

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**İKİ BOYUTLU ALI-MIKHAIL-HAQ KAPULA AİLESİNDEN TEK BOYUTLU  
YENİ BİR DAĞILIMIN ELDE EDİLMESİ**

**Feyza GÜRER**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2021**

**Her hakkı saklıdır**

# ÖZET

Doktora Tezi

## İKİ BOYUTLU ALI-MIKHAIL-HAQ KAPULA AİLESİNDEN TEK BOYUTLU YENİ BİR DAĞILIMIN ELDE EDİLMESİ

Feyza GÜRER

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

İstatistikte veri modellemesinin yapılabilmesi için bazı klasik dağılımların yetersiz kalması, yeni dağılımların elde edilmesi ihtiyacını doğurmuştur. Bu ihtiyaçla birlikte bilinen dağılım ailelerinin genişletilmesi ile ilgili yapılan çalışmalar günümüzde giderek artmaktadır. Bu tez çalışmasında da, iki boyutlu Ali-Mikhail-Haq kapula ailesi, tek boyutluya indirgenerek elde edilen dağılımların hangi koşullarda birer dağılım fonksiyonu olma durumunu sağladıkları araştırılmıştır. Elde edilen bu indirgenmiş dağılımların karakteristikleri incelenerek çeşitli tahmin yöntemleri ile parametre tahmini yapılmıştır. Ardından simülasyon çalışması yapılarak tahmin yöntemlerinin performansları karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır. İki veya daha çok boyutlu dağılımların tek boyutluya indirgenmesi ile elde edilen yeni dağılımlar temel dağılımlara göre daha esnek olmaktadır. Bu esneklik ise dağılımların farklı veri setlerini modelleyerek çeşitli alanlarda kullanılabilmesine işaret etmektedir.

**Kasım 2021, 122 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Ali-Mikhail-Haq dağılımı, kapula, dağılım türetme, üstel dağılım, koşullu dağılım.

## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

OBTAINING of a NEW UNIVARIATE DISTRIBUTION by ALI-MIKHAIL-HAQ BIVARIATE COPULA FAMILY

Feyza GÜRER

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

Since some of the classical distributions fail to do data modelling in statistics, necessity of having new distributions arises. Accordingly, studies about expanding well-known distribution families are increasing nowadays. In this thesis study, bivariate Ali-Mikhail-Haq copula family is reduced to univariate and we investigate in which conditions obtained distributions become a distribution function. Characteristics of these reduced distributions is investigated and parameter estimation is done with the help of various estimation methods. Then performance of estimation methods are compared and interpreted with doing simulation study. The new distributions obtained by reducing the bivariate or multivariate distributions to univariate are more flexible than the basic distributions. This flexibility indicates that use of this distribution for modelling different data sets and using them in various fields is favorable.

**November 2021, 122 pages**

**Key Words:** Ali-Mikhail-Haq distribution, copula, generating distribution, exponential distribution, conditional distribution

## TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim süresince bilimsel katkılarıyla yol gösterici olmasının yanısıra sevgi, hoşgörü ve anlayışıyla manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım, Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü Başkanı Prof. Dr. Mehmet YILMAZ'a, tez izleme komitesi jüri üyeleri olarak tezimin ilgili bölümlerine bilgi ve deneyimleriyle kattıkları değerler için Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU ve Prof. Dr. Fatih TANK'a, her konuda kapısını çalabilme olanağını bana veren hocam Doç. Dr. Mahmut KARA'ya, tezimin yazım aşamasında karşılaştığım tüm zorluklara göğüs germemde bana yardım eden arkadaşlarım Dr. Öğr. Üyesi Ömer ALTINDAĞ , Araş. Gör. Dr. Abdullah YALÇINKAYA ve ailelerine, akademik hayatım boyunca beni yetiştirerek bana istatistikçi olma gururunu yaşatan Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Varlıkları ve içten destekleriyle hayata bağlılığımı artıran, çalışmalarımnda desteklerini ve varlıklarını hissettiren yakın arkadaşlarım Araş. Gör. Özge GÜRER, Doç. Dr. Özlem KAYMAZ ve Öğr. Gör. Sümeyra CİHANGİROĞLU AKBEY'e, maddi manevi destekleriyle her daim yanımda olan KÜRKLÜOĞLU ailesine içten teşekkürlerimi sunarım.

Başta rahmetli babam A. Ergin GÜNAY ve sevgili eşim Müfettiş Uzm. Ecz. Çağrı GÜRER olmak üzere beni yetiştiren, yüreklendirici destekleriyle hep yanımda olduklarını hissettiren ve herşeyimi borçlu olduğum canım ailem, GÜNAY ve GÜRER ailelerine;

Tüm kalbimle teşekkür ederim.

Feyza GÜRER

Ankara, Kasım 2021

## İÇİNDEKİLER

### TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR .....	iv
SİMGELER DİZİNİ .....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	x
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	xi
1. GİRİŞ .....	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE YÖNTEMLER.....	4
2.1 Tek Değişkenli Sürekli Dağılımlara Dair Bilgiler .....	4
2.1.1 Dağılım fonksiyonu, moment çıkaran fonksiyon ve momentler .....	4
2.1.2 Yaşam fonksiyonu .....	6
2.1.3 Bozulma oranı fonksiyonu.....	6
2.1.4 Üstel dağılım ve bazı özellikleri .....	7
2.2 İki Değişkenli Sürekli Dağılımlar ve Kapula Teorisi.....	7
2.3 Dağılım Aileleri.....	10
2.3.1 Ali-Mikhail-Haq (AMH) dağılım ailesi .....	11
2.3.2 Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılım ailesi .....	11
2.3.3 Marshall-Olkin dağılım ailesi.....	11
2.3.4 Karesel dönüştürülmüş dağılım ailesi .....	12
2.4 Parametre Tahmin Yöntemleri.....	12
2.4.1 En çok olabilirlik (ML) tahmin yöntemi.....	12
2.4.2 Momentler (MOM) tahmin yöntemi .....	13
2.4.3 En küçük kareler (LS) tahmin yöntemi .....	16
2.5 Karşılaştırma Kriterleri .....	16
2.5.1 Bias (Yan).....	17

