ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İKİ DEĞİŞKENLİ SONLU ORTOGONAL POLİNOM AİLELERİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Esra GÜLDOĞAN LEKESİZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2021

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ DEĞİŞKENLİ SONLU ORTOGONAL POLİNOM AİLELERİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Esra GÜLDOĞAN LEKESİZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Rabia AKTAŞ

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde; çalışma boyunca kullanacağımız temel tanım ve kavramlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde; ilk olarak bir aralıkta tek değişkenli ortogonal polinomun tanımı, iyi bilinen tek değişkenli ortogonal polinom aileleri ve bu polinomların özellikleri verilmiştir. Daha sonra bir bölgede iki değişkenli ortogonal polinomlardan bahsedilmiş ve böylesi polinomları elde edebilmek için Koornwinder'in (1975) metodu hatırlatılmıştır. Ayrıca bu metod kullanılarak ortaya çıkarılmış bazı bilinen polinomların tanımları sunulmuştur.

Dördüncü bölümde; tek değişkenli sonlu ortogonal polinomlar ve genel özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde; tezin özgün bir bölümünü oluşturan iki değişkenli sonlu ortogonal polinomlar elde edilmiş ve elde edilen iki değişkenli polinom aileleri için rekürans bağıntıları, sağladıkları kısmi türevli denklemler, doğurucu fonksiyonlar, ortogonallik bağıntıları ve Rodrigues formülleri gibi temel özellikleri verilmiştir. Bu polinomların ve yukarıda sayılan genel özelliklerinin limit durumları incelenerek sonlu ve sonsuz ortogonal polinomlar arasında bağıntılar elde edilmiş ve bu esnada yeni ortogonal polinom aileleri ortaya çıkarılmıştır.

Altıncı bölüm tezin özgün bölümlerinden birisidir ve bu bölümde değişkenlerine ayrılabilir iki ortogonal polinomun çarpımı için Lee (2005) tarafından verilen 4. basamaktan kısmi türevli denklem elde etmeyi sağlayan metod yardımıyla beşinci bölümde tanımlanan değişkenlerine ayrılabilir iki değişkenli sonlu ortogonal polinom ailelerinin sağladıkları 4.

basamaktan kısmi türevli denklemler verilmiştir. Üstelik bu kısmi türevli denklemlerin limit durumlarının da polinomların limiti olan sonuçlar tarafından sağlandığı görülmüştür.

Yedinci bölümde; beşinci bölümde bahsi geçen iki değişkenli sonlu ortogonal polinom ailelerinin Fourier dönüşümleri yardımıyla elde edilen özel fonksiyon aileleri tanıtılmıştır. Bu kısım da tamamıyla özgündür.

Sekizinci bölümde; yapılan çalışmalar ile ilgili sonuçların değerlendirilmesine yer verilmiştir.

Mart 2021, 163 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ortogonal Polinom, Jacobi Polinomu, Laguerre Polinomu, Ultraküresel Polinom, Hermite Polinomu, Rekürans Bağıntısı, Kısmi Türevli Denklem, Doğurucu Fonksiyon, Rodrigues Formülü, Fourier Dönüşümü, Parseval Özdeşliği

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

FINITE CLASSES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS IN TWO VARIABLES AND SOME PROPERTIES

Esra GÜLDOĞAN LEKESİZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Rabia AKTAŞ

This thesis consist of eight chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter; basic definitions and concepts that we will use throughout the study are recalled.

In chapter three; firstly, definition of univariate orthogonal polynomial in an interval, the well-known orthogonal polynomial sets in one-variable and their properties are given. Then, orthogonal polynomials in two variables in a domain are mentioned and in order to obtain such polynomials, the Koornwinder (1975) method is reminded. Also, the definitions of some known polynomials that have been revealed using this method are presented.

In the fourth chapter; the known finite univariate orthogonal polynomials and their general properties are given.

In the fifth chapter; finite orthogonal polynomials in two variables, which form a original part of the thesis, are obtained and their basic properties such as recurrence relations, partial differential equations, generating functions, orthogonality relations and Rodrigues formulas for the obtained sets of the polynomials in two variables are given. Investigating the limit cases of the polynomials and the general properties of them listed above, relations between finite and infinite orthogonal polynomials are obtained and some new bivariate orthogonal polynomial sets have been presented.

The sixth chapter is one of the original chapters of the thesis, and in this chapter, with the help of Lee's (2005) method that enables to obtain the fourth order partial differential equations for the product of two orthogonal polynomials that can be separated into variables, the fourth order partial differential equations satisfied by the finite orthogonal

polynomial sets in two variables, which are defined in fifth chapter, are given. Moreover, it has been seen that the limit cases of these equations are satisfied by the results which are the limits of the finite orthogonal polynomials in two variables.

In the seventh chapter; the sets of special functions obtained by Fourier transforms of the aforementioned sets of two-variable finite orthogonal polynomials in fifth chapter are introduced. This part is also original.

In eighth chapter is devoted to the evaluation of the results.

March 2021, 163 pages

Key Words: Orthogonal Polynomial, Jacobi Polynomial, Laguerre Polynomial, Ultraspherical Polynomial, Hermite Polynomial, Recurrence Relation, Partial Differential Equation, Generating Function, Rodrigues Formula, Fourier Transform, Parseval's identity

TEŞEKKÜR

Akademik hayatım boyunca her zaman ilgi, güven ve desteğini gördüğüm, uzun ve zorlu geçen bu süreçte gösterdiği anlayış ve sabır için minnettar olduğum ve bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan, saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Rabia AKTAŞ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve bu süreçte bana her türlü kolaylığı sağlamak adına uğraşıp didinen, maddi ve manevi desteğini daima derinden hissettiğim, kariyerimi kaliteli bir şekilde sürdürmemi benden çok isteyen annem Sibel GÜLDOĞAN, babam Ali GÜLDOĞAN ve kardeşim Büşra GÜLDOĞAN'a, sona geldiğim en stresli süreçte daima yanımda olan, yardımcı olan eşim Özer Kenan LEKESİZ'e en derin sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu tezi Ankara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri "Doktora Tezi Araştırma Projesi" kapsamında destekleyen Ankara Üniversitesi'ne ve doktora yaptığım süre boyunca verdiği burs ile bana destek olan TÜBİTAK'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Esra GÜLDOĞAN LEKESİZ
Ankara, Mart 2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar uzayı
$(\gamma)_r$	Pochhammer sembolü
$\delta_{r,s}$	Kronecker delta
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
$B(u,v)$	Beta fonksiyonu
${}_pF_q$	Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon
$\mathcal{F}\{f\}$	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$P_r^{(\gamma,\theta)}(x)$	Jacobi polinomları
$L_r^{(\gamma)}(x)$	Laguerre polinomları
$C_r^{(\gamma)}(x)$	Ultraküresel polinomlar
$H_r(x)$	Hermite polinomları

1. GİRİŞ

Ortogonal polinomlar sağladıkları özellikler ve bağıntılar sebebiyle matematiğin ve dolayısıyla fizik ve mühendisliğin çeşitli alanlarında oldukça kullanışlıdır. Ortogonal polinomların önemli rol oynadığı kullanım alanlarına örnek olarak yaklaşım teorisi ve nümerik analizin bazı içerikleri aşağıda sıralanabilir. Bu bağıntılardan ilk yedisi tüm ortogonal polinom aileleri için ve son üçü ise bazı özel ortogonal polinom aileleri için geçerlidir:

i. Ortogonallik bağıntısı

ii. Matris gösterimi

iii. Üç terimli rekürans bağıntısı

iv. Doğurucu fonksiyon

v. Christoffel-Darboux formula

vi. Sıfırlarına ayrılması

vii. Gauss quadrature

viii. İkinci basamaktan denklem

ix. Rodrigues formülü

x. Ortogonal polinomların Fourier serileri cinsinden sürekli türevlenebilir ve kare integrallenebilir fonksiyonların genişletilmesi.

Ortogonal polinomlar teorisi günümüze kadar farklı yöntemlerle çalışılarak geliştirilen ve birçok alanda önemli uygulamalara sahip bir çalışma alanıdır. Bahsi geçen polinomların nümerik analiz, harmonik analiz, sayılar teorisi, kodlama teorisi, yaklaşım teorisi, kuantum mekaniği, olasılık teorisi, optik, katı hal fiziği gibi farklı alanlarda uygulamaları bulunmaktadır.

Klasik sürekli ortogonal polinom aileleri Laguerre polinomları, Hermite polinomları ve özel durumlarda Legendre, Chebyshev ve Ultraküresel polinomları veren Jacobi polinomlarıdır. Laguerre polinomlarının kuantum mekaniğinde Hidrojen atomunun Schrödinger denkleminde, Hermite polinomlarının kuantum mekaniğinde harmonik osilatörün çözümünde, Jacobi polinomlarının potansiyel enerji teorisinde, Chebyshev polinomlarının nümerik analiz ve yaklaşım teorisinde uygulamaları bulunurken

Legendre polinomlarının ise küresel harmoniklerle ilişkili olduğu bilinmektedir. Ancak genellikle sonlu ortogonal polinomlar literatürde daha az bilinmektedir. Şimdi a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 reel parametreler ve r bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) y_r^{''}(x) + (d_1x + e_1)\, y_r^{'}(x) - r\left(d_1 + (r-1)\, a_1\right) y_r(x) = 0$$

formundaki genel diferensiyel denklemini ele alalım.

Bu denklemin çözümü olan 6 tane klasik ortogonal polinom ailesi vardır. Bu çözümlerden üçü Jacobi, Laguerre ve Hermite klasik ortogonal polinomlarıdır (Bochner 1929, Szegö 1975, Dunkl ve Xu 2014). Diğer üçü de r nin bazı kısıtlanmış değerleri için sonlu klasik ortogonal polinomlardır (Romanovski 1929, Lesky 1996, Masjed-Jamei 2002).

Masjed-Jamei $M_r^{(p,q)}(x)$, $N_r^{(p)}(x)$, $I_r^{(p)}(x)$ notasyonları ile gösterdiği bu polinomların sırasıyla F, ters Gamma ve T dağılımlarına göre sonlu ortogonal olduğunu göstermiş (Masjed-Jamei 2002) ve sonrasında $(-\infty, \infty)$ aralığında $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarını genelleştiren çok daha kapsamlı sonlu ortogonal polinom sınıfı tanımlamıştır (Masjed-Jamei 2004).

Üstelik fonksiyon yaklaşımında uygulamalarını ve nümeriksel analoglarını araştırmıştır. Ayrıca, üçüncü ortogonal sınıf için bildiğimiz kadarıyla matematiksel istatistik dallarında karşımıza çıkan T dağılımının dört bağımsız parametre ile daha önce görülmemiş bir genellemesine karşılık gelen ağırlık fonksiyonunu vermiş ve bu yeni dağılımın matematiksel özelliklerinin kapsamlı bir incelemesini özel fonksiyonlar açısından ele almıştır (Masjed-Jamei 2006).

Daha sonra Koepf ve Masjed-Jamei (2007) bu polinomların Fourier dönüşümlerini kullanarak yeni ortogonal fonksiyon aileleri elde etmiştir. Ayrıca Soleyman, Masjed-Jamei ve Area (2017), $N_r^{(p)}(x)$ polinomları aracılığıyla $q \to 1$ limit durumunda ters Gamma dağılımına karşılık gelen ağırlık fonksiyonuna göre sonlu q-ortogonal polinomların bir sınıfını tanımlamış ve Masjed-Jamei, Soleyman, Area ve Nieto (2018), $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarının q-analoglarını ortaya koymuştur.

Literatürde iki ve çok değişkenli ortogonal polinomlar üzerine de birçok çalışma yapılmıştır (Koornwinder 1975, Suetin 1988, Altın vd. 2009, Pinar ve Xu 2009, Aktaş vd. 2011, Fernandez vd. 2012, Altın vd. 2013, Aktaş vd. 2013, Aktaş ve Erkuş-

Duman 2013, Aktaş 2014, 2016, 2020, Xu 2014, 2015, Marriaga vd. 2017, Marcellan vd. 2018a, b, 2019, Güldoğan vd. 2020a, b, Milovanovic vd. 2020). İki değişkenli ve çok değişkenli ortogonal polinomlar matematiksel fiziğin çeşitli problemlerinde, yaklaşım teorisinde, nümerik analizde, optikte, genetikte ve olasılık teorisinde uygulamalara sahiptir.

Bu tezde, sırasıyla (4.2), (4.11), (4.18) ile tanımlanan $M_r^{(p,q)}(x)$, $N_r^{(p)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomları kullanılarak Koornwinder'in metodu yardımıyla iki değişkenli sonlu ortogonal polinomların inşa edilmesi ve bu polinomların sağladıkları kısmi türevli denklem, rekürans bağıntısı, doğurucu fonksiyon ve Rodrigues formülü gibi özelliklerinin elde edilmesi planlanmıştır. Ayrıca elde edilen polinomların ve bu polinomlara ait genel özelliklerin limit durumları incelenerek diğer ortogonal polinomlar ile aralarındaki ilişkilerin araştırılması ve bu polinomların sağladığı 4. basamaktan kısmi türevli denklemlerin Lee'nin (2005) metodu yardımıyla bulunarak limit durumlarının incelenmesi beklenmektedir. Dahası bu çalışmada tanımlanmış olan polinomlara Fourier dönüşümü uygulanarak yeni ortogonal fonksiyon ailelerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1 $\Gamma(z)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad , \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \to \infty} \left(-t^z e^{-t}\right) |_0^b + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z) \end{aligned}$$

olduğundan, Γ fonksiyonu

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

fark denklemini tüm $\mathrm{Re}(z) > 0$ değerleri için gerçekler (Rainville 1960).

Tanım 2.2 γ reel ya da kompleks bir sayı, r sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\gamma)_r$ ifadesi

$$\begin{aligned} (\gamma)_r &= \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+r-1), \ r \geq 1 \\ (\gamma)_0 &= 1, \ \gamma \neq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Bu ifade "Pochhammer sembolü" olarak bilinir (Rainville 1960).

Lemma 2.1 Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(\gamma)_r = \frac{\Gamma(\gamma+r)}{\Gamma(\gamma)}, \tag{2.3}$$

ve

$$(-\gamma)_r = \begin{cases} \frac{(-1)^r \gamma!}{(\gamma-r)!}, & 0 \leq r \leq \gamma \\ 0, & r > \gamma \end{cases}. \tag{2.4}$$

Tanım 2.3 $u > 0$ ve $v > 0$ olmak üzere Beta fonksiyonu,

$$B(u,v) = \int_0^1 \xi^{u-1} (1-\xi)^{v-1} d\xi = \int_0^\infty \frac{\xi^{u-1}}{(1+\xi)^{u+v}} d\xi = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

olarak tanımlanır (Rainville 1960).

Tanım 2.4 $(\gamma)_r$, (2.2) ile tanımlanan Pochhammer sembolünü göstermek üzere genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix}\gamma_1,...,\gamma_p\\ \theta_1,...,\theta_q\end{matrix};z\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_r\cdots(\gamma_p)_r}{(\theta_1)_r\cdots(\theta_q)_r}\frac{z^r}{r!} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlıdır (Rainville 1960). Burada $\theta_j\neq 0,-1,-2,...$ $(j=1,2,...,q)$ dur ve seri

$$\begin{cases}\text{tüm } z\text{'ler için yakınsaktır} & ,\ p\leq q \text{ iken}\\ |z|<1 \text{ için yakınsaktır} & ,\ p=q+1 \text{ iken}\\ \text{tüm } z\neq 0\text{'ler için ıraksaktır}, & p>q+1 \text{ iken}\end{cases}.$$

Sonuç 2.1 ${}_pF_q$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun $p=q=1$ özel durumu için

$$ {}_1F_1\left(\begin{matrix}\gamma_1\\ \theta_1\end{matrix};z\right)={}_1F_1(\gamma_1;\theta_1;z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_r}{(\theta_1)_r}\frac{z^r}{r!},$$

$p=2$ ve $q=1$ özel durumu için

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma_1,\gamma_2\\ \theta_1\end{matrix};z\right) &= {}_2F_1(\gamma_1,\gamma_2;\theta_1;z)\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r}{(\theta_1)_r}\frac{z^r}{r!} \quad , \quad |z|<1\end{aligned}$$

ve $p=3$ ve $q=2$ özel durumu için

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix}\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\\ \theta_1,\theta_2\end{matrix};z\right) &= {}_3F_2(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\theta_1,\theta_2;z)\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r(\gamma_3)_r}{(\theta_1)_r(\theta_2)_r}\frac{z^r}{r!} \quad , \quad |z|<1\end{aligned}$$

fonksiyonları elde edilir.

Tanım 2.5 $\psi(x)$ fonksiyonu her sonlu $[-I,I]$ aralığında parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(w)|\,dw$ integrali yakınsak olmak üzere

$$\mathcal{F}(s)=\mathcal{F}(\psi(x))=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}\psi(x)\,dx$$

ifadesine $\psi(x)$ fonksiyonunun "Fourier dönüşümü" ve

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{isx}\mathcal{F}(s)\,ds$$

ile tanımlanan ifadeye de $\mathcal{F}(s)$ fonksiyonunun "ters Fourier dönüşümü" denir (Davies 2002).

Fourier teorisinin Parseval özdeşliği $\psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\overline{\varphi(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\psi(x))\,\overline{\mathcal{F}(\varphi(x))}ds$$

ifadesiyle verilir.

İki değişkenli bir $\psi(x, y)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(\psi(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}\psi(x,y)\,dxdy$$

olarak tanımlanmıştır (Davies 2002) ve Fourier teorisine karşılık gelen Parseval Özdeşliği

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}dxdy = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\psi(x,y))\,\overline{\mathcal{F}(\varphi(x,y))}d\xi_1 d\xi_2 \qquad (2.6)$$

ile verilir.

3. BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

3.1 Bir Aralıkta Tek Değişkenli Ortogonal Polinomlar

Tanım 3.1 $w(x)$, $J \subset \mathbb{R}$'de tanımlı pozitif bir fonksiyon ve $r, s \in \mathbb{N}_0$, $r \neq s$ olmak üzere

$$(\psi_r, \psi_s) = \int_J \psi_r(x)\, \psi_s(x)\, w(x)\, dx = 0 \tag{3.1}$$

ise $\{\psi_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ polinom sistemine $w(x)$ ağırlığına göre J aralığı üzerinde ortogonaldir denir. $r = s$ için

$$\| \psi_s \| = (\psi_s, \psi_s)^{1/2} = \left[\int_J \psi_s^2(x)\, w(x)\, dx \right]^{1/2}$$

integrali $\{\psi_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ polinomlarının normunu verir.

Ortogonalliğin tanımı bir başka ifadeyle aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 3.1 $\{\psi_r(x)\}_{r\in\mathbb{N}_0}$ polinom sisteminin $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre $J \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde ortogonal olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\int_J \psi_r(x)\, x^p w(x)\, dx = 0 \quad , \quad p = 0, 1, ..., r-1 \tag{3.2}$$

sağlanmasıdır (Szegö 1975).

İspat. $(\Rightarrow)$ $\psi_r(x)$ ve $\psi_s(x)$ polinomları, $\{\psi_r(x)\}_{r\in\mathbb{N}_0}$ sistemine ait iki polinom ve J aralığında $w(x)$ ağırlığına göre ortogonal ise

$$\int_J \psi_r(x)\, \psi_s(x)\, w(x)\, dx = 0 \quad , \quad r \neq s$$

sağlanır. Ayrıca x^p ifadesi

$$x^p = b_0\psi_0(x) + b_1\psi_1(x) + ... + b_p\psi_p(x) = \sum_{s=0}^{p} b_s\psi_s(x)$$

eşitliği yardımıyla $\psi_s(x)$ lerin bir sonlu serisi olarak yazılabileceğinden bu ifade

(3.2)'de yerine yazılırsa $0 \leq s \leq p < r$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int\limits_J \psi_r(x)\, x^p w(x)\, dx &= \int\limits_J w(x)\, \psi_r(x) \left(\sum_{s=0}^{p} b_s \psi_s(x) \right) dx \\ &= \sum_{s=0}^{p} b_s \int\limits_J w(x)\, \psi_r(x)\, \psi_s(x)\, dx \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Böylece $0 \leq s < r$ için (3.1) tanımı kullanılarak (3.2) sağlanır.

($\Leftarrow$) Yeter koşul için $0 \leq s < r$ olsun. $\psi_s(x)$, s-yinci dereceden bir polinom olmak üzere

$$\psi_s(x) = \sum_{p=0}^{s} b_p x^p$$

olarak ifade edilebileceğinden bu eşitlik, (3.1) bağıntısında yerine yazılır ve (3.2) eşitliği gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \int\limits_J w(x)\, \psi_r(x)\, \psi_s(x)\, dx &= \int\limits_J w(x)\, \psi_r(x) \left(\sum_{p=0}^{s} b_p x^p \right) dx \\ &= \sum_{p=0}^{s} b_p \int\limits_J \psi_r(x)\, x^p w(x)\, dx = 0 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanır. ∎

$\{\psi_r(x)\}$ bir değişkenli ortogonal polinom ailelerinin önemli özelliklerinden birisi

$$x\psi_r(x) = \alpha_r \psi_{r+1}(x) + \beta_r \psi_r(x) + \gamma_r \psi_{r-1}(x) \quad , \quad r = 0, 1, 2, ...$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlamalarıdır. Burada α_r, β_r ve γ_r katsayıları r'ye bağlı sabitlerdir, $\gamma_r \neq 0$ ve $\psi_{-1}(x) = 0$ dır (Szegö 1975).

Tek değişkenli klasik ortogonal polinomların ikinci basamaktan bir diferensiyel operatörün özfonksiyonları olduğunu biliyoruz. Şimdi bir değişkenli klasik ortogonal polinomlardan bazılarını ve onların özelliklerini hatırlatalım.

3.1.1 Jacobi Polinomları

$$\begin{aligned} P_r^{(\gamma,\theta)}(x) &= \frac{(-1)^r}{2^r r!} (1-x)^{-\gamma} (1+x)^{-\theta} \\ &\quad \times \frac{d^r}{dx^r} \left((1-x)^{r+\gamma} (1+x)^{r+\theta} \right) \end{aligned}$$

Rodrigues formülü ile gösterilen $P_r^{(\gamma,\theta)}(x)$ Jacobi polinomları

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r^{(\gamma,\theta)}(x)\,t^r = \frac{2^{\gamma+\theta}\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}}{\left(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^{\gamma}} \times\frac{1}{\left(1+t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^{\theta}} \quad , \quad (|t|<1) \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{\infty} P_r^{(\gamma+\lambda r,\theta+\mu r)}(x)\,t^r = (1+\xi)^{\gamma+1}(1+\eta)^{\theta+1}\left\{1-\lambda\xi-\mu\eta-(1+\lambda+\mu)\,\xi\eta\right\}^{-1} \\ \xi = \frac{t}{2}(x+1)(1+\xi)^{\lambda+1}(1+\eta)^{\mu+1} \\ \eta = \frac{t}{2}(x-1)(1+\xi)^{\lambda+1}(1+\eta)^{\mu+1} \end{cases} \tag{3.4}$$

formundaki doğurucu fonksiyonları gerçekler (Srivastava ve Manocha 1984) ve $w(x) = (1-x)^{\gamma}(1+x)^{\theta}$ ağırlık fonksiyonuna göre $(-1,1)$ aralığı üzerinde ortogonal olup

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} (1-x)^{\gamma}(1+x)^{\theta} P_r^{(\gamma,\theta)}(x)\,P_s^{(\gamma,\theta)}(x)\,dx \\ =\; &\frac{2^{\gamma+\theta+1}\Gamma(\gamma+r+1)\,\Gamma(\theta+r+1)}{r!\,(\gamma+\theta+2r+1)\,\Gamma(\gamma+\theta+r+1)}\delta_{r,s} \\ &(\,\gamma,\theta>-1 \quad , \quad r,s\in\mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir. Burada $\delta_{r,s}$ Kronecker delta

$$\delta_{r,s} = \begin{cases} 0\ , & r\neq s \\ 1\ , & r=s \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca,

$$\left(1-x^2\right)y'' + (\theta-\gamma-(\gamma+\theta+2)\,x)\,y' + r\,(r+\gamma+\theta+1)\,y = 0$$

ikinci basamaktan diferensiyel denkleminin çözümü olan bu polinomlar açık olarak

$$P_r^{(\gamma,\theta)}(x) = 2^{-r}\sum_{k=0}^{r}\binom{r+\gamma}{r-k}\binom{r+\theta}{k}(x+1)^{r-k}(x-1)^{k} \qquad , \quad r=0,1,...$$

formunda ifade edilir ve aşağıdaki rekürans bağıntılarını gerçekler:

$$\begin{aligned} &2r\,(r+\gamma+\theta)\,(2r-2+\gamma+\theta)\,P_r^{(\gamma,\theta)}(x) \\ =\; &\left[(2r+\gamma+\theta)\,(2r-2+\gamma+\theta)\,x+\gamma^2-\theta^2\right](2r-1+\gamma+\theta)\,P_{r-1}^{(\gamma,\theta)}(x) \\ &-2\,(r+\gamma-1)\,(r+\theta-1)\,(2r+\gamma+\theta)\,P_{r-2}^{(\gamma,\theta)}(x) \quad , \quad (r\geq 2) \end{aligned}$$

$$(2r+\gamma+\theta)\,P_r^{(\gamma,\theta-1)}(x)=(r+\gamma+\theta)\,P_r^{(\gamma,\theta)}(x)+(r+\gamma)\,P_{r-1}^{(\gamma,\theta)}(x)\ \ ,\ (r\geq 1)$$

ve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(2r+2+\gamma+\theta)(x+1)\,P_r^{(\gamma,\theta+1)}(x)\\ =\ &(r+1)\,P_{r+1}^{(\gamma,\theta)}(x)+(r+\theta+1)\,P_r^{(\gamma,\theta)}(x)\quad ,\quad (r\geq 0)\,.\end{aligned}$$

3.1.2 Laguerre Polinomları

$$L_r^{(\gamma)}(x)=\frac{x^{-\gamma}e^{x}}{r!}\frac{d^r}{dx^r}\left(x^{r+\gamma}e^{-x}\right)$$

Rodrigues formülü ile gösterilen $L_r^{(\gamma)}(x)$ Laguerre polinomları $w(x)=x^{\gamma}e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre $(0,\infty)$ aralığı üzerinde ortogonaldir ve

$$\int_0^{\infty} x^{\gamma}e^{-x}L_r^{(\gamma)}(x)\,L_s^{(\gamma)}(x)\,dx=\frac{\Gamma(\gamma+r+1)}{r!}\delta_{r,s}$$

$$(\gamma>-1\quad ,\quad r,s\in\mathbb{N}_0)$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir (Andrews vd. 1999). Diğer taraftan bu polinomlar

$$xy''+(\gamma+1-x)\,y'+ry=0$$

ikinci basamaktan diferensiyel denkleminin bir çözümüdür ve

$$\sum_{r=0}^{\infty}L_r^{(\gamma)}(x)\,t^r=(1-t)^{-(\gamma+1)}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)\ \ ,\ (|t|<1) \tag{3.5}$$

ve

$$\begin{cases}\sum\limits_{r=0}^{\infty}L_r^{(\gamma+\theta r)}(x)\,t^r=\frac{(1+v)^{\gamma+1}}{1-\theta v}e^{-vx}\\ v=t\,(1+v)^{\theta+1}\ ,\ v(0)=0\end{cases} \tag{3.6}$$

formundaki doğurucu fonksiyon bağıntılarını gerçekler. Ayrıca $L_r^{(\gamma)}(x)$ polinom ailesi aşağıdaki üç terimli rekürans bağıntısını sağlar:

$$rL_r^{(\gamma)}(x)=(2r-1+\gamma-x)\,L_{r-1}^{(\gamma)}(x)-(r+\gamma-1)\,L_{r-2}^{(\gamma)}(x)\ \ ,\ (r\geq 2)\,.$$

3.1.3 Ultraküresel Polinomlar

$C_r^{(\gamma)}(x)$ Ultraküresel polinomlar,

$$\begin{aligned} C_r^{(\gamma)}(x) &= \frac{(-1)^r}{2^r r!}\frac{\Gamma(r+\gamma)\Gamma(r+2\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(2(r+\gamma))} \\ &\quad \times \left(1-x^2\right)^{-(\gamma-1/2)}\frac{d^r}{dx^r}\left(\left(1-x^2\right)^{r+\gamma-1/2}\right) \end{aligned}$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır (Andrews vd. 1999). Jacobi polinomları cinsinden

$$C_r^{(\gamma)}(x) = \frac{(2\gamma)_r}{(\gamma+1/2)_r}P_r^{\left(\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}\right)}(x)$$

olarak ifade edilirler ve aralarında

$$C_r^{(\gamma)}(x) = (-2)^r\left(x^2-1\right)^{r/2}P_r^{(-\gamma-r,-\gamma-r)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \tag{3.7}$$

bağıntısı gerçeklenir. Üstelik,

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_r^{(\gamma)}(x)\,t^r = \left(1-2xt+t^2\right)^{-\gamma}$$

formundaki bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

$$\left(1-x^2\right)y'' - (2\gamma+1)\,xy' + r\,(r+2\gamma)\,y = 0$$

diferensiyel denkleminin bir çözümü olan bu polinom ailesi aşağıdaki şekilde açık olarak ifade edilir:

$$C_r^{(\gamma)}(x) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\frac{(-1)^l\,\Gamma(r-l+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\,(r-2l)!\,l!}(2x)^{r-2l},$$

burada

$$\left[\frac{r}{2}\right] = \begin{cases} \frac{r}{2} & , r \text{ çift ise} \\ \frac{r-1}{2} & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{3.8}$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$(r+1)\,C_{r+1}^{(\gamma)}(x) = 2\,(r+\gamma)\,xC_r^{(\gamma)}(x) - (r+2\gamma-1)\,C_{r-1}^{(\gamma)}(x)$$

ve

$$\frac{d}{dx}\left(C_r^{(\gamma)}(x)\right) = 2\gamma C_{r-1}^{(\gamma+1)}(x)\ ,\ (r \geq 1)$$

formunda rekürans bağıntılarına sahiptir.

3.1.4 Hermite Polinomları

$H_r(x)$ Hermite polinomları

$$\sum_{r=0}^{\infty} H_r(x) \frac{t^r}{r!} = \exp\left(2xt - t^2\right)$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanır (Andrews vd. 1999). Bu polinomlar

$$y'' - 2xy' + 2ry = 0$$

diferensiyel denkleminin bir çözümüdür ve

$$H_r(x) = (-1)^r e^{x^2} \frac{d^r}{dx^r}\left(e^{-x^2}\right)$$

Rodrigues formülü ile ifade edilir. Ayrıca

$$H_{r+1}(x) + 2rH_{r-1}(x) = 2xH_r(x) \ , \ (r \geq 1)$$

rekürans bağıntısını sağlayan Hermite polinomları $(-\infty, \infty)$ aralığında $w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olup

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_r(x) H_n(x) \, dx = 2^r \sqrt{\pi} r! \delta_{r,n}$$

biçimindeki ortogonallik bağıntısını gerçekler.

3.2 Bir Bölgede İki Değişkenli Ortogonal Polinomlar

Tanım 3.2 x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bu değişkenlerin kuvvetlerinin çarpımları yardımıyla elde edilen

$$\left\{x^{r-s}y^s\right\} \ , \ \begin{cases} s = 0, 1, ..., r \\ r = 0, 1, ... \end{cases}$$

monomialler kümesi verilsin. Bu durumda r-yinci dereceden iki değişkenli cebirsel bir polinom

$$P_{rs}(x, y) = \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n} d_{nm}^{(r,s)} x^{n-m} y^m + \sum_{m=0}^{s} d_{rm}^{(r,s)} x^{r-m} y^m$$

şeklinde olup

$$\{d_{rs}\}\ ;\ \begin{cases} s=0,1,...,r \\ r=0,1,.... \end{cases}\ ,\quad d_{rs}\neq 0$$

reel sabitlerdir ve $d_{rs}^{(r,s)}$ ifadesi bu polinomun başkatsayısıdır. Burada r indisi, x ve y değişkenlerine göre polinomun toplam derecesini, s indisi de y değişkeninin en yüksek kuvvetini göstermektedir. Dolayısıyla bu polinom (r,s)-yinci basamaktan bir polinom olarak adlandırılır. Burada s indisi r den büyük olamaz.

Tanım 3.3 D, $x0y$-düzleminde basit, kapalı bir C eğrisi tarafından sınırlanan sonlu, basit irtibatlı bir bölge ve $g(x,y)$, D'de tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$0<\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy<\infty$$

sağlanırsa, bu fonksiyona D bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu denir. $g(x,y)$ ağırlık fonksiyonunun sonlu kuvvet momentleri

$$g_{rs}=\iint\limits_D g(x,y)\,x^{r-s}y^s dxdy\quad ;\ r=0,1,...\ ,\ s=0,1,...,r$$

ile verilir.

Eğer D bölgesi bir sınırsız bölge ise $g(x,y)$'nin bir ağırlık fonksiyonu olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$0<\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy<\infty$$

gerçeklenmesi ve g_{rs} momentlerinin sonlu olmasıdır.

Tanım 3.4

$$\begin{aligned} &G_{00}(x,y) \\ &G_{10}(x,y),\ G_{11}(x,y) \\ &G_{20}(x,y),\ G_{21}(x,y),\ G_{22}(x,y) \\ &\cdots \\ &G_{r0}(x,y),\ G_{r1}(x,y),...,\ G_{r,s-1}(x,y),\ G_{rs}(x,y) \end{aligned} \tag{3.9}$$

cebirsel polinom sisteminin her bir $G_{rs}(x,y)$ polinomunun başkatsayısı pozitif olsun. (3.9) polinomları D bölgesinde $g(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormallik koşulunu sağlıyorsa yani

$$\delta_{rn}\delta_{sk} = \begin{cases} 0 & , \ (r,s) \neq (n,k) \\ 1 & , \ (r,s) = (n,k) \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} (G_{rs}, G_{nk}) &= \iint_D g(x,y)\, G_{rs}(x,y)\, G_{nk}(x,y)\, dxdy \\ &= \delta_{rn}\delta_{sk} \end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitliğini gerçekliyorsa bu sisteme D bölgesinde $g(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal bir polinom sistemi denir.

Teorem 3.2 $g(x,y)$, D bölgesinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $g(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan bir tek $\{G_{rs}(x,y)\}$ polinom sistemi vardır (Suetin 1988, Aktaş 2007).

İspat. Tümevarım yöntemi kullanarak ispatlayalım.

$G_{00}(x,y) = h_{00} > 0$ sıfırıncı basamaktan keyfi bir polinom ise bu polinom

$$\iint_D g(x,y)\, G_{00}^2(x,y)\, dxdy = \iint_D g(x,y)\, h_{00}^2 dxdy = 1$$

koşulu altında tek türlü olarak belirlenir.

Eğer

$$G_{00}(x,y),\ G_{10}(x,y),\ G_{11}(x,y), ...,\ G_{r0}(x,y), ...,\ G_{r,s-1}(x,y) \tag{3.11}$$

polinom kümesi ortonormal bir küme ise bu küme ile ortonormal olacak şekilde (r,s)-yinci basamaktan bir $G_{rs}(x,y)$ polinomu

$$G_{rs}(x,y) = \sum_{n=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{n} h_{nk}G_{nk}(x,y) + \sum_{k=0}^{s-1} h_{rk}G_{rk}(x,y) + h_{rs}x^{r-s}y^{s} \tag{3.12}$$

formunda ifade edilebilir. $(r,s) \neq (n,k)$ için (3.10) iç çarpım bağıntısından

$$(G_{rs}, G_{nk}) = \left(\sum_{n=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{n} h_{nk}G_{nk}(x,y) + \sum_{k=0}^{s-1} h_{rk}G_{rk}(x,y) + h_{rs}x^{r-s}y^{s}, G_{nk} \right) = 0$$

sağlanmalıdır. Böylece (3.11) polinom kümesinin ortonormal olduğu gözönünde bulundurulursa

$$h_{nk} + h_{rs}\left(x^{r-s}y^{s}, G_{nk}\right) = 0 \tag{3.13}$$

olur. (3.13)'deki iç çarpım E_{nk} ile kısaca gösterilirse

$$h_{nk} = -h_{rs}E_{nk}$$

yazılabilir. Elde edilen bu sonuç (3.12)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} G_{rs}(x,y) &= h_{rs}\left[x^{r-s}y^{s} - \sum_{n=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{n} E_{nk}G_{nk}(x,y) - \sum_{k=0}^{s-1} E_{rk}G_{rk}(x,y)\right] \\ &= h_{rs}\Theta_{rs}(x,y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da (3.11) polinom kümesine ortogonal olan (r,s)-yinci basamaktan $G_{rs}(x,y)$ polinomunun sabit çarpan farkıyla tek olduğunu gösterir. Diğer taraftan (3.10) ortonormallik koşulundan

$$\iint_D g(x,y)\, G_{rs}^2(x,y)\, dxdy = 1$$

dir. O zaman

$$h_{rs}^2 \iint_D g(x,y)\, \Theta_{rs}^2(x,y)\, dxdy = 1$$

olur ve $h_{rs} > 0$ koşulu altında bu katsayı tek olarak belirlenir.
Böylece $g(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre D bölgesinde ortonormal olan

$$\{G_{00}(x,y),\ G_{10}(x,y),\ G_{11}(x,y),...,\ G_{r0}(x,y),...,\ G_{r,s-1}(x,y),\ G_{rs}(x,y)\}$$

şeklinde bir tek polinom sistemi elde edilir. ■
Şimdi yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak bir polinomun bir bölgedeki ortogonallik tanımı aşağıdaki formda verilebilir:

Teorem 3.3 (r,s)-yinci basamaktan $G_{rs}(x,y)$ polinomunun başkatsayısı $h_{rs} \neq 0$ olsun. $Z_{nk}(x,y)$ polinomu, (r,s)-yinci basamaktan daha düşük olan (n,k)-yıncı basamaktan herhangi bir polinom olmak üzere $G_{rs}(x,y)$ polinomunun, bir D bölgesinde tanımlı $g(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter şart,

$$\iint_D g(x,y)\, G_{rs}(x,y)\, Z_{nk}(x,y)\, dxdy = 0,\ (n,k) \prec (r,s)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Suetin 1988). Burada

$$(n,k) \prec (r,s) \equiv \begin{cases} n = r,\ k < s \\ n < r \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Koornwinder (1975), tek değişkenli ortogonal polinom aileleri yardımıyla iki değişkenli polinom ailelerini tanımlamak için bir metod vermiş ve çeşitli ortogonal polinom aileleri tanımlamıştır. Bu polinomlar üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Aktaş vd. 2011, Fernandez vd. 2012, Aktaş vd. 2013, Marriaga vd. 2017, Milovanovic vd. 2020). Şimdi Koornwinder'in verdiği metodu hatırlatalım.

Teorem 3.4 (Koornwinder metodu) $\widetilde{w}_1(x)$ ve $\widetilde{w}_2(y)$, sırasıyla (a_1,b_1) ve (a_2,b_2) aralıklarında birer ağırlık fonksiyonu olsunlar. $\sigma(x)$ fonksiyonu da (a_1,b_1) aralığında ya m $(m=0,1,2,...)$-yinci dereceden bir polinom ya da $2m$ $\left(m=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},...\right)$-yinci dereceden pozitif bir polinomun karekökü olsun. Eğer $\sigma(x)$ bir polinom değilse bu durumda $a_2=-b_2<0$ ve $\widetilde{w}_2(y)$, $(-b_2,b_2)$ aralığında çift fonksiyon olsun. $s\geq 0$ için $K_r(x;s)$ $(r=0,1,...)$ polinomları (a_1,b_1) aralığında $\sigma^{2s+1}(x)\,\widetilde{w}_1(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal ve $T_r(y)$ polinomları da (a_2,b_2) aralığı üzerinde $\widetilde{w}_2(y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olsun. O zaman

$$P_{r,s}(x,y)=K_{r-s}(x;s)\,\sigma^s(x)\,T_s\left(\frac{y}{\sigma(x)}\right)\quad,\quad 0\leq s\leq r$$

iki değişkenli polinom ailesi

$$\Lambda=\{(x,y):a_1\leq x\leq b_1,\ a_2\sigma(x)\leq y\leq b_2\sigma(x)\}$$

bölgesinde

$$\widetilde{w}(x,y)=\widetilde{w}_1(x)\,\widetilde{w}_2\left(\frac{y}{\sigma(x)}\right)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Koornwinder 1975).

İspat. $P_{r,s}(x,y)$ polinomunun tanımı ortogonallik bağıntısında yerine yazılarak $t=\frac{y}{\sigma(x)}$ değişken değiştirmesi yapılırsa $(r,s)\neq(n,k)$ için

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Lambda} P_{r,s}(x,y)P_{n,k}\left(x,y\right)\widetilde{w}\left(x,y\right)dxdy \\
&= \int\limits_{x=a_1}^{b_1}\int\limits_{y=a_2\sigma(x)}^{b_2\sigma(x)} K_{r-s}(x;s)K_{n-k}(x;k)\sigma^{s+k}\left(x\right) \\
&\quad \times T_s(\frac{y}{\sigma\left(x\right)})T_k(\frac{y}{\sigma\left(x\right)})\widetilde{w}_1\left(x\right)\widetilde{w}_2\left(\frac{y}{\sigma\left(x\right)}\right)dydx \\
&= \int\limits_{x=a_1}^{b_1} K_{r-s}(x;s)K_{n-k}(x;k)\sigma^{s+k+1}\left(x\right)\widetilde{w}_1\left(x\right)dx\int\limits_{y=a_2}^{b_2} T_s(t)T_k(t)\widetilde{w}_2\left(t\right)dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Şimdi yukarıdaki teoremin özel durumları için Jacobi polinomlarının bazı iki değişkenli kombinasyonlarını verelim:

i) $\sigma\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$, $\widetilde{w}_1\left(x\right)=\widetilde{w}_2\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{\theta}$, $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)=(-1,1)$ özel durumunda $\widetilde{w}\left(x,y\right)=\left(1-x^2-y^2\right)^{\theta}$ ağırlık fonksiyonuna göre birim diskte ortogonal olan

$$\begin{aligned}
P_{r,s}^{(\theta)}\left(x,y\right) &= P_{r-s}^{\left(\theta+s+\frac{1}{2},\theta+s+\frac{1}{2}\right)}\left(x\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}}P_s^{(\theta,\theta)}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&\quad (\theta>-1,\ r\geq s\geq 0,\ r,s\in\mathbb{N}_0)
\end{aligned}$$

polinom ailesine ulaşılır.

ii) $\sigma\left(x\right)=x$, $\widetilde{w}_1\left(x\right)=\left(1-x\right)^{\alpha}x^{\beta+\gamma}$, $\widetilde{w}_2\left(x\right)=x^{\gamma}\left(1-x\right)^{\beta}$ ve $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)=(0,1)$ durumu için

$$P_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(x,y\right)=P_{r-s}^{(\alpha,\beta+\gamma+2s+1)}\left(2x-1\right)x^sP_s^{(\beta,\gamma)}\left(\frac{2y}{x}-1\right)$$
$$(\alpha,\beta,\gamma>-1,\ r\geq s\geq 0,\ r,s\in\mathbb{N}_0)$$

polinom ailesi elde edilir, bu polinomlar

$$\Lambda=\{(x,y):0<y<x<1\}$$

üçgensel bölgesinde $\widetilde{w}\left(x,y\right)=\left(1-x\right)^{\alpha}\left(x-y\right)^{\beta}y^{\gamma}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler.

iii) $\sigma(x)=\sqrt{x}$, $\widetilde{w}_1(x)=x^{\beta}(1-x)^{\alpha}$, $\widetilde{w}_2(x)=(1-x^2)^{\beta}$, $(a_1,b_1)=(0,1)$ ve $(a_2,b_2)=(-1,1)$ özel seçimi ile

$$\Lambda=\left\{(x,y): y^2<x<1\right\}$$

parabolik bölgesinde $\widetilde{w}(x,y)=(1-x)^{\alpha}(x-y^2)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$$P_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=P_{r-s}^{\left(\alpha,\beta+s+\frac{1}{2}\right)}(2x-1)\,x^{s/2}P_s^{(\beta,\beta)}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$$
$$(\alpha,\beta>-1,\ r\geq s\geq 0,\ r,s\in\mathbb{N}_0)$$

polinom ailesi elde edilir.

iv) $\sigma(x)=1$, $\widetilde{w}_1(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\widetilde{w}_2(x)=(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\theta}$, $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)=(-1,1)$ olması durumunda

$$\Lambda=\{(x,y):-1<x<1,\ -1<y<1\}$$

karesel bölgesinde $\widetilde{w}(x,y)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-y)^{\gamma}(1+y)^{\theta}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$$P_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}(x,y)=P_{r-s}^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_s^{(\gamma,\theta)}(y)$$
$$(\alpha,\beta,\gamma,\theta>-1,\ r\geq s\geq 0,\ r,s\in\mathbb{N}_0)$$

polinom ailesi elde edilir.

Ayrıca, yukarıdaki teoremin özel durumu için Laguerre polinomlarının iki değişkenli bir kombinasyonu da

$$R_{r,s}^{(p,q)}(x,y)=L_{r-s}^{(p+2s+1)}(x)\,x^sL_s^{(q)}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.14}$$
$$(p,q>-1,\ r\geq s\geq 0,\ r,s\in\mathbb{N}_0)$$

şeklinde tanımlanan Laguerre-Laguerre Koornwinder polinomlarıdır (Fernandez vd. 2012).

$$\begin{aligned}(r-s+1)\,R_{r+1,s}^{(p,q)}(x,y) &= (2r+2+p-x)\,R_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \\ &\quad -(r+s+1+p)\,R_{r-1,s}^{(p,q)}(x,y).\end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklindeki rekürans bağıntısını sağlayan bu polinom ailesi

$$\Lambda = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

bölgesi üzerinde $\widetilde{w}\,(x, y) = x^{p-q} y^{q} e^{-\left(x+\frac{y}{x}\right)}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

4. TEK DEĞİŞKENLİ SONLU ORTOGONAL POLİNOMLAR

r pozitif bir tamsayı ve a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 parametreleri r den bağımsız reel parametreler olmak üzere

$$\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) y_r''(x) + (d_1x + e_1)\, y_r'(x) - r\,(d_1 + (r-1)\,a_1)\, y_r(x) = 0$$

formundaki genel diferensiyel denklemi ele alalım.

Bu denklemin çözümü olan 6 tane ortogonal polinom ailesi vardır. Bu çözümlerden üçü Jacobi, Laguerre ve Hermite klasik ortogonal polinomlarıdır (Bochner 1929, Szegö 1975). Diğer üçü de sırasıyla Jacobi, Laguerre ve Ultraküresel polinomlar ile ilişkili olan sonlu klasik ortogonal polinomlardır (Masjed-Jamei 2002).

Masjed-Jamei (2004), $M_r^{(p,q)}(x)$, $N_r^{(p)}(x)$, $I_r^{(p)}(x)$ ile adlandırılan bu polinomların F, ters Gamma ve T dağılımlarına göre sonlu ortogonal olduğunu göstermiş ve sonrasında $(-\infty, \infty)$ aralığında $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarını genelleştiren çok daha kapsamlı sonlu ortogonal polinom sınıfı tanımlamıştır. Daha sonra Koepf ve Masjed-Jamei (2007) bu polinomların Fourier dönüşümlerini kullanarak yeni ortogonal fonksiyon aileleri elde etmiştir. Ayrıca Soleyman, Masjed-Jamei ve Area (2017), $N_r^{(p)}(x)$ polinomları aracılığıyla $q \to 1$ iken ters Gamma dağılımına karşılık gelen ağırlık fonksiyonuna göre sonlu q-ortogonal polinomların bir sınıfını tanımlamış ve Masjed-Jamei, Soleyman, Area ve Nieto (2018), $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarının q-analoglarını ortaya koymuştur.

