı zamanda bir ortogonal hiperbolik paraboloid olarak da bilinir.

Buradaki ana sonuç, böyle bir hareketin sabit aksodesinin eğrilerin klasik diferensiyel geometrisinden oldukça aşına olunan bir regle yüzey olmasıdır.

Selig, Bishop hareketlerinin cisim-çatı hız bükümlerinin her zaman $p = 0$ modüllü bir IIB 3-vida sisteminde olması gerektiği ile karakterize edildiğini göstermiştir (Selig 2013). Bunun bir II sistem olması, sistemdeki neredeyse tüm bükümlerin aynı adıma sahip olduğunu gösterir. Burada B, sistemin sonsuz adımlı tek bir istisnai büküm içerdiği anlamına gelir. Son olarak $p = 0$ modülü, vida sistemindeki neredeyse tüm bükümlerin 0 (sıfır) adıma sahip olduğunu söyler. Bu nedenle herhangi bir Bishop hareketi, Ribaucour hareketi olacaktır.

$\gamma(\mu)$ uzayında bir eğri verildiğinde, eğri üzerinde *Bishop çatısı* olarak adlandırılan hareketli bir referans çatı bulunur. Aslında her biri ilk çatının seçimi ile belirlenen birçok Bishop çatısı vardır. Eğrinin teğeti $\frac{d\gamma}{d\mu} = vt$ vektörü ile verilir. Burada v , eğrinin $\frac{ds}{d\mu}$ hızıdır, yani s yay uzunluğunun μ parametresine göre türevidir. Bishop çatısı için eğrinin iki normal vektörü vardır (n_1 ve n_2) ve çatı denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu}t &= v(k_1n_1 + k_2n_2) \\ \frac{d}{d\mu}n_1 &= -vk_1t \\ \frac{d}{d\mu}n_2 &= -vk_2t\end{aligned}\tag{3.54}$$

şeklinde. k_1 ve k_2 fonksiyonları eğrilik benzeri fonksiyonlardır. t , n_1 ve n_2 birim vektörleri, her anda bir sağ sistem ortonormal çatı oluşturur ve

$$t \wedge n_1 = n_2, \quad n_1 \wedge n_2 = t \quad \text{ve} \quad n_2 \wedge t = n_1\tag{3.55}$$

eşitliklerini sağlar. Bu vektörler alışılmış Frenet-Serret vektörleri ile karşılaştırıldığında, teğet vektörünün türevinden,

$$\kappa n = k_1n_1 + k_2n_2\tag{3.56}$$

olduğu görülebilir. Burada n asli normal vektördür. Tüm bu vektörler birim uzunluklu olduğundan eğrilik, $\kappa^2 = k_1^2 + k_2^2$ eşitliğini sağlar. Binormal vektör $b = t \wedge n$ ile tanımlandığından,

$$\kappa b = -k_2n_1 + k_1n_2\tag{3.57}$$

olduğunu görmek kolaydır. n ve b için denklemler ters çevrilirse,

$$n_1 = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}n - \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}b \quad \text{ve} \quad n_2 = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}n + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}b \quad (3.58)$$

elde edilir. Bu ifade Bishop çatısının, Frenet çatısına göre teğet vektör etrafında döndüğünü gösterir. Dönme açısı θ olarak alındığında, $\cos \theta = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$ ve $\sin \theta = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$ olduğu görülür. Binormal için denklemin türevi alınarak, τ eğrinin torsiyonu olmak üzere, $\frac{d\theta}{d\mu} = v\tau$ olduğunu göstermek mümkündür. Dolayısıyla dönme açısı, $\theta = \int v\tau d\mu + \theta_0$ integrali ile verilir. θ_0 integrasyon sabiti, Bishop çatısının başlangıçta belirlediğimiz yönlendirmesini temsil eder. Bu seçim Bishop çatısı üzerindeki hareketi etkilemez.

$\gamma(\mu)$ eğrisi üzerindeki Bishop hareketi $SE(3)$ grubundaki

$$G(\mu) = \begin{pmatrix} R & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

eğrisi tarafından verilir. Burada R dönme matrisi, Bishop çatısının teğet ve normal vektörlerinden oluşan sütunlara sahiptir:

$$R = [t \mid n_1 \mid n_2] \quad (3.60)$$

(Selig ve Carricato 2017).

3.5.1 Aksodeler

Bishop hareketinin sabit ve hareketli aksodeleri klasik diferensiyel geometriden oldukça aşına olunan regle yüzeylerdir. Bishop çatısı, Bishop tarafından tanıtılmıştır (Bishop 1975), bu sırada klasik kinematik geometrinin altın çağı neredeyse sona ermiştir. Dolayısıyla bu sonuçların klasik literatürde yer alması pek olası değildir. Sonuçlar aşağıdaki teorem çifti yardımıyla ifade edilebilir.

Teorem 3.5.1 $\gamma(\mu)$ eğrisi üzerindeki bir Bishop hareketinin sabit aksodesi eğrinin polar açılabilir yüzeyidir (Selig ve Carricato 2017).

İspat. $\gamma(\mu)$ eğrisi üzerindeki bir nokta, herhangi bir μ parametresinde bir eksen etrafında ani dönme yapar. Bu eksen mevcut noktada eğrilik çemberlerinin merkezlerinden geçer ve sabit aksodenin bir üreteç doğrusu olur. Eğrilik çemberlerinin merkezlerinden geçen bu doğru, mevcut noktada eğrinin oskülatör düzlemine diktir. Yani eğrinin binormal vektörüne paraleldir. Bu doğrunun ayrıca eğrinin oskülatör küresinin merkezinden geçtiği bilinmektedir. Parametre değiştikçe oskülatör kürenin merkezi, $\gamma(\mu)$ eğrisinin pol eğrisi boyunca ilerler ve eğrilik çemberlerinin merkezlerinden geçen doğru pol eğrisine teğet olur. Bu doğrular tarafından belirlenen regle yüzey, hareketin sabit aksodesidir ve eğrinin polar açılabilir yüzeyi olarak bilinmektedir (Forsyth 1920), (Eisenhart 1947). ■

Teorem 3.5.2 Bishop hareketinin hareketli aksodesi, sabit bir düzlemde yatan doğrulardan oluşmaktadır (Selig ve Carricato 2017).

İspat. Oskülatör kürenin merkezinin ve bu nedenle de yukarıda binormal vektör yönünde oskülatör kürenin merkezinden geçen doğru olarak tanımlanan ani dönme ekseninin, eğrinin normal düzleminde yattığı bilinmektedir. Cisim eğri boyunca hareket ettikçe, normal düzlem cisimde sabitlenir ve bu yüzden hareketli aksodenin bütün doğruları bu düzlemde yatmaktadır. ■

Bu sonuçlar bir önceki bölümdekine benzer şekilde doğrudan hesaplamalar ile de gösterilebilir.

3.5.2 Bishop hareketlerinin inşası

Bu kısımda yukarıda verdiğimiz sonuçların olası kullanımına bir örnek olarak Bishop hareketlerinin bir inşası sunulmaktadır. Bishop hareketleri, eğrinin teğet doğrusu etrafında bir dönme ile bir Frenet-Serret hareketinin bileşkesi olarak tanımlanmıştır. Burada aynı zamanda, Frenet-Serret hareketine dayanan alternatif bir inşa verilmiştir. Kabul edelim ki $\sigma(\mu)$ uzayda regüler bir eğri ve $H(\mu)$ bu eğri üzerindeki Frenet-Serret hareketi olsun. Bu inşa Bishop hareketinin sabit aksodesi olarak $\sigma(\mu)$

eğrisinin teğet açılabilir yüzeyini kullanır. Bu yüzden eğer T_0 , $\mu = 0$ noktasında $\sigma(\mu)$ eğrisinin teğet doğrusu ise, teğet açılabilir yüzey,

$$T(\mu) = H(\mu)T_0H^{-1}(\mu) \quad (3.61)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $L_p = H^{-1}\dot{H} + \dot{U}U^{-1}$ denklemi yardımıyla,

$$T_0 = H^{-1}\dot{H} + \dot{U}U^{-1} \quad (3.62)$$

eşitliği elde edilir. Burada $H^{-1}\dot{H}$, hareketli çatıda Frenet-Serret hareketinin Darboux bükümü olup,

$$H^{-1}\dot{H} = v \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 1 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

ile verilir (bakınız 3.4.1 ve 3.4.3 teoremlerinin ispatı). Böylece,

$$\dot{U}U^{-1} = -v \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 1 \\ -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

ayarlaması, (3.62) denklemini sağlar. Bu sadece düzlemsel bir problem olduğu için denklemi U bileşenine göre çözmek çok zor değildir. Eğer

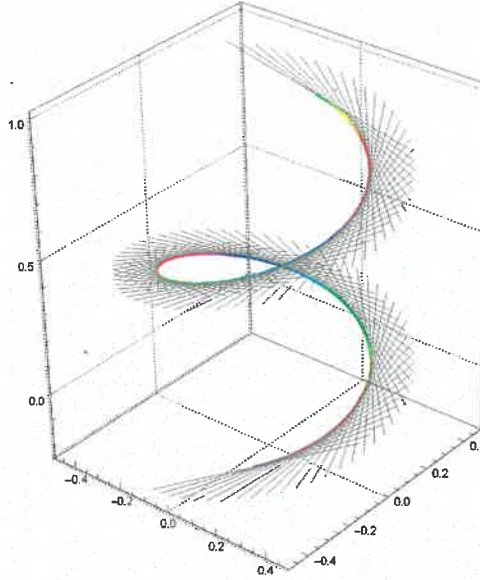
$$U(\mu) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & x \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

yazılırsa, $U(\mu)$ denklemi,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\mu} &= v\kappa \\ \frac{dx}{d\mu} + v\kappa y &= v \\ \frac{dy}{d\mu} - v\kappa x &= 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

şeklinde lineer diferensiyel denklemlerine genişletilebilir.

Somut bir örnek olarak, sabit aksodesi bir dairesel helisin teğet açılabilir yüzeyi olan Bishop hareketi inşa edilebilir. Hesaplamalar basit, ancak uzun ve çok öğretici değildir. Bu hareket, Şekil 3.2 ile gösterilmiştir. Bishop hareketleri regüler bir eğrinin Bishop çatısı kullanılarak tanımlanmıştır. Mevcut örnekte bu eğri bulunmamıştır. Rastgele yerleştirilmiş bir katı cisim hareketi şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Sabit aksodesi bir dairesel helisin teğeti olan Bishop hareketi

3.6 Persistan Aeroplane Hareketleri

Bir eğriye bağlanmış (bir eğri üzerindeki) en genel katı cisim hareketi, Selig tarafından *aeroplane hareketi* olarak adlandırılan genel bir çatı hareketidir (Selig 2013). Böyle bir hareket, $G(\mu) = G_2(\mu)G_1(\mu)$ çarpımı ile verilebilir. Burada $G_2(\mu)$, γ eğrisi üzerindeki bir Frenet-Serret hareketidir ve $G_1(\mu)$ eğrinin teğet vektörü etrafında rastgele bir dönmedir. Bu seçme hakkının daha fazla persistan harekete izin verip vermeyeceği ile ilgili sonuçlar aşağıdaki teoremlerde ifade edilmiştir.

Teorem 3.6.1 ρ minimum eğrilik yarıçapına sahip düzgün bir eğri üzerinde her $p \neq 0$ ve $-\frac{\rho}{2} < p < \frac{\rho}{2}$ için iki p -persistan çatı hareketi vardır (Selig ve Carricato 2017).

İspat. Bir aeroplane hareketinin ani büküm hızı, sabit çatıda,

$$\frac{dG(\mu)}{d\mu}G^{-1}(\mu) = \dot{G}_1G_1^{-1} + G_1\dot{G}_2G_2^{-1}G_1^{-1} \quad (3.67)$$

ya da $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin 6–bileşenli vektör formunda,

$$S_d = v \begin{pmatrix} \omega \\ \nu \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} t \\ \gamma \wedge t \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

olarak yazılabilir. Burada ω ve ν , sırasıyla, açısal ve lineer hız olup, λ teğet vektörü etrafında dönme hızını ifade eder. λ ile çarpılan negatif işaret, Bishop hareketi ile uyumluluk içindir. S_d adımı,

$$p = \frac{v(v\tau - \lambda)}{\lambda^2 - 2v\lambda\tau + v^2(\kappa^2 + \tau^2)} \quad (3.69)$$

ile verilir. Bu ifade ikinci dereceden bir denklem verecek şekilde λ bileşenine göre yeniden düzenlenebilir,

$$p\lambda^2 - (2vp\tau - v)\lambda + v^2(p\kappa^2 + p\tau^2 - \tau) = 0. \quad (3.70)$$

Eğrinin p –persistan bir aeroplane hareketine sahip olması için eğrinin hız, eğrilik ve torsiyon fonksiyonlarının λ bileşenine göre çözülebilir olması gerekir. Bu ikinci dereceden denklemin diskriminantı,

$$\Delta = v^2(1 - 4p^2\kappa^2) \quad (3.71)$$

şeklindedir. Böylece,

$$-\frac{1}{2\kappa} < p < \frac{1}{2\kappa} \quad (3.72)$$

eşitsizliğini sağlayan p için ikinci dereceden denklem ve dolayısıyla da p –persistan hareketler için reel çözümler bulunabilir. Bu nedenle $\rho = \frac{1}{\kappa}$ olmak üzere, p değeri eğrinin minimum eğrilik yarıçapının yarısı (yani $\pm \left(\frac{\rho}{2}\right)$) ile sınırlıdır. Denklem iki kökü, şartlar sağlandığında, iki olası p –persistan aeroplane hareketi verecektir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.6.2 Her regüler eğri bir Ribaucour hareketi olan bir tek çatı hareketine sahiptir. Bu hareket, eğri üzerindeki Bishop çatısı ile verilir (Selig ve Carricato 2017).

İspat. Her regüler eğri $\lambda = v\tau$ seçimi ile verilen bir Ribaucour hareketi olan bir aeroplane hareketine sahiptir. ■

3.7 Doğruya Göre Simetrik Persistan Hareketler

Bu kısımda, persistan olan doğruya göre simetrik hareketleri bulma problemi üzerinde durulacaktır. Doğruya göre simetrik bir hareket, bir regle yüzeyin üst üste olan üreteçlerinde bir katı cismin yansıtılması ile verilir. Bu hareketler kinematikte temel öneme sahiptir (Bottema ve Roth 1979). Doğruya göre simetrik hareketler Krames tarafından bir dizi makalede kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Krames 1937a), (Krames 1937b), (Krames 1937c), (Krames 1937d), (Krames 1937e), (Krames 1937f), (Krames 1981).

Aşağıdaki sonuçlar Krames tarafından verilmiştir (Krames 1937a):

Teorem 3.7.1 Doğruya göre simetrik bir hareketin ani büküm hızının adımı, hareketi üreten regle yüzeyin dağılma parametresine eşittir.

Teorem 3.7.2 Genel bir doğruya göre simetrik hareketin sabit aksodesi, hareketi üreten yüzeyin merkez teğet doğruları ile oluşturulan regle yüzeydir.

Bu teorem şu basit sonucu verir:

Sonuç 3.7.1 p sabit dağılma parametrelili bir regle yüzey tarafından üretilen bir doğruya göre simetrik hareket, bir p -persistan harekettir. Özellikle, açılabilir bir regle yüzey tarafından üretilen doğruya göre simetrik hareket, bir Ribaucour hareketidir (Selig ve Carricato 2017).

Krames tarafından verilen yukarıdaki teoremlerin ispatları çok iyi ve çözümü zor olsa da, günümüzde yaygın olmayan sentetik geometri hakkında detaylı bilgiye dayanmaktadır (Krames 1937a). Dolayısıyla, açıklık ve bütünlük adına modern ispatlar aşağıda sunulmaktadır. Bu ispatlar orijinal ispatlar kadar iyi olmayabilir, ancak basittir ve çok az bilgiye dayanmaktadır.

Bu hareketlerin kısa bir tanımı ile başlayalım. Bir doğruya göre yansıma, doğru etrafında π radyanlık, bazen yarı-dönme olarak adlandırılan, basit bir dönmedir. Bir doğruya karşılık gelen Lie cebiri elemanı, 4×4 matris formunda,

$$L = \begin{pmatrix} \Omega & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

olarak verilebilir. Burada Ω , ω doğrusunun yönüne karşılık gelen 3×3 tipinde anti-simetrik matristir ve ν , doğru üzerindeki bazı r noktaları için $\nu = r \wedge \omega$ doğrusunun momentidir. Bu ifadeler doğrunun Plücker koordinatlarını oluşturur. $\|\omega\|^2 = 1$ olduğunda, bu matrislerin $L^3 = -L$ eşitliğini sağladığını doğrulamak kolaydır. Böylece L matrisinin üstel ifadesi,

$$e^{\theta L} = I_4 + \sin \theta L + (1 - \cos \theta)L^2 \quad (3.74)$$

Rodrigues formülü ile verilen, doğru etrafında θ kadar bir dönmeye karşılık gelir. Doğru etrafında bir yarı-dönme,

$$e^{\pi L} = I_4 + 2L^2 \quad (3.75)$$

matrisi ile ifade edilir.