2.5.2 Root mean square error (RMSE) .....	17
2.6 Uyum İyiliği Testi ve Bazı Bilgi Kriterleri.....	18
3. ALI-MIKHAIL-HAQ DAĞILIMI İLE ELDE EDİLEN YENİ TEK BOYUTLU DAĞILIM.....	20
3.1 Temel Dağılımı Üstel Olan $H_1(t)$ Dağılımının Bazı Karakteristik Özellikleri .	25
3.1.1 $H_1(t)$ dağılımının momentleri .....	27
3.1.2 $H_1(t)$ dağılımının basıklık ve çarpıklığı .....	32
3.1.3 $H_1(t)$ dağılımının yapısı için görsel gösterimler .....	35
3.2 Temel Dağılımı Üstel Olan $H_1(t)$ Dağılımının Parametre Tahmini .....	36
3.2.1 ML tahmin yöntemi .....	36
3.2.2 MOM tahmin yöntemi .....	38
3.2.3 LS tahmin yöntemi.....	40
3.3 $H_1(t)$ Dağılımının Parametrelerinin Tahmini İçin Simülasyon Çalışması .....	41
4. ALI-MIKHAIL-HAQ DAĞILIMI İLE ELDE EDİLEN DİĞER BİR YENİ TEK BOYUTLU DAĞILIM.....	50
4.1 Temel Dağılımı Üstel Olan $H_2(t)$ Dağılımının Bazı Karakteristik Özellikleri	56
4.1.1 $H_2(t)$ dağılımının momentleri .....	58
4.1.2 $H_2(t)$ dağılımının basıklık ve çarpıklığı .....	63
4.1.3 $H_2(t)$ dağılımının yapısı için görsel gösterimler .....	65
4.2 Temel Dağılımı Üstel Olan $H_2(t)$ Dağılımının Parametre Tahmini .....	66
4.2.1 ML tahmin yöntemi .....	67
4.2.2 MOM tahmin yöntemi .....	68
4.2.3 LS tahmin yöntemi.....	70
4.3 $H_2(t)$ Dağılımının Parametrelerinin Tahmini İçin Simülasyon Çalışması .....	71
5. UYGULAMA ÇALIŞMASI .....	81
5.1 Veri Seti 1 (Wheaton Nehri Su Taşkını Verileri) .....	81
5.2 Veri Seti 2 (Uranyum Konsantrasyon Verileri) .....	83
5.3 Veri Seti 3 (Kalsiyum Konsantrasyon Verileri) .....	85

5.4 Veri Seti 4 (Bir Bankadaki Müşterilerin Bekleme Zamanı Verileri) .....	87
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	96
KAYNAKLAR .....	98
EKLER.....	102
Ek 1 $H_1(t)$ 'nin Temel Dağılımları Eşit Olmayan Durumu için Çizdirilen Grafiğin Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları .....	103
Ek 2 $H_1(t)$ 'nin Olasılık Yoğunluk ve Bozulma Oranı Fonksiyonlarının Grafikleri için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları .....	104
Ek 3 $H_2(t)$ 'nin Olasılık Yoğunluk ve Bozulma Oranı Fonksiyonlarının Grafikleri için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları .....	106
Ek 4 $H_1(t)$ 'nin Çarpıklık ve Basıklık Katsayısı Değerleri için Çizdirilen Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları.....	108
Ek 5 $H_2(t)$ 'nin Çarpıklık ve Basıklık Katsayısı Değerleri için Çizdirilen Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları.....	110
Ek 6 $H_1(t)$ 'nin Simülasyon Çalışması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları.....	112
Ek 7 $H_2(t)$ 'nin Simülasyon Çalışması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları.....	115
Ek 8 Model Uyarlaması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları (Wheaton Nehri Su Taşkını Veri Seti Örneği).....	118
Ek 9 Veri Setlerinin Histogramları için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları (Wheaton Nehri Su Taşkını Veri Seti Örneği) .....	120
ÖZGEÇMİŞ.....	121

## SİMGELER DİZİNİ

$R$	Gerçek eksen $(-\infty, \infty)$
$R^2$	Gerçek düzlem $R \times R$
$\bar{R}$	Genişletilmiş gerçek eksen $[-\infty, \infty]$
$\bar{R}^2$	Genişletilmiş gerçek düzlem $\bar{R} \times \bar{R}$
$I$	$[0; 1]$ , birim aralık
$I^2$	$[0; 1]^2$ , birim kare
$C$	Kapula fonksiyonu
$\alpha$	Üstel dağılımın ölçek parametresi
$\theta$	Bağımlılık parametresi
$F(\cdot)$ ve $G(\cdot)$	Temel (marjinal) dağılım fonksiyonları
$\bar{F}(\cdot)$ ve $\bar{G}(\cdot)$	Temel (marjinal) yaşam fonksiyonları
$H(\cdot)$	İki değişkenli dağılım fonksiyonu
$h(\cdot)$	İki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu
$S(\cdot)$	Yaşam fonksiyonu
$r(\cdot)$	Bozulma oranı fonksiyonu
$E(\cdot)$	Beklenen değer
$M(u)$	Moment çıkaran fonksiyon
$\mu'_n$	$n$ . merkezi olmayan moment
$\mu_n$	$n$ . merkezi moment
$\Theta$	Parametre uzayı
$\llbracket \cdot \rrbracket$	Tam değer fonksiyonu

### **Kısaltmalar**

AMH	Ali-Mikhail-Haq dağılım ailesi
FGM	Farlie-Gumbel-Morgenstern dağılım ailesi
ML	En çok olabilirlik
LS	En küçük kareler



MOM	Momentler methodu
K-S	Kolmogorov-Smirnov
AIC	Akaike Bilgi Kriteri
AICc	Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	Temel dağılımı Weibull olan $H^*(t)$ 'nin farklı parametre değerleri ile çizdirilmiş, sözde olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri.....	21
Şekil 3.2	Üstel dağılım ve $H_1(t)$ 'nin çarpıklık grafiği .....	33
Şekil 3.3	Üstel dağılım ve $H_1(t)$ 'nin basıklık grafiği.....	34
Şekil 3.4	$H_1(t)$ 'nin farklı $\theta$ parametre değerleri için olasılık yoğunluk $h_1(t)$ ve bozulma oranı $r_1(t)$ fonksiyonları ( $\alpha = 1$ ) .....	35
Şekil 4.1	Üstel dağılım ve $H_2(t)$ 'nin çarpıklık grafiği .....	63
Şekil 4.2	Üstel dağılım ve $H_2(t)$ 'nin basıklık grafiği.....	65
Şekil 4.3	$H_2(t)$ 'nin farklı $\theta$ parametre değerleri için olasılık yoğunluk $h_2(t)$ ve bozulma oranı $r_2(t)$ fonksiyonları ( $\alpha = 1$ ) .....	66
Şekil 5.1	Wheaton Nehri su taşkını veri setine ilişkin histogram .....	83
Şekil 5.2	Uranyum konsantrasyonları veri setine ilişkin histogram .....	85
Şekil 5.3	Kalsiyum konsantrasyonları veri setine ilişkin histogram.....	87
Şekil 5.4	Bir bankadaki müşterilerin bekleme zamanlarını içeren veri setine ilişkin histogram.....	88
Şekil 5.5	Mesane kanseri hastalarının iyileşme süresi veri setine ilişkin histogram ...	90
Şekil 5.6	Hastaların beyin cerrahisi servisinde kalış sürelerini gösteren veri setine ilişkin histogram.....	92
Şekil 5.7	Böbrek hastalarının kateterizasyon sonrası enfeksiyona kadar geçen sürelerini içeren veri setine ilişkin histogram .....	95

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 $H_1(t)$ dağılımı için $\theta = 1$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	43
Çizelge 3.2 $H_1(t)$ dağılımı için $\theta = 0.7$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	44
Çizelge 3.3 $H_1(t)$ dağılımı için $\theta = 0.3$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	45
Çizelge 3.4 $H_1(t)$ dağılımı için $\theta = -0.3$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	46
Çizelge 3.5 $H_1(t)$ dağılımı için $\theta = -0.7$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	47
Çizelge 3.6 $H_1(t)$ dağılımı için $\theta = -1$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	48
Çizelge 4.1 $H_2(t)$ dağılımı için $\theta = 1$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	72
Çizelge 4.2 $H_2(t)$ dağılımı için $\theta = 0.7$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	73
Çizelge 4.3 $H_2(t)$ dağılımı için $\theta = 0.3$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	74
Çizelge 4.4 $H_2(t)$ dağılımı için $\theta = -0.3$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	75
Çizelge 4.5 $H_2(t)$ dağılımı için $\theta = -0.7$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	76
Çizelge 4.6 $H_2(t)$ dağılımı için $\theta = -1$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	77
Çizelge 4.7 $H_2(t)$ dağılımı için $\theta = -1.5$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	78
Çizelge 4.8 $H_2(t)$ dağılımı için $\theta = -2$ iken $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri.....	79
Çizelge 5.1 Wheaton Nehri su taşkını veri seti ( $m^3/s$ ).....	82
Çizelge 5.2 Wheaton Nehri su taşkını veri setinin model uyarlaması .....	82
Çizelge 5.3 Uranyum konsantrasyonları veri seti (milyarda bir (nano)-ppb) .....	84
Çizelge 5.4 Uranyum konsantrasyonları veri seti için model uyarlaması.....	84
Çizelge 5.5 Kalsiyum konsantrasyonları veri seti (milimol/lt).....	86
Çizelge 5.6 Kalsiyum konsantrasyonları veri seti için model uyarlaması .....	86
Çizelge 5.7 Bir bankadaki müşterin bekleme zamanı verileri (dakika) .....	87

Çizelge 5.8	Bir bankadaki müşterilerin bekleme zamanlarının veri seti için model uyarlaması.....	88
Çizelge 5.9	Mesane kanseri hastalarının iyileşme süresi verileri (ay).....	89
Çizelge 5.10	Mesane kanseri hastalarının iyileşme süresi veri setinin model uyarlaması .....	89
Çizelge 5.11	Hastaların beyin cerrahisi servisinde kalış süreleri (gün).....	91
Çizelge 5.12	Hastaların beyin cerrahisi servisindeki kalış süresi verilerinin model uyarlaması.....	91
Çizelge 5.13	Böbrek hastalarının kateterizasyon sonrası enfeksiyona kadar geçen sürelerini içeren veri seti (gün) .....	93
Çizelge 5.14	Böbrek hastalarının kateterizasyon sonrası enfeksiyona kadar geçen sürelerini içeren veri seti için model uyarlaması .....	94



## 1. GİRİŞ

Doğadaki olayların gözlenmesi sonucu çok sayıda veri seti elde edilmektedir. Bu verileri modelleyebilmek için literatürde bilinen dağılımların yanı sıra son yıllarda farklı teorilere dayandırılarak (bileşik dağılımlar, karma dağılımlar, dönüştürülmüş dağılımlar gibi) yeni dağılımlar elde edilmiştir. Bu dağılımlar elde edilirken de yeni parametre ya da parametreler ortaya çıkmaktadır. Bu durum asıl olan dağılımların daha esnek bir hal alarak bazı uygun veri setlerini modellemede başarılı olmalarını sağlamıştır. Karma dağılım teorisine dayanan dağılımlar ilk defa Pearson (1894) tarafından ele alınmış, daha sonra Pollard (1934), Rao (1948), Cohen (1967), Everitt ve Hand (1981) gibi araştırmacıların yaptığı çalışmalarla devam etmiştir. Adamidis ve Loukas'ın (1998) önerdiği ve bileşik dağılım olan üstel geometrik dağılım ise daha sonraki yıllarda elde edilen yeni bileşik dağılımlara yol gösterici olma niteliği taşımaktadır. Kuş (2007) ve Barreto-Souza vd. (2010) de bileşik dağılımlar üzerine çalışmalar yapmışlardır. Son yıllarda adından sıkça söz ettiren bir diğer dağılım türetme yöntemi ise dönüştürülmüş (transmuted) dağılım yöntemidir. Shaw ve Buckley (2007) tarafından ilk kez kullanılan bu yöntem, belirli bir formül aracılığı ile asıl dağılımın yapısını değiştirerek veri setlerinin daha iyi modellenebilir olmasını sağlamıştır. Bu alandaki çalışmalara örnek olarak, Aryal ve Tsokos (2009), Merovci (2013) ve Yılmaz (2018) gösterilebilir.

Yukarıda bahsedilen çeşitli yöntemlere ek olarak, bu tez çalışması da iki boyutlu dağılım ailelerini tek boyutluya indirgeyerek yeni dağılımlar türetme fikrine dayanmaktadır. Bu çalışmada iki değişkenli bağımlılığı konu edinen kapula teorisinden yola çıkılarak yeni dağılımların önerilmesi sağlanmıştır. Kapula, rasgele değişkenler arasındaki stokastik bağımlılığı karakterize eder. İlk kez Hoeffding, 1940 ve 1941 yıllarında bağımlılık yapıları üzerine bazı çalışmalar yapmıştır. Kapula bilgisinin temel sonucuna ise Sklar (1959) tarafından ulaşılmış olup, çoğu uygulamanın temeli olarak görülen bu önemli teoremin ispatı ise, Schweizer ve Sklar (1974) tarafından yapılmıştır. Nelsen (1999) ise Sklar'ın teoreminin yararlı ve daha yeni bir düzenlemesini yaparak elde edilen bilgilerin güncellemesini yapmıştır. 1990 yılında La Sapienza Üniversitesi'nde gerçekleştirilen "Symposium on Distributions with Given Marginals" adlı bir sempozyumdan derlenen makale ve bildirimler 1991 yılında bir kitap olarak yayımlanmıştır. Böylelikle kapulalar ile ilgili çalışmalar bu yıllardan sonra artarak

devam etmiştir. Son yıllarda da kapulalar ve bağımlılık üzerine yapılan çalışmalar finans, sigortacılık, aktüerya, yaşam bilimleri gibi çeşitli alanlarda yaygınlaşarak devam etmektedir.

İki veya daha çok boyutlu dağılımlarda bağımlılık parametresi, dağılımın şeklini etkileyebilmektedir. Bundan hareketle ilk kez Ali vd. (1978) tarafından önerilen iki boyutlu Ali-Mikhail-Haq (AMH) kapula dağılım ailesi ele alınmış ve diagonal (köşegen) boyunca koşullu dağılım yardımı ile tek boyutluya indirgenmiştir. Böylelikle var olan bağımlılık parametresinin tek boyutlu dağılıma nasıl bir esneklik kazandırdığı araştırılmıştır.

Tez çalışması kapsamında yer alan konular altı bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın bölümlere göre dağılımı aşağıda belirtildiği gibidir.

Tezin ilk bölümünü oluşturan giriş kısmında, yapılan çalışmanın genel hatlarını içeren bir tanıtım yapılmıştır.

Çalışmada kullanılan tanım, teorem ve temel bilgilendirmelere ikinci bölümde yer verilmiş ve kullanılan yöntemlerden bahsedilmiştir.

Bölüm 3’de yapılan araştırmanın adımları şu şekilde sıralanmıştır. İki boyutlu AMH dağılım ailesinin özellikle tek boyuta indirgendiğinde karmaşık bir yapıda olmasından dolayı öncelikle ikinci dereceden Taylor serisine açılmış şekli ele alınmıştır. Ardından  $(X, Y)$  aynı marjinallere sahip iki boyutlu rasgele vektör için,  $Y \leq t$  verilmişken köşegen boyunca  $X$  rasgele değişkenin dağılımı bulunmuş, yani  $X \leq t$  için dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. Bu kapula ile elde edilen fonksiyonun dağılım özelliklerini hangi koşullar altında sağladığı araştırılmıştır. Bölüm 3, daha sonra temel dağılımların aynı olmadığı durumda da bu indirgemenin geçerli olup olmadığının araştırılması ile devam etmiştir. Belirli koşullar altında dağılım fonksiyonu olma özelliğini taşıyan bu yeni indirgenmiş dağılımın temel dağılımı üstel alınarak karakteristikleri incelenmiş, çeşitli tahmin yöntemleri ile parametre tahmini yapılmıştır. Ardından simülasyon çalışması yapılarak parametre tahmin yöntemlerinin performansları karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır.

Bölüm 4’de ise yine AMH dağılımı için,  $Y \leq y$  verilmişken  $X$ ’in koşullu dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra belirli durumlarda çeşitli iki boyutlu dağılımlara benzerliğinden söz edilmiştir. Elde edilen dağılım fonksiyonunun ikinci dereceden Taylor serisine açılmasıyla oluşan fonksiyonun  $y \rightarrow -\infty$  iken,  $-1 \leq \theta \leq 1$  için bir dağılım fonksiyonu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde bir diğer araştırma konusu olarak,  $\theta$  parametresi için herhangi bir ön sınırlandırmanın yapılmadığı durumda da aynı fonksiyonun bir dağılım fonksiyonu olup olmaması durumu incelenmiştir. Böylece dağılım fonksiyonu olma koşulunu sağlayan  $\theta$  dönüşüm parametresi için yeni bir değer aralığı elde edilmiştir. Bir önceki bölüme benzer olarak, bu ikinci indirgenmiş yeni dağılımın temel dağılımı üstel alınarak karakteristikleri incelenmiş ve simülasyon çalışması yapılarak parametre tahmin yöntemlerinin performansları incelenmiştir. Bu çalışmada önerilen dağılımların temel dağılımlarının üstel olarak seçilmesinin sebebi, üstel dağılımın doğa olaylarına ilişkin modeller göz önüne alındığında geniş bir kullanım alanına sahip olması ve basit istatistiksel yapısının olmasıdır.

Bir dağılımın belirli alanda elde edilen verileri daha iyi modellemesiyle o dağılımın söz konusu alanda daha etkin olarak kullanılabileceği bilindiğinden, bu kullanım alanlarının tespiti amacıyla beşinci bölümde uygulamalara yer verilmiştir. Günlük yaşamda ulaşılabilen gerçek veri setleri üzerinde dağılımların veriye uygunluğu test edilmiş ve çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Üstel dağılım ve önerilen yeni dağılımlar için gerçek veri setlerinin model uyarlaması çeşitli bilgi kriterleri yardımıyla irdelenmiştir. İlaveten bu yorumların desteklenmesi amacıyla veri setlerinin histogramlarına yer verilmiştir.

Son bölümde ise çalışmanın sonuçları değerlendirilmiş ve yapılmasının faydalı olacağı düşünülen yeni çalışma önerileri verilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER VE YÖNTEMLER

Bu bölümde öncelikle tez çalışmasında kullanılan kuramsal temel ve kavramlardan bahsedilmiş ardından kullanılan yöntemlere değinilmiştir. Öncelikle tek değişkenli sürekli dağılımlar hakkında bilgi verilerek bu dağılımlara ait bazı tanım, teorem ve özellikler anlatılmıştır. Böylelikle bir alt bölümde yer alan iki değişkenli dağılımların daha iyi anlaşılması sağlanmıştır. İki değişkenli sürekli dağılımlara değinildikten sonra kapula teorisi hakkında bazı bilgiler verilmiştir. Daha sonra çalışmada kullanılan dağılım aileleri ve parametre tahmin yöntemlerinden söz edilmiştir. Son olarak, simülasyon çalışmalarında kullanılan karşılaştırma kriterleri ve uygulama bölümünde kullanılan uyum iyiliği testi ve bilgi kriterleri açıklanmıştır.

### 2.1 Tek Değişkenli Sürekli Dağılımlara Dair Bilgiler

Marjinal (temel) veya koşullu dağılımları oluşturacak tek değişkenli dağılımlar hakkında sağlam bir arka plan bilgisi olmadan iki değişkenli dağılımlar hakkında elde edilen bilgiler tamamlanamaz. Johnson vd. (1994, 1995) 'ne ait ansiklopedik yayınların sürekli tek değişkenli dağılımlar hakkında bugüne kadarki en kapsamlı çalışma olduğu söylenebilir (Balakrishnan ve Lai 2009).

Bu bölümde sürekli tek değişkenli dağılımlara ait bazı teorem, tanım ve özellikler verilecektir. Bu bilgiler, sonraki bölümlerde anlatılacak olan iki değişkenli dağılımlar için bir referans olacaktır.

#### 2.1.1 Dağılım fonksiyonu, moment çıkaran fonksiyon ve momentler

Tek değişkenli dağılımlar için dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 2.1** Herhangi bir sürekli  $T$  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(t) = Pr(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır ve Teorem 2.1'de verilen özellikleri sağlar.



**Teorem 2.1** Herhangi bir  $T$  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu  $F$  aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

- i.  $F(-\infty) = 0$  ve  $F(+\infty) = 1$ 'dir.
- ii.  $F$  azalmayan bir fonksiyondur. Yani  $a < b$  ise  $F(a) \leq F(b)$ 'dir.
- iii.  $F$  sağdan süreklidir. Yani  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + h) = F(x)$ 'dir (Bain ve Engelhardt 2000).

Moment çıkaran fonksiyon Tanım 2.2'de verilmiştir.

**Tanım 2.2**  $T$  bir rasgele değişken olmak üzere, beklenen değer fonksiyonunun var olması halinde,

$$M_T(u) = E(e^{uT}), \quad h > 0, \quad -h < u < h \quad (2.2)$$

fonksiyonuna  $T$ 'nin moment çıkaran fonksiyonu denir (Casella ve Berger 2002).

**Tanım 2.3** Herhangi bir  $n$  tam sayısı için  $T$  rasgele değişkeninin  $n$ . merkezi olmayan momentini  $\mu'_n = E(T^n)$  olarak,  $n$ . merkezi momentini ise  $\mu_n = E(T - \mu)^n$  şeklinde tanımlanır. Burada birinci merkezi olmayan moment olan  $\mu = \mu'_1 = E(T)$  beklenen değer olarak, ikinci merkezi moment olan  $E(T - \mu)^2$  ise varyans olarak bilinmektedir.

Bir rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonunun bilinmesi, söz konusu rasgele değişkenin momentlerine ulaşılmasını sağlar. Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla  $T$  rasgele değişkeninin momentleri Teorem 2.2'de verildiği gibi hesaplanır.

**Teorem 2.2** Herhangi bir  $T$  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu  $M_T(u)$  olsun. Bu durumda  $n$  bir tam sayı olmak üzere;  $T$  rasgele değişkeninin  $n$ . merkezi olmayan momentini  $\mu'_n = E(T^n) = M_T^{(n)}(0)$  olup, burada  $M_T^{(n)}(0) = \frac{d^n}{du^n} M_T(u) \Big|_{u=0}$  şeklinde hesaplanır.

### 2.1.2 Yaşam fonksiyonu

$T$ , negatif olmayan sürekli bir rasgele değişken olmak üzere, bir sistemdeki parçaların ya da nesnelerin yaşam (sağkalım) süresini gösterebilir. Buna göre herhangi bir nesnenin  $t$  zamanından sonra yaşama olasılığı

$$S(t) = Pr(T > t) = \int_t^{\infty} f(x) dx \quad (2.3)$$

olup, yaşam fonksiyonu olarak adlandırılır. Yaşam fonksiyonu,  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$  ve  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = 1$  özelliklerine sahiptir ve artmayan bir fonksiyondur (Topçu, 2013). Burada  $S(t)$  yaşam fonksiyonu, herhangi bir birimin  $(0, t]$  aralığında hata vermeme yani yaşama olasılığı olarak da ifade edilebilir (Yılmaz ve Topçu 2010).

### 2.1.3 Bozulma oranı fonksiyonu

Bozulma oranı, herhangi bir  $t$  anına kadar yaşadığı bilinen bir nesne ya da parçanın bundan sonraki  $(t, t + \Delta t]$  gibi kısa bir zaman aralığında bozulma olasılığının oranıdır. Herhangi bir  $t$  anında bir nesnenin hala çalıştığı biliniyorsa,  $\Delta t$  aralığı sonunda bozulma olasılığı  $P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)$  olup,  $\Delta t \rightarrow 0$  için limiti alındığında  $t$  anındaki bozulma oranı  $r(t)$  ile gösterilsin. Bozulma oranı,

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t)$$

şeklinde yazıldıktan sonra;

$$r(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (2.4)$$

biçiminde elde edilir (Topçu 2013).  $r(t) = -\frac{d}{dt} \ln S(t)$  olup, bu da bozulma oranı fonksiyonunun yaşam fonksiyonuyla da elde edilebileceğini göstermektedir (Yılmaz ve Topçu 2010).

### 2.1.4 Üstel dağılım ve bazı özellikleri

$X$  sürekli bir rasgele değişken olmak üzere  $\lambda$  parametrelili üstel dağılıma sahip olsun ve  $X \sim EXP(\lambda)$  şeklinde gösterilsin. Bu durumda, dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;  $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$  şeklindedir. Çoğu zaman üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;  $f(x; \alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}$ ,  $x > 0$  olarak kabul edilir. Burada yeniden parametrelendirme sözkonusudur yani  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$  olmaktadır. Üstel dağılımın bu formunun kullanımı daha yaygındır. Bunun sebebi;  $X$  bir parçanın ya da nesnenin yaşam (sağkalım) süresini temsil ediyorsa bu parçanın hayatta kalma süresinin beklenen değeri  $E(X) = \alpha$  olmaktadır, bu da üstel dağılımın bu formunun daha kullanışlı olmasını sağlamaktadır. Dağılımın varyansı;  $Var(X) = \alpha^2$ 'dir. Dağılım fonksiyonu ise  $F(x; \alpha) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}$ ,  $x > 0$  'dır (Bain ve Engelhardt 2000).

Üstel dağılım, özel hallerde Gamma, Weibull, Rayleigh, Gumbel gibi birçok dağılıma denk gelmektedir. Üstel dağılımın çarpıklık ve basıklık katsayıları sabit olup sırasıyla 2 ve 9 değerlerini alır (Balakrishnan ve Basu 1996).

Üstel dağılımın yaşam fonksiyonu  $S(x; \alpha) = e^{-\frac{x}{\alpha}}$ ,  $x > 0$  olarak bulunur. Bozulma oranı fonksiyonu ise  $r(x; \alpha) = 1/\alpha$  olarak hesaplanır.

### 2.2 İki Değişkenli Sürekli Dağılımlar ve Kapula Teorisi

Aynı tür olayları içeren olasılıkları hesaplamak ya da olasılık modellerini tartışmak için yalnızca bir rasgele değişken kullanılır. Bu şekilde kurulan olasılık modellerinde tek değişkenli dağılımlara başvurulur. Bazı durumlarda tek bir rasgele değişkenin aldığı değeri gözlemlemek kullanışlı olmayacaktır. Örneğin bir bireyin sağlık durumu hakkında bilgi edinmek için düzenlenen bir deneyde, bireyin sadece vücut ağırlığına bakmak yeterli değildir. Bunun yerine vücut ağırlığına ek olarak aynı bireyden ölçülen sıcaklık, boy uzunluğu, kan basıncı gibi ölçüm değerlerinin de alınması önem arz etmektedir. Bu farklı karakteristikler de aynı anda birden fazla farklı rasgele değişkenlerle modellenebilir. Birden fazla rasgele değişken içeren olasılık modellerinde ise çok değişkenli dağılımlara başvurulur. Bu çalışmada yalnızca iki değişkenli sürekli

dağılımlar ele alınmıştır. Bu bağlamda iki değişkenli ortak dağılım fonksiyonu Tanım 2.4’de verilmiştir.

**Tanım 2.4** Olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x, y)$  olan  $(X, Y)$  iki boyutlu rasgele vektörünün ortak dağılım fonksiyonu;

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad x, y \in R \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır (Hogg vd. 2005).

İki değişkenli dağılım fonksiyonları Teorem 2.3’de verilen özellikleri sağlar.

**Teorem 2.3** İki değişkenli dağılım fonksiyonu olan  $H$  aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır (Nelsen 2006).

- i.  $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$  ve  $H(+\infty, +\infty) = 1$
- ii.  $H$ , 2-artan bir fonksiyondur (dikdörtgenler üzerinde pozitif değerli bir hacim oluşturmaktadır).
- iii.  $F(x) = H(x, +\infty)$  ve  $G(y) = H(+\infty, y)$ ’dir.

İki değişkenli dağılımların kullanıldığı modellerde çoğu zaman rasgele değişkenler ilişkilidir. Örneğin aynı bireye ait boy uzunluğu ve vücut ağırlığı değişkenleri arasında bir ilişki olması beklenir. Yani aynı bireye ait bir rasgele değişkenin aldığı değeri bilmek diğer rasgele değişkenin aldığı değer hakkında ipucu vermektedir. Ancak tam olarak değerini bilmeyi sağlamaz. Bundan yola çıkılarak Tanım 2.4’de verilen koşullu olasılık kavramına değinilmektedir.

**Tanım 2.4** Olasılıkta temel amaç, belirli bir deney gerçekleştirildiğinde herhangi bir  $A$  olayının gerçekleşme olasılığını belirlemektir. Ancak, bazı durumlarda  $A$ ’nın gerçekleşme olasılığı, başka bir  $B$  olayının gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi durumundan etkilenecektir. Bu şekilde meydana gelen olasılığa,  $B$  verilmişken  $A$ ’nın koşullu olasılığı denir ve  $P(A|B)$  ile gösterilir.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.6)$$

Burada  $P(B) \neq 0$ 'dır (Bain ve Engelhardt 2000).

Koşullu olasılık iki değişkenli sürekli dağılımlar için Tanım 2.5'da verilen koşullu dağılım fonksiyonu ile ifade edilir.

**Tanım 2.5**  $Y = y$  bilindiğinde  $X$ 'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x|y)$  olmak üzere,  $Y$  bilindiğinde  $X$ 'in koşullu dağılım fonksiyonu,

$$P(X \in [a, b] | Y = y) = \int_a^b f(x|y) dx \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Hogg vd. 2005).

Bu bilgiler ışığında istatistik teorisinde rasgele değişkenler arasındaki ilişki, bağımlılık kavramıyla açıklanmaktadır. Bağımlılık, iki rasgele değişkenin ortak dağılımının parametreleri için nokta tahmini, aralık tahmini gibi sonuç çıkarımları yaparken sorun teşkil etmektedir. Bu sebeple bağımlılığı açık şekilde ifade etmek önemlidir. Rasgele değişkenler arasındaki bağımlılığı açıklamak için genellikle kovaryans kullanılır. Ancak kovaryans bağımlılığın sadece derecesini gösterebilirken matematiksel olarak fonksiyonel yapısını ortaya koyamamaktadır. Ancak, matematiksel olarak bağımlılık yapısını ortaya koymak “kapula” sayesinde mümkün olmaktadır (Fisher 1997). Rasgele değişkenler arasındaki bağımlılığı karakterize etmek için kullanılan kapula (copula), bağ anlamından gelen “couple” kelimesinden türemiştir. Kapula, ortak dağılım fonksiyonunun temel dağılım fonksiyonları ve bağımlılık ölçüsü cinsinden ifade edilmesini sağlar. Bu özellik istatistikçilerin kapulaları araştırma konusu olarak ele almalarının en önemli sebebi sayılabilir. Özetle kapula, tek boyutlu temel dağılım fonksiyonlarını ve bağımlılık ölçüsünü (parametre olarak) içinde barındıran çok değişkenli ortak dağılım fonksiyonu olarak da düşünülebilir.

**Tanım 2.6**  $C$  kapula fonksiyonu  $C: I^2 \rightarrow I$  ile tanımlanır ve aşağıda belirtilen koşullara sahipse 2-boyutlu kapula (veya kapula) adını almaktadır. Bu özellikler;

- i. Her  $(u, v) \in I$  olmak üzere;  
 $C(u, 0) = C(0, v) = 0$  ve  $C(u, 1) = u$ ,  $C(1, v) = v$ .
- ii. Her  $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in I$  ve  $u_1 \leq u_2$ ,  $v_1 \leq v_2$  için,  
 $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$

biçiminde tanımlanmıştır (Nelsen 2006).

Kısaca kapula,  $I = [0,1]$  aralığında değerler alan temel dağılım fonksiyonlarını çok değişkenli ortak dağılım fonksiyonuna dönüştürür. İki boyutlu uzayda tanımlı ortak dağılım fonksiyonları ile kapulalar arasındaki ilişkiyi ortaya koyma açısından önemli olan Sklar teoremi aşağıda verilmiştir.

**Teorem 2.4 (Sklar Teoremi)** Temel dağılımları  $F$  ve  $G$  olan iki değişkenli dağılım fonksiyonu  $H$  ile gösterilsin. O zaman her  $x, y \in \bar{R}$  için bir  $C$  kapulası mevcuttur ve

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada  $F$  ve  $G$  sürekli ise  $C$  tek olacaktır. Aksi halde  $C$ ,  $F$  ve  $G$ 'nin değer kümelerinin kartezyen çarpımı üzerinde tek olarak tanımlanmaktadır (Nelsen 2006).

Literatürde kullanılan, Clayton, Frank, Gumbel Barnett, Ali-Mikhail-Haq, Farlie–Gumbel–Morgenstern, Gaussian gibi birçok kapula dağılımlar ailesi mevcuttur.

### 2.3 Dağılım Aileleri

Çalışmada kullanılan iki boyutlu kapula aileleri ve tek boyutlu dönüşüm aileleri hakkındaki özet bilgilere bu bölümde yer verilmiştir.

### 2.3.1 Ali-Mikhail-Haq (AMH) dağılım ailesi

Bu dağılım ilk kez Ali vd. (1978) tarafından kullanılmıştır ve ortak dağılım fonksiyonu

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \frac{F(x)G(y)}{1 - \theta(1 - F(x))(1 - G(y))}, \quad -1 \leq \theta \leq 1 \quad (2.8)$$

şeklindedir. Burada  $\theta$  parametresi  $X$  ile  $Y$  arasındaki bağımlılığın bir ölçüsüdür. (2.8) ile verilen ifade literatürde Ali-Mikhail-Haq Kapula (AMH) ailesi olarak geçmektedir.

### 2.3.2 Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılım ailesi

İki değişkenli Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılım ailesi, Morgenstern (1956), Gumbel (1960) ve Farlie (1960)'nin çalışmaları sonucunda elde edilen bir dağılım ailesidir.

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = F(x)G(y)[1 + \theta(1 - F(x))(1 - G(y))], \quad -1 \leq \theta \leq 1 \quad (2.9)$$

şeklinde verilen dağılım ailesi FGM ailesi olarak adlandırılmaktadır. Lai ve Xie (2000), FGM dağılım ailesini kullanarak pozitif karesel bağımlılık (PQD) adı altında rasgele değişkenler arasındaki bağımlılığı ele almış ve yeni bir dağılım ailesi elde etmişlerdir.

### 2.3.3 Marshall-Olkin dağılım ailesi

Marshall ve Olkin (1997) tarafından önerilen Marshall-Olkin dağılım ailesi;

$$H(x) = 1 - \frac{\beta \bar{F}(x)}{F(x) + \beta \bar{F}(x)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < \beta < \infty \quad (2.10)$$

şeklindedir.

### 2.3.4 Karesel dönüştürülmüş dağılım ailesi

Shaw ve Buckley (2007) tarafından önerilen dönüştürülmüş (transmuted) dağılım,

$$\begin{aligned} H(x) &= (1 + \theta)F(x) - \theta F(x)^2 \\ &= F(x)[1 + \theta \bar{F}(x)], \quad |\theta| \leq 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinindedir. Burada  $\theta = 0$  olduğunda  $H(t) = F(t)$  eşitliği sağlanmaktadır.

Bir dönüşüm prosedürü kullanılarak elde edilen polinomial dönüşüm ailesi de literatürde aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$P$  çeşitli parametreler içeren bir polinom olmak üzere,

$$G_{R12}(u) = u + u(1 - u)P(u) \quad (2.12)$$

şeklinde verilen dönüşüm formu polinomial dönüşüm ailesi olarak ifade edilir (Shaw ve Buckley 2007).

## 2.4 Parametre Tahmin Yöntemleri

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan en çok olabilirlik (ML), momentler (MOM) ve en küçük kareler (LS) parametre tahmin yöntemlerine değinilmiştir.

### 2.4.1 En çok olabilirlik (ML) tahmin yöntemi

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele örnekleminin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu  $f(\mathbf{x}; \theta)$  olmak üzere,  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  gözlendiğinde  $\theta$  parametresinin bir fonksiyonu olan olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta \quad (2.13)$$

şeklinde hesaplanır.



ML tahmin yöntemi,  $\Theta$  parametre uzayında  $L(\theta; \mathbf{x})$  fonksiyonunu en büyük yapan  $\hat{\theta}$  değerini  $\theta$ 'nın ML tahmin edicisi olarak belirler. Yani  $\theta$ 'nın ML tahmin edicisi;

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}) \quad (2.14)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca (2.13) eşitliğinin doğal logaritması alınarak elde edilen log-olabilirlik fonksiyonu, monotonluk özelliğinden dolayı olabilirlik fonksiyonu yerine kullanılabilir. Log-olabilirlik fonksiyonu;

$$\log L(\theta; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta) \quad (2.15)$$

olur. (2.15) eşitliğini kullanarak elde edilen ML tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \log L(\theta; \mathbf{x}) \quad (2.16)$$

olarak bulunur.

Bazı durumlarda  $\hat{\theta}$ 'yı gözlem değerleri cinsinden ifade etmek mümkün olmamaktadır. Yani analitik çözüm bulunamamaktadır. Analitik çözüm elde edilemediğinde ML tahmin edicisi biçimsel olarak bilinmemekte, yani örneklemin bir fonksiyonu olarak açık bir şekilde yazılamamaktadır. Böyle durumlarda oluşan optimizasyon problemi bir algoritma ile çözdürülerek ML tahmini elde edilebilmektedir.

#### 2.4.2 Momentler (MOM) tahmin yöntemi

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \in \Theta$  olmak üzere  $r$  bileşenli ( $r = 1, 2, \dots$ )  $\boldsymbol{\theta}$  parametre vektörü tahmin edilmek istensin.  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele örnekleminin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu  $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$  olmak üzere var olması halinde, dağılımın kitle momentleri  $E_{\boldsymbol{\theta}}(X^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  şeklinde, örneklem momentleri ise  $m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  olsun. Kitle ve örneklem momentlerinin ilk  $r$  tanesinin birbirine eşitlenmesiyle oluşturulan

$$\begin{aligned}
g_1(\boldsymbol{\theta}) &= E_{\boldsymbol{\theta}}(X) - m_1 \\
g_2(\boldsymbol{\theta}) &= E_{\boldsymbol{\theta}}(X^2) - m_2 \\
&\vdots \\
g_r(\boldsymbol{\theta}) &= E_{\boldsymbol{\theta}}(X^r) - m_r
\end{aligned}$$

denkleminin çözümü ile elde edilen tahmin ediciye  $\boldsymbol{\theta}$ 'nın MOM tahmin edicisi denir.

Elde edilme kolaylığı açısından çoğu zaman bir tahmin yürütebilme özelliğine sahip bu yöntemde, bazı tahmin ediciler örneklemin bir fonksiyonu olarak açık olarak ifade edilememektedir. Böyle durumlarda oluşan optimizasyon problemi bir algoritma ile çözdürülerek MOM tahmini elde edilebilmektedir. Newton-Raphson algoritması da bu bağlamda MOM tahmininin elde edilmesi için kullanılabilir.

***Newton-Raphson algoritması ile momentler tahmin yöntemi:***

Literatürde analitik çözümü olmayan denklemleri çözmek için yaygın olarak Newton-Raphson iteratif yöntemi kullanılır. Newton-Raphson yöntemi aşağıdaki gibi açıklanabilir.

$\mathbf{b}$  elemanları sabit bir vektör,  $\mathbf{B}$  ise pozitif tanımlı bir matris olmak üzere, birinci dereceden türevlenebilir herhangi bir fonksiyon,

$$u(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{b} + \mathbf{B}\boldsymbol{\theta}$$

olsun. Bu şekilde verilen  $u(\boldsymbol{\theta})$  fonksiyonu,  $\boldsymbol{\theta}^* = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  noktasında minimum değerini alır. Bu bilgiye dayanarak;

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{\theta}) \\ g_2(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ g_r(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

fonksiyonunun herhangi bir  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$  noktası etrafındaki birinci dereceden Taylor açılımı,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(0)}) + \dots$$

şeklindedir. Yukarıdaki bilgilerden hareketle  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})$  fonksiyonuna (2.17)'deki yaklaşım sağlanır.

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \cong \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(0)}) \quad (2.17)$$

Burada  $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})$  matrisi,

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_r} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (2.17)'de verilen yaklaşım yardımıyla;  $\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}^{(0)} - \boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})$  olarak elde edilir.  $\boldsymbol{\theta}^*$ 'ı kullanarak,  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$  başlangıç değeri olmak üzere Newton-Raphson adımları,

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} - \boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(i)})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde ifade edilir.

$\boldsymbol{\theta}$ 'nın,  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})$ 'yı minimum yapan noktaya yakın olduğu durumlarda; daha hızlı bir yakınsamanın sağlanması bu yöntemin avantajıdır. Dezavantajları ise parametre sayısı çok fazla olduğunda  $\boldsymbol{G}$  matrisinin tersinin bulunmasının zorlaşması,  $\boldsymbol{\theta}$ 'nın  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})$ 'yı minimum yapan noktaya yakın olmadığı durumlarda;  $\boldsymbol{G}$  matrisi negatif tanımlı olabileceğinden yakınsamanın gerçekleşmemesi şeklinde belirtilebilir (Everitt 1987).

### 2.4.3 En küçük kareler (LS) tahmin yöntemi

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele örnekleminin dağılım fonksiyonu  $F(\mathbf{x}; \theta)$  olmak üzere,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gözlem değerlerinin küçükten büyüğe  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$  şeklinde sıralandığı düşünölsün. Bu gözlem değerlerine karşın deneysel (empirical) dağılım,

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ 1, & x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

olmaktadır. Burada  $x_{(t)}$  sıralı verilerdeki  $t$ .nci değeri göstermektedir.

LS tahmin yönteminde amaç, hipotez olarak varsayılan dağılım ( $F$ ) ile deneