ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ PERİYODİK FİBONACCİ DİZİLERİ VE MATRİS GÖSTERİMLERİ

Tuğba ÖZDEN

MATEMATIK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ PERİYODİK FİBONACCİ DİZİLERİ VE MATRİS GÖSTERİMLERİ

Tuğba ÖZDEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Elif TAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, Fibonacci ve Lucas dizilerinin genelleştirilmesinden ve Horadam dizisinin temel özelliklerinden bahsedilmiştir.
Üçüncü bölümde, iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin matris gösterimleri göz önüne alınarak bazı özellikleri incelenmiştir.
Dördüncü bölümde iki periyodik Horadam dizileri için matris gösterimleri göz önüne alınarak daha önce iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizileri için elde edilen özelliklerin genel durumları incelenmiştir.
Beşinci bölüm tartışma ve sonuç bölümüdür.

Haziran 2022, 37 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Dizisi, Lucas Dizisi, Horadam Dizisi, İki Periyodik Fibonacci Dizisi, İki Periyodik Lucas Dizisi, Genelleştirilmiş İki Periyodik Horadam Dizisi.

ABSTRACT

Master Thesis

GENERALIZED BI-PERIODIC FIBONACCI SEQUENCES AND THEIR MATRIX REPRESENTATIONS

Tuğba ÖZDEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Elif TAN

This thesis consists of five chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter, generalization of Fibonacci and Lucas sequences and basic properties of Horadam sequences are mentioned.
In the third chapter, some properties of bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences are obtained by considering their matrix representations.
In the fourth chapter, more general results regarding to the bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences are investigated by considering matrix representation of bi-periodic Horadam sequences.
The fifth chapter is devoted to the discussion and conclusion section

June 2022, 37 pages

Key Words: Fibonacci sequences, Lucas sequences, Horadam sequences, Bi-periodic Fibonacci sequences, Generalized bi-periodic Fibonacci sequences.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübeleri benden esirgemeyen saygı değer hocam Doç. Dr. Elif TAN'a teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen annem Aynur ÖZDEN, babam Uğur ÖZDEN'e ve benimle her türlü bilgini paylaşan biricik ablama teşekkürü borç bilirim.

Tuğba ÖZDEN
Ankara, Haziran 2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
Δ	Diskriminant

1. GİRİŞ

1170 yılında Pisa'da doğan Leonarda Fibonacci Orta Çağ'ın en yetenekli matematikçilerinden birisi olarak kabul edilmektedir. 1202 yılında Avrupa'ya ondalık sayı sistemini de tanıttığı Liber Abaci kitabını yazmıştır. Bu kitapta bazı matematiksel formüller ve problemler yer almaktadır. Buradaki problemlerden birisi de tavşan ailesi problemidir. Bu problem aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:
"Biri erkek, biri dişi olmak üzere bir çift yavru tavşanının bulunduğu kapalı bir ortamda, tavşanların ölmediği ve yeni doğan bir yavrunun bir ay sonra yetişkin hale geldiği ve her yetişkin tavşanın da her ay yeni bir tavşan çifti doğurduğu bilinmektedir. Buna göre bir yılın sonunda ortamda bulunan tavşan çifti sayısı kaçtır?" Bu problemin çözümü aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir.

Ay:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Tavşan çifti sayısı:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Belirli bir ayın sonunda ortamda bulunan toplam tavşan çifti sayısının kendisinden önceki iki aydaki tavşan çifti sayılarının toplamı ile elde edildiği görülmektedir. Bu problemin çözümünde her ay ortamda bulunan tavşan çiftlerinin sayısı Fibonacci sayılarını oluşturur. Fibonacci sayılarının oluşturduğu diziye de Fibonacci dizisi denir.

Özellikle 20. yüzyılın ortalarından itibaren, Fibonacci dizisi araştırmacılar tarafından ilgi çekici bulunmuştur ve bu dizinin diğer bilim dalları ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu dizinin en önemli özelliklerinden biri ardışık iki Fibonacci sayısının oranının doğada sıklıkla rastlanılan altın oran ($\approx 1,618$) sayısına yakınsamasıdır.

Fibonacci dizilerinin birçok genelleştirilmesi vardır. Bu tezde Edson ve Yayenie tarafından 2009 yılında tanımlanan Fibonacci dizilerinin bir genelleştirmesi olan iki periyodik Fibonacci dizileri göz önüne alınacaktır. İlk olarak bu dizi ve genelleştirilmeleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara yer verilecektir ve temel özellikleri incelenecektir. Daha sonra bu tezde genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizileri olarak adlandıracağımız dizilerin n. terimi için genel bir çözüm veren Binet formülü yardımıyla bu dizinin bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca matris yöntemi yardımı ile bu dizilerin özellikleri elde edilecek ve çeşitli uygulamalarına yer verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak Fibonacci ve Lucas dizileri tanıtılacak ve temel özellikleri verilecektir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas dizilerinin bir genelleştirmesi olan iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizileri tanıtılacak ve özellikleri incelenecektir. Sonra bu tezde genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizisi olarak adlandırılacak olan iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin bir genelleştirilmesi göz önüne alınacak ve çeşitli özelliklerine yer verilecektir.

2.1 Fibonacci ve Lucas Dizileri

Tanım 2.1 (Fibonacci Dizisi) : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan diziye Fibonacci dizisi denir (Koshy 2001).

Şimdi bu dizinin bazı özelliklerini vereceğiz. Bu özellikler Thomas Koshy'nin (Koshy 2001) kitabında yer almaktadır.
Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olarak elde edilir. Bu karakteristik denlemin kökleri,

$$\gamma = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \delta = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. Burada $\gamma \approx 1,618$ altın orandır. Ayrıca

$$\gamma + \delta = 1, \quad \gamma - \delta = \sqrt{5}, \quad \gamma\delta = -1$$

olduğu açıkça görülebilir. Tümevarım yöntemi ile elde edilen

$$\gamma^n = \gamma F_n + F_{n-1}$$
$$\delta^n = \delta F_n + F_{n-1}$$

eşitlikleri için taraf tarafa çıkarma işlemi yapıldığında

$$F_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ilk olarak Fransız matematikçi Binet tarafından 1843 yılında bulunmuştur. Bu nedenle bu formül Binet formülü olarak adlandırılmaktadır (Koshy 2001).

Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2} \tag{2.1}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

Klasik Fibonacci dizileri için iyi bilinen matris özdeşliği

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

dir. Bu matris literatürde Fibonacci Q-matrisi olarak adlandırılmaktadır. İlk olarak Brenner (Brenner 1951) tarafından kullanılmıştır ve bu matrisin temel özellikleri Charles King (King 1960) tarafından yüksek lisans tezinde incelenmiştir.

Fibonacci Q-matrisi yardımıyla Fibonacci dizisi için birçok özdeşlik elde edilebilmektedir. Bu özdeşliklerden en iyi bilineni (2.2) eşitliğinde her iki tarafın determinantı alınarak elde edilen

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

özdeşliğidir (Silvester 1979, Gould 1981). Bu özdeşlik literatürde Cassini özdeşliği olarak bilinmektedir.

Tanım 2.2 (Lucas Dizisi) : $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2 \tag{2.3}$$

rekürans bağıntısını sağlayan $\{L_n\}$ dizisine Lucas dizisi denir (Koshy 2001).

Lucas dizisinin Binet formülü

$$L_n = \gamma^n + \delta^n \tag{2.4}$$

ve üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2} \tag{2.5}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

Q matrisi yardımıyla Lucas dizisi için

$$\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \tag{2.6}$$

matris özdeşliği elde edilmektedir (Johnson 2009).

Melham ve Shannon, Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren özdeşlikleri elde etmek için

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} L_n & 5F_n \\ F_n & L_n \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

matris özdeşliğini kullanmışlardır (Melham ve Shannon 1995).

Ayrıca bu matris özdeşlikleri yardımı ile Keskin ve Demirtürk (Keskin ve Demirtürk 2010) tarafından Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren birçok özdeşlik elde edilmiştir. Fibonacci ve Lucas dizileri için bazı toplam formülleri ise Demirtürk (Demirtürk 2010) tarafından incelenmiştir.

Tanım 2.3 (Horadam Dizisi) : p, q sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere $H_0 = a$, $H_1 = b$ keyfi başlangıç koşulları için

$$H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2}, n \geq 2 \tag{2.8}$$

rekürans bağıntısını sağlayan $\{H_n\}$ dizisine Horadam dizisi denir (Horadam 1961).

Horadam dizisinde başlangıç koşulları $H_0 = 0$, $H_1 = 1$ olarak alındığında genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{GF_n\}$ dizisi, başlangıç koşulları $H_0 = 2$, $H_1 = p$ olarak alındığında genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{GL_n\}$ elde edilir. Ayrıca Horadam dizisinde başlangıç koşulları $H_0 = 0$, $H_1 = 1$ ve $p = q = 1$ olarak alındığında Fibonacci dizisi $\{F_n\}$, başlangıç koşulları $H_0 = 2$, $H_1 = 1$ ve $p = q = 1$ olarak alındığında Lucas dizisi $\{L_n\}$ elde edilmektedir.

Horadam dizisinin Binet formülü

$$H_n = \left(\frac{b - a\delta}{\gamma - \delta}\right)\gamma^n - \left(\frac{b - a\gamma}{\gamma - \delta}\right)\delta^n$$

ve üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \frac{H_0 + (H_1 - pH_0)x}{1 - px - qx^2} \tag{2.9}$$

şeklindedir (Horadam 1961).

Daha önce klasik Fibonacci dizileri için verilen matris özdeşliği genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için

$$M := \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} GF_{n+1} & qGF_n \\ GF_n & qGF_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

şekildedir. Açıkça görülebilir ki M matrisinde $p = q = 1$ olarak alındığında Q matrisi elde edilmektedir (Melham ve Shannon 1993).
M matrisi yardımıyla Horadam dizisi için

$$\begin{pmatrix} H_{n+2} & qH_{n+1} \\ H_{n+1} & qH_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2 & qH_1 \\ H_1 & qH_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \tag{2.11}$$

matris özdeşliği elde edilmektedir (Johnson 2009).