Böylece bu hareketlerin büküm hızı hesaplanabilir. Bununla ilgili sonuç, Lemma 3.7.1'de verilmiştir.

Lemma 3.7.1 Kabul edelim ki $L(t)$, doğruya göre simetrik bir hareket için baz yüzeyi olsun. Bu hareketin büküm hızı $S_d = 2[L(t), \dot{L}(t)]$ ile verilir (Selig ve Carricato 2017).

İspat. $L(t)$ ile verilen regle yüzeyin üreteçleri üzerinde bir katı cismin yansıma hareketini düşünelim. $t = 0$ olduğunda, grupta hareketin birimden geçmesi için ilk üreteçteki yansıma ile üreteçlerdeki yansımaları oluşturabiliriz. Hareket,

$$G(t) = e^{\pi L(t)} e^{\pi L(0)} = (I_4 + 2L(t)^2)(I_4 + 2L(0)^2) \quad (3.76)$$

şeklinde parametrelendirilebilir. Sabit çatıda bu hareketin ani büküm hızı,

$$S_d = \frac{dG(t)}{dt} G^{-1}(t) = 2(\dot{L}L + L\dot{L})(I_4 + 2L^2) \quad (3.77)$$

ile verilir. Bu ifadeyi asıl doğruların Plücker koordinatlarına göre genişleterek,

$$S_d = 2 \begin{pmatrix} \Omega\dot{\Omega} - \dot{\Omega}\Omega + 2\Omega\dot{\Omega}\Omega^2 & \Omega\dot{\nu} - \dot{\Omega}\nu + 2\Omega\dot{\Omega}\Omega\nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

elde edilir. $\langle \omega, \omega \rangle = 1$ ve dolayısıyla da $\langle \omega, \dot{\omega} \rangle = 0$ olduğu bilgisini kullanarak, $\Omega\dot{\Omega}\Omega = 0$ olduğunu göstermek mümkündür. Böylece,

$$S_d = 2 \left\{ \begin{pmatrix} \Omega & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\Omega} & \dot{\nu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\Omega} & \dot{\nu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = 2[L(t), \dot{L}(t)] \quad (3.79)$$

elde edilir. ■

Uyarı 3.7.1 $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin 6–bileşenli vektör formuna göre Lemma 3.7.1'in sonucu,

$$S_d = 2 \begin{pmatrix} \omega \wedge \dot{\omega} \\ \omega \wedge \dot{\nu} + \nu \wedge \dot{\omega} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade L ve \dot{L} ifadelerine karşılık gelen iki bükümün vektörel çarpımıdır.

Şimdi Teorem 3.7.1'in ispatını yapmak oldukça kolaydır:

Teorem 3.7.1'in ispatı. $\langle \omega, \nu \rangle = 0$ ve $\|\omega\|^2 = 1$ olduğunu hatırlayıp, bunlar bir doğrunun Plücker koordinatları olduğundan, Uyarı 3.7.1'de verilen S_d büküm hızının adımı,

$$p = \frac{\langle (\omega \wedge \dot{\omega}), (\omega \wedge \dot{\nu} + \nu \wedge \dot{\omega}) \rangle}{\|\omega \wedge \dot{\omega}\|^2} = \frac{\langle \dot{\omega}, \dot{\nu} \rangle}{\|\omega\|^2} \quad (3.81)$$

ile hesaplanır. Bu ifade bir yüzeyin dağılma parametresinin standart formülleri ile karşılaştırılabilir (Brauner 1967). ■

Nihayet bu hareketin büküm hızı için olan sonuç, Teorem 3.7.2'yi ispatlamak için kullanılabilir:

Teorem 3.7.2'nin ispatı. Kabul edelim ki doğruya göre simetrik hareketi üreten regle yüzey,

$$r(t, \lambda) = s(t) + \lambda\omega(t) \quad (3.82)$$

olsun. Burada $\omega(t)$ üreteç doğrularının yönü birim vektörler olup, $\langle \omega, \dot{\omega} \rangle = 0$ sağlanır. Dahası, $s(t)$ doğrultu eğrisi aslında regle yüzeyin striksiyon eğrisi olup, $\langle \dot{s}, \dot{\omega} \rangle = 0$ sağlanır. Merkez normal vektör $\omega \wedge \dot{s}$ ile verilir ve böylece merkez teğet vektör de $\omega \wedge (\omega \wedge \dot{s})$ ile verilir. Vektörün $\omega \wedge \dot{\omega}$ vektörüne paralel olduğu gösterilebilir (tek gereken iki vektörün vektörel çarpımını yapmak ve yukarıdaki eşitlikler yardımıyla sadeleştirmektir). Böylece, Uyarı 3.7.1'de verildiği gibi, hareketin büküm hızının ekseninin yüzeyin merkez teğetine paralel olduğunu söyleyebiliriz. Bükümün ekseninin t anında striksiyon noktasından geçtiğini göstermek için bükümün öteleme kısmına bakarız. Büküm hızında $\nu = s \wedge \omega$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} \omega \wedge \dot{\nu} + \nu \wedge \dot{\omega} &= \omega \wedge (\dot{s} \wedge \omega + s \wedge \dot{\omega}) + (s \wedge \omega) \wedge \dot{\omega} \\ &= \omega \wedge (\dot{s} \wedge \omega) + s \wedge (\omega \wedge \dot{\omega}) \end{aligned} \quad (3.83)$$

elde ederiz. Yukarıda, denklemin sağındaki ilk terim $(\omega \wedge \dot{\omega})$ ekseninin yönüne paraleldir. Böylece ikinci terim doğrunun momenti olup, üreteç üzerindeki striksiyon noktası olan s noktasından geçer. ■

Doğruya göre simetrik persistan hareketin bir örneği

Doğruya göre simetrik p -persistan bir hareketi üretmek için sabit dağılma parametrelili regle yüzey örneklerine ihtiyacımız vardır. Klasik diferensiyel geometride bu tür yüzeyler birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Brauner 1960).

Dairesel hiperboloid ve regle helikoid, Kesim 3.3 altında karşılaştığımız örneklerdir. Bu yüzeylerin aksode olarak kullanılmasıyla oluşturulan hareketler ve doğruya göre simetrik olarak aynı yüzeylerle üretilen hareketler genel olarak farklıdır.

Bilinen diğer örnekler, sabit torsiyonlu eğrilerin binormal doğrularından oluşur. Bir uzay eğrisi verildiğinde, eğrinin binormal vektörü boyunca olan doğruların cümlesi bir regle yüzey oluşturur. Böyle bir yüzeyin dağılma parametresinin orijinal eğrinin torsiyonuna eşit olduğunu göstermek kolaydır. Aslında yüzeyin striksiyon eğrisi, yüzeyin inşa edildiği orijinal eğridir (Wilmore 2012).

Doğruya göre simetrik hareketler üzerinde çalışmadan önce Krames, sabit dağılma parametrelili Cayley kübik regle yüzeylerin özel bir sınıfını bulmuştur (Krames 1924). Daha sonra Brauner, bunların sabit dağılma parametrelili tek kübik regle yüzeyler olduğunu göstermiştir (Brauner 1959). Cayley kübik regle yüzeye dayanan doğruya göre simetrik hareketler Husty tarafından incelenmiştir, ancak bu çalışmada sabit dağılma parametrelili bir yüzey kullanılmamıştır (Husty 1987).

Sabit dağılma parametrelili Cayley kübik regle yüzey,

$$\begin{aligned}
P_{01} &= 2t^3 & P_{23} &= -6dt \\
P_{02} &= 3t^2 + 1 & P_{31} &= 6dt^2 \\
P_{03} &= \sqrt{3}(t^2 + 1) & P_{12} &= -2\sqrt{3}dt^2
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Plücker koordinatları ile verilir. Bu gösterimde d parametresi, yüzeyin dağılma parametresi olacak şekilde ayarlanmıştır. Bu yüzeyin bir örneği Şekil 3.3'de verilmiştir. Bu şekil aynı zamanda yüzeyin bir doğrultusu olan üreteç doğrusunu gösterir ki bu bütün üreteçlere karşılık gelen eğridir. Doğrultu, yukarıda verilen parametrelendirilmede $t = 0$ noktasına karşılık gelir.

Bu durumda hareket, 4×4 matris formunda,

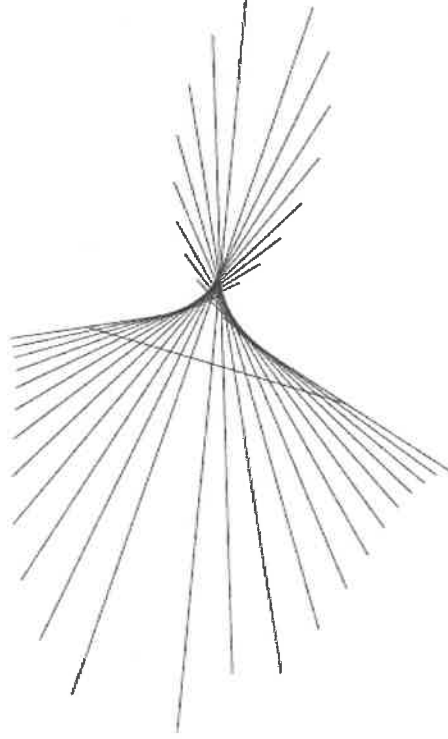
$$\begin{aligned}
G(t) &= (I_4 + 2L(t)^2)(I_4 + 2L(0)^2) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1}{(t^2 + 1)^3} & \frac{t^3}{(t^2 + 1)^3} & \frac{\sqrt{3}(2t^5 + t^3)}{(t^2 + 1)^3} & \frac{-2\sqrt{3}dt^2(3t^2 + 2)}{(t^2 + 1)^3} \\ -\frac{3t^5 + t^3}{(t^2 + 1)^3} & \frac{t^6 + 3t^4 + 6t^2 + 2}{2(t^2 + 1)^3} & -\frac{\sqrt{3}t^2(t^4 - 3t^2 - 2)}{2(t^2 + 1)^3} & \frac{\sqrt{3}dt(2t^4 - 3t^2 - 3)}{(t^2 + 1)^3} \\ -\frac{\sqrt{3}t^3}{(t^2 + 1)^2} & \frac{\sqrt{3}t^2(t^2 + 2)}{2(t^2 + 1)^2} & \frac{-t^4 + 4t^2 + 2}{2(t^2 + 1)^2} & \frac{3d(2t^3 + t)}{(t^2 + 1)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.85}
\end{aligned}$$

ile verilir.

Bu hareketin sabit aksodesinin Plücker koordinatları,

$$\begin{aligned}
F_{01} &= -2\sqrt{3}t & F_{23} &= -6\sqrt{3}dt \\
F_{02} &= \sqrt{3}t^2(t^2 + 3) & F_{31} &= -3\sqrt{3}d(t^4 + 1) \\
F_{03} &= 3t^2(t^2 + 1) & F_{12} &= -3d(t^4 + 2t^2 - 1)
\end{aligned} \tag{3.86}$$

şeklinde ve bir kuartik regle yüzeydir.



Şekil 3.3 $d = \frac{1}{3}$ sabit dağılma parametrelili bir Cayley kübik regle yüzey (Selig ve Carricato 2017)

3.8 Persistan Uyarlanmış Çatı Hareketleri

3–boyutlu \mathbb{R}^3 Öklid uzayında herhangi bir eğri, $\frac{d\alpha}{dt} = T$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) \end{aligned} \quad (3.87)$$

yay uzunluğu parametrizasyonu ile ifade edilmektedir (Struik 1988).

Kabul edelim ki $\{N, C, W_0\}$ α eğrisi boyunca uyarlanmış çatı olsun. Burada $C = \frac{dN/dt}{\|dN/dt\|}$ ve $W_0 = N \wedge C$ olduğu biliniyor. Uyarlanmış çatı için denklemler,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N &= fC \\ \frac{d}{dt}C &= -fN + gW_0 \\ \frac{d}{dt}W_0 &= -gC \end{aligned} \quad (3.88)$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{f} = \left\| \frac{dN}{dt} \right\|$ ve $\mathbf{g} = -\langle C, \frac{dW_0}{dt} \rangle$ eğrinin eğriligidir. \mathbf{f} ve \mathbf{g} eğriliklerini, sırasıyla, $\mathbf{f} = \kappa \sqrt{1 + (\tau/\kappa)^2}$ ve $\mathbf{g} = \sigma \mathbf{f}$ şeklinde ifade etmek daha uygun olacaktır. Burada σ fonksiyonu, α eğrisinin N asli normal göstergesinin küresel görüntüsünün geodezik eğriligidir ve $\sigma = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \right) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) \right)$ ile verilmektedir.

Uyarlanmış çatının Darboux vektörü, eğrinin eğriligi \mathbf{f} ve \mathbf{g} olmak üzere,

$$\omega_a = \mathbf{g}N + \mathbf{f}W_0 \quad (3.89)$$

şeklindedir (Uzunoglu vd. 2016).

Teorem 3.8.1 \mathbf{f} ve \mathbf{g} eğrilikli bir uzay eğrisine bağlı ve yine bu eğri boyunca hareket eden $\{N, C, W_0\}$ çatısı ile üretilen uyarlanmış bir çatı hareketinin ani bükümü, $p_a = \frac{\tau}{\mathbf{f}^2 + \mathbf{g}^2}$ adımına sahiptir (Kahveci ve Yaylı 2019).

İspat. Uyarlanmış bir çatının ani büküm hızı, ω_a Darboux vektörüne karşılık gelen

3×3 tipinde anti-simetrik bir matris $\frac{dR}{dt} R^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{f} & 0 \\ -\mathbf{f} & 0 & \mathbf{g} \\ 0 & -\mathbf{g} & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\frac{dG(t)}{dt} G^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dR}{dt} R^T & \frac{d\alpha}{dt} - \omega_a \wedge \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

ile verilir. Burada $G(t)$ hareketi, $R(t) = [N \mid C \mid W_0]$ olmak üzere,

$$G(t) = \begin{bmatrix} R(t) & \alpha(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

şeklindedir. Denklem (3.91) yardımıyla hareketin ani bükümü, $\nu = \frac{d\alpha}{dt} - \omega_a \wedge \alpha$ olmak üzere,

$$S = \begin{pmatrix} \omega_a \\ \nu \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

olarak ifade edilebilir. Bu bükümün adımı,

$$\begin{aligned}
 p_a &= \frac{\langle \omega_a, \nu \rangle}{\langle \omega_a, \omega_a \rangle} \\
 &= \frac{\langle T, \omega_a \rangle}{\langle \omega_a, \omega_a \rangle} \\
 &= \frac{\tau}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2}
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

olarak hesaplanır. Burada $\omega_a = \mathfrak{g}N + \mathfrak{f}W_0 = \mathfrak{g}N + \tau T + \kappa B$ ve $W_0 = \frac{\omega_f}{\|\omega_a\|} = \frac{\tau T + \kappa B}{\mathfrak{f}}$ şeklindedir. ■

Sonuç 3.8.1 \mathfrak{f} ve \mathfrak{g} eğrilikli bir eğri üzerindeki uyarlanmış çatı hareketinin persistan olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2}$ adımının sabit olmasıdır (Kahveci ve Yaylı 2019).

Önerme 3.8.1 \mathbb{R}^3 uzayında herhangi bir α eğrisi alalım. p_f ve p_a , sırasıyla, Frenet-Serret ve uyarlanmış çatı hareketlerinin adımları olsun. Bu durumda $\sigma = \frac{(\frac{d}{dt}(\frac{\tau}{\kappa}))\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}}$ olmak üzere,

$$\frac{p_f}{p_a} = 1 + \sigma^2 \tag{3.94}$$

eşitliği sağlanır (Kahveci ve Yaylı 2019).

İspat. Teorem 3.4.1 gereğince,

$$p_f = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \tag{3.95}$$

ve Teorem 3.8.1 gereğince,

$$p_a = \frac{\tau}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2} \tag{3.96}$$

olduğunu biliyoruz. $\mathfrak{g} = \sigma \mathfrak{f}$ ifadesini (3.96) denkleminde yerine yazarak,

$$\begin{aligned}
 p_a &= \frac{\tau}{\mathfrak{f}^2(1 + \sigma^2)} \\
 &= \frac{\tau}{(\kappa^2 + \tau^2)(1 + \sigma^2)} \\
 &= p_f \frac{1}{1 + \sigma^2}
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\frac{pf}{p_a} = 1 + \sigma^2 \quad (3.98)$$

denklemini bulunur. ■

Uyarı 3.8.1 Darboux vektörleri çatıların açılmal momentumuna karşılık gelmektedir. Yönü, hareketin ani eksenini ve uzunluğu da açılmal hızı belirler. Dahası ani eksenlerin geometrik yeri bir sabit aksode yüzeyi verir (Karger ve Novak 1978). Bir $G(t)$ hareketinin sabit aksode yüzeyi, t değişken iken, S_d ani bükümünün eksenini ile verilir. Benzer şekilde, hareketli aksode yüzeyi, t değişken iken, S_b ani bükümünün eksenini ile verilir (Selig ve Carricato 2017). Frenet-Serret çatısı için bu yüzeyler, Selig ve Carricato tarafından verilmiştir (Selig ve Carricato 2017). $\{N, C, W_0\}$ uyarlanmış çatısı için sabit ve hareketli aksode yüzeylerinin denklemleri, $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\phi(t, u) = \left[\left(\frac{\kappa}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2} N - \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2} B \right) + \alpha \right] + u [\tau T + \mathfrak{g}N + \kappa B], \quad (3.99)$$

$$\bar{\phi}(t, u) = \left[\frac{\kappa}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2} N_0 - \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2} B_0 \right] + u [\tau T_0 + \mathfrak{g}N_0 + \kappa B_0] \quad (3.100)$$

ile verilir. T_0, N_0 ve B_0 , sırasıyla, e_1, e_2 ve e_3 standart bazları olarak seçildiğinde, hareketli aksode yüzeyi,

$$\bar{\phi}(t, u) = \left[0, \frac{\kappa}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2}, -\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2} \right] + u [\tau, \mathfrak{g}, \kappa] \quad (3.101)$$

halini alır. Böylece uyarlanmış çatı hareketi için iki regle yüzey, yani sabit ve hareketli aksode yüzeyleri, inşa edilmiş olur.

3.9 Slant Helisler ve Persistan Hareketler

Standart eğri teorisinde bir slant helis, her noktada asli normalinin sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapması ile tanımlanmaktadır. 20. ve 21. yüzyıllarda bu tür eğriler oldukça ilgi görmüştür. Scofield, sabit presesyonlu eğrileri incelemiş ve bu eğrilerin yay uzunluğu parametrelili çözümlerini türetmiştir (Scofield 1995). Izumiya ve Takeuchi, slant helisleri tanımlamış ve onların açık bir sınıflandırmasını vermiştir (Izumiya ve Takeuchi 2004). Kula ve çalışma arkadaşları, diferensiyel denklemler

yardımıyla slant helisleri karakterize etmiş ve sabit presesyonlu eğrilerin slant helisler olduğunu göstererek, slant helislerin küresel göstergeleri üzerine çalışmışlardır (Kula ve Yaylı 2005), (Kula vd. 2010). Menninger slant helislerin eğrilikler ve torsiyonlar açısından genel bir karakterizasyonunu sunmuş ve onların tanjant vektörünün yay uzunluğu parametrizasyonunu elde etmiştir (Menninger 2014).

Tanım 3.9.1 Kabul edelim ki $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri ve $\{T, N, B\}$ de α eğrisinin Frenet-Serret çatısı olsun. v sabit bir birim vektör olmak üzere, eğer $\langle N, v \rangle = \text{sabit}$ ise α *slant helis* olarak adlandırılır (Izumiya ve Takeuchi 2004).

$\kappa \neq 0$ varsayımı altında, bir α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul α eğrisinin asli normal göstergesinin küresel görüntüsünün

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) \right) \right)(s) \quad (3.102)$$

geodezik eğriliğinin sabit bir fonksiyon olmasıdır (Izumiya ve Takeuchi 2004).

Önerme 3.9.1 α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{p_f}{p_a}$ oranının sabit olmasıdır (Kahveci ve Yaylı 2019).

İspat. α slant helis olsun. Bu durumda σ sabittir. Böylece $\frac{p_f}{p_a} = \text{sabit}$ olur. Kabul edelim ki

$$\frac{p_f}{p_a} = \text{sabit} \quad (3.103)$$

olsun. Denklem (3.94), $\frac{p_f}{p_a} = 1 + \sigma^2$ ifadesini gerektirir. Böylece

$$\sigma = \text{sabit} \quad (3.104)$$

olup, α bir slant helistir. ■

Lemma 3.9.1 Kabul edelim ki α, \mathbb{R}^3 uzayında bir slant helis olsun. α üzerindeki Frenet-Serret hareketinin persistan olması için gerek ve yeter koşul α üzerindeki uyarlanmış çatı hareketinin persistan olmasıdır (Kahveci ve Yaylı 2019).

İspat. (3.94) denkleminden,

$$\frac{p_f}{p_a} = 1 + \sigma^2 \quad (3.105)$$

olduğu biliniyor. α slant helis olduğundan, σ sabittir. Böylece,

$$\frac{p_f}{p_a} = \text{sabit} \quad (3.106)$$

elde edilir. α eğrisi üzerindeki Frenet-Serret hareketi persistan olduğunda, p_f adımı sabittir. (3.106) denkleminden benzer şekilde p_a adımı da sabittir. Bu ifade α eğrisi üzerindeki uyarlanmış çatı hareketinin persistan olduğunu söyler. Karşıt olarak, α eğrisi üzerindeki uyarlanmış çatı hareketi persistan olduğunda, p_a adımı sabittir. (3.106) denkleminden benzer şekilde p_f adımı da sabittir. Bu ifade α eğrisi üzerindeki Frenet-Serret hareketinin persistan olduğunu söyler. ■

Lemma 3.9.1 gereğince, bir slant helis üzerinde Frenet-Serret hareketinin persistan olması, uyarlanmış çatı hareketinin persistan olmasını gerektirir.

Bu tez çalışmasının amaçlarından biri

- Bir slant helis üzerinde Frenet-Serret ya da uyarlanmış çatı hareketi ne zaman persistan olur?

sorusuna yanıt aramaktır. Bu soruyu yanıtlamak için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.9.1 Kabul edelim ki $\alpha(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\kappa = \lambda\varphi'(s) \cos \varphi(s)$ eğrilikli ve $\tau = \lambda\varphi'(s) \sin \varphi(s)$ torsiyonlu bir slant helis olsun ³. $\alpha(s)$ üzerindeki Frenet-Serret hareketinin persistan olması için gerek ve yeter koşul, $c_0, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\varphi(s) = 2 \operatorname{arccot}(e^{c_0 - \frac{s}{c}}) \quad (3.107)$$

olmasıdır (Kahveci ve Yaylı 2019).

İspat. Teorem 3.4.1 gereğince, Frenet-Serret hareketi persistan olduğundan,

$$\frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} = \text{sabit} \quad (3.108)$$

³Burada üstel zaman parametresine göre türevi temsil eder.

yazılabilir. κ ve τ ifadeleri (3.108) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\sin \varphi(s)}{\lambda \varphi'(s)} = \text{sabit} \quad (3.109)$$

elde edilir. Böylece,

$$\sin \varphi(s) = c \varphi'(s) \quad (3.110)$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$\varphi(s) = 2 \operatorname{arccot}(e^{c_0 - \frac{s}{c}}) \quad (3.111)$$

şeklindedir. Karşıt olarak, $\varphi(s) = 2 \operatorname{arccot}(e^{c_0 - \frac{s}{c}})$ alınırsa, bu açıkça α slant helisi üzerindeki Frenet-Serret hareketini verir. ■

Uyarı 3.9.1 Slant helislerin genel bir karakterizasyonu Menninger tarafından verilmiştir (Menninger 2014). Bir slant helisin,

$$\kappa = \lambda \varphi'(s) \cos \varphi(s) \quad (3.112)$$

eğriliği ve

$$\tau = \lambda \varphi'(s) \sin \varphi(s) \quad (3.113)$$

torsiyonu ile verildiğini kabul edelim. Böylece $\varphi(s)$ fonksiyonu,

$$\varphi(s) = 2 \operatorname{arccot}(e^{c_0 - \frac{s}{c}}) \quad (3.114)$$

olarak alındığında, slant helisin teğetler göstergesi aşağıdaki gibi parametrize edilebilir:

$$T(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [\lambda_1 \cos \lambda_2 \Psi(s) + \lambda_2 \cos \lambda_1 \Psi(s)] \\ \frac{1}{2} [\lambda_1 \sin \lambda_2 \Psi(s) + \lambda_2 \sin \lambda_1 \Psi(s)] \\ \frac{n}{m} \sin n \Psi(s) \end{pmatrix}. \quad (3.115)$$

Burada $n = \cos \theta$ ve $m = \cot \theta$ olmak üzere, $\Psi(s) = \frac{\varphi(s)}{n}$, $\lambda_1 = 1 - n$ ve $\lambda_2 = 1 + n$ şeklindedir.

Örnek 3.9.1 Kabul edelim ki, $\alpha(s)$ slant helisi üzerinde $\varphi(s)$ fonksiyonu,

$$\varphi(s) = 2 \operatorname{arccot}(e^s) \quad (3.116)$$

ile verilsin. Eğer $\theta = \frac{\pi}{3}$ ise,

$$n = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} \quad (3.117)$$

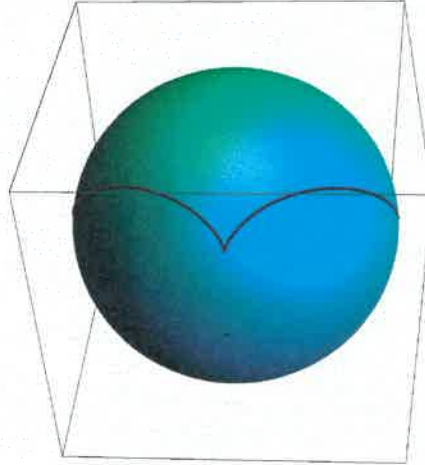
ve

$$\Psi(s) = 4 \operatorname{arccot}(e^s)$$

elde edilir. (3.117) denklemini, (3.115) denkleminde yerine yazarsak,

$$T(s) = \left(\frac{(-1 + e^{2s})^3}{(1 + e^{2s})^3}, \frac{e^s(3 - 2e^{2s} + 3e^{4s})}{(1 + e^{2s})^3}, \sqrt{3} \frac{e^s}{1 + e^{2s}} \right) \quad (3.118)$$

bulunur. $\alpha(s)$ slant helisi için $T(s)$ teğetler göstergesi bir küresel helistir ve Şekil 3.4 ile ifade edilmiştir.

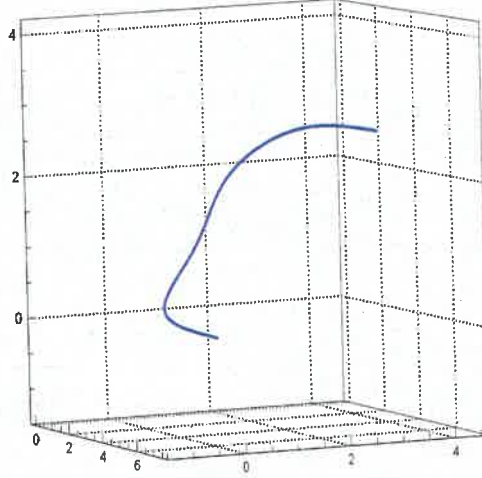


Şekil 3.4 $\alpha(s)$ slant helisinin $T(s)$ teğetler göstergesi

Böylece $\alpha(s)$ slant helisi için

$$\alpha(s) = \left(\begin{array}{c} -\frac{2e^{2s}(-1 + s) + s + se^{4s} - (1 + e^{2s})^2 \operatorname{Log}(1 + e^{2s})}{(1 + e^{2s})^2}, \\ \frac{e^s - e^{3s} + 2(1 + e^{2s})^2 \operatorname{Arctan}(e^s)}{(1 + e^{2s})^2}, \\ \sqrt{3} \operatorname{Arctan}(e^s) \end{array} \right) \quad (3.119)$$

parametrik denklemini bulunur. $\alpha(s)$ slant helisi Şekil 3.5 ile ifade edilmiştir.



Şekil 3.5 $\alpha(s)$ slant helisi

$\alpha(s)$ slant helisi üzerindeki persistan çatı hareketlerine dönecek olursak, hem $\{T, N, B\}$ Frenet-Serret, hem de $\{N, C, W_0\}$ uyarlanmış çatısı için eğrilik ve torsiyonları hesaplamak oldukça kolaydır:

$$\kappa = -2\sqrt{3} \frac{e^s(-1 + e^{2s})}{(1 + e^{2s})^2}, \quad \tau = -\frac{4\sqrt{3}e^{2s}}{(1 + e^{2s})^2} \quad (3.120)$$

ve

$$f = \kappa \sqrt{1 + (\tau/\kappa)^2}, \quad g = \sigma f.$$

Teorem 3.4.1 gereğince, Frenet-Serret hareketinin adımı,

$$p_f = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \text{sabit} \quad (3.121)$$

ve Teorem 3.8.1 ve Önerme 3.8.1 gereğince uyarlanmış çatı hareketinin adımı,

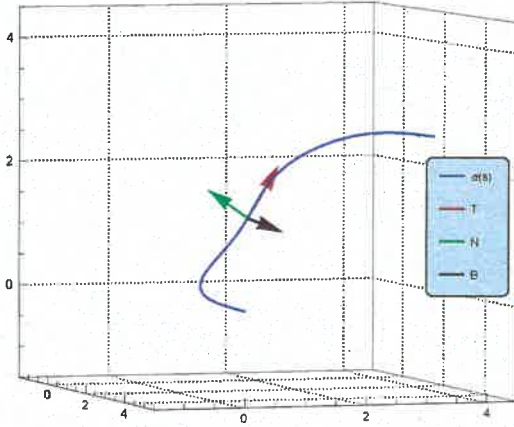
$$p_a = \frac{-\sqrt{3}}{4} = \text{sabit} \quad (3.122)$$

olarak hesaplanır. $\alpha(s)$ slant helisi üzerindeki Frenet-Serret ve uyarlanmış çatı hareketi Şekil 3.6 yardımıyla ifade edilmiştir.

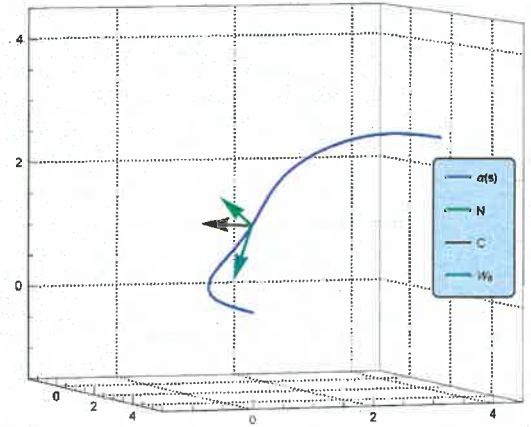
Bu sonuçlar $\alpha(s)$ slant helisi üzerinde hem Frenet-Serret hem de uyarlanmış çatı hareketinin persistan olduğunu gösterir.

Uyarı 3.9.2 Bir $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde Frenet-Serret hareketi persistan olan bir regle yüzey, $\{T, N, B\}$ Frenet-Serret çatısı ve $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\Upsilon(s, u) = \alpha(s) + uN(s) \quad (3.123)$$



(a)



(b)

Şekil 3.6 (a) $\alpha(s)$ slant helisi üzerindeki Frenet-Serret hareketi (b) $\alpha(s)$ slant helisi üzerindeki uyarlanmış çatı hareketi

denklemleri ile verilir. Burada regle yüzeyin dağılma parametresi, Frenet-Serret hareketinin ani bükümünün adımına eşittir. Benzer şekilde, $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde uyarlanmış çatı hareketinin persistan olması halinde regle yüzey denklemleri aşağıdaki önerme ile verilir.

Önerme 3.9.2 Eğer bir $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde uyarlanmış çatı hareketi persistan ise,

$$\Upsilon^*(s, u) = \alpha(s) + uC(s), u \in \mathbb{R} \quad (3.124)$$

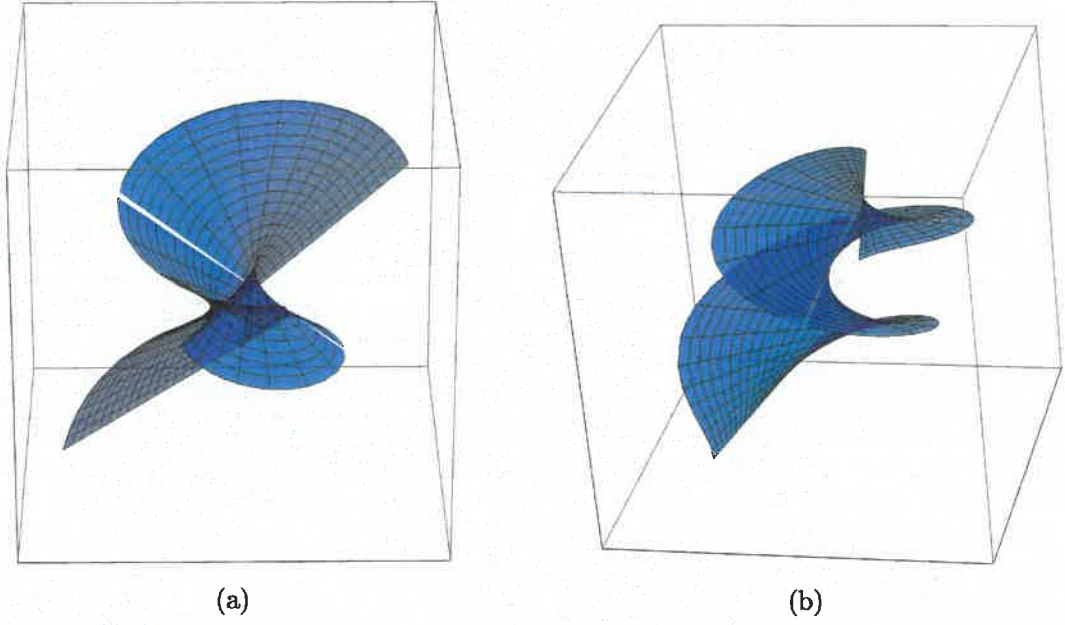
denklemleri ile verilen regle yüzeyin dağılma parametresi, uyarlanmış çatı hareketinin ani bükümünün adımına eşittir (Kahveci ve Yaylı 2019).

İspat. k , $\Upsilon^*(s, u)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi olsun. Bu durumda, $C' = -fN + gW_0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} k &= \frac{\det(T, C, C')}{\langle C', C' \rangle} \\ &= \frac{\langle T, C \wedge C' \rangle}{\langle C', C' \rangle} \\ &= \frac{\tau}{f^2 + g^2} \end{aligned} \quad (3.125)$$

elde edilir ki bu da uyarlanmış çatı hareketinin ani bükümünün adımına eşittir. ■

Örnek 3.9.2 (3.119) denklemi ile verilen $\alpha(s)$ slant helisini göz önüne alalım. Frenet-Serret ve uyarlanmış çatı hareketleri ile üretilen regle yüzeyler Şekil 3.7 yardımıyla ifade edilmiştir.



Şekil 3.7 (a) $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde Frenet-Serret hareketi persistan olan regle yüzey
(b) $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde uyarlanmış çatı hareketi persistan olan regle yüzey

4. MINKOWSKI UZAYINDA SABİT ADIMLI HAREKETLER

Bu bölümde, Lorentz geometrisi yardımıyla, 3–boyutlu Minkowski uzayında persistan katı hareketlerin geometrik kinematığı incelenmiştir. Öklid uzayındaki tanımlamaya benzer olarak, bir parametrelili bir katı hareketin persistan olması, hareketin ani bükümünün sabit bir adıma sahip olması özelliği ile tanımlanır. 3–boyutlu Öklid ve Minkowski uzayları arasındaki tek fark, hareketlerin dayandığı eğrinin causal karakterine bağlı olarak, Minkowski uzayında bükümlerin adımının üç farklı değer almasıdır. Bu bölümde ayrıca Frenet-Serret, uyarlanmış çatı ve Bishop hareketleri dahil olmak üzere bazı önemli çatı hareketlerinin persistan olması için gerekli ve yeterli kriterler belirlenmiştir. Daha sonra bu özel hareketlerin sabit ve hareketli aksode yüzeyleri tanımlanmış, bu yüzeylerle ilgili geometrik özellikler sunulmuştur. Son olarak, 3–boyutlu Minkowski uzayında özel çatı hareketlerinin kapsamlı bir incelemesini sunmak adına persistan katı hareketler ve bu hareketlerin aksode yüzeyleri ile ilgili bazı açıklayıcı örnekler verilmiştir.

4.1 Katı Hareketlerin İncelenmesi

Bu kısımda, ilerleyen bölümlerdeki gereksinimleri karşılamak için 3–boyutlu Minkowski uzayında vida teorisinin bazı sonuçları kısaca sunulmuştur (daha detaylı bilgi için, bakınız (Bottema ve Roth 1979), (Kim ve Noz 1986), (Selig 2005)).

$\mathbb{R}^{2,1}$ 3–boyutlu Minkowski uzayının ani kinematığında, tüm katı hareketlerin cümlesi, yani $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayının izometrilere grubu, Poincaré grubu (homojen olmayan Lorentz grup olarak da bilinir) olarak adlandırılan ve

$$\text{ISO}(2, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid R \in \text{SO}(2, 1), d \in \mathbb{R}^{2,1} \right\} \quad (4.1)$$

ile temsil edilen 6–boyutlu bir Lie grubu oluşturur. Burada $\text{ISO}(2, 1)$ grubunun, bileşenlerin bir eksen etrafında dönme ve aynı eksen boyunca ötelemeleri gösterdiği $\text{SO}(2, 1) \times \mathbb{R}^{2,1}$ yarı-direkt çarpımı ile izomorf olduğuna dikkat edin.

Bir $G(t) \in \text{ISO}(2, 1)$ katı hareketini düşünelim, yani $R(t)$, t anında $\text{SO}(2, 1)$ belirsiz özel ortogonal grubunda bir dönme matrisi ve $d(t)$ bir öteleme olmak üzere,

$$G(t) = \begin{bmatrix} R(t) & d(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Böyle bir hareketin $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir p_0 noktasındaki hareketi,

$$\begin{bmatrix} p(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) & d(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ile verilir. Burada $p(t)$ dönüştürülmüş pozisyon vektörüdür. Özellikle (4.3) denklemi,

$$X = \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } Y(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olmak koşuluyla,}$$

$$Y(t) = G(t)X \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, $X = G^{-1}(t)Y(t)$ olduğundan (4.4) denkleminin t zaman parametresine göre türevi, noktanın hızını verecektir,

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{dG(t)}{dt}G^{-1}(t)Y(t). \quad (4.5)$$

Fiziksel olarak,

$$S_d = \frac{dG(t)}{dt}G^{-1}(t) \quad (4.6)$$

eşitliği $G(t)$ hareketinin ani hızını tanımlar ve sabit çatıda hareketin ani bükümü olarak adlandırılır. Dahası, hareketli çatıda hareketin ani bükümü,

$$S_b = G^{-1}(t)S_dG(t) = G^{-1}(t)\frac{dG(t)}{dt} \quad (4.7)$$

ile temsil edilir.

$\mathfrak{iso}(2, 1)$ ile gösterilen $\text{ISO}(2, 1)$ Poincaré grubunun Lie cebiri, elemanları yukarıda açıklanan bükümlerden oluşan özdeşlikteki tanjant uzayına karşılık gelir. $\mathfrak{iso}(2, 1)$ Poincaré Lie cebirindeki bir büküm,

$$S = \begin{bmatrix} \Omega & \nu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ile ifade edilen forma sahiptir. Burada Ω , ω açısal hız vektörüne karşılık gelen 3×3 tipinde bir yarı anti-simetrik matristir ve ν , üç bileşenli bir vektördür. Lie cebirinin bir S elemanını,

$$S = (\omega, \nu) \quad (4.9)$$

biçiminde bükümün başka bir formunu veren 6–boyutlu bir vektör olarak ifade etmek mümkündür. Burada $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ hareketin açısal hızı ve $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ hareketin lineer hızıdır. Ani bükümün adımının,

$$p = \frac{\langle \omega, \nu \rangle_L}{\langle \omega, \omega \rangle_L} \quad (4.10)$$

ile formüle edildiği göz önüne alındığında, büküm ayrıca,

$$S = (\omega, c \wedge_L \omega + p\omega) \quad (4.11)$$

ile de temsil edilebilir. Burada c , kolaylık sağlamak için $c = \frac{\nu \wedge_L \omega}{\langle \omega, \omega \rangle_L}$ ile değiştirilir.

4.2 Persistan Katı Hareketler

Bir Lorentz manifoldu, 1 indeksli ve ≥ 2 boyutlu \langle, \rangle_L metrik tensörü ile donatılmış düzgün bir manifolddur (O'Neill 1983). Varsayalım ki M , $ISO(2, 1)$ Poincaré grubunun bir alt kümesi olan ve manifold yapısını $ISO(2, 1)$ grubundan alan bir Lorentz alt manifoldu ve G_1 ve G_2 , M manifoldundaki herhangi iki nokta çifti olsun. Bu tür bir manifoldun persistan olması, bu noktalarındaki tanjant uzayların karşılıklı olarak uyumlu olması özelliği ile tanımlanır. Yani, $ISO(2, 1)$ grubunun herhangi bir H elemanı için,

$$(T_{G_1}M)G_1^{-1} = H(T_{G_2}M)G_2^{-1}H^{-1}. \quad (4.12)$$

Tanım 4.2.1 1–parametrelili bir G katı hareketinin persistan olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{dG}{dt}G^{-1} = H\mathcal{L}_pH^{-1}. \quad (4.13)$$

olmasıdır. Burada \mathcal{L}_p , p adımına sahip bir sabit bükümü ifade eder ve H , daha önce belirtildiği gibi, gruptaki keyfi bir hareketi temsil eder (Kahveci ve Yaylı 2022).

4.3 Persistan Frenet-Serret Hareketleri

ISO(2, 1) Poincaré grubundaki bir eğri, kinematik olarak, katı bir hareketin yörüngeci olarak düşünülebilir (Selig 2007). Yani, bir katı hareketi belirlemenin başka bir yöntemi de bir eğri kullanmaktır (Bottema ve Roth 1979). Bu kısımda, Frenet çatı denklemleri 3– boyutlu Minkowski uzayında regüler bir eğriye bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden katı bir hareketin kinematik özelliklerini inşa etmek için kullanılacak ve persistan Frenet-Serret hareketleri tanıtılacaktır. Çalışma boyunca, eğrilerin lightlike olduğu ya da lightlike bir normal vektöre sahip olduğu durum tartışmanın dışında tutulmuştur.

Bir birim hızlı eğrinin $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $t \mapsto \alpha(t)$ ile verildiğini, yani $d\alpha/dt = T$ olduğunu ve $\{T, N, B\}$ çatısının α eğrisinin Frenet-Serret çatısını gösterdiğini varsayalım. O halde Frenet-Serret çatı denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T &= \kappa N \\ \frac{d}{dt}N &= \varepsilon_B \kappa T + \tau B \\ \frac{d}{dt}B &= \varepsilon_T \tau N\end{aligned}\tag{4.14}$$

şekindedir. Burada $\kappa = \left\| \frac{d}{dt}T \right\|_L = \varepsilon_N \left\langle \frac{d}{dt}T, N \right\rangle_L$ ve $\tau = \varepsilon_B \left\langle \frac{d}{dt}N, B \right\rangle_L$ eğrinin, sırasıyla, eğrilik ve torsiyon fonksiyonlarıdır, öyle ki herhangi bir $x \in \mathbb{R}^{2,1}$ için,

$$\varepsilon_x = \left\{ \begin{array}{l} -1, \text{ eğer } x \text{ bir timelike vektör ise} \\ 1, \text{ eğer } x \text{ bir spacelike vektör ise} \end{array} \right\}\tag{4.15}$$

x vektörünün causal karakteri ile tanımlanır. Burada Frenet vektörlerinin Minkowski vektörel çarpımlarının,

$$T \wedge_L N = \varepsilon_B B, \quad N \wedge_L B = \varepsilon_T T \quad \text{ve} \quad B \wedge_L T = \varepsilon_N N\tag{4.16}$$

eşitliklerini sağladığına dikkat edin. Frenet-Serret formülleri şu alternatif ifadeye izin verir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T &= \omega_f \wedge_L T \\ \frac{d}{dt}N &= \omega_f \wedge_L N \\ \frac{d}{dt}B &= \omega_f \wedge_L B.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Burada Frenet çatısının ω_f Darboux vektörü aşağıdaki üç formdan birine sahiptir:

$$\omega_f = \left\{ \begin{array}{l} \tau T + \kappa B, \text{ eğer } \alpha \text{ timelike bir eğri ise} \\ \tau T - \kappa B, \text{ eğer } \alpha \text{ timelike normalli spacelike bir eğri ise} \\ -\tau T + \kappa B, \text{ eğer } \alpha \text{ timelike binormalli spacelike bir eğri ise} \end{array} \right\}. \quad (4.18)$$

$\alpha(t)$ eğrisi boyunca belirlenen Frenet-Serret hareketi,

$$G(t) = \begin{bmatrix} R(t) & \alpha(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

ile verilir. Burada $R(t) \in \text{SO}(2,1)$, T , N ve B Frenet vektörlerine sütun olarak sahiptir:

$$R(t) = \left\{ \begin{array}{l} [T \mid N \mid B], \text{ eğer } \alpha \text{ timelike bir eğri ise} \\ [N \mid B \mid T], \text{ eğer } \alpha \text{ timelike normalli spacelike bir eğri ise} \\ [B \mid T \mid N], \text{ eğer } \alpha \text{ timelike binormalli spacelike bir eğri ise} \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

4.3.1 Persistan olma

Teorem 4.3.1 κ eğriliği ve τ torsiyonu ile $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında regüler bir α eğrisine bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden bir Frenet-Serret hareketi için hareketin ani bükümü, eğrinin causal karakterine bağlı olarak aşağıdaki üç adımdan birine sahiptir:

$$p_f = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2}, \text{ eğer } \alpha \text{ timelike bir eğri ise} \\ \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}, \text{ eğer } \alpha \text{ timelike normalli spacelike bir eğri ise} \\ \frac{\tau}{\kappa^2 - \tau^2}, \text{ eğer } \alpha \text{ timelike binormalli spacelike bir eğri ise} \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

(Kahveci ve Yaylı 2022).

İspat. Sabit referans çatıda, $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir $\alpha(t)$ regüler eğrisine bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden bir Frenet-Serret hareketinin ani bükümü,

$$S_d = \frac{dG(t)}{dt} G^{-1}(t) = \begin{bmatrix} dR/dt & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & \nu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

ile ifade edilir. Burada $\Omega = \frac{dR}{dt} R^{-1}$, Frenet çatısının ω_f Darboux vektörüne karşılık gelen 3×3 tipinde yarı anti-simetrik bir matristir ve $\nu = T - \omega_f \wedge_L \alpha$.

i. α eğrisinin timelike bir eğri olduğunu varsayalım. $\omega_f = \tau T + \kappa B$ ve

$$\nu = \left(\alpha + \frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} N \right) \wedge_L \omega_f + \frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2} \omega_f \quad (4.23)$$

olmak üzere,

$$T = \left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} N \right) \wedge_L \omega_f + \frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2} \omega_f \quad (4.24)$$

olduğunu ve bu nedenle hareketin sabit çatıdaki hız bükümünün $S_d = (\omega_f, \nu)$ olarak temsil edilebileceği sonucuna varmak kolaydır. Bu ifadeyi bir bükümün adımının hesaplamasına dahil etmek,

$$p_f = \frac{\langle \omega_f, \nu \rangle_L}{\langle \omega_f, \omega_f \rangle_L} = \frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2} \quad (4.25)$$

sonucunu verir.

ii. α eğrisinin timelike normalli spacelike bir eğri olduğunu varsayalım. Benzer şekilde, hareketin sabit çatıdaki hız bükümü, $\omega_f = \tau T - \kappa B$ ve

$$\nu = \left(\alpha - \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} N \right) \wedge_L \omega_f + \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \omega_f \quad (4.26)$$

olmak üzere, $S_d = (\omega_f, \nu)$ ile verilir. Bazı hesaplamalardan sonra, bükümün adımı,

$$p_f = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \quad (4.27)$$

olarak elde edilir.

iii. α eğrisinin timelike binormalli spacelike bir eğri olduğunu varsayalım. Benzer şekilde hareketin sabit çatıdaki hız bükümü, $\omega_f = -\tau T + \kappa B$ ve

$$\nu = \left(\alpha + \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} N \right) \wedge_L \omega_f + \frac{\tau}{\kappa^2 - \tau^2} \omega_f \quad (4.28)$$

olmak üzere, $S_d = (\omega_f, \nu)$ ile verilir. Bazı hesaplamalardan sonra, bükümün adımı,

$$p_f = \frac{\tau}{\kappa^2 - \tau^2} \quad (4.29)$$

olarak elde edilir.

Ayrıca, hareketli referans çatıda hareketin ani bükümü $S_b = G^{-1}(t) \frac{dG(t)}{dt}$ ile verilmektedir. Bu nedenle, hareketli çatıdaki hız bükümü sabit çatıdaki hız bükümü ile aynı olacaktır.

Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.3.1 Frenet-Serret hareketinin persistan olması için gerek ve yeter koşul ani bükümün p_f adımının sabit olmasıdır. Yani,

- i. timelike durum için, $\frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2} = \text{sabit}$,
- ii. timelike normalli spacelike durum için, $\frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} = \text{sabit}$,
- iii. timelike binormalli spacelike durum için, $\frac{\tau}{\kappa^2 - \tau^2} = \text{sabit}$.

Burada κ ve τ , sırasıyla, hareketin dayandığı eğrinin eğrilik ve torsiyon fonksiyonlarıdır (Kahveci ve Yaylı 2022).

Uyarı 4.3.1 Ani bükümün p_f adımı sifıra eşit olduğunda, Frenet-Serret hareketi Ribaucour hareketi olarak adlandırılır (Selig ve Carricato 2017), (Study 1913).