İlk olarak bu polinomların tanımları ve bazı özelliklerini verelim.

4.1 $[0, \infty)$ Aralığında $W(x,p,q) = \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}}$ Ağırlık Fonksiyonuna Göre Ortogonal Polinomlar

$a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, $d_1 = 2 - p$, $e_1 = q + 1$ özel durumu olan

$$x(x+1)\, y_r''(x) + ((2-p)\,x + q + 1)\, y_r'(x) - r\,(r - p + 1)\, y_r(x) = 0 \tag{4.1}$$

diferensiyel denkleminin Frobenius metodu kullanılarak $x = 0$ düzgün aykırı noktası civarında serisel çözümü aranırsa

$$M_r^{(p,q)}(x) = (-1)^r\, r! \sum_{l=0}^{r} \binom{p-(r+1)}{l} \binom{q+r}{r-l} (-x)^l \tag{4.2}$$

şeklinde bir açık polinom çözümüne sahip olduğu görülür. Dahası hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$M_r^{(p,q)}(x) = (-1)^r r! \binom{q+r}{r} {}_2F_1(-r, r-p+1; q+1; -x)$$

veya

$$M_r^{(p,q)}(x) = (-1)^r r! \binom{q+r}{r} (x+1)^r \; {}_2F_1\left(-r, p+q-r; q+1; \frac{x}{x+1}\right)$$

olarak yazılabilir. Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned}
M_0^{(p,q)}(x) &= 1, \\
M_1^{(p,q)}(x) &= (p-2)\,x - (q+1), \\
M_2^{(p,q)}(x) &= (p-4)(p-3)\,x^2 - 2(p-3)(q+2)\,x + (q+2)(q+1), \\
M_3^{(p,q)}(x) &= (p-6)(p-5)(p-4)\,x^3 - 3(p-5)(p-4)(q+3)\,x^2 \\
&\quad +3(p-4)(q+3)(q+2)\,x - (q+3)(q+2)(q+1), \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

dir.

(4.1) diferensiyel denklemi self adjoint formda yazılırsa

$$\left(x^{1+q}(1+x)^{1-p-q} y_r'(x)\right)' = r(r+1-p)\,x^q(1+x)^{-p-q} y_r(x)$$

elde edilir. r indisine bağlı bu eşitlik n indisine bağlı olarak tekrar yazılır ve denklemler sırasıyla $y_n(x)$ ve $y_r(x)$ ile çarpılarak taraf tarafa çıkarıldıktan sonra $[0,\infty)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{x^{1+q}}{(1+x)^{p+q-1}}\left(y_r'(x)\,y_n(x) - y_r(x)\,y_n'(x)\right)\right]_0^{\infty} \\
&= (r-n)(r+n+1-p)\int_0^{\infty} \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}} M_r^{(p,q)}(x)\,M_n^{(p,q)}(x)\,dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin sol tarafı $q > -1$ ve $p > 2N+1$ $(N = maks\{r, n\})$ için sıfır olup

$$\int_0^{\infty} \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}} M_r^{(p,q)}(x)\,M_n^{(p,q)}(x)\,dx = 0 \quad , \quad r \neq n$$

elde edilir. Yani bu polinom ailesi, $r,n = 0,1,2,...,N < \frac{p-1}{2}$, $q > -1$, $N = maks\{r,n\}$ için $[0,\infty)$ aralığında $W(x,p,q) = \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

(4.2) bağıntısı ile verilen serisel formdaki $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomu düzenlenirse aşağıdaki Rodrigues formülü elde edilir:

$$M_r^{(p,q)}(x) = (-1)^r \frac{(1+x)^{p+q}}{x^q} \frac{d^r}{dx^r}\left(x^{r+q}(1+x)^{r-p-q}\right) \qquad , \qquad r = 0,1,... \ .$$

Bu eşitlik $\frac{x^q}{(1+x)^{p+q}} M_r^{(p,q)}(x)$ ile çarpılıp $[0,\infty)$ aralığında integrali alındığında

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}} \left(M_r^{(p,q)}(x)\right)^2 dx = (-1)^r \int_0^\infty M_r^{(p,q)}(x) \frac{d^r}{dx^r}\left(x^{r+q}(1+x)^{r-p-q}\right) dx$$

bulunur. Bu eşitliğin sağındaki integralde r kez kısmi integrasyon uygulanır ve Gamma integralinden yararlanılırsa

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}} \left(M_r^{(p,q)}(x)\right)^2 dx = \frac{r!\,(p-(r+1))!\,(q+r)!}{(p-(2r+1))\,(p+q-(r+1))!}$$

elde edilir. Buradan ortogonallik ve norm ifadeleri tek bir bağıntıda gösterilirse $r,n = 0,1,2,...,N < \frac{p-1}{2}$ ve $q > -1$ için

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}} M_r^{(p,q)}(x)\, M_n^{(p,q)}(x)\, dx \\ &= \left(\frac{r!\,(p-(r+1))!\,(q+r)!}{(p-(2r+1))\,(p+q-(r+1))!}\right)\delta_{r,n} \end{aligned} \tag{4.3}$$

yazılabilir.

Örnek olarak, $\left\{M_r^{(143,1)}(x)\right\}|_{r=0}^{70}$ sonlu polinom ailesi aşağıdaki ortogonallik bağıntısını sağlar $(r,n \leq 70)$:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^{144}} M_r^{(143,1)}(x)\, M_n^{(143,1)}(x)\, dx \\ &= \left(\frac{r!\,(r+1)!}{2\,(71-r)\,(143-r)}\right)\delta_{r,n}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları ve $P_r^{(\gamma,\theta)}(x)$ Jacobi polinomları arasında

$$\begin{aligned} M_r^{(p,q)}(x) &= (-1)^r\, r!\, P_r^{(q,-p-q)}(2x+1) \\ &\Leftrightarrow \ P_r^{(p,q)}(x) = \frac{(-1)^r}{r!} M_r^{(-p-q,p)}\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$M_r^{(p,q)}(x) = (-1)^r r!(1+x)^r P_r^{(q,p-2r-1)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \tag{4.4}$$
$$\Leftrightarrow P_r^{(p,q)}(x) = \frac{(-1)^r (1+x)^r}{r!2^r} M_r^{(q,p+2r+1)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

şeklindeki bağıntılar mevcuttur.

Ayrıca $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomlarının (4.2) ile verilen açık formundan

$$\begin{aligned} M_{r+1}^{(p,q)}(x) &= \left(\frac{(p-2r-1)(p-2r-2)}{p-r-1}x \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p-2r-1)(2r(r+1)-p(q+2r+1))}{(p-r-1)(p-2r)}\right) M_r^{(p,q)}(x) \\ &\quad - \left(\frac{r(p-2r-2)(p+q-r)(q+r)}{(p-r-1)(p-2r)}\right) M_{r-1}^{(p,q)}(x) \end{aligned} \tag{4.5}$$

rekürans bağıntısı elde edilir ve $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları için

$$\frac{d}{dx} M_r^{(p,q)}(x) = r(p-r-1) M_{r-1}^{(p-2,q+1)}(x) \tag{4.6}$$

bağıntısı (4.1) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} M_{r+1}^{(p,q)}(x) &= ((p-2)x-(q+1)) M_r^{(p-2,q+1)}(x) \\ &\quad -r(p-r-3)x(x+1) M_{r-1}^{(p-4,q+2)}(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

rekürans bağıntısının sağlandığı görülür.

Jacobi polinomlarının (3.3) doğurucu fonksiyonu yardımıyla $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları için doğurucu fonksiyon aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} &\frac{2^{p+q}}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}\left(1-\zeta+\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}\right)^p \left(1+\zeta+\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}\right)^q} \\ = &\sum_{r=0}^{\infty} P_r^{(p,q)}(z)\zeta^r = \sum_{r=0}^{\infty} M_r^{(-p-q,p)}\left(\frac{z-1}{2}\right)\frac{(-\zeta)^r}{r!}, \end{aligned}$$

yani

$$\sum_{r=0}^{\infty} M_r^{(p,q)}(x)\frac{t^r}{r!} = \frac{2^{-p}\left(1-t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right)^{p+q}}{\sqrt{(1+t)^2+4xt}\left(1+t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right)^q}. \tag{4.8}$$

Bunlara ek olarak, $M_r^{(p,q)}(x)$ sonlu polinomları ve $L_r^{(\gamma)}(x)$ Laguerre polinomları arasında

$$\lim_{p\to\infty} M_r^{(p,q)}\left(\frac{x}{p}\right) = (-1)^r r! L_r^{(q)}(x) \tag{4.9}$$

şeklinde bir limit bağıntısı mevcuttur (Masjed-Jamei 2006).

4.2 $[0,\infty)$ Aralığında $W(x,p) = x^{-p}e^{-\frac{1}{x}}$ Ağırlık Fonksiyonuna Göre Ortogonal Polinomlar

Benzer şekilde

$$x^2 y_r^{''}(x) + ((2-p)x+1)\, y_r^{'}(x) - r(r+1-p)\, y_r(x) = 0 \qquad (4.10)$$

diferensiyel denkleminde Frobenius metodu uygulayarak $x=0$ düzgün aykırı noktası civarında serisel çözüm aranırsa

$$N_r^{(p)}(x) = (-1)^r \sum_{l=0}^{r} l! \binom{p-r-1}{l} \binom{r}{r-l} (-x)^l \qquad (4.11)$$

polinom çözümüne ulaşılır. Dahası hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$N_r^{(p)}(x) = r!x^r \binom{p-1-r}{r} {}_1F_1\left(-r; p-2r; \frac{1}{x}\right)$$

olarak yazılabilir. $r = 0,1,2,...$ için bu polinomlar

$$\begin{aligned}
N_0^{(p)}(x) &= 1, \\
N_1^{(p)}(x) &= (p-2)\,x - 1, \\
N_2^{(p)}(x) &= (p-4)(p-3)\,x^2 - 2(p-3)\,x + 1, \\
N_3^{(p)}(x) &= (p-6)(p-5)(p-4)\,x^3 - 3(p-5)(p-4)\,x^2 + 3(p-4)\,x - 1, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

(4.10) diferensiyel denklem self adjoint formda yazılırsa

$$\left(x^{2-p}e^{-\frac{1}{x}} y_r^{'}(x)\right)^{'} = r(r+1-p)\, x^{-p}e^{-\frac{1}{x}} y_r(x)$$

elde edilir. r indisine bağlı bu eşitlik n indisine bağlı olarak tekrar yazılır ve denklemler sırasıyla $y_n(x)$ ve $y_r(x)$ ile çarpılarak taraf tarafa çıkarılır daha sonra $[0,\infty)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left[x^{2-p}e^{-\frac{1}{x}}\left(y_r^{'}(x)\, y_n(x) - y_r(x)\, y_n^{'}(x)\right)\right]_0^{\infty} \\
&= (r-n)(r+n+1-p) \int_0^{\infty} x^{-p}e^{-\frac{1}{x}} N_r^{(p)}(x)\, N_n^{(p)}(x)\, dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada eşitliğin sol tarafı $p > 2N+1$ $(N = maks\{r,n\})$ için sıfır olup böylece sağ taraf da sıfır olacağından

$$\int_0^\infty x^{-p} e^{-\frac{1}{x}} N_r^{(p)}(x)\, N_n^{(p)}(x)\, dx = 0 \quad , \quad r \neq n$$

yazılabilir. Yani bu polinom ailesi, $r,n = 0,1,2,...,N < \frac{p-1}{2}$, $N = maks\{r,n\}$ için $[0,\infty)$ aralığında $W(x,p) = x^{-p}e^{-\frac{1}{x}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

Şimdi (4.11) bağıntısı ile verilen serisel formdaki $N_r^{(p)}(x)$ polinomu düzenlenirse aşağıdaki Rodrigues formülü elde edilir:

$$N_r^{(p)}(x) = (-1)^r x^p e^{\frac{1}{x}} \frac{d^r}{dx^r}\left(x^{2r-p}e^{-\frac{1}{x}}\right) \quad , \quad r = 0,1,... \quad .$$

Bu eşitlik $x^{-p}e^{-\frac{1}{x}}N_r^{(p)}(x)$ ile çarpılıp $[0,\infty)$ aralığında integrali alındığında

$$\int_0^\infty x^{-p}e^{-\frac{1}{x}}\left(N_r^{(p)}(x)\right)^2 dx = (-1)^r \int_0^\infty N_r^{(p)}(x) \frac{d^r}{dx^r}\left(x^{2r-p}e^{-\frac{1}{x}}\right) dx$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafında r kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^\infty x^{-p}e^{-\frac{1}{x}}\left(N_r^{(p)}(x)\right)^2 dx = \frac{r!\,(p-r-1)!}{p-2r-1}$$

elde edilir. Böylece ortogonallik ve norm ifadelerini tek bir bağıntıda gösterirsek

$$\int_0^\infty x^{-p}e^{-\frac{1}{x}} N_r^{(p)}(x)\, N_n^{(p)}(x)\, dx = \frac{r!\,(p-r-1)!}{p-2r-1}\delta_{r,n}$$

olur.

Örnek olarak, $\left\{N_r^{(404)}(x)\right\}\big|_{r=0}^{r=201}$ ailesi $[0,\infty)$ aralığında $W(x,404) = x^{-404}e^{-1/x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

Diğer taraftan $N_r^{(p)}(x)$ polinomları ve $L_r^{(\gamma)}(x)$ Laguerre polinomları arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur:

$$N_r^{(p)}(x) = r!x^r L_r^{(p-(2r+1))}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow L_r^{(p)}(x) = \frac{x^r}{r!}N_r^{(p+2r+1)}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{4.12}$$

Ayrıca $N_r^{(p)}(x)$ polinomlarının (4.11) ile verilen serisel açılımından

$$\begin{aligned} & N_{r+1}^{(p)}(x) + \left(\frac{r\,(p-2r-2)}{(p-r-1)\,(p-2r)}\right) N_{r-1}^{(p)}(x) \qquad (4.13) \\ = & \left(\frac{(p-2r-1)\,(p-2r-2)}{p-r-1}x - \frac{p\,(p-2r-1)}{(p-r-1)\,(p-2r)}\right) N_r^{(p)}(x) \end{aligned}$$

rekürans bağıntısının ve

$$\frac{d}{dx}N_r^{(p)}(x) = r(p-r-1)N_{r-1}^{(p-2)}(x) \tag{4.14}$$

eşitliğinin (4.10) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$(px-1)N_r^{(p)}(x) - r(p-r-1)x^2N_{r-1}^{(p-2)}(x) = N_{r+1}^{(p+2)}(x) \tag{4.15}$$

rekürans bağıntısının sağlandığı görülür.

Laguerre polinomlarının (3.5) doğurucu fonksiyonu yardımıyla $N_r^{(p+2r)}(x)$ polinomları için doğurucu fonksiyon

$$\frac{\exp(-zw/(1-w))}{(1-w)^{\gamma+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} L_r^{(\gamma)}(z)\,w^r = \sum_{r=0}^{\infty}(z^r/r!)\,N_r^{(\gamma+2r+1)}(1/z)\,w^r$$

yani

$$\sum_{r=0}^{\infty} N_r^{(p+2r)}(x)\frac{t^r}{r!} = (1-tx)^{-p}\exp\left(\frac{-t}{1-tx}\right) \tag{4.16}$$

formunda elde edilir.

4.3 $(-\infty,\infty)$ Aralığında $W(x,p) = (1+x^2)^{-\left(p-\frac{1}{2}\right)}$ Ağırlık Fonksiyonuna Göre Ortogonal Polinomlar

$$\left(1+x^2\right)y_r''(x) + (3-2p)\,xy_r'(x) - r(r+2-2p)\,y_r(x) = 0 \tag{4.17}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Frobenius metodu uygulanarak

$$I_r^{(p)}(x) = r!\sum_{l=0}^{[r/2]}(-1)^l\binom{p-1}{r-l}\binom{r-l}{l}(2x)^{r-2l} \tag{4.18}$$

formundaki polinom çözümüne sahip olduğu gösterilebilir. Burada $\left[\frac{r}{2}\right]$ ifadesi (3.8) ile tanımlanmaktadır.

Dahası hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$I_r^{(p)}(x) = \frac{(-4i)^r\,(p-r)_r\,(3/2-p)_r}{(r+2-2p)_r}\;{}_2F_1\left(-r, r+2-2p; \frac{3}{2}-p; \frac{1-ix}{2}\right)$$

olarak yazılabilir. Bu polinomlar açık formda

$$\begin{aligned}
I_0^{(p)}(x) &= 1, \\
I_1^{(p)}(x) &= 2(p-1)x, \\
I_2^{(p)}(x) &= 4(p-2)(p-1)x^2 - 2(p-1), \\
I_3^{(p)}(x) &= 8(p-3)(p-2)(p-1)x^3 - 12(p-2)(p-1)x, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

(4.17) diferensiyel denklemi self-adjoint formda yazılırsa

$$\left(\left(1+x^2\right)^{3/2-p} y_r'(x)\right)' = r(r+2-2p)\left(1+x^2\right)^{1/2-p} y_r(x)$$

elde edilir. r indisine bağlı bu eşitlik n indisine bağlı olarak tekrar yazılır ve denklemler sırasıyla $y_n(x)$ ve $y_r(x)$ ile çarpılarak taraf tarafa çıkarıldıktan sonra $(-\infty,\infty)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1+x^2\right)^{3/2-p}\left(y_r'(x)\,y_n(x) - y_r(x)\,y_n'(x)\right)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
= \;& (r-n)(r+n+2-2p)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+x^2\right)^{-(p-1/2)} I_r^{(p)}(x)\, I_n^{(p)}(x)\,dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin sol tarafı $p > N+1$ $(N = maks\{r,n\})$ için sıfır olup

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+x^2\right)^{-(p-1/2)} I_r^{(p)}(x)\, I_n^{(p)}(x)\,dx = 0 \qquad , \qquad r \neq n$$

elde edilir. Yani bu polinom ailesi, $r,n = 0,1,2,...,N < p-1$, $N = maks\{r,n\}$ için $(-\infty,\infty)$ aralığında $W(x,p) = \left(1+x^2\right)^{-(p-1/2)}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

(4.18) bağıntısı ile verilen serisel formdaki $I_r^{(p)}(x)$ polinomu düzenlenirse aşağıdaki Rodrigues formülü elde edilir:

$$\begin{aligned}
I_r^{(p)}(x) &= \frac{(-2)^r (p-r)_r}{(2p-2r-1)_r}\left(1+x^2\right)^{p-1/2}\frac{d^r}{dx^r}\left(\left(1+x^2\right)^{r-(p-1/2)}\right) \qquad (4.19) \\
&\quad (r = 0,1,...).
\end{aligned}$$

Bu eşitlik $(1+x^2)^{-(p-1/2)}\, I_r^{(p)}(x)$ ile çarpılıp $(-\infty,\infty)$ aralığında integrali alındığında

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+x^2\right)^{-(p-1/2)}\left(I_r^{(p)}(x)\right)^2 dx$$
$$=\frac{(-2)^r\,(p-r)_r}{(2p-2r-1)_r}\int_{-\infty}^{\infty} I_r^{(p)}(x)\,\frac{d^r}{dx^r}\left(\left(1+x^2\right)^{r-(p-1/2)}\right)dx$$

bulunur. Bu eşitliğin sağındaki integralde r kez kısmi integrasyon uygulanır ve Gamma integralinden yararlanılırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+x^2\right)^{-(p-1/2)}\left(I_r^{(p)}(x)\right)^2 dx$$
$$=\frac{r!2^{2r-1}\sqrt{\pi}\Gamma^2(p)\,\Gamma(2p-2r)}{(p-r-1)\,\Gamma(p-r)\,\Gamma(p-r+1/2)\,\Gamma(2p-r-1)}$$

elde edilir.

Böylece ortogonallik ve norm ifadeleri tek bir bağıntıda gösterilirse $r,n=0,1,2,...,N<p-1$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+x^2\right)^{-(p-1/2)} I_r^{(p)}(x)\, I_n^{(p)}(x)\, dx$$
$$=\frac{r!2^{2r-1}\sqrt{\pi}\Gamma^2(p)\,\Gamma(2p-2r)}{(p-r-1)\,\Gamma(p-r)\,\Gamma(p-r+1/2)\,\Gamma(2p-r-1)}\delta_{r,n}$$

yazılabilir.

Örnek olarak, $p=151$ için $\left\{I_r^{(151)}(x)\right\}|_{r=0}^{r=149}$ dizisi $(-\infty,\infty)$ aralığında $W(x,151)=(1+x^2)^{-\frac{301}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre bir sonlu ortogonal polinom ailesidir.

Diğer taraftan $I_r^{(p)}(x)$ polinomları ve $C_r^{(\gamma)}(x)$ Ultraküresel polinomları arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur:

$$I_r^{(p)}(x)=\frac{r!\,(-4i)^r\,(p-r)_r\,(3/2-p)_r}{(2-2p)_r\,(r+2-2p)_r}C_r^{(1-p)}(ix) \tag{4.20}$$
$$\Leftrightarrow\quad C_r^{(p)}(x)=\frac{(2p)_r\,(r+2p)_r}{r!\,(-4i)^r\,(1-p-r)_r\,(1/2+p)_r}I_r^{(1-p)}(-ix).$$

Ayrıca $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarının (4.18) ile verilen serisel formu ve sağladığı (4.17) diferensiyel denklemi yardımıyla $I_r^{(p)}(x)$ polinomları için aşağıdaki rekürans bağıntılarının sağlandığı görülür:

$$I_{r+1}^{(p)}(x)=2\,(p-(r+1))\,xI_r^{(p)}(x)-r\,(2p-(r+1))\,I_{r-1}^{(p)}(x), \tag{4.21}$$

$$\frac{d}{dx} I_r^{(p)}(x) = 2r(p-1) I_{r-1}^{(p-1)}(x) \tag{4.22}$$

ve

$$4rp(p-1)\left(1+x^2\right) I_{r-1}^{(p-1)}(x) - 2p(2p-1)\, x I_r^{(p)}(x) = (r+1-2p)\, I_{r+1}^{(p+1)}(x). \tag{4.23}$$

Ultraküresel polinomların doğurucu fonksiyonu yardımıyla $I_r^{(p)}(x)$ polinomları için doğurucu fonksiyon

$$\begin{aligned} \left(1-2xt+t^2\right)^{-p} &= \sum_{r=0}^{\infty} C_r^{(p)}(x)\, t^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{(2p)_r\,(r+2p)_r}{r!\,(-4i)^r\,(1-p-r)_r\,(1/2+p)_r} \right) I_r^{(1-p)}(-ix)\, t^r \end{aligned}$$

yani,

$$\left(1+2zw-w^2\right)^{p-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{(2-2p)_r\,(r+2-2p)_r}{r!\,(-4)^r\,(p-r)_r\,(3/2-p)_r} \right) I_r^{(p)}(z)\, \frac{w^r}{r!}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\frac{(2-2p)_r\,(r+2-2p)_r}{(-4)^r\,(p-r)_r\,(3/2-p)_r} = 1 \quad , \quad \forall r \tag{4.24}$$

olduğunu göstermek zor değildir. Böylece kısaca

$$\sum_{r=0}^{\infty} I_r^{(p)}(x)\, \frac{t^r}{r!} = \left(1+2tx-t^2\right)^{p-1} \tag{4.25}$$

yazılır.

Diğer taraftan, $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarının limit durumu için aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 4.1 $I_r^{(p)}(x)$ sonlu polinomları ve $H_r(x)$ Hermite polinomları arasında aşağıdaki limit bağıntısı mevcuttur:

$$\lim_{p\to\infty} \left[p^{-\frac{r}{2}} I_r^{(p)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}} \right) \right] = H_r(x). \tag{4.26}$$

İspat. (4.19) bağıntısında $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ değişken değiştirmesi yapılarak elde edilen eşitliğin her iki tarafı $p^{-\frac{r}{2}}$ ile çarpılır ve $p \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
& \lim_{p\to\infty}\left[p^{-\frac{r}{2}} I_r^{(p)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\right] \\
= & \lim_{p\to\infty}\left\{\frac{(-2)^r\left(1-\frac{r}{p}\right)...\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{x^2}{p}\right)^{p-1/2}}{\left(2-\frac{2r+1}{p}\right)....\left(2-\frac{r+2}{p}\right)}\right. \\
& \left.\times\frac{d^r\left(\left(1+\frac{x^2}{p}\right)^{r-(p-1/2)}\right)}{dx^r}\right\} \\
= & (-1)^r e^{x^2}\frac{d^r\left(e^{-x^2}\right)}{dx^r} \\
= & H_r(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

5. İKİ DEĞİŞKENLİ SONLU ORTOGONAL POLİNOM AİLELERİ

Bu bölümde, *Teorem 3.4* ile verilen Koornwinder metodunu, dördüncü bölümde sırasıyla (4.2), (4.11) ve (4.18) ile tanımlanan tek değişkenli sonlu ortogonal $M_r^{(p,q)}(x)$, $N_r^{(p)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomları için uygulayarak iki değişkenli sonlu ortogonal polinom aileleri tanımlayalım.

Burada tanımlanan iki değişkenli sonlu ortogonal $Q_{r,s}$ polinomları ve bu polinomların (kısmi türevli denklem, rekürans bağıntısı, doğurucu fonksiyon, Rodrigues formülü, ortogonallik bağıntısı gibi) genel özellikleri, SCI-Exp. kapsamında taranan "Bulletin of the Iranian Mathematical Society" dergisinde makale olarak yayınlanmıştır.

5.1 ${}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Koornwinder metodunda $\sigma(x) = x$, $K_{r-s}(x;s)$ polinomları için $(a_1,b_1) = (0,\infty)$ aralığında $\sigma^{2s+1}(x)\widetilde{w}_1(x) = x^{q+2s+1}(1+x)^{-(p+q)}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)$ polinomları ve $T_s(y)$ polinomları için de $(a_2,b_2) = (0,\infty)$ aralığında $\widetilde{w}_2(y) = y^q(1+y)^{-(p+q)}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $M_s^{(p,q)}(y)$ polinomları seçilirse $\widetilde{w}(x,y) = \widetilde{w}_1(x)\widetilde{w}_2\left(\frac{y}{x}\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan iki değişkenli sonlu polinom ailesi

$$ {}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\, x^s M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.1}$$

$$(s = 0,1,...,r \quad ; \quad r = 0,1,...,N)$$

olarak tanımlanır. Bu polinomlar

$$w_1(x,y) = x^{p+q}y^q(1+x)^{-(p+q)}(x+y)^{-(p+q)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_1 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonaldir. Burada $N = maks\,\{r,n\}$, $p > 2N+2$ ve $q > -1$ için ${}_1Q^{(p,q)}_{r,s}(x,y)$ polinomları

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty\int_0^\infty x^{p+q}y^q(1+x)^{-(p+q)}(x+y)^{-(p+q)} \\ &\qquad\times {}_1Q^{(p,q)}_{r,s}(x,y)\ {}_1Q^{(p,q)}_{n,k}(x,y)\,dxdy \\ = &\ \frac{(r-s)!s!\Gamma(p-s)\Gamma(p-r-s-1)}{(p-2s-1)(p-2r-2)} \\ &\qquad\times\frac{\Gamma(q+s+1)\Gamma(q+r+s+2)}{\Gamma(p+q-s)\Gamma(p+q-r+s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Burada, polinomun tanımı kullanılır ve $\frac{y}{x} = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty\int_0^\infty x^{p+q}y^q(1+x)^{-(p+q)}(x+y)^{-(p+q)}\ {}_1Q^{(p,q)}_{r,s}(x,y)\ {}_1Q^{(p,q)}_{n,k}(x,y)\,dxdy \\ = &\int_0^\infty x^{q+s+k+1}(1+x)^{-(p+q)}M^{(p-2s-1,q+2s+1)}_{r-s}(x)\,M^{(p-2k-1,q+2k+1)}_{n-k}(x)\,dx \\ &\times\int_0^\infty t^q(1+t)^{-(p+q)}M^{(p,q)}_s(t)\,M^{(p,q)}_k(t)\,dt \end{aligned}$$

elde edilir. $M^{(p,q)}_r$ polinomlarının (4.3) ortogonallik bağıntısından (5.2) eşitliği elde edilir.

Örneğin, $\left\{ {}_1Q^{(103,0)}_{r,s}(x,y)\right\}\big|^{s=r,r=50}_{s=0,r=0}$ polinom ailesi

$$w_1(x,y) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{103}(x+y)^{-103}$$

ağırlık fonksiyonuna göre sonlu ortogonal polinom ailesidir ve $(r,s) \neq (n,k)$ ve $r,n \leq 50$ $(s = 0,1,..,r$ ve $k = 0,1,..,n)$ için

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x}\right)^{103}(x+y)^{-103}\ {}_1Q^{(103,0)}_{r,s}(x,y)\ {}_1Q^{(103,0)}_{n,k}(x,y)\,dxdy = 0$$

sağlanır.

Bu polinomların ilk birkaçı

$$\begin{aligned}
{}_1Q_{0,0}^{(p,q)}(x,y) &= 1\\
{}_1Q_{1,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-3)\,x-(q+2)\\
{}_1Q_{1,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)\,y-(q+1)\,x\\
{}_1Q_{2,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-5)\,(p-4)\,x^2-2\,(p-4)\,(q+3)\,x+(q+3)\,(q+2)\\
{}_1Q_{2,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-5)\,(p-2)\,xy-(p-2)\,(q+4)\,y\\
&\quad -(p-5)\,(q+1)\,x^2+(q+1)\,(q+4)\,x\\
{}_1Q_{2,2}^{(p,q)}(x,y) &= (q+1)\,(q+2)\,x^2-2\,(p-3)\,(q+2)\,xy+(p-3)\,(p-4)\,y^2\\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

dir.

Lemma 5.1 (5.1) ile verilen tanımda $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{p^2}$ yazılarak $p \to \infty$ için limit alınırsa, (4.9) limit bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to\infty}\left[p^s\ {}_1Q_{r,s}^{(p,q)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p^2}\right)\right] \qquad (5.3)\\
&= \lim_{p\to\infty}\left[M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}\left(\frac{x}{p}\right)x^s M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{px}\right)\right]\\
&= (-1)^r\,(r-s)!s!L_{r-s}^{(q+2s+1)}(x)\,x^s L_s^{(q)}\left(\frac{y}{x}\right)\\
&= (-1)^r\,(r-s)!s!R_{r,s}^{(q,q)}(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $R_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomu (3.14) tanımı ile verilen Laguerre-Laguerre Koornwinder polinomlarını göstermektedir.

Teorem 5.1 (5.1) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için aşağıdaki rekürans bağıntısını gerçekler:

$$\begin{aligned}
&(p-r-s-2)\,(p-2r-1)\ {}_1Q_{r+1,s}^{(p,q)}(x,y) \qquad (5.4)\\
&= (p-2r-2)\,\{(p-2r-1)\,(p-2r-3)\,x\\
&\quad +2\,(r-s)\,(r-s+1)-(p-2s-1)\,(q+2r+2)\}\ {}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\\
&\quad -(r-s)\,(p-2r-3)\,(p+q-r+s)\,(q+r+s+1)\ {}_1Q_{r-1,s}^{(p,q)}(x,y)\,.
\end{aligned}$$

İspat. $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları için bilinen (4.5) rekürans formülünde $r \to r-s$, $p \to p-2s-1$, $q \to q+2s+1$ yazılarak elde edilen eşitliğin her iki tarafı $x^s M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpıldığında polinomun tanımı kullanılarak istenene ulaşılır. ∎

Sonuç 5.1 (5.4) rekürans bağıntısında $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{p^2}$ alındıktan sonra her iki taraf p^{s-2} ile çarpılır ve (5.3) bağıntısı gözönünde bulundurularak $p \to \infty$ için limit alınırsa (3.15) rekürans bağıntısı sağlanır.

Teorem 5.2 (5.1) ile tanımlanan polinom ailesi

$$\begin{aligned} & x^2(x+1)Q_{xx} + 2xy(x+1)Q_{xy} + y^2(x+1)Q_{yy} \\ & -x\left[(p-3)x-(q+2)\right]Q_x - y\left[(p-3)x-(q+2)\right]Q_y \\ = \; & \left[s(q+s+1) - r(p-r-2)x\right]Q \end{aligned} \tag{5.5}$$

ve

$$y(x+y)Q_{yy} + \left[(q+1)x-(p-2)y\right]Q_y + s(p-s-1)Q = 0 \tag{5.6}$$

şeklindeki kısmi türevli denklemleri sağlar.

İspat. İlk olarak polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevi alınırsa sırasıyla

$$M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\,x^{s-1}M_{s-1}^{(p-2,q+1)}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{s(p-s-1)}\frac{\partial}{\partial y}\left[\,{}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \tag{5.7}$$

ve

$$\begin{aligned} & M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\,x^{s-2}M_{s-2}^{(p-4,q+2)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = \; & \frac{1}{s(s-1)(p-s-1)(p-s-2)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\,{}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.8}$$

bağıntıları elde edilir.

Daha sonra polinomun x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde (5.7) uygulanırsa

$$\begin{aligned} & (r-s)(p-r-s-2)\,M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+2s+2)}(x)\,x^s M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = \; & \frac{\partial}{\partial x}\left(\,{}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\,{}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s}{x}\,{}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.9}$$

bağıntısı elde edilir. Polinomun x ve y'ye göre ikinci mertebeden karışık türevinde (5.7) ve (5.8) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+2s+2)}(x)\, x^{s-1} M_{s-1}^{(p-2,q+1)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.10) \\ = & \frac{1}{(r-s)\, s\,(p-r-s-2)(p-s-1)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & \left. +\frac{y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s-1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right] \end{aligned}$$

ifadesi bulunur.

Ayrıca polinomun x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevinde (5.7), (5.8), (5.9) ve (5.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2s+3)}(x)\, x^{s} M_{s}^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.11) \\ = & \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)} \\ & \times\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & +\frac{2y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{2s}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\ & \left. -\frac{2sy}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) + \frac{s(s+1)}{x^2}\, {}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \end{aligned}$$

şeklindeki eşitliğe ulaşılır.

Diğer taraftan (4.7) rekürans bağıntısında $p \to p-2s-1$, $q \to q+2s+1$, $r \to r-s-1$ alarak her iki taraf $x^s M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılıp polinomun tanımı ve (5.9) bağıntısı kullanıldığında

$$\begin{aligned} & M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2s+3)}(x)\, x^{s} M_{s}^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.12) \\ = & \frac{1}{(r-s-1)(p-r-s-3)\, x\,(x+1)} \\ & \times\left\{\frac{(p-2s-3)\,x-(q+2s+2)}{(r-s)(p-r-s-2)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right.\right. \\ & \left.\left. +\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s}{x}\, {}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - {}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Böylece (5.11) ve (5.12) eşitliklerinden (5.5) denklemi bulunur.

(5.6)'yı elde etmek için ise (4.7) rekürans bağıntısında $r \to s-1$, $x \to y/x$ alınıp her iki taraf $M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\, x^s$ ile çarpılarak (5.7) ve (5.8) bağıntıları kullanılır.

■

Sonuç 5.2 (5.5) ve (5.6) diferensiyel denklemlerinde $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{p^2}$ alındıktan sonra p^s ile çarpılarak elde edilen eşitliğin (5.3) limit bağıntısı yardımıyla $p \to \infty$ için limiti alınırsa sırasıyla

$$\begin{gathered} x^2 \tfrac{\partial^2}{\partial x^2} R_{r,s}^{(q,q)} + 2xy \tfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} R_{r,s}^{(q,q)} + y^2 \tfrac{\partial^2}{\partial y^2} R_{r,s}^{(q,q)} + x\,(q+2-x)\,\tfrac{\partial}{\partial x} R_{r,s}^{(q,q)} \\ + y\,(q+2-x)\,\tfrac{\partial}{\partial y} R_{r,s}^{(q,q)} + (rx - s\,(q+s+1))\, R_{r,s}^{(q,q)} = 0 \end{gathered}$$

ve

$$xy \frac{\partial^2}{\partial y^2} R_{r,s}^{(q,q)} + ((q+1)\,x - y)\, \frac{\partial}{\partial y} R_{r,s}^{(q,q)} + s R_{r,s}^{(q,q)} = 0$$

kısmi türevli denklemleri elde edilir ki bu denklemler $R_{r,s}^{(q,q)}(x,y)$ Laguerre-Laguerre Koornwinder polinomları tarafından sağlanır.

Teorem 5.3 ${}_1Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)$ polinom ailesi $q > -1$ ve $q \neq 0,1,2,...$ için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir:

$$\begin{aligned} &\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_1Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)\, \frac{t^{r+s}}{r!s!} \\ &= \frac{2^{-(p+q)} \left(1 - t + \sqrt{(1+t)^2 + 4xt}\right)^{p+q}}{\sqrt{(1+t)^2 + 4xt} \left(1 + t + \sqrt{(1+t)^2 + 4xt}\right)^{q+1}} \\ &\quad \times \frac{\left(1 + yt + \sqrt{(1-yt)^2 - 4xt}\right)^{p+q}}{\sqrt{(1-yt)^2 - 4xt} \left(1 - yt + \sqrt{(1-yt)^2 - 4xt}\right)^{p-1}}. \end{aligned}$$

İspat. (5.1) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$, $p \to p+2s$, $q \to q-2s$ alarak $M_r^{(p-1,q+1)}(x)$ çarpanı için (4.8) eşitliği, $M_s^{(p+2s,q-2s)}\left(\frac{y}{x}\right)$ çarpanı için ise sırasıyla (4.4) bağıntısı,

$$P_r^{(\gamma,\theta)}(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^r P_r^{(-\gamma-\theta-2r-1,\theta)}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

eşitliği ve Jacobi polinomlarının (3.3) doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılırsa istenilen elde edilir. ∎

5.2 ${}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Bir önceki kısma benzer olarak Koornwinder metodunda $\sigma(x) = 1 + x$, $K_{r-s}(x;s)$ polinomları için $(a_1, b_1) = (0, \infty)$ aralığında $\sigma^{2s+1}(x)\, \widetilde{w}_1(x) = x^q (1+x)^{-(p+q-2s-1)}$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)$ polinomları ve $T_s(y)$ polinomları için de $(a_2,b_2)=(0,\infty)$ aralığında $\widetilde{w}_2(y)=y^q(1+y)^{-(p+q)}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $M_s^{(p,q)}(y)$ polinomları seçilirse bu kısımda $\widetilde{w}(x,y)=\widetilde{w}_1(x)\,\widetilde{w}_2\left(\frac{y}{1+x}\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan iki değişkenli sonlu polinom ailesi

$$ {}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)=M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)\,(1+x)^s\,M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \tag{5.13}$$
$$(s=0,1,...,r \quad ; \quad r=0,1,...,N)$$

olarak tanımlanır. Bu polinomlar

$$w_2(x,y)=x^q y^q(1+x)^{-q}(1+x+y)^{-(p+q)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_2=\{(x,y):0<x<\infty,\ 0<y<\infty\}$$

bölgesinde ortogonaldir. Burada $N=maks\{r,n\}$, $p>2N+2$ ve $q>-1$ için ${}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomları

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty x^q(1+x)^{-(p+q)}\left(\frac{y}{1+x}\right)^q\left(1+\frac{y}{1+x}\right)^{-(p+q)} \\ &\qquad\times\ {}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\ {}_2Q_{n,k}^{(p,q)}(x,y)\,dxdy \\ &= \frac{(r-s)!s!\Gamma(p-r-s-1)\Gamma(p-s)\Gamma(q+r-s+1)\Gamma(q+s+1)}{(p-2r-2)(p-2s-1)\Gamma(p+q-r-s-1)\Gamma(p+q-s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}\end{aligned} \tag{5.14}$$

formundaki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomların ilk birkaçı

$$\begin{aligned}
{}_2Q_{0,0}^{(p,q)}(x,y) &= 1\\
{}_2Q_{1,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-3)x-(q+1)\\
{}_2Q_{1,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)y-(q+1)(1+x)\\
{}_2Q_{2,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-5)(p-4)x^2-2(p-4)(q+2)x+(q+2)(q+1)\\
{}_2Q_{2,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-5)(p-2)xy-(p-2)(q+1)y\\
&\quad -(p-5)(q+1)x(1+x)+(q+1)^2(1+x)\\
{}_2Q_{2,2}^{(p,q)}(x,y) &= (p-3)(p-4)y^2-2(p-3)(q+2)y(1+x)\\
&\quad +(q+2)(q+1)(1+x)^2\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Lemma 5.2 (5.13) polinom tanımında $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \left(1+\frac{x}{p}\right)\frac{x-y}{p}$ yerine yazılır ve (4.9) limit bağıntısı gözönünde bulundurularak her iki tarafın $p \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} & \lim_{p\to\infty}\left[\ {}_2Q_{r,s}^{(p,q)}\left(\frac{x}{p},\left(1+\frac{x}{p}\right)\frac{x-y}{p}\right)\right] \qquad (5.15) \\ = & \lim_{p\to\infty}\left[M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}\left(\frac{x}{p}\right)\left(1+\frac{x}{p}\right)^{s} M_s^{(p,q)}\left(\frac{x-y}{p}\right)\right] \\ = & \left(-1\right)^{r}(r-s)!s!L_{r-s}^{(q)}\left(x\right)L_s^{(q)}\left(x-y\right) \\ = & \left(-1\right)^{r}(r-s)!s!\ {}_2P_{r,s}^{(q,q)}\left(x,y\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$ {}_2P_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(x,y\right)=L_{r-s}^{(\alpha)}\left(x\right)L_s^{(\beta)}\left(x-y\right) \qquad (5.16)$$

polinomları $\Lambda=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<x<\infty\}$ bölgesinde $w\left(x,y\right)=y^{\alpha}\left(x-y\right)^{\beta}e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Milovanovic vd. 2020).

Teorem 5.4 (5.13) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için aşağıdaki rekürans bağıntısını gerçekler:

$$\begin{aligned} & (p-r-s-2)(p-2r-1)\ {}_2Q_{r+1,s}^{(p,q)}\left(x,y\right) \qquad (5.17) \\ = & \{(p-2r-2)\left[2\left(r-s\right)_2-(p-2s-1)\left(q+2\left(r-s\right)+1\right)\right] \\ & +x\left(p-2r-3\right)_3\}\ {}_2Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right) \\ & -(r-s)(p-2r-3)(p+q-r-s-1)(q+r-s)\ {}_2Q_{r-1,s}^{(p,q)}\left(x,y\right). \end{aligned}$$

İspat. (4.5) rekürans bağıntısında $r \to r-s$ ve $p \to p-2s-1$ alınıp elde edilen denklem $\left(1+x\right)^{s}M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{1+x}\right)$ ile çarpılırsa ve polinomun tanımı gözönünde bulundurulursa (5.17) bağıntısına ulaşılır. ∎

Sonuç 5.3 (5.17) rekürans bağıntısında $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \left(1+\frac{x}{p}\right)\frac{x-y}{p}$ alınır ve (5.15) bağıntısı kullanılarak $p \to \infty$ için her iki tarafın limiti alınırsa (5.16) ile tanımlanan ${}_2P_{r,s}^{(q,q)}\left(x,y\right)$ polinomları için

$$\begin{aligned} (r+1-s)\ {}_2P_{r+1,s}^{(q,q)}\left(x,y\right) &= \left(q+2\left(r-s\right)+1-x\right)\ {}_2P_{r,s}^{(q,q)}\left(x,y\right) \\ & \quad -\left(q+r-s\right)\ {}_2P_{r-1,s}^{(q,q)}\left(x,y\right) \end{aligned}$$

rekürans bağıntısına ulaşılır.

Teorem 5.5 ${}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} & x(1+x)^2 Q_{xx} + 2xy(1+x) Q_{yx} + xy^2 Q_{yy} \\ & -(1+x)\left[(p-3)x-(q+1)\right] Q_x - y\left[(p-3)x-(q+1)\right] Q_y \\ & +\left\{r(p-r-2)(1+x) - s(p+q-s-1)\right\} Q \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

ve

$$y\left[y+1+x\right] Q_{yy} - \left[(p-2)y-(q+1)(1+x)\right] Q_y + s(p-s-1) Q = 0 \tag{5.19}$$

formundaki kısmi türevli denklemleri sağlar.

İspat. Öncelikle polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinin alınmasıyla sırasıyla

$$M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)(1+x)^{s-1} M_{s-1}^{(p-2,q+1)}\left(\frac{y}{1+x}\right) = \frac{1}{s(p-s-1)}\frac{\partial}{\partial y}\left[{}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \tag{5.20}$$

ve

$$\begin{aligned} & M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)(1+x)^{s-2} M_{s-2}^{(p-4,q+2)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ = & \ \frac{1}{s(s-1)(p-s-1)(p-s-2)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[{}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.21}$$

bağıntıları elde edilir.

Daha sonra polinomun x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde (5.20) uygulanarak

$$\begin{aligned} & (r-s)(p-r-s-2) M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+1)}(x)(1+x)^{s} M_{s}^{(p,q)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ = & \ \frac{\partial}{\partial x}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) + \frac{y}{1+x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s}{1+x}\,{}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.22}$$

yazılır. Polinomun x ve y'ye göre ikinci mertebeden karışık türevinde (5.20) ve (5.21) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+1)}(x)(1+x)^{s-1} M_{s-1}^{(p-2,q+1)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ = & \ \frac{1}{(r-s)s(p-r-s-2)(p-s-1)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & \left. + \frac{y}{1+x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s-1}{1+x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.23}$$

ifadesi bulunur.

Ayrıca polinomun x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevinde (5.20), (5.21), (5.22) ve (5.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2)}(x)\,(1+x)^s\, M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \qquad (5.24)\\ = & \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)} \\ & \times\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\left(\frac{y}{1+x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & +\frac{2y}{1+x}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{2s}{1+x}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\ & \left.-\frac{2sy}{(1+x)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\frac{s(s+1)}{(1+x)^2}\,{}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \end{aligned}$$

şeklindeki eşitliğe ulaşılır.

Diğer taraftan (4.7) rekürans bağıntısında $p\to p-2s-1$, $r\to r-s-1$ alarak her iki taraf $(1+x)^s\, M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{1+x}\right)$ ile çarpılıp, polinomun tanımı ve (5.22) bağıntısı kullanıldığında

$$\begin{aligned} & M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2)}(x)\,(1+x)^s\, M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \qquad (5.25)\\ = & \frac{1}{(r-s-1)(p-r-s-3)\,x\,(x+1)} \\ & \times\left\{\frac{(p-2s-3)\,x-(q+1)}{(r-s)(p-r-s-2)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right.\right. \\ & \left.\left.+\frac{y}{1+x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{s}{1+x}\,{}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\,{}_2Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Böylece (5.24) ve (5.25) eşitliklerinden (5.18) denklemi bulunur.

(5.19)'u elde etmek için ise (4.7) rekürans bağıntısında $r\to s-1$, $x\to\frac{y}{1+x}$ alınıp her iki taraf $M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)\,(1+x)^s$ ile çarpılarak (5.20) ve (5.21) bağıntıları kullanılır.

■

Sonuç 5.4 (5.21) denkleminde $x\to\frac{x}{p}$ ve $y\to\left(1+\frac{x}{p}\right)\frac{x-y}{p}$ alarak (5.15) bağıntısı yardımıyla $p\to\infty$ için her iki tarafın limiti alınırsa (5.16) ile tanımlanan ${}_2P_{r,s}^{(q,q)}(x,y)$ polinomlarının sağladığı

$$\begin{aligned} &(x-y)\,\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_2P_{r,s}^{(q,q)}(x,y)\right)+(x-y-(q+1))\,\tfrac{\partial}{\partial y}\left({}_2P_{r,s}^{(q,q)}(x,y)\right)\\ &+s\,{}_2P_{r,s}^{(q,q)}(x,y)=0\end{aligned}$$

kısmi türevli denklemi elde edilir.

Teorem 5.6 ${}_2Q_{r+s,s}^{(p+2s,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned}&\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_2Q_{r+s,s}^{(p+2s,q)}(x,y)\,\frac{t^{r+s}}{r!s!} \\ =\;& \frac{2^q\left(1-t+F_1(x,t)\right)^{p+q-1}\left(1+t+F_1(x,t)\right)^{-q}}{F_1(x,t)F_2(x,y,t)\left(1-t\left(1+x+y\right)+F_2(x,y,t)\right)^{p-1}} \\ &\times\frac{1}{\left(1+t\left(1+x+y\right)+F_2(x,y,t)\right)^{q}}\end{aligned} \tag{5.26}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Burada

$$F_1(x,t)=\sqrt{\left(1+t\right)^2+4xt}$$

ve

$$F_2(x,y,t)=\sqrt{1+2t\left(1+x-y\right)+t^2\left(1+x+y\right)^2}$$

dir.

İspat. (5.13) polinom ailesinin tanımında $r\to r+s$, $p\to p+2s$ alınarak $M_r^{(p-1,q)}(x)$ çarpanı için (4.8) eşitliği ve $M_s^{(p+2s,q)}\left(\frac{y}{1+x}\right)$ çarpanı için sırasıyla (4.4) eşitliği ve Jacobi polinomlarının (3.3) doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılırsa ispat tamamlanır. ∎

Sonuç 5.5 (5.26) doğurucu fonksiyon bağıntısında $x\to\frac{x}{p}$ ve $y\to\left(1+\frac{x}{p}\right)\frac{x-y}{p}$ yazılarak eşitliğin her iki tarafında $p\to\infty$ için limit alınırsa (5.15) bağıntısından ${}_2P_{r+s,s}^{(q,q)}(x,y)$ için

$$\sum_{r,s=0}^{\infty}\left(-1\right)^{r+s}\,{}_2P_{r+s,s}^{(q,q)}(x,y)\,t^{r+s}=2^{-q}\left(1+t\right)^{-2(q+1)}\exp\left(\frac{t\left(2x-y\right)}{1+t}\right)$$

bağıntısına ulaşılır.

5.3 ${}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $N_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_3(x,y)=y^{-p}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y}\right)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_3 = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$ {}_3Q_{r,s}^{(p)}(x, y) = N_{r-s}^{(p-2s-1)}(x)\, x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.27}$$
$$(s = 0, 1, ..., r \quad ; \quad r = 0, 1, ..., N)$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r, n\}$, $p > 2N+2$ için ${}_3Q_{r,s}^{(p)}(x, y)$ polinomları

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty y^{-p} e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y}\right)}\ {}_3Q_{r,s}^{(p)}(x, y)\ {}_3Q_{n,k}^{(p)}(x, y)\, dxdy \\ = & \frac{(r-s)!s!\Gamma(p-s)\Gamma(p-r-s-1)}{(p-2s-1)(p-2r-2)} \delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned} \tag{5.28}$$

formundaki ortogonallik bağıntısına sahiptir.
Bu polinomların ilk birkaçı

$$\begin{aligned} {}_3Q_{0,0}^{(p)}(x, y) &= 1 \\ {}_3Q_{1,0}^{(p)}(x, y) &= (p-3)x - 1 \\ {}_3Q_{1,1}^{(p)}(x, y) &= (p-2)y - x \\ {}_3Q_{2,0}^{(p)}(x, y) &= (p-5)(p-4)x^2 - 2(p-4)x + 1 \\ {}_3Q_{2,1}^{(p)}(x, y) &= (p-5)(p-2)xy - (p-2)y - (p-5)x^2 + x \\ {}_3Q_{2,2}^{(p)}(x, y) &= (p-3)(p-4)y^2 - 2(p-3)xy + x^2 \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 5.7 (5.27) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & (p-r-s-2)(p-2r-1)\ {}_3Q_{r+1,s}^{(p)}(x, y) \\ & +(r-s)(p-2r-3)\ {}_3Q_{r-1,s}^{(p)}(x, y) \\ = & \left[x(p-2r-3)_3 - (p-2s-1)(p-2r-2)\right]\ {}_3Q_{r,s}^{(p)}(x, y), \end{aligned} \tag{5.29}$$

$r \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
&(s-1)(p-s-2)\, y^2 \ {}_3Q^{(p-4)}_{r-2,s-2}(x,y) + \ {}_3Q^{(p)}_{r,s}(x,y) \qquad (5.30)\\
= \ &[(p-2)\, y - x] \ {}_3Q^{(p-2)}_{r-1,s-1}(x,y),
\end{aligned}
$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$
\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left[\ {}_3Q^{(p)}_{r,s}(x,y)\right] = (-1)^j (-s)_j (p-s-j)_j \ {}_3Q^{(p-2j)}_{r-j,s-j}(x,y) \qquad (5.31)
$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. $N_r^{(p)}(x)$ polinomları için bilinen (4.13) rekürans formülünde $r \to r-s$, $p \to p-2s-1$ alınır ve her iki taraf $x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılırsa polinomun tanımı kullanılarak (5.29) bağıntısı görülür.
(5.30)'u ispatlamak için $N_r^{(p)}(x)$ polinomlarının bilinen (4.15) rekürans bağıntısında $r \to s-1$, $p \to p-2$, $x \to \frac{y}{x}$ alınır ve her iki taraf $N_{r-s}^{(p-2s-1)}(x)\, x^s$ ile çarpıldıktan sonra polinomun tanımı kullanılır.
(4.14) eşitliği uygulanarak polinomun y'ye göre j kez kısmi türevi alındıktan sonra (5.27) tanımı kullanılırsa (5.31) bağıntısına ulaşılır. ■

Teorem 5.8 (5.27) ile tanımlanan polinom ailesi

$$
\begin{aligned}
&x^3 Q_{xx} + 2x^2 y Q_{xy} + x y^2 Q_{yy} - x\left((p-3)\, x - 1\right) Q_x \qquad (5.32)\\
&-y\left((p-3)\, x - 1\right) Q_y = (s - r(p-r-2))\, Q
\end{aligned}
$$

ve

$$
y^2 Q_{yy} - [(p-2)\, y - x]\, Q_y + s(p-s-1)\, Q = 0 \qquad (5.33)
$$

şeklindeki kısmi türevli denklemleri sağlar.

İspat. Öncelikle polinomun y değişkenine göre birinci mertebeden kısmi türevinden elde edilen ifade, polinomun x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde yerine yazılarak

$$
\begin{aligned}
&(r-s)(p-r-s-2)\, N^{(p-2s-3)}_{r-s-1}(x)\, x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.34)\\
= \ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\ {}_3Q^{(p)}_{r,s}(x,y)\right) + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ {}_3Q^{(p)}_{r,s}(x,y)\right) - \frac{s}{x}\ {}_3Q^{(p)}_{r,s}(x,y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Polinomun x ve y değişkenine göre ikinci mertebeden karışık türevinde, polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevi alınarak elde edilen eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} & N_{r-s-1}^{(p-2s-3)}(x)\, x^{s-1} N_{s-1}^{(p-2)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = \; & \frac{1}{(r-s)\, s\,(p-r-s-2)\,(p-s-1)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right. \\ & \left. +\frac{y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)-\frac{s-1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.35}$$

ifadesi bulunur.

Ayrıca polinomun x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevinde (5.34), (5.35) ve polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden elde edilen bağıntılar kullanılırsa

$$\begin{aligned} & N_{r-s-2}^{(p-2s-5)}(x)\, x^{s} N_{s}^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = \; & \frac{1}{(r-s)\,(r-s-1)\,(p-r-s-2)\,(p-r-s-3)} \\ & \times\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right. \\ & +\frac{2y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)-\frac{2s}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right) \\ & \left. -\frac{2sy}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\frac{s\,(s+1)}{x^2}\;{}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.36}$$

şeklindeki eşitliğe ulaşılır.

Diğer taraftan (4.15) rekürans bağıntısında $p \to p-2s-3$, $r \to r-s-1$ alınarak her iki taraf $x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılıp polinomun tanımı ve (5.34) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & N_{r-s-2}^{(p-2s-5)}(x)\, x^{s} N_{s}^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = \; & \frac{1}{(r-s)\,(r-s-1)\,(p-r-s-2)\,(p-r-s-3)\, x^2} \\ & \times\left\{((p-2s-3)\,x-1)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right]\right. \\ & \left. +\left(s\,(s+1)-r\,(p-r-2)+\frac{s}{x}\right)\;{}_3Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right\} \end{aligned} \tag{5.37}$$

eşitliği elde edilir.

Böylece (5.36) ve (5.37) eşitliklerinden (5.32) denklemi bulunur.

(5.33)'ü elde etmek için ise (5.30)'da (5.31) bağıntısı kullanılır. ■

Teorem 5.9 ${}_3Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)$ polinom ailesi aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir:

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_3Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \frac{2^{1-p}\left[1+\sqrt{1+4xt}\right]^{p-1}}{(1-yt)^p\sqrt{1+4xt}} \times \exp\left(\frac{1-\sqrt{1+4xt}}{2x}-\frac{xt}{1-yt}\right).$$

İspat. (5.27) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$, $p \to p+2s$ alınırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_3Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} N_r^{(p-1)}(x)\frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty} N_s^{(p+2s)}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{(xt)^s}{s!}$$

eşitliği elde edilir. (4.12) bağıntısı yardımıyla sağ taraftaki birinci çarpan için

$$N_r^{(p-1)}(x) = r!x^r L_r^{(p-2r-2)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_3Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} L_r^{(p-2r-2)}\left(\frac{1}{x}\right)(xt)^r \times \sum_{s=0}^{\infty} N_s^{(p+2s)}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{(xt)^s}{s!} \tag{5.38}$$

bulunur. Diğer taraftan Laguerre polinomları için bilinen (3.6) doğurucu fonksiyon bağıntısı $\gamma \to p-2$, $\theta \to -2$, $x \to \frac{1}{x}$ ve $t \to xt$ alınarak yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{\infty} L_r^{((p-2)-2r)}\left(\frac{1}{x}\right)(xt)^r = \frac{(1+v)^{p-1}}{1+2v}e^{-\frac{v}{x}} \\ v = \frac{xt}{1+v},\ v(0)=0 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan v çözülerse

$$v = \frac{-1+\sqrt{1+4xt}}{2}$$

şeklinde bulunur. Böylece (4.16) bağıntısı da kullanılarak bulunanlar (5.38)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_3Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} \\ &= \frac{(1+v)^{p-1}}{1+2v}e^{-\frac{v}{x}}(1-yt)^{-p}e^{-\frac{xt}{1-yt}} \\ &= \frac{2^{1-p}\left[1+\sqrt{1+4xt}\right]^{p-1}}{\sqrt{1+4xt}}(1-yt)^{-p}\exp\left(\frac{1-\sqrt{1+4xt}}{2x}-\frac{xt}{1-yt}\right) \end{aligned}$$

formundaki doğurucu fonksiyon bağıntısına ulaşılır. ■

5.4 ${}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $N_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_4(x,y) = x^{p+q} y^{-p} e^{-\frac{x}{y}} (x+1)^{-(p+q)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_4 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$\begin{gathered} {}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\, x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ (s = 0,1,...,r \quad ; \quad r = 0,1,...,N) \end{gathered} \tag{5.39}$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p > 2N+2$ ve $q > -2$ için ${}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomları

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty x^{p+q} y^{-p} e^{-\frac{x}{y}} (x+1)^{-(p+q)}\ {}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\ {}_4Q_{n,k}^{(p,q)}(x,y)\, dxdy \\ = &\ \frac{(r-s)!s!\Gamma(p-s)\Gamma(p-r-s-1)\Gamma(q+r+s+2)}{(p-2s-1)(p-2r-2)\Gamma(p+q-r+s)} \delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned} \tag{5.40}$$

biçimindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned} {}_4Q_{0,0}^{(p,q)}(x,y) &= 1 \\ {}_4Q_{1,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-3)x - (q+2) \\ {}_4Q_{1,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)y - x \\ {}_4Q_{2,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-5)(p-4)x^2 - 2(p-4)(q+3)x + (q+3)(q+2) \\ {}_4Q_{2,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)(p-5)xy - (p-5)x^2 \\ &\quad - (p-2)(q+4)y + (q+4)x \\ {}_4Q_{2,2}^{(p,q)}(x,y) &= x^2 - 2(p-3)xy + (p-3)(p-4)y^2 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.10 (5.39) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & (p-r-s-2)(p-2r-1) \ {}_4Q_{r+1,s}^{(p,q)}(x,y) \\ = \ & (p-2r-2)\{(p-2r-1)(p-2r-3)x \\ & +2(r-s)(r-s+1)-(p-2s-1)(q+2r+2)\} \ {}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \\ & -(r-s)(p-2r-3)(p+q-r+s)(q+r+s+1) \ {}_4Q_{r-1,s}^{(p,q)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.41}$$

ve

$$\begin{aligned} & {}_4Q_{r+1,s+1}^{(p+2,q-2)}(x,y)-(py-x) \ {}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \\ & +s(p-s-1)y^2 \ {}_4Q_{r-1,s-1}^{(p-2,q+2)}(x,y) = 0, \end{aligned} \tag{5.42}$$

$j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left[{}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] = (-1)^j(-s)_j(p-s-j)_j \ {}_4Q_{r-j,s-j}^{(p-2j,q+2j)}(x,y) \tag{5.43}$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (5.41)'i ispatlamak için ilk olarak $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomu için bilinen (4.5) rekürans bağıntısında $r \to r-s$, $p \to p-2s-1$, $q \to q+2s+1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & (p-r-s-2)(p-2r-1) M_{r-s+1}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x) \\ = \ & (p-2r-2)\{(p-2r-1)(p-2r-3)x \\ & +[2(r-s)(r-s+1)-(p-2s-1)(q+2r+2)]\} M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x) \\ & -(r-s)(p-2r-3)(p+q-r+s)(q+r+s+1) M_{r-s-1}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & (p-r-s-2)(p-2r-1) M_{r-s+1}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x) \, x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = \ & (p-2r-2)\{(p-2r-1)(p-2r-3)x \\ & +[2(r-s)(r-s+1)-(p-2s-1)(q+2r+2)]\} \\ & \times M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x) \, x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ & -(r-s)(p-2r-3)(p+q-r+s)(q+r+s+1) \\ & \times M_{r-s-1}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x) \, x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

ve polinomun tanımı kullanılırsa istenilen bağıntıya ulaşılır.

(5.42)'yi ispat etmek için $N_r^{(p)}(x)$ polinomları için bilinen (4.15) rekürans bağıntısında $r \to s-1$, $p \to p-2$ ve $x \to \frac{y}{x}$ alarak her iki taraf $M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\,x^s$ ile çarpılır ve polinomun tanımı dikkate alınırsa ispat tamamlanır.

Diğer taraftan (4.14) eşitliği uygulanarak polinomun y değişkenine göre j kez kısmi türevi alınır ve (5.39) tanımı kullanılırsa (5.43) bağıntısı elde edilir. ■

Teorem 5.11 (5.39) ile tanımlanan polinom ailesi

$$\begin{aligned}
&x^2(x+1)\,Q_{xx} + 2xy\,(x+1)\,Q_{xy} + y^2(x+1)\,Q_{yy} \\
&+x\,[q+2-(p-3)\,x]\,Q_x + y\,[q+2-(p-3)\,x]\,Q_y \\
&+[r\,(p-r-2)\,x - s\,(q+s+1)]\,Q = 0
\end{aligned} \tag{5.44}$$

ve

$$y^2 Q_{yy} - [(p-2)\,y - x]\,Q_y + s\,(p-s-1)\,Q = 0 \tag{5.45}$$

biçimindeki kısmi türevli denklemleri gerçekler.

İspat. İlk olarak polinomun y değişkenine göre birinci mertebeden kısmi türevinden elde edilen ifade, x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde gözönünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
&M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+2s+2)}(x)\,x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\
= \;& \frac{1}{(r-s)\,(p-r-s-2)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\
&\left.+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s}{x}\,{}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right]
\end{aligned} \tag{5.46}$$

bağıntısı elde edilir. Daha sonra polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınarak elde edilen bağıntılar polinomun karışık türevinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+2s+2)}(x)\,x^{s-1} N_{s-1}^{(p-2)}\left(\frac{y}{x}\right) \\
= \;& \frac{1}{(r-s)\,s\,(p-s-1)\,(p-r-s-2)}\left[\frac{\partial}{\partial y \partial x}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\
&\left.+\frac{y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s-1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

Ayrıca polinomun x'e göre ikinci mertebeden kısmi türevinde elde edilen eşitlikler yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
&M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2s+3)}(x)\,x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.47)\\
= \;& \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right.\\
&+\frac{2y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{2s}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\\
&\left.-\frac{2sy}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\frac{s(s+1)}{x^2}\,{}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right]
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır.

Diğer taraftan (4.7) rekürans bağıntısında $r\to r-s-1$, $p\to p-2s-1$, $q\to q+2s+1$ alınarak her iki taraf $x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılıp, polinomun tanımı ve (5.46) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2s+3)}(x)\,x^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.48)\\
= \;& \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)\,x(x+1)}\\
&\times\left[\{(p-2s-3)x-(q+2s+2)\}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right.\\
&+\frac{y}{x}\{(p-2s-3)x-(q+2s+2)\}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\\
&\left.-\left(\frac{s}{x}\{(p-2s-3)x-(q+2s+2)\}+(r-s)(p-r-s-2)\right){}_4Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right]
\end{aligned}$$

şeklindeki eşitlik elde edilir.

Böylece (5.47) ve (5.48) eşitliklerinden (5.44) denklemine ulaşılır.

(5.45)'i elde etmek için ise (4.15) rekürans bağıntısında $r\to s-1$, $p\to p-2$, $x\to y/x$ alınarak her iki taraf $M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\,x^s$ ile çarpılır ve polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türev bağıntıları kullanılır. ∎

Teorem 5.12 ${}_4Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)$ polinom ailesi aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir:

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_4Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!}$$
$$= \frac{2^{1-p}\left[1-t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right]^{p+q}(1-yt)^{-p}\exp\left(-\frac{xt}{1-yt}\right)}{\sqrt{(1+t)^2+4xt}\left[1+t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right]^{q+1}}.$$

İspat. (5.39) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$, $p \to p+2s$, $q \to q-2s$ alarak

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_4Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} M_r^{(p-1,q+1)}(x)\frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty} N_s^{(p+2s)}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{(xt)^s}{s!}$$

yazılır. Burada $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $N_r^{(p+2r)}(x)$ polinomları için bilinen (4.8) ve (4.16) doğurucu fonksiyon bağıntıları kullanılırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_4Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \frac{2^{1-p}\left[1-t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right]^{p+q}}{\sqrt{(1+t)^2+4xt}\left[1+t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right]^{q+1}} \times (1-yt)^{-p}\exp\left(\frac{-xt}{1-yt}\right)$$

formundaki doğurucu fonksiyon bağıntısına ulaşılır. ■

5.5 ${}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $N_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_5(x,y) = x^q(1+x)^{-(p+q)}\left(\frac{y}{1+x}\right)^{-p}\exp\left(-\frac{1+x}{y}\right)$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_5 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$ {}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)(1+x)^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \qquad (5.49)$$
$$(s = 0,1,...,r \quad ; \quad r = 0,1,...,N)$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p > 2N+2$ ve $q > -1$ için ${}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty x^q (1+x)^{-(p+q)} \left(\frac{y}{1+x}\right)^{-p} \exp\left(-\frac{1+x}{y}\right) \\ & \times {}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \; {}_5Q_{n,k}^{(p,q)}(x,y)\, dydx \\ = & \frac{(r-s)!s!\Gamma(p-r-s-1)\Gamma(p-s)\Gamma(q+r-s+1)}{(p-2r-2)(p-2s-1)\Gamma(p+q-r-s-1)}\delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned} \tag{5.50}$$

biçimindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned} {}_5Q_{0,0}^{(p,q)}(x,y) &= 1 \\ {}_5Q_{1,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-3)x-(q+1) \\ {}_5Q_{1,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)y-(1+x) \\ {}_5Q_{2,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-5)(p-4)x^2-2(p-4)(q+2)x+(q+2)(q+1) \\ {}_5Q_{2,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)(p-5)xy-(p-5)x(1+x) \\ & \quad -(p-2)(q+1)y+(q+1)(1+x) \\ {}_5Q_{2,2}^{(p,q)}(x,y) &= (p-4)(p-3)y^2-2(p-3)y(1+x)+(1+x)^2 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.13 (5.49) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & (p-r-s-2)(p-2r-1)\; {}_5Q_{r+1,s}^{(p,q)}(x,y) \\ & +(r-s)(p-2r-3)(p+q-r-s-1)(q+r-s)\; {}_5Q_{r-1,s}^{(p,q)}(x,y) \\ = & (p-2r-2)\{(p-2r-3)(p-2r-1)x+2(r-s)(r-s+1) \\ & -(p-2s-1)(q+2(r-s)+1)\}\; {}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.51}$$

ve

$${}_5Q_{r+1,s+1}^{(p+2,q)}(x,y)+s(p-s-1)y^2\; {}_5Q_{r-1,s-1}^{(p-2,q)}(x,y)=(py-x-1)\; {}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y), \tag{5.52}$$

$j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left[\ {}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] = (-1)^j (-s)_j (p-s-j)_j \ {}_5Q_{r-j,s-j}^{(p-2j,q)}(x,y) \tag{5.53}$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (5.51)'i göstermek için $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları için bilinen (4.5) rekürans bağıntısında $r \to r-s$, $p \to p-2s-1$ alınır ve elde edilen denklemin her iki tarafı $(1+x)^s N_s^{(p)}\left(\frac{y}{1+x}\right)$ ile çarpılarak polinomun tanımı kullanılır.
$N_r^{(p)}(x)$ polinomları için bilinen (4.15) rekürans bağıntısında $r \to s-1$, $p \to p-2$, $x \to \frac{y}{1+x}$ alınır ve elde edilen denklemin her iki tarafı $M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)(1+x)^s$ ile çarpılarak polinomun tanımı kullanılırsa (5.52)'ye ulaşılır.
(4.14) bağıntısı uygulanarak polinomun y değişkenine göre j kez kısmi türevi alındıktan sonra (5.49) tanımı kullanılırsa (5.53) elde edilir. ■

Teorem 5.14 ${}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} & x(x+1)^2 Q_{xx} + 2xy(x+1)Q_{yx} + xy^2 Q_{yy} \\ & -(x+1)\left[(p-3)x-(q+1)\right]Q_x - y\left[(p-3)x-(q+1)\right]Q_y \\ & +\left\{r(p-r-2)(x+1) - s(p+q-s-1)\right\}Q = 0 \end{aligned} \tag{5.54}$$

ve

$$y^2 Q_{yy} - \left[(p-2)y-(x+1)\right]Q_y + s(p-s-1)Q = 0 \tag{5.55}$$

formundaki kısmi türevli denklemleri sağlar.

İspat. İlk olarak polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} & M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)(1+x)^{s-1} N_{s-1}^{(p-2)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ = \ & \frac{1}{s(p-s-1)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ {}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \end{aligned} \tag{5.56}$$

ve

$$\begin{aligned} & M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)(1+x)^{s-2} N_{s-2}^{(p-4)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ = \ & \frac{1}{s(s-1)(p-s-1)(p-s-2)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ {}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \end{aligned} \tag{5.57}$$

bağıntıları elde edilir.

İkinci olarak polinomun x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde (5.56) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+1)}(x)(1+x)^{s} N_{s}^{(p)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ = & \frac{1}{(r-s)(p-r-s-2)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & \left.+\frac{y}{1+x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{s}{1+x}\,{}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.58}$$

bağıntısı ve polinomun x ve y değişkenlerine göre karışık türevinde (5.56) ve (5.57) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+1)}(x)(1+x)^{s-1} N_{s-1}^{(p-2)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ = & \frac{1}{(r-s)s(p-s-1)(p-r-s-2)}\left[\frac{\partial^{2}}{\partial y\partial x}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & \left.+\frac{y}{1+x}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{s-1}{1+x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.59}$$

eşitliği bulunur.

Ayrıca polinomun x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevinde (5.56), (5.57), (5.58), (5.59) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2)}(x)(1+x)^{s} N_{s}^{(p)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ = & \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)} \\ & \left[\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\frac{2y}{1+x}\frac{\partial^{2}}{\partial y\partial x}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & +\left(\frac{y}{1+x}\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{2s}{1+x}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\ & \left.-\frac{2sy}{(1+x)^{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\frac{s(s+1)}{(1+x)^{2}}\,{}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.60}$$

bağıntısına ulaşılır.

Diğer taraftan (4.7) rekürans bağıntısında $r \to r-s-1$, $p \to p-2s-1$ alındıktan sonra her iki taraf $(1+x)^{s} N_{s}^{(p)}\left(\frac{y}{1+x}\right)$ ile çarpılıp polinomun tanımı ve (5.58) bağıntısı kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2)}(x)\,(1+x)^{s}\,N_{s}^{(p)}\left(\frac{y}{1+x}\right) \qquad (5.61)\\
= & \frac{1}{(r-s)\,(r-s-1)\,(p-r-s-2)\,(p-r-s-3)\,x\,(x+1)}\\
& \times\Bigg\{[(p-2s-3)\,x-(q+1)]\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\,{}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\\
& +\frac{y}{1+x}\,[(p-2s-3)\,x-(q+1)]\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\,{}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\\
& -\Bigg(\frac{s}{1+x}\,[(p-2s-3)\,x-(q+1)]\\
& +(r-s)\,(p-r-s-2)\Bigg)\,{}_{5}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\Bigg\}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (5.60) ve (5.61) eşitliklerinden (5.54) kısmi türevli denklemi bulunur.

(5.55)'i elde etmek için (4.15) rekürans bağıntısında $r\to s-1$, $p\to p-2$, $x\to y/(1+x)$ alınıp her iki taraf $M_{r-s}^{(p-2s-1,q)}(x)\,(1+x)^{s}$ ile çarpılır ve (5.56) ve (5.57) bağıntıları kullanılır. ■

Teorem 5.15 ${}_{5}Q_{r+s,s}^{(p+2s,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty}{}_{5}Q_{r+s,s}^{(p+2s,q)}(x,y)\,\frac{t^{r+s}}{r!s!}=\frac{e^{\frac{-t(1+x)}{1-yt}}\,(1-yt)^{-p}\left[1-t+\sqrt{(1+t)^{2}+4xt}\right]^{p+q-1}}{2^{p-1}\sqrt{(1+t)^{2}+4xt}\left[1+t+\sqrt{(1+t)^{2}+4xt}\right]^{q}}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat. (5.49) polinom ailesinin tanımında $r\to r+s$, $p\to p+2s$ alarak (4.8) ve (4.16) doğurucu fonksiyon bağıntıları kullanılırsa istenilen bağıntı elde edilir. ■

5.6 ${}_{6}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $N_{r}^{(p)}(x)$ ve $M_{r}^{(p,q)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_{6}(x,y)=e^{-\frac{1}{x}}y^{q}\,(x+y)^{-(p+q)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_{6}=\{(x,y):0<x<\infty,\ 0<y<\infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$ {}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = N_{r-s}^{(p-2s-1)}(x)\, x^s M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.62)$$
$$(s=0,1,...,r \quad ; \quad r=0,1,...,N)$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p > 2N+2$ ve $q > -1$ için ${}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} y^q (x+y)^{-(p+q)}\ {}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\ {}_6Q_{n,k}^{(p,q)}(x,y)\, dydx \qquad (5.63) \\ = & \frac{(r-s)!s!\Gamma(p-s)\Gamma(p-r-s-1)\Gamma(q+s+1)}{(p-2r-2)(p-2s-1)\Gamma(p+q-s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned}$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned} {}_6Q_{0,0}^{(p,q)}(x,y) &= 1 \\ {}_6Q_{1,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-3)x-1 \\ {}_6Q_{1,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)y-(q+1)x \\ {}_6Q_{2,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-5)(p-4)x^2-2(p-4)x+1 \\ {}_6Q_{2,1}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)(p-5)xy-(p-5)(q+1)x^2 \\ & \quad -(p-2)y+(q+1)x \\ {}_6Q_{2,2}^{(p,q)}(x,y) &= (p-4)(p-3)y^2-2(p-3)(q+2)xy \\ & \quad +(q+2)(q+1)x^2 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 5.16 (5.62) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & (p-2r-1)(p-r-s-2)\ {}_6Q_{r+1,s}^{(p,q)}(x,y) \qquad (5.64) \\ = & (p-2r-2)\left[(p-2r-1)(p-2r-3)x-(p-2s-1)\right]\ {}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \\ & -(r-s)(p-2r-3)\ {}_6Q_{r-1,s}^{(p,q)}(x,y), \end{aligned}$$

$r \geq 2$ için

$$\begin{aligned} & (s-1)(p-s-2)y(y+x)\ {}_6Q_{r-2,s-2}^{(p-4,q+2)}(x,y) + {}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \qquad (5.65) \\ = & \left[(p-2)y-(q+1)x\right]\ {}_6Q_{r-1,s-1}^{(p-2,q+1)}(x,y) \end{aligned}$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)\right) = \left(-1\right)^j \left(-s\right)_j \left(p-s-j\right)_j \; {}_6Q_{r-j,s-j}^{(p-2j,q+j)}\left(x,y\right) \tag{5.66}$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (4.13) rekürans bağıntısında $r \to r-s$, $p \to p-2s-1$ yazılarak elde edilen denklem $x^s M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılır ve polinomun tanımı kullanılırsa (5.64)'e ulaşılır. (5.65)'i elde etmek için (4.7) rekürans bağıntısında $r \to s-1$, $x \to \frac{y}{x}$ yazılarak elde edilen denklemin her iki tarafı $N_{r-s}^{(p-2s-1)}\left(x\right)x^s$ ile çarpılır. Böylece polinomun tanımı kullanılarak (5.65) bağıntısı görülür.
(4.6) eşitliği uygulanarak polinomun y'ye göre j kez kısmi türevi alınarak (5.62) tanımı kullanılırsa (5.66) elde edilir. ■

Teorem 5.17 (5.62) ile tanımlanan polinom ailesi

$$\begin{aligned} x^3Q_{xx} + 2x^2yQ_{xy} + xy^2Q_{yy} - x\left(\left(p-3\right)x-1\right)Q_x \\ -y\left(\left(p-3\right)x-1\right)Q_y = \left(s-r\left(p-r-2\right)x\right)Q \end{aligned} \tag{5.67}$$

ve

$$y\left(y+x\right)Q_{yy} - \left[\left(p-2\right)y - \left(q+1\right)x\right]Q_y + s\left(p-s-1\right)Q = 0 \tag{5.68}$$

şeklindeki kısmi türevli denklemleri sağlar.

İspat. İlk olarak polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$N_{r-s}^{(p-2s-1)}\left(x\right)x^{s-1}M_{s-1}^{(p-2,q+1)}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{s\left(p-s-1\right)}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)\right) \tag{5.69}$$

ve

$$\begin{aligned} & N_{r-s}^{(p-2s-1)}\left(x\right)x^{s-2}M_{s-2}^{(p-4,q+2)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = \; & \frac{1}{s\left(s-1\right)\left(p-s-1\right)\left(p-s-2\right)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)\right) \end{aligned} \tag{5.70}$$

bağıntıları elde edilir.

İkinci olarak polinomun x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde (5.69) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} N_{r-s-1}^{(p-2s-3)}\left(x\right)x^sM_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{1}{\left(r-s\right)\left(p-r-s-2\right)} \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)\right) + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)\right) - \frac{s}{x}\, {}_6Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)\right] \end{aligned} \tag{5.71}$$

bağıntısı, polinomun x ve y değişkenlerine göre karışık türevinde (5.69) ve (5.70) eşitlikleri kullanılarak da

$$\begin{aligned} & N_{r-s-1}^{(p-2s-3)}(x)\, x^{s-1} M_{s-1}^{(p-2,q+1)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = & \frac{1}{(r-s)\, s\, (p-s-1)(p-r-s-2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \right. \\ & \left. + \frac{y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s-1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \right] \end{aligned} \tag{5.72}$$

eşitliği bulunur.

Ayrıca polinomun x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevinde (5.69), (5.70), (5.71) ve (5.72) eşitlikleri yerine yazılarak

$$\begin{aligned} & N_{r-s-2}^{(p-2s-5)}(x)\, x^{s} M_{s}^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = & \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)} \\ & \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) + \frac{2y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \right. \\ & + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{2s}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\ & \left. - \frac{2sy}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) + \frac{s(s+1)}{x^2}\, {}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \right] \end{aligned} \tag{5.73}$$

bağıntısına ulaşılır.

Diğer taraftan (4.15) rekürans bağıntısında $r \to r-s-1$, $p \to p-2s-3$ alındıktan sonra her iki taraf $x^s M_s^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılıp polinomun tanımı ve (5.71) bağıntısı kullanıldığında

$$\begin{aligned} & N_{r-s-2}^{(p-2s-5)}(x)\, x^{s} M_{s}^{(p,q)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = & \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)\, x^2} \\ & \times \left\{ ((p-2s-3)\, x-1) \left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \right. \right. \\ & \left. + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) - \frac{s}{x}\, {}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \right] \\ & \left. - (r-s)(p-r-s-2)\ {}_6Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \right\} \end{aligned} \tag{5.74}$$

şeklindeki eşitlik elde edilir. Böylece (5.73) ve (5.74) eşitliklerinden (5.67) kısmi türevli denklemi bulunur.

(4.7) rekürans bağıntısında $r \to s-1$, $x \to y/x$ yazılıp her iki taraf $N_{r-s}^{(p-2s-1)}(x)\,x^s$ ile çarpıldıktan sonra polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türev bağıntıları ile polinomun tanımı kullanılırsa (5.68) elde edilir. ∎

Teorem 5.18 ${}_6Q_{r+s,s}^{(p+2s,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_6Q_{r+s,s}^{(p+2s,q)}(x,y)\,\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \exp\left(\frac{1-\sqrt{1+4xt}}{2x}\right) \times \frac{2^q\left[1-t(x+y)+F_1(x,y,t)\right]^{1-p}\left(1+\sqrt{1+4xt}\right)^{p-1}}{F_1(x,y,t)\left[1+t(x+y)+F_1(x,y,t)\right]^q\sqrt{1+4xt}} \tag{5.75}$$

biçimindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Burada

$$F_1(x,y,t) = \sqrt{1+2t(x-y)+t^2(x+y)^2}$$

dir.

İspat. (5.75) ifadesini elde etmek için öncelikle (5.62) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$, $p \to p+2s$ alınır ve (4.4) bağıntısı yardımıyla elde edilen eşitliğin sağ tarafındaki ikinci çarpan için

$$M_s^{(p+2s,q)}\left(\frac{y}{x}\right) = (-1)^s\, s!\left(1+\frac{y}{x}\right)^s P_s^{(q,p-1)}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_6Q_{r+s,s}^{(p+2s,q)}(x,y)\,\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} N_r^{(p-1)}(x)\,\frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(q,p-1)}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\left[-t(x+y)\right]^s$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.12) bağıntısında

$$N_r^{(p-1)}(x) = r!x^r L_r^{(p-2r-2)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

olduğu göz önünde bulundurularak $L_r^{(\gamma+\theta r)}(x)$ polinomları için bilinen (3.6) doğurucu fonksiyon bağıntısında $\gamma \to p-2$, $\theta \to -2$, $x \to \frac{1}{x}$ ve $t \to xt$ alınırsa ve $P_r^{(\gamma,\theta)}(x)$ polinomları için bilinen (3.3) doğurucu fonksiyon bağıntısında da $r \to s$,

$\gamma \to q$, $\theta \to p-1$, $x \to \frac{x-y}{x+y}$ ve $t \to -t\,(x+y)$ koyulursa eşitlik

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_6Q_{r+s,s}^{(p+2s,q)}\,(x,y)\,\frac{t^{r+s}}{r!s!} \\
= \; & \frac{(1+v)^{p-1}\exp(-v/x)}{1+2v}\frac{2^{p+q-1}}{\sqrt{1+2t\,(x-y)+t^2\,(x+y)^2}} \\
& \times \frac{\left[1-t\,(x+y)+\sqrt{1+2t\,(x-y)+t^2\,(x+y)^2}\right]^{1-p}}{\left[1+t\,(x+y)+\sqrt{1+2t\,(x-y)+t^2\,(x+y)^2}\right]^{q}}
\end{aligned}$$

halini alır, $v = xt\,(1+v)^{-1}$, $v(0)=0$ probleminin çözümü olan v fonksiyonu

$$v = \frac{-1+\sqrt{1+4xt}}{2}$$

olarak elde edileceğinden

$$F_1(x,y,t) = \sqrt{1+2t\,(x-y)+t^2\,(x+y)^2}$$

gösterimi kullanılarak ispat tamamlanır. ∎

5.7 ${}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}\,(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $M_r^{(p,q)}\,(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_7\,(x,y) = x^q y^v\,(1+x)^{-(p+q)}\,(1+y)^{-(u+v)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_7 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$ {}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}\,(x,y) = M_{r-s}^{(p,q)}\,(x)\,M_s^{(u,v)}\,(y) \tag{5.76}$$

$$(s = 0,1,...,r \quad ; \quad r = 0,1,...,N)$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\left\{r,n\right\}$, $p,u > 2N+1$ ve $q,v > -1$ için ${}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty x^q y^v (1+x)^{-(p+q)} (1+y)^{-(u+v)} \\
&\qquad \times {}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)\ {}_7Q_{n,k}^{(p,q,u,v)}(x,y)\,dxdy \\
&= \frac{(r-s)!s!\Gamma(p-r+s)\Gamma(q+r-s+1)}{(p-2(r-s)-1)(u-2s-1)\Gamma(p+q-r+s)} \\
&\qquad \times \frac{\Gamma(u-s)\Gamma(v+s+1)}{\Gamma(u+v-s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}
\end{aligned} \tag{5.77}$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned}
{}_7Q_{0,0}^{(p,q,u,v)}(x,y) &= 1 \\
{}_7Q_{1,0}^{(p,q,u,v)}(x,y) &= (p-2)x-(q+1) \\
{}_7Q_{1,1}^{(p,q,u,v)}(x,y) &= (u-2)y-(v+1) \\
{}_7Q_{2,0}^{(p,q,u,v)}(x,y) &= (p-4)(p-3)x^2-2(p-3)(q+2)x+(q+2)(q+1) \\
{}_7Q_{2,1}^{(p,q,u,v)}(x,y) &= (p-2)(u-2)xy-(p-2)(v+1)x \\
&\quad -(u-2)(q+1)y+(q+1)(v+1) \\
{}_7Q_{2,2}^{(p,q,u,v)}(x,y) &= (u-4)(u-3)y^2-2(u-3)(v+2)y+(v+2)(v+1) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Lemma 5.3 (5.76) ile verilen tanımda $x \to \frac{x}{p}$, $y \to \frac{y}{u}$ yazılır ve $p \to \infty$ ve $u \to \infty$ için limit alınırsa (4.9) limit bağıntısı gözönünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
\lim_{p,u\to\infty}\left[{}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{u}\right)\right] &= \lim_{p,u\to\infty}\left[M_{r-s}^{(p,q)}\left(\frac{x}{p}\right)M_s^{(u,v)}\left(\frac{y}{u}\right)\right] \\
&= (-1)^r (r-s)!s!L_{r-s}^{(q)}(x)\,L_s^{(v)}(y) \\
&= (-1)^r (r-s)!s!L_{r,s}^{(q,v)}(x,y)
\end{aligned} \tag{5.78}$$

elde edilir. Burada

$$L_{r,s}^{(q,v)}(x,y) = L_{r-s}^{(q)}(x)\,L_s^{(v)}(y) \tag{5.79}$$

$$(s=0,1,...,r \quad ; \quad r=0,1,...)$$

polinomları $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x,\ y < \infty\}$ bölgesinde $w(x,y) = x^q y^v e^{-(x+y)}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Suetin 1988, Dunkl ve Xu 2014).

Teorem 5.19 (5.76) ile verilen polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & (p-r+s-1)(p-2(r-s))\ {}_7Q_{r+1,s}^{(p,q,u,v)}(x,y) \\ = \ & (p-2(r-s)-1)\{(p-2(r-s))(p-2(r-s)-2)x \\ & +2(r-s)(r-s+1)-p(q+2(r-s)+1)\}\ {}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y) \\ & -(r-s)(p-2(r-s)-2)(p+q-r+s)(q+r-s)\ {}_7Q_{r-1,s}^{(p,q,u,v)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.80}$$

ve

$$\begin{aligned} & (u-s-1)(u-2s)\ {}_7Q_{r+1,s+1}^{(p,q,u,v)}(x,y) \\ = \ & (u-2s-1)\{(u-2s)(u-2s-2)y \\ & +2s(s+1)-u(v+2s+1)\}\ {}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y) \\ & -s(u-2s-2)(u+v-s)(v+s)\ {}_7Q_{r-1,s-1}^{(p,q,u,v)}(x,y), \end{aligned} \tag{5.81}$$

$j = 1,2,...,r-s$ için

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left({}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)\right) \\ = \ & (r-s-j+1)_j\,(p-r+s-j)_j\ {}_7Q_{r-j,s}^{(p-2j,q+j,u,v)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.82}$$

ve $j = 1,2,...,s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left({}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)\right) = (s-j+1)_j\,(u-s-j)_j\ {}_7Q_{r-j,s-j}^{(p,q,u-2j,v+j)}(x,y) \tag{5.83}$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (5.80)'in ispatı için ilk olarak $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları için bilinen (4.5) rekürans formülünde $r \to r-s$ yazılır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı $M_s^{(u,v)}(y)$ ile çarpılarak polinomun tanımı kullanılır.

(5.81)'i ispatlamak için (4.5) eşitliğinde $r \to s$, $p \to u$, $q \to v$, $x \to y$ yazılır ve elde edilen denklemin her iki tarafı $M_{r-s}^{(p,q)}(x)$ ile çarpılarak polinomun tanımı kullanılır.

(4.6) bağıntısı uygulanarak polinomun x değişkenine göre j kez kısmi türevi alındıktan sonra (5.76) tanımı kullanılırsa (5.82) eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde (4.6) bağıntısı uygulanarak polinomun y değişkenine göre j kez kısmi türevi alındıktan sonra (5.76) tanımı kullanılırsa (5.83) eşitliğine ulaşılır. ■

Sonuç 5.6 (5.80), (5.81), (5.82) ve (5.83) rekürans bağıntılarında $x \to \frac{x}{p}$, $y \to \frac{y}{u}$ yerine konulduktan sonra elde edilen eşitlikler sırasıyla $\frac{1}{p^2}$, $\frac{1}{u^2}$, $\frac{1}{p^j}$ ve $\frac{1}{u^j}$ ile çarpılarak (5.78) bağıntısı yardımıyla $p \to \infty$ ve $u \to \infty$ için limit alınırsa $L_{r,s}^{(q,v)}(x,y)$ polinomları için sırasıyla

$$\begin{aligned}(r+1-s)\ L_{r+1,s}^{(q,v)}(x,y) &= (q+2(r-s)+1-x)\ L_{r,s}^{(q,v)}(x,y) \\ &\quad -(q+r-s)\ L_{r-1,s}^{(q,v)}(x,y) \quad , \qquad r \geq 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s+1)\ L_{r+1,s+1}^{(q,v)}(x,y) + (v+s)\ L_{r-1,s-1}^{(q,v)}(x,y) \\ = (v+2s+1-y)\ L_{r,s}^{(q,v)}(x,y) \quad , \qquad r \geq 1,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\ L_{r,s}^{(q,v)}(x,y)\right) = (-1)^j\ L_{r-j,s}^{(q+j,v)}(x,y) \quad , \quad j=1,2,...,r-s$$

ve

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left(\ L_{r,s}^{(q,v)}(x,y)\right) = (-1)^j\ L_{r-j,s-j}^{(q,v+j)}(x,y) \quad , \quad j=1,2,...,s$$

rekürans bağıntıları elde edilir.

Teorem 5.20 (5.76) ile tanımlanan polinom ailesi aşağıdaki kısmi türevli denklemi sağlar:

$$\begin{aligned}x(x+1)Q_{xx} + y(y+1)Q_{yy} + ((2-p)x+q+1)Q_x \\ +((2-u)y+v+1)Q_y - [(r-s)(r-s+1-p) \\ +s(s+1-u)]Q = 0.\end{aligned}$$

İspat. (4.1) eşitliğinin $M_s^{(u,v)}(y)$ ve $M_{r-s}^{(p,q)}(x)$ polinomları için uygulanmasıyla istenilen denklem elde edilir. ∎

Teorem 5.21 ${}_7Q_{r+s,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_7Q_{r+s,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)\,\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \frac{2^{-(p+u)}\left(1-t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right)^{p+q}}{\sqrt{\left((1+t)^2+4xt\right)\left((1+t)^2+4yt\right)}} \tag{5.84}$$

$$\times\frac{\left(1-t+\sqrt{(1+t)^2+4yt}\right)^{u+v}}{\left(1+t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right)^{q}\left(1+t+\sqrt{(1+t)^2+4yt}\right)^{v}}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat. (5.76) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$ alınarak $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları için bilinen (4.8) doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılırsa istenilene ulaşılır. ■

Sonuç 5.7 ${}_7Q_{r+s,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)$ polinomları için (5.84) doğurucu fonksiyon bağıntısında $x \to \frac{x}{p}$, $y \to \frac{y}{u}$ konulduktan sonra (5.78) bağıntısı kullanılarak $p \to \infty$ ve $u \to \infty$ için limit alınırsa $L_{r+s,s}^{(q,v)}(x,y)$ polinomları için

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} L_{r+s,s}^{(q,v)}(x,y)\, t^{r+s} = (1+t)^{-(q+v+2)} \exp\left(\frac{t(x+y)}{1+t}\right)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Teorem 5.22 (5.76) ile verilen polinom ailesi

$$\begin{aligned} {}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y) &= (-1)^r x^{-q}(1+x)^{p+q} y^{-v}(1+y)^{u+v} \\ &\times \frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\partial y^s}\left\{x^{r-s+q}(1+x)^{r-s-p-q} y^{s+v}(1+y)^{s-u-v}\right\} \end{aligned} \tag{5.85}$$

formundaki Rodrigues formülü ile gösterilir.

Sonuç 5.8 (5.85) eşitliğinde $x \to \frac{x}{p}$, $y \to \frac{y}{u}$ alınarak (5.78) bağıntısı yardımıyla $p \to \infty$ ve $u \to \infty$ için limit uygulanırsa $L_{r,s}^{(q,v)}(x,y)$ polinomları için

$$L_{r,s}^{(q,v)}(x,y) = \frac{x^{-q}y^{-v}e^{x+y}}{(r-s)!s!} \frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\partial y^s}\left(x^{r-s+q}y^{s+v}e^{-(x+y)}\right)$$

Rodrigues bağıntısına ulaşılır.

5.8 ${}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $N_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_8(x,y) = x^{-p}y^{-q}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_8 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$ {}_{8}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right) = N_{r-s}^{(p)}\left(x\right) N_{s}^{(q)}\left(y\right) \tag{5.86} $$
$$ \left(s=0,1,...,r \quad ; \quad r=0,1,...,N\right) $$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\left\{r,n\right\}$, $p,q > 2N+1$ için ${}_{8}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ polinom ailesi

$$ \begin{aligned} &\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} x^{-p}y^{-q}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\ {}_{8}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)\ {}_{8}Q_{n,k}^{(p,q)}\left(x,y\right)dxdy \\ =\ & \frac{(r-s)!s!\Gamma\left(p-r+s\right)\Gamma\left(q-s\right)}{\left(p-2\left(r-s\right)-1\right)\left(q-2s-1\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned} \tag{5.87} $$

formundaki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomların ilk birkaçı

$$ \begin{aligned} {}_{8}Q_{0,0}^{(p,q)}\left(x,y\right) &= 1 \\ {}_{8}Q_{1,0}^{(p,q)}\left(x,y\right) &= \left(p-2\right)x-1 \\ {}_{8}Q_{1,1}^{(p,q)}\left(x,y\right) &= \left(q-2\right)y-1 \\ {}_{8}Q_{2,0}^{(p,q)}\left(x,y\right) &= \left(p-4\right)\left(p-3\right)x^{2}-2\left(p-3\right)x+1 \\ {}_{8}Q_{2,1}^{(p,q)}\left(x,y\right) &= \left(p-2\right)\left(q-2\right)xy-\left(p-2\right)x-\left(q-2\right)y+1 \\ {}_{8}Q_{2,2}^{(p,q)}\left(x,y\right) &= \left(q-4\right)\left(q-3\right)y^{2}-2\left(q-3\right)y+1 \\ &\vdots \end{aligned} $$

şeklindedir.

Teorem 5.23 (5.86) ile verilen polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$ \begin{aligned} &\left(p-r+s-1\right)\left(p-2\left(r-s\right)\right)\ {}_{8}Q_{r+1,s}^{(p,q)}\left(x,y\right) \\ =\ & \left[\left(p-2\left(r-s\right)\right)\left(p-2\left(r-s\right)-1\right)\left(p-2\left(r-s\right)-2\right)x \right. \\ & \left. -p\left(p-2\left(r-s\right)-1\right)\right]\ {}_{8}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right) \\ & -\left(r-s\right)\left(p-2\left(r-s\right)-2\right)\ {}_{8}Q_{r-1,s}^{(p,q)}\left(x,y\right) \end{aligned} \tag{5.88} $$

ve

$$ \begin{aligned} &\left(q-s-1\right)\left(q-2s\right)\ {}_{8}Q_{r+1,s+1}^{(p,q)}\left(x,y\right) \\ =\ & \left[\left(q-2s\right)\left(q-2s-1\right)\left(q-2s-2\right)y-q\left(q-2s-1\right)\right]\ {}_{8}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right) \\ & -s\left(q-2s-2\right)\ {}_{8}Q_{r-1,s-1}^{(p,q)}\left(x,y\right), \end{aligned} \tag{5.89} $$

$j = 1, 2, ..., r - s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left({}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) = (r-s-j+1)_j\,(p-(r-s)-j)_j\ {}_8Q_{r-j,s}^{(p-2j,q)}(x,y) \quad (5.90)$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left({}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) = (s-j+1)_j\,(q-s-j)_j\ {}_8Q_{r-j,s-j}^{(p,q-2j)}(x,y) \quad (5.91)$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (5.88)'in ispatı için $N_r^{(p)}(x)$ polinomları için bilinen (4.13) rekürans formülünde $r \to r-s$ yazılarak her iki taraf $N_s^{(q)}(y)$ ile çarpıldıktan sonra polinomun tanımı kullanılır.

(5.89)'u ispat etmek için (4.13) eşitliğinde $r \to s$, $p \to q$ ve $x \to y$ yazılarak her iki taraf $N_{r-s}^{(p)}(x)$ ile çarpıldıktan sonra polinomun tanımını kullanmak yeterlidir.

Diğer yandan, (4.14) bağıntısı uygulanarak polinomun x ve y değişkenlerine göre j kez kısmi türevi alınarak (5.86) tanımı göz önünde bulundurulursa sırasıyla (5.90) ve (5.91) bağıntılarına ulaşılır. ∎

Teorem 5.24 (5.86) ile tanımlanan polinom ailesi aşağıdaki kısmi türevli denklemi sağlar:

$$\begin{aligned} & x^2Q_{xx} + y^2Q_{yy} + [(2-p)x+1]\,Q_x + [(2-q)y+1]\,Q_y \\ = \;& [(r-s)(r-s+1-p) + s(s+1-q)]\,Q. \end{aligned}$$

İspat. $N_r^{(p)}(x)$ polinomlarının sağladığı (4.10) diferensiyel denkleminde $r \to r-s$ alınırsa

$$x^2\left[N_{r-s}^{(p)}(x)\right]'' + ((2-p)x+1)\left[N_{r-s}^{(p)}(x)\right]' - (r-s)(r-s+1-p)\left[N_{r-s}^{(p)}(x)\right] = 0 \quad (5.92)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.10) diferensiyel denkleminde $r \to s$, $p \to q$ ve $x \to y$ alınırsa

$$y^2\left[N_s^{(q)}(y)\right]'' + ((2-q)y+1)\left[N_s^{(q)}(y)\right]' - s(s+1-q)\left[N_s^{(q)}(y)\right] = 0 \quad (5.93)$$

bulunur.

(5.92) denklemi $N_s^{(q)}(y)$ ile, (5.93) denklemi $N_{r-s}^{(p)}(x)$ ile çarpılıp bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\ & + \left((2-p)x+1\right) \frac{\partial}{\partial x}\left({}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) + \left((2-q)y+1\right) \frac{\partial}{\partial y}\left({}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\ = \ & \left[(r-s)(r-s+1-p) + s(s+1-q)\right] \ {}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \end{aligned}$$

formundaki kısmi türevli denklem elde edilir. ■

Teorem 5.25 ${}_8Q_{r+s,s}^{(p+2r,q+2s)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_8Q_{r+s,s}^{(p+2r,q+2s)}(x,y) \frac{t^{r+s}}{r!s!} = (1-tx)^{-p}(1-ty)^{-q} e^{-t\left(\frac{1}{1-tx}+\frac{1}{1-ty}\right)}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat. (5.86) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$ $p \to p+2r$, $q \to q+2s$ alınarak

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_8Q_{r+s,s}^{(p+2r,q+2s)}(x,y) \frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} N_r^{(p+2r)}(x) \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} N_s^{(q+2s)}(y) \frac{t^s}{s!}$$

yazılabilir. Burada $N_r^{(p+2r)}(x)$ polinomları için bilinen (4.16) doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{r,s=0}^{\infty} {}_8Q_{r+s,s}^{(p+2r,q+2s)}(x,y) \frac{t^{r+s}}{r!s!} &= (1-tx)^{-p} e^{-\frac{t}{1-tx}} (1-ty)^{-q} e^{-\frac{t}{1-ty}} \\ &= (1-tx)^{-p}(1-ty)^{-q} e^{-t\left(\frac{1}{1-tx}+\frac{1}{1-ty}\right)} \end{aligned}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına ulaşılır. ■

Teorem 5.26 (5.86) ile verilen polinom ailesi

$${}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = (-1)^r x^p y^q e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\partial y^s}\left\{ x^{-p+2(r-s)} y^{-q+2s} e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \right\}$$

formundaki Rodrigues formülü ile gösterilir.

5.9 ${}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $N_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_9(x,y) = x^q (1+x)^{-(p+q)} y^{-u} e^{-\frac{1}{y}}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_9 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$\begin{aligned} {}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y) &= M_{r-s}^{(p,q)}(x)\, N_s^{(u)}(y) \\ (s = 0,1,...,r \quad &; \quad r = 0,1,...,N) \end{aligned} \tag{5.94}$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p,u > 2N+1$ ve $q > -1$ için ${}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty\int_0^\infty x^q (1+x)^{-(p+q)} y^{-u} e^{-\frac{1}{y}}\ {}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\ {}_9Q_{n,k}^{(p,q,u)}(x,y)\, dxdy \\ = &\ \frac{(r-s)!s!\Gamma(p-r+s)\Gamma(q+r-s+1)\Gamma(u-s)}{(p-2(r-s)-1)(u-2s-1)\Gamma(p+q-r+s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned} \tag{5.95}$$

biçimindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned} {}_9Q_{0,0}^{(p,q,u)}(x,y) &= 1 \\ {}_9Q_{1,0}^{(p,q,u)}(x,y) &= (p-2)x-(q+1) \\ {}_9Q_{1,1}^{(p,q,u)}(x,y) &= (u-2)y-1 \\ {}_9Q_{2,0}^{(p,q,u)}(x,y) &= (p-4)(p-3)x^2-2(p-3)(q+2)x+(q+2)(q+1) \\ {}_9Q_{2,1}^{(p,q,u)}(x,y) &= (p-2)(u-2)xy-(p-2)x-(u-2)(q+1)y+(q+1) \\ {}_9Q_{2,2}^{(p,q,u)}(x,y) &= (u-4)(u-3)y^2-2(u-3)y+1 \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

formundadır.

Sonuç 5.9 (5.94) ile verilen tanımda $x \to \frac{x}{p}$ yazılarak $p \to \infty$ için limit alınırsa (4.9) limit bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty}\left[\ {}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}\left(\frac{x}{p},y\right)\right] &= \lim_{p\to\infty}\left[M_{r-s}^{(p,q)}\left(\frac{x}{p}\right)N_s^{(u)}(y)\right] \\ &= (-1)^{r-s}(r-s)!L_{r-s}^{(q)}(x)\,N_s^{(u)}(y) \\ &= (-1)^{r-s}(r-s)!V_{r,s}^{(q,u)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.96}$$

formunda bir sonlu ve bir sonsuz ortogonal polinomun çarpımı elde edilir. Burada

$$V_{r,s}^{(q,u)}(x,y) := L_{r-s}^{(q)}(x)\,N_s^{(u)}(y) \tag{5.97}$$

olarak gösterilmiştir.

Teorem 5.27 (5.94) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & (p-r+s-1)(p-2(r-s))\ \ {}_9Q_{r+1,s}^{(p,q,u)}(x,y) \\ = \ & (p-2(r-s)-1)\{(p-2(r-s))(p-2(r-s)-2)x \\ & +2(r-s)(r-s+1)-p(q+2(r-s)+1)\}\ \ {}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y) \\ & -(r-s)(p-2(r-s)-2)(p+q-r+s)(q+r-s)\ \ {}_9Q_{r-1,s}^{(p,q,u)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.98}$$

ve

$$\begin{aligned} & (u-2s-1)[(u-2s)(u-2s-2)y-u]\ \ {}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y) \\ = \ & (u-s-1)(u-2s)\ \ {}_9Q_{r+1,s+1}^{(p,q,u)}(x,y)+s(u-2s-2)\ \ {}_9Q_{r-1,s-1}^{(p,q,u)}(x,y), \end{aligned} \tag{5.99}$$

$j = 1, 2, ..., r-s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left[\ {}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\right] = (r-s+1-j)_j\,(p-r+s-j)_j\ \ {}_9Q_{r-j,s}^{(p-2j,q+j,u)}(x,y) \tag{5.100}$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left[\ {}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\right] = (s+1-j)_j\,(u-s-j)_j\ \ {}_9Q_{r-j,s-j}^{(p,q,u-2j)}(x,y) \tag{5.101}$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (5.98)'i elde etmek için (4.5) bağıntısında $r \to r-s$ alarak elde edilen denklemin her iki tarafı $N_s^{(u)}(y)$ ile çarpılır ve polinomun tanımı kullanılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Benzer şekilde (5.99)'u elde etmek için (4.13) bağıntısında $r \to s$, $p \to u$, $x \to y$ yazılarak elde edilen denklemin her iki tarafı $M_{r-s}^{(p,q)}(x)$ ile çarpılır ve polinomun tanımı kullanılırsa istenilen elde edilir.
(4.6) eşitliği uygulanarak ${}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinomunun x değişkenine göre j kez kısmi türevi ve (4.14) bağıntısı kullanılarak polinomun y değişkenine göre j kez kısmi türevi alınarak polinomun tanımı göz önünde bulundurulursa sırasıyla (5.100) ve (5.101) bağıntılarına ulaşılır. ∎

Sonuç 5.10 (5.98), (5.99), (5.100) ve (5.101) rekürans bağıntılarında $x \to \frac{x}{p}$ yazılarak (5.96) bağıntısı yardımıyla $p \to \infty$ iken limit alınırsa sırasıyla, $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}(r-s+1)\ V_{r+1,s}^{(q,u)}(x,y) =& (q+2(r-s)+1-x)\ V_{r,s}^{(q,u)}(x,y)\\ &-(q+r-s)\ V_{r-1,s}^{(q,u)}(x,y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&(u-s-1)(u-2s)\ V_{r+1,s+1}^{(q,u)}(x,y)+s(u-2s-2)\ V_{r-1,s-1}^{(q,u)}(x,y)\\ &=(u-2s-1)((u-2s)(u-2s-2)y-u)\ V_{r,s}^{(q,u)}(x,y),\end{aligned}$$

$j = 1, 2, ..., r-s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(V_{r,s}^{(q,u)}(x,y)\right) = (-1)^j\ V_{r-j,s}^{(q+j,u)}(x,y),$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left(V_{r,s}^{(q,u)}(x,y)\right) = (s+1-j)_j\,(u-s-j)_j\ V_{r-j,s-j}^{(q,u-2j)}(x,y)$$

rekürans bağıntıları elde edilir.

Teorem 5.28 (5.94) ile tanımlanan polinom ailesi aşağıdaki kısmi türevli denklemi sağlar:

$$\begin{aligned}&x(x+1)Q_{xx}+y^2Q_{yy}-[(p-2)x-(q+1)]Q_x\\ &-[(u-2)y-1]Q_y+[(r-s)(p-r+s-1)+s(u-s-1)]Q=0.\end{aligned} \tag{5.102}$$

İspat. (4.1) ve (4.10) denklemleri sırasıyla $M_{r-s}^{(p,q)}(x)$ ve $N_s^{(u)}(y)$ polinomları için uygulanır ve elde edilen denklemler sırasıyla $N_s^{(u)}(y)$ ve $M_{r-s}^{(p,q)}(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa ${}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinomunun sağladığı kısmi türevli denklem elde edilmiş olur. ∎

Sonuç 5.11 (5.102) diferensiyel denkleminde $x \to \frac{x}{p}$ yazılarak $\frac{1}{p}$ ile çarpılır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafında (5.96) bağıntısı kullanılarak $p \to \infty$ için limit alınırsa $V_{r,s}^{(q,u)}(x,y)$ polinomları için

$$x\frac{\partial^2}{\partial x^2}V_{r,s}^{(q,u)} + (q+1-x)\frac{\partial}{\partial x}V_{r,s}^{(q,u)} + (r-s)\,V_{r,s}^{(q,u)} = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

Teorem 5.29 ${}_9Q_{r+s,s}^{(p,q,u+2s)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_9Q_{r+s,s}^{(p,q,u+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!}$$
$$= \frac{2^{-p}(1-yt)^{-u}\left[1-t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right]^{p+q}\exp\left(\frac{-t}{1-yt}\right)}{\sqrt{(1+t)^2+4xt}\left[1+t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right]^{q}}$$

formundaki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat. (5.94) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$, $u \to u+2s$ alınırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_9Q_{r+s,s}^{(p,q,u+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} M_r^{(p,q)}(x)\frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty} N_s^{(u+2s)}(y)\frac{t^s}{s!}$$

yazılabilir. Burada $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $N_r^{(p+2r)}(x)$ polinomları için bilinen (4.8) ve (4.16) doğurucu fonksiyon bağıntıları kullanıldığında teoremin ifadesine ulaşılır. ■

Sonuç 5.12 ${}_9Q_{r+s,s}^{(p,q,u+2s)}(x,y)$ polinomları için elde edilen doğurucu fonksiyon bağıntısında $x \to \frac{x}{p}$ değişken değiştirmesi yapıldıktan sonra (5.96) bağıntısı gözönünde bulundurularak her iki tarafın $p \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^r V_{r+s,s}^{(q,u+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{s!} = \frac{\exp\left(t\left(\frac{x}{1+t}-\frac{1}{1-yt}\right)\right)}{(1+t)^{q+1}(1-yt)^u}$$

formundaki doğurucu fonksiyon bağıntısına ulaşılır.

Teorem 5.30 ${}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned}{}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y) &= (-1)^r x^{-q}y^u(1+x)^{p+q}e^{\frac{1}{y}} \\ &\quad\times\frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\partial y^s}\left\{x^{r-s+q}(1+x)^{r-s-(p+q)}y^{2s-u}e^{-\frac{1}{y}}\right\}\end{aligned}$$

şeklindeki Rodrigues formülü ile gösterilir.

Sonuç 5.13 *Teorem 5.30*'un ifadesinde $x \to \frac{x}{p}$ yazılarak $p \to \infty$ için limit alınırsa (5.96) bağıntısından aşağıdaki Rodrigues bağıntısına ulaşılır:

$$V_{r,s}^{(q,u)}(x,y) = \frac{(-1)^s x^{-q} y^u e^{x+1/y}}{(r-s)!} \frac{\partial^r}{\partial x^{r-s} \partial y^s} \left(x^{r-s+q} y^{2s-u} e^{-(x+1/y)} \right).$$

5.10 ${}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_{10}(x,y) = \left(1 + x^2 + y^2\right)^{-(p-1/2)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_{10} = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$\begin{gathered} {}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y) = I_{r-s}^{(p-s-1/2)}(x) \left(1+x^2\right)^{s/2} I_s^{(p)}\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ (s = 0,1,...,r \quad ; \quad r = 0,1,...,N) \end{gathered} \tag{5.103}$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p > N + 3/2$ için ${}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)$ polinomu

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+x^2+y^2\right)^{-(p-1/2)} {}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\ {}_{10}Q_{n,k}^{(p)}(x,y)\,dxdy \\ = &\frac{(r-s)!s!2^{2(r-1)}\pi\Gamma^2(p)\Gamma^2(p-s-1/2)}{(p-r-3/2)(p-s-1)\Gamma(p-r-1/2)\Gamma(p-s)\Gamma(p-r)} \\ &\times \frac{\Gamma(2p-2s)\Gamma(2p-2r-1)}{\Gamma(p-s+1/2)\Gamma(2p-r-s-2)\Gamma(2p-s-1)}\delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned}$$

biçimindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
{}_{10}Q_{0,0}^{(p)}(x,y) &= 1 \\
{}_{10}Q_{1,0}^{(p)}(x,y) &= (2p-3)\,x \\
{}_{10}Q_{1,1}^{(p)}(x,y) &= 2\,(p-1)\,y \\
{}_{10}Q_{2,0}^{(p)}(x,y) &= (2p-3)\left[(2p-5)\,x^2-1\right] \\
{}_{10}Q_{2,1}^{(p)}(x,y) &= 2\,(p-1)\,(2p-5)\,xy \\
{}_{10}Q_{2,2}^{(p)}(x,y) &= 4\,(p-2)\,(p-1)\,y^2-2\,(p-1)\left(1+x^2\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sonuç 5.14 (5.103) polinom tanımında $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{p}}\sqrt{1+\frac{x^2}{p}}$ değişken değiştirmesi yapılarak elde edilen eşitliğin her iki tarafında $p \to \infty$ için limit alınırsa, (4.26) limit bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to\infty}\left[p^{-\frac{r}{2}}\;{}_{10}Q_{r,s}^{(p)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}},\frac{y}{\sqrt{p}}\sqrt{1+\frac{x^2}{p}}\right)\right] \qquad (5.104)\\
&= \lim_{p\to\infty}\left[p^{-\frac{r-s}{2}}I_{r-s}^{(p-s-1/2)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\left(1+\frac{x^2}{p}\right)^{\frac{s}{2}}p^{-\frac{s}{2}}I_s^{(p)}\left(\frac{y}{\sqrt{p}}\right)\right] \\
&= H_{r-s}(x)\,H_s(y)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, iki Hermite polinomunun çarpımı olan

$$H_{r,s}(x,y)=H_{r-s}(x)\,H_s(y) \qquad (5.105)$$
$$(s=0,1,...,r \quad ; \quad r=0,1,...)$$

Hermite-Hermite polinomları $\Lambda=\{(x,y)\,,\ -\infty<x,\ y<\infty\}$ bölgesi üzerinde $w(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Suetin 1988, Dunkl ve Xu 2014).

Teorem 5.31 (5.103) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
{}_{10}Q_{r+1,s}^{(p)}(x,y) &= (2p-2r-3)\,x\;{}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y) \qquad (5.106)\\
&\quad -(r-s)\,(2p-r-s-2)\;{}_{10}Q_{r-1,s}^{(p)}(x,y)\,,
\end{aligned}$$

$r \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
&4\,(s-1)\,(p-1)\,(p-2)\left(1+x^2+y^2\right)\;{}_{10}Q_{r-2,s-2}^{(p-2)}(x,y) \qquad (5.107)\\
&= (s+2-2p)\;{}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)+2\,(p-1)\,(2p-3)\,y\;{}_{10}Q_{r-1,s-1}^{(p-1)}(x,y)
\end{aligned}$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right) = 2^j (s-j+1)_j (p-j)_j \; {}_{10}Q_{r-j,s-j}^{(p-j)}(x,y) \tag{5.108}$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. $I_r^{(p)}(x)$ polinomu için bilinen (4.21) rekürans bağıntısında $r \to r-s$, $p \to p-s-1/2$ alınarak elde edilen denklemin her iki tarafı $(1+x^2)^{s/2} I_s^{(p)}\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$ ile çarpılır ve polinomun tanımı kullanılırsa (5.106)'ya ulaşılır.
(5.107)'yi ispatlamak için $I_r^{(p)}(x)$ polinomu için bilinen (4.23) rekürans bağıntısında $r \to s-1$, $p \to p-1$ ve $x \to \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$ alınarak elde edilen denklemin her iki tarafını $I_{r-s}^{(p-s-1/2)}(x)(1+x^2)^{s/2}$ ile çarpmak ve polinomun tanımını kullanmak yeterlidir.
Son olarak (5.108)'i elde etmek için (4.22) bağıntısı göz önünde bulundurularak polinomun y değişkenine göre j kez kısmi türevi alındıktan sonra polinomun tanımı kullanılır. ■

Sonuç 5.15 (5.106), (5.107) ve (5.108) rekürans bağıntılarında $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{p}}\sqrt{1+\frac{x^2}{p}}$ değişken değiştirmesi yapıldıktan sonra elde edilen eşitlik $p^{-\frac{r}{2}}$ ile çarpılır ve (5.104) bağıntısı yardımıyla $p \to \infty$ için limit alınırsa $H_{r,s}(x,y)$ polinomları için sırasıyla aşağıdaki rekürans bağıntılarına ulaşılır:

$$H_{r+1,s}(x,y) + 2(r-s) H_{r-1,s}(x,y) = 2x\, H_{r,s}(x,y) \quad , \quad r \geq 1,$$

$$2y H_{r-1,s-1}(x,y) - H_{r,s}(x,y) = 2(s-1)\, H_{r-2,s-2}(x,y) \quad , \quad r \geq 2,$$

ve

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left(H_{r,s}(x,y)\right) = 2^j (s-j+1)_j\; H_{r-j,s-j}(x,y) \quad , \quad 0 \leq j \leq s.$$

Teorem 5.32 (5.103) ile tanımlanan polinom ailesi

$$\begin{aligned}
&\left(1+x^2\right)^2 Q_{xx} + 2xy\left(1+x^2\right) Q_{xy} + x^2y^2 Q_{yy} \\
&-2(p-2)\,x\left(1+x^2\right) Q_x - y\left[2(p-2)x^2 - 1\right] Q_y \\
&-\left\{r(r-2p+3)\left(1+x^2\right) - s(s+2-2p)\right\} Q = 0
\end{aligned} \tag{5.109}$$

ve

$$\left(1+x^2+y^2\right) Q_{yy} - (2p-3)\,y Q_y - s(s+2-2p)\, Q = 0 \tag{5.110}$$

kısmi türevli denklemleri sağlar.

İspat. İlk olarak polinomun y değişkenine göre kısmi türevi alınarak elde edilen ifade, polinomun x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & I_{r-s-1}^{(p-s-3/2)}(x)\left(1+x^2\right)^{s/2} I_s^{(p)}\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ = & \frac{1}{2(r-s)(p-s-3/2)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right. \\ & \left.+\frac{xy}{1+x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)-\frac{sx}{1+x^2}\,{}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.111}$$

bağıntısı bulunur. Yine, polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden elde edilmiş olan bağıntılar polinomun x ve y'ye göre ikinci basamaktan karışık türevinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & I_{r-s-1}^{(p-s-3/2)}(x)\left(1+x^2\right)^{\frac{s-1}{2}} I_{s-1}^{(p-1)}\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ = & \frac{1}{4(r-s)s(p-1)(p-s-3/2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right. \\ & \left.+\frac{xy}{1+x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)-\frac{(s-1)x}{1+x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.112}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca (5.111), (5.112) ve polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden elde edilmiş olan eşitlikler, polinomun x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & I_{r-s-2}^{(p-s-5/2)}(x)\left(1+x^2\right)^{s/2} I_s^{(p)}\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ = & \frac{1}{4(r-s)(r-s-1)(p-s-3/2)(p-s-5/2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right. \\ & +\frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\frac{x^2y^2}{\left(1+x^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right) \\ & -\frac{2sx}{1+x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\frac{y\left(1-2sx^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right) \\ & \left.-\frac{s\left[1-(s+1)x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^2}\,{}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.113}$$

biçimindeki ifadeye ulaşılır.

Diğer taraftan (4.23) rekürans bağıntısında $r \to r-s-1$, $p \to p-s-3/2$ alınarak her iki taraf $\left(1+x^2\right)^{s/2} I_s^{(p)}\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ ile çarpılıp polinomun tanımı ve (5.111) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&I_{r-s-2}^{(p-s-5/2)}(x)\left(1+x^2\right)^{s/2} I_s^{(p)}\left(\frac{y}{1+x^2}\right) \qquad (5.114)\\
= & \frac{1}{4(r-s)(r-s-1)(p-s-3/2)(p-s-5/2)(1+x^2)}\\
&\times\left[2(p-s-2)x\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\frac{2(p-s-2)x^2y}{1+x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right.\\
&\left.-\left\{\frac{2s(p-s-2)x^2}{1+x^2}+(r-s)(2p-r-s-3)\right\}{}_{10}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right]
\end{aligned}$$

şeklindeki eşitlik elde edilir.

Böylece (5.113) ve (5.114) eşitliklerinden (5.109) denklemine ulaşılır.

(5.110)'u elde etmek için ise (5.108) ve (5.107) rekürans bağıntılarını kullanmak yeterlidir. ■

Sonuç 5.16 (5.110) kısmi türevli denkleminde $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{p}}\sqrt{1+\frac{x^2}{p}}$ değişken değiştirmesi yapıldıktan sonra elde edilen eşitlik $p^{-\frac{r}{2}}$ ile çarpılır ve (5.104) bağıntısı kullanılarak $p \to \infty$ için limit alınırsa $H_{r,s}(x,y)$ polinomlarının sağladığı

$$H_{yy}-2yH_y+2sH=0$$

ikinci basamaktan denklem elde edilir.

Teorem 5.33 ${}_{10}Q_{r+s,s}^{(p+s)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{10}Q_{r+s,s}^{(p+s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!}=\frac{2^{p-1}\left(1+2tx-t^2\right)^{p-3/2}}{F_1(x,y,t)\left(1-2ty+F_1(x,y,t)\right)^{p-1}} \qquad (5.115)$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Burada $F_1(x,y,t)$ fonksiyonları

$$F_1(x,y,t)=\left(1-4ty+4t^2\left(1+x^2+y^2\right)\right)^{1/2}$$

ile tanımlanır.

İspat. (5.103) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$, $p \to p+s$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{10}Q_{r+s,s}^{(p+s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!}\\
=&\sum_{r=0}^{\infty} I_r^{(p-1/2)}(x)\frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty} I_s^{(p+s)}\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{\left[t\sqrt{1+x^2}\right]^s}{s!}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk çarpan için (4.25) doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılır, ayrıca ikinci çarpan için de $I_r^{(p)}(x)$ ve $C_r^{(\gamma)}(x)$ Ultraküresel polinomları arasındaki bilinen (4.20) bağıntısında (4.24) eşitliği gözönünde bulundurularak

$$I_r^{(p)}(x) = r!i^r C_r^{(1-p)}(ix) \tag{5.116}$$

ifadesinden yararlanılır. Böylece eşitlik

$$\begin{aligned}\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{10}Q_{r+s,s}^{(p+s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} &= \left(1+2tx-t^2\right)^{p-3/2} \\ &\times \sum_{s=0}^{\infty} C_s^{(1-p-s)}\left(\frac{iy}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left[it\sqrt{1+x^2}\right]^s\end{aligned}$$

formuna indirgenir. Ultraküresel ve Jacobi polinomları arasındaki bilinen (3.7) bağıntısında $r \to s$, $\gamma \to 1-p-s$, $x \to \frac{iy}{\sqrt{1+x^2}}$ alınmasıyla

$$\begin{aligned}&\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{10}Q_{r+s,s}^{(p+s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} \\ &= \left(1+2tx-t^2\right)^{p-3/2}\sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(p-1,\ p-1)}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right) \\ &\qquad\times\left[-2t\sqrt{x^2+y^2+1}\right]^s\end{aligned}$$

yazılabilir. Son olarak eşitliğin sağ tarafında (3.3) kullanılırsa (5.115) bağıntısı elde edilir. ■

5.11 ${}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_{11}(x,y) = x^{2p+q-1}(1+x)^{-(p+q)}\left(x^2+y^2\right)^{-(p-1/2)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_{11} = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$\begin{gathered}{}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\,x^s I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.117)\\ (s=0,1,...,r \quad ; \quad r=0,1,...,N)\end{gathered}$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p > 2N+2$ ve $q > -2$ için ${}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2p+q-1}(1+x)^{-(p+q)}\left(x^2+y^2\right)^{-(p-1/2)} \\
&\qquad\qquad \times\ {}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\ {}_{11}Q_{n,k}^{(p,q)}(x,y)\,dydx \\
&= \frac{(r-s)!s!2^{2s-1}\sqrt{\pi}\Gamma^2(p)\Gamma(p-r-s-1)}{(p-2r-2)(p-s-1)\Gamma(p-s)\Gamma\left(p-s+\frac{1}{2}\right)} \\
&\qquad \times\frac{\Gamma(2p-2s)\Gamma(q+r+s+2)}{\Gamma(2p-s-1)\Gamma(p+q-r+s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}
\end{aligned}$$

formundaki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned}
{}_{11}Q_{0,0}^{(p,q)}(x,y) &= 1 \\
{}_{11}Q_{1,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-3)x-(q+2) \\
{}_{11}Q_{1,1}^{(p,q)}(x,y) &= 2(p-1)y \\
{}_{11}Q_{2,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-5)(p-4)x^2-2(p-4)(q+3)x+(q+3)(q+2) \\
{}_{11}Q_{2,1}^{(p,q)}(x,y) &= 2(p-1)y\left[(p-5)x-(q+4)\right] \\
{}_{11}Q_{2,2}^{(p,q)}(x,y) &= 2(p-1)\left[2(p-2)y^2-x^2\right] \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

formundadır.

Sonuç 5.17 (5.117) tanımında $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{p^{3/2}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve (4.9) ve (4.26) limit bağıntıları göz önünde bulundurularak $p \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to\infty}\left[p^{\frac{s}{2}}\ {}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p^{3/2}}\right)\right] \\
&= \lim_{p\to\infty}\left[M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}\left(\frac{x}{p}\right)x^s p^{-\frac{s}{2}} I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x\sqrt{p}}\right)\right] \\
&= (-1)^{r-s}(r-s)!L_{r-s}^{(q+2s+1)}(x)\,x^s H_s\left(\frac{y}{x}\right),
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$Z_{r,s}^{(q)}(x,y) = L_{r-s}^{(q+2s+1)}(x)\,x^s H_s\left(\frac{y}{x}\right),$$

ile gösterilirse

$$\lim_{p\to\infty}\left[p^{\frac{s}{2}}\ {}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p^{3/2}}\right)\right] = (-1)^{r-s}(r-s)!Z_{r,s}^{(q)}(x,y) \qquad (5.118)$$

yazılır.

Sonuç 5.18 $Z_{r,s}^{(q)}(x,y)$ $(s=0,1,...,r \quad ; \quad r=0,1,...)$ polinomları

$$\Lambda=\{(x,y):0<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$$

bölgesi üzerinde $w(x,y)=x^q e^{-\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)}$ ağırlık fonksiyonuna göre $q>-2$ için ortogonaldir. Yani,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty x^q e^{-\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)} Z_{r,s}^{(q)}(x,y)\, Z_{n,k}^{(q)}(x,y)\, dydx\\ = \ & \frac{2^s s!\sqrt{\pi}\,(r+s+q+1)!}{(r-s)!}\delta_{r,n}\delta_{s,k} \quad , \quad q>-2\end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 5.34 (5.117) ile tanımlanan polinom ailesi $r\geq 1$ için aşağıdaki rekürans bağıntısını gerçekler:

$$\begin{aligned}&(p-r-s-2)(p-2r-1)\ {}_{11}Q_{r+1,s}^{(p,q)}(x,y)\\&+(r-s)(p-2r-3)(p+q-r+s)(q+r+s+1)\ {}_{11}Q_{r-1,s}^{(p,q)}(x,y)\\=\ &(p-2r-2)\left[2(r-s)(r-s+1)-(p-2s-1)(q+2r+2)\right.\\&\left.+(p-2r-1)(p-2r-3)x\right]\ {}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\,.\end{aligned} \tag{5.119}$$

İspat. (4.5) rekürans bağıntısında $r\to r-s$, $p\to p-2s-1$, $q\to q+2s+1$ alınarak elde edilen denklem $x^s I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpıldıktan sonra polinomun tanımı kullanılırsa ${}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi için yukarıdaki rekürans bağıntısına ulaşılır. ∎

Sonuç 5.19 ${}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomları için (5.119) ile verilen rekürans bağıntısında $x\to\frac{x}{p}$ ve $y\to\frac{y}{p^{3/2}}$ değişken değiştirmesi yapılarak eşitliğin her iki tarafı $p^{s/2}$ ile çarpılır ve (5.118) bağıntısı yardımıyla $p\to\infty$ için limit alınırsa $Z_{r,s}^{(q)}(x,y)$ polinomlarının sağladığı aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir:

$$\begin{aligned}(r-s+1)\,Z_{r+1,s}^{(q)}(x,y)-(q+2r+2-x)\,Z_{r,s}^{(q)}(x,y)&\\+(q+r+s+1)\,Z_{r-1,s}^{(q)}(x,y)&=0.\end{aligned}$$

Teorem 5.35 (5.117) ile tanımlanan polinom ailesi aşağıdaki kısmi türevli denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} & x^2(1+x)Q_{xx}+2xy(1+x)Q_{xy}+y^2(1+x)Q_{yy} \\ & -x((p-3)x-(q+2))Q_x-y((p-3)x-(q+2))Q_y \\ & +\{r(p-r-2)x-s(q+s+1)\}Q=0 \end{aligned} \tag{5.120}$$

ve

$$\left(x^2+y^2\right)Q_{yy}+y[1-2(p-1)]Q_y-s(s-2(p-1))Q=0. \tag{5.121}$$

İspat. İlk olarak polinomun y değişkenine göre kısmi türevinden elde edilen ifade, polinomun x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} & M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+2s+2)}(x)\,x^s I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{(r-s)(p-r-s-2)} \\ & \times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{s}{x}\,{}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.122}$$

bağıntısı ve ikinci olarak polinomun y'ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden elde edilen ifadeler, yine polinomun karışık türevinde yerine konularak

$$\begin{aligned} & M_{r-s-1}^{(p-2s-3,q+2s+2)}(x)\,x^{s-1} I_{s-1}^{(p-1)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = & \frac{1}{2(r-s)s(p-1)(p-r-s-2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & \left.+\frac{y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{s-1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.123}$$

bağıntısı elde edilir.

Ayrıca polinomun x'e göre ikinci mertebeden kısmi türevinde, (5.122), (5.123) ve y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevinden elde edilen eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2s+3)}(x)\,x^s I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\ = & \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)} \\ & \times\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\frac{2y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)\right. \\ & +\left(\frac{y}{x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)-\frac{2s}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\ & \left.-\frac{2sy}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right)+\frac{s(s+1)}{x^2}\,{}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.124}$$

eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan (4.7) rekürans bağıntısında $r \to r-s-1$, $p \to p-2s-1$, $q \to q+2s+1$ alınarak her iki taraf $x^s I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılıp polinomun tanımı ve (5.122) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& M_{r-s-2}^{(p-2s-5,q+2s+3)}(x)\, x^s I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (5.125)\\
= \; & \frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)\, x\,(x+1)} \\
& \times \Bigg[\{(p-2s-3)\,x-(q+2s+2)\} \frac{\partial}{\partial x}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\
& + \frac{y}{x} \{(p-2s-3)\,x-(q+2s+2)\} \frac{\partial}{\partial y}\left({}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) \\
& - \left(\frac{s}{x} \{(p-2s-3)\,x-(q+2s+2)\} + (r-s)(p-r-s-2)\right) {}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \Bigg]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (5.124) ve (5.125)'in eşitliğinden (5.120) yazılabilir.

(5.121)'i elde etmek için ise (4.23) bağıntısında $r \to s-1$, $p \to p-1$ ve $x \to y/x$ alınır ve elde edilen denklemin her iki tarafı $M_{r-s}^{(p-2s-1,q+2s+1)}(x)\, x^s$ ile çarpıldıktan sonra polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınarak elde edilen ifadeler yerlerine yazılır. ■

Sonuç 5.20 ${}_{11}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomları için elde edilen (5.120) ve (5.121) denklemlerinde $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{p^{3/2}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı $p^{s/2}$ ifadesi ile çarpıldıktan sonra (5.118) bağıntısı kullanılarak $p \to \infty$ için limit alınırsa $Z_{r,s}^{(q)}(x,y)$ polinomlarının sağladığı aşağıdaki kısmi türevli denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}
x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_{r,s}^{(q)} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Z_{r,s}^{(q)} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_{r,s}^{(q)} + x\,(q+2-x) \frac{\partial}{\partial x} Z_{r,s}^{(q)} \\
+ y\,(q+2-x) \frac{\partial}{\partial y} Z_{r,s}^{(q)} + (rx - s\,(q+s+1))\, Z_{r,s}^{(q)} = 0,
\end{aligned}$$

ve

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_{r,s}^{(q)} - 2y \frac{\partial}{\partial y} Z_{r,s}^{(q)} + 2s Z_{r,s}^{(q)} = 0.$$

Teorem 5.36 ${}_{11}Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{11}Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!}\\
&= \frac{2^{1-p}\left(1-t+\sqrt{4xt+(1+t)^2}\right)^{p+q}(1+\xi+\eta+\xi\eta)^p}{\sqrt{4xt+(1+t)^2}\left(1+t+\sqrt{4xt+(1+t)^2}\right)^{q+1}(1-\xi-\eta-3\xi\eta)}
\end{aligned}$$

formundaki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Burada ξ ve η fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\xi &= t\left(y+\sqrt{y^2+x^2}\right)(1+\xi+\eta+\xi\eta)^2,\\
\eta &= t\left(y-\sqrt{y^2+x^2}\right)(1+\xi+\eta+\xi\eta)^2
\end{aligned}$$

ile verilir.

İspat. (5.117) polinom ailesinin tanımında $r\to r+s$, $p\to p+2s$, $q\to q-2s$ alınırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{11}Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} M_r^{(p-1,q+1)}(x)\frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty} I_s^{(p+2s)}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{(xt)^s}{s!}$$

eşitliği yazılır. Eşitliğin sağ tarafında $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları için bilinen (4.8) doğurucu fonksiyon bağıntısı ve (5.116) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{11}Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!}\\
&= \frac{2^{1-p}\left[1-t+\sqrt{4xt+(1+t)^2}\right]^{p+q}}{\sqrt{4xt+(1+t)^2}\left[1+t+\sqrt{4xt+(1+t)^2}\right]^{q+1}}\\
&\quad\times\sum_{s=0}^{\infty} C_s^{(1-p-2s)}\left(\frac{iy}{x}\right)(ixt)^s
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.7) eşitliği yardımıyla elde edilen

$$C_s^{(1-p-2s)}\left(\frac{iy}{x}\right) = (-2i)^s\,\frac{\sqrt{y^2+x^2}^{\,s}}{x^s}P_s^{(p-1+s,p-1+s)}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\right)$$

ifadesi yerine yazıldığında

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{11}Q_{r+s,s}^{(p+2s,q-2s)}(x,y)\,\frac{t^{r+s}}{r!s!}$$

$$= \frac{2^{1-p}\left[1-t+\sqrt{4xt+(1+t)^2}\right]^{p+q}}{\sqrt{4xt+(1+t)^2}\left[1+t+\sqrt{4xt+(1+t)^2}\right]^{q+1}}$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(p-1+s,p-1+s)}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\right)\left(-2t\sqrt{y^2+x^2}\right)^s$$

bulunur. Son olarak (3.4) bağıntısı $r\to s$, $\gamma=\theta\to p-1$, $\lambda=\mu\to 1$, $x\to y/\sqrt{y^2+x^2}$ ve $t\to -2t\sqrt{y^2+x^2}$ alınarak uygulanırsa istenilen sonuca ulaşılır. ■

5.12 ${}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $N_r^{(p)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_{12}(x,y)=x^{p-1}\left(x^2+y^2\right)^{-(p-1/2)}\exp(-1/x)$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_{12}=\{(x,y):0<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$\begin{gathered}{}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)=N_{r-s}^{(p-2s-1)}(x)\,x^s I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)\\(s=0,1,...,r\quad;\quad r=0,1,...,N)\end{gathered}\tag{5.126}$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N=maks\{r,n\}$, $p>2N+2$ için ${}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-1}\left(x^2+y^2\right)^{-(p-1/2)}\exp(-1/x)\ {}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\ {}_{12}Q_{n,k}^{(p)}(x,y)\,dydx$$

$$=\frac{(r-s)!s!2^{2s-1}\sqrt{\pi}\Gamma^2(p)\,\Gamma(2p-2s)\,\Gamma(p-r-s-1)}{(p-2r-2)(p-s-1)\,\Gamma(p-s)\,\Gamma\left(p-s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p-s-1)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

formundaki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
{}_{12}Q_{0,0}^{(p)}(x,y) &= 1\\
{}_{12}Q_{1,0}^{(p)}(x,y) &= (p-3)\,x-1\\
{}_{12}Q_{1,1}^{(p)}(x,y) &= 2\,(p-1)\,y\\
{}_{12}Q_{2,0}^{(p)}(x,y) &= (p-5)\,(p-4)\,x^2-2\,(p-4)\,x+1\\
{}_{12}Q_{2,1}^{(p)}(x,y) &= 2\,(p-1)\,y\,[(p-5)\,x-1]\\
{}_{12}Q_{2,2}^{(p)}(x,y) &= 2\,(p-1)\left[2\,(p-2)\,y^2-x^2\right]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Teorem 5.37 ${}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)$ polinom ailesi $r\geq 1$ için aşağıdaki rekürans bağıntısını gerçekler:

$$\begin{aligned}
&(p-2r-1)\,(p-r-s-2)\;{}_{12}Q_{r+1,s}^{(p)}(x,y)\\
&+(r-s)\,(p-2r-3)\;{}_{12}Q_{r-1,s}^{(p)}(x,y)\\
=\;&(p-2r-2)\,[(p-2r-1)\,(p-2r-3)\,x-(p-2s-1)]\;{}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\,.
\end{aligned}$$

İspat. (4.13) rekürans bağıntısında $r\to r-s$, $p\to p-2s-1$ alınarak elde edilen denklem $x^s I_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılarak polinomun tanımı kullanılırsa sonuca ulaşılır. ■

Teorem 5.38 (5.126) ile tanımlanan polinom ailesi aşağıdaki kısmi türevli denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned}
x^3Q_{xx}+2x^2yQ_{xy}+xy^2Q_{yy}-x\,((p-3)\,x-1)\,Q_x&\\
-y\,((p-3)\,x-1)\,Q_y=(s+r\,(r-p+2)\,x)\,Q&
\end{aligned}\tag{5.127}$$

ve

$$\left(x^2+y^2\right)Q_{yy}+y\,(1-2\,(p-1))\,Q_y-s\,(s-2\,(p-1))\,Q=0.\tag{5.128}$$

İspat. İlk olarak polinomun y değişkenine göre kısmi türevinden elde edilen ifade, polinomun x değişkenine göre kısmi türevinin açık ifadesinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
N_{r-s-1}^{(p-2s-3)}(x)\,x^sI_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)&=\frac{1}{(r-s)\,(p-r-s-2)}\\
\times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)-\frac{s}{x}\;{}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right]&
\end{aligned}\tag{5.129}$$

bağıntısı ve ikinci olarak polinomun y'ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden elde edilen ifadeler, yine polinomun karışık türevinde yerine konularak

$$\begin{aligned}
&N_{r-s-1}^{(p-2s-3)}(x)\,x^{s-1}I_{s-1}^{(p-1)}\left(\frac{y}{x}\right) \\
=\; &\frac{1}{2(r-s)\,s\,(p-1)(p-r-s-2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right. \\
&\left.+\frac{y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)-\frac{s-1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.130}$$

bağıntısı elde edilir.

Ayrıca polinomun x'e göre ikinci mertebeden kısmi türevinde, (5.129), (5.130) ve polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden elde edilen eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&N_{r-s-2}^{(p-2s-5)}(x)\,x^{s}I_{s}^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\
=\; &\frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)} \\
&\times\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\frac{2y}{x}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right. \\
&+\left(\frac{y}{x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)-\frac{2s}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right) \\
&\left.-\frac{2sy}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)+\frac{s(s+1)}{x^2}\;{}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right]
\end{aligned} \tag{5.131}$$

eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan (4.15) rekürans bağıntısında $r\to r-s-1$, $p\to p-2s-3$ alınarak her iki taraf $x^sI_s^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right)$ ile çarpılıp polinomun tanımı ve (5.129) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&N_{r-s-2}^{(p-2s-5)}(x)\,x^{s}I_{s}^{(p)}\left(\frac{y}{x}\right) \\
=\; &\frac{1}{(r-s)(r-s-1)(p-r-s-2)(p-r-s-3)\,x^2} \\
&\times\left\{[(p-2s-3)\,x-1]\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right)\right. \\
&+\frac{y}{x}[(p-2s-3)\,x-1]\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right) \\
&\left.+\left(\frac{s}{x}-r(p-r-2)+s(s+1)\right)\;{}_{12}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)\right]
\end{aligned} \tag{5.132}$$

bulunur. Böylece (5.131) ve (5.132)'nin eşitliğinden (5.127) yazılabilir.

(5.128)'i elde etmek için ise (4.23) rekürans bağıntısında $r\to s-1$, $p\to p-1$ ve $x\to y/x$ alınır ve elde edilen denklemin her iki tarafı $N_{r-s}^{(p-2s-1)}(x)\,x^{s-1}$ ile çarpıldıktan sonra polinomun y değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınarak elde edilen ifadeler yerlerine yazılır. ■

Teorem 5.39 ${}_{12}Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{12}Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!}$$
$$= \frac{2^{1-p}\left(1+\sqrt{1+4xt}\right)^{p-1}(1+\xi+\eta+\xi\eta)^{p}}{(1-\xi-\eta-3\xi\eta)\sqrt{1+4xt}}\exp\left(\frac{1-\sqrt{1+4xt}}{2x}\right)$$

biçimindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat. (5.126) polinom ailesinin tanımında $r\to r+s$, $p\to p+2s$ alınırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{12}Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} N_r^{(p-1)}(x)\frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty} I_s^{(p+2s)}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{(xt)^s}{s!}$$

yazılır. Burada $N_r^{(p)}(x)$ ve $L_r^{(\gamma)}(x)$ polinomları arasındaki bilinen (4.12) bağıntısı ile $I_r^{(p)}(x)$ ve $C_r^{(\gamma)}(x)$ polinomları arasındaki bilinen (5.116) bağıntısı yardımıyla

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{12}Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} L_r^{(p-2-2r)}\left(\frac{1}{x}\right)(xt)^r\sum_{s=0}^{\infty} C_s^{(1-p-2s)}\left(\frac{iy}{x}\right)(ixt)^s$$

bulunur. (3.6) doğurucu fonksiyon bağıntısında $\gamma\to p-2$, $\theta\to -2$, $x\to 1/x$ ve $t\to xt$ alınır, ayrıca (3.7) ifadesinde $r\to s$, $\gamma\to 1-p-2s$, $x\to iy/x$ yazılırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{12}Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \frac{(1+v)^{p-1}}{1+2v}\exp\left(-\frac{v}{x}\right) \tag{5.133}$$
$$\times\sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(p-1+s,p-1+s)}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\right)\left(-2t\sqrt{y^2+x^2}\right)^s$$

elde edilir. Burada v fonksiyonu

$$v=\frac{xt}{1+v} \quad , \quad v(0)=0$$

ile verilir. v fonksiyonu çözüldüğünde

$$v=\frac{\sqrt{1+4xt}-1}{2}$$

olarak bulunur. Böylelikle (5.133) eşitliği

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{12}Q_{r+s,s}^{(p+2s)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!} = \frac{2^{1-p}\left[1+\sqrt{1+4xt}\right]^{p-1}}{\sqrt{1+4xt}}\exp\left(\frac{1-\sqrt{1+4xt}}{2x}\right)$$
$$\times\sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(p-1+s,p-1+s)}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\right)\left(-2t\sqrt{y^2+x^2}\right)^s$$

formunda yazılabilir ve (3.4) doğurucu fonksiyon bağıntısının kullanılmasıyla istenilen elde edilir. ■

5.13 ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_{13}(x,y) = \left(1+x^2\right)^{-(p-1/2)}\left(1+y^2\right)^{-(q-1/2)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_{13} = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$\begin{gathered} {}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = I_{r-s}^{(p)}(x)\, I_s^{(q)}(y) \\ (s = 0,1,...,r \quad ; \quad r = 0,1,...,N) \end{gathered} \tag{5.134}$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p,q > N+1$ için ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+x^2\right)^{-(p-1/2)}\left(1+y^2\right)^{-(q-1/2)} \\ &\times {}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\ {}_{13}Q_{n,k}^{(p,q)}(x,y)\, dydx \\ = &\frac{(r-s)!s!2^{2(r-1)}\pi\Gamma^2(p)\Gamma^2(q)}{(p-r+s-1)(q-s-1)\Gamma(p-r+s)\Gamma(q-s)\Gamma\left(p-r+s+\frac{1}{2}\right)} \\ &\times\frac{\Gamma(2p-2r+2s)\Gamma(2q-2s)\delta_{r,n}\delta_{s,k}}{\Gamma(q-s+1/2)\Gamma(2p-r+s-1)\Gamma(2q-s-1)} \end{aligned} \tag{5.135}$$

formundaki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned} {}_{13}Q_{0,0}^{(p,q)}(x,y) &= 1 \\ {}_{13}Q_{1,0}^{(p,q)}(x,y) &= 2(p-1)x \\ {}_{13}Q_{1,1}^{(p,q)}(x,y) &= 2(q-1)y \\ {}_{13}Q_{2,0}^{(p,q)}(x,y) &= 2(p-1)\left[2(p-2)x^2-1\right] \\ {}_{13}Q_{2,1}^{(p,q)}(x,y) &= 4(p-1)(q-1)xy \\ {}_{13}Q_{2,2}^{(p,q)}(x,y) &= 2(q-1)\left[2(q-2)y^2-1\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklindedir.

Sonuç 5.21 (5.134) tanımında $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ değişken değiştirmesi yapılarak $p \to \infty$ ve $q \to \infty$ için limit alınırsa (4.26) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} & \lim_{p,q\to\infty}\left[p^{-\frac{r-s}{2}}q^{-\frac{s}{2}}\ {}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}},\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\right] \\ = & \lim_{p,q\to\infty}\left[p^{-\frac{r-s}{2}}I_{r-s}^{(p)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)q^{-\frac{s}{2}}I_{s}^{(q)}\left(\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\right] \\ = & H_{r-s}(x)\,H_s(y) = H_{r,s}(x,y) \end{aligned} \tag{5.136}$$

elde edilir. Burada $H_{r,s}(x,y)$ polinomları (5.105) ile verilen Hermite-Hermite polinomlarıdır.

Teorem 5.40 (5.134) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & {}_{13}Q_{r+1,s}^{(p,q)}(x,y) + (r-s)(2p-r+s-1)\ {}_{13}Q_{r-1,s}^{(p,q)}(x,y) \\ = & \ 2(p-r+s-1)\,x\ {}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.137}$$

ve

$$\begin{aligned} {}_{13}Q_{r+1,s+1}^{(p,q)}(x,y) = & \ 2(q-s-1)\,y\ {}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \\ & -s(2q-s-1)\ {}_{13}Q_{r-1,s-1}^{(p,q)}(x,y), \end{aligned} \tag{5.138}$$

$j = 1, 2, ..., r-s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left({}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) = 2^j(r-s+1-j)_j(p-j)_j\ {}_{13}Q_{r-j,s}^{(p-j,q)}(x,y) \tag{5.139}$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left({}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right) = 2^j(s+1-j)_j(q-j)_j\ {}_{13}Q_{r-j,s-j}^{(p,q-j)}(x,y) \tag{5.140}$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (5.137)'yi ispatlamak için $I_r^{(p)}(x)$ polinomları için bilinen (4.21) rekürans formülünde $r \to r-s$ yazılarak elde edilen denklemin her iki tarafı $I_s^{(q)}(y)$ ile çarpılır. Daha sonra polinomun tanımı kullanılarak (5.137) elde edilir.
Benzer şekilde (5.138)'i elde etmek için (4.21)'de $r \to s$, $p \to q$, $x \to y$ yazılır ve elde edilen denklemin her iki tarafı $I_{r-s}^{(p)}(x)$ ile çarpılarak polinomun tanımı kullanılır.

(5.139) ve (5.140)'ı göstermek için (4.22) eşitliği uygulanarak sırasıyla ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesinin x değişkenine göre j kez ve y değişkenine göre j kez kısmi türevi alınarak polinomun tanımı kullanılır. ■

Sonuç 5.22 ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomu için elde edilen (5.137), (5.138), (5.139) ve (5.140) rekürans bağıntılarında $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı $p^{-\frac{r-s+1}{2}}q^{-\frac{s}{2}}$ ifadesi ile çarpıldıktan sonra (5.136) bağıntısı kullanılarak $p,q \to \infty$ için limit alınırsa aşağıdaki rekürans bağıntıları elde edilir:

$$H_{r+1,s}(x,y) = 2xH_{r,s}(x,y) - 2(r-s)H_{r-1,s}(x,y),$$

$$H_{r+1,s+1}(x,y) = 2yH_{r,s}(x,y) - 2sH_{r-1,s-1}(x,y),$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}(H_{r,s}(x,y)) = 2^j(r-s+1-j)_j \; H_{r-j,s}(x,y)$$

ve

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}(H_{r,s}(x,y)) = 2^j(s+1-j)_j \; H_{r-j,s-j}(x,y).$$

Teorem 5.41 ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} &\left(1+x^2\right)Q_{xx} + \left(1+y^2\right)Q_{yy} + x(3-2p)Q_x + y(3-2q)Q_y \\ = \; &[(r-s)(r-s+2(1-p)) + s(s+2(1-q))]Q \end{aligned} \quad (5.141)$$

formundaki kısmi türevli denklemi sağlar.

İspat. $I_r^{(p)}(x)$ polinomunun sağladığı (4.17) diferensiyel denkleminde $r \to r-s$ alarak elde edilen denklem $I_s^{(q)}(y)$ ile, ve yine (4.17)'de $r \to s$, $p \to q$, $x \to y$ alarak elde edilen denklem $I_{r-s}^{(p)}(x)$ ile çarpıldığında ortaya çıkan bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa (5.134) polinom ailesinin sağladığı kısmi türevli denkleme ulaşılır. ■

Sonuç 5.23 (5.141)'de $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ değişken değiştirmesi yapılarak her iki taraf $p^{-\frac{r-s}{2}}q^{-\frac{s}{2}}$ ifadesi ile çarpılır ve (5.136) bağıntısı yardımıyla önce $p \to \infty$ sonra $q \to \infty$ için limit alınırsa

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{r,s} - 2x\frac{\partial}{\partial x}H_{r,s} + 2(r-s)H_{r,s} = 0$$

denklemi elde edilir. Benzer işlem önce $q \to \infty$ sonra $p \to \infty$ için limit alınarak uygulanırsa

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_{r,s} - 2y \frac{\partial}{\partial y} H_{r,s} + 2s H_{r,s} = 0$$

denklemine ulaşılır.

Teorem 5.42 ${}_{13}Q_{r+s,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{13}Q_{r+s,s}^{(p,q)}(x,y) \frac{t^{r+s}}{r!s!} = \left(1+2tx-t^2\right)^{p-1} \left(1+2ty-t^2\right)^{q-1}$$

biçimindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat. (5.134) polinom ailesinin tanımında $r \to r+s$ alınırsa

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{13}Q_{r+s,s}^{(p,q)}(x,y) \frac{t^{r+s}}{r!s!} = \sum_{r=0}^{\infty} I_r^{(p)}(x) \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} I_s^{(q)}(y) \frac{t^s}{s!}$$

eşitliği yazılır. Burada tek değişkenli $I_r^{(p)}(x)$ polinomu için bilinen (4.25) doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılarak istenilene ulaşılır. ■

Teorem 5.43 ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi aşağıdaki Rodrigues formülü ile gösterilir:

$$\begin{aligned} {}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) &= (-2)^r \left(1+x^2\right)^{p-\frac{1}{2}} \left(1+y^2\right)^{q-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \frac{(p-(r-s))_{r-s}(q-s)_s}{(2p-2(r-s)-1)_{r-s}(2q-2s-1)_s} \\ &\quad \times \frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\partial y^s}\left[\left(1+x^2\right)^{(r-s)-\left(p-\frac{1}{2}\right)} \left(1+y^2\right)^{s-\left(q-\frac{1}{2}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Sonuç 5.24 Yukarıdaki Rodrigues formülünde $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ değişken değiştirmesi yapılarak her iki taraf $p^{-\frac{r-s}{2}} q^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpıldıktan sonra (5.136) eşitliği yardımıyla $p, q \to \infty$ için limit alınırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$H_{r,s}(x,y) = (-1)^r e^{x^2+y^2} \frac{\partial^r \left(e^{-\left(x^2+y^2\right)}\right)}{\partial x^{r-s}\partial y^s}.$$

5.14 ${}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$w_{14}(x,y) = x^q (1+x)^{-(p+q)} \left(1+y^2\right)^{-(u-1/2)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$D_{14} = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonal olan

$$\begin{aligned} {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y) &= M_{r-s}^{(p,q)}(x)\, I_s^{(u)}(y) \\ (s = 0,1,...,r \quad &; \quad r = 0,1,...,N) \end{aligned} \tag{5.142}$$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p > 2N+1$, $u > N+1$ ve $q > -1$ için ${}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty x^q (1+x)^{-(p+q)} \left(1+y^2\right)^{-(u-1/2)} \\ &\times {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\ {}_{14}Q_{n,k}^{(p,q,u)}(x,y)\, dydx \\ = &\ \frac{(r-s)!s!2^{2s-1}\sqrt{\pi}\Gamma(p-r+s)\Gamma(q+r-s+1)}{(p-2(r-s)-1)(u-s-1)\Gamma(p+q-r+s)\Gamma(u-s)} \\ &\times \frac{\Gamma^2(u)\Gamma(2u-2s)}{\Gamma\left(u-s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2u-s-1)}\delta_{r,n}\delta_{s,k} \end{aligned} \tag{5.143}$$

ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} {}_{14}Q_{0,0}^{(p)}(x,y) &= 1 \\ {}_{14}Q_{1,0}^{(p)}(x,y) &= (p-2)x-(q+1) \\ {}_{14}Q_{1,1}^{(p)}(x,y) &= 2(u-1)y \\ {}_{14}Q_{2,0}^{(p)}(x,y) &= (p-4)(p-3)x^2-2(p-3)(q+2)x+(q+2)(q+1) \\ {}_{14}Q_{2,1}^{(p)}(x,y) &= 2(u-1)y[(p-2)x-(q+1)] \\ {}_{14}Q_{2,2}^{(p)}(x,y) &= 2(u-1)\left[2(u-2)y^2-1\right] \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Sonuç 5.25 (5.142) tanımında $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{u}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı $u^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpıldıktan sonra $p \to \infty$ ve $u \to \infty$ için (4.9) ve (4.26) bağıntıları yardımıyla limit alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{p,u\to\infty}\left[u^{-\frac{s}{2}}\ {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{\sqrt{u}}\right)\right] &= \lim_{p,u\to\infty}\left[M_{r-s}^{(p,q)}\left(\frac{x}{p}\right)u^{-\frac{s}{2}}I_s^{(u)}\left(\frac{y}{\sqrt{u}}\right)\right]\\ &= (-1)^{r-s}(r-s)!L_{r-s}^{(q)}(x)\,H_s(y)\,,\end{aligned}$$

elde edilir ki bu polinom $\Lambda = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ bölgesi üzerinde $w(x,y) = x^q e^{-\left(x+y^2\right)}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan Laguerre-Hermite polinomudur (Suetin 1988). Bu polinomlar

$$E_{r,s}^{(q)}(x,y) := L_{r-s}^{(q)}(x)\,H_s(y) \tag{5.144}$$

ile gösterilirse yukarıdaki limit bağıntısı

$$\lim_{p,u\to\infty}\left[u^{-\frac{s}{2}}\ {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{\sqrt{u}}\right)\right] = (-1)^{r-s}(r-s)!\ E_{r,s}^{(q)}(x,y) \tag{5.145}$$

olarak yazılır.

Teorem 5.44 (5.142) ile tanımlanan polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}&(p-r+s-1)(p-2(r-s))\ {}_{14}Q_{r+1,s}^{(p,q,u)}(x,y)\\ &+(r-s)(p-2(r-s)-2)(p+q-r+s)(q+r-s)\ {}_{14}Q_{r-1,s}^{(p,q,u)}(x,y)\\ =\ &(p-2(r-s)-1)\{(p-2(r-s))(p-2(r-s)-2)x\\ &+2(r-s)(r-s+1)-p(q+2(r-s)+1)\}\ {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\end{aligned} \tag{5.146}$$

ve

$$\begin{aligned}{}_{14}Q_{r+1,s+1}^{(p,q,u)}(x,y) &= 2(u-s-1)\,y\ {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\\ &\quad -s(2u-s-1)\ {}_{14}Q_{r-1,s-1}^{(p,q,u)}(x,y)\,,\end{aligned} \tag{5.147}$$

$j = 1, 2, ..., r-s$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left({}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\right) &= (r-s+1-j)_j\,(p-r+s-j)_j\\ &\quad\times\ {}_{14}Q_{r-j,s}^{(p-2j,q+j,u)}(x,y)\end{aligned} \tag{5.148}$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left({}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\right) = 2^j\,(s+1-j)_j\,(u-j)_j\ {}_{14}Q_{r-j,s-j}^{(p,q,u-j)}(x,y) \tag{5.149}$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (5.146)'yı göstermek için $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomları için bilinen (4.5) rekürans formülünde $r \to r-s$ yazılarak elde edilen denklemin her iki tarafı $I_s^{(u)}(y)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& M_{r-s+1}^{(p,q)}(x)\, I_s^{(u)}(y) \\
= & \left\{ \frac{(p-2(r-s)-1)(p-2(r-s)-2)}{p-(r-s)-1} x + (p-2(r-s)-1) \right. \\
& \left. \times \frac{[2(r-s)(r-s+1) - p(q+2(r-s)+1)]}{(p-(r-s)-1)(p-2(r-s))} \right\} M_{r-s}^{(p,q)}(x)\, I_s^{(u)}(y) \\
& - \frac{(r-s)(p-2(r-s)-2)(p+q-(r-s))(q+(r-s))}{(p-(r-s)-1)(p-2(r-s))} \\
& \times M_{r-s-1}^{(p,q)}(x)\, I_s^{(u)}(y)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (5.142) bağıntısı kullanılırsa istenilen elde edilir.
$I_r^{(p)}(x)$ polinomları için bilinen (4.21) rekürans formülünde $r \to s$, $p \to u$, $x \to y$ yazılarak elde edilen denklemin her iki tarafı $M_{r-s}^{(p,q)}(x)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
M_{r-s}^{(p,q)}(x)\, I_{s+1}^{(u)}(y) &= 2(u-s-1)\, M_{r-s}^{(p,q)}(x)\, I_s^{(u)}(y) \\
&\quad - s(2u-s-1)\, M_{r-s}^{(p,q)}(x)\, I_{s-1}^{(u)}(y)
\end{aligned}$$

elde edilir ve (5.142) polinom tanımı kullanılırsa (5.147) eşitliğine ulaşılır.
(5.148) eşitliği için (4.6) bağıntısı uygulanarak polinomun x değişkenine göre j kez ve (5.149) eşitliği için ise (4.22) eşitliği kullanılarak polinomun y değişkenine göre j kez kısmi türevi alınarak (5.142) tanımının kullanılması yeterlidir. ■

Sonuç 5.26 (5.146), (5.147), (5.148) ve (5.149) rekürans bağıntılarında $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{u}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve eşitliğin her iki tarafı $u^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpılarak (5.145) bağıntısı yardımıyla $p, u \to \infty$ için limit alınırsa $E_{r,s}^{(q)}(x,y)$ polinomları için sırasıyla aşağıdaki rekürans bağıntılarına ulaşılır:

$$\begin{aligned}
& (r-s+1)\ E_{r+1,s}^{(q)}(x,y) + (q+r-s)\, E_{r-1,s}^{(q)}(x,y) \\
= & \ (q+2(r-s)+1-x)\ E_{r,s}^{(q)}(x,y),
\end{aligned}$$

$$E_{r+1,s+1}^{(q)}(x,y) = 2y\ E_{r,s}^{(q)}(x,y) - 2s\ E_{r-1,s-1}^{(q)}(x,y),$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(E_{r,s}^{(q)}(x,y)\right) = (-1)^j\ E_{r-j,s}^{(q+j)}(x,y)$$

ve

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left(E_{r,s}^{(q)}(x,y)\right)=2^j(s+1-j)_j\ E_{r-j,s-j}^{(q)}(x,y).$$

Teorem 5.45 ${}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} & x(x+1)Q_{xx}+\left(1+y^2\right)Q_{yy}-[(p-2)x-(q+1)]Q_x \qquad (5.150)\\ +&(3-2u)yQ_y=((r-s)(r-s+1-p)+s(s+2(1-u)))Q \end{aligned}$$

formundaki kısmi türevli denklemi sağlar.

İspat. $M_r^{(p,q)}(x)$ polinomlarının sağladığı (4.1) diferensiyel denkleminde $r\to r-s$ alarak elde edilen denklem $I_s^{(u)}(y)$ ile, $I_r^{(p)}(x)$ polinomunun sağladığı (4.17) diferensiyel denkleminde $r\to s$, $p\to u$, $x\to y$ alarak elde edilen denklem ise $M_{r-s}^{(p,q)}(x)$ ile çarpıldığında ortaya çıkan iki denklem taraf tarafa toplanırsa (5.142) polinom ailesinin sağladığı kısmi türevli denkleme ulaşılır. ■

Sonuç 5.27 (5.150) kısmi türevli denkleminde $x\to\frac{x}{p}$ ve $y\to\frac{y}{\sqrt{u}}$ değişken değiştirmesi yapıldıktan sonra her iki taraf $u^{-\frac{s}{2}}$ ifadesi ile çarpılır ve (5.145) gözönünde bulundurularak önce $p\to\infty$ sonra $u\to\infty$ için limit alınırsa

$$x\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_{r,s}^{(q)}+(q+1-x)\frac{\partial}{\partial x}E_{r,s}^{(q)}+(r-s)E_{r,s}^{(q)}=0$$

denklemi bulunur. Benzer işlem önce $u\to\infty$ sonra $p\to\infty$ için limit alınarak uygulanırsa

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_{r,s}^{(q)}-2y\frac{\partial}{\partial y}E_{r,s}^{(q)}+2sE_{r,s}^{(q)}=0$$

denklemi elde edilir.

Teorem 5.46 ${}_{14}Q_{r+s,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\sum_{r,s=0}^{\infty}{}_{14}Q_{r+s,s}^{(p,q,u)}(x,y)\frac{t^{r+s}}{r!s!}=\frac{2^{-p}\left(1-t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right)^{p+q}\left(1+2ty-t^2\right)^{u-1}}{\sqrt{(1+t)^2+4xt}\left(1+t+\sqrt{(1+t)^2+4xt}\right)^{q}}$$

biçimindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat. (5.142) polinom ailesinin tanımında $r\to r+s$ alınır ve $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomları için bilinen (4.8) ve (4.25) doğurucu fonksiyon bağıntıları uygulanırsa istenilen doğurucu fonksiyon elde edilir. ■

Teorem 5.47 ${}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinom ailesi

$$ {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y) = (-1)^r 2^s \frac{(1+x)^{p+q}(u-s)_s (1+y^2)^{u-\frac{1}{2}}}{x^q (2u-2s-1)_s} \times \frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\partial y^s}\left\{ x^{r-s+q}(1+x)^{r-s-(p+q)}\left(1+y^2\right)^{s-\left(u-\frac{1}{2}\right)}\right\} \tag{5.151} $$

şeklindeki Rodrigues formülü ile gösterilir.

Sonuç 5.28 ${}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinomlarının (5.151) Rodrigues formülünde $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{u}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve her iki taraf $u^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpıldıktan sonra (5.145) bağıntısı kullanılarak $p, u \to \infty$ için limit alınırsa

$$ E_{r,s}^{(q)}(x,y) = \frac{(-1)^s x^{-q} \exp(x+y^2)}{(r-s)!} \frac{\partial^r \left(x^{r-s+q}\exp(-x-y^2)\right)}{\partial x^{r-s}\partial y^s} $$

şeklindeki Rodrigues bağıntısı elde edilir.

5.15 ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinom Ailesi

Tek değişkenli $N_r^{(p)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarından yararlanarak

$$ w_{15}(x,y) = x^{-p}\left(1+y^2\right)^{-(q-1/2)}\exp(-1/x) $$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$ D_{15} = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\} $$

bölgesinde ortogonal olan

$$ {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = N_{r-s}^{(p)}(x)\, I_s^{(q)}(y) \tag{5.152} $$
$$ (s = 0,1,...,r \quad ; \quad r = 0,1,...,N) $$

polinom ailesini tanımlayalım. Burada $N = maks\{r,n\}$, $p > 2N+1$ ve $q > N+1$ için ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty x^{-p}\left(1+y^2\right)^{-(q-1/2)}\exp(-1/x) \times {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\ {}_{15}Q_{n,k}^{(p,q)}(x,y)\,dydx \tag{5.153} $$
$$ = \frac{2^{2s-1}\sqrt{\pi}\,(r-s)!s!\Gamma(p-r+s)\Gamma^2(q)\Gamma(2q-2s)\delta_{r,n}\delta_{s,k}}{(p-2(r-s)-1)(q-s-1)\Gamma(q-s)\Gamma(q-s+1/2)\Gamma(2q-s-1)} $$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\begin{aligned}
{}_{15}Q_{0,0}^{(p,q)}(x,y) &= 1 \\
{}_{15}Q_{1,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-2)\,x-1 \\
{}_{15}Q_{1,1}^{(p,q)}(x,y) &= 2\,(q-1)\,y \\
{}_{15}Q_{2,0}^{(p,q)}(x,y) &= (p-4)\,(p-3)\,x^2-2\,(p-3)\,x+1 \\
{}_{15}Q_{2,1}^{(p,q)}(x,y) &= 2\,(q-1)\,y\,[(p-2)\,x-1] \\
{}_{15}Q_{2,2}^{(p,q)}(x,y) &= 4\,(q-2)\,(q-1)\,y^2-2\,(q-1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

formundadır.

Sonuç 5.29 (5.152) polinom tanımında $y \rightarrow \frac{y}{\sqrt{q}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve elde edilen eşitlik $q^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpıldıktan sonra $q \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa (4.26) bağıntısından faydalanılarak

$$\begin{aligned}
\lim_{q\rightarrow\infty}\left[q^{-\frac{s}{2}}\ {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\right] &= \lim_{q\rightarrow\infty}\left[N_{r-s}^{(p)}(x)\,q^{-\frac{s}{2}}I_s^{(q)}\left(\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\right] \qquad (5.154)\\
&= N_{r-s}^{(p)}(x)\,H_s(y),
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada bir sonlu ve bir sonsuz ortogonal polinomun çarpımı olan bu polinomu

$$K_{r,s}^{(p)}(x,y) = N_{r-s}^{(p)}(x)\,H_s(y) \qquad (5.155)$$

ile gösterelim.

Teorem 5.48 ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
&(p-2\,(r-s))\,(p-r+s-1)\ {}_{15}Q_{r+1,s}^{(p,q)}(x,y) \qquad (5.156)\\
&+(r-s)\,(p-2\,(r-s)-2)\ {}_{15}Q_{r-1,s}^{(p,q)}(x,y) \\
=\ &[(p-2\,(r-s))\,(p-2\,(r-s)-2)\,x-p] \\
&\times(p-2\,(r-s)-1)\ {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
{}_{15}Q_{r+1,s+1}^{(p,q)}(x,y) &= 2\,(q-s-1)\,y\ {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) \qquad (5.157)\\
&\quad -s\,(2q-s-1)\ {}_{15}Q_{r-1,s-1}^{(p,q)}(x,y),
\end{aligned}$$

$j = 1, 2, ..., r - s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left[\ {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] = (r-s+1-j)_j\,(p-r+s-j)_j\ {}_{15}Q_{r-j,s}^{(p-2j,q)}(x,y) \quad (5.158)$$

ve $j = 1, 2, ..., s$ için

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left[\ {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right] = 2^j\,(s+1-j)_j\,(q-j)_j\ {}_{15}Q_{r-j,s-j}^{(p,q-j)}(x,y) \quad (5.159)$$

şeklindeki rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (5.156)'yı elde etmek için önce (4.13) rekürans bağıntısında $r \to r-s$ yazılarak elde edilen denklem $I_s^{(q)}(y)$ ile çarpılır, daha sonra polinomun tanımı kullanılarak rekürans bağıntısına ulaşılır.

Benzer şekilde (5.157)'yi göstermek için (4.21) rekürans bağıntısında $r \to s$, $p \to q$, $x \to y$ yazılarak elde edilen denklem $N_{r-s}^{(p)}(x)$ ile çarpılır ve polinomun tanımı kullanılır.

(4.14) ve (4.22) bağıntıları göz önüne alınarak polinomun x değişkenine göre j kez ve y değişkenine göre j kez kısmi türevleri alındığında sırasıyla (5.158) ve (5.159) eşitlikleri elde edilir. ■

Sonuç 5.30 (5.156), (5.157), (5.158) ve (5.159) rekürans bağıntılarında $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve her iki taraf $q^{-\frac{s}{2}}$ ifadesi ile çarpıldıktan sonra (5.154) ve (5.155) eşitlikleri yardımıyla $q \to \infty$ için limit alınırsa sırasıyla aşağıdaki rekürans bağıntılarına ulaşılır:

$$\begin{aligned} & (p-2(r-s))(p-r+s-1)\,K_{r+1,s}^{(p)}(x,y) \\ & +(r-s)(p-2(r-s)-2)\,K_{r-1,s}^{(p)}(x,y) \\ = \ & (p-2(r-s)-1)\left[(p-2(r-s))(p-2(r-s)-2)\,x-p\right]K_{r,s}^{(p)}(x,y), \end{aligned}$$

$$K_{r+1,s+1}^{(p)}(x,y) = 2yK_{r,s}^{(p)}(x,y) - 2sK_{r-1,s-1}^{(p)}(x,y),$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(K_{r,s}^{(p)}(x,y)\right) = (r-s+1-j)_j\,(p-r+s-j)_j\ K_{r-j,s}^{(p-2j)}(x,y)$$

ve

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\left(K_{r,s}^{(p)}(x,y)\right) = 2^j\,(s+1-j)_j\ K_{r-j,s-j}^{(p)}(x,y).$$

Teorem 5.49 (5.152) ile tanımlanan polinom ailesi

$$\begin{aligned} & x^2 Q_{xx} + \left(1+y^2\right) Q_{yy} + \left(1-(p-2)\,x\right) Q_x + y\left(1+2\left(1-q\right)\right) Q_y \\ = & \left\{(r-s)\,(r-s+1-p) + s\,(s+2\,(1-q))\right\} Q \end{aligned}$$

kısmi türevli denklemi sağlar.

İspat. $N_r^{(p)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomlarının sağladığı (4.10) ve (4.17) diferensiyel denklemlerinden yararlanarak yukarıdaki kısmi türevli denklem elde edilir. ■

Sonuç 5.31 ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomları için elde edilen yukarıdaki kısmi türevli denklemde, $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ değişken değiştirmesi yapıldıktan sonra her iki taraf $q^{-\frac{s}{2}-1}$ ile çarpılır ve (5.154) ile (5.155) bağıntıları gözönünde bulundurularak $q \to \infty$ için limit alınırsa

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} K_{r,s}^{(p)} - 2y\frac{\partial}{\partial y} K_{r,s}^{(p)} + 2sK_{r,s}^{(p)} = 0$$

denklemine ulaşılır ki $K_{r,s}^{(p)}(x,y)$ polinomları bu denklemi sağlar.

Teorem 5.50 ${}_{15}Q_{r+s,s}^{(p+2r,q)}(x,y)$ polinom ailesi

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s=0}^{\infty} {}_{15}Q_{r+s,s}^{(p+2r,q)}(x,y)\,\frac{t^{r+s}}{r!s!} \\ = & (1-tx)^{-p}\left(1+2ty-t^2\right)^{q-1}\exp\left(-\frac{t}{1-tx}\right) \end{aligned} \tag{5.160}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat. ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesinin tanımında $p \to p+2r$, $r \to r+s$ alınırsa ve $N_r^{(p+2r)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomları için bilinen (4.16) ve (4.25) doğurucu fonksiyon bağıntıları kullanılırsa (5.160) ile verilen doğurucu fonksiyon elde edilir. ■

Teorem 5.51 ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinom ailesi aşağıdaki Rodrigues formülü ile gösterilir:

$$\begin{aligned} {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y) = & \frac{(-1)^r\, 2^s x^p\,(q-s)_s \exp(1/x)}{(1+y^2)^{-(q-1/2)}\,(2q-2s-1)_s} \\ & \times \frac{\partial^r}{\partial x^{r-s}\partial y^s}\left(\frac{x^{2(r-s)-p}\exp(-1/x)}{(1+y^2)^{-s+q-1/2}}\right). \end{aligned} \tag{5.161}$$

Sonuç 5.32 (5.161) formülünde $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ değişken değiştirmesi yapılır ve elde edilen eşitlik $q^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpıldıktan sonra (5.154) ve (5.155) bağıntıları yardımıyla $q \to \infty$ için limit alınırsa $K_{r,s}^{(p)}(x, y)$ polinomlarının bir gösterimi olan

$$K_{r,s}^{(p)}(x, y) = (-1)^r x^p e^{\frac{1}{x}+y^2} \frac{\partial^r \left(x^{2(r-s)-p} \exp\left(-\frac{1}{x} - y^2\right)\right)}{\partial x^{r-s} \partial y^s}$$

Rodrigues formülüne ulaşılır.

6. $Q_{R,S}$ POLİNOMLARININ SAĞLADIĞI 4. BASAMAKTAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER

Lee (2005), klasik ortogonal polinomların (Jacobi, Hermite ve Laguerre polinomları) ikili çarpımları için sağlanan kısmi türevli denklemleri elde etmek için bir metod vermiştir. Bu bölümde, Lee'nin metodunu $M_r^{(p,q)}(x)$, $N_r^{(p)}(x)$, $I_r^{(p)}(x)$ sonlu ortogonal polinom aileleri için uygulayarak bu polinomların ikili çarpımları için 4. basamaktan kısmi türevli denklemler türeteceğiz.
İlk olarak

$$L = \widetilde{a_2}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \widetilde{a_1}(x)\frac{\partial}{\partial x} = \left(a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(a_{11}x + a_{10}\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

ve

$$T = \widetilde{b_2}(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \widetilde{b_1}(y)\frac{\partial}{\partial y} = \left(b_{22}y^2 + b_{21}y + b_{20}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(b_{11}y + b_{10}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde iki lineer operatör ele alalım.

Teorem 6.1 $\{A_r(x)\}\mid_{r=0}^{\infty}$ ve $\{B_r(y)\}\mid_{r=0}^{\infty}$ ortogonal polinom sistemleri

$$L[A_r] = \alpha_r A_r = r\left(a_{22}(r-1) + a_{11}\right)A_r$$

ve

$$T[B_r] = \beta_r B_r = r\left(b_{22}(r-1) + b_{11}\right)B_r$$

ifadelerini sağlasın. $\{\psi_r\}\mid_{r=0}^{\infty} = \{A_{r-s}(x)B_s(y)\}\mid_{s=0,r=0}^{r,\infty}$ iki değişkenli ortogonal polinom ailesi aşağıdaki kısmi türevli denklemleri sağlar:
(a) $a_{22} = b_{22} = 0$ ise

$$b_{11}L[w] + a_{11}T[w] = a_{11}b_{11}rw,$$

(b) $a_{22} \neq 0$ ve $b_{22} = 0$ ise

$$b_{11}^2L[w] - a_{22}T^2[w] + b_{11}\left[(2r-1)a_{22} + a_{11}\right]T[w] = b_{11}^2\alpha_r w,$$

(c) $a_{22} = 0$ ve $b_{22} \neq 0$ ise

$$a_{11}^2T[w] - b_{22}L^2[w] + a_{11}\left[(2r-1)b_{22} + b_{11}\right]L[w] = a_{11}^2\beta_r w,$$

(d) $a_{22} \neq 0$ ve $b_{22} \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} S_r^2 T[w] &= b_{22}(a_{22}T - b_{22}L + b_{22}\alpha_r)^2[w] \\ &\quad + (b_{11} - b_{22}) S_r (a_{22}T - b_{22}L + b_{22}\alpha_r)[w], \end{aligned} \tag{6.1}$$

burada $S_r = 2(r-1)a_{22}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22}$ dir (Lee 2005).

İspat. Burada çalışacağımız polinomlar teoremin son durumuna uygun olduğu için yalnızca son durumun ispatını verelim. $a_{22} \neq 0$ ve $b_{22} \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} L[w] &= (r-s)(a_{22}(r-s-1) + a_{11})w \\ &= (r-s)(a_{22}(r-1) + a_{11} - sa_{22})w \\ &= r(a_{22}(r-1) + a_{11})w - rsa_{22}w \\ &\quad - s(a_{22}(r-1) + a_{11} - sa_{22})w \\ &= \alpha_r w + s^2 a_{22} w + sw[-ra_{22} - (r-1)a_{22} - a_{11}] \\ &= s^2 a_{22} w - sw[(2r-1)a_{22} + a_{11}] + \alpha_r w, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T[w] &= s(b_{22}(s-1) + b_{11})w \\ &= s^2 b_{22} w - sb_{22} w + sb_{11} w \\ &= s^2 b_{22} w + s(b_{11} - b_{22})w \end{aligned} \tag{6.2}$$

dir. Buradan elde edilen

$$s^2 w = \frac{T[w] - s(b_{11} - b_{22})w}{b_{22}}$$

ifadesi $L[w]$'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L[w] &= \frac{a_{22}}{b_{22}}[T[w] - s(b_{11} - b_{22})w] \\ &\quad - sw[(2r-1)a_{22} + a_{11}] + \alpha_r w \\ &= -sw\left[\frac{a_{22}(b_{11} - b_{22})}{b_{22}} + (2r-1)a_{22} + a_{11}\right] \\ &\quad + \frac{a_{22}T[w]}{b_{22}} + \alpha_r w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad b_{22}L[w] = -sw[a_{22}b_{11} + 2(r-1)a_{22}b_{22} + a_{11}b_{22}] + a_{22}T[w] + \alpha_r b_{22} w$$

$$\Rightarrow sw = \frac{a_{22}T[w] - b_{22}L[w] + \alpha_r b_{22} w}{a_{22}b_{11} + 2(r-1)a_{22}b_{22} + a_{11}b_{22}}$$

elde edilir. Burada

$$H_n[w] = a_{22}T[w] + b_{22}\alpha_r w - b_{22}L[w]$$

ve

$$S_r = 2(r-1)a_{22}b_{22} + b_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} \tag{6.3}$$

olmak üzere

$$sw = \frac{H_r[w]}{S_r} \tag{6.4}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad H_r[w] = sS_r w \\
&\Rightarrow \quad H_r^2[w] = H_r[sS_r w] = sS_r H_r[w] = s^2 S_r^2 w \\
&\Rightarrow \quad s^2 w = \frac{H_r^2[w]}{S_r^2}.
\end{aligned}$$

Bu ifade ve (6.4) eşitliği, (6.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T[w] = b_{22}\frac{H_r^2[w]}{S_r^2} + (b_{11} - b_{22})\frac{H_r[w]}{S_r}$$

$$\Rightarrow S_r^2 T[w] = b_{22}H_r^2[w] + (b_{11} - b_{22})S_r H_r[w],$$

yani

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & S_r^2 T[w] = b_{22}(a_{22}T - b_{22}L + b_{22}\alpha_r)^2[w] \\
& + (b_{11} - b_{22})S_r(a_{22}T - b_{22}L + b_{22}\alpha_r)[w]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada S_r, (6.3) eşitliği ile verilmektedir. ■

Bir değişkenli sonlu ortogonal polinomlar için en önemli özelliklerden biri, böylesi polinomların

$$\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)y_r'' + (d_1x + e_1)y_r' = r(d_1 + (r-1)a_1)y_r$$

formunda 2. basamaktan diferensiyel denklemi sağladığıdır. Burada $\widetilde{a_1}(x) = d_1x + e_1$ ve $\widetilde{a_2}(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ katsayıları için sırasıyla $der(\widetilde{a_1}(x)) \leq 1$, $der(\widetilde{a_2}(x)) \leq 2$ sağlanır. Ayrıca $\alpha_r = r(d_1 + (r-1)a_1)$ özdeğerdir.

Bu denklemin bilinen üç sonlu ortogonal polinom çözümü $M_r^{(p,q)}$, $N_r^{(p)}$, $I_r^{(p)}$ polinomları olup

(i) $\left\{M_r^{(p,q)}(x)\right\}|_{r=0}^{N}$ $\left(N < \frac{p-1}{2}, q > -1\right)$ polinomlarının

$$x(x+1)y''(x) + ((2-p)x + q + 1)y'(x) - r(r+1-p)y(x) = 0$$

diferensiyel denklemini

(ii) $\left\{N_r^{(p)}(x)\right\}|_{r=0}^{N}$ $\left(N < \frac{p-1}{2}\right)$ polinomlarının

$$x^2y''(x) + ((2-p)x+1)y'(x) - r(r+1-p)y(x) = 0$$

diferensiyel denklemini ve

(iii) $\left\{I_r^{(p)}(x)\right\}|_{r=0}^{N}$ $(N < p-1)$ polinomlarının ise

$$\left(1+x^2\right)y''(x) + (3-2p)xy'(x) - r(r+2(1-p))y(x) = 0$$

diferensiyel denklemini sağladığını biliyoruz.

Yukarıdaki teoremde $a_{22} \neq 0$ ve $b_{22} \neq 0$ için $A_r(x)$ ve $B_r(y)$ polinomları ; $M_r^{(p,q)}(x)$, $N_r^{(p)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(x)$ polinomları olabilir. Buradan karşımıza 6 durum çıkar. Şimdi de her bir durum için kısmi türevli denklemleri ele alalım.

Durum 1

$A_r(x)$ ve $B_r(y)$ polinomları, $M_r^{(p,q)}$ polinomları olarak seçilsin. Böylelikle $p, u > 2N+1$ ve $q, v > -1$ için

$$\{\psi_r\}|_{r=0}^{N} = \left\{{}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)\right\}|_{s=0}^{r}|_{r=0}^{N} = \left\{M_{r-s}^{(p,q)}(x)\,M_s^{(u,v)}(y)\right\}|_{s=0}^{r}|_{r=0}^{N}$$

elde edilir. Bu durumda $\widetilde{a_2}(x) = x(x+1)$, $\widetilde{a_1}(x) = (2-p)x + q + 1$, $\widetilde{b_2}(y) = y(y+1)$ ve $\widetilde{b_1}(y) = (2-u)y + v + 1$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} a_{22} &= 1,\ a_{21} = 1,\ a_{20} = 0, \\ a_{11} &= 2-p,\ a_{10} = q+1, \\ b_{22} &= 1,\ b_{21} = 1,\ b_{20} = 0, \\ b_{11} &= 2-u,\ b_{10} = v+1 \end{aligned}$$

olduğundan (6.1) denklemi

$$\begin{aligned}
& (2r+2-u-p)^2\left[y(y+1)w_{yy}+((2-u)y+v+1)w_y\right] \\
= & \left[y(y+1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+((2-u)y+v+1)\frac{\partial}{\partial y}-x(x+1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right. \\
& \left.-((2-p)x+q+1)\frac{\partial}{\partial x}+r(r+1-p)\right]^2 w \\
& +(1-u)(2r+2-u-p)\left[y(y+1)w_{yy}+((2-u)y+v+1)w_y\right. \\
& \left.-x(x+1)w_{xx}-((2-p)x+q+1)w_x+r(r+1-p)w\right]
\end{aligned}$$

haline gelir. Gerekli düzenlemeler sonucunda $\left\{ {}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)\right\} |_{s=0}^{r}|_{r=0}^{N}$ polinomlarının sağladığı aşağıdaki dördüncü basamaktan kısmi türevli denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
& x^2(x+1)^2 w_{xxxx}+y^2(y+1)^2 w_{yyyy}-2xy(x+1)(y+1)w_{xxyy} \\
& +2x(x+1)((4-p)x+q+2)w_{xxx}-2x(x+1)((2-u)y+v+1)w_{xxy} \\
& -2y(y+1)((2-p)x+q+1)w_{xyy}+2y(y+1)((4-u)y+v+2)w_{yyy} \\
& -\{x(x+1)[r(r+1-p)+(r+1-u)(r+2-u-p)-2(3-p)] \\
& -((2-p)x+q+1)((4-p)x+q+2)\}w_{xx} \\
& -2((2-p)x+q+1)((2-u)y+v+1)w_{xy} \\
& -\{y(y+1)[r(r+1-u)+(r+1-p)(r+2-u-p)-2(3-u)] \\
& -((2-u)y+v+1)((4-u)y+v+2)\}w_{yy} \\
& -((2-p)x+q+1)[r(r+1-p)-(2-p) \\
& +(r+1-u)(r+2-u-p)]w_x \\
& -((2-u)y+v+1)\left[(2-u-p)(2r+1-p)+2\left(r^2-1\right)+u\right]w_y \\
& +r(r+1-p)(r+1-u)(r+2-u-p)w \\
= & \ 0.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Sonuç 6.1 (6.5) denkleminde $x \to \frac{x}{p}$ ve $y \to \frac{y}{u}$ değişken değiştirmesi yapılır ve önce $p \to \infty$ sonra $u \to \infty$ için limit alınırsa (5.79) ile tanımlanan ve ${}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)$ sonlu ortogonal polinomlarının limiti olan $L_{r,s}^{(q,v)}(x,y)$ polinomları için

$$xw_{xx}+yw_{yy}+(q+1-x)w_x+(v+1-y)w_y+rw=0$$

şeklindeki kısmi türevli denkleme ulaşılır (Suetin 1988).

Durum 2

$A_r(x)$ ve $B_r(y)$ polinomları, $N_r^{(p)}$ polinomları olsun, öyle ki $p, q > 2N+1$ olmak üzere

$$\{\psi_r\}\mid_{r=0}^{N}=\left\{\ {}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right\}\mid_{s=0}^{r}\mid_{r=0}^{N}=\left\{N_{r-s}^{(p)}(x)\,N_s^{(q)}(y)\right\}\mid_{s=0}^{r}\mid_{r=0}^{N}$$

dir. Bu durumda $\widetilde{a_2}(x) = x^2$, $\widetilde{a_1}(x) = (2-p)x+1$, $\widetilde{b_2}(y) = y^2$ ve $\widetilde{b_1}(y) = (2-q)y+1$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
a_{22} &= 1,\ a_{21}=a_{20}=0,\\
a_{11} &= 2-p,\ a_{10}=1,\\
b_{22} &= 1,\ b_{21}=b_{20}=0,\\
b_{11} &= 2-q,\ b_{10}=1
\end{aligned}$$

olduğundan (6.1) denklemi

$$\begin{aligned}
&(2r+2-p-q)^2\left[y^2w_{yy}+((2-q)y+1)w_y\right]\\
=&\left[y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+((2-q)y+1)\frac{\partial}{\partial y}-x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right.\\
&\left.-((2-p)x+1)\frac{\partial}{\partial x}+r(r+1-p)\right]^2 w\\
&+(1-q)(2r+2-p-q)\left[y^2w_{yy}+((2-q)y+1)w_y\right.\\
&\left.-x^2w_{xx}-((2-p)x+1)w_x+r(r+1-p)w\right]
\end{aligned}$$

haline gelir. Gerekli düzenlemeler sonucunda $\left\{\ {}_8Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right\}\mid_{s=0}^{r}\mid_{r=0}^{N}$ polinomlarının sağladığı aşağıdaki dördüncü basamaktan kısmi türevli denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
&x^4w_{xxxx}+y^4w_{yyyy}-2x^2y^2w_{xxyy}+2x^2((4-p)x+1)w_{xxx}\\
&-2x^2((2-q)y+1)w_{xxy}-2y^2((2-p)x+1)w_{xyy}\\
&+\left\{x^2\left[2(3-p)-(r+1-p)(2r+1-q)-(1-q)(r+1-q)\right]\right.\\
&\left.+((2-p)x+1)((4-p)x+1)\right\}w_{xx}\\
&+2y^2((4-q)y+1)w_{yyy}-2((2-p)x+1)((2-q)y+1)w_{xy}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{y^2\left[2(3-q)-(r+1-p)(r+2-p-q)-r(r+1-q)\right]\right.\\
&\left.+((2-q)y+1)((4-q)y+1)\right\}w_{yy}\\
&-((2-p)x+1)\left[(2r-q)(r+1-p)+(r-q)(2-q)\right]w_x\\
&-((2-q)y+1)\left[r(r+1-q)-(2-q)\right.\\
&\left.+(r+2-p-q)(r+1-p)\right]w_y\\
&+r(r+1-p)(r+1-u)(r+2-p-q)w\\
=\;&0.
\end{aligned}
$$

Durum 3

$A_r(x)$ ve $B_r(y)$ polinomları sırasıyla $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $N_r^{(p)}(y)$ polinomları olsunlar, öyle ki $p,u>2N+1$ ve $q>-1$ olmak üzere

$$
\{\psi_r\}\,|_{r=0}^{N}=\left\{{}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\right\}|_{s=0}^{r}|_{r=0}^{N}=\left\{M_{r-s}^{(p,q)}(x)\,N_s^{(u)}(y)\right\}|_{s=0}^{r}|_{r=0}^{N}
$$

dir. Bu durumda $\widetilde{a_2}(x)=x(x+1)$, $\widetilde{a_1}(x)=(2-p)x+q+1$, $\widetilde{b_2}(y)=y^2$ ve $\widetilde{b_1}(y)=(2-u)y+1$ dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
a_{22}&=1,\ a_{21}=1,\ a_{20}=0,\\
a_{11}&=2-p,\ a_{10}=q+1,\\
b_{22}&=1,\ b_{21}=b_{20}=0,\\
b_{11}&=2-u,\ b_{10}=1
\end{aligned}
$$

olduğundan (6.1) denklemi

$$
\begin{aligned}
&(2r+2-u-p)^2\left[y^2w_{yy}+((2-u)y+1)w_y\right]\\
=\;&\left[y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+((2-u)y+1)\frac{\partial}{\partial y}-x(x+1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right.\\
&\left.-((2-p)x+q+1)\frac{\partial}{\partial x}+r(r+1-p)\right]^2w\\
&+(1-u)(2r+2-u-p)\left[y^2w_{yy}+((2-u)y+1)w_y\right.\\
&\left.-x(x+1)w_{xx}-((2-p)x+q+1)w_x+r(r+1-p)w\right]
\end{aligned}
$$

haline gelir. Gerekli düzenlemeler sonucunda $\left\{{}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\right\}|_{s=0}^{r}|_{r=0}^{N}$ polinomlarının sağladığı aşağıdaki dördüncü basamaktan kısmi türevli denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
& x^2(x+1)^2 w_{xxxx} + y^4 w_{yyyy} - 2x(x+1)y^2 w_{xxyy} \\
& +2x(x+1)((4-p)x+q+2)w_{xxx} \\
& -2x(x+1)((2-u)y+1)w_{xxy} - 2y^2((2-p)x+q+1)w_{xyy} \\
& +\{x(x+1)[2(3-p)-r(r+1-p)-(r+1-u)(r+2-u-p)] \\
& +((2-p)x+q+1)((4-p)x+q+2)\}w_{xx} \\
& +2y^2((4-u)y+1)w_{yyy} - 2((2-p)x+q+1)((2-u)y+1)w_{xy} \\
& +\left\{y^2[2(3-u)-r(r+1-u)-(r+1-p)(r+2-u-p)]\right. \\
& \left.+((2-u)y+1)((4-u)y+1)\right\}w_{yy} \\
& +((2-p)x+q+1)[2-p-r(r+1-p) \\
& -(r+1-u)(r+2-u-p)]w_x \\
& +((2-u)y+1)[2-u-r(r+1-u)-(r+1-p)(r+2-u-p)]w_y \\
& +r(r+1-p)(r+1-u)(r+2-u-p)w \\
= {} & 0.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Sonuç 6.2 (6.6) denkleminde $x \to \frac{x}{p}$ alarak $p \to \infty$ için limit durumu incelenirse (5.97) ile tanımlanan ve ${}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinomlarının limiti olan $V_{r,s}^{(q,u)}(x,y)$ polinomları için

$$\begin{aligned}
x^2 w_{xxxx} + 2x(q+2-x)w_{xxx} + [(2r-1-u)x + (q+1-x)(q+2-x)]w_{xx} \\
-y^2 w_{yy} + (2r-u)(q+1-x)w_x + ((u-2)y-1)w_y + r(r+1-u)w = 0
\end{aligned}$$

kısmi türevli denklem elde edilir.

Durum 4

$A_r(x)$ ve $B_r(y)$ polinomları, $I_r^{(p)}$ polinomları olsunlar, öyle ki $p,q > N+1$ olmak üzere

$$\{\psi_r\}\big|_{r=0}^{N} = \left\{ {}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right\}\big|_{s=0}^{r}\big|_{r=0}^{N} = \left\{I_{r-s}^{(p)}(x)\, I_s^{(q)}(y)\right\}\big|_{s=0}^{r}\big|_{r=0}^{N}$$

dir. Bu durumda $\widetilde{a_2}(x) = 1+x^2$, $\widetilde{a_1}(x) = (3-2p)x$, $\widetilde{b_2}(y) = 1+y^2$ ve $\widetilde{b_1}(y) = (3-2q)y$ dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
a_{22} &= 1,\ a_{21}=0,\ a_{20}=1, \\
a_{11} &= 3-2p,\ a_{10}=0, \\
b_{22} &= 1,\ b_{21}=0,\ b_{20}=1, \\
b_{11} &= 3-2q,\ b_{10}=0
\end{aligned}
$$

olduğundan (6.1) denklemi

$$
\begin{aligned}
& 4\left(r+2-p-q\right)^2\left[\left(1+y^2\right)w_{yy}+\left(3-2q\right)yw_y\right] \\
= & \left[\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(3-2q\right)y\frac{\partial}{\partial y}-\left(1+x^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right. \\
& \left.-\left(3-2p\right)x\frac{\partial}{\partial x}+r\left(r+2-2p\right)\right]^2 w \\
& +4\left(1-q\right)\left(r+2-p-q\right)\left[\left(1+y^2\right)w_{yy}+\left(3-2q\right)yw_y\right. \\
& \left.-\left(1+x^2\right)w_{xx}-\left(3-2p\right)xw_x+r\left(r+2-2p\right)w\right]
\end{aligned}
$$

haline gelir. Gerekli düzenlemeler sonucunda $\left\{ {}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)\right\} |_{s=0}^{r}|_{r=0}^{N}$ polinomlarının sağladığı aşağıdaki dördüncü basamaktan kısmi türevli denklem elde edilir:

$$
\begin{aligned}
& \left(1+x^2\right)^2 w_{xxxx}+\left(1+y^2\right)^2 w_{yyyy}-2\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)w_{xxyy} \\
& +\left(7-2p\right)x\left(1+x^2\right)w_{xxx}-2\left(3-2q\right)y\left(1+x^2\right)w_{xxy} \\
& +2\left(5-2q\right)y\left(1+y^2\right)w_{yyy}-2\left(3-2p\right)\left(3-2q\right)xyw_{xy} \\
& -2\left(3-2p\right)x\left(1+y^2\right)w_{xyy} \\
& +\left\{2\left(1+x^2\right)\left[2\left(2-p\right)-2\left(1-q\right)\left(r+2-p-q\right)\right.\right. \\
& \left.\left.-r\left(r+2-2p\right)\right]+\left(3-2p\right)\left(5-2p\right)x^2\right\}w_{xx} \\
& +\left\{2\left(1+y^2\right)\left[2\left(2-q\right)-2\left(r+1-p\right)\left(r+2-p-q\right)\right.\right. \\
& \left.\left.+r\left(r+2-2p\right)\right]+\left(3-2q\right)\left(5-2q\right)y^2\right\}w_{yy} \\
& +\left(3-2p\right)x\left[3-2p-2r\left(r+2-2p\right)\right. \\
& \left.-4\left(1-q\right)\left(r+2-p-q\right)\right]w_x \\
& +\left(3-2q\right)y\left[3-2q+2r\left(r+2-2p\right)\right. \\
& \left.-4\left(r+1-p\right)\left(r+2-p-q\right)\right]w_y \\
& +r\left(r+2-2p\right)\left[r\left(r+2-2p\right)+4\left(1-q\right)\left(r+2-p-q\right)\right]w \\
= & \ 0.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Sonuç 6.3 (6.7) denkleminde $x \to \frac{x}{\sqrt{p}}$ ve $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ alarak her iki taraf $p^{-\frac{r-s}{2}}q^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpılıp önce $p \to \infty$ önce $q \to \infty$ için limit durumu incelenirse ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomlarının limiti olan (5.105) ile tanımlı $H_{r,s}(x,y)$ polinomları için

$$w_{xx} + w_{yy} - 2xw_x - 2yw_y + 2rw = 0$$

kısmi türevli denklem elde edilir.

Durum 5

$A_r(x)$ ve $B_r(y)$ polinomları sırasıyla $M_r^{(p,q)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(y)$ polinomları olsunlar. Böylelikle $p > 2N+1$, $u > N+1$ ve $q > -1$ için

$$\{\psi_r\}\big|_{r=0}^{N} = \left\{ {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\right\}\big|_{s=0}^{r}\big|_{r=0}^{N} = \left\{M_{r-s}^{(p,q)}(x)\, I_s^{(u)}(y)\right\}\big|_{s=0}^{r}\big|_{r=0}^{N}$$

dir. Bu durumda $\widetilde{a_2}(x) = x(x+1)$, $\widetilde{a_1}(x) = (2-p)x + q + 1$, $\widetilde{b_2}(y) = 1 + y^2$ ve $\widetilde{b_1}(y) = (3-2u)y$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
a_{22} &= 1,\ a_{21} = 1,\ a_{20} = 0,\\
a_{11} &= 2-p,\ a_{10} = q+1,\\
b_{22} &= 1,\ b_{21} = 0,\ b_{20} = 1,\\
b_{11} &= 3-2u,\ b_{10} = 0
\end{aligned}$$

olduğundan (6.1) denklemi

$$\begin{aligned}
& (2r+3-p-2u)^2\left[\left(1+y^2\right)w_{yy} + (3-2u)\,yw_y\right]\\
= & \left[\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (3-2u)\,y\frac{\partial}{\partial y} - x(x+1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right.\\
& \left. - ((2-p)x+q+1)\frac{\partial}{\partial x} + r(r+1-p)\right]^2 w\\
& +2(1-u)(2r+3-p-2u)\left[\left(1+y^2\right)w_{yy} + (3-2u)\,yw_y\right.\\
& \left. -x(x+1)w_{xx} - ((2-p)x+q+1)w_x + r(r+1-p)w\right]
\end{aligned}$$

haline gelir. Gerekli düzenlemeler sonucunda $\left\{ {}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)\right\}\big|_{s=0}^{r}\big|_{r=0}^{N}$ polinomlarının sağladığı aşağıdaki dördüncü basamaktan kısmi türevli denklem elde edilir:

$$
\begin{aligned}
& x^2(x+1)^2 w_{xxxx}+\left(1+y^2\right)^2 w_{yyyy}-2x(x+1)\left(1+y^2\right) w_{xxyy} \\
& +2x(x+1)((4-p)x+q+2) w_{xxx}-2(3-2u)x(x+1)yw_{xxy} \\
& -2\left(1+y^2\right)((2-p)x+q+1) w_{xyy}+2(5-2u)y\left(1+y^2\right) w_{yyy} \\
& +\{2x(x+1)[3-p-r(r+1-p)-(1-u)(2r+3-p-2u)] \\
& +((2-p)x+q+1)((4-p)x+q+2)\} w_{xx} \\
& -2(3-2u)((2-p)x+q+1) yw_{xy} \\
& +\left\{\left(1+y^2\right)[4(2-u)-(2r+1-p)(2r+3-p-2u)\right. \\
& \left.+2r(r+1-p)]+(5-2u)(3-2u)y^2\right\} w_{yy} \\
& +((2-p)x+q+1)[2-p-2r(r+1-p) \\
& -2(1-u)(2r+3-p-2u)] w_x+(3-2u)y[3-2u+2r(r+1-p) \\
& -(2r+1-p)(2r+3-p-2u)] w_y \\
& +r(r+1-p)[r(r+1-p)+2(1-u)(2r+3-p-2u)] w \\
= \; & 0.
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Sonuç 6.4 (6.8) denkleminde $x \rightarrow \frac{x}{p}$ ve $y \rightarrow \frac{y}{\sqrt{u}}$ alarak her iki taraf $u^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpıldıktan sonra sırasıyla $p \rightarrow \infty$ ve $u \rightarrow \infty$ için limit durumu incelenirse (5.144) ile tanımlanan ve ${}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinomlarının limiti olan $E_{r,s}^{(q)}(x,y)$ polinomlarının sağladığı

$$2xw_{xx}+w_{yy}+2(q+1-x)w_x-2yw_y+2rw=0$$

kısmi türevli denklem elde edilir.

Durum 6

$A_r(x)$ ve $B_r(y)$ polinomları sırasıyla $N_r^{(p)}(x)$ ve $I_r^{(p)}(y)$ polinomları olsunlar, öyle ki $p>2N+1$ ve $q>N+1$ olmak üzere

$$\{\psi_r\}\big|_{r=0}^{N}=\left\{{}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right\}\big|_{s=0}^{r}\big|_{r=0}^{N}=\left\{N_{r-s}^{(p)}(x)\,I_s^{(q)}(y)\right\}\big|_{s=0}^{r}\big|_{r=0}^{N}$$

dir. Bu durumda $\widetilde{a_2}(x)=x^2$, $\widetilde{a_1}(x)=(2-p)x+1$, $\widetilde{b_2}(y)=1+y^2$ ve $\widetilde{b_1}(y)=(3-2q)y$ dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
a_{22} &= 1,\ a_{21}=a_{20}=0,\\
a_{11} &= 2-p,\ a_{10}=1,\\
b_{22} &= 1,\ b_{21}=0,\ b_{20}=1,\\
b_{11} &= 3-2q,\ b_{10}=0
\end{aligned}
$$

olduğundan (6.1) denklemi

$$
\begin{aligned}
&(2r+3-p-2q)^2\left[\left(1+y^2\right)w_{yy}+(3-2q)\,yw_y\right]\\
=\ &\left[\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(3-2q)\,y\frac{\partial}{\partial y}-x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right.\\
&\left.-\left((2-p)\,x+1\right)\frac{\partial}{\partial x}+r\,(r+1-p)\right]^2 w\\
&+2\,(1-q)\,(2r+3-p-2q)\left[\left(1+y^2\right)w_{yy}+(3-2q)\,yw_y\right.\\
&\left.-x^2w_{xx}-\left((2-p)\,x+1\right)w_x+r\,(r+1-p)\,w\right]
\end{aligned}
$$

haline gelir. Gerekli düzenlemeler sonucunda $\left\{ {}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)\right\} |_{s=0}^{r}|_{r=0}^{N}$ polinomlarının sağladığı aşağıdaki dördüncü basamaktan kısmi türevli denklem elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&x^4w_{xxxx}+\left(1+y^2\right)^2w_{yyyy}-2x^2\left(1+y^2\right)w_{xxyy}\\
&+2\left((4-p)\,x+1\right)x^2w_{xxx}-2\,(3-2q)\,yx^2w_{xxy}\\
&-2\left((2-p)\,x+1\right)\left(1+y^2\right)w_{xyy}+2\,(5-2q)\,y\left(1+y^2\right)w_{yyy}\\
&+\left\{2x^2\left[3-p-(1-q)\,(2r+3-p-2q)-r\,(r+1-p)\right]\right.\\
&\left.+\left((4-p)\,x+1\right)\left((2-p)\,x+1\right)\right\}w_{xx}-2\,(3-2q)\left((2-p)\,x+1\right)yw_{xy}\\
&+\left\{\left(1+y^2\right)\left[4\,(2-q)-(2r+1-p)\,(2r+3-p-2q)\right.\right.\\
&\left.\left.+2r\,(r+1-p)\right]+(3-2q)\,(5-2q)\,y^2\right\}w_{yy}\\
&+\left((2-p)\,x+1\right)\left[2-p-2\,(1-q)\,(2r+3-p-2q)\right.\\
&\left.-2r\,(r+1-p)\right]w_x+(3-2q)\,y\left[2r\,(r+1-p)\right.\\
&\left.+3-2q-(2r+1-p)\,(2r+3-p-2q)\right]w_y\\
&+r\,(r+1-p)\left[r\,(r+1-p)+2\,(1-q)\,(2r+3-p-2q)\right]w\\
=\ &0.
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Sonuç 6.5 (6.9) kısmi türevli denkleminde $y \to \frac{y}{\sqrt{q}}$ alarak her iki taraf $q^{-\frac{s}{2}}$ ile çarpılır ve $q \to \infty$ iken limit durumu incelenirse (5.155) ile tanımlanan ve ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomlarının limiti olan $K_{r,s}^{(p)}(x,y)$ polinomlarının sağladığı

$$\begin{aligned} w_{yyyy} - 4yw_{yyy} + 2\left(2y^2 + 2r - 1 + p\right) w_{yy} - 4\left(2r - p\right) w_y \\ -4x^2 w_{xx} + 4\left(\left(p-2\right)x - 1\right) w_x + 4r\left(r + 1 - p\right) w = 0 \end{aligned}$$

kısmi türevli denkleme ulaşılır.

7. İKİ DEĞİŞKENLİ SONLU ORTOGONAL POLİNOMLARDAN FOURİER DÖNÜŞÜMLERİ YARDIMIYLA ELDE EDİLEN ÖZEL FONKSİYON AİLELERİ

Bu bölümde iki değişkenli sonlu ortogonal $Q_{r,s}$ polinomlarının terimlerinde özel fonksiyonlar tanımlanıp bu fonksiyonların Fourier dönüşümleri yardımıyla iki değişkenli ortogonal fonksiyon aileleri tanımlanmıştır. Bu sonuçlar, SCI-Exp. kapsamında taranan "Symmetry" dergisinde makale olarak yayınlanmıştır.

7.1 ${}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1, \varrho_2, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \beta, \lambda$ ve μ birer reel parametre ve ${}_1Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomları (5.1)'de tanımlanmış olmak üzere

$$h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta) = e^{\varrho_2 y}(e^x+1)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}(e^x+e^y)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}e^{\left(\varrho_1+\varrho_2+\frac{1}{2}\right)x}\,{}_1Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(e^x,e^y) \tag{7.1}$$

ve

$$h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu) = e^{\kappa_2 y}(e^x+1)^{-(\kappa_1+\kappa_2)}(e^x+e^y)^{-(\kappa_1+\kappa_2)}e^{\left(\kappa_1+\kappa_2+\frac{1}{2}\right)x}\,{}_1Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(e^x,e^y) \tag{7.2}$$

fonksiyonlarını ele alalım. İlk olarak (7.1) ile verilen fonksiyonun Fourier dönüşümünü türetirsek

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}e^{\varrho_2 y+\left(\varrho_1+\varrho_2+\frac{1}{2}\right)x}(e^x+1)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}(e^x+e^y)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} \\
&\qquad\qquad \times\,{}_1Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(e^x,e^y)\,dxdy \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_1+\varrho_2-\frac{1}{2}-i\xi_1}v^{\varrho_2-1-i\xi_2}(u+1)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}(u+v)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\,{}_1Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(u,v)\,dudv \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_1+\varrho_2+s-\frac{1}{2}-i\xi_1}v^{\varrho_2-1-i\xi_2}(u+1)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}(u+v)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} \\
&\qquad\qquad \times M_{r-s}^{(\alpha-2s-1,\beta+2s+1)}(u)\,M_s^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{v}{u}\right)dudv
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\varrho_2+s-\frac{1}{2}-i(\xi_1+\xi_2)} t^{\varrho_2-1-i\xi_2} (u+1)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} (1+t)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} \\
&\qquad \times M_{r-s}^{(\alpha-2s-1,\beta+2s+1)}(u)\, M_s^{(\alpha,\beta)}(t)\, dudt \\
&= (-1)^r \frac{\Gamma(\beta+r+s+2)\Gamma(\beta+s+1)}{\Gamma(\beta+2s+2)\Gamma(\beta+1)} \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{(-(r-s))_{l_1} (2-\alpha+r+s)_{l_1}}{l_1!(-1)^{l_1} (\beta+2s+2)_{l_1}} \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\int_0^\infty u^{s+\varrho_2-\frac{1}{2}-i(\xi_1+\xi_2)+l_1} (u+1)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} du \right) \right] \\
&\qquad\qquad \times \left[\sum_{l_2=0}^{s} \frac{(-s)_{l_2} (1-\alpha+s)_{l_2}}{l_2!(-1)^{l_2} (\beta+1)_{l_2}} \left(\int_0^\infty t^{\varrho_2-1-i\xi_2+l_2} (1+t)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} dt \right) \right] \\
&= (-1)^r \frac{\Gamma(\beta+r+s+2)\Gamma(\beta+s+1)}{\Gamma(\beta+2s+2)\Gamma(\beta+1)} \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{(-(r-s))_{l_1} (2-\alpha+r+s)_{l_1}}{l_1!(-1)^{l_1} (\beta+2s+2)_{l_1}} \right. \\
&\qquad \left. \times \frac{\Gamma\left(\varrho_2+s+\frac{1}{2}-i(\xi_1+\xi_2)+l_1\right)\Gamma\left(\varrho_1-s-\frac{1}{2}+i(\xi_1+\xi_2)-l_1\right)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)} \right] \\
&\qquad \times \left[\sum_{l_2=0}^{s} \frac{(-s)_{l_2} (1-\alpha+s)_{l_2}}{l_2!(-1)^{l_2} (\beta+1)_{l_2}} \frac{\Gamma(\varrho_2-i\xi_2+l_2)\Gamma(\varrho_1+i\xi_2-l_2)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)} \right] \\
&= \frac{(-1)^r \Gamma(\beta+r+s+2)\Gamma(\beta+s+1)}{\Gamma(\beta+2s+2)\Gamma(\beta+1)\Gamma^2(\varrho_1+\varrho_2)} \\
&\qquad \times C_1(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\, \Theta_1(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
C_1(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2) &= \Gamma(\varrho_1+i\xi_2)\Gamma(\varrho_2-i\xi_2)\Gamma(\varrho_1-s-1/2+i(\xi_1+\xi_2)) \\
&\quad \times \Gamma(\varrho_2+s+1/2-i(\xi_1+\xi_2))
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\Theta_1(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2) &= {}_3F_2\left(\begin{matrix} -s,\ s+1-\alpha, \varrho_2-i\xi_2 \\ \beta+1,\ 1-\varrho_1-i\xi_2 \end{matrix} \mid 1 \right) \\
\times\ {}_3F_2 &\left(\begin{matrix} -(r-s),\ r+s+2-\alpha,\ \varrho_2+s+1/2-i(\xi_1+\xi_2) \\ \beta+2s+2,\ s-\varrho_1+3/2-i(\xi_1+\xi_2) \end{matrix} \mid 1 \right)
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde, (7.2) ile verilen $h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{F}\left(h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)\right) = \frac{(-1)^n\Gamma(\mu+n+k+2)\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+2k+2)\Gamma(\mu+1)\Gamma^2(\kappa_1+\kappa_2)} \times C_1(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)\,\Theta_1(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2).$$

Burada (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) ve (2.5) eşitlikleri kullanılmıştır.

Şimdi $h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)$ ve $h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)$ fonksiyonlarının bulunan Fourier dönüşümleri (2.6) Parseval Özdeşliği'nde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_2+\kappa_1+1)x}e^{(\varrho_2+\kappa_2)y}(e^x+1)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_2+\kappa_1)}(e^x+e^y)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_2+\kappa_1)} \qquad (7.3)\\
&\times\, {}_1Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(e^x,e^y)\ {}_1Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(e^x,e^y)\,dxdy\\
=&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_1+\varrho_2+\kappa_2+\kappa_1}v^{\varrho_2+\kappa_2-1}(u+1)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_2+\kappa_1)}(u+v)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_2+\kappa_1)}\\
&\times\, {}_1Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(u,v)\ {}_1Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(u,v)\,dudv\\
=&\frac{(-1)^{r+n}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+r+s+2)\Gamma(\beta+s+1)}{\Gamma(\beta+2s+2)\Gamma(\beta+1)}\\
&\times\frac{\Gamma(\mu+n+k+2)\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+2k+2)\Gamma(\mu+1)\Gamma^2(\varrho_1+\varrho_2)\Gamma^2(\kappa_1+\kappa_2)}\\
&\times C_1(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\overline{C_1(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)}\\
&\times\Theta_1(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2)\overline{\Theta_1(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2)}d\xi_1d\xi_2
\end{aligned}$$

yazılır. (7.3) bağıntısında $\varrho_1+\kappa_1+1=\alpha=\lambda$ ve $\varrho_2+\kappa_2-1=\beta=\mu$ alarak, eşitliğin sol tarafında (5.2) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi^2(r-s)!s!\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-r-s)\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-s+1)}{(\varrho_1+\kappa_1-2r-1)(\varrho_1+\kappa_1-2s)\Gamma(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-(r-s))}\\
&\times\frac{\Gamma^2(\varrho_2+\kappa_2+2s+1)\Gamma^2(\varrho_1+\varrho_2)\Gamma^2(\varrho_2+\kappa_2)\Gamma^2(\kappa_1+\kappa_2)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-s)\Gamma(\varrho_2+\kappa_2+r+s+1)\Gamma(\varrho_2+\kappa_2+s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_1(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\overline{C_1(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)}\\
&\times\Theta_1(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,\xi_1,\xi_2)\\
&\times\overline{\Theta_1(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1+\varrho_1+1,\kappa_2+\varrho_2-1,\xi_1,\xi_2)}d\xi_1d\xi_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

Teorem 7.1

$$
{}_1E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)=\frac{\left(\varrho_2+1/2-(x+y)\right)_s}{\left(3/2-\varrho_1-(x+y)\right)_s}
$$
$$
\times\Theta_1\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,-ix,-iy\right)
$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\kappa_1>1/2$, $\varrho_2,\kappa_2>0$ ve $\varrho_1+\kappa_1>2r+1$ olmak üzere

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\varrho_1+iy\right)\Gamma\left(\varrho_2-iy\right)\Gamma\left(\kappa_2+iy\right)\Gamma\left(\kappa_1-iy\right)\Gamma\left(\varrho_1-\frac{1}{2}+i\left(x+y\right)\right)
$$
$$
\times\Gamma\left(\varrho_2+\frac{1}{2}-i\left(x+y\right)\right)\Gamma\left(\kappa_2+\frac{1}{2}+i\left(x+y\right)\right)\Gamma\left(\kappa_1-\frac{1}{2}-i\left(x+y\right)\right)
$$
$$
\times\ {}_1E_{r,s}\left(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)\ {}_1E_{n,k}\left(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\varrho_2,\varrho_1\right)dxdy
$$
$$
=\frac{4\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-r-s\right)\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-s+1\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2r-1\right)\left(\varrho_1+\kappa_1-2s\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-(r-s)\right)}
$$
$$
\times\frac{\Gamma^2\left(\varrho_2+\kappa_2+2s+1\right)\Gamma^2\left(\varrho_2+\kappa_2\right)\Gamma^2\left(\varrho_1+\varrho_2\right)\Gamma^2\left(\kappa_1+\kappa_2\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-s\right)\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+r+s+1\right)\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+s\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}
$$

şeklindeki bir ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.1 $\varrho_1=\kappa_1$ ve $\varrho_2=\kappa_2$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.2 ${}_2Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\kappa_1,\kappa_2,\alpha,\beta,\lambda$ ve μ birer reel parametre ve ${}_2Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ polinomları (5.13) ile tanımlanmış olmak üzere

$$
h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)=e^{\left(\varrho_2+\frac{1}{2}\right)(x+y)}\left(1+e^x\right)^{-\varrho_2}\left(1+e^x+e^y\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\ {}_2Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right) \tag{7.4}
$$

ve

$$
h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right)=e^{\left(\kappa_2+\frac{1}{2}\right)(x+y)}\left(1+e^x\right)^{-\kappa_2}\left(1+e^x+e^y\right)^{-(\kappa_1+\kappa_2)}\ {}_2Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,e^y\right). \tag{7.5}
$$

formundaki belirli fonksiyonları ele alalım. Şimdi (7.4) ile verilen $h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesaplarsak

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)\right)\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}e^{\left(\varrho_2+\frac{1}{2}\right)(x+y)}\left(1+e^x\right)^{-\varrho_2}\left(1+e^x+e^y\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\\
&\qquad\qquad\times\ {}_2Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right)dxdy\\
=&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_2-i\xi_1-\frac{1}{2}}v^{\varrho_2-i\xi_2-\frac{1}{2}}(1+u)^{s-\varrho_2}(1+u+v)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\\
&\times M_{r-s}^{(\alpha-2s-1,\beta)}(u)\,M_s^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{v}{1+u}\right)dvdu\\
=&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_2-i\xi_1-\frac{1}{2}}(1+u)^{s-\varrho_1-\varrho_2-i\xi_2+\frac{1}{2}}t^{\varrho_2-i\xi_2-\frac{1}{2}}(1+t)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\\
&\times M_{r-s}^{(\alpha-2s-1,\beta)}(u)\,M_s^{(\alpha,\beta)}(t)\,dtdu\\
=&(-1)^r\frac{\Gamma(\beta+r-s+1)\Gamma(\beta+s+1)}{\Gamma^2(\beta+1)}\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{(-(r-s))_{l_1}(r+s+2-\alpha)_{l_1}}{l_1!(-1)^{l_1}(\beta+1)_{l_1}}\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\int_0^{\infty}u^{\varrho_2-i\xi_1-\frac{1}{2}+l_1}(1+u)^{s-\varrho_1-\varrho_2-i\xi_2+\frac{1}{2}}du\right)\right]\\
&\qquad\quad\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{(-s)_{l_2}(s+1-\alpha)_{l_2}}{l_2!(-1)^{l_2}(\beta+1)_{l_2}}\left(\int_0^{\infty}t^{\varrho_2-i\xi_2-\frac{1}{2}+l_2}(1+t)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}dt\right)\right]\\
=&(-1)^r\frac{\Gamma(\beta+r-s+1)\Gamma(\beta+s+1)}{\Gamma^2(\beta+1)}\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{(-(r-s))_{l_1}(2-\alpha+r+s)_{l_1}}{l_1!(-1)^{l_1}(\beta+1)_{l_1}}\right.\\
&\left.\times\frac{\Gamma\left(\varrho_2-i\xi_1+\frac{1}{2}+l_1\right)\Gamma\left(\varrho_1-s-1+i(\xi_1+\xi_2)-l_1\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2-s+i\xi_2-\frac{1}{2}\right)}\right]\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{(-s)_{l_2}(1-\alpha+s)_{l_2}}{l_2!(-1)^{l_2}(\beta+1)_{l_2}}\frac{\Gamma\left(\varrho_2-i\xi_2+\frac{1}{2}+l_2\right)\Gamma\left(\varrho_1-\frac{1}{2}+i\xi_2-l_2\right)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)}\right]\\
=&(-1)^r\frac{\Gamma(\beta+r-s+1)\Gamma(\beta+s+1)}{\Gamma^2(\beta+1)\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)}\\
&\times C_2(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\,\Theta_2(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$C_2(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2) = \frac{\Gamma(\varrho_1-s-1+i(\xi_1+\xi_2))\Gamma(\varrho_2-i\xi_1+1/2)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2-s-1/2+i\xi_2)} \times\Gamma(\varrho_1+i\xi_2-1/2)\Gamma(\varrho_2-i\xi_2+1/2)$$

ve

$$\Theta_2(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}-s,\ s+1-\alpha,\ \varrho_2-i\xi_2+1/2\\ \beta+1,\ 3/2-\varrho_1-i\xi_2\end{matrix}\ \Big|\ 1\right) \times {}_3F_2\left(\begin{matrix}-(r-s),\ r+s+2-\alpha,\ \varrho_2-i\xi_1+1/2\\ \beta+1,\ s-\varrho_1+2-i(\xi_1+\xi_2)\end{matrix}\ \Big|\ 1\right)$$

dir. Benzer şekilde, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) ve (2.5) bağıntılarından yararlanılarak (7.5) ile verilen fonksiyon için Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)) = (-1)^n\frac{\Gamma(\mu+n-k+1)\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma^2(\mu+1)\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)} \times C_2(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)\Theta_2(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2)$$

formunda elde edilir. $h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)$ ve $h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)$'nün Fourier dönüşümleri (2.6) Parseval Özdeşliği'nde yerine yazılırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\varrho_2+\kappa_2+1)(x+y)}(1+e^x)^{-(\varrho_2+\kappa_2)}(1+e^x+e^y)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)} \times {}_2Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(e^x,e^y)\ {}_2Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(e^x,e^y)\,dxdy \tag{7.6}$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_2+\kappa_2}v^{\varrho_2+\kappa_2}(1+u)^{-(\varrho_2+\kappa_2)}(1+u+v)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)} \times {}_2Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(u,v)\ {}_2Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(u,v)\,dudv$$

$$= \frac{(-1)^{r+n}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+r-s+1)\Gamma(\beta+s+1)\Gamma(\mu+n-k+1)}{\Gamma^2(\beta+1)\Gamma^2(\mu+1)} \times\frac{\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)}C_2(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\overline{C_2(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)} \times\Theta_2(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2)\overline{\Theta_2(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2)}d\xi_1 d\xi_2$$

sağlanır. Böylece (7.6) bağıntısında $\varrho_2+\kappa_2=\beta=\mu$ ve $\varrho_1+\kappa_1=\alpha=\lambda$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.14) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa,

$$\frac{4\pi^2\,(r-s)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-r-s-1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2r-2\right)\left(\varrho_1+\kappa_1-2s-1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-r-s-1\right)}$$

$$\times\frac{\Gamma^4\left(\varrho_2+\kappa_2+1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)\Gamma\left(\kappa_1+\kappa_2\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-s\right)\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+r-s+1\right)\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+s+1\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{C_2\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_2\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1+\varrho_1,\kappa_2+\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)}$$

$$\times C_2\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_2\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1,\varrho_2+\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)d\xi_1 d\xi_2$$

eşitliğine ulaşılır. Sonuç olarak,

Teorem 7.2

$${}_2E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)=\frac{\left(3/2-\varrho_1-\varrho_2-y\right)_s}{\left(2-\varrho_1+x+y\right)_s}$$

$$\times\Theta_2\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1,\varrho_2+\kappa_2,-ix,-iy\right)$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\kappa_1>r+1$ ve $\varrho_2,\kappa_2>-1/2$ koşulları altında

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\varrho_2-ix+1/2\right)\Gamma\left(\varrho_1+iy-1/2\right)\Gamma\left(\varrho_2-iy+1/2\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+iy-1/2\right)}$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\varrho_1-i\left(x+y\right)-1\right)\Gamma\left(\kappa_2+ix+1/2\right)\Gamma\left(\kappa_1-iy-1/2\right)}{\Gamma\left(\kappa_2+\kappa_1-iy-1/2\right)}$$

$$\times\Gamma\left(\kappa_2+iy+1/2\right)\Gamma\left(\kappa_1+i\left(x+y\right)-1\right)\ {}_2E_{r,s}\left(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)$$

$$\times\ {}_2E_{n,k}\left(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\varrho_2,\varrho_1\right)dxdy$$

$$=\frac{4\pi^2\,(r-s)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-r-s-1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2r-2\right)\left(\varrho_1+\kappa_1-2s-1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-r-s-1\right)}$$

$$\times\frac{\Gamma^4\left(\varrho_2+\kappa_2+1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)\Gamma\left(\kappa_2+\kappa_1\right)\delta_{r,n}\delta_{s,k}}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-s\right)\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+r-s+1\right)\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+s+1\right)}$$

formunda bir ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.2 $\varrho_1=\kappa_1$ ve $\varrho_2=\kappa_2$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.3 ${}_{3}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1, \kappa_1, \alpha$ ve λ birer reel parametre ve ${}_{3}Q_{r,s}^{(p)}(x,y)$ polinomları (5.27) ile tanımlanmış olmak üzere

$$h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\alpha) = \exp\left[\frac{x}{2} - \left(\varrho_1 - \frac{1}{2}\right)y - \frac{e^{-x}+e^{x-y}}{2}\right] {}_{3}Q_{r,s}^{(\alpha)}(e^x,e^y) \tag{7.7}$$

ve

$$h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\lambda) = \exp\left[\frac{x}{2} - \left(\kappa_1 - \frac{1}{2}\right)y - \frac{e^{-x}+e^{x-y}}{2}\right] {}_{3}Q_{n,k}^{(\lambda)}(e^x,e^y) \tag{7.8}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Şimdi (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ve

$$\int_0^\infty t^{-(p+iq-m+1)}e^{-\frac{1}{2t}}dt = 2^{p+iq-m}\Gamma(p+iq-m) \tag{7.9}$$

bağıntıları yardımıyla (7.7) ile verilen $h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\alpha)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümünü türetelim:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\alpha)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}e^{\frac{x}{2}-\left(\varrho_1-\frac{1}{2}\right)y-\frac{e^{-x}+e^{x-y}}{2}}\ {}_{3}Q_{r,s}^{(\alpha)}(e^x,e^y)\,dxdy \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{s-i\xi_1-\frac{1}{2}}v^{-\left(\varrho_1+i\xi_2+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{u}{v}\right)}N_{r-s}^{(\alpha-2s-1)}(u)\,N_s^{(\alpha)}\left(\frac{v}{u}\right)dudv \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{s-\varrho_1-i(\xi_1+\xi_2)}t^{-\left(\varrho_1+i\xi_2+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{t}\right)}N_{r-s}^{(\alpha-2s-1)}(u)\,N_s^{(\alpha)}(t)\,dudt \\
&= (-1)^r\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{(-(r-s))_{l_1}(r+s+2-\alpha)_{l_1}}{(-1)^{l_1}l_1!}\right. \\
&\quad\left.\times\int_0^\infty u^{s-\varrho_1-i(\xi_1+\xi_2)+l_1}e^{-\frac{1}{2u}}du\right] \\
&\quad\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{(-s)_{l_2}(s+1-\alpha)_{l_2}}{(-1)^{l_2}l_2!}\int_0^\infty t^{-\left(\varrho_1+i\xi_2+\frac{1}{2}-l_2\right)}e^{-\frac{1}{2t}}dt\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^r \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{(-(r-s))_{l_1} (r+s+2-\alpha)_{l_1}}{(-1)^{l_1} l_1!} 2^{\varrho_1 - s + i(\xi_1+\xi_2)-1-l_1} \right. \\
&\quad \left. \times \Gamma(\varrho_1 - s + i(\xi_1+\xi_2) - 1 - l_1) \right] \\
&\quad \times \left[\sum_{l_2=0}^{s} \frac{(-s)_{l_2} (s+1-\alpha)_{l_2}}{(-1)^{l_2} l_2!} 2^{\varrho_1 + i\xi_2 - \frac{1}{2} - l_2} \Gamma\left(\varrho_1 + i\xi_2 - \frac{1}{2} - l_2\right) \right] \\
&\quad = (-1)^r C_3(s, \varrho_1, \xi_1, \xi_2) \Theta_3(r, s, \varrho_1, \alpha, \xi_1, \xi_2).
\end{aligned}
$$

Burada

$$
\begin{aligned}
C_3(s, \varrho_1, \xi_1, \xi_2) &= 2^{2\varrho_1 - s + i(\xi_1 + 2\xi_2) - 3/2} \Gamma(\varrho_1 - 1/2 + i\xi_2) \\
&\quad \times \Gamma(\varrho_1 - s - 1 + i(\xi_1 + \xi_2))
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\Theta_3(r, s, \varrho_1, \alpha, \xi_1, \xi_2) = {}& {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s, \ s+1-\alpha \\ 3/2 - \varrho_1 - i\xi_2 \end{matrix} \mid \frac{1}{2} \right) \\
\times {}& {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -(r-s), \ r+s+2-\alpha \\ s - \varrho_1 + 2 - i(\xi_1+\xi_2) \end{matrix} \mid \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde, (7.8) ile tanımlanan fonksiyon için Fourier dönüşümü

$$
\mathcal{F}(h_{n,k}(x, y; \kappa_1, \lambda)) = (-1)^n C_3(k, \kappa_1, \xi_1, \xi_2) \Theta_3(n, k, \kappa_1, \lambda, \xi_1, \xi_2)
$$

şeklinde bulunur.

(2.6) Parseval Özdeşliği'nden,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x - (\varrho_1 + \kappa_1 - 1)y - \left(e^{-x} + e^{x-y}\right)} {}_3Q_{r,s}^{(\alpha)}(e^x, e^y) \ {}_3Q_{n,k}^{(\lambda)}(e^x, e^y) \, dx dy \quad (7.10)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} v^{-(\varrho_1 + \kappa_1)} e^{-\left(\frac{1}{u} + \frac{u}{v}\right)} {}_3Q_{r,s}^{(\alpha)}(u, v) \ {}_3Q_{n,k}^{(\lambda)}(u, v) \, du dv \\
&= \frac{(-1)^{r+n}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_3(s, \varrho_1, \xi_1, \xi_2) \overline{C_3(k, \kappa_1, \xi_1, \xi_2)} \\
&\quad \times \Theta_3(r, s, \varrho_1, \alpha, \xi_1, \xi_2) \overline{\Theta_3(n, k, \kappa_1, \lambda, \xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}
$$

yazılır. Böylece (7.10) bağıntısında $\varrho_1 + \kappa_1 = \alpha = \lambda$ alınırsa eşitliğin sol tarafında (5.28) ortogonallik bağıntısı kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_3\left(s,\varrho_1,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_3\left(r,s,\varrho_1,\varrho_1+\kappa_1,\xi_1,\xi_2\right)$$
$$\times\overline{C_3\left(k,\kappa_1,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_3\left(n,k,\kappa_1,\kappa_1+\varrho_1,\xi_1,\xi_2\right)}d\xi_1 d\xi_2$$
$$= \frac{4\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-r-s-1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2r-2\right)\left(\varrho_1+\kappa_1-2s-1\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

Teorem 7.3

$$_3E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\kappa_1\right)=\frac{1}{\left(2-\varrho_1-\left(x+y\right)\right)_s}\Theta_3\left(r,s,\varrho_1,\varrho_1+\kappa_1,-ix,-iy\right)$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\kappa_1>1$ ve $\varrho_1+\kappa_1>2r+2$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\varrho_1-1+i\left(x+y\right)\right)\Gamma\left(\kappa_1-1-i\left(x+y\right)\right)\Gamma\left(\varrho_1-\frac{1}{2}+iy\right)$$
$$\times\Gamma\left(\kappa_1-\frac{1}{2}-iy\right)\ {}_3E_{r,s}\left(ix,iy;\varrho_1,\kappa_1\right)\ {}_3E_{n,k}\left(-ix,-iy;\kappa_1,\varrho_1\right)dxdy$$
$$= \frac{2^{2s-2(\varrho_1+\kappa_1)+5}\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-r-s-1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2r-2\right)\left(\varrho_1+\kappa_1-2s-1\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.3 $\varrho_1=\kappa_1$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.4 $_4Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\kappa_1,\kappa_2,\alpha,\beta,\lambda$ ve μ reel parametreler ve $_4Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ polinomları (5.39) ile tanımlanmış olmak üzere

$$h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right) = \exp\left[\left(\varrho_1+\varrho_2+\frac{1}{2}\right)x-\varrho_1 y-\frac{e^{x-y}}{2}\right] \times\left(e^x+1\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\ {}_4Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right) \tag{7.11}$$

ve

$$h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right) = \exp\left[\left(\kappa_1+\kappa_2+\frac{1}{2}\right)x-\kappa_1 y-\frac{e^{x-y}}{2}\right] \times\left(e^x+1\right)^{-(\kappa_1+\kappa_2)}\ {}_4Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,e^y\right) \tag{7.12}$$

fonksiyonlarını ele alalım. (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ve (7.9) bağıntıları kullanılarak (7.11) ile verilen fonksiyon için Fourier dönüşümünü türetirsek

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)\right) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)} e^{\left(\varrho_1+\varrho_2+\frac{1}{2}\right)x-\varrho_1 y-\frac{e^{x-y}}{2}} \left(e^x+1\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} \, {}_4Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right)dxdy \\
= & \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{s+\varrho_1+\varrho_2-\frac{1}{2}-i\xi_1} v^{-(\varrho_1+i\xi_2+1)} e^{-\frac{1}{2}\frac{u}{v}} \left(u+1\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} \\
& \qquad \times M_{r-s}^{(\alpha-2s-1,\beta+2s+1)}\left(u\right) N_s^{(\alpha)}\left(\frac{v}{u}\right) dudv \\
= & \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{s+\varrho_2-\frac{1}{2}-i(\xi_1+\xi_2)} \left(u+1\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} t^{-(\varrho_1+i\xi_2+1)} e^{-\frac{1}{2t}} \\
& \qquad \times M_{r-s}^{(\alpha-2s-1,\beta+2s+1)}\left(u\right) N_s^{(\alpha)}\left(t\right) dudt \\
= & \left(-1\right)^r \frac{\Gamma\left(\beta+r+s+2\right)}{\Gamma\left(\beta+2s+2\right)} \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{\left(-\left(r-s\right)\right)_{l_1}\left(r+s+2-\alpha\right)_{l_1}}{\left(\beta+2s+2\right)_{l_1}\left(-1\right)^{l_1} l_1!} \right. \\
& \left. \times \left(\int_0^{\infty} u^{s+\varrho_2-\frac{1}{2}-i(\xi_1+\xi_2)+l_1} \left(u+1\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)} du\right)\right] \\
& \times \left[\sum_{l_2=0}^{s} \frac{\left(-s\right)_{l_2}\left(s+1-\alpha\right)_{l_2}}{\left(-1\right)^{l_2} l_2!} \left(\int_0^{\infty} t^{-(\varrho_1+i\xi_2+1-l_2)} e^{-\frac{1}{2t}} dt\right)\right] \\
= & \left(-1\right)^r \frac{\Gamma\left(\beta+r+s+2\right)}{\Gamma\left(\beta+2s+2\right)} \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{\left(-\left(r-s\right)\right)_{l_1}\left(r+s+2-\alpha\right)_{l_1}}{\left(\beta+2s+2\right)_{l_1}\left(-1\right)^{l_1} l_1!} \right. \\
& \left. \times \frac{\Gamma\left(s+\varrho_2+\frac{1}{2}-i\left(\xi_1+\xi_2\right)+l_1\right)\Gamma\left(\varrho_1-s-\frac{1}{2}+i\left(\xi_1+\xi_2\right)-l_1\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)}\right] \\
& \times \left[\sum_{l_2=0}^{s} \frac{\left(-s\right)_{l_2}\left(s+1-\alpha\right)_{l_2}}{\left(-1\right)^{l_2} l_2!} 2^{\varrho_1+i\xi_2-l_2}\Gamma\left(\varrho_1+i\xi_2-l_2\right)\right] \\
= & \frac{\left(-1\right)^r \Gamma\left(\beta+r+s+2\right)}{\Gamma\left(\beta+2s+2\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)} C_4\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_4\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
C_4\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right) = & \; 2^{\varrho_1+i\xi_2}\Gamma\left(\varrho_1+i\xi_2\right)\Gamma\left(\varrho_1-s-1/2+i\left(\xi_1+\xi_2\right)\right) \\
& \times\Gamma\left(\varrho_2+s+1/2-i\left(\xi_1+\xi_2\right)\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\Theta_4\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)= {}_2F_1\left(\begin{matrix}-s,\ s+1-\alpha\\ 1-\varrho_1-i\xi_2\end{matrix}\mid\frac{1}{2}\right)$$
$$\times\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-\left(r-s\right),\ r+s+2-\alpha,\ \varrho_2+s+1/2-i\left(\xi_1+\xi_2\right)\\ \beta+2s+2,\ s-\varrho_1+3/2-i\left(\xi_1+\xi_2\right)\end{matrix}\mid 1\right)$$

dir. Benzer biçimde, (7.12) ile gösterilen fonksiyon için Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\left(h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right)\right)=\frac{\left(-1\right)^n\Gamma\left(\mu+n+k+2\right)}{\Gamma\left(\mu+2k+2\right)\Gamma\left(\kappa_1+\kappa_2\right)}$$
$$\times C_4\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_4\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2\right)$$

olarak elde edilir. Böylece, (2.6) Parseval Özdeşliği'nden

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2+1)x-(\varrho_1+\kappa_1)y-e^{x-y}}\left(e^x+1\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)} \tag{7.13}$$
$$\times\ {}_4Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right)\ {}_4Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,e^y\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2}v^{-(\varrho_1+\kappa_1+1)}e^{-\frac{u}{v}}\left(u+1\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)}$$
$$\times\ {}_4Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(u,v\right)\ {}_4Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(u,v\right)dudv$$

$$=\frac{\left(-1\right)^{r+n}}{\left(2\pi\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\beta+r+s+2\right)\Gamma\left(\mu+n+k+2\right)}{\Gamma\left(\beta+2s+2\right)\Gamma\left(\mu+2k+2\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)\Gamma\left(\kappa_1+\kappa_2\right)}$$
$$\times C_4\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_4\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)$$
$$\times\overline{C_4\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_4\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2\right)}d\xi_1d\xi_2$$

yazılır. (7.13) bağıntısının sol tarafında $\varrho_1+\kappa_1+1=\alpha=\lambda$ ve $\varrho_2+\kappa_2-1=\beta=\mu$ alınırsa, (5.40) ortogonallik bağıntısına göre

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_4(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\overline{C_4(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)}$$
$$\times\Theta_4(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,\xi_1,\xi_2)$$
$$\times\overline{\Theta_4(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1+\varrho_1+1,\kappa_2+\varrho_2-1,\xi_1,\xi_2)}d\xi_1 d\xi_2$$
$$= \frac{4\pi^2(r-s)!s!\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-r-s)\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-s+1)}{(\varrho_1+\kappa_1-2r-1)(\varrho_1+\kappa_1-2s)\Gamma(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-(r-s))}$$
$$\times\frac{\Gamma^2(\varrho_2+\kappa_2+2s+1)\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)}{\Gamma(\varrho_2+\kappa_2+r+s+1)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

eşitliğine ulaşılır. Sonuç olarak,

Teorem 7.4

$$ {}_4E_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1) = \frac{(\varrho_2+1/2-(x+y))_s}{(3/2-\varrho_1-(x+y))_s}$$
$$\times\Theta_4(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,-ix,-iy)$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\kappa_1>1/2$, $\varrho_2,\kappa_2>-1/2$ ve $\varrho_1+\kappa_1>2r+1$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\varrho_1-1/2+i(x+y))\Gamma(\varrho_2+1/2-i(x+y))\Gamma(\kappa_1-1/2-i(x+y))$$
$$\times\Gamma(\kappa_2+1/2+i(x+y))\Gamma(\varrho_1+iy)\Gamma(\kappa_1-iy)$$
$$\times\ {}_4E_{r,s}(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1)\ {}_4E_{n,k}(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\varrho_2,\varrho_1)\,dydx$$
$$= \frac{2^{2-\varrho_1-\kappa_1}\pi^2(r-s)!s!\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-r-s)\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-s+1)}{(\varrho_1+\kappa_1-2r-1)(\varrho_1+\kappa_1-2s)\Gamma(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-(r-s))}$$
$$\times\frac{\Gamma^2(\varrho_2+\kappa_2+2s+1)\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)}{\Gamma(\varrho_2+\kappa_2+r+s+1)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

formundaki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.4 $\varrho_1=\kappa_1$ ve $\varrho_2=\kappa_2$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.5 ${}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\kappa_1,\kappa_2,\alpha,\beta,\lambda$ ve μ reel parametreler ve ${}_5Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomları (5.49) ile tanımlanmış olmak üzere

$$h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)=e^{\varrho_2 x-\frac{1+e^x}{2e^y}}(1+e^x)^{-\left(\varrho_1+\varrho_2-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{e^y}{1+e^x}\right)^{-\varrho_1}{}_5Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(e^x,e^y) \tag{7.14}$$

ve

$$h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)=e^{\kappa_2 x-\frac{1+e^x}{2e^y}}(1+e^x)^{-\left(\kappa_1+\kappa_2-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{e^y}{1+e^x}\right)^{-\kappa_1}{}_5Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(e^x,e^y), \tag{7.15}$$

fonksiyonlarını ele alalım. (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ve (7.9) bağıntıları kullanılarak (7.14) ile tanımlanan $h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümünü türetirsek

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)\right)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\xi_1x+\xi_2y)}e^{\varrho_2x-\frac{1+e^x}{2e^y}}(1+e^x)^{-\left(\varrho_1+\varrho_2-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{e^y}{1+e^x}\right)^{-\varrho_1}\\
&\qquad\times{}_5Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(e^x,e^y)\,dxdy\\
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{\varrho_2-i\xi_1-1}v^{-\varrho_1-i\xi_2-1}e^{-\frac{1+u}{2v}}(1+u)^{-\left(\varrho_2-s-\frac{1}{2}\right)}\\
&\quad\times M_{r-s}^{(\alpha-2s-1,\beta)}(u)\,N_s^{(\alpha)}\left(\frac{v}{1+u}\right)dudv\\
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{\varrho_2-i\xi_1-1}(1+u)^{s-\varrho_1-\varrho_2-i\xi_2+\frac{1}{2}}t^{-(\varrho_1+i\xi_2+1)}e^{-\frac{1}{2t}}\\
&\quad\times M_{r-s}^{(\alpha-2s-1,\beta)}(u)\,N_s^{(\alpha)}(t)\,dtdu\\
&=(-1)^r\frac{\Gamma(\beta+r-s+1)}{\Gamma(\beta+1)}\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{(-(r-s))_{l_1}(r+s+2-\alpha)_{l_1}}{(\beta+1)_{l_1}(-1)^{l_1}l_1!}\right.\\
&\quad\left.\times\left(\int_0^{\infty}u^{\varrho_2-i\xi_1-1+l_1}(1+u)^{-\left(\varrho_1+\varrho_2-s+i\xi_2-\frac{1}{2}\right)}du\right)\right]\\
&\quad\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{(-s)_{l_2}(s+1-\alpha)_{l_2}}{(-1)^{l_2}l_2!}\left(\int_0^{\infty}t^{-(\varrho_1+i\xi_2+1-l_2)}e^{-\frac{1}{2t}}dt\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^r \frac{\Gamma(\beta+r-s+1)}{\Gamma(\beta+1)} \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{(-(r-s))_{l_1} (r+s+2-\alpha)_{l_1}}{(\beta+1)_{l_1} (-1)^{l_1} l_1!} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\Gamma(\varrho_2 - i\xi_1 + l_1) \Gamma\left(\varrho_1 - s + i(\xi_1+\xi_2) - \frac{1}{2} - l_1\right)}{\Gamma\left(\varrho_1 + \varrho_2 - s + i\xi_2 - \frac{1}{2}\right)} \right] \\
&\quad \times \left[\sum_{l_2=0}^{s} \frac{(-s)_{l_2} (1-\alpha+s)_{l_2}}{(-1)^{l_2} l_2!} 2^{\varrho_1 + i\xi_2 - l_2} \Gamma(\varrho_1 + i\xi_2 - l_2) \right] \\
&= \frac{(-1)^r \Gamma(\beta+r-s+1)}{\Gamma(\beta+1)} C_5(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2) \Theta_5(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Burada

$$
\begin{aligned}
C_5(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2) &= 2^{\varrho_1 + i\xi_2} \Gamma(\varrho_1 + i\xi_2) \Gamma(\varrho_2 - i\xi_1) \\
&\quad \times \frac{\Gamma(\varrho_1 - s + i(\xi_1+\xi_2) - 1/2)}{\Gamma(\varrho_1 + \varrho_2 - s + i\xi_2 - 1/2)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\Theta_5(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2) &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} -s, \ s+1-\alpha \\ 1-\varrho_1-i\xi_2 \end{matrix} \mid \frac{1}{2} \right) \\
&\quad \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -(r-s), \ r+s+2-\alpha, \ \varrho_2 - i\xi_1 \\ \beta+1, \ s-\varrho_1+3/2-i(\xi_1+\xi_2) \end{matrix} \mid 1 \right)
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde, (7.15) ile verilen $h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)) &= \frac{(-1)^n \Gamma(\mu+n-k+1)}{\Gamma(\mu+1)} \\
&\quad \times C_5(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2) \Theta_5(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2).
\end{aligned}
$$

Buradan (2.6) Parseval Özdeşliği kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\varrho_2+\kappa_2)x-\frac{1+e^x}{e^y}}\left(1+e^x\right)^{-(\varrho_2+\kappa_2-1)} e^{-(\varrho_1+\kappa_1)y}\ {}_5Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right) \tag{7.16}$$

$$\times\ {}_5Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,e^y\right)dydx$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_2+\kappa_2-1}\left(1+u\right)^{-(\varrho_2+\kappa_2-1)} v^{-(\varrho_1+\kappa_1+1)}e^{-\frac{1+u}{v}}\ {}_5Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(u,v\right)$$

$$\times\ {}_5Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(u,v\right)dvdu$$

$$= \frac{(-1)^{r+n}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)\Gamma\left(\mu+n-k+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\mu+1\right)}$$

$$\times C_5\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_5\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)$$

$$\times\overline{C_5\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_5\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2\right)}d\xi_1 d\xi_2$$

yazılır. Böylece, (7.16) bağıntısında $\varrho_2+\kappa_2-1=\beta=\mu$ ve $\varrho_1+\kappa_1+1=\alpha=\lambda$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.50) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa,

$$\frac{4\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-r-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2r-1\right)\left(\varrho_1+\kappa_1-2s\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-r-s-1\right)}$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-s+1\right)\Gamma^2\left(\varrho_2+\kappa_2\right)}{\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+r-s\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_5\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\overline{C_5\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)}$$

$$\times\ \Theta_5\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,\xi_1,\xi_2\right)$$

$$\times\overline{\Theta_5\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1+\varrho_1+1,\kappa_2+\varrho_2-1,\xi_1,\xi_2\right)}d\xi_1 d\xi_2$$

eşitliği elde edilir. Bunun bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 7.5

$${}_5E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)=\frac{\left(3/2-\varrho_1-\varrho_2-y\right)_s}{\left(3/2-\varrho_1-(x+y)\right)_s}$$

$$\times\Theta_5\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,-ix,-iy\right)$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\kappa_1>r+1/2$ ve $\varrho_2,\kappa_2>0$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\varrho_1+iy\right)\Gamma\left(\varrho_1+i\left(x+y\right)-1/2\right)\Gamma\left(\varrho_2-ix\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+iy-1/2\right)\Gamma\left(\kappa_2+\kappa_1-iy-1/2\right)}$$
$$\times\Gamma\left(\kappa_1-i\left(x+y\right)-1/2\right)\Gamma\left(\kappa_1-iy\right)\Gamma\left(\kappa_2+ix\right)$$
$$\times\ {}_5E_{r,s}\left(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)\ {}_5E_{n,k}\left(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\varrho_2,\varrho_1\right)dxdy$$
$$=\frac{2^{2-\varrho_1-\kappa_1}\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-r-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2r-1\right)\left(\varrho_1+\kappa_1-2s\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-r-s-1\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1-s+1\right)\Gamma^2\left(\varrho_2+\kappa_2\right)}{\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+r-s\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

formundaki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.5 $\varrho_1=\kappa_1$ ve $\varrho_2=\kappa_2$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.6 ${}_6Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\kappa_1,\kappa_2,\alpha,\beta,\lambda$ ve μ reel parametreler ve ${}_6Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ polinomları (5.62)'de tanımlanmış olmak üzere

$$\begin{aligned}h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right) &= \exp\left[\varrho_2 y-\left(\varrho_1+\varrho_2-1/2\right)x-\frac{e^{-x}}{2}\right] \\ &\quad\times\left(1+e^{y-x}\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\ {}_6Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right)\end{aligned}\tag{7.17}$$

ve

$$\begin{aligned}h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right) &= \exp\left[\kappa_2 y-\left(\kappa_1+\kappa_2-1/2\right)x-\frac{e^{-x}}{2}\right] \\ &\quad\times\left(1+e^{y-x}\right)^{-(\kappa_1+\kappa_2)}\ {}_6Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,e^y\right)\end{aligned}\tag{7.18}$$

şeklindeki özel fonksiyonları düşünelim. Şimdi (7.17) ile verilen $h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümünü uygularsak

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)\right)\\
= &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}e^{\varrho_2 y-(\varrho_1+\varrho_2-1/2)x}e^{-\frac{e^{-x}}{2}}\left(1+e^{y-x}\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\\
&\qquad\qquad\qquad\times\, {}_6Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right)dxdy\\
= &\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{s-\varrho_1-\varrho_2-i\xi_1-1/2}v^{\varrho_2-i\xi_2-1}e^{-\frac{1}{2u}}\left(1+\frac{v}{u}\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\\
&\qquad\qquad\qquad\times N_{r-s}^{(\alpha-2s-1)}\left(u\right)M_s^{(\alpha,\beta)}\left(\tfrac{v}{u}\right)dvdu\\
= &\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{s-\varrho_1-i(\xi_1+\xi_2)-1/2}e^{-\frac{1}{2u}}t^{\varrho_2-i\xi_2-1}\left(1+t\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\\
&\qquad\times N_{r-s}^{(\alpha-2s-1)}\left(u\right)M_s^{(\alpha,\beta)}\left(t\right)dtdu\\
= &\left(-1\right)^r\frac{\Gamma\left(\beta+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)}\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{\left(-\left(r-s\right)\right)_{l_1}\left(r+s+2-\alpha\right)_{l_1}}{\left(-1\right)^{l_1}l_1!}\right.\\
&\left.\times\left(\int_0^{\infty} u^{-\left(\varrho_1-s+i(\xi_1+\xi_2)+\frac{1}{2}-l_1\right)}e^{-\frac{1}{2u}}du\right)\right]\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{\left(-s\right)_{l_2}\left(s+1-\alpha\right)_{l_2}}{\left(\beta+1\right)_{l_2}\left(-1\right)^{l_2}l_2!}\left(\int_0^{\infty} t^{\varrho_2-i\xi_2-1+l_2}\left(1+t\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}dt\right)\right]\\
= &\left(-1\right)^r\frac{\Gamma\left(\beta+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)}\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{\left(-\left(r-s\right)\right)_{l_1}\left(r+s+2-\alpha\right)_{l_1}}{\left(-1\right)^{l_1}l_1!}\right.\\
&\left.\times\, 2^{\varrho_1-s+i(\xi_1+\xi_2)-1/2-l_1}\Gamma\left(\varrho_1-s+i\left(\xi_1+\xi_2\right)-\frac{1}{2}-l_1\right)\right]\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{\left(-s\right)_{l_2}\left(s+1-\alpha\right)_{l_2}}{\left(\beta+1\right)_{l_2}\left(-1\right)^{l_2}l_2!}\frac{\Gamma\left(\varrho_2-i\xi_2+l_2\right)\Gamma\left(\varrho_1+i\xi_2-l_2\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)}\right]\\
= &\frac{\left(-1\right)^r\Gamma\left(s+\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)}C_6\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_6\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
C_6\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right) &= 2^{\varrho_1-s+i(\xi_1+\xi_2)-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\varrho_1+i\xi_2\right)\Gamma\left(\varrho_2-i\xi_2\right)\\
&\quad\times\Gamma\left(\varrho_1-s+i\left(\xi_1+\xi_2\right)-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$\Theta_6(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}-(r-s),\ r+s+2-\alpha \\ s-\varrho_1+3/2-i(\xi_1+\xi_2)\end{matrix} \mid \frac{1}{2}\right) \times {}_3F_2\left(\begin{matrix}-s,\ s+1-\alpha,\ \varrho_2-i\xi_2 \\ \beta+1,\ 1-\varrho_1-i\xi_2\end{matrix} \mid 1\right)$$

dir. Benzer şekilde, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ve (7.9) bağıntıları kullanılarak (7.18) ile verilen $h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)) = \frac{(-1)^n\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)} \times C_6(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)\,\Theta_6(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2)$$

formunda elde edilir. (2.6) Parseval Özdeşliği'nden,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[(\varrho_2+\kappa_2)y-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-1)x-e^{-x}\right] \times\left(1+e^{y-x}\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)}\ {}_6Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(e^x,e^y)\ {}_6Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(e^x,e^y)\,dydx \tag{7.19}$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} v^{\varrho_2+\kappa_2-1}(u+v)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)}e^{-1/u}\ {}_6Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(u,v)\ {}_6Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(u,v)\,dvdu$$

$$= \frac{(-1)^{r+n}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+s+1)\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)} \times C_6(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\,\Theta_6(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2) \times\overline{C_6(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)\Theta_6(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2)}d\xi_1 d\xi_2$$

yazılır. (7.19) eşitliğinde $\varrho_2+\kappa_2-1=\beta=\mu$ ve $\varrho_1+\kappa_1+1=\alpha=\lambda$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.63) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{4\pi^2(r-s)!s!\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-r-s)\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-s+1)}{(\varrho_1+\kappa_1-2r-1)(\varrho_1+\kappa_1-2s)} \times\frac{\Gamma^2(\varrho_2+\kappa_2)\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-s)\Gamma(\varrho_2+\kappa_2+s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{C_6(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)\Theta_6(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1+\varrho_1+1,\kappa_2+\varrho_2-1,\xi_1,\xi_2)} \times C_6(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\,\Theta_6(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2$$

bağıntısı elde edilir. Sonuç olarak,

Teorem 7.6

$$
{}_6E_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1)=\frac{1}{(3/2-\varrho_1-(x+y))_s}
$$
$$
\times\Theta_6(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,-ix,-iy)
$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\kappa_1>1/2$, $\varrho_2,\kappa_2>0$ ve $\varrho_1+\kappa_1>2r+1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\varrho_1+i(x+y)-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\kappa_1-i(x+y)-\frac{1}{2}\right)\\
&\times\Gamma(\varrho_1+iy)\,\Gamma(\varrho_2-iy)\,\Gamma(\kappa_2+iy)\,\Gamma(\kappa_1-iy)\\
&\times\ {}_6E_{r,s}(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1)\ {}_6E_{n,k}(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\varrho_2,\varrho_1)\,dydx\\
=\ &\frac{2^{2s+3-\varrho_1-\kappa_1}\pi^2(r-s)!s!\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-r-s)\,\Gamma(\varrho_1+\kappa_1-s+1)}{(\varrho_1+\kappa_1-2r-1)(\varrho_1+\kappa_1-2s)}\\
&\times\frac{\Gamma^2(\varrho_2+\kappa_2)\,\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)\,\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-s)\,\Gamma(\varrho_2+\kappa_2+s)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}
\end{aligned}
$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.6 $\varrho_1=\kappa_1$ ve $\varrho_2=\kappa_2$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.7 ${}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\alpha,\beta,\gamma,\theta,\lambda,\mu,\eta$ ve τ reel parametreler ve ${}_7Q_{r,s}^{(p,q,u,v)}(x,y)$ polinomları (5.76) ile tanımlanmış olmak üzere

$$
\begin{aligned}
h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\alpha,\beta,\gamma,\theta)&=(1+e^x)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}(1+e^y)^{-(\varrho_3+\varrho_4)}\\
&\quad\times\exp(\varrho_2x+\varrho_4y)\ {}_7Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}(e^x,e^y)
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\lambda,\mu,\eta,\tau)&=(1+e^x)^{-(\kappa_1+\kappa_2)}(1+e^y)^{-(\kappa_3+\kappa_4)}\\
&\quad\times\exp(\kappa_2x+\kappa_4y)\ {}_7Q_{n,k}^{(\lambda,\mu,\eta,\tau)}(e^x,e^y).
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (7.20) ile verilen $h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\alpha,\beta,\gamma,\theta)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümünü türetirsek

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\alpha,\beta,\gamma,\theta\right)\right)\\
=\;&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varrho_2 x+\varrho_4 y-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}\left(1+e^x\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\left(1+e^y\right)^{-(\varrho_3+\varrho_4)}\\
&\qquad\times\ {}_7Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}\left(e^x,e^y\right)dxdy\\
=\;&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_2-1-i\xi_1}v^{\varrho_4-1-i\xi_2}\left(1+u\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\left(1+v\right)^{-(\varrho_3+\varrho_4)}\\
&\qquad\times M_{r-s}^{(\alpha,\beta)}\left(u\right)M_s^{(\gamma,\theta)}\left(v\right)dudv\\
=\;&\frac{\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)\Gamma\left(\theta+s+1\right)}{\left(-1\right)^r\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\theta+1\right)}\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{\left(-\left(r-s\right)\right)_{l_1}\left(r-s+1-\alpha\right)_{l_1}}{\left(\beta+1\right)_{l_1}\left(-1\right)^{l_1}l_1!}\\
&\times\left(\int_0^{\infty}u^{\varrho_2-1-i\xi_1+l_1}\left(1+u\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}du\right)\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{\left(-s\right)_{l_2}\left(s+1-\gamma\right)_{l_2}}{\left(\theta+1\right)_{l_2}\left(-1\right)^{l_2}l_2!}\left(\int_0^{\infty}v^{\varrho_4-1-i\xi_2+l_2}\left(1+v\right)^{-(\varrho_3+\varrho_4)}dv\right)\right]\\
=\;&\frac{\left(-1\right)^r\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)\Gamma\left(\theta+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\theta+1\right)}\\
&\times\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{\left(-\left(r-s\right)\right)_{l_1}\left(1-\alpha+r-s\right)_{l_1}}{\left(\beta+1\right)_{l_1}\left(-1\right)^{l_1}l_1!}\right.\\
&\left.\times\frac{\Gamma\left(\varrho_2-i\xi_1+l_1\right)\Gamma\left(\varrho_1+i\xi_1-l_1\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)}\right]\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{\left(-s\right)_{l_2}\left(1-\gamma+s\right)_{l_2}\Gamma\left(\varrho_4-i\xi_2+l_2\right)\Gamma\left(\varrho_3+i\xi_2-l_2\right)}{\left(\theta+1\right)_{l_2}\left(-1\right)^{l_2}l_2!\Gamma\left(\varrho_3+\varrho_4\right)}\right]\\
=\;&\frac{\left(-1\right)^r\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)\Gamma\left(\theta+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\theta+1\right)}C_7\left(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\xi_1,\xi_2\right)\\
&\times\Theta_7\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\alpha,\beta,\gamma,\theta,\xi_1,\xi_2\right)
\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşırız. Burada

$$\begin{aligned}
&C_7\left(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\xi_1,\xi_2\right)\\
=\;&\frac{\Gamma\left(\varrho_1+i\xi_1\right)\Gamma\left(\varrho_2-i\xi_1\right)\Gamma\left(\varrho_3+i\xi_2\right)\Gamma\left(\varrho_4-i\xi_2\right)}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)\Gamma\left(\varrho_3+\varrho_4\right)}
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\Theta_7\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\alpha,\beta,\gamma,\theta,\xi_1,\xi_2\right)\\
&= {}_3F_2\left(\begin{matrix}-s,\ s+1-\gamma,\ \varrho_4-i\xi_2\\ \theta+1,\ 1-\varrho_3-i\xi_2\end{matrix}\mid 1\right)\\
&\quad\times {}_3F_2\left(\begin{matrix}-\left(r-s\right),\ r-s+1-\alpha,\ \varrho_2-i\xi_1\\ \beta+1,\ 1-\varrho_1-i\xi_1\end{matrix}\mid 1\right)
\end{aligned}
$$

dir. Benzer biçimde, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) ve (2.5) bağıntıları kullanılarak (7.21) ile tanımlanan $h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\lambda,\mu,\eta,\tau\right)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\lambda,\mu,\eta,\tau\right)\right) &= \frac{\left(-1\right)^n\Gamma\left(\mu+n-k+1\right)\Gamma\left(\tau+k+1\right)}{\Gamma\left(\mu+1\right)\Gamma\left(\tau+1\right)}\\
&\quad\times C_7\left(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_7\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\lambda,\mu,\eta,\tau,\xi_1,\xi_2\right)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. (2.6) Parseval Özdeşliği'nden

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\varrho_2+\kappa_2\right)x+\left(\varrho_4+\kappa_4\right)y}\left(1+e^x\right)^{-\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2\right)} \qquad (7.22)\\
&\times\left(1+e^y\right)^{-\left(\varrho_3+\varrho_4+\kappa_3+\kappa_4\right)}\ {}_7Q_{r,s}^{\left(\alpha,\beta,\gamma,\theta\right)}\left(e^x,e^y\right)\ {}_7Q_{n,k}^{\left(\lambda,\mu,\eta,\tau\right)}\left(e^x,e^y\right)dxdy\\
= &\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_2+\kappa_2-1}v^{\varrho_4+\kappa_4-1}\left(1+u\right)^{-\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2\right)}\left(1+v\right)^{-\left(\varrho_3+\varrho_4+\kappa_3+\kappa_4\right)}\\
&\times\ {}_7Q_{r,s}^{\left(\alpha,\beta,\gamma,\theta\right)}\left(u,v\right)\ {}_7Q_{n,k}^{\left(\lambda,\mu,\eta,\tau\right)}\left(u,v\right)dudv\\
= &\frac{\left(-1\right)^{r+n}}{\left(2\pi\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)\Gamma\left(\theta+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\theta+1\right)}\\
&\times\overline{\frac{\Gamma\left(\mu+n-k+1\right)\Gamma\left(\tau+k+1\right)}{\Gamma\left(\mu+1\right)\Gamma\left(\tau+1\right)}C_7\left(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\xi_1,\xi_2\right)}\\
&\times C_7\left(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\xi_1,\xi_2\right)\overline{\Theta_7\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\lambda,\mu,\eta,\tau,\xi_1,\xi_2\right)}\\
&\times\Theta_7\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\alpha,\beta,\gamma,\theta,\xi_1,\xi_2\right)d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}
$$

yazılır. (7.22) bağıntısında $\alpha=\lambda=\varrho_1+\kappa_1+1$, $\beta=\mu=\varrho_2+\kappa_2-1$, $\gamma=\eta=\varrho_3+\kappa_3+1$ ve $\theta=\tau=\varrho_4+\kappa_4-1$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.77) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 7.7

$$
\begin{aligned}
&{}_7E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\kappa_4,\kappa_3,\kappa_2,\kappa_1\right)\\
=\;&\frac{\Gamma\left(r-s+\varrho_2+\kappa_2\right)\Gamma\left(s+\varrho_4+\kappa_4\right)}{\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2\right)\Gamma\left(\varrho_4+\kappa_4\right)}\Theta_7\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4\right.\\
&\left.,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,\varrho_3+\kappa_3+1,\varrho_4+\kappa_4-1,-ix,-iy\right)
\end{aligned}
$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4>0$, $\varrho_3+\kappa_3>2r$ ve $\varrho_1+\kappa_1>2r$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\varrho_1+ix\right)\Gamma\left(\varrho_2-ix\right)\Gamma\left(\varrho_3+iy\right)\Gamma\left(\varrho_4-iy\right)\\
&\times\Gamma\left(\kappa_1-ix\right)\Gamma\left(\kappa_2+ix\right)\Gamma\left(\kappa_3-iy\right)\Gamma\left(\kappa_4+iy\right)\\
&\times\,{}_7E_{r,s}\left(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4,\kappa_4,\kappa_3,\kappa_2,\kappa_1\right)\\
&\times\,{}_7E_{n,k}\left(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4,\varrho_4,\varrho_3,\varrho_2,\varrho_1\right)dxdy\\
=\;&\frac{4\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1+1-\left(r-s\right)\right)\Gamma\left(\varrho_3+\kappa_3+1-s\right)\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+r-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2\left(r-s\right)\right)\left(\varrho_3+\kappa_3-2s\right)}\\
&\times\frac{\Gamma\left(\varrho_4+\kappa_4+s\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)\Gamma\left(\varrho_3+\varrho_4\right)\Gamma\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\Gamma\left(\kappa_3+\kappa_4\right)\delta_{r,n}\delta_{s,k}}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-\left(r-s\right)\right)\Gamma\left(\varrho_3+\varrho_4+\kappa_3+\kappa_4-s\right)}
\end{aligned}
$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.7 $\varrho_1=\kappa_1$, $\varrho_2=\kappa_2$, $\varrho_3=\kappa_3$, $\varrho_4=\kappa_4$ veya $\varrho_1=\varrho_2$, $\kappa_1=\kappa_2$, $\varrho_3=\varrho_4$, $\kappa_3=\kappa_4$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.8 ${}_8Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\kappa_1,\kappa_2,\alpha,\beta,\lambda$ ve μ reel parametreler ve ${}_8Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ polinomları (5.86) ile tanımlanmış olmak üzere

$$
h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)=\exp\left(-\varrho_1x-\varrho_2y-\frac{e^{-x}+e^{-y}}{2}\right)\,{}_8Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right)\qquad(7.23)
$$

ve

$$
h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right)=\exp\left(-\kappa_1x-\kappa_2y-\frac{e^{-x}+e^{-y}}{2}\right)\,{}_8Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,e^y\right)\qquad(7.24)
$$

fonksiyonlarını ele alalım. (7.23) ile verilen $h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)} e^{-\varrho_1 x-\varrho_2 y-\frac{e^{-x}+e^{-y}}{2}}\ {}_8Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right)dxdy\\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{-(\varrho_1+1+i\xi_1)} v^{-(\varrho_2+1+i\xi_2)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)} N_{r-s}^{(\alpha)}(u)\, N_s^{(\beta)}(v)\, dudv\\
&= (-1)^r \sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{\left(-(r-s)\right)_{l_1}(r-s+1-\alpha)_{l_1}}{(-1)^{l_1} l_1!}\left(\int_0^{\infty} u^{-(\varrho_1+1+i\xi_1-l_1)} e^{-\frac{1}{2u}}du\right)\\
&\quad\times \sum_{l_2=0}^{s} \frac{(-s)_{l_2}(s+1-\beta)_{l_2}}{(-1)^{l_2} l_2!}\left(\int_0^{\infty} v^{-(\varrho_2+1+i\xi_2-l_2)} e^{-\frac{1}{2v}}dv\right)\\
&= (-1)^r \sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{\left(-(r-s)\right)_{l_1}(r-s+1-\alpha)_{l_1}}{(-1)^{l_1} l_1!} 2^{\varrho_1+i\xi_1-l_1}\Gamma(\varrho_1+i\xi_1-l_1)\\
&\quad\times \sum_{l_2=0}^{s} \frac{(-s)_{l_2}(s+1-\beta)_{l_2}}{(-1)^{l_2} l_2!} 2^{\varrho_2+i\xi_2-l_2}\Gamma(\varrho_2+i\xi_2-l_2)\\
&= (-1)^r C_8(\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2)\,\Theta_8(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$C_8(\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2) = 2^{\varrho_1+\varrho_2+i(\xi_1+\xi_2)}\Gamma(\varrho_1+i\xi_1)\,\Gamma(\varrho_2+i\xi_2)$$

ve

$$\begin{aligned}
\Theta_8(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2) &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} -(r-s),\ r-s+1-\alpha \\ 1-\varrho_1-i\xi_1 \end{matrix} \,\Big|\, \frac{1}{2}\right)\\
&\quad\times {}_2F_1\left(\begin{matrix} -s,\ s+1-\beta \\ 1-\varrho_2-i\xi_2 \end{matrix} \,\Big|\, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

dir. Benzer biçimde, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ve (7.9) bağıntıları kullanılarak (7.24) ile tanımlanan fonksiyon için Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\left(h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu)\right) = (-1)^n C_8(\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2)\,\Theta_8(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2)$$

şeklinde bulunur. (2.6) Parseval Özdeşliği'nden

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\varrho_1+\kappa_1)x-(\varrho_2+\kappa_2)y-\left(e^{-x}+e^{-y}\right)} \tag{7.25}$$

$$\times\ {}_8Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,e^y\right)\ {}_8Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,e^y\right)dxdy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{-(\varrho_1+\kappa_1+1)}v^{-(\varrho_2+\kappa_2+1)}e^{-\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)}\ {}_8Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(u,v)\ {}_8Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(u,v)\,dudv$$

$$= \frac{(-1)^{r+n}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_8\left(\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_8\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)$$

$$\times\overline{C_8\left(\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_8\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2\right)}d\xi_1 d\xi_2$$

elde edilir. (7.25) bağıntısında $\alpha=\lambda=\varrho_1+\kappa_1+1$ ve $\beta=\mu=\varrho_2+\kappa_2+1$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.87) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa bunun bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 7.8

$${}_8E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)=\Theta_8\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2+1,\xi_1,\xi_2\right)$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\varrho_2,\kappa_1,\kappa_2>0$, $\varrho_1+\kappa_1>2r$ ve $\varrho_2+\kappa_2>2r$ için aşağıdaki ortogonallik bağıntısına sahiptir:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\varrho_1+ix\right)\Gamma\left(\varrho_2+iy\right)\Gamma\left(\kappa_1-ix\right)\Gamma\left(\kappa_2-iy\right)$$

$$\times\ {}_8E_{r,s}\left(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)\ {}_8E_{n,k}\left(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\varrho_2,\varrho_1\right)dxdy$$

$$=\frac{\pi^2(r-s)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1+1-(r-s)\right)\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+1-s\right)}{2^{\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-2}\left(\varrho_1+\kappa_1-2(r-s)\right)\left(\varrho_2+\kappa_2-2s\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}.$$

Uyarı 7.8 $\varrho_1=\kappa_1$ ve $\varrho_2=\kappa_2$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.9 ${}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu$ ve η reel parametreler ve ${}_9Q_{r,s}^{(p,q,u)}(x,y)$ polinomu (5.94) ile tanımlanmış olmak üzere

$$h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma)=e^{\varrho_2 x-\varrho_3 y-\frac{e^{-y}}{2}}(1+e^x)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\ {}_9Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(e^x,e^y) \quad (7.26)$$

ve

$$h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\lambda,\mu,\eta)=e^{\kappa_2 x-\kappa_3 y-\frac{e^{-y}}{2}}(1+e^x)^{-(\kappa_1+\kappa_2)}\ {}_9Q_{n,k}^{(\lambda,\mu,\eta)}(e^x,e^y) \quad (7.27)$$

fonksiyonlarını ele alalım. Şimdi (7.26) ile verilen fonksiyon için Fourier dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma))\\
=\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}e^{\varrho_2 x-\varrho_3 y-\frac{e^{-y}}{2}}(1+e^x)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\ {}_9Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(e^x,e^y)\,dxdy\\
=\ &\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_2-i\xi_1-1}(1+u)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}v^{-(\varrho_3+i\xi_2+1)}e^{-\frac{1}{2v}}\ {}_9Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(u,v)\,dudv\\
=\ &\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\varrho_2-i\xi_1-1}(1+u)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}v^{-(\varrho_3+i\xi_2+1)}e^{-\frac{1}{2v}}M_{r-s}^{(\alpha,\beta)}(u)\,N_s^{(\gamma)}(v)\,dvdu\\
=\ &(-1)^r\frac{\Gamma(\beta+r-s+1)}{\Gamma(\beta+1)}\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{(-(r-s))_{l_1}(r-s+1-\alpha)_{l_1}}{(\beta+1)_{l_1}(-1)^{l_1}l_1!}\right.\\
&\left.\times\left(\int_0^{\infty}u^{\varrho_2-1-i\xi_1+l_1}(1+u)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}du\right)\right]\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{(-s)_{l_2}(s+1-\gamma)_{l_2}}{(-1)^{l_2}l_2!}\left(\int_0^{\infty}y^{-(\varrho_3+i\xi_2+1-l_2)}e^{-\frac{1}{2y}}dy\right)\right]\\
=\ &(-1)^r\frac{\Gamma(\beta+r-s+1)}{\Gamma(\beta+1)}\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{(-(r-s))_{l_1}(r-s+1-\alpha)_{l_1}}{(\beta+1)_{l_1}(-1)^{l_1}l_1!}\right.\\
&\left.\times\frac{\Gamma(\varrho_2-i\xi_1+l_1)\Gamma(\varrho_1+i\xi_1-l_1)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)}\right]\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{s}\frac{(-s)_{l_2}(s+1-\gamma)_{l_2}}{(-1)^{l_2}l_2!}2^{\varrho_3+i\xi_2-l_2}\Gamma(\varrho_3+i\xi_2-l_2)\right]\\
=\ &\frac{(-1)^r\Gamma(\beta+r-s+1)}{\Gamma(\beta+1)}C_9(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\xi_1,\xi_2)\\
&\times\Theta_9(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma,\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$C_9\left(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\xi_1,\xi_2\right)=\frac{2^{\varrho_3+i\xi_2}}{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)}\Gamma\left(\varrho_1+i\xi_1\right)\Gamma\left(\varrho_2-i\xi_1\right)\Gamma\left(\varrho_3+i\xi_2\right)$$

ve

$$\begin{aligned}\Theta_9\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma,\xi_1,\xi_2\right)= {}_2F_1&\left(\begin{matrix}-s,\ s+1-\gamma\\ 1-\varrho_3-i\xi_2\end{matrix}\mid\frac{1}{2}\right)\\ \times\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-\left(r-s\right),\ r-s+1-\alpha,\ \varrho_2-i\xi_1\\ \beta+1,\ 1-\varrho_1-i\xi_1\end{matrix}\mid 1\right)&\end{aligned}$$

ile verilir. Benzer şekilde, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ve (7.9) bağıntılarından yararlanılarak (7.27) ile tanımlanan fonksiyon için Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\lambda,\mu,\eta\right)\right)&=\frac{\left(-1\right)^n\Gamma\left(\mu+n-k+1\right)}{\Gamma\left(\mu+1\right)}\\ &\times C_9\left(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_9\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\lambda,\mu,\eta,\xi_1,\xi_2\right)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Elde edilen Fourier dönüşümleri (2.6) Parseval Özdeşliği'nde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\varrho_2+\kappa_2)x-(\varrho_3+\kappa_3)y-e^{-y}}\left(1+e^x\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)} \qquad (7.28)\\ &\times\ {}_9Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(e^x,e^y\right)\ {}_9Q_{n,k}^{(\lambda,\mu,\eta)}\left(e^x,e^y\right)dxdy\\ =&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{\varrho_2+\kappa_2-1}\left(1+u\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)}v^{-(\varrho_3+\kappa_3+1)}e^{-\frac{1}{v}}\\ &\times\ {}_9Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(u,v\right)\ {}_9Q_{n,k}^{(\lambda,\mu,\eta)}\left(u,v\right)dudv\\ =&\frac{\left(-1\right)^{r+n}}{\left(2\pi\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)\Gamma\left(\mu+n-k+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\mu+1\right)}\\ &\times\overline{C_9\left(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_9\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\lambda,\mu,\eta,\xi_1,\xi_2\right)}\\ &\times C_9\left(\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_9\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma,\xi_1,\xi_2\right)d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, (7.28) bağıntısında $\lambda=\alpha=\varrho_1+\kappa_1+1$, $\mu=\beta=\varrho_2+\kappa_2-1$ ve $\eta=\gamma=\varrho_3+\kappa_3+1$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.95) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa, aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 7.9

$$\begin{aligned}&{}_9E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\kappa_3,\kappa_2,\kappa_1\right)\\ &=\Theta_9\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,\varrho_3+\kappa_3+1,-ix,-iy\right)\end{aligned}$$

özel fonksiyonu $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 > 0,\ \varrho_3 + \kappa_3 > 2r$ ve $\varrho_1 + \kappa_1 > 2r$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\varrho_1 + ix)\Gamma(\varrho_2 - ix)\Gamma(\varrho_3 + iy)\Gamma(\kappa_1 - ix) \\
&\times \Gamma(\kappa_2 + ix)\Gamma(\kappa_3 - iy)\ {}_9E_{r,s}(ix, iy; \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \kappa_3, \kappa_2, \kappa_1) \\
&\times\ {}_9E_{n,k}(-ix, -iy; \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \varrho_3, \varrho_2, \varrho_1)\, dxdy \\
= \quad & \frac{\pi^2 (r-s)!s!\Gamma(\varrho_1 + \kappa_1 + 1 - r + s)\Gamma(\varrho_3 + \kappa_3 + 1 - s)}{2^{\varrho_3+\kappa_3-2}(\varrho_1 + \kappa_1 - 2(r-s))(\varrho_3 + \kappa_3 - 2s)} \\
&\times \frac{\Gamma^2(\varrho_2 + \kappa_2)\Gamma(\varrho_1 + \varrho_2)\Gamma(\kappa_1 + \kappa_2)\delta_{r,n}\delta_{s,k}}{\Gamma(\varrho_1 + \varrho_2 + \kappa_1 + \kappa_2 - r + s)\Gamma(\varrho_2 + \kappa_2 + r - s)}
\end{aligned}$$

formunda ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.9 $\varrho_1 = \kappa_1,\ \varrho_2 = \kappa_2,\ \varrho_3 = \kappa_3$ veya $\varrho_1 = \varrho_2,\ \kappa_1 = \kappa_2,\ \varrho_3 = \kappa_3$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.10 ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1, \varrho_2, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \beta, \lambda$ ve μ reel parametreler ve ${}_{13}Q_{r,s}^{(p,q)}(x,y)$ polinomları (5.134)'de tanımlanmış olmak üzere

$$h_{r,s}(x, y; \varrho_1, \varrho_2, \alpha, \beta) = \left(1 + x^2\right)^{-(\varrho_1 - 1/4)} \left(1 + y^2\right)^{-(\varrho_2 - 1/4)}\ {}_{13}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \tag{7.29}$$

ve

$$h_{n,k}(x, y; \kappa_1, \kappa_2, \lambda, \mu) = \left(1 + x^2\right)^{-(\kappa_1 - 1/4)} \left(1 + y^2\right)^{-(\kappa_2 - 1/4)}\ {}_{13}Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(x,y)$$

fonksiyonlarını düşünelim. (7.29) ile verilen fonksiyon için Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)\right)\\
=\ & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}\ {}_{13}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(x,y\right)dydx\\
=\ & \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_1 x}\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)} I_{r-s}^{(\alpha)}\left(x\right)dx\right)\\
& \times\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} I_{s}^{(\beta)}\left(y\right)dy\right)\\
=\ & (r-s)!s!2^r\left[\sum_{l_1=0}^{\left[\frac{r-s}{2}\right]}(-1)^{l_1}\binom{\alpha-1}{r-s-l_1}\binom{r-s-l_1}{l_1}2^{-2l_1}\right.\\
& \left.\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_1 x}\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)} x^{r-s-2l_1}dx\right]\\
& \times\left[\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}(-1)^{l_2}\binom{\beta-1}{s-l_2}\binom{s-l_2}{l_2}2^{-2l_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s-2l_2}dy\right]\\
=\ & \frac{2^r\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha-(r-s)\right)\Gamma\left(\beta-s\right)}\left[\sum_{l_1=0}^{\left[\frac{r-s}{2}\right]}\frac{(-1)^{l_1}2^{-2l_1}\left(-(r-s)\right)_{2l_1}}{\left(\alpha-(r-s)\right)_{l_1}l_1!}\right.\\
& \left.\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_1 x}\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)} x^{r-s-2l_1}dx\right]\\
& \times\left[\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{(-1)^{l_2}2^{-2l_2}\left(-s\right)_{2l_2}}{\left(\beta-s\right)_{l_2}l_2!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s-2l_2}dy\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) eşitlikleri ve

$$(-k)_{2l}=2^{2l}\prod_{s=1}^{2}\left(\frac{-k+s-1}{2}\right)_l \quad , \quad 0\leq l\leq\frac{k}{2} \tag{7.30}$$

açılımı kullanılarak

$$\mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)\right) \tag{7.31}$$
$$= \frac{2^r\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha-(r-s))\Gamma(\beta-s)}\left[\sum_{l_1=0}^{\left[\frac{r-s}{2}\right]}\frac{(-1)^{l_1}\left(-\frac{r-s}{2}\right)_{l_1}\left(-\frac{r-s-1}{2}\right)_{l_1}}{(\alpha-(r-s))_{l_1}\,l_1!}\right.$$
$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_1 x}\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)}x^{r-s-2l_1}dx\right]$$
$$\times\left[\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{(-1)^{l_2}\left(-\frac{s}{2}\right)_{l_2}\left(-\frac{s-1}{2}\right)_{l_2}}{(\beta-s)_{l_2}\,l_2!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}y^{s-2l_2}dy\right].$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
S_{r-s,l_1}\left(\varrho_1,\xi_1\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_1 x}\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)}x^{r-s-2l_1}dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_1 x)^j}{j!}\right)\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)}x^{r-s-2l_1}dx\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_1)^j}{j!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)}x^{r-s+j-2l_1}dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S_{s,l_2}\left(\varrho_2,\xi_2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}y^{s-2l_2}dy\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_2 y)^j}{j!}\right)\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}y^{s-2l_2}dy\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_2)^j}{j!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}y^{s+j-2l_2}dy
\end{aligned}$$

olarak alalım. Şimdi bu integralleri hesaplayalım. İlk olarak birinci integralde $r-s=2m$ durumunu inceleyelim.

$$(2m)! = 2^{2m}m!\left(\frac{1}{2}\right)_m \tag{7.32}$$

bağıntısı yardımıyla $j=0,2,4,...$ için

$$S_{2m,l_1}(\varrho_1,\xi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\xi_1)^{2k}}{(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)} x^{2m+2k-2l_1} dx \tag{7.33}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\xi_1^2}{4}\right)^k}{k! \left(\frac{1}{2}\right)_k} \int_{0}^{\infty} (1+u)^{-(\varrho_1-1/4)} u^{m+k-1/2-l_1} du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\xi_1^2}{4}\right)^k}{k! \left(\frac{1}{2}\right)_k} \frac{\Gamma(m+k+1/2-l_1)\Gamma(\varrho_1-m-k-3/4+l_1)}{\Gamma(\varrho_1-1/4)}$$

$$= B\left(m+1/2-l_1,\ \varrho_1-m-3/4+l_1\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1/2-l_1)_k \left(\frac{\xi_1^2}{4}\right)^k}{(7/4+m-\varrho_1-l_1)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k k!}$$

dır ve $j = 1, 3, 5, ...$ için $S_{2m,l_1}(\varrho_1,\xi_1) = 0$ olduğunu görmek zor değildir. Diğer taraftan, $r - s = 2m + 1$ durumunda $j = 1, 3, 5, ...$ için (7.30) ve (7.32) bağıntıları yardımıyla

$$S_{2m+1,l_1}(\varrho_1,\xi_1) \tag{7.34}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\xi_1)^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1-1/4)} x^{2m+2k+2-2l_1} dx$$

$$= (-i\xi_1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\xi_1^2\right)^k}{\Gamma(2)(2)_{2k}} \int_{0}^{\infty} (1+u)^{-(\varrho_1-1/4)} u^{m+k+1/2-l_1} du$$

$$= (-i\xi_1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\xi_1^2\right)^k}{2^{2r} \prod\limits_{s=1}^{2} \left(\frac{2+s-1}{2}\right)_k} \frac{\Gamma(m+k+3/2-l_1)\Gamma(\varrho_1-m-k-7/4+l_1)}{\Gamma(\varrho_1-1/4)}$$

$$= (-i\xi_1) B\left(m+3/2-l_1,\ \varrho_1-m-7/4+l_1\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+3/2-l_1)_k \left(\frac{\xi_1^2}{4}\right)^k}{(11/4+m-\varrho_1-l_1)_k \left(\frac{3}{2}\right)_k k!}$$

dır ve $j = 0, 2, 4, ...$ için $S_{2m+1,l_1}(\varrho_1,\xi_1) = 0$ olacağı açıktır. (7.33) ve (7.34) bağıntılarından, $S_{r-s,l_1}(\varrho_1,\xi_1)$ integrali aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
& S_{r-s,l_1}\left(\varrho_1,\xi_1\right) \\
= \;& \left(-i\xi_1\right)^{\frac{1-(-1)^{r-s}}{2}} \frac{\Gamma\left(\left[\frac{r-s+1}{2}\right]+1/2-l_1\right)\Gamma\left(\varrho_1-\left[\frac{r-s+1}{2}\right]-3/4+l_1\right)}{\Gamma\left(\varrho_1-1/4\right)} \\
& \times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[\frac{r-s+1}{2}\right]+1/2-l_1\right)_k\left(\frac{\xi_1^2}{4}\right)^k}{\left(7/4+\left[\frac{r-s+1}{2}\right]-\varrho_1-l_1\right)_k\left(1-\frac{(-1)^{r-s}}{2}\right)_k k!}.
\end{aligned}$$

Şimdi de $S_{s,l_2}\left(\varrho_2,\xi_2\right)$ ile verilen ikinci integrali hesaplayalım. $s=2m$ durumunda $j=0,2,4,...$ için

$$\begin{aligned}
S_{2m,l_2}\left(\varrho_2,\xi_2\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-i\xi_2\right)^{2k}}{(2k)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}y^{2m+2k-2l_2}dy \qquad (7.35)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}\int\limits_{0}^{\infty}(1+v)^{-(\varrho_2-1/4)}v^{m+k-1/2-l_2}dv \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}\frac{\Gamma\left(m+k+1/2-l_2\right)\Gamma\left(\varrho_2-m-k-3/4+l_2\right)}{\Gamma\left(\varrho_2-1/4\right)} \\
&= B\left(m+1/2-l_2,\; \varrho_2-m-3/4+l_2\right) \\
&\quad\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(m+1/2-l_2\right)_k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{\left(7/4+m-\varrho_2-l_2\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}
\end{aligned}$$

ve $j=1,3,5,...$ için $S_{2m,l_2}\left(\varrho_2,\xi_2\right)=0$ olduğu görülür. Diğer taraftan, $s=2m+1$ durumunda $j=1,3,5,...$ için

$$
\begin{aligned}
S_{2m+1,l_2}(\varrho_2,\xi_2) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}y^{2m+2k+2-2l_2}dy \qquad (7.36)\\
&= (-i\xi_2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\xi_2^2\right)^k}{\Gamma(2)\,(2)_{2k}}\int_{0}^{\infty}(1+v)^{-(\varrho_2-1/4)}\,v^{m+k+1/2-l_2}dv\\
&= (-i\xi_2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\xi_2^2\right)^k}{2^{2k}\prod\limits_{s=1}^{2}\left(\frac{2+s-1}{2}\right)_k}\\
&\quad\times\frac{\Gamma(m+k+3/2-l_2)\,\Gamma(\varrho_2-m-k-7/4+l_2)}{\Gamma(\varrho_2-1/4)}\\
&= (-i\xi_2)\,B(m+3/2-l_2,\ \varrho_2-m-7/4+l_2)\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+3/2-l_2)_k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{(11/4+m-\varrho_2-l_2)_k\left(\frac{3}{2}\right)_k k!}
\end{aligned}
$$

olup $j=0,2,4,...$ için $S_{2m+1,l_2}(\varrho_2,\xi_2)=0$ olduğu aşikardır. Böylece (7.35) ve (7.36) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
S_{s,l_2}(\varrho_2,\xi_2) &= (-i\xi_2)^{\frac{1-(-1)^s}{2}}\frac{\Gamma\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2-l_2\right)\Gamma\left(\varrho_2-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4+l_2\right)}{\Gamma(\varrho_2-1/4)}\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2-l_2\right)_k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{\left(7/4+\left[\frac{s+1}{2}\right]-\varrho_2-l_2\right)_k\left(1-\frac{(-1)^s}{2}\right)_k k!}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Şimdi, hesaplanan $S_{r-s,l_1}(\varrho_1,\xi_1)$ ve $S_{s,l_2}(\varrho_2,\xi_2)$ integralleri (7.31) bağıntısında yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
C_{13}(r,s,\varrho_1,\varrho_2) &= \frac{\Gamma\left(\left[\frac{r-s+1}{2}\right]+1/2\right)\Gamma\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2\right)}{\Gamma(\varrho_1-1/4)\,\Gamma(\varrho_2-1/4)}\\
\times\Gamma&\left(\varrho_1-\left[\frac{r-s+1}{2}\right]-3/4\right)\Gamma\left(\varrho_2-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$\Theta_{13}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)=\left(-i\xi_1\right)^{\frac{1-(-1)^{r-s}}{2}}\left(-i\xi_2\right)^{\frac{1-(-1)^{s}}{2}}$$
$$\times\left[\sum_{l_1=0}^{\left[\frac{r-s}{2}\right]}\frac{\left(-\frac{r-s}{2}\right)_{l_1}\left(-\frac{r-s-1}{2}\right)_{l_1}\left(\varrho_1-\left[\frac{r-s+1}{2}\right]-3/4\right)_{l_1}}{\left(\alpha-(r-s)\right)_{l_1}\left(1/2-\left[\frac{r-s+1}{2}\right]\right)_{l_1}l_1!}\right.$$
$$\left.\times\ {}_1F_2\left(\begin{array}{c}1/2+\left[\frac{r-s+1}{2}\right]-l_1\\ 7/4+\left[\frac{r-s+1}{2}\right]-\varrho_1-l_1,\ 1-\frac{(-1)^{r-s}}{2}\end{array}\mid\frac{\xi_1^2}{4}\right)\right]$$
$$\times\left[\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{\left(-\frac{s}{2}\right)_{l_2}\left(-\frac{s-1}{2}\right)_{l_2}\left(\varrho_2-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)_{l_2}}{\left(\beta-s\right)_{l_2}\left(1/2-\left[\frac{s+1}{2}\right]\right)_{l_2}l_2!}\right.$$
$$\left.\times\ {}_1F_2\left(\begin{array}{c}1/2+\left[\frac{s+1}{2}\right]-l_2\\ 7/4+\left[\frac{s+1}{2}\right]-\varrho_2-l_2,\ 1-\frac{(-1)^{s}}{2}\end{array}\mid\frac{\xi_2^2}{4}\right)\right]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)\right)\\ =\ &\frac{2^r\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\alpha-(r-s)\right)\Gamma(\beta-s)}C_{13}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2\right)\Theta_{13}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\left(h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right)\right)\\ =\ &\frac{2^n\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\lambda-(n-k)\right)\Gamma(\mu-k)}C_{13}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2\right)\Theta_{13}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)\right)$ ve $\mathcal{F}\left(h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right)\right)$ sonuçları (2.6) Parseval Özdeşliği'nde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+x^2\right)^{-(\varrho_1+\kappa_1-1/2)}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2+\kappa_2-1/2)}\\ &\qquad\times\ {}_{13}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\ {}_{13}Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}(x,y)\,dydx\\ =\ &\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2^{r+n}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\alpha-(r-s)\right)\Gamma(\beta-s)\Gamma\left(\lambda-(n-k)\right)\Gamma(\mu-k)}\\ &\times\overline{C_{13}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2\right)\Theta_{13}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2\right)}\\ &\times C_{13}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2\right)\Theta_{13}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)d\xi_1d\xi_2\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Yukarıdaki eşitlikte $\alpha=\lambda=\varrho_1+\kappa_1$ ve $\beta=\mu=\varrho_2+\kappa_2$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.135) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\qquad(7.37)$$

eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^{2(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-r-1)}\pi^2\,(r-s)!s!}{(\varrho_1+\kappa_1-(r-s)-1)\,(\varrho_2+\kappa_2-s-1)}\\
&\times\frac{\Gamma^2\,(\varrho_1+\kappa_1-(r-s))\,\Gamma^2\,(\varrho_2+\kappa_2-s)}{\Gamma\,(2\,(\varrho_1+\kappa_1)-(r-s)-1)\,\Gamma\,(2\,(\varrho_2+\kappa_2)-s-1)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}\\
=\;&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{C_{13}\,(n,k,\kappa_1,\kappa_2)\Theta_{13}\,(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1+\varrho_1,\kappa_2+\varrho_2,\xi_1,\xi_2)}\\
&\times C_{13}\,(r,s,\varrho_1,\varrho_2)\,\Theta_{13}\,(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1,\varrho_2+\kappa_2,\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

Teorem 7.10

$$
{}_{13}E_{r,s}\,(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1)=\Theta_{13}\,(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1,\varrho_2+\kappa_2,-ix,-iy)
$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\kappa_1>\left[\frac{r+1}{2}\right]+3/4$ ve $\varrho_2,\kappa_2>\left[\frac{r+1}{2}\right]+3/4$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}{}_{13}E_{r,s}\,(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1)\;{}_{13}E_{n,k}\,(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\varrho_2,\varrho_1)\,dxdy\\
=\;&\frac{2^{2(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-r-1)}\pi^2\,(r-s)!s!}{(\varrho_1+\kappa_1-r+s-1)\,(\varrho_2+\kappa_2-s-1)\,\Gamma\,(2\,(\varrho_1+\kappa_1)-r+s-1)}\\
&\times\frac{\Gamma^2\,(\varrho_1+\kappa_1-(r-s))\,\Gamma^2\,(\varrho_2+\kappa_2-s)}{\Gamma\,(2\,(\varrho_2+\kappa_2)-s-1)\,\Gamma\left(\varrho_1-\left[\frac{r-s+1}{2}\right]-3/4\right)\Gamma\left(\varrho_2-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)}\\
&\times\frac{\Gamma\,(\varrho_1-1/4)\,\Gamma\,(\varrho_2-1/4)}{\Gamma\left(\kappa_2-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)\Gamma\left(\kappa_1-\left[\frac{r-s+1}{2}\right]-3/4\right)}\\
&\times\frac{\Gamma\,(\kappa_1-1/4)\,\Gamma\,(\kappa_2-1/4)}{\Gamma^2\left(\left[\frac{r-s+1}{2}\right]+1/2\right)\Gamma^2\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}
\end{aligned}
$$

formunda ortogonallik bağıntısına sahiptir.

7.11 ${}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}\,(x,y)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu$ ve η reel parametreler ve ${}_{14}Q_{r,s}^{(p,q,u)}\,(x,y)$ polinomları (5.142) ile tanımlanmış olmak üzere

$$
h_{r,s}\,(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma)=e^{\varrho_2 x}\,(1+e^x)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)}\;{}_{14}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\,(e^x,y) \tag{7.38}
$$

ve

$$h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\lambda,\mu,\eta\right)=e^{\kappa_2 x}\left(1+e^x\right)^{-(\kappa_1+\kappa_2)}\left(1+y^2\right)^{-(\kappa_3-1/4)}\ {}_{14}Q_{n,k}^{(\lambda,\mu,\eta)}\left(e^x,y\right)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ve (7.30) eşitlikleri kullanılarak (7.38) ile verilen $h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma\right)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma\right)\right)\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}e^{\varrho_2 x}\left(1+e^x\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times\ {}_{14}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(e^x,y\right)dydx\\
=&\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t^{\varrho_2-1-i\xi_1}e^{-i\xi_2 y}\left(1+t\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)}M_{r-s}^{(\alpha,\beta)}\left(t\right)I_s^{(\gamma)}\left(y\right)dydt\\
=&\left(-1\right)^{r-s}2^s\left(r-s\right)!s!\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\binom{\alpha-r+s-1}{l_1}\binom{\beta+r-s}{r-s-l_1}\left(-1\right)^{l_1}\right.\\
&\left.\times\int_0^{\infty}t^{\varrho_2-1-i\xi_1+l_1}\left(1+t\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2)}dt\right]\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\left(-1\right)^{l_2}\binom{\gamma-1}{s-l_2}\binom{s-l_2}{l_2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)}y^{s-2l_2}dy\right]\\
=&\left(-1\right)^{r-s}2^s\left(r-s\right)!s!\left[\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{\left(-1\right)^{l_1}\Gamma\left(\alpha-r+s\right)\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)}{l_1!\Gamma\left(\alpha-r+s-l_1\right)\Gamma\left(r-s+1-l_1\right)}\right.\\
&\left.\times\frac{\Gamma\left(\varrho_2-i\xi_1+l_1\right)\Gamma\left(\varrho_1+i\xi_1-l_1\right)}{\Gamma\left(\beta+1+l_1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)}\right]\\
&\times\left[\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^{l_2}\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\gamma-s+l_2\right)l_2!\left(s-2l_2\right)!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)}y^{s-2l_2}dy\right]\\
=&\frac{\left(-1\right)^{r-s}2^s\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\gamma-s\right)}B\left(\varrho_1+i\xi_1,\ \varrho_2-i\xi_1\right)\\
&\times\sum_{l_1=0}^{r-s}\frac{\left(-\left(r-s\right)\right)_{l_1}\left(r-s+1-\alpha\right)_{l_1}\left(\varrho_2-i\xi_1\right)_{l_1}}{\left(\beta+1\right)_{l_1}\left(1-\varrho_1-i\xi_1\right)_{l_1}l_1!}\\
&\times\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^{l_2}\left(-s\right)_{2l_2}}{\left(\gamma-s\right)_{l_2}l_2!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)}y^{s-2l_2}dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{(-1)^{r-s}\, 2^s \Gamma(\beta+r-s+1)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varrho_1+i\xi_1)\,\Gamma(\varrho_2-i\xi_1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\gamma-s)\,\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)} \\
& \times \sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{(-(r-s))_{l_1}\,(r-s+1-\alpha)_{l_1}\,(\varrho_2-i\xi_1)_{l_1}}{(\beta+1)_{l_1}\,(1-\varrho_1-i\xi_1)_{l_1}\,l_1!} \\
& \times \sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{(-1)^{l_2} \prod\limits_{k=1}^{2} \left(\frac{-s+k-1}{2}\right)_{l_2}}{(\gamma-s)_{l_2}\, l_2!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)} y^{s-2l_2} dy
\end{aligned}
$$

bulunur, yani

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma\right)\right) \qquad\qquad (7.39) \\
= \; & \frac{(-1)^{r-s}\, 2^s \Gamma(\beta+r-s+1)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varrho_1+i\xi_1)\,\Gamma(\varrho_2-i\xi_1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\gamma-s)\,\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)} \\
& \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -(r-s),\; r-s+1-\alpha,\; \varrho_2-i\xi_1 \\ \beta+1,\; 1-\varrho_1-i\xi_1 \end{matrix} \;\middle|\; 1\right) \\
& \times \left[\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{(-1)^{l_2}\left(-\frac{s}{2}\right)_{l_2}\left(-\frac{s-1}{2}\right)_{l_2}}{(\gamma-s)_{l_2}\, l_2!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)} y^{s-2l_2} dy\right].
\end{aligned}
$$

dir. Burada, yukarıdaki integral

$$
\begin{aligned}
S_{s,l_2}(\varrho_3,\xi_2) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)} y^{s-2l_2} dy \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i\xi_2 y)^j}{j!}\right)\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)} y^{s-2l_2} dy \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i\xi_2)^j}{j!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)} y^{s+j-2l_2} dy
\end{aligned}
$$

ile gösterilsin. $s=2m$ durumunda $j=0,2,4,...$ için (7.32) bağıntısı yardımıyla

$$S_{2m,l_2}(\varrho_3,\xi_2) \tag{7.40}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_2)^{2k}}{(2k)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)}y^{2m+2k-2l_2}dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}\int_{0}^{\infty}(1+u)^{-(\varrho_3-1/4)}u^{m+k-1/2-l_2}du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}\frac{\Gamma(m+k+1/2-l_2)\,\Gamma(\varrho_3-m-k-3/4+l_2)}{\Gamma(\varrho_3-1/4)}$$

$$= B(m+1/2-l_2,\ \varrho_3-m-3/4+l_2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+1/2-l_2)_k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{(7/4+m-\varrho_3-l_2)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}$$

olarak bulunur ve $j=1,3,5,...$ için $S_{2m,l_2}(\varrho_3,\xi_2)=0$ olacağı açıktır. Diğer taraftan $s=2m+1$ durumunda $j=1,3,5,...$ için (7.30) bağıntısı kullanılarak

$$S_{2m+1,l_2}(\varrho_3,\xi_2) \tag{7.41}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3-1/4)}y^{2m+2k+2-2l_2}dy$$

$$= (-i\xi_2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\xi_2^2\right)^k}{\Gamma(2)\,(2)_{2k}}\int_{0}^{\infty}(1+v)^{-(\varrho_3-1/4)}v^{m+k+1/2-l_2}dv$$

$$= (-i\xi_2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\xi_2^2\right)^k}{2^{2k}\prod_{s=1}^{2}\left(\frac{2+s-1}{2}\right)_k}$$

$$\times\frac{\Gamma(m+k+3/2-l_2)\,\Gamma(\varrho_3-m-k-7/4+l_2)}{\Gamma(\varrho_3-1/4)}$$

$$= (-i\xi_2)\,B(m+3/2-l_2,\ \varrho_3-m-7/4+l_2)$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+3/2-l_2)_k\left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{(11/4+m-\varrho_3-l_2)_k\left(\frac{3}{2}\right)_k k!}$$

ve $j=0,2,4,...$ için $S_{2m+1,l_2}(\varrho_3,\xi_2)=0$ olacaktır. Böylece (7.40) ve (7.41) bağıntılarından

$$
\begin{aligned}
& S_{s,l_2}(\varrho_3,\xi_2) \\
= \; & (-i\xi_2)^{\frac{1-(-1)^s}{2}} \frac{\Gamma\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2-l_2\right)\Gamma\left(\varrho_3-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4+l_2\right)}{\Gamma(\varrho_3-1/4)} \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2-l_2\right)_k \left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{\left(7/4+\left[\frac{s+1}{2}\right]-\varrho_3-l_2\right)_k \left(1-\frac{(-1)^s}{2}\right)_k k!} \\
= \; & (-i\xi_2)^{\frac{1-(-1)^s}{2}} \frac{\Gamma\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2-l_2\right)\Gamma\left(\varrho_3-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4+l_2\right)}{\Gamma(\varrho_3-1/4)} \\
& \times {}_1F_2\left(\begin{matrix}\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2-l_2 \\ 7/4+\left[\frac{s+1}{2}\right]-\varrho_3-l_2,\; 1-\frac{(-1)^s}{2}\end{matrix} \;\middle|\; \frac{\xi_2^2}{4}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Yukarıdaki ifade (7.39)'da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
C_{14}(s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\xi_1) \; = \; & \frac{\Gamma\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2\right)\Gamma\left(\varrho_3-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)}{\Gamma(\varrho_3-1/4)} \\
& \times\frac{\Gamma(\varrho_1+i\xi_1)\Gamma(\varrho_2-i\xi_1)}{\Gamma(\varrho_1+\varrho_2)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \Theta_{14}(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma,\xi_1,\xi_2) \\
= \; & (-i\xi_2)^{\frac{1-(-1)^s}{2}} \; {}_3F_2\left(\begin{matrix}-(r-s),\; r-s+1-\alpha,\; \varrho_2-i\xi_1 \\ \beta+1,\; 1-\varrho_1-i\xi_1\end{matrix} \;\middle|\; 1\right) \\
& \times \left[\sum_{l_2=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{\left(-\frac{s}{2}\right)_{l_2}\left(-\frac{s-1}{2}\right)_{l_2}\left(\varrho_3-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)_{l_2}}{(\gamma-s)_{l_2}\left(1/2-\left[\frac{s+1}{2}\right]\right)_{l_2} l_2!}\right. \\
& \left.\times {}_1F_2\left(\begin{matrix}\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2-l_2 \\ 7/4+\left[\frac{s+1}{2}\right]-\varrho_3-l_2,\; 1-\frac{(-1)^s}{2}\end{matrix} \;\middle|\; \frac{\xi_2^2}{4}\right)\right]
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{F}(h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma)) = \frac{(-1)^{r-s}\, 2^s\Gamma(\beta+r-s+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma-s)} \\
& \times C_{14}(s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\xi_1)\,\Theta_{14}(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma,\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{F}(h_{n,k}(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\lambda,\mu,\eta)) = \frac{(-1)^{n-k}\, 2^k\Gamma(\mu+n-k+1)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\eta-k)} \\
& \times C_{14}(k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\xi_1)\,\Theta_{14}(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\lambda,\mu,\eta,\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}
$$

olacağından elde edilen fonksiyonlar (2.6) Parseval Özdeşliği'nde yerine yazılırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\varrho_2+\kappa_2)x}\left(1+e^x\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3+\kappa_3-1/2)} \tag{7.42}$$

$$\times\ {}_{14}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(e^x,y\right)\ {}_{14}Q_{n,k}^{(\lambda,\mu,\eta)}\left(e^x,y\right)dydx$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t^{\varrho_2+\kappa_2-1}\left(1+t\right)^{-(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2)}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_3+\kappa_3-1/2)}$$

$$\times\ {}_{14}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(t,y\right)\ {}_{14}Q_{n,k}^{(\lambda,\mu,\eta)}\left(t,y\right)dydt$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2^{s+k}\Gamma\left(\beta+r-s+1\right)\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\mu+n-k+1\right)\Gamma\left(\eta\right)}{(-1)^{r-s}\left(-1\right)^{n-k}\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\gamma-s\right)\Gamma\left(\mu+1\right)\Gamma\left(\eta-k\right)}$$

$$\times\overline{C_{14}\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\xi_1\right)\Theta_{14}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\lambda,\mu,\eta,\xi_1,\xi_2\right)}$$

$$\times C_{14}\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\xi_1\right)\Theta_{14}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\alpha,\beta,\gamma,\xi_1,\xi_2\right)d\xi_1 d\xi_2$$

bağıntısına ulaşılır. (7.42) bağıntısında $\varrho_1+\kappa_1+1=\alpha=\lambda$, $\varrho_2+\kappa_2-1=\beta=\mu$ ve $\varrho_3+\kappa_3=\gamma=\eta$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.143) ortogonallik bağıntısı uygulanırsa (7.37) eşitliği kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{C_{14}\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\xi_1\right)}C_{14}\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\xi_1\right)$$

$$\times\overline{\Theta_{14}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_1+\varrho_1+1,\kappa_2+\varrho_2-1,\kappa_3+\varrho_3,\xi_1,\xi_2\right)}$$

$$\times\Theta_{14}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,\varrho_3+\kappa_3,\xi_1,\xi_2\right)$$

$$= \frac{2^{2(\varrho_3+\kappa_3-s)}\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1+1-(r-s)\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2\left(r-s\right)\right)\left(\varrho_3+\kappa_3-s-1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-(r-s)\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma^2\left(\varrho_2+\kappa_2\right)\Gamma^2\left(\varrho_3+\kappa_3-s\right)}{\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+r-s\right)\Gamma\left(2\left(\varrho_3+\kappa_3\right)-s-1\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 7.11

$$\begin{aligned}&{}_{14}E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\kappa_3,\kappa_2,\kappa_1\right)\\ =\ &\Theta_{14}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2-1,\varrho_3+\kappa_3,-ix,-iy\right)\end{aligned}$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\varrho_2,\kappa_1,\kappa_2>0$, $\varrho_1+\kappa_1>2r$ ve $\varrho_3,\kappa_3>\left[\frac{r+1}{2}\right]+3/4$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\varrho_1+ix\right)\Gamma\left(\varrho_2-ix\right)\Gamma\left(\kappa_1-ix\right)\Gamma\left(\kappa_2+ix\right)$$
$$\times\ {}_{14}E_{r,s}\left(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\kappa_3,\kappa_2,\kappa_1\right)$$
$$\times\ {}_{14}E_{n,k}\left(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\varrho_3,\varrho_2,\varrho_1\right)dxdy$$
$$= \frac{2^{2(\varrho_3+\kappa_3-s)}\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1+1-\left(r-s\right)\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2\left(r-s\right)\right)\left(\varrho_3+\kappa_3-s-1\right)\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2+\kappa_1+\kappa_2-r+s\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma^2\left(\varrho_2+\kappa_2\right)\Gamma^2\left(\varrho_3+\kappa_3-s\right)}{\Gamma\left(\varrho_2+\kappa_2+r-s\right)\Gamma\left(2\left(\varrho_3+\kappa_3\right)-s-1\right)\Gamma^2\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\varrho_1+\varrho_2\right)\Gamma\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\Gamma\left(\varrho_3-1/4\right)\Gamma\left(\kappa_3-1/4\right)}{\Gamma\left(\varrho_3-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)\Gamma\left(\kappa_3-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

şeklindeki ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.10 $\varrho_1=\varrho_2,\kappa_1=\kappa_2$ veya $\varrho_1=\kappa_1,\ \varrho_2=\kappa_2$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

7.12 ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümü

$\varrho_1,\varrho_2,\kappa_1,\kappa_2,\alpha,\beta,\lambda$ ve μ reel parametreler ve ${}_{15}Q_{r,s}^{(p,q)}\left(x,y\right)$ polinomları (5.152) ile tanımlanmış olmak üzere

$$h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)=e^{-\varrho_1 x}e^{-\frac{e^{-x}}{2}}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}\ {}_{15}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,y\right) \tag{7.43}$$

ve

$$h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right)=e^{-\kappa_1 x}e^{-\frac{e^{-x}}{2}}\left(1+y^2\right)^{-(\kappa_2-1/4)}\ {}_{15}Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,y\right)$$

fonksiyonlarını alalım. (7.43) ile verilen $h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)$ fonksiyonu için (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ve (7.30) bağıntıları kullanılarak elde edilen Fourier dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{F}\left(h_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta\right)\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}e^{-\varrho_1 x}e^{-\frac{e^{-x}}{2}}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}\ {}_{15}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,y\right)dydx$$
$$=\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi_2 y}t^{-(\varrho_1+i\xi_1+1)}e^{-\frac{1}{2t}}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)}N_{r-s}^{(\alpha)}\left(t\right)I_s^{(\beta)}\left(y\right)dydt$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{r-s}\, 2^s s! \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} l_1! \binom{\alpha-(r-s)-1}{l_1}\binom{r-s}{r-s-l_1}(-1)^{l_1}\right.\\
&\quad \left.\times \int_0^\infty t^{-(\varrho_1+i\xi_1+1-l_1)} e^{-\frac{1}{2t}} dt\right]\\
&\quad \times \left[\sum_{l_2=0}^{[s/2]} (-1)^{l_2}\binom{\beta-1}{s-l_2}\binom{s-l_2}{l_2} 2^{-2l_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s-2l_2} dy\right]\\
&= (-1)^{r-s}\, 2^s (r-s)! s! \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{(-1)^{l_1}\,\Gamma(\alpha-(r-s))\, 2^{\varrho_1+i\xi_1-l_1}\Gamma(\varrho_1+i\xi_1-l_1)}{\Gamma(\alpha-(r-s)-l_1)\,\Gamma(r-s+1-l_1)\, l_1!}\right]\\
&\quad \times \left[\sum_{l_2=0}^{[s/2]} \frac{(-1)^{l_2}\, 2^{-2l_2}\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-s+l_2)\, l_2!\,(s-2l_2)!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s-2l_2} dy\right]\\
&= (-1)^{r-s}\, 2^{s+\varrho_1+i\xi_1}\Gamma(\varrho_1+i\xi_1)\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-s)}\\
&\quad \times \left[\sum_{l_1=0}^{r-s} \frac{(-(r-s))_{l_1}\,(r-s+1-\alpha)_{l_1}\, 2^{-l_1}}{(1-\varrho_1-i\xi_1)_{l_1}\, l_1!}\right]\\
&\quad \times \left[\sum_{l_2=0}^{[s/2]} \frac{(-1)^{l_2}\, 2^{-2l_2}\,(-s)_{2l_2}}{(\beta-s)_{l_2}\, l_2!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s-2l_2} dy\right],
\end{aligned}
$$

yani

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(h_{r,s}(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta)\right) = (-1)^{r-s}\, 2^{s+\varrho_1+i\xi_1}\Gamma(\varrho_1+i\xi_1)\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-s)} \qquad (7.44)\\
&\times {}_2F_1\left(\begin{matrix} -(r-s),\ r-s+1-\alpha \\ 1-\varrho_1-i\xi_1 \end{matrix} \mid \frac{1}{2}\right)\\
&\times \left[\sum_{l_2=0}^{[s/2]} \frac{(-1)^{l_2}\left(-\frac{s}{2}\right)_{l_2}\left(-\frac{s-1}{2}\right)_{l_2}}{(\beta-s)_{l_2}\, l_2!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s-2l_2} dy\right].
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
S_{s,l_2}(\varrho_2,\xi_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_2 y}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s-2l_2} dy\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_2 y)^j}{j!}\right)\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s-2l_2} dy\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i\xi_2)^j}{j!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{s+j-2l_2} dy
\end{aligned}
$$

dersek, önceki integrallere benzer olarak (7.32) bağıntısı kullanılarak $s = 2m$ durumunda $j = 0, 2, 4, ...$ için

$$S_{2m,l_2}(\varrho_2, \xi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\xi_2)^{2k}}{(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} (1+y^2)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{2m+2k-2l_2} dy \tag{7.45}$$
$$= B(m+1/2-l_2,\ \varrho_2 - m - 3/4 + l_2)$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1/2-l_2)_k \left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{(7/4+m-\varrho_2-l_2)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k k!}$$

ve $j = 1, 3, 5, ...$ için $S_{2m,l_2}(\varrho_2, \xi_2) = 0$ olur. Diğer taraftan (7.30) bağıntısı yardımıyla $s = 2m+1$ durumunda $j = 1, 3, 5, ...$ için

$$S_{2m+1,l_2}(\varrho_2, \xi_2) \tag{7.46}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\xi_2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} (1+y^2)^{-(\varrho_2-1/4)} y^{2m+2k+2-2l_2} dy$$
$$= (-i\xi_2) B(m+3/2-l_2,\ \varrho_2 - m - 7/4 + l_2)$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+3/2-l_2)_k \left(\frac{\xi_2^2}{4}\right)^k}{(11/4+m-\varrho_2-l_2)_k \left(\frac{3}{2}\right)_k k!}$$

ve $j = 0, 2, 4, ...$ için $S_{2m+1,l_2}(\varrho_2, \xi_2) = 0$ dır. (7.45) ve (7.46) bağıntılarından

$$S_{s,l_2}(\varrho_2, \xi_2) = (-i\xi_2)^{\frac{1-(-1)^s}{2}} \frac{\Gamma\left(\left[\frac{s+1}{2}\right] + 1/2 - l_2\right) \Gamma\left(\varrho_2 - \left[\frac{s+1}{2}\right] - 3/4 + l_2\right)}{\Gamma(\varrho_2 - 1/4)}$$
$$\times\ {}_1F_2\left(\begin{matrix} \left[\frac{s+1}{2}\right] + 1/2 - l_2 \\ 7/4 + \left[\frac{s+1}{2}\right] - \varrho_2 - l_2,\ 1 - \frac{(-1)^s}{2} \end{matrix} \middle| \frac{\xi_2^2}{4}\right)$$

yazılır. Bu eşitlik (7.44)'de yerine yazılırsa

$$\mathcal{F}(h_{r,s}(x, y; \varrho_1, \varrho_2, \alpha, \beta)) = \frac{(-1)^{r-s}\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - s)} C_{15}(s, \varrho_1, \varrho_2, \xi_1, \xi_2)$$
$$\times \Theta_{15}(r, s, \varrho_1, \varrho_2, \alpha, \beta, \xi_1, \xi_2)$$

bulunur. Burada

$$C_{15}(s, \varrho_1, \varrho_2, \xi_1, \xi_2) = 2^{s+\varrho_1+i\xi_1} \Gamma(\varrho_1 + i\xi_1)$$
$$\times B\left(\left[\frac{s+1}{2}\right] + 1/2,\ \varrho_2 - \left[\frac{s+1}{2}\right] - 3/4\right)$$

ve

$$\Theta_{15}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)= {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\left(r-s\right),\ r-s+1-\alpha \\ 1-\varrho_1-i\xi_1 \end{matrix} \mid \frac{1}{2}\right)$$
$$\times\left(-i\xi_2\right)^{\frac{1-(-1)^s}{2}}\left[\sum_{l_2=0}^{[s/2]}\frac{\left(-\frac{s}{2}\right)_{l_2}\left(-\frac{s-1}{2}\right)_{l_2}\left(\varrho_2-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)_{l_2}}{\left(\beta-s\right)_{l_2}\left(1/2-\left[\frac{s+1}{2}\right]\right)_{l_2}l_2!}\right.$$
$$\left.\times\ {}_1F_2\left(\begin{matrix}\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2-l_2 \\ 7/4+\left[\frac{s+1}{2}\right]-\varrho_2-l_2,\ 1-\frac{(-1)^s}{2}\end{matrix} \mid \frac{\xi_2^2}{4}\right)\right]$$

dir. Benzer olarak

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(h_{n,k}\left(x,y;\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu\right)\right) &= \frac{(-1)^{n-k}\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(\mu-k\right)}C_{15}\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)\\ &\quad\times\Theta_{15}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2\right)\end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen özel fonksiyonlar (2.6) Parseval Özdeşliği'nde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\varrho_1+\kappa_1)x}e^{-e^{-x}}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2+\kappa_2-1/2)} \qquad (7.47)\\ &\qquad\times\ {}_{15}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(e^x,y\right)\ {}_{15}Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(e^x,y\right)dydx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t^{-(\varrho_1+\kappa_1+1)}e^{-\frac{1}{t}}\left(1+y^2\right)^{-(\varrho_2+\kappa_2-1/2)}\ {}_{15}Q_{r,s}^{(\alpha,\beta)}\left(t,y\right)\ {}_{15}Q_{n,k}^{(\lambda,\mu)}\left(t,y\right)dydt\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{r-s}(-1)^{n-k}\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(\beta-s\right)\Gamma\left(\mu-k\right)}\\ &\quad\times\overline{C_{15}\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_{15}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\lambda,\mu,\xi_1,\xi_2\right)}\\ &\quad\times C_{15}\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_{15}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2\right)d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, (7.47) bağıntısında $\alpha=\lambda=\varrho_1+\kappa_1+1$ ve $\beta=\mu=\varrho_2+\kappa_2$ alarak eşitliğin sol tarafında (5.153) ortogonallik bağıntısı kullanılırsa (7.37) bağıntısından

$$\begin{aligned}&\frac{2^{2(\varrho_2+\kappa_2)}\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1+1-\left(r-s\right)\right)\Gamma^2\left(\varrho_2+\kappa_2-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2\left(r-s\right)\right)\left(\varrho_2+\kappa_2-s-1\right)\Gamma\left(2\left(\varrho_2+\kappa_2\right)-s-1\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{C_{15}\left(k,\kappa_1,\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_{15}\left(n,k,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1+\varrho_1+1,\kappa_2+\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)}\\ &\quad\times C_{15}\left(s,\varrho_1,\varrho_2,\xi_1,\xi_2\right)\Theta_{15}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2,\xi_1,\xi_2\right)d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 7.12

$$_{15}E_{r,s}\left(x,y;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)=\Theta_{15}\left(r,s,\varrho_1,\varrho_2,\varrho_1+\kappa_1+1,\varrho_2+\kappa_2,-ix,-iy\right)$$

özel fonksiyonu $\varrho_1,\kappa_1>0,\ \varrho_1+\kappa_1>2r$ ve $\varrho_2,\kappa_2>\left[\frac{r+1}{2}\right]+3/4$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\varrho_1+ix\right)\Gamma\left(\kappa_1-ix\right)\ {}_{15}E_{r,s}\left(ix,iy;\varrho_1,\varrho_2,\kappa_2,\kappa_1\right)$$
$$\times\ {}_{15}E_{n,k}\left(-ix,-iy;\kappa_1,\kappa_2,\varrho_2,\varrho_1\right)dxdy$$

$$=\frac{2^{2(\varrho_2+\kappa_2-s)-(\varrho_1+\kappa_1)}\pi^2\left(r-s\right)!s!\Gamma\left(\varrho_1+\kappa_1+1-(r-s)\right)\Gamma^2\left(\varrho_2+\kappa_2-s\right)}{\left(\varrho_1+\kappa_1-2\left(r-s\right)\right)\left(\varrho_2+\kappa_2-s-1\right)\Gamma\left(2\left(\varrho_2+\kappa_2\right)-s-1\right)}$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\varrho_2-1/4\right)\Gamma\left(\kappa_2-1/4\right)}{\Gamma^2\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+1/2\right)\Gamma\left(\varrho_2-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)\Gamma\left(\kappa_2-\left[\frac{s+1}{2}\right]-3/4\right)}\delta_{r,n}\delta_{s,k}$$

formunda ortogonallik bağıntısına sahiptir.

Uyarı 7.11 $\varrho_1=\kappa_1$ için bu ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu pozitiftir.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Nümerik analiz, yaklaşım teorisi ve istatistik alanlarında uygulamaları olan ve $M_r^{(p,q)}(x)$, $N_r^{(p)}(x)$, $I_r^{(p)}(x)$ ile gösterilen sonlu ortogonal polinom aileleri ve çeşitli özellikleri Masjed-Jamei tarafından çalışılmış olup, sonrasında Koepf, Soleyman, Area ve Nieto ile birlikte geliştirilerek örneklendirilmiş ve bu sayede birçok matematikçi ve istatistikçiye çalışma alanlarını genişletme imkanı sunmuştur.

Tek değişkenli ortogonal polinomlar yardımıyla iki değişkenli ortogonal polinomlar üretmeyi sağlayan Koornwinder metodu daha önce iyi bilinen klasik ortogonal polinomlara uygulanarak birim diskteki, parabolik bölgedeki, simpleksteki Koornwinder polinomları gibi birçok polinom elde edilmiştir.

Bu çalışmada da Koornwinder metodunun sonlu ortogonal polinomlar için ilk kez uygulanmasıyla literatür için yeni olan iki değişkenli sonlu ortogonal polinom aileleri ile onların bazı özellikleri bulunmuş ve örneklendirilmiştir. Ayrıca elde edilen iki değişkenli sonlu ortogonal polinomların ve bu polinomlar için elde edilen özelliklerin limit davranışları incelenmiş, bu sonuçlar kullanılarak sonlu ve sonsuz ortogonal polinomlar arasında bağıntılar türetilmiş ve bu esnada bazı yeni iki değişkenli ortogonal polinom aileleri ortaya çıkarılmıştır. Bunların dışında ortaya konan sonlu ortogonal polinom aileleri cinsinden belli amaçlara yönelik oluşturulmuş fonksiyonların Fourier dönüşümleri kullanılarak yeni ortogonal fonksiyon aileleri elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar çok değişkenli sonlu ortogonal polinomları tanımlama ve özelliklerinin incelenmesi üzerine yapılabilecek çalışmalar için kaynak oluşturmaktadır. Tezde tek değişkenli sonlu ortogonal polinomlar ile Koornwinder metodu kullanılarak sonuçlar elde edilmiş olup, bu konuda çalışanlar için iki değişkenli sonlu türde ortogonal polinomlar yeni bir tür polinom ailesi olarak sunulmuştur. Matematik, fizik ve mühendisliğin birçok alanında ortogonal polinomların uygulamalarına yönelik çok sayıda çalışma olmasına rağmen, ortogonal polinomların sonlu analoglarını içeren çalışmalar çok fazla değildir. Dolayısıyla bu tez, bu konularda çalışan bilim insanlarını destekleyerek bu yönde çalışmalarını teşvik edebilecek ve branşlar arası çalışmalar genişletilerek önemli uygulamalı sonuçların elde edilmesinde rol oynayabilecektir. Bunlara ek olarak Fourier dönüşümü altında elde edilen sonuçlar kullanılarak üretilen ortogonal fonksiyon ailelerinin özellikleri yeni araştırmalarda incelenebilir. Yine tezin içeriğinde oluşturulan sonlu ve sonsuz ortogonal polinomlar arasındaki bağıntılar yardımıyla diğer fonksiyon veya polinomlar arasındaki geçişler düşünülebilir. Böylece yapılan çalışmalar daha da zenginleştirilebilir.

Tez kapsamında üç adet yayın oluşturulmuştur. Bu yayınlardan iki tanesi SCI-Exp. kapsamında taranan "Bulletin of the Iranian Mathematical Society" ve "Symmetry" dergilerinde makale olarak basılmıştır. Her iki yayındaki sonuçlar elde edilirken İran'da K.N. Toosi University of Technology üniversitesinde çalışan Prof. Dr. Mohammad Masjed-Jamei ile elde edilen sonuçlar üzerinde tartışılmıştır. Tez kapsamında elde edilen 3. yayın ise SCI-Exp. kapsamında taranan başka bir dergiye basım için sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Aktaş, R. 2007. Çok Değişkenli Ortogonal Polinomlar. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 196, Ankara.

Aktaş, R., Altın, A. and Taşdelen, F. 2011. A note on a family of two-variable polynomials. Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 4825-4833.

Aktaş, R., Taşdelen, F. and Yavuz, N. 2013. Bilateral and Bilinear generating functions for the Generalized Zernike or disc polynomials. Ars Combinatoria, 108, 389-400.

Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E. 2013. The Laguerre polynomials in several variables. Math. Slovaca, 63(3), 531-544.

Aktaş, R. 2014. A note on parameter derivatives of the Jacobi polynomials on the triangle. Applied Mathematics and Computation, 247, 368-372.

Aktaş, R. 2016. Representations for parameter derivatives of some Koornwinder polynomials in two variables. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 24(4), 555-561.

Aktaş, R., Area, I. and Güldoğan, E. 2020. A new family of orthogonal polynomials in three variables. Journal of Inequalities and Applications, 2020(170), 1-27.

Altın, A., Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E. 2009. On a multivariable extension for the extended Jacobi polynomials. Journal Mathematical Analysis and Applications, 353, 121-133.

Altın, A., Aktaş, A. and Çekim, B. 2013. On a multivariable extension of the Hermite and related polynomials. Ars Combinatoria, 110, 487-503.

Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71, Cambridge University Press, Cambridge.

Askey, R. 1985. Continuous Hahn polynomials. Journal of Physics A:Mathematical and General, 18, L1017-L1019.

Bailey, W.N. 1935. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics, 32, Cambridge.

Bochner, S. 1929. Uber Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. Mathematische Zeitschrift, 29, 730-736.

Davies, B. 2002. Integral transforms and their applications. 3rd ed. Texts in Applied Mathematics, 41, Springer-Verlag, New York.

Dunkl, C.F. and Xu, Y. 2014. Orthogonal Polynomials of Several Variables. 2nd edn. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 155, Cambridge University Press, Cambridge.

Fernandez, L., Perez, T.E. and Pinar, M.A. 2012. On Koornwinder classical orthogonal polynomials in two variables. Journal of Computational and Applied Mathematics, 236, 3817-3826.

Güldoğan, E., Aktaş, R. and Masjed-Jamei, M. 2020a. On finite classes of two-variables orthogonal polynomials. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 46(4), 1163-1194.

Güldoğan, E., Aktaş, R. and Area, I. 2020b. Some classes of special functions using Fourier transforms of some two-variable orthogonal polynomials. Integral Transforms and Spec. Funct., 31(6), 437-470.

Koepf, W. 1998. Hypergeometric Summation. Braunschweig/Weisbaden, Vieweg.

Koepf, W. and Masjed-Jamei, M. 2007. Two Classes of Special Functions Using Fourier Transforms of Some Finite Classes of Classical Orthogonal Polynomials. Proceedings of the American Mathematical Society, 135, 3599-3606.

Koornwinder, T.H. 1975. Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials. In: Askey, R. (ed.) Theory and Application of Special Functions, 435-495, Academic Press, New York.

Koornwinder, T.H. 1985. Special orthogonal polynomial systems mapped onto each other by the Fourier-Jacobi transform. Polynomes Orthogonaux et Applications (C. Brezinski, A. Draux, A. P. Magnus, P. Maroni and A. Ronveaux, Eds.), Lecture Notes Math., 1171, Springer, 174-183.

Lee, D.W. 2005. Partial differential equations for products of two classical orthogonal polynomials. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 42(1), 179–188.

Lesky, W. 1996. Endliche und unendliche Systeme von kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynomen. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 76, 181-184.

Marcellan, F., Marriaga, M.E., Perez, T.E. and Pinar, M.A. 2018a. On bivariate classical orthogonal polynomials. Appl. Math. Comput., 325, 340-357.

Marcellan, F., Marriaga, M.E., Perez, T.E. and Pinar, M.A. 2018b. Matrix Pearson equations satisfied by Koornwinder weights in two variables. Acta Appl. Math., 153, 81-100.

Marcellan, F., Marriaga, M.E., Perez, T.E. and Pinar, M.A. 2019. Coherent pairs of bivariate orthogonal polynomials. J. Approx. Theory, 245, 40-63.

Marriaga, M., Perez, T.E. and Pinar, M.A. 2017. Three term relations for a class of bivariate orthogonal polynomials. Mediterranean Journal of Mathematics, 14(54), 26.

Masjed-Jamei, M. 2002. Three finite classes of hypergeometric orthogonal polynomials and their application in functions approximation. Integral Transforms and Special Functions, 13 (2), 169-190.

Masjed-Jamei, M. 2004. Classical orthogonal polynomials with weight function $\left((ax+b)^2+(cx+d)^2\right)^{-p}\exp\left(q\arctan\left((ax+b)\,/\,(cx+d)\right)\right);\ -\infty<x<\infty$ and a generalization of T and F distributions. Integral Transforms and Special Functions, 15 (2), 137-153.

Masjed-Jamei, M. 2006. Some New Classes of Orthogonal Polynomials and Special Functions: A Symmetric Generalisation of Sturm-Liouville Problems and its Consequences. PhD thesis, University of Kassel, Department of mathematics, Kassel, Germany.

Masjed-Jamei, M., Soleyman, F., Area, I. and Nieto, J.J. 2018. Two Finite q-Sturm Liouville Problems and their Orthogonal Polynomial Solutions. Filomat, 32 (1), 231-244.

Masjed-Jamei, M. 2020. Special Functions and Generalized Sturm-Liouville Problems. Springer Nature, Cham.

Milovanovic, G., Öztürk, G. and Aktaş, R. 2020. Properties of Some of Two-variable Orthogonal Polynomials. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43(2), 1403-1431.

Pinar, M.A. and Xu, Y. 2009. Orthogonal polynomials and partial differential equations on the unit ball. Proceedings of the American Mathematical Society, 137(9), 2979-2987.

Rainville, E.D. 1960. Special Functions. 1st ed., The Macmillan Company, New York.

Romanovski, V. 1929. Sur quelques classes nouvelles de polynomes orthogonaux. Comptes Rendues Academie Sciences Paris, 188, 1023-1025.

Soleyman, F., Masjed-Jamei, M. and Area, I. 2017. A finite class of q-orthogonal polynomials corresponding to inverse gamma distribution. Analysis and Mathematical Physics, 7, 479-492.

Srivastava, H.M. and Manocha, H.L. 1984. A Treatise on Generating Functions. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley, New York.

Suetin, P.K. 1988. Orthogonal Polynomials in Two Variables. Gordon and Breach Science Publishers, Moscow.

Szegö, G. 1975. Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications, 23, 4th ed. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Xu, Y. 2014. Tight frame with Hahn and Krawtchouk polynomials of several variables. SIGMA, 10, 019.

Xu, Y. 2015. Hahn, Jacobi, and Krawtchouk polynomials of several variables. J. Approx. Theory, 195, 19-42.