2.2 İki Periyodik Fibonacci ve Lucas Dizileri

Tanım 2.4 (İki Periyodik Fibonacci Dizisi) : a, b $\in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & n \equiv 0(mod2) \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & n \equiv 1(mod2) \end{cases}, n \geq 2$$

bağıntısını sağlayan $\{q_n\}$ dizisine iki periyodik Fibonacci dizisi denir (Edson ve Yayenie 2009).

$\{q_n\}$ dizisinde a ve b değerleri değiştikçe literatürde yer alan birçok tamsayı dizi elde edilebildiği için $\{q_n\}$ dizisi bir dizi ailesi olarak görülebilir. Örneğin;

- $\{q_n\}$ dizisinde $a = b = 1$ alındığında Fibonacci dizisi elde edilir.
- $\{q_n\}$ dizisinde $a = b = 2$ alındığında Pell dizisi elde edilir.
- $\{q_n\}$ dizisinde $a = b = k$ $(k \in \mathbb{R}^+)$ alındığında k-Fibonacci dizisi elde edilir.

Tanım 2.5 (İki Periyodik Lucas Dizisi) : a, b $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere ve $p_0 = 2$, $p_1 = a$ başlangıç koşulları için

$$p_n = \begin{cases} ap_{n-1} + p_{n-2}, & n \equiv 1(mod2), \\ bp_{n-1} + p_{n-2}, & n \equiv 0(mod2), \end{cases} \quad n \geq 2$$

rekürans bağıntısını sağlayan $\{p_n\}$ dizisine iki periyodik Lucas dizisi denir (Bilgici 2014).

$\{p_n\}$ dizisinde $a = b = 1$ olarak alındığında Lucas dizisi elde edilir.

Bu tezde a, b, c sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere h_0, h_1 keyfi başlangıç koşulları için

$$h_n = \begin{cases} ah_{n-1} + ch_{n-2}, & n \equiv 0(mod2), \\ bh_{n-1} + ch_{n-2}, & n \equiv 1(mod2), \end{cases} \quad n \geq 2$$

rekürans bağıntısını sağlayan $\{h_n\}$ dizisi göz önüne alınacaktır. Bu dizinin daha genel bir durumu Panario vd. tarafından iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin bir genelleştirmesi olarak tanımlanmıştır (Panario vd. 2013).

$\{h_n\}$ dizisinde $a = b = p$ ve $c = -q$ alındığında Horadam dizisi elde edilebildiğinden dolayı bu tezde $\{h_n\}$ dizisi genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizisi olarak adlandırılacaktır.

Teorem 2.1 Genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizisi

$$h_n = (ab + 2c)h_{n-2} - c^2 h_{n-4}, \quad n \geq 4 \tag{2.12}$$

lineer rekürans bağıntısını sağlar (Panario vd. 2013).

İspat. İlk olarak n çift iken (2.12) rekürans bağıntısının sağlandığını gösterelim.
n çift iken, $\{h_n\}$ dizisinin tanımından

$$h_{2n} = ah_{2n-1} + ch_{2n-2} \tag{2.13}$$

dir. n tek iken, $\{h_n\}$ dizisinin sağlamış olduğu $h_{2n-1} = bh_{2n-2} + ch_{2n-3}$ rekürans bağıntısı (2.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$h_{2n} = (ab + c)h_{2n-2} + ach_{2n-3} \tag{2.14}$$

elde edilir. $\{h_n\}$ dizisinin sağlamış olduğu $ah_{2n-3} = h_{2n-2} - ch_{2n-4}$ bağıntısı (2.14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$h_{2n} = (ab + 2c)h_{2n-2} - c^2 h_{2n-4} \tag{2.15}$$

elde edilmektedir.
Benzer şekilde n tek iken, $\{h_n\}$ dizisinin tanımından

$$h_{2n+1} = bh_{2n} + ch_{2n-1} \tag{2.16}$$

elde edilmektedir. $h_{2n} = ah_{2n-1} + ch_{2n-2}$ bağıntısı (2.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$h_{2n+1} = (ab + c)h_{2n-1} + bch_{2n-2} \tag{2.17}$$

elde edilir. Burada $bh_{2n-2} = h_{2n-1} - ch_{2n-3}$ eşitliği göz önüne alındığında

$$h_{2n+1} = (ab + 2c)h_{2n-1} - c^2 h_{2n-3} \tag{2.18}$$

eşitliği elde edilir.
(2.15) ve (2.18) eşitlikleri gözönüne alındığında istenilen özdeşlik elde edilmiş olur.
■

Teorem 2.2 $\{h_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n = \frac{h_0 + h_1 x + (ah_1 - (ab+c)h_0)x^2 + c(bh_0 - h_1)x^3}{1 - (ab+2c)x^2 + c^2x^4} \tag{2.19}$$

şeklindedir (Panario vd. 2013).

İspat. $\{h_n\}$ dizisinin formal kuvvet serisini göz önüne alalım.

$$(1 - (ab+2c)x^2 + c^2x^4) \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n - (ab+2c) \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^{n+2} + c^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^{n+4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n - (ab+2c) \sum_{n=2}^{\infty} h_{n-2} x^n + c^2 \sum_{n=4}^{\infty} h_{n-4} x^n \\
&= h_0 + h_1 x + (h_2 - (ab+2c)h_0)x^2 + (h_3 - (ab+2c)h_1)x^3 \\
&\quad + \sum_{n=4}^{\infty} (h_n - (ab+2c)h_{n-2} + c^2 h_{n-4})x^n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitlikte $h_2 = ah_1 + ch_0$ ve $h_3 = b(ah_1 + ch_0) + ch_1$ yerine yazıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n = \frac{h_0 + h_1 x + (ah_1 - (ab+c)h_0)x^2 + c(bh_0 - h_1)x^3}{1 - (ab+2c)x^2 + c^2x^4}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.3 $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülü

$$h_n = \frac{a^{\zeta(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} (A\varphi^{n-1} - B\psi^{n-1}) \tag{2.20}$$

şeklindedir. Burada

$$A := \frac{\varphi h_1 + cbh_0}{\varphi - \psi} \tag{2.21}$$

$$B := \frac{\psi h_1 + cbh_0}{\varphi - \psi} \tag{2.22}$$

dır. Ayrıca φ ve ψ, $x^2 - abx - abc = 0$ denkleminin kökleridir. Yani

$$\varphi := \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4abc}}{2} \tag{2.23}$$

ve

$$\psi := \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 + 4abc}}{2} \tag{2.24}$$

dır. Burada $\triangle := a^2b^2 + 4abc > 0$ ve

$$\zeta(n) = n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \tag{2.25}$$

dir (Tan ve Leung 2020a).

İspat. $\{h_n\}$ ve $\{f_n\}$ dizileri arasındaki

$$h_n = f_n h_1 + c(\frac{b}{a})^{\zeta(n)} f_{n-1} h_0 \tag{2.26}$$

bağıntısını göz önüne alalım (Tan ve Leung, 2020a).

Bu bağıntıda genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci dizisinin Binet formülü (Yayenie 2011)

$$f_n = \frac{a^{\zeta(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} \right), \tag{2.27}$$

yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında $\{h_n\}$ dizisi için Binet formülü elde edilir. ■

Sonuç 2.1 (2.20) eşitliğinde başlangıç koşulları $h_0 = 2$ ve $h_1 = b$ olarak alınırsa genelleştirilmiş iki periyodik Lucas dizisi $\{l_n\}$ için Binet formülü

$$l_n = \frac{b^{\zeta(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} (\varphi^n + \psi^n) \tag{2.28}$$

şeklinde elde edilir (Tan ve Leung 2020a).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ PERİYODİK FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde ilk olarak Binet formülü yardımı ile genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizileri için bazı sonuçlar elde edilecektir. Daha sonra matris yöntemi yardımı ile genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimlerini içeren özdeşlikler incelenecektir.

3.1 Binet Formülü Yardımı İle Genelleştirilmiş İki Periyodik Horadam Dizileri İçin Bazı Sonuçlar

Bu bölümde ilk olarak $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülünden yararlanılarak genelleştirilmiş iki periyodik Horadam sayıları için Catalan özdeşliği elde edilecektir.

Teorem 3.1 n ve s negatif olmayan tam sayılar ve $n > s$ olmak üzere

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(n-s)-\zeta(s)} h_{n-s}h_{n+s} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(n)-\zeta(s)} h_n^2 = (-1)^{n-s+1}c^{n-s}f_s^2\left(h_1^2 - bh_0h_1 - c\frac{b}{a}h_0^2\right)$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&h_{n-s}h_{n+s} - h_n^2 \\
&= \frac{a^{\zeta(n-s+1)+\zeta(n+s+1)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n-s}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n+s}{2}\rfloor}}\left(A\varphi^{n-s-1} - B\psi^{n-s-1}\right)\left(A\varphi^{n+s-1} - B\psi^{n+s-1}\right) \\
&-\frac{a^{2\zeta(n+1)}}{(ab)^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\left(A\varphi^{n-1} - B\psi^{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{a^{2\zeta(n-s-1)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n-s}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n+s}{2}\rfloor}}\left(A^2\varphi^{2n-2} - AB\left(\varphi^{n-s-1}\psi^{n+s-1} + \psi^{n-s-1}\varphi^{n+s-1}\right) + B^2\psi^{2n-2}\right) \\
&-\frac{a^{2\zeta(n+1)}}{(ab)^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\left(A^2\varphi^{2n-2} - 2AB\left(\varphi^{n-1}\psi^{n-1}\right) + B^2\psi^{2n-2}\right) \\
&= \frac{a^{2\zeta(n-s-1)}}{(ab)^{n-\zeta(n-s)}}\left(A^2\varphi^{2n-2} - AB\left(\varphi^{n-s-1}\psi^{n+s-1} + \psi^{n-s-1}\varphi^{n+s-1}\right) + B^2\psi^{2n-2}\right) \\
&-\frac{a^{2\zeta(n+1)}}{(ab)^{n-\zeta(n)}}\left(A^2\varphi^{2n-2} - 2AB\left(\varphi\psi\right)^{n-1} + B^2\psi^{2n-2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(ab)^n}\left[a^{2-\zeta(n-s)}b^{\zeta(n-s)}\left(A^2\varphi^{2n-2} - AB(\varphi\psi)^{n-1}\left(\varphi^{-s}\psi^{s} + \psi^{-s}\varphi^{s}\right) + B^2\psi^{2n-2}\right)\right.$$