Sonuç 4.3.2 $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayındaki bir eğrinin sifır olmayan bir p_f sabit adımı ile persistan bir Frenet-Serret hareketi oluşturduğunu varsayalım. Bu durumda eğrilik ve torsiyon aşağıdaki rasyonel fonksiyonlardan biri ile parametrelendirilebilir:

- i. Eğer eğri timelike bir eğri ise,

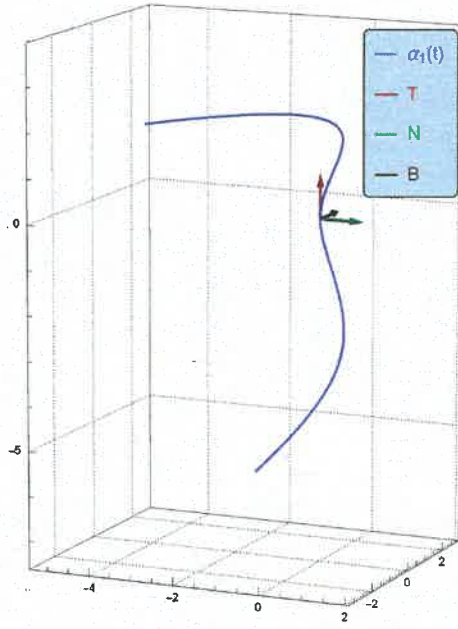
$$\kappa = \frac{t}{p_f(t^2 - 1)} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{t^2}{p_f(t^2 - 1)}. \quad (4.30)$$

- ii. Eğer eğri timelike normalli spacelike bir eğri ise,

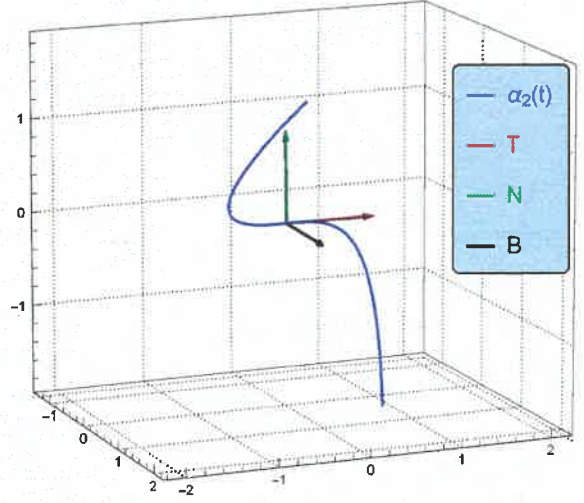
$$\kappa = \frac{1 - t^2}{2p_f(t^2 + 1)} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{(t + 1)^2}{2p_f(t^2 + 1)}. \quad (4.31)$$

- iii. Eğer eğri timelike binormalli spacelike bir eğri ise,

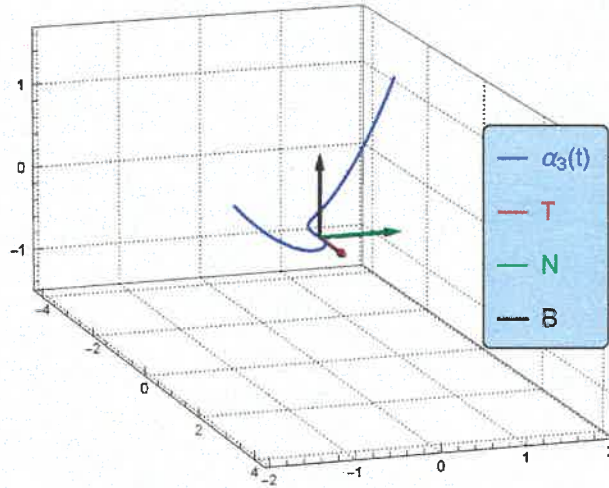
$$\kappa = \frac{t}{p_f(t^2 - 1)} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{1}{p_f(t^2 - 1)}. \quad (4.32)$$



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.1 (a) $\kappa = \frac{2(1-t^2)}{3(t^2+1)}$ ve $\tau = \frac{2(t+1)^2}{3(t^2+1)}$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen ve $p_f = \frac{3}{4}$ adımlı bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan timelike normalli spacelike bir eğri (b) $\kappa = \frac{2t}{t^2-1}$ ve $\tau = \frac{2}{t^2-1}$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen ve $p_f = \frac{1}{2}$ adımlı bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan timelike binormalli spacelike bir eğri (c) $\kappa = \frac{3t}{t^2-1}$ ve $\tau = \frac{3t^2}{t^2-1}$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen ve $p_f = \frac{1}{3}$ adımlı bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan timelike bir eğri

Öte yandan, eğrilik ve torsiyon fonksiyonları sağlandığında, standart eğriler teorisi, bir katı cisim hareketi boyunca bu özelliklere sahip bir tek eğri olacağını belirtir. Bu nedenle, sayısal integrasyon ve çatı denklemleri, yukarıdaki parametrelendirmelerle belirtilen eğrilik ve torsiyon fonksiyonlarına sahip eğrilerin örneklerini elde etmek için kullanılabilir (Şekil 4.1) (Kahveci ve Yaylı 2022).

4.3.2 Sabit ve hareketli aksode yüzeyleri

Bir çatının Darboux vektörünün, yönü ani eksen, uzunluğu ise açısal hızı temsil eden açısal momentum ile ilişkili olduğu iyi bilinmektedir. Tüm ani eksenlerin geometrik yeri aksode yüzeylerini belirler (Karger ve Novak 1978). Yani, bir $G(t)$ hareketinin sabit aksode yüzeyi, t değiştikçe, S_d ani bükümünün eksen tarafından verilir ve benzer şekilde, hareketli aksode yüzeyi, t değiştikçe, S_b ani bükümünün eksen tarafından verilir (Selig ve Carricato 2017). Şimdi, 3–boyutlu Minkowski uzayında aksode yüzeylerinin açık sınıflandırmalarını elde etmek için aşağıdaki teoremleri ifade edeceğiz:

Teorem 4.3.2 (Sabit Aksode Yüzeyi) $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında $\alpha(t)$ eğrisine dayalı Frenet-Serret hareketinin sabit aksode yüzeyi aşağıdaki yüzeylerden biri ile tanımlanır:

- a. α eğrisinin timelike bir eğri olduğu durumda,

$$\phi(t, \lambda) = \left(\alpha(t) + \frac{\kappa(t)}{\tau^2(t) - \kappa^2(t)} N(t) \right) + \lambda \omega_f(t), \quad (4.33)$$

- b. α eğrisinin timelike normalli spacelike bir eğri olduğu durumda,

$$\phi(t, \lambda) = \left(\alpha(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa^2(t) + \tau^2(t)} N(t) \right) + \lambda \omega_f(t), \quad (4.34)$$

- c. α eğrisinin timelike binormali spacelike bir eğri olduğu durumda,

$$\phi(t, \lambda) = \left(\alpha(t) + \frac{\kappa(t)}{\kappa^2(t) - \tau^2(t)} N(t) \right) + \lambda \omega_f(t) \quad (4.35)$$

(Kahveci ve Yaylı 2022).

İspat.

- a. α eğrisinin timelike bir eğri olduğu durum için, (4.23) denklemi yardımıyla, sabit aksode yüzeyinin üreteç doğrularının,

$$\alpha + \frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} N \quad (4.36)$$

noktasından geçtiğini ve $\omega_f = \tau T + \kappa B$ yönünde olduğunu söylemek mümkündür.

- b. α eğrisinin timelike normalli spacelike bir eğri olduğu durum için, (4.26) denklemi yardımıyla, sabit aksode yüzeyinin üreteç doğrularının,

$$\alpha - \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} N \quad (4.37)$$

noktasından geçtiğini ve $\omega_f = \tau T - \kappa B$ yönünde olduğunu söylemek mümkündür.

- c. α eğrisinin timelike binormalli spacelike bir eğri olduğu durum için, (4.28) denklemi yardımıyla, sabit aksode yüzeyinin üreteç doğrularının,

$$\alpha + \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} N \quad (4.38)$$

noktasından geçtiğini ve $\omega_f = -\tau T + \kappa B$ yönünde olduğunu söylemek mümkündür.

■

Teorem 4.3.3 (Hareketli Aksode Yüzeyi) $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir $\alpha(t)$ eğrisine dayalı Frenet-Serret hareketinin hareketli aksode yüzeyi aşağıdaki yüzeylerden biri ile tanımlanır:

- a. α eğrisinin timelike bir eğri olduğu durumda,

$$\tilde{\phi}(t, \lambda) = \frac{\kappa(t)}{\tau^2(t) - \kappa^2(t)} N_0(t) + \lambda \omega_{f_0}(t), \quad (4.39)$$

- b. α eğrisinin timelike normalli spacelike bir eğri olduğu durumda,

$$\tilde{\phi}(t, \lambda) = \frac{-\kappa(t)}{\kappa^2(t) + \tau^2(t)} N_0(t) + \lambda \omega_{f_0}(t), \quad (4.40)$$

c. α eğrisinin timelike binormalı spacelike bir eğri olduğu durumda,

$$\tilde{\phi}(t, \lambda) = \frac{\kappa(t)}{\kappa^2(t) - \tau^2(t)} N_0(t) + \lambda \omega_{f_0}(t). \quad (4.41)$$

Burada T_0 , N_0 , ve B_0 hareketli referans çatının koordinat eksenleri ve ω_{f_0} , çatının Darboux vektörüdür (Kahveci ve Yaylı 2022).

İspat. İspata başlamadan önce, Frenet-Serret hareketinin bir sonucu olarak $t = 0$ anında eğrinin Frenet-Serret çatısı ile çakışan hareketli referans çatısının koordinat eksenlerinin

$$T_0 = R^{-1}T, \quad N_0 = R^{-1}N, \quad B_0 = R^{-1}B \quad \text{ve} \quad \omega_{f_0} = R^{-1}\omega_f \quad (4.42)$$

denklemlerini sağladığını belirtmek uygun olacaktır.

Hareketli referans çatıda, $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında regüler bir $\alpha(t)$ eğrisine bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden Frenet-Serret hareketinin ani bükümü,

$$S_b = G^{-1}(t) \frac{dG(t)}{dt} = \begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dR/dt & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_0 & \nu_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

ile ifade edilir. Burada $\Omega_0 = R^{-1} \frac{dR}{dt}$, ω_{f_0} Darboux vektörüne karşılık gelen 3×3 tipinde yarı anti-simetrik bir matristir ve $\nu_0 = R^{-1}T = T_0$.

a. Hareketin bükümü, α eğrisinin timelike bir eğri olması varsayımı altında,

$$\nu_0 = \left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} N_0 \right) \wedge_L \omega_{f_0} + \frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2} \omega_{f_0} \quad (4.44)$$

ile birlikte $S_b = (\omega_{f_0}, \nu_0)$ olarak belirtilecektir. Hareketli aksode yüzeyinin üreteç doğruları

$$\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} N_0 \quad (4.45)$$

noktasından geçer ve $\omega_{f_0} = \tau T_0 + \kappa B_0$ yönündedir.

Durum b ve c için kanıtlar, durum a için sağlananlarla aynı olduğundan, burada ayrıntıları atlamaya karar verdik. ■

Teorem 4.3.4 p_f adımı sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, persistan bir Frenet-Serret hareketinin hareketli aksode yüzeyi bir hiperbolik paraboloiddir (Kahveci ve Yaylı 2022).

İspat. Hareketin dayandığı eğrinin causal karakterine bağlı olarak üç olasılık vardır:

- i. Eğrinin timelike olduğunu varsayalım ve T_0 , N_0 ve B_0 koordinat eksenlerini, sırasıyla, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ ve $e_3 = (0, 0, 1)$ standart bazları olarak seçelim. Bu koordinat seçimi ile, hareketli aksode yüzeyi üzerindeki genel bir nokta,

$$(x(t, \lambda), y(t, \lambda), z(t, \lambda)) = (\lambda\tau, \frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2}, \lambda\kappa) \quad (4.46)$$

denklemini sağlar. Öte yandan, Frenet-Serret hareketi persistan olduğundan, $p_f = \tau/(\tau^2 - \kappa^2) = \text{sabit}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, (4.46) denklemini kullanarak $y(t, \lambda) = p_f\kappa/\tau$ yazabiliriz. Sonuç olarak, κ , τ ve λ değerlerini sadeleştirmek,

$$xy = p_fz \quad (4.47)$$

yüzey denklemini verir ki bu hiperbolik bir paraboloiddir.

- ii. Eğrinin timelike normalli spacelike bir eğri olduğunu varsayalım ve N_0 , B_0 ve T_0 koordinat eksenlerini, sırasıyla, e_1 , e_2 ve e_3 standart bazları olarak seçelim. Hareketli aksode yüzeyi üzerindeki bir nokta,

$$(x(t, \lambda), y(t, \lambda), z(t, \lambda)) = (\frac{-\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}, -\lambda\kappa, \lambda\tau) \quad (4.48)$$

denklemini sağlar ve böylece,

$$xz = p_fy \quad (4.49)$$

denklemini ile tanımlanan hiperbolik bir paraboloid elde edilir.

- iii. Eğrinin timelike binormalli spacelike bir eğri olduğunu varsayalım ve B_0 , T_0 ve N_0 koordinat eksenlerini, sırasıyla, e_1 , e_2 ve e_3 standart bazları olarak seçelim. Hareketli aksode yüzeyi üzerindeki bir nokta,

$$(x(t, \lambda), y(t, \lambda), z(t, \lambda)) = (\lambda\kappa, -\lambda\tau, \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2}) \quad (4.50)$$

denklemini sağlar ve böylece,

$$-yz = p_fx \quad (4.51)$$

denklemleri ile tanımlanan hiperbolik bir paraboloid elde edilir.

■

Yukarıdaki teoremlerle açıklanan aksode yüzeyleri genel olarak açılabilir değildir. Şimdi aksode yüzeylerinin açılabilir olması için gerekli ve yeterli bir kriter sağlayan aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 4.3.5 α eğrisinin helis olmayan bir eğri, yani $\tau/\kappa \neq$ sabit olduğunu varsayalım. Aksode yüzeylerinin açılabilir olması için gerekli ve yeterli koşul 3–boyutlu Minkowski uzayında α eğrisinin bir Mannheim eğrisi olmasıdır (Kahveci ve Yaylı 2022).

İspat. 3–boyutlu Minkowski uzayında bir Mannheim eğrisinin şu özellik ile tanımlandığını hatırlayalım:

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2}, \text{ timelike durum için} \\ \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}, \text{ timelike normalli spacelike durum için} \\ \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2}, \text{ timelike binormalli spacelike durum için} \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

(Blum 1966), (Yoon 2014). Burada ζ sıfır olmayan bir sabittir. Şimdi ispatımızı aksodelerin regle yüzeylere karşılık geldiği hipotezine dayanarak inşa edeceğiz. Diferensiyel geometride sıfırlanan dağılma parametresi bir regle yüzeyin açılabilir olması için koşulu tanımlar. Yani, bir regle yüzey $\beta + \lambda\omega_f$ ile verilmişse, $k = \frac{\langle \beta', \omega_f \wedge_L \omega_f' \rangle_L}{\langle \omega_f', \omega_f' \rangle_L}$ dağılma parametresi sıfıra eşittir (Struik 1988). Burada üstel, türevi temsil eder. Şimdi teoremi sadece sabit aksode yüzeyleri için ispatlayalım. Çünkü hareketli aksode yüzeyleri için ispat aynı şekilde gerçekleştirilebilir.

- i. α eğrisinin helis olmayan timelike bir eğri olduğunu varsayalım. Timelike bir eğri için sabit aksode yüzeyi denklemini kullanarak ve regle yüzeyin taban eğrisini,

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{\kappa(t)}{\tau^2(t) - \kappa^2(t)} N(t) \quad (4.53)$$

şeklinde alarak $\phi(t, \lambda) = \beta(t) + \lambda\omega_f(t)$ yazabiliriz. Böylece k , $\phi(t, \lambda)$ için $\omega_f' = \tau'T + \kappa'B$ ve

$$\beta' = \left(\frac{\tau^2}{\tau^2 - \kappa^2} \right) T + \left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} \right)' N + \left(\frac{\kappa\tau}{\tau^2 - \kappa^2} \right) B \quad (4.54)$$

türevleriyle birlikte

$$k = \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2}\right)' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa^2}{(\kappa')^2 - (\tau')^2} \quad (4.55)$$

olarak hesaplanır. Eğer ϕ sabit aksode yüzeyi açılabilir ise, $\left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2}\right)' = 0$ olduğunu doğrulamak kolaydır, bu da $\kappa/(\tau^2 - \kappa^2) = \text{sabit}$ ve dolayısıyla α eğrisinin timelike bir Mannheim eğri olduğu anlamına gelir. Karşıt olarak, eğer α timelike bir Mannheim eğri ise, $\kappa/(\tau^2 - \kappa^2) = \text{sabit}$ olduğuna dikkat ederek, $\left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2}\right)' = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, k dağılma parametresi sıfıra eşittir, bu da ϕ yüzeyinin istendiği gibi açılabilir olduğunu gösterir.

- ii. α eğrisinin timelike normalli helis olmayan spacelike bir eğri olduğu durumda benzer işlemler yapıldığında, $\kappa/(\kappa^2 + \tau^2) = \text{sabit}$ ifadesi elde edilir. Bu ifade α eğrisinin timelike normalli spacelike bir Mannheim eğri olduğu anlamına gelir.
- iii. Benzer şekilde, α eğrisinin timelike binormalli helis olmayan spacelike bir eğri olduğu durumda, $\kappa/(\kappa^2 - \tau^2) = \text{sabit}$ ifadesi elde edilir. Bu ifade α eğrisinin timelike binormalli spacelike bir Mannheim eğri olduğu anlamına gelir.

■

Uyarı 4.3.2 Eğer eğri helis ise, yani $\tau/\kappa = \text{sabit}$ olduğunda, Teorem 4.3.5 gereğince aksode yüzeylerinin açılabilir olduğunu doğrulamak kolaydır.

4.4 Persistan Uyarlanmış Çatı Hareketleri

Başka bir persistan çatı hareketi, hareketin dayandığı eğrinin $\{T, N, B\}$ standart Frenet-Serret çatısına alternatif olan bir uyarlanmış çatı tarafından üretilen bir hareket olacaktır. Bu kısım, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet-Serret hareketinin yanı sıra başka persistan çatı hareketlerinin inşa edilip edilemeyeceğini incelemeyi amaçlamaktadır.

Bir birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $t \mapsto \alpha(t)$ eğrisi boyunca alternatif bir $\{N, C, W\}$ ortonormal çatısını düşünelim, öyle ki N , α eğrisinin asli normal vektörü, $C =$

$\frac{dN/dt}{\|dN/dt\|_L}$ ve $\varepsilon_W W = N \wedge_L C$ şeklinde olsun. Bu çatı *uyarlanmış çatı* olarak anılacaktır. Ö halde çatı denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}N &= \mathfrak{f}C \\ \frac{d}{dt}C &= \varepsilon_W \mathfrak{f}N + \mathfrak{g}W \\ \frac{d}{dt}W &= \varepsilon_N \mathfrak{g}C\end{aligned}\quad (4.56)$$

şeklindedir. Burada $\mathfrak{f} = \left\| \frac{d}{dt}N \right\|_L = \varepsilon_C \left\langle \frac{d}{dt}N, C \right\rangle_L$ ve $\mathfrak{g} = \varepsilon_W \left\langle \frac{d}{dt}C, W \right\rangle_L$ eğrinin uyarlanmış çatıya göre eğrilik fonksiyonlarıdır ve ε_x , daha önce belirtildiği gibi, herhangi bir x vektörünün causal karakteriyle ilişkilidir. Çatı vektörlerinin Minkowski vektörel çarpımı,

$$N \wedge_L C = \varepsilon_W W, \quad C \wedge_L W = \varepsilon_N N \quad \text{ve} \quad W \wedge_L N = \varepsilon_C C \quad (4.57)$$

eşitliklerini sağlar. Uyarlanmış çatı formülleri şu alternatif ifadeyi sağlar:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}N &= \omega_a \wedge_L N \\ \frac{d}{dt}C &= \omega_a \wedge_L C \\ \frac{d}{dt}W &= \omega_a \wedge_L W.\end{aligned}\quad (4.58)$$

Burada uyarlanmış çatının ω_a Darboux vektörü aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

$$\omega_a = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}N + \mathfrak{f}W, \quad \text{eğer } N \text{ timelike bir vektör ise} \\ \mathfrak{g}N - \mathfrak{f}W, \quad \text{eğer } N, C \text{ timelike vektörü ile spacelike bir vektör ise} \\ -\mathfrak{g}N + \mathfrak{f}W, \quad \text{eğer } N, W \text{ timelike vektörü ile spacelike bir vektör ise} \end{array} \right\}. \quad (4.59)$$

$\alpha(t)$ eğrisi boyunca belirlenen uyarlanmış bir çatı hareketi,

$$G(t) = \begin{bmatrix} R(t) & \alpha(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

ile verilir. Burada $R(t) \in \text{SO}(2, 1)$, N, C ve W çatı vektörlerine sütun olarak sahiptir:

$$R(t) = \left\{ \begin{array}{l} [N \mid C \mid W], \quad \text{eğer } N \text{ timelike bir vektör ise} \\ [C \mid W \mid N], \quad \text{eğer } N, C \text{ timelike vektörü ile spacelike bir vektör ise} \\ [W \mid N \mid C], \quad \text{eğer } N, W \text{ timelike vektörü ile spacelike bir vektör ise} \end{array} \right\}. \quad (4.61)$$

4.4.1 Persistan olma

Teorem 4.4.1 \mathfrak{f} ve \mathfrak{g} eğrilikleri ile $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında regüler bir α eğrisine bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden uyarlanmış bir çatı hareketinin ani bükümü aşağıdaki üç adımdan birine sahiptir:

$$p_a = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2}, \text{ eğer } N \text{ timelike bir vektör ise} \\ \frac{-\tau}{\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{g}^2}, \text{ eğer } N, C \text{ timelike vektörü ile spacelike bir vektör ise} \\ \frac{-\tau}{\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{f}^2}, \text{ eğer } N, W \text{ timelike vektörü ile spacelike bir vektör ise} \end{array} \right\}. \quad (4.62)$$

Burada τ , Frenet-Serret çatısı cinsinden eğrinin torsiyonunu temsil eder (Kahveci ve Yaylı 2022).

İspat. Hem sabit çatıdaki hem de hareketli çatıdaki büküm hızının aynı adıma sahip olduğu bilindiği için yalnızca sabit çatıdaki büküm hızının adımını hesaplamak yeterli olacaktır.

$\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir $\alpha(t)$ regüler eğrisine bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden uyarlanmış bir çatı hareketinin ani bükümü,

$$S_d = \frac{dG(t)}{dt} G^{-1}(t) = \begin{bmatrix} dR/dt & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & \nu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

ile ifade edilir. Burada $\Omega = \frac{dR}{dt} R^{-1}$, uyarlanmış çatının ω_a Darboux vektörüne karşılık gelen 3×3 tipinde yarı anti-simetrik bir matristir ve $\nu = T - \omega_a \wedge_L \alpha$.

- i. Kabul edelim ki N timelike bir vektör olsun. C ve W standart Frenet vektörleri ile kıyaslandığında,

$$\mathfrak{f}W = \tau T - \kappa B \quad \text{ve} \quad \mathfrak{f}C = \kappa T + \tau B \quad (4.64)$$

elde edilir. Dolayısıyla bu sistemin T için çözümü,

$$T = \frac{\kappa \mathfrak{f}C + \tau \mathfrak{f}W}{\kappa^2 + \tau^2} \quad (4.65)$$

şeklindedir. Sonuç olarak, $S_d = (\omega_a, \nu)$ bükümünün adımları,

$$p_a = \frac{\langle \omega_a, \nu \rangle_L}{\langle \omega_a, \omega_a \rangle_L} = \frac{\langle \omega_a, T \rangle_L}{\langle \omega_a, \omega_a \rangle_L} = \frac{\tau}{\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2} \quad (4.66)$$

olarak hesaplanır. Burada $\omega_a = \mathbf{g}N + \mathbf{f}W$ ve

$$\nu = \left(\alpha - \frac{1}{\mathbf{f}} \left(\frac{\kappa\mathbf{f}N - \tau\mathbf{g}C + \kappa\mathbf{g}W}{\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2} \right) \right) \wedge_L \omega_a + \frac{\tau}{\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2} \omega_a. \quad (4.67)$$

ii. Kabul edelim ki N timelike bir C vektörü ile spacelike bir vektör olsun. C ve W , standart Frenet vektörleri ile kıyaslandığında,

$$\mathbf{f}W = \varepsilon_T \tau T - \kappa B \quad \text{ve} \quad \mathbf{f}C = -\varepsilon_T \kappa T + \tau B \quad (4.68)$$

elde edilir. Dolayısıyla bu sistemin T için çözümü, T teğet vektörünün causal karakterine bağlı olarak,

$$T = \varepsilon_T \left(\frac{\kappa\mathbf{f}C + \tau\mathbf{f}W}{\tau^2 - \kappa^2} \right) \quad (4.69)$$

şeklindedir. Sonuç olarak, $S_d = (\omega_a, \nu)$ bükümünün adımı,

$$p_a = \frac{\langle \omega_a, \nu \rangle_L}{\langle \omega_a, \omega_a \rangle_L} = \frac{\langle \omega_a, T \rangle_L}{\langle \omega_a, \omega_a \rangle_L} = \frac{-\tau}{\mathbf{f}^2 + \mathbf{g}^2} \quad (4.70)$$

olarak hesaplanır. Burada $\omega_a = \mathbf{g}N - \mathbf{f}W$ ve

$$\nu = \left(\alpha - \frac{1}{\mathbf{f}} \left(\frac{\kappa\mathbf{f}N + \tau\mathbf{g}C + \kappa\mathbf{g}W}{\mathbf{f}^2 + \mathbf{g}^2} \right) \right) \wedge_L \omega_a - \frac{\tau}{\mathbf{f}^2 + \mathbf{g}^2} \omega_a. \quad (4.71)$$

iii. Kabul edelim ki N timelike bir W vektörü ile spacelike bir vektör olsun. C ve W , standart Frenet vektörleri ile kıyaslandığında,

$$\mathbf{f}W = -\varepsilon_T \tau T + \kappa B \quad \text{ve} \quad \mathbf{f}C = -\varepsilon_T \kappa T + \tau B \quad (4.72)$$

elde edilir. Dolayısıyla bu sistemin T için çözümü, T teğet vektörünün causal karakterine bağlı olarak,

$$T = \varepsilon_T \left(\frac{-\kappa\mathbf{f}C + \tau\mathbf{f}W}{\kappa^2 - \tau^2} \right) \quad (4.73)$$

şeklindedir. Sonuç olarak, $S_d = (\omega_a, \nu)$ bükümünün adımı,

$$p_a = \frac{\langle \omega_a, \nu \rangle_L}{\langle \omega_a, \omega_a \rangle_L} = \frac{\langle \omega_a, T \rangle_L}{\langle \omega_a, \omega_a \rangle_L} = \frac{-\tau}{\mathbf{g}^2 - \mathbf{f}^2} \quad (4.74)$$

olarak hesaplanır. Burada $\omega_a = -\mathbf{g}N + \mathbf{f}W$ ve

$$\nu = \left(\alpha - \frac{1}{\mathbf{f}} \left(\frac{\kappa\mathbf{f}N + \tau\mathbf{g}C - \kappa\mathbf{g}W}{\mathbf{g}^2 - \mathbf{f}^2} \right) \right) \wedge_L \omega_a - \frac{\tau}{\mathbf{g}^2 - \mathbf{f}^2} \omega_a. \quad (4.75)$$

■

Sonuç 4.4.1 $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir eğriye dayanan uyarlanmış çatı hareketinin persistan olması için gerek ve yeter koşul ani bükümün p_a adımının sabit olmasıdır (Kahveci ve Yaylı 2022).

4.4.2 Sabit ve hareketli aksode yüzeyleri

Aşağıdaki teoremler, Teorem 4.3.2 ve 4.3.3 için verilenlerle hemen hemen aynı yaklaşımlarla ispatlanabildiklerinden, ispat verilmeden ifade edilebilirler:

Teorem 4.4.2 (Sabit Aksode Yüzeyi) $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir $\alpha(t)$ eğrisine dayalı uyarlanmış bir çatı hareketinin sabit aksode yüzeyi aşağıdaki yüzeylerden biri ile tanımlanır:

- a. N vektörünün timelike bir vektör olduğu durumda,

$$\psi(t, \mu) = \left(\alpha(t) - \frac{\kappa(t)}{\mathfrak{f}^2(t) - \mathfrak{g}^2(t)} N(t) + \frac{\tau(t)\sigma(t)}{\mathfrak{f}^2(t) - \mathfrak{g}^2(t)} C(t) - \frac{\kappa(t)\sigma(t)}{\mathfrak{f}^2(t) - \mathfrak{g}^2(t)} W(t) \right) + \mu\omega_a(t), \quad (4.76)$$

- b. N vektörünün timelike bir C vektörü ile spacelike bir vektör olduğu durumda,

$$\psi(t, \mu) = \left(\alpha(t) - \frac{\kappa(t)}{\mathfrak{f}^2(t) + \mathfrak{g}^2(t)} N(t) - \frac{\tau(t)\sigma(t)}{\mathfrak{f}^2(t) + \mathfrak{g}^2(t)} C(t) - \frac{\kappa(t)\sigma(t)}{\mathfrak{f}^2(t) + \mathfrak{g}^2(t)} W(t) \right) + \mu\omega_a(t), \quad (4.77)$$

- c. N vektörünün timelike bir W vektörü ile spacelike bir vektör olduğu durumda,

$$\psi(t, \mu) = \left(\alpha(t) - \frac{\kappa(t)}{\mathfrak{g}^2(t) - \mathfrak{f}^2(t)} N(t) - \frac{\tau(t)\sigma(t)}{\mathfrak{g}^2(t) - \mathfrak{f}^2(t)} C(t) + \frac{\kappa(t)\sigma(t)}{\mathfrak{g}^2(t) - \mathfrak{f}^2(t)} W(t) \right) + \mu\omega_a(t). \quad (4.78)$$

Burada kısalığın hatırı için $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}}$, σ olarak gösterilir (Kahveci ve Yaylı 2022).

Teorem 4.4.3 (Hareketli Aksode Yüzeyi) $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında bir $\alpha(t)$ eğrisine dayalı uyarlanmış bir çatı hareketinin hareketli aksode yüzeyi, hareketli referans çatının N_0 , C_0 ve W_0 koordinat eksenleri ve ω_{a_0} Darboux vektörü ile aşağıdaki yüzeylerden biri ile tanımlanır:

a. N_0 vektörünün timelike bir vektör olduğu durumda,

$$\tilde{\psi}(t, \mu) = \left(\frac{-\kappa(t)}{\mathfrak{f}^2(t) - \mathfrak{g}^2(t)} N_0(t) + \frac{\tau(t)\sigma(t)}{\mathfrak{f}^2(t) - \mathfrak{g}^2(t)} C_0(t) - \frac{\kappa(t)\sigma(t)}{\mathfrak{f}^2(t) - \mathfrak{g}^2(t)} W_0(t) \right) + \mu\omega_{a_0}(t), \quad (4.79)$$

b. N_0 vektörünün timelike bir C_0 vektörü ile spacelike bir vektör olduğu durumda,

$$\tilde{\psi}(t, \mu) = \left(\frac{-\kappa(t)}{\mathfrak{f}^2(t) + \mathfrak{g}^2(t)} N_0(t) - \frac{\tau(t)\sigma(t)}{\mathfrak{f}^2(t) + \mathfrak{g}^2(t)} C_0(t) - \frac{\kappa(t)\sigma(t)}{\mathfrak{f}^2(t) + \mathfrak{g}^2(t)} W_0(t) \right) + \mu\omega_{a_0}(t), \quad (4.80)$$

c. N_0 vektörünün timelike bir W_0 vektörü ile spacelike bir vektör olduğu durumda,

$$\tilde{\psi}(t, \mu) = \left(\frac{-\kappa(t)}{\mathfrak{g}^2(t) - \mathfrak{f}^2(t)} N_0(t) - \frac{\tau(t)\sigma(t)}{\mathfrak{g}^2(t) - \mathfrak{f}^2(t)} C_0(t) + \frac{\kappa(t)\sigma(t)}{\mathfrak{g}^2(t) - \mathfrak{f}^2(t)} W_0(t) \right) + \mu\omega_{a_0}(t). \quad (4.81)$$

Burada, daha önce belirtildiği gibi, $\sigma = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}}$ (Kahveci ve Yaylı 2022).

4.5 Bishop Hareketleri

Hız bükümleri modülü $p = 0$ olan bir IIB üç sistemine ait olan vida sistemleri ile karakterize edilen Bishop hareketleri, Frenet-Serret hareketleriyle aynı şekilde yorumlanabilir (Selig 2013). Burada $p = 0$, vida sistemindeki hemen hemen tüm bükümlerin sıfır adımlı olduğunu gösterir. Bir Bishop hareketi inşa etmek için gereken tek şey Bishop çatı denklemlerini dikkate almaktır (Bishop 1975). Burada, Frenet-Serret çatısından farklı olarak, eğrilik fonksiyonları sıfırlansa bile Bishop çatısının var olduğunu ve her biri başlangıç çatısının seçimiyle belirtilen birçok Bishop çatısının bulunduğunu not etmek önemlidir. Ayrıca, herhangi bir regüler eğri, eğrinin Bishop çatısı tarafından temsil edilen tek bir Ribaucour hareketine sahiptir (Selig ve Carricato 2017). Bu kısımda, Özdemir ve Ergin tarafından sağlanan Bishop çatı denklemleri kullanılarak 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop hareketleri inşa edilmeye çalışılmıştır (Özdemir ve Ergin 2008).

Bir birim hızlı eğrinin $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, $t \mapsto \alpha(t)$ olduğunu ve $\{T, N_1, N_2\}$ çatısının α eğrisinin Bishop çatısı olduğunu varsayalım. Bu durumda Bishop çatı denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T &= k_1N_1 + k_2N_2 \\ \frac{d}{dt}N_1 &= -\varepsilon_{N_1}k_1T \\ \frac{d}{dt}N_2 &= -\varepsilon_{N_2}k_2T \end{aligned} \quad (4.82)$$

sağlar. Burada $k_1 = \varepsilon_{N_1} \left\langle \frac{d}{dt}T, N_1 \right\rangle_L$ ve $k_2 = \varepsilon_{N_2} \left\langle \frac{d}{dt}T, N_2 \right\rangle_L$ eğrilik benzeri fonksiyonlardır. Çatı denklemlerinin Minkowski vektörel çarpımları, ε_x daha önce belirtildiği gibi herhangi bir x vektörünün causal karakterini belirtmek üzere,

$$T \wedge_L N_1 = \varepsilon_{N_2} N_2, \quad N_1 \wedge_L N_2 = \varepsilon_T T \quad \text{ve} \quad N_2 \wedge_L T = \varepsilon_{N_1} N_1 \quad (4.83)$$

sağlar. Bishop çatı denklemleri, şu alternatif formülasyona izin verir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T &= \omega_b \wedge_L T \\ \frac{d}{dt}N_1 &= \omega_b \wedge_L N_1 \\ \frac{d}{dt}N_2 &= \omega_b \wedge_L N_2. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Burada Bishop çatısının ω_b Darboux vektörü aşağıdaki üç formdan birine sahiptir:

$$\omega_b = \left\{ \begin{array}{l} -k_2 N_1 + k_1 N_2, \quad \text{eğer } \alpha \text{ timelike bir eğri ise} \\ -k_2 N_1 - k_1 N_2, \quad \text{eğer } \alpha \text{ timelike bir } N_1 \text{ normali ile spacelike bir eğri ise} \\ k_2 N_1 + k_1 N_2, \quad \text{eğer } \alpha \text{ timelike bir } N_2 \text{ normali ile spacelike bir eğri ise} \end{array} \right\}. \quad (4.85)$$

Bishop çatı vektörlerini standart Frenet vektörleri ile kıyaslamak ve Frenet vektörlerinin Minkowski vektörel çarpımlarını kullanmak,

$$N = \frac{k_1 N_1 + k_2 N_2}{\kappa} \quad \text{ve} \quad B = \frac{\varepsilon_{N_2} k_1 N_2 - \varepsilon_{N_1} k_2 N_1}{\varepsilon_B \kappa}. \quad (4.86)$$

denklemlerine yol açar. Bu sistemin N_1 ve N_2 için çözümü şu şekilde bulunur:

$$N_1 = \frac{k_1 N - k_2 B}{\kappa} \quad \text{ve} \quad N_2 = \frac{\varepsilon_N k_2 N + \varepsilon_B k_1 B}{\varepsilon_B \kappa} \quad (4.87)$$

ki bu, Bishop çatısının Frenet çatısının teğet vektör etrafında döndürülmesiyle elde edildiği anlamına gelir.

$\alpha(t)$ eğrisi boyunca belirlenen Bishop hareketi,

$$G(t) = \begin{bmatrix} R(t) & \alpha(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

ile verilir. Burada $R(t) \in \text{SO}(2,1)$, T , N_1 ve N_2 çatı vektörlerine sütun olarak sahiptir:

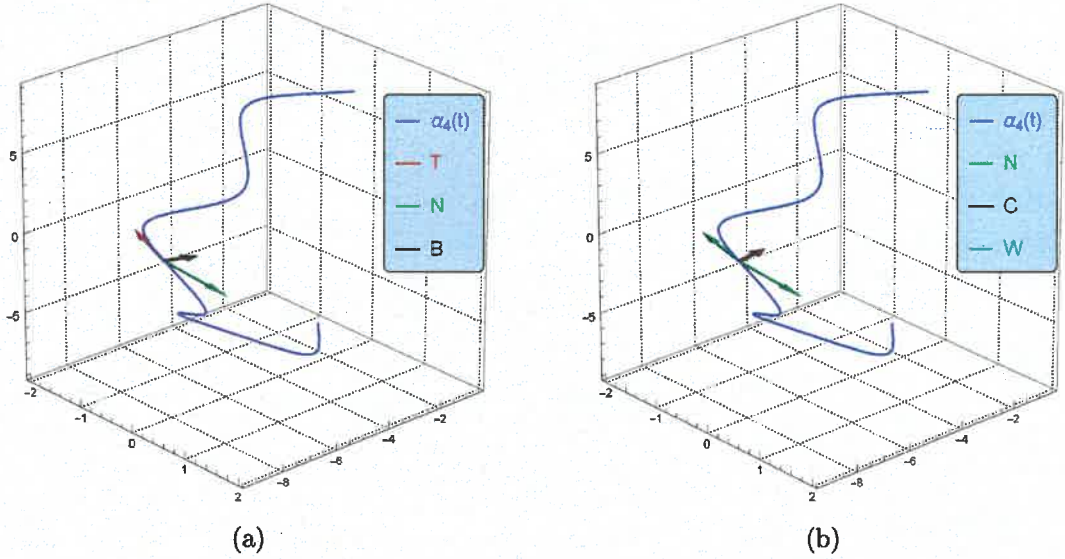
$$R(t) = \left\{ \begin{array}{l} [T \mid N_1 \mid N_2], \quad \text{eğer } \alpha \text{ timelike bir eğri ise} \\ [N_1 \mid N_2 \mid T], \quad \text{eğer } \alpha \text{ timelike bir } N_1 \text{ normali ile spacelike bir eğri ise} \\ [N_2 \mid T \mid N_1], \quad \text{eğer } \alpha \text{ timelike bir } N_2 \text{ normali ile spacelike bir eğri ise} \end{array} \right\}. \quad (4.89)$$

Açıklayıcı Örnekler

Örnek 4.5.1

$$\alpha_4(t) = \left(-\frac{\sin(t)}{\sqrt{3}}, -8 \cos(t) \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{14 \sin(t) \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{\sqrt{3}}, \frac{14 \sin(t) \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{\sqrt{3}} - 8 \cos(t) \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \quad (4.90)$$

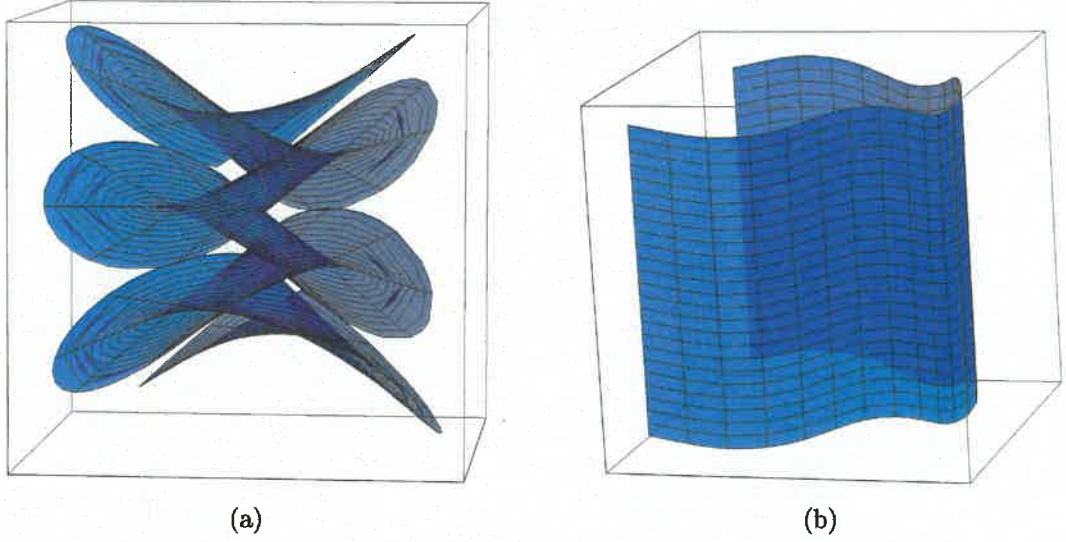
parametrik denklemi ile ifade edilen bir N timelike normalli α_4 spacelike eğrisini düşünelim. Hem Frenet-Serret hem de uyarlanmış çatı vektörlerinin yanı sıra ani bükümlerin adımlarını hesaplamak kolaydır (Şekil 4.2). Ayrıca, hem Frenet-Serret hem de uyarlanmış çatı hareketlerinin sabit aksode yüzeyleri Şekil 4.3 yardımıyla gösterilebilir.



Şekil 4.2: (a) $\alpha_4(t)$ boyunca belirlenen ve ani bükümü $p_f = 2 \cos(t)$ adımına sahip olan Frenet-Serret hareketi (b) $\alpha_4(t)$ boyunca belirlenen ve ani bükümü $p_a = \frac{-2 \cos(t)}{3}$ adımına sahip olan uyarlanmış çatı hareketi

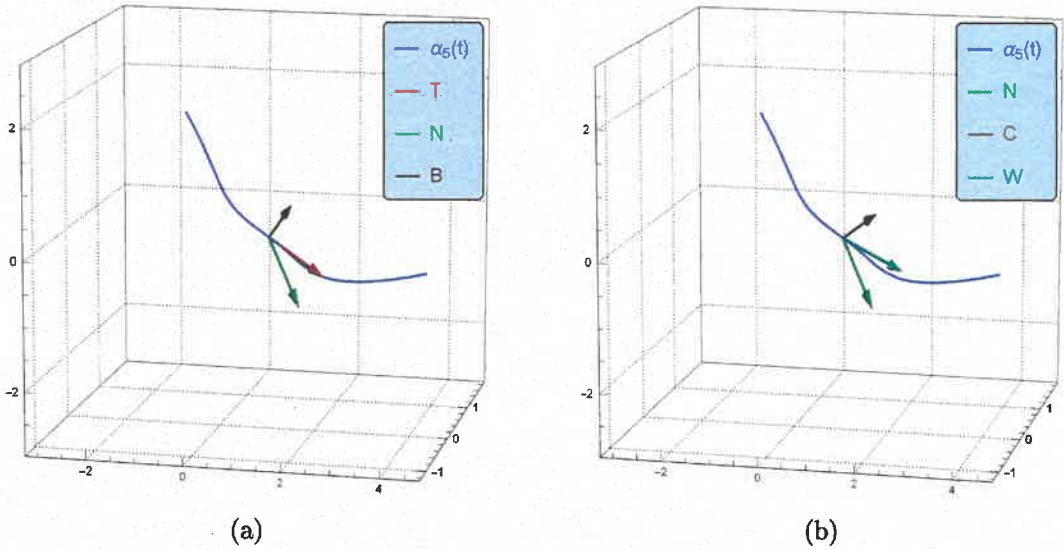
Örnek 4.5.2 Kahveci ve Yaylı tarafından açıklanan strateji izlenerek

(Kahveci ve Yaylı 2019), $\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında verilen bir slant helis boyunca her ikisi de persistan olan Frenet-Serret ve uyarlanmış çatı hareketlerini inşa etmek mümkündür. Şimdi çatı hareketleri persistan olan bu tür eğrilere bazı örnekler verelim:

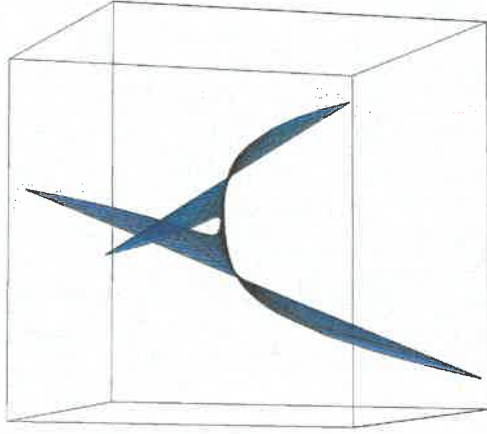


Şekil 4.3. (a) Şekil 4.2a'da ifade edilen Frenet-Serret hareketinin sabit aksode yüzeyi
 (b) Şekil 4.2b'de ifade edilen uyarlanmış çatı hareketinin sabit aksode yüzeyi

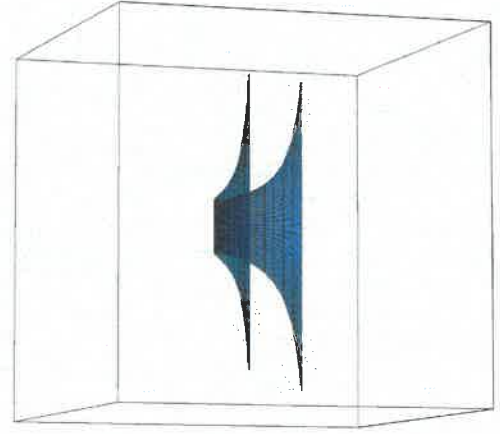
- i. $\alpha_5(t)$ timelike slant helisine bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden persistan çatı hareketleri ve onların aksode yüzeyleri, sırasıyla, Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.4 (a) Adımı $p_f = 1$ olan ve $\kappa = \sec(2t) \sinh(2 \operatorname{arctanh}(\tan(t)))$ ve $\tau = \sec(2t) \cosh(2 \operatorname{arctanh}(\tan(t)))$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen, bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan $\alpha_5(t)$ timelike slant helisi (b) Adımı $p_a = \frac{-1}{3}$ olan ve $f = \sec(2t)$ ve $g = 2 \sec(2t)$ eğrilik fonksiyonları ile belirlenen, bir persistan uyarlanmış çatı hareketi oluşturan $\alpha_5(t)$ timelike slant helisi



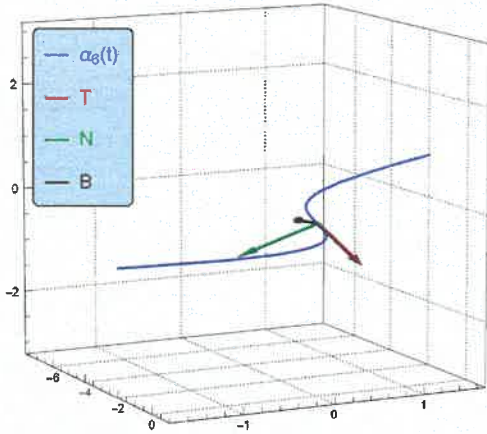
(a)



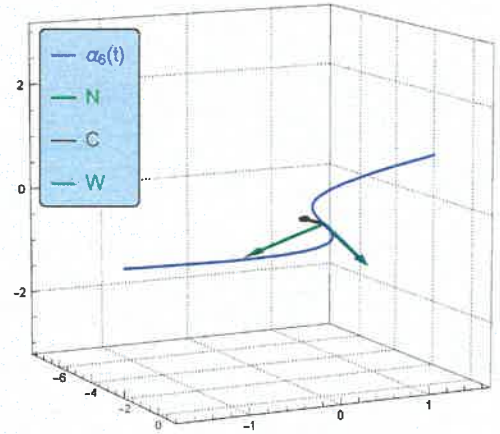
(b)

Şekil 4.5 (a) Şekil 4.4a'da ifade edilen persistan Frenet-Serret hareketinin sabit aksode yüzeyi (b) Şekil 4.4b'de ifade edilen persistan uyarlanmış çatı hareketinin sabit aksode yüzeyi

- ii. Bir timelike binormalli $\alpha_6(t)$ spacelike slant helisine bağlı ve bu eğri boyunca hareket eden persistan çatı hareketleri ve onların aksode yüzeyleri, sırasıyla, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 ile gösterilmiştir.

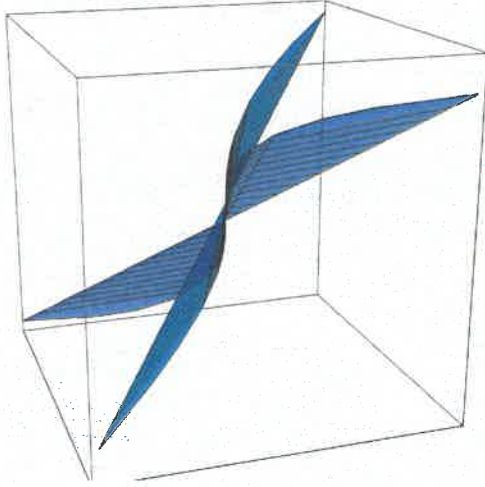


(a)

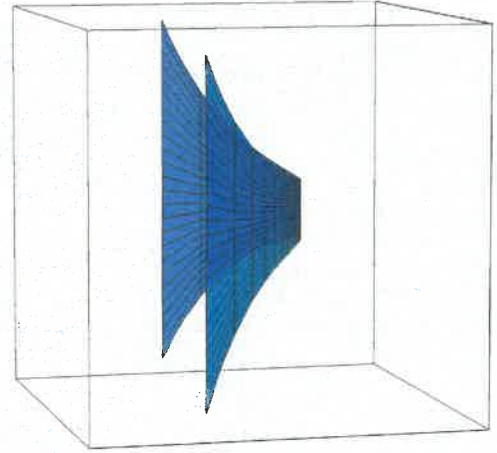


(b)

Şekil 4.6. (a) Adımı $p_f = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$ olan ve $\kappa = 2\sqrt{3}\sec(2t)\sinh(2\operatorname{arctanh}(\tan(t)))$ ve $\tau = 2\sqrt{3}\sec(2t)\cosh(2\operatorname{arctanh}(\tan(t)))$ eğrilik ve torsiyon fonksiyonları ile belirlenen, bir persistan Frenet-Serret hareketi oluşturan bir timelike binormalli $\alpha_6(t)$ spacelike slant helisi (b) Adımı $p_a = \frac{-\sqrt{3}}{8}$ olan ve $f = 2\sqrt{3}\sec(2t)$ ve $g = -2\sec(2t)$ eğrilik fonksiyonları ile belirlenen, bir persistan uyarlanmış çatı hareketi oluşturan bir timelike binormalli $\alpha_6(t)$ spacelike slant helisi



(a)



(b)

Şekil 4.7 (a) Şekil 4.6a'da ifade edilen persistan Frenet-Serret hareketinin sabit aksode yüzeyi (b) Şekil 4.6b'de ifade edilen persistan uyarlanmış çatı hareketinin sabit aksode yüzeyi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Robotikte, genellikle bir mekanizma hareket ettiğinde büküm sistemi değişir. Bununla birlikte büküm uzayı, $SE(3)$ özel Öklid grubunun bir $\mathfrak{se}(3)$ Lie alt cebiridir ve hareket boyunca invaryant kalır. Bu özelliğe sahip mekanizmaların bir genelleştirmesi olan, yani keyfi sonlu hareketler altında, bir katı hareket boyunca invaryant kalan mekanizmaların bükümü persistan bir vida sistemine sahiptir (Carricato ve Zlatanov 2014). Persistan vida sistemleri sınıfına ait olan kinematik bir yapı, uygun bir izometri altında, başlangıçtakine uyumlu bir vida alt uzayını üretir. Söz konusu izometri birim dönüşüm alındığında, invaryant vida sistemleri, persistan vida sistemlerine genelleştirilmiş olur.

Vida sistemleri mekanizmaların kinematığının incelenmesinde en temel araçlardan biridir. İnvaryant vida sistemleri, robotikte tam dögüsel mobilitayı garanti eden sistemlerdir. Persistan vida sistemleri ise, invaryant vida sistemlerinden daha genel olan ve boyut-adım invaryantlığı gibi bazı dikkate değer özelliklere sahip sistemlerdir. Bu nedenle persistan vida sistemlerinin mobilite analizi, mekanizma sentezi ve robotik sistemlerde önemli bir rol oynadıklarına inanılmaktadır.

Vida sistemleri ile ilgili birçok çalışma yapılmış olsa da, persistan hareketlere ayrılan literatür oldukça sınırlıdır. Bu tez çalışması, tüm persistan hareketler hakkında kapsamlı bir sınıflandırma sağlayarak literatürdeki mevcut boşluğu kapatmayı amaçlamaktadır.

Bu tez çalışmasında, 3–boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında persistan katı hareketler kavramı incelenmiştir. Bu iki uzayda da 1–parametrelili bir katı hareketin persistan olması, hareketin ani bükümünün sabit bir adıma sahip olması kriteri ile belirlenebilir. Ancak 3–boyutlu Minkowski uzayında adımların karakterizasyonu, hareketin dayandığı eğrinin causal karakterine bağlı olarak değişecektir. Bu çalışmanın ana katkıları şunlardır:

1. 3–boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında persistan katı hareketlerin kapsamlı bir sınıflandırması.

2. Bazı özel çatı hareketlerinin persistan olması için gerekli ve yeterli kriterleri sağlayan bir yöntemin geliştirilmesi.

3. Aksode yüzeylerinin ve onların denklemlerinin geometrik özelliklerinin analizi.

Ayrıca, çalışma boyunca vurgulanan persistan çatı hareketlerinin ve aksode yüzeylerinin daha iyi anlaşılmasını sağlayan bazı geometrik özellikler sunuyoruz.

3–boyutlu Minkowski uzayında, hem Frenet-Serret hem de uyarlanmış çatı denklemleri, çatının bağlı olduğu eğrinin causal karakterine göre benzersiz bir şekilde karakterize edilebildikleri için, matematiksel fizik ve relativistik mekanik dahil olmak üzere birçok alanda önemli uygulamalar sağlar. Öte yandan, 3–boyutlu Minkowski uzayının katı hareketleri Poincaré grubu olarak adlandırılan bir Lie grubu olduğundan, Lorentz geometrisi yörünge oluşturma ya da hareket interpolasyonunun kinematığını inşa etmek ve genişletmek için uygulanabilir.

Bu tezde açıklanan model 3–boyutlu Öklid ve Minkowski uzayları ile ilgilidir, ancak daha yüksek boyutlara kolayca genişletilebilir. Dahası başka eğriler göz önüne alınarak da persistan çatı hareketleri inşa edilebilir. Ayrıca, Kahveci ve Yaylı tarafından sunulan strateji izlenerek (Kahveci ve Yaylı 2019), persistan katı hareketlerin diferensiyel geometrik bir uygulaması için 3–boyutlu Minkowski uzayında slant helislere dayanan ve bunlar boyunca hareket eden persistan katı hareketler incelenebilir.

Bu tez çalışmasının, hareketlerin geometrik kinematığındaki problemleri çözmek için cebirsel tekniklerin uygulanmasını sağlayarak, geometri, kinematik ve relativistik mekanik arasında bir köprü oluşturabileceğine inanıyoruz.

KAYNAKLAR

- Ball, R.S. 1900. A Treatise on the Theory of Screws. Cambridge University Press, Cambridge.
- Barbaresco, F. and France, L. 2020. Radar Processing based on Matrix Lie Groups Geometry and Souriau Coadjoint Orbits Method, preprint, academia.
- Bishop, R.L. 1975. There is more than one way to frame a curve, The American Mathematical Monthly, 82(3); 246–251.
- Blum, R. 1966. A remarkable class of Mannheim-curves, Canadian Mathematical Bulletin, 9(2); 223–228.
- Boney, I.A., Zlatanov, D. and Gosselin, C.M. 2002. Advantages of the modified Euler angles in the design and control of PKMs. Parallel Kinematic Machines International Conference; pp. 171–188.
- Bottema, O. and Roth, B. 1979. Theoretical Kinematics. North-Holland Press, New York.
- Brauner, H., 1959. Die Strahlflächen von konstantem Drall, Monatsh. Math., 63(2); 101–111.
- Brauner, H., 1960. Über Strahlflächen 3. Grades mit konstantem Drall, Monatsh. Math., 64(2); 101–109.
- Brauner, H., 1967. Neuere Untersuchungen über windschiefe Flächen. Ein Bericht., Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 70; 61–85.
- Carricato, M. and Rico Martinez, J.M. 2010. Persistent Screw Systems. in: Lenarcic, J. and Stanisic, M.M. (Eds.), Advances in Robot Kinematics: Motion in Man and Machine. Springer, Dordrecht; pp. 185–194.
- Carricato, M. and Rico Martinez, J.M. 2011. Persistent screw systems of dimension three, in: Proc. of 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato; pp. 1–12.
- Carricato, M. 2012. Persistent screw systems of dimension four, Latest Advances in Robot Kinematics. Springer, Dordrecht; pp. 147–156.
- Carricato, M. 2014. Four-Dimensional Persistent Screw Systems of the General Type, in: Computational Kinematics. Springer, Dordrecht; pp. 299–306.
- Carricato, M. and Zlatanov, D. 2014. Persistent screw systems, Mechanism and Machine Theory, 73; 296–313.
- Carricato, M. 2017. Screw theory and its applications in robotics, World Congress of the International Federation of Automatic Control, France.
- Eisenhart, L. P., 1947. An Introduction to Differential Geometry with Use of the Tensor Calculus. Princeton University Press, Princeton.

- Ekici, C., Ünlütürk, Y., Dede, M. and Ryuh, B.S. 2008. On motion of robot end-effector using the curvature theory of timelike ruled surfaces with timelike rulings, *Mathematical Problems in Engineering*.
- Forsyth, A. R., 1920. *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Freudenstein, F. 1973. Kinematics: past, present and future, *Mechanism and Machine Theory*, 8(2); 151–160.
- Gibson, C.G. and Hunt, K.H. 1990. Geometry of screw systems-1, screws: genesis and geometry, *Mechanism and Machine Theory*, 25; 1–10.
- Gibson, C.G. and Hunt, K.H. 1990. Geometry of screw systems-2, classification of screw systems, *Mechanism and Machine Theory*, 25; 11–27.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1996. *Lineer Cebir 1*. Cilt. Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1996. *Lineer Cebir 2*. Cilt. Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1998. *Diferensiyel Geometri 1*. Cilt. Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2012. *Diferensiyel Geometri 2*. Cilt. Ankara.
- Hervé, J.M. 1999. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design, *Mechanism and Machine Theory*, 34(5); 719–730.
- Hunt, K.H. 1973. Constant-velocity shaft couplings: a general theory, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 95(2); 455–464.
- Hunt, K.H. 1978. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Clarendon, Oxford.
- Hunt, K.H. and Parkin, I.A. 1995. Finite displacements of points, planes, and lines via screw theory, *Mechanism and Machine Theory*, 30(2); 177–192.
- Husty, M., 1987. Über eine symmetrische Schrotung mit einer Cayley-Fläche als Grundfläche, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 22; 463–469.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New special curves and developable surfaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 28; 153–163.
- Jeffreys, H. and Jeffreys, B. 1950. *Methods of Mathematical Physics*. At the University Press, Cambridge.
- Kahveci, D. and Yaylı, Y. 2019. Persistent rigid-body motions on slant helices, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 16(12); 1950193.
- Kahveci, D. and Yaylı, Y. 2022. Geometric kinematics of persistent rigid motions in three-dimensional Minkowski space, *Mechanism and Machine Theory*, 167; 104535.
- Karger, A. and Novak, J. 1978. *Space Kinematics and Lie Groups*. Gordon and Breach Science Publishers, New York.

- Karsai, G. 2001. Method for the calculation of the combined motion time derivatives of optional order and solution for the inverse kinematic problems, *Mechanism and Machine Theory*, 36(2); 261–272.
- Kazaz, M., Özdemir, A. and Uğurlu, H.H. 2009. Elliptic motion on dual hyperbolic unit sphere \mathbb{H}_0^2 , *Mechanism and Machine Theory*, 44(7); 1450–1459.
- Kim, Y.S. and Noz, M.E. 1986. *Theory and Applications of the Poincaré Group*. Reidei, Dordrecht.
- Klok, F., 1986. Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory, *Computer Aided Geometric Design*, 3; 217–229.
- Krames, J., 1924. Die Regelfläche dritter Ordnung, deren unendlich ferne Kurve den Kegelschnitt doppelt oskuliert, *Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften*, 133; 65–90.
- Krames, J., 1937. Über Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen (Über symmetrische Schrotungen I), *Monatsh. Math. Phys.*, 45; 394–406.
- Krames, J., 1937. Zur Bricardschen Bewegung, deren sämtliche Bahnkurven auf Kugeln liegen (Über symmetrische Schrotungen II), *Monatsh. Math. Phys.*, 45; 407–417.
- Krames, J., 1937. Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen III), *Monatsh. Math. Phys.*, 46; 38–50.
- Krames, J., 1937. Zur kubischen Kreisbewegung des Raumes, (Über symmetrische Schrotungen IV), *Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften math.-nw. Kl., Abt. IIa*, 146; 145–158.
- Krames, J., 1937. Zur Geometrie des Bennett’schen Mechanismus, (Über symmetrische Schrotungen V), *Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften math.-nw. Kl., Abt. IIa*, 146; 159–173.
- Krames, J., 1937. Die Borel-Bricard-Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden (Über symmetrische Schrotungen VI), *Monatsh. Math. Phys.*, 46; 172–195.
- Krames, J., 1981. Über eine konoidale Regelfläche fünften Grades und die darauf gegründete symmetrische Schrotung, *Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften math.-nw. Kl., Abt. IIa*, 190; 221–230.
- Kula, L. and Yaylı, Y. 2005. On slant helix and its spherical indicatrix, *Applied Mathematics and Computation*, 169(1); 600–607.
- Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı Y. and İlarıslan, K. 2010. Characterizations of slant helices in Euclidean 3–space, *Turkish Journal of Mathematics*, 34(2); 261–273.

- Liu, G., Zhang, G., Guan, Y., Yang, Y. and Chen, X. 2019. Geometry of adjoint-invariant submanifolds of $SE(3)$, IEEE Transactions on Robotics.
- López, R. 2014. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, International Electronic Journal of Geometry, 7(1); 44–107.
- Löwe, H., Wu, Y. and Carricato, M. 2016. Symmetric subspaces of $SE(3)$, Advances in Geometry, 16(3); 381–388.
- Rico Martinez, J.M. and Duffy, J. 1992. Classification of screw systems-I. one-and two-systems, Mechanism and Machine Theory, 27; 459–470.
- Rico Martinez, J.M. and Duffy, J. 1992. Classification of screw systems-II. three-systems, Mechanism and Machine Theory, 27; 471–490.
- McCarthy, J.M. 1990. An Introduction to Theoretical Kinematics. The MIT Press, London.
- McCarthy, J.M. 2013. 21st Century Kinematics. Springer-Verlag, London.
- Menninger, A. 2014. Characterization of the slant helix as successor curve of the general helix, International Electronic Journal of Geometry, 7; 84–91.
- Müller, A. 2014. Derivatives of Screw Systems in Body-Fixed Representation. in: Lenarcic, J. and Khatib, O. (Eds.), Advances in Robot Kinematics. Springer, Dordrecht; pp. 123–130.
- O’Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press, Inc, New York.
- Özdemir, M. and Ergin, A.A. 2008. Parallel frames of non-lightlike curves, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 20(2); 127–137.
- Özkaldı, S. and Gündoğan, H. 2010. Cayley formula, Euler parameters and rotations in 3-dimensional Lorentzian space, Advances in Applied Clifford Algebras 20(2); 367-377.
- Ravani, R. and Meghdari, A., 2004. Spatial rational motions based on rational Frenet–Serret curves. In: IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, vol. 5; pp. 4456–4461.
- Sahiner, B., Kazaz, M. and Ugurlu, H.H. 2016. A study on motion of a robot end-effector using the curvature theory of dual unit hyperbolic spherical curves, Filomat, 30(3); 791–802.
- Scofield, P.D., 1995. Curves of constant precession, The American Mathematical Monthly, 102(6); 531–537.
- Selig, J.M. 2005. Geometric Fundamentals of Robotics. Springer, New York.

- Selig, J.M. and Wu, Y. 2006. Interpolated rigid-body motions and robotics. Proc. of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE; pp. 1086–1091.
- Selig, J. M., 2007. Curves of stationary acceleration in $SE(3)$, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 24(1); 95–113.
- Selig, J. M., 2013. Characterisation of Frenet–Serret and Bishop motions with applications to needle steering, Robotica, 31(6); 981–992.
- Selig, J.M. and Carricato, M. 2017. Persistent rigid-body motions and Study’s "Ribaucour" problem, Journal of Geometry, 108(1); 149–169.
- Soler, D. 2006. Reference frames and rigid motions in relativity: Applications, Foundations of Physics, 36(11); 1718–1735.
- Stramigioli, S. and Bruyninckx, H. 2001. Geometry and Screw Theory for Robotics (Tutorial t9). IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- Struik, D.J. 1988. Lectures on Classical Differential Geometry. Dover, New York.
- Study, E. 1913. Grundlagen und ziele der analytischen kinematik. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 12; 36–60.
- Tsamparlis, M. 2010. Special Relativity: An Introduction with 200 Problems and Solutions. Springer-Verlag, Berlin.
- Uzunoglu, B., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2016. A new approach on curves of constant precession, Applied Mathematics and Computation, 275; 317–323.
- Vishesh, S.B. and Haribaskar, R. 2018. A pair of kinematically related space curves, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.
- Wilmore, T. J., 2012. An Introduction to Differential Geometry. Dover (original edition: Oxford University Press, 1959).
- Wu, Y., Löwe, H., Carricato, M. and Li, Z. 2016. Inversion symmetry of the Euclidean group: theory and application in robot kinematics, IEEE Transactions on Robotics, 32(2); 312–326.
- Wu, Y. and Carricato, M. 2017. Identification and geometric characterization of Lie triple screw systems and their exponential images, Mechanism and Machine Theory, 107; 305–323.
- Wu, Y. and Carricato, M. 2018. Symmetric subspace motion generators, IEEE Transactions on Robotics, 34(3); 716–735.
- Wu, Y. and Carricato, M. 2020. Persistent manifolds of the special Euclidean group $SE(3)$: A review, Computer Aided Geometric Design, 79; 101872.
- Yoon, D.W. 2014. Mannheim curves in an n –dimensional Lorentz manifold, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 96(2); 165–174.