$$\left. -a^{2-\zeta(n)}b^{\zeta(n)}\left(A^2\varphi^{2n-2} - 2AB(\varphi\psi)^{n-1} + B^2\psi^{2n-2}\right)\right].$$

$$= \frac{a^2}{(ab)^n}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n-s)}\left(A^2\varphi^{2n-2} - AB(\varphi\psi)^{n-1}\left(\varphi^{-s}\psi^{s} + \psi^{-s}\varphi^{s}\right) + B^2\psi^{2n-2}\right)\right.$$

$$\left. -\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)}\left(A^2\varphi^{2n-2} - 2AB(\varphi\psi)^{n-1} + B^2\psi^{2n-2}\right)\right]$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(n-s)} h_{n-s}h_{n+s} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(n)} h_n^2 \\
=\ & \frac{a^2}{(ab)^n}\left[-AB(\varphi\psi)^{n-1}\left(\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^s + \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^s\right) + 2AB(\varphi\psi)^{n-1}\right] \\
=\ & \frac{-a^2}{(ab)^n}(\varphi\psi)^{n-1}AB\left[\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^s + \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^s - 2\right] \\
=\ & \frac{-a^2}{(ab)^n}(\varphi\psi)^{n-1}\frac{\psi^{2s} + \varphi^{2s} - 2(\varphi\psi)^s}{(\varphi\psi)^s}AB \\
=\ & \frac{-a^2}{(ab)^n}(\varphi\psi)^{n-s-1}(\varphi^s - \psi^s)^2 AB
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $\varphi\psi = -abc, \varphi + \psi = ab$ eşitlikleri gözönüne alınıp, A ve B değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&\frac{-a^2}{(ab)^n}(\varphi\psi)^{n-s-1}(\varphi^s - \psi^s)^2 AB \\
=\ & (-1)^{n-s}a^2\frac{(abc)^{n-s-1}}{(ab)^n}(\varphi^s - \psi^s)^2\left(\frac{\varphi h_1 + cbh_0}{\varphi - \psi}\right)\left(\frac{\psi h_1 + cbh_0}{\varphi - \psi}\right) \\
=\ & (-1)^{n-s}a^2(ab)^{-s-1}c^{n-s-1}(\varphi^s - \psi^s)^2\frac{(-abc)h_1^2 + cb(ab)h_0h_1 + c^2b^2h_0^2}{(\varphi - \psi)^2} \\
=\ & (-1)^{n-s}a^2(ab)^{-s-1}c^{n-s-1}\frac{(\varphi^s - \psi^s)^2}{(\varphi - \psi)^2}(-bc)\left(ah_1^2 - abh_0h_1 + cbh_0^2\right) \\
=\ & (-1)^{n-s+1}(ab)^{-s}c^{n-s}\frac{(ab)^{2\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}}{a^{2\zeta(s+1)}}f_s^2\left(ah_1^2 - abh_0h_1 + cbh_0^2\right) \\
=\ & (-1)^{n-s+1}a^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(s)}c^{n-s}f_s^2\left(ah_1^2 - abh_0h_1 + cbh_0^2\right) \\
=\ & (-1)^{n-s+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(s)}c^{n-s}f_s^2\left(h_1^2 - bh_0h_1 + c\frac{b}{a}h_0^2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

■

Sonuç 3.1 Teorem 3.1'de $s=1$ olarak alındığında $\{h_n\}$ dizisi için Cassini özdeşliği

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)} h_{n-1}h_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)} h_n^2 = (-1)^n c^{n-1}\left(h_1^2 - bh_0h_1 - c\frac{b}{a}h_0^2\right) \qquad (3.1)$$

elde edilir.

Şimdi $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülünden yararlanılarak genelleştirilmiş iki periyodik Horadam sayıları için d'Ocagne özdeşliği elde edilecektir.

Teorem 3.2 m ve n negatif olmayan tam sayılar ve $m>n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&a^{\zeta(mn+m)}b^{\zeta(mn+n)}h_m h_{n+1} - a^{\zeta(mn+n)}b^{\zeta(mn+m)}h_{m+1}h_n\\&= (-c)^n a^{\zeta(m-n)} f_{m-n}(h_1^2 - bh_0h_1 - c\frac{b}{a}h_0^2)\end{aligned}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülü kullanılırsa ve $\zeta(m-n)+\zeta(m)-\zeta(n) = 2\zeta(mn+m)$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}&a^{\zeta(mn+m)}b^{\zeta(mn+n)}h_m h_{n+1} - a^{\zeta(mn+n)}b^{\zeta(mn+m)}h_{m+1}h_n\\
&= a^{\zeta(mn+m)}b^{\zeta(mn+n)}\frac{a^{\zeta(m+1)+\zeta(n)}}{(ab)^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}}\left(A\alpha^{m-1}-B\beta^{m-1}\right)\left(A\alpha^n - B\beta^n\right)\\
&-a^{\zeta(mn+n)}b^{\zeta(mn+m)}\frac{a^{\zeta(m)+\zeta(n+1)}}{(ab)^{\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\left(A\alpha^m - B\beta^m\right)\left(A\alpha^{n-1}-B\beta^{n-1}\right)\\
&= a(ab)^{\frac{\zeta(m-n)-m-n}{2}} AB\left(-\alpha^{m-1}\beta^n - \beta^{m-1}\alpha^n + \alpha^m\beta^{n-1} + \beta^m\alpha^{n-1}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte A ve B değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&a^{\zeta(mn+m)}b^{\zeta(mn+n)}h_m h_{n+1} - a^{\zeta(mn+n)}b^{\zeta(mn+m)}h_{m+1}h_n\\
&= a(ab)^{\frac{\zeta(m-n)-m-n}{2}}\frac{(-abc)h_1^2 + cb(ab)h_0h_1 + c^2b^2h_0^2}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha-\beta)\left(\alpha^{m-1}\beta^{n-1}-\beta^{m-1}\alpha^{n-1}\right)\\
&= a(ab)^{\frac{\zeta(m-n)-m-n}{2}} c(-ab)\frac{\left(\alpha^{m-1}\beta^{n-1}-\beta^{m-1}\alpha^{n-1}\right)}{\alpha-\beta}\left(h_1^2 - bh_0h_1 - c\frac{b}{a}h_0^2\right)\\
&= a(ab)^{\frac{\zeta(m-n)-m-n}{2}} c(-ab)(\alpha\beta)^{n-1}\frac{\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}\left(h_1^2 - bh_0h_1 - c\frac{b}{a}h_0^2\right)\\
&= a(ab)^{\frac{\zeta(m-n)-m-n}{2}} c^n(-ab)^n(ab)^{\frac{\zeta(m-n)+m-n}{2}} a^{\zeta(m-n)-1} f_{m-n}\left(h_1^2 - bh_0h_1 - c\frac{b}{a}h_0^2\right)\end{aligned}$$

$$= (-c)^n (ab)^{\zeta(m-n)} a^{\zeta(m-n)} f_{m-n} \left(h_1^2 - bh_0 h_1 - c\frac{b}{a} h_0^2 \right)$$

elde edilir. ■

Son olarak $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülünden yararlanılarak genelleştirilmiş iki periyodik Horadam sayıları için binom toplam formülü verilecektir.

Teorem 3.3 Negatif olmayan k, n ve s tam sayıları için

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\zeta(k+s)} (ab)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \zeta(k)\zeta(s)} c^{n-k} h_{k+s} = a^{\zeta(s)} h_{2n+s}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. $\{h_n\}$ dizisinin Binet formülü kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\zeta(k+s)} (ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \zeta(k)\zeta(s)} c^{n-k} h_{k+s}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\zeta(k+s)+\zeta(k+s+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \zeta(k)\zeta(s) - \left\lfloor \frac{k+s}{2} \right\rfloor} \left(A\varphi^{k+s-1} - B\psi^{k+s-1} \right) c^{n-k}$$

$$= a (ab)^{\frac{\zeta(s)-s}{2}} \left[A\varphi^{s-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^k c^{n-k} - B\psi^{s-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^k c^{n-k} \right]$$

$$= a (ab)^{\frac{\zeta(s)-s}{2}} \left[A\varphi^{s-1} (c+\varphi)^n - B\psi^{s-1} (c+\psi)^n \right]$$

$$= a (ab)^{\frac{\zeta(s)-r}{2}} \left[A\varphi^{s-1} \left(\frac{\varphi^2}{ab} \right)^n - B\psi^{s-1} \left(\frac{\psi^2}{ab} \right)^n \right]$$

$$= a (ab)^{\frac{\zeta(s)-s-2n}{2}} \left(A\varphi^{2n+s-1} - B\psi^{2n+s-1} \right)$$

$$= a^{1-\zeta(2n+s+1)} (ab)^{\frac{\zeta(s)-s-2n}{2} + \left\lfloor \frac{2n+s}{2} \right\rfloor} h_{2n+s}$$

$$= a^{\zeta(s)} h_{2n+s}$$

elde edilir. ■

Uyarı 3.1 Bölüm 3.1'de $\{h_n\}$ dizisi için elde edilen özdeşlikler $c = 1$ olarak alındığında Tan (Tan 2017a) tarafından elde edilen sonuçları vermektedir.

3.2 Matris Yöntemi Yardımı İle Genelleştirilmiş İki Periyodik Fibonacci Dizilerinin Terimlerini İçeren Bazı Özdeşlikler

Bir önceki bölümde elde edilen özdeşlikler klasik bir yöntem olan Binet formülünün kullanılmasıyla elde edilmişti. Bu bölümde genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin bazı özellikleri matris yöntemi ile elde edilecektir. İki periyodik Fibonacci ve Lucas dizileri için matris özdeşlikleri Tan ve Ekin (2017) ve Tan ve Leung (2020b) tarafından incelenmiştir.

Genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci dizisi $\{f_n\}$ için

$$U := \begin{pmatrix} ab & abc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

matrisini göz önüne alalım. Tümevarım yöntemi kullanılarak bileşenleri $\{f_n\}$ dizisinin terimlerinden oluşan

$$U^n = (ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} b^{\zeta(n)} f_{n+1} & cba^{\zeta(n)} f_n \\ a^{-\zeta(n+1)} f_n & cb^{\zeta(n)} f_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

matris özdeşliği elde edilir (Tan ve Leung 2020b).
(3.3) matris özdeşliği kullanılarak $\{f_n\}$ dizisi için aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 3.4 (Tan ve Leung 2020b) $n,\ t \in \mathbb{Z}^+$ ve $t \geq n$ olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi için aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

1. $(-c)^{n-1} = (\frac{b}{a})^{\zeta(n+1)} f_n^2 - (\frac{b}{a})^{\zeta(n)} f_{n+1} f_{n-1}$,

2. $(-c)^n f_{t-n} = (\frac{b}{a})^{\zeta(tn+n)} f_t f_{n+1} - (\frac{b}{a})^{\zeta(tn+t)} f_{t+1} f_n$,

3. $f_{t+n} = (\frac{b}{a})^{\zeta(tn+n)} f_t f_{n+1} + c(\frac{b}{a})^{\zeta(tn+t)} f_{t-1} f_n$,

4. $f_n = (\frac{b}{a})^{\zeta(tn+n)} f_{n-t+1} f_t + c(\frac{b}{a})^{\zeta(tn)} f_{n-t} f_{t-1}$.

İspat.

1. (3.3) matris özdeşliğinin her iki tarafının determinantı alındığında

$$\begin{aligned}
|U|^t &= |U^t| \\
&\Rightarrow (-abc)^t = (ab)^{2\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}(cb^{2\zeta(t)} f_{t+1} f_{t-1} - cba^{-\zeta(t+1)} a^{\zeta(t)} f_t^2) \\
&\Rightarrow (-abc)^t = (ab)^{t-\zeta(t)}(cb^{2\zeta(t)} f_{t+1} f_{t-1} - cba^{-\zeta(t+1)+\zeta(t)} f_t^2) \\
&\Rightarrow (-c)^t = (ab)^{-\zeta(t)}(cb^{2\zeta(t)} f_{t+1} f_{t-1} - cba^{-\zeta(t+1)+\zeta(t)} f_t^2) \\
&\Rightarrow (-c)^t = -c(ab)^{-\zeta(t)}(ba^{-\zeta(t+1)+\zeta(t)} f_n^2 - b^{2\zeta(t)} f_{t+1} f_{t-1}) \\
&\Rightarrow (-c)^{t-1} = (\frac{b}{a})^{\zeta(t+1)} f_t^2 - (\frac{b}{a})^{\zeta(t)} f_{t+1} f_{t-1}
\end{aligned}$$

   elde edilir.

   Bu özdeşlik $\{f_n\}$ dizisi için Cassini özdeşliği olarak bilinmektedir.

2. U matrisi terslenebilir olduğundan

$$U^{-n} = \frac{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(-abc)^n} \begin{pmatrix} cb^{\zeta(n)} f_{n-1} & -cba^{\zeta(n)} f_n \\ -a^{-\zeta(n+1)} f_n & b^{\zeta(n)} f_{n+1} \end{pmatrix}$$

   dir. $U^{t-n} = U^t U^{-n}$ matris eşitliği göz önüne alındığında ve karşılık gelen bileşenler eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
&(ab)^{\lfloor \frac{t-n}{2} \rfloor} cba^{\zeta(t-n)} f_{t-n} \\
&= \frac{(ab)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(-abc)^n}(-b^{\zeta(t)+1} ca^{\zeta(n)} f_{t+1} f_n + cb^{\zeta(n)+1} a^{\zeta(t)} f_t f_{n+1})
\end{aligned}$$

   eşitliği elde edilir. Burada $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-\zeta(n)}{2}$ eşitliği kullanılarak

$$(-c)^n f_{t-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\zeta(t-n)-\zeta(t)+\zeta(n)}{2}} f_t f_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\zeta(t-n)+\zeta(t)-\zeta(n)}{2}} f_{t+1} f_n$$

   elde edilir. $\zeta(t-n) + \zeta(t) - \zeta(n) = 2\zeta(tn+t)$ eşitliği kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$(-c)^n f_{t-n} = (\frac{b}{a})^{\zeta(tn+n)} f_t f_{n+1} - (\frac{b}{a})^{\zeta(tn+t)} f_{t+1} f_n$$

   eşitliği elde edilmektedir.

   Bu özdeşlik $\{f_n\}$ dizisi için d'Ocagne özdeşliği olarak bilinmektedir.

3. $U^{n+t} = U^n U^t$ matris eşitliği göz önüne alındığında ve karşılık gelen bileşenler eşitlendiğinde

$$(ab)^{\lfloor \frac{t+n}{2} \rfloor} cba^{\zeta(t+n)} f_{t+n}$$

$$= (ab)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (cb^{\zeta(n)+1} a^{\zeta(t)} f_{n+1} f_t + c^2 b^{\zeta(t)+1} a^{\zeta(n)} f_n f_{t-1})$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$f_{t+n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\zeta(t+n)+\zeta(n)-\zeta(t)}{2}} f_{n+1} f_t + c \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\zeta(t+n)+\zeta(t)-\zeta(n)}{2}} f_n f_{t-1}$$

elde edilir. Buradan $\zeta\,(t+n) + \zeta\,(t) - \zeta\,(n) = 2\zeta\,(tn+t)$ eşitliği kullanılırsa

$$f_{t+n} = (\frac{b}{a})^{\zeta(tn+n)} f_t f_{n+1} + c(\frac{b}{a})^{\zeta(tn+t)} f_{t-1} f_n$$

elde edilir.

Bu özdeşlik $\{f_n\}$ dizisi için Honsberger özdeşliği olarak bilinmektedir

4. $U^{n-1} = U^{n-t} U^{t-1}$ matris eşitliği göz önüne alındığında ve karşılık gelen bileşenler eşitlendiğinde

$$(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n-t}{2} \rfloor} f_n$$

$$= b^{\zeta(n-t)+\zeta(t-1)-\zeta(n-1)} f_{n-t+1} f_t + cb^{1-\zeta(n-1)} a^{\zeta(n-t)-\zeta(t)} f_{n-t} f_{t-1}$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$f_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\zeta(n-t)+\zeta(n)-\zeta(t)}{2}} f_{n-t+1} f_t + c \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\zeta(n)+\zeta(t)-\zeta(n-t)}{2}} f_{n-t} f_{t-1}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\zeta\,(n) + \zeta\,(t) - \zeta\,(n-t) = 2\zeta\,(nt)$ eşitliği kullanılırsa

$$f_n = (\frac{b}{a})^{\zeta(tn+n)} f_{n-t+1} f_t + c(\frac{b}{a})^{\zeta(tn)} f_{n-t} f_{t-1}$$

özdeşliği elde edilir.

Bu özdeşlik $\{f_n\}$ dizisi için Convolution özdeşliği olarak bilinmektedir.

■

3.3 Matris Yöntemi Yardımı İle Genelleştirilmiş İki Periyodik Lucas Dizilerinin Terimlerini İçeren Bazı Özdeşlikler

Genelleştirilmiş iki periyodik Lucas dizisi $\{l_n\}$ için

$$V := \begin{pmatrix} ab^2 + 2cb & ab^2c \\ ab & 2abc \end{pmatrix}$$

matrisi göz önüne alalım. Tümevarım yöntemi kullanılarak bileşenleri $\{l_n\}$ dizisinin terimlerinden oluşan

$$VU^n = (ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} b^{\zeta(n+1)} l_{n+2} & a^{\zeta(n+1)} bcl_{n+1} \\ a^{\zeta(n+1)} l_{n+1} & ab^{\zeta(n+1)} cl_n \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

matris özdeşliği elde edilir.

$\{f_n\}$ dizisi için elde edilen bazı özellikler (3.4) matris eşitliği kullanılarak $\{l_n\}$ dizisi için de elde edilebilir.

(3.4) matris özdeşliğinin her iki tarafının determinantı alınıp taraf tarafa bileşenleri eşitlendiğinde ve $n \to n-1$ olarak alındığında

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)} l_{n-1} l_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)} l_n^2 = (-c)^{n-1} \frac{\triangle}{a^2} \tag{3.5}$$

özdeşliği elde edilir. Burada $\triangle := a^2b^2 + 4abc$ dir. Bu özdeşlik $\{l_n\}$ dizisi için Cassini özdeşliğidir.

$VU^{t+n-2} = (VU^{n-1})U^{t-1}$ matris eşitliği göz önüne alındığında ve karşılık gelen bileşenler eşitlendiğinde

$$l_{t+n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(tn+n)} l_{n+1} f_t + c \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(tn+t)} l_n f_{t-1} \tag{3.6}$$

özdeşliği elde edilir.

4. bölümde (3.4) matris özdeşliğinin daha genel durumu göz önüne alınarak daha genel sonuçlar elde edilecektir.

3.4 Matris Yöntemi Yardımı İle Genelleştirilmiş İki Periyodik Fibonacci ve Lucas Dizilerinin Terimlerini İçeren Bazı Özdeşlikler

$\triangle := a^2b^2 + 4abc$ olmak üzere,

$$K := \begin{pmatrix} ab & \triangle \\ 1 & ab \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi tanımlandığında bileşenleri hem $\{f_n\}$ hem de $\{l_n\}$ dizilerinin terimlerinden oluşan

$$K^n = 2^{n-1}(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} a^{\zeta(n)}l_n & \triangle a^{-\zeta(n+1)}f_n \\ a^{-\zeta(n+1)}f_n & a^{\zeta(n)}l_n \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

matris özdeşliği elde edilir (Tan ve Leung 2020b).

(3.8) matris özdeşliği yardımıyla genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin bileşenlerini içeren aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.5 (Tan ve Leung 2020b) $t,\ n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\{f_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $l_n^2 - \frac{\triangle}{a^2} f_n^2 = 4\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)} (-c)^n$,
2. $\frac{\triangle}{a^2} f_t f_n + l_t l_n = 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(t)} l_{n+t}$,
3. $f_t l_n + f_n l_t = 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(t)} f_{n+t}$,
4. $l_n l_t - \frac{\triangle}{a^2} f_n f_t = 2(-c)^t \left(\frac{a}{b}\right)^{-\zeta(n)\zeta(t)} l_{n-t}$,
5. $f_n l_t - l_n f_t = 2(-c)^t \left(\frac{a}{b}\right)^{-\zeta(n)\zeta(t)} f_{n-t}$,
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(n)\zeta(t)} l_t l_n = l_{n+t} + (-c)^t l_{n-t}$,
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(n)\zeta(t)} f_t f_n = f_{n+t} + (-c)^t f_{n-t}$.

İspat.

1. (3.8) matris özdeşliğinin her iki tarafının determinantı alındığında

$$
\begin{aligned}
|K|^n &= |K^n| \\
&\Rightarrow\ (-4abc)^n = 2^{2n-2}(ab)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(a^{2\zeta(n)}l_n^2 - \triangle a^{-2\zeta(n+1)}f_n^2) \\
&\Rightarrow\ (-4abc)^n = \frac{2^{2n}}{4}(ab)^{n-\zeta(n)}(a^{2\zeta(n)}l_n^2 - \triangle a^{-2\zeta(n+1)}f_n^2) \\
&\Rightarrow\ 4(-c)^n = \left(\frac{1}{ab}\right)^{\zeta(n)}(a^{2\zeta(n)}l_n^2 - \triangle a^{2\zeta(n)-2}f_n^2) \\
&\Rightarrow\ 4(-c)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{\zeta(n)}(l_n^2 - \frac{\triangle}{a^2}f_n^2) \\
&\Rightarrow\ 4\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)}(-c)^n = l_n^2 - \frac{\triangle}{a^2}f_n^2
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

2. $K^{n+t} = K^n K^t$ matris eşitliğinde karşılık gelen bileşenleri göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
&2^{n+t-2}(ab)^{\frac{n+t-\zeta(n)-\zeta(t)}{2}}(\triangle a^{-\zeta(n+1)-\zeta(t+1)}f_n f_t + a^{\zeta(n)+\zeta(t)}l_n l_t) \\
&= 2^{n+t-1}(ab)^{\frac{n+t-\zeta(n+t)}{2}}a^{\zeta(n+t)}l_{n+t}
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\frac{a^{\frac{\zeta(n)+\zeta(t)}{2}}}{a^2}\triangle f_n f_t + a^{\frac{\zeta(n)+\zeta(t)}{2}}l_n l_t = 2b^{\frac{\zeta(n)+\zeta(t)-\zeta(n+t)}{2}}a^{\frac{\zeta(n+t)}{2}}l_{n+t}$$

elde edilir ve bu ifade düzenlenirse

$$a^{\frac{\zeta(n)+\zeta(t)}{2}}\left(\frac{\triangle}{a^2}f_n f_t + l_n l_t\right) = 2b^{\frac{\zeta(n)+\zeta(t)-\zeta(n+t)}{2}}a^{\frac{\zeta(n+t)}{2}}l_{n+t}$$

eşitliği elde edilir. İstenilen özdeşlik ispatlanmış olur.

3. $K^{n+t} = K^n K^t$ matris eşitliğinde karşılık gelen bileşenler eşitlendiğinde

$$
\begin{aligned}
&2^{n+t-2}(ab)^{\frac{n+t-\zeta(n)-\zeta(t)}{2}}(\triangle a^{\zeta(n)-\zeta(t+1)}l_n f_t + \triangle a^{-\zeta(n+1)+\zeta(t)}f_n l_t) \\
&= 2^{n+t-1}(ab)^{\frac{n+t-\zeta(n+t)}{2}}\triangle a^{-\zeta(n+t+1)}f_{n+t}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$(ab)^{\frac{-\zeta(n)-\zeta(t)}{2}}(a^{\zeta(n)-\zeta(t+1)}l_n f_t + a^{-\zeta(n+1)+\zeta(t)}f_n l_t)$$

$$= 2(ab)^{\frac{-\zeta(n+t)}{2}} a^{-\zeta(n+t+1)} f_{n+t}$$

elde edilir ve istenilen özdeşlik gösterilmiş olur.

4. $K^{n-t} = K^n K^{-t} = K^n (K^t)^{-1}$ matris özdeşliğinde karşılık gelen bileşenler eşitlendiğinde

$$\frac{(ab)^{\frac{n-\zeta(n)-t+\zeta(t)}{2}}}{a^{2\zeta(t)} 4(\frac{b}{a})^{\zeta(t)} (-c)^t} (a^{\zeta(n)+\zeta(t)} l_n l_t - \triangle a^{-\zeta(n+1)-\zeta(t+1)} f_n f_t)$$

$$= \frac{1}{2}(ab)^{\frac{n-t-\zeta(n-t)}{2}} a^{\zeta(n-t)} l_{n-t}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$a^{\zeta(n)+\zeta(t)} \left(l_n l_t - \frac{\triangle}{a^2} f_n f_t \right)$$

$$= 2(-c)^t (ab)^{\frac{\zeta(n)-\zeta(t)-\zeta(n-t)}{2}} a^{2\zeta(t)+\zeta(n-t)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(t)} l_{n-t}$$

elde edilir ve istenilen özdeşlik ispatlanmış olur.

5. $K^{n-t} = K^n K^{-t} = K^n (K^t)^{-1}$ matris özdeşliğinde karşılık gelen bileşenler eşitlendiğinde

$$\frac{(ab)^{\frac{n-\zeta(n)-t+\zeta(t)}{2}}}{a^{2\zeta(t)} 4(\frac{b}{a})^{\zeta(t)(-c)^t}} a^{\zeta(n)-1+\zeta(t)} (f_n l_t - l_n f_t)$$

$$= \frac{1}{2}(ab)^{\frac{n-t-\zeta(n-t)}{2}} a^{-\zeta(n-t+1)} f_{n-t}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$f_n l_t - l_n f_t = 2(-c)^t \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(t)} b^{\frac{-\zeta(n-t)+\zeta(n)-\zeta(t)}{2}} a^{\frac{\zeta(n-t)-\zeta(n)+\zeta(t)}{2}} f_{n-t}$$

elde edilir ve istenilen özdeşlik ispatlanmış olur.

6. (2) ve (4) özdeşlikleri taraf tarafa toplandığında

$$2l_t l_n = 2\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(t)} l_{n+t} + (-c)^t \left(\frac{a}{b}\right)^{-\zeta(n)\zeta(t)} l_{n-t} \right)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$l_t l_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(t)} (l_{n+t} + (-c)^t l_{n-t})$$

elde edilir ve istenilen özdeşlik ispatlanmış olur.

7. (3) ve (5) özdeşlikleri taraf tarafa toplandığında

$$2f_t f_n = 2\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(t)} f_{n+t} + (-c)^t \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(t)} f_{n-t}\right)$$

elde edilir ve istenilen özdeşlik ispatlanmış olur.

■

Şimdi genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizileri için genel binom toplam formülleri verilecektir.

Teorem 3.6 Negatif olmayan m, n, r tam sayıları ve $m > 1$ için

$$f_{mn+r} = \frac{a^{1-\zeta(mn+r)}}{(ab)^{\lfloor \frac{mn+r}{2} \rfloor}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c^{n-i} f_m^i f_{m-1}^{n-i} f_{i+r} \delta \tag{3.9}$$

$$l_{mn+r} = \frac{a^{1-\zeta(mn+r)}}{(ab)^{\lfloor \frac{mn+r}{2} \rfloor}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c^{n-i} f_m^i f_{m-1}^{n-i} l_{i+r} \delta \tag{3.10}$$

dir. Burada $\delta := (ab)^{\lfloor \frac{i+r}{2} \rfloor + n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a^{-\zeta(m+1)i-1+\zeta(i+r)} b^{\zeta(m)(n-i)}$ dır (Tan ve Leung 2020b).

İspat.

$$K^m = 2^{m-1}(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\left(a^{-\zeta(m+1)} f_m K + 2cb^{\zeta(m)} f_{m-1} I\right) \tag{3.11}$$

matris eşitliğini gözönüne alalım. Buradan

$$K^{mn+r} = \left(2^{m-1}(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\left(a^{-\zeta(m+1)} f_m K + 2cb^{\zeta(m)} f_{m-1} I\right)\right)^n K^r \tag{3.12}$$

elde edilir ve binom açılımı kullanıldığında

$$K^{mn+r} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{mn-i} c^{n-i} (ab)^{n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a^{-\zeta(m+1)i} b^{\zeta(m)(n-i)} u_m^i u_{m-1}^{n-i} K^{i+r} \tag{3.13}$$

matris özdeşliği elde edilir. Diğer yandan (3.8) matris eşitliği yardımıyla

$$K^{mn+r} = 2^{mn+r-1}(ab)^{\lfloor \frac{mn+r}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} a^{\zeta(mn+r)} l_{mn+r} & \triangle a^{-\zeta(mn+r+1)} f_{mn+r} \\ a^{-\zeta(mn+r+1)} f_{mn+r} & a^{\zeta(mn+r)} l_{mn+r} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

eşitliği elde edilir.(3.13) ve (3.14) matris özdeşliklerinde taraf tarafa bileşenler eşitlendiğinde istenilen elde edilir. ■

Sonuç 3.2 Teorem (3.6)'de $m = 2$ alındığında,

$$a^{\zeta(r)} f_{2n+r} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{\zeta(i+r)} (ab)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \zeta(i)\zeta(r)} c^{n-i} f_{i+r} \tag{3.15}$$

ve

$$a^{\zeta(r)} l_{2n+r} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{\zeta(i+r)} (ab)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \zeta(i)\zeta(r)} c^{n-i} l_{i+r}. \tag{3.16}$$

özdeşlikleri elde edilir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ PERİYODİK HORADAM DİZİLERİ İÇİN MATRİS GÖSTERİMİ

Matris yöntemi kullanılarak genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin özelliklerinin daha pratik bir şekilde elde edilebildiğini incelemiştik. Bu bölümde iki periyodik Horadam dizilerinin özelikleri matris yöntemi kullanılarak elde edilmeye çalışılacaktır. Bu bölümde göz önüne alınacak sonuçlar Tan ve Leung (2020b) tarafından elde edilmiştir (Tan ve Leung 2020b).

Daha önceki bölümde kullanmış olduğumuz

$$U = \begin{pmatrix} ab & abc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^n = (ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} b^{\zeta(n)} f_{n+1} & cba^{\zeta(n)} f_n \\ a^{-\zeta(n+1)} f_n & cb^{\zeta(n)} f_{n-1} \end{pmatrix}$$

matris özdeşliğini göz önüne alalım. Ayrıca genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizisi için

$$T := \begin{pmatrix} abh_1 + cbh_0 & abch_1 \\ ah_1 & abch_0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

matrisini göz önüne alalım. Tümevarım yöntemi kullanılarak bileşenleri genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizilerinin terimlerini içeren

$$TU^n = (ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} b^{\zeta(n+1)} h_{n+2} & a^{\zeta(n+1)} bch_{n+1} \\ a^{\zeta(n+1)} h_{n+1} & ab^{\zeta(n+1)} ch_n \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

matris özdeşliği elde edilir.
(4.2) matris özdeşliğinin her iki tarafının determinantı alınıp taraf tarafa bileşenleri eşitlendiğinde ve $n \to n-1$ olarak alındığında

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)} h_{n-1}h_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)} h_n^2 = (-1)^n c^{n-1} \left(h_1^2 - bh_0h_1 - c\frac{b}{a}h_0^2\right)$$

özdeşliği elde edilir. Bu özdeşlik daha önce Binet formülü yardımı ile elde etmiş olduğumuz genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizileri için Cassini özdeşliğidir.

4.1 Genelleştirilmiş İki Periyodik Horadam Dizileri İçin Daha Genel Sonuçlar

Şimdi genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci sayıları için kullanmış olduğumuz (3.3) matris özdeşliği yardımıyla genelleştirilmiş iki periyodik Horadam sayılarını içeren daha genel sonuçlar incelenecektir.

(3.3) matris özdeşliği için n çift ise

$$\begin{aligned} U^n \begin{pmatrix} h_1 \\ a^{-1}h_0 \end{pmatrix} &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} b^{\zeta(n)}f_{n+1} & cba^{\zeta(n)}f_n \\ a^{-\zeta(n+1)}f_n & cb^{\zeta(n)}f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ a^{-1}h_0 \end{pmatrix} \\ &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} b^{\zeta(n)}f_{n+1}h_1 + cba^{\zeta(n)}a^{-1}f_nh_0 \\ a^{-\zeta(n+1)}f_nh_1 + cb^{\zeta(n)}a^{-1}f_{n-1}h_0 \end{pmatrix} \\ &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} f_{n+1}h_1 + cba^{-1}f_nh_0 \\ a^{-1}(f_nh_1 + cf_{n-1}h_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.26) özdeşliği kullanılırsa

$$U^n \begin{pmatrix} h_1 \\ a^{-1}h_0 \end{pmatrix} = (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} h_{n+1} \\ a^{-1}h_n \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

matris özdeşliği elde edilir.

Benzer şekilde (3.3) özdeşliği için n çift olarak alındığında

$$\begin{aligned} U^n \begin{pmatrix} cbh_2 \\ ch_1 \end{pmatrix} &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} b^{\zeta(n)}f_{n+1} & cba^{\zeta(n)}f_n \\ a^{-\zeta(n+1)}f_n & cb^{\zeta(n)}f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cbh_2 \\ ch_1 \end{pmatrix} \\ &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} b^{\zeta(n)}cbf_{n+1}h_2 + c^2ba^{\zeta(n)}f_nh_1 \\ a^{-\zeta(n+1)}cbf_nh_2 + c^2b^{\zeta(n)}f_{n-1}h_1 \end{pmatrix} \\ &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} cbf_{n+1}h_2 + c^2bf_nh_1 \\ a^{-1}cbf_nh_2 + c^2f_{n-1}h_1 \end{pmatrix} \\ &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} cb(f_{n+1}h_2 + cf_nh_1) \\ c(a^{-1}bf_nh_2 + cf_{n-1}h_1) \end{pmatrix} \\ &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} cb(h_1(af_{n+1} + cf_n) + cf_{n+1}h_0) \\ c(h_1(bf_n + cf_{n-1}) + c\frac{b}{a}f_nh_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilmektedir. Burada (2.26) özdeşliğinden

$$U^n \begin{pmatrix} cbh_2 \\ ch_1 \end{pmatrix} = (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} cbh_{n+2} \\ ch_{n+1} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

matris özdeşliği elde edilir.

Daha önce sıklıkla kullanmış olduğumuz (2.26) özdeşliğinin daha genel bir halini aşağıdaki teoremle ifade edeceğiz.

Teorem 4.1 $\forall\ n, p \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$h_{n+p} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)\zeta(p)} f_n h_{p+1} + c\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(p+1)} f_{n-1} h_p \tag{4.5}$$

dir (Tan ve Leung 2020b).

İspat. n ve p çift olsun. O halde $n+p$ de çift olacağından (4.3) eşitliğinde n yerine $n+p$ yazılarak

$$(ab)^{\frac{n+p}{2}} \begin{pmatrix} h_{n+p+1} \\ a^{-1}h_{n+p} \end{pmatrix} = U^{n+p} \begin{pmatrix} h_1 \\ a^{-1}h_0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (ab)^{\frac{n+p}{2}} \begin{pmatrix} h_{n+p+1} \\ a^{-1}h_{n+p} \end{pmatrix} &= U^{n+p} \begin{pmatrix} h_1 \\ a^{-1}h_0 \end{pmatrix} \\ &= (ab)^{\frac{p}{2}} U^n \begin{pmatrix} h_{p+1} \\ a^{-1}h_p \end{pmatrix} \\ &= (ab)^{\frac{n+p}{2}} \begin{pmatrix} f_{n+1} & cbf_n \\ a^{-1}f_n & cf_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{p+1} \\ a^{-1}h_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

çarpma işlemi yapıldığında ve taraf tarafa bileşenler eşitlendiğinde

$$h_{n+p+1} = f_{n+1}h_{p+1} + c\frac{b}{a}f_n h_p \tag{4.6}$$

$$h_{n+p} = f_n h_{p+1} + cf_{n-1}h_p \tag{4.7}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.6) de $n \to n-1$ olarak alındığında

$$h_{n+p} = f_n h_{p+1} + c\frac{b}{a}f_{n-1}h_p \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir.

(4.7) ve (4.8) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$h_{n+p} = f_n h_{p+1} + c\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)} f_{n-1} h_p \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.4) eşitliği göz önüne alınarak

$$\begin{pmatrix} cbh_{n+p+2} \\ ch_{n+p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & cbf_n \\ a^{-1}f_n & cf_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cbh_{p+2} \\ ch_{p+1} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

çarpma işlemi yapıldıktan sonra taraf tarafa bileşenler eşitlenirse

$$h_{n+p+2} = f_{n+1} h_{p+2} + cf_n h_{p+1} \tag{4.11}$$

$$h_{n+p+1} = \frac{b}{a} f_n h_{p+2} + cf_{n-1} h_{p+1} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir. (4.11) de $n \to n-1$ olarak alınırsa

$$h_{n+p+1} = f_n h_{p+2} + cf_{n-1} h_{p+1} \tag{4.13}$$

(4.12) ve (4.13) eşitliklerinden

$$h_{n+p+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)} f_n h_{p+2} + cf_{n-1} h_{p+1} \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca (4.14) eşitliğinde $p \to p-1$ olarak alındığında

$$h_{n+p} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)} f_n h_{p+1} + cf_{n-1} h_p \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.15) birlikte yazılırsa

$$h_{n+p} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)\zeta(p)} f_n h_{p+1} + c\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(p+1)} f_{n-1} h_p$$

elde edilir. ■

n ve p çift pozitif tam sayılar olmak üzere, Teorem 4.1 den

$$\begin{pmatrix} h_{n+p+1} \\ a^{-1}h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & cbf_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{p+1} \\ a^{-1}h_p \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

$$\begin{pmatrix} cbh_{n+p+2} \\ ch_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & cbf_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cbh_{p+2} \\ ch_{p+1} \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

matris özdeşlikleri elde edilebilir.

Şimdi vereceğimiz teorem Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerinin bir genellemesi olacaktır.

Teorem 4.2 $\forall\ n, p$ ve $q \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(p)\zeta(q)} h_{n+p}h_{n+q} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)\zeta(p)\zeta(q)} h_n h_{n+p+q}$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)\zeta(p+1)\zeta(q+1)} (-c)^n f_p f_q \left(h_1^2 - bh_0h_1 - \frac{b}{a}ch_0^2\right)$$

dir (Tan ve Leung 2020b).

İspat. n çift, p ve q tek durumunda

$$c\left(h_{n+p}h_{n+q} - \frac{b}{a}h_n h_{n+p} h_{n+p+q}\right) = \begin{pmatrix} h_{n+q} & a^{-1}h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch_{n+p} \\ -bch_{n+p+q} \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

eşitliği yazılabilir. (4.16) eşitliğinde s, t çift tam sayılar olmak üzere

$$h_{s+t+1} = f_{s+1}h_{t+1} + \frac{bc}{a}f_s h_t$$

şeklinde yazılabilir. Burada $s+1 \to q$ ve $t \to n$ olarak alınırsa,

$$h_{n+q} = f_q h_{n+1} + \frac{bc}{a}f_{q-1}h_n$$

olur. Bu eşitlik göz önüne alındığında

$$(ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} h_{n+q} & a^{-1}h_n \end{pmatrix} = (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} h_{n+1} & a^{-1}h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_q & 0 \\ bcf_{q-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_1 & a^{-1}h_0 \end{pmatrix} (U^T)^n \begin{pmatrix} f_q & 0 \\ bcf_{q-1} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

matris özdeşliği elde edilmektedir.

Tümevarımla gösterilebilir ki, k çift için

$$(ab)^{\frac{k}{2}}\begin{pmatrix} ch_{k+1} \\ -bch_{q+k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -bcf_{q-1} & f_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -abc & ab\end{pmatrix}^{k}\begin{pmatrix} ch_1 \\ -bch_2\end{pmatrix}$$

eşitliği sağlanır ve burada $k \to n+p-1$ alınırsa

$$(ab)^{\frac{n+p-1}{2}}\begin{pmatrix} ch_{n+p} \\ -bch_{n+p+q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -bcf_{q-1} & f_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -abc & ab\end{pmatrix}^{n+p-1}\begin{pmatrix} ch_1 \\ -bch_2\end{pmatrix} \quad (4.20)$$

eşitliği yazılabilir.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_q & 0 \\ bcf_{q-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -bcf_{q-1} & f_q\end{pmatrix} &= f_qI, \\ \begin{pmatrix} ab & 1 \\ abc & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -abc & ab\end{pmatrix} &= -abcI.\end{aligned} \quad (4.21)$$

eşitlikleri göz önüne alınıp (4.19) ve (4.20) denklemlerini çarpılıp, (4.18) ve (4.21) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}&(ab)^{n+\frac{p-1}{2}}c\left(h_{n+p}h_{n+q}-\tfrac{b}{a}h_nh_{n+p+q}\right)\\ &= f_q\begin{pmatrix} h_1 & a^{-1}h_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ab & 1 \\ abc & 0\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -abc & ab\end{pmatrix}^{n+p-1}\begin{pmatrix} ch_1 \\ -bch_2\end{pmatrix}\\ &= f_q\begin{pmatrix} h_1 & a^{-1}h_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ab & 1 \\ abc & 0\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -abc & ab\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -abc & ab\end{pmatrix}^{p-1}\begin{pmatrix} ch_1 \\ -bch_2\end{pmatrix}\\ &= (-abc)^nf_q\begin{pmatrix} h_1 & a^{-1}h_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -abc & ab\end{pmatrix}^{p-1}\begin{pmatrix} ch_1 \\ -bch_2\end{pmatrix}\\ &= (-abc)^nf_q\begin{pmatrix} h_1 & a^{-1}h_0\end{pmatrix}(ab)^{\frac{p-1}{2}}\begin{pmatrix} cf_{p-2} & -a^{-1}f_{p-1} \\ -bcf_{p-1} & f_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ch_1 \\ -bch_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki matris çarpımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} h_1 & a^{-1}h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cf_{p-2} & -a^{-1}f_{p-1} \\ -bcf_{p-1} & f_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch_1 \\ -bch_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cf_{p-2}h_1 - \frac{bc}{a}f_{p-1}h_0 & -a^{-1}f_{p-1}h_1 + a^{-1}h_0f_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch_1 \\ -bch_2 \end{pmatrix} \\
&= c^2h_1^2f_{p-2} - \tfrac{bc^2}{a}h_0h_1f_{p-1} + \tfrac{bc}{a}h_1h_2f_{p-1} - \tfrac{bc}{a}h_0h_2f_p \\
&= c^2h_1^2f_{p-2} - \tfrac{bc}{a}h_1f_{p-1}(ch_0 - h_2) - \tfrac{bc}{a}h_0f_p(ah_1 + ch_0) \\
&= c^2h_1^2f_{p-2} - \tfrac{bc}{a}h_1f_{p-1}(ch_0 - (ah_1 + ch_0)) - bch_0h_1f_p - \tfrac{bc^2}{a}h_0^2f_p \\
&= c^2h_1^2f_{p-2} + bch_1^2f_{p-1} - bch_0h_1f_p - \tfrac{bc^2}{a}h_0^2f_p \\
&= ch_1^2(cf_{p-2} + bf_{p-1}) - bch_0h_1f_p - \tfrac{bc^2}{a}h_0^2f_p \\
&= ch_1f_p - bch_0h_1f_p - \tfrac{bc^2}{a}h_0^2f_p \\
&= cf_p\left(h_1^2 - bh_0h_1 - \tfrac{bc}{a}h_0^2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$(ab)^{n+\frac{p-1}{2}}c\left(h_{n+p}h_{n+q} - \frac{b}{a}h_nh_{n+p+q}\right) = (ab)^{n+\frac{p-1}{2}}c^nf_qf_p\left(h_1^2 - bh_0h_1 - \frac{bc}{a}h_0^2\right) \tag{4.22}$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$h_{n+p}h_{n+q} - \frac{b}{a}h_nh_{n+p+q} = c^nf_pf_q(h_1^2 - bh_0h_1 - \frac{b}{a}ch_0^2) \tag{4.23}$$

elde edilir.

Benzer işlemler diğer durumlar için de yapıldığında aynı sonuçlar elde edilmektedir.

■

n çift tam sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} h_1 & bch_0 \end{pmatrix} U^n &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} h_{n+1} & bch_n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a^{-1}h_2 & ch_1 \end{pmatrix} U^n &= (ab)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} a^{-1}h_{n+2} & ch_{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

matris özdeşlikleri yazılabilir.

Teorem 4.3 $\forall\ n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(mn+n)} h_{n+1}h_m + \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(mn+m)} ch_nh_{m-1} = h_1h_{m+n} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(m+n)} ch_0h_{m+n-1} \tag{4.25}$$

dir (Tan ve Leung 2020b).

İspat. n çift ve m tek tam sayı olsun ve (4.16) ve (4.24) eşitlikleri kullanıldığında

$$(ab)^{\frac{n+m-1}{2}}\left(h_{n+1}h_m+\frac{b}{a}ch_nh_{m-1}\right)=(ab)^{\frac{n+m-1}{2}}\begin{pmatrix}h_{n+1} & bch_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_m\\ a^{-1}h_{m-1}\end{pmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. (4.3) özdeşliğinde $n\to m-1$ olarak alınırsa

$$U^{m-1}\begin{pmatrix}h_1\\ a^{-1}h_0\end{pmatrix}=(ab)^{\frac{m-1}{2}}\begin{pmatrix}h_m\\ a^{-1}h_{m-1}\end{pmatrix}$$

elde edilir ve bu eşitlik göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
&(ab)^{\frac{n+m-1}{2}}\left(h_{n+1}h_m+\tfrac{b}{a}ch_nh_{m-1}\right)\\
&=(ab)^{\frac{n+m-1}{2}}\begin{pmatrix}h_{n+1} & bch_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_m\\ a^{-1}h_{m-1}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}h_1 & bch_0\end{pmatrix}U^nU^{m-1}\begin{pmatrix}h_1\\ a^{-1}h_0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}h_1 & bch_0\end{pmatrix}U^{m+n-1}\begin{pmatrix}h_1\\ a^{-1}h_0\end{pmatrix}\\
&=(ab)^{\frac{m+n-1}{2}}\begin{pmatrix}h_1 & bch_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{m+n}\\ a^{-1}h_{m+n-1}\end{pmatrix}\\
&=(ab)^{\frac{m+n-1}{2}}(h_1h_{m+n}+c\tfrac{b}{a}h_{m+n-1}h_0)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

n ve m tek tam sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned}
&(ab)^{\frac{m+n-2}{2}}bc(h_mh_{n+1}+ch_{m-1}h_n)\\
&=(ab)^{\frac{m+n-2}{2}}\begin{pmatrix}h_m & bch_{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}bch_{n+1}\\ ch_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}h_1 & bch_0\end{pmatrix}U^{m-1}U^{n-1}\begin{pmatrix}cbh_2\\ ch_1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}h_1 & bch_0\end{pmatrix}U^{m+n-2}\begin{pmatrix}cbh_2\\ ch_1\end{pmatrix}\\
&=(ab)^{\frac{m+n-2}{2}}\begin{pmatrix}h_1 & bch_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}cbh_{m+n}\\ ch_{m+n-1}\end{pmatrix}\\
&=(ab)^{\frac{m+n-2}{2}}(bch_{m+n}h_1+bc^2h_{m+n-1}h_0)\\
&=(ab)^{\frac{m+n-2}{2}}bc(h_{m+n}h_1+ch_{m+n-1}h_0)
\end{aligned}$$

elde edilir.

n tek m çift tam sayı olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&(ab)^{\frac{n+m-1}{2}} c(\tfrac{b}{a} h_{n+1} h_m + c h_n h_{m-1}) \\
&= (ab)^{\frac{n+m-1}{2}} \begin{pmatrix} a^{-1} h_m & c h_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b c h_{n+1} \\ c h_n \end{pmatrix} \\
&= (ab) \begin{pmatrix} a^{-1} h_2 & c h_1 \end{pmatrix} U^{m-2} U^{n-1} \begin{pmatrix} b c h_2 \\ c h_1 \end{pmatrix} \\
&= (ab) \begin{pmatrix} a^{-1} h_2 & c h_1 \end{pmatrix} U^{m+n-3} \begin{pmatrix} b c h_2 \\ c h_1 \end{pmatrix} \\
&= (ab)^{\frac{m+n-1}{2}} \begin{pmatrix} a^{-1} h_2 & c h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b c h_{m+n-1} \\ c h_{m+n-2} \end{pmatrix} \\
&= (ab)^{\frac{m+n-1}{2}} (c \tfrac{b}{a} h_{m+n-1} h_2 + c^2 h_{m+n-2} h_1) \\
&= (ab)^{\frac{m+n-1}{2}} c(\tfrac{b}{a} h_{m+n-1}(a h_1 + c h_0) + c h_{m+n-2} h_1) \\
&= (ab)^{\frac{m+n-1}{2}} c(h_1 h_{m+n} + c \tfrac{b}{a} h_{m+n-1} h_0)
\end{aligned}
$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

n ve m çift tam sayılar olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&(ab)^{\frac{n+m-2}{2}} a^{-1}(h_m h_{n+1} + c h_n h_{m-1}) \\
&= (ab)^{\frac{n+m-2}{2}} \begin{pmatrix} a^{-1} h_m & c h_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_n + 1 \\ a^{-1} h_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{-1} h_2 & c h_1 \end{pmatrix} U^{m-2} U^{n} \begin{pmatrix} h_1 \\ a^{-1} h_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{-1} h_2 & c h_1 \end{pmatrix} U^{m+n-2} \begin{pmatrix} h_1 \\ a^{-1} h_0 \end{pmatrix} \\
&= (ab)^{\frac{m+n-2}{2}} \begin{pmatrix} a^{-1} h_2 & c h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{m+n-1} \\ a^{-1} h_{m+n-2} \end{pmatrix} \\
&= (ab)^{\frac{m+n-2}{2}} (a^{-1} h_{m+n-1} h_2 + c a^{-1} h_{m+n-2} h_1) \\
&= (ab)^{\frac{m+n-2}{2}} a^{-1}(h_{m+n-1}(a h_1 + c h_0) + c h_{m+n-2} h_1) \\
&= (ab)^{\frac{m+n-2}{2}} a^{-1}(h_1 h_{m+n} + c h_{m+n-1} h_0)
\end{aligned}
$$

eşitliğinin sağlandığı görülmektedir. ■

(4.25) eşitliğinde $m \to n+1$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n)} h_{n+1}^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\zeta(n+1)} ch_n^2 = h_1 h_{2n+1} + \left(\frac{b}{a}\right) ch_0 h_{2n}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.1 yardımı ile Fibonacci sayıları için iyi bilinen $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$ özdeşliğinin bir genelleştirilmesini elde edilecektir.

Teorem 4.4 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$h_{n+1}^2 - c^2 h_{n-1}^2 = a^{\zeta(n)} b^{\zeta(n+1)} (h_1 h_{2n} + ch_0 h_{2n-1})$$

dir (Tan ve Leung 2020b).

İspat. n çift tam sayı olmak üzere, Sonuç 4.1 yardımıyla,

$$\begin{aligned} h_{n+1}^2 - c^2 h_{n-1}^2 &= \left(h_{n+1} + \tfrac{b}{a} ch_n^2\right) - \left(\tfrac{b}{a} ch_n^2 + c^2 h_{n-1}^2\right) \\ &= \left(h_1 h_{2n+1} + \tfrac{b}{a} ch_0 h_{2n}\right) - c\left(h_1 h_{2n-1} + \tfrac{b}{a} ch_0 h_{2n-2}\right) \\ &= h_1 \left(h_{2n+1} - ch_{2n-1}\right) + \tfrac{b}{a} ch_0 \left(h_{2n} - ch_{2n-2}\right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

eşitliği yazılabilir ve bu eşitlikte $\{h_n\}$ dizisinin rekürans bağıntısı yardımıyla

$$h_{n+1}^2 - c^2 h_{n-1}^2 = bh_1 h_{2n} + bch_0 h_{2n-1} \tag{4.27}$$

elde edilmektedir.

n tek tam sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{b}{a}\right)^2 \left(h_{n+1}^2 - c^2 h_{n-1}^2\right) &= \tfrac{b}{a} \left(\tfrac{b}{a} h_{n+1}^2 + ch_n^2\right) - \tfrac{b}{a} c \left(h_n^2 + \tfrac{b}{a} ch_{n-1}^2\right) \\ &= \tfrac{b}{a} \left(h_1 h_{2n+1} + \tfrac{b}{a} ch_0 h_{2n}\right) - \tfrac{b}{a} c \left(h_1 h_{2n-1} + \tfrac{b}{a} ch_0 h_{2n-2}\right) \\ &= \tfrac{b}{a} \left(h_1 (h_{2n+1} - ch_{2n-1}) + \tfrac{b}{a} ch_0 (h_{2n} - ch_{2n-2})\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

eşitliği elde edilmektedir ve $\{h_n\}$ dizisinin rekürans bağıntısı yardımıyla

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 (h_{n+1}^2 - c^2 h_{n-1}^2) = \frac{b}{a} (bh_1 h_{2n} + bch_0 h_{2n-1}) \tag{4.29}$$

eşitliği yazılabilir. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde ilk olarak Binet formülü yardımı ile genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizileri için Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, d'Ocagne özdeşliği ve binom toplam formülü elde edilmiştir. Daha sonra Tan ve Leung (2020b)'un

$$A=\begin{pmatrix} ab & cb \\ a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n=(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\begin{pmatrix} b^{\zeta(n)}f_{n+1} & cba^{-\zeta(n+1)}f_n \\ a^{\zeta(n)}f_n & cb^{\zeta(n)}f_{n-1} \end{pmatrix}$$

matris özdeşliği yardımı ile genelleştirilmiş iki periyodik Fibonacci dizileri için elde etmiş olduğu bazı sonuçlar

$$U=\begin{pmatrix} ab & abc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^n=(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\begin{pmatrix} b^{\zeta(n)}f_{n+1} & cba^{\zeta(n)}f_n \\ a^{-\zeta(n+1)}f_n & cb^{\zeta(n)}f_{n-1} \end{pmatrix}$$

matris özdeşliği yardımı ile elde edilmiştir. Ayrıca, Tan ve Leung (2020b)'un makalesinde U matrisi yardımı ile genelleştirilmiş iki periyodik Horadam dizileri için elde edilen daha genel sonuçlar incelenmiştir.

İki periyodik Fibonacci dizilerine benzer olarak, a, b, c, d, e ve f sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere ve başlangıç koşulları $t_0 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ için

$$t_n=\begin{cases} at_{n-1}+ct_{n-2}+et_{n-3}, & n\equiv 0(mod2), \\ bt_{n-1}+dt_{n-2}+ft_{n-3}, & n\equiv 1(mod2), \end{cases} \quad n\geq 3$$

rekürans bağıntısını sağlayan $\{t_n\}$ dizisi iki periyodik tribonacci dizisi olarak adlandırılabilir (Alp vd. 2012, Panario vd. 2013).

Bu tezde elde edilen sonuçlara benzer olarak iki periyodik tribonacci dizisinin matris gösterimi elde edilebilir ve bu matris yardımı ile dizinin özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Alp, M., Irmak, N., Szalay, L. 2012. *Two-periodic ternary recurrences and their Binet-formula*, Acta Math. Univ. Comen. 2, 227–232.

Bilgici, G. 2014. *Two generalizations of Lucas sequence*, Applied Mathematics and Computation, 245, 526-538.

Brenner, J.L. 1951. *June Meeting of the Pacific Northwest Section. 1. Lucas' Matrix*, Amer. Math. Monthly 58, 220-221.

Demirtürk, B. 2010. *Fibonacci and Lucas Sums by Matrix Methods*, International Mathematical Forum, 5 (3), 99-107.

Edson, M. and Yayenie, O. 2009. *A New Generalizations of Fibonacci Sequence Extended Binet's Formula*, Integers 9, 639-654.

Edson, M., Lewis, S. and Yayenie, O. 2011. *The k-Periodic Fibonacci Sequence and an Extended Binet's Formula*, Integers 11, 739-751.

Gould, H.W. 1981. *A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem*, Fibonacci Quarterly, 19 (3), 250-257.

Horadam, A. F. 1961. *A generalized Fibonacci sequence*, Amer. Math. Monthly, 68 (5), 455-459.

Keskin, R., Demirtürk, B. 2010. *Some New Fibonacci and Lucas Identities by Matrix Methods* International Journal of Mathematical Education In Science and Technology, 41 (3), 379-387.

King, C.H. 1960. *Some further properties of the Fibonacci numbers*, Master's thesis, San Jose, CA: San Jose State

Koshy, T. 2001. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, 672p., New York.

Melham, R.S., Shannon, A.G 1995. *Some summation identities using generalized Q-matrices*, Fibonacci Quarterly, 33(1).

Panario, D., Sahin, M. and Wang, Q. 2013. *A Family of Fibonacci-like Conditional Sequences*, Integers 13 (A78).

Silvester, J. R. 1979. *Fibonacci properties by matrix methods*, Mathematical Gazette, 63, 188-191.

Tan, E. 2017a. *Some properties of bi-periodic Horadam sequences*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(4), 56-65.

Tan, E. 2017b. *On bi-periodic Fibonacci and Lucas numbers by matrix method*, Ars Combinatoria (133), 107-113.

Tan, E. and Ekin, A.B. 2017. *Some Identities On Conditional Sequences By Using Matrix Method*, Miskolc Mathematical Notes, 18(1), 469-477.

Tan, E. and Leung, H-H. 2020a. *A note on congruence properties of the generalized bi-periodic Horadam sequence*, Hacet. J. Math. Stat. 49(6), 2084-2093.

Tan, E. and Leung, H-H. 2020b. *Some basic properties of the generalized bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences*, Advances in Difference Equations, 26.

Vajda, S. 1989. *Fibonacci & Lucas Numbers and The Golden Section, Theory and Applications*, Ellis Horwood Ltd. Chichester.

Yayenie, O. 2011. *A note on generalized Fibonacci sequences*, Applied Mathematics and Computation, 217 (12), 5603-5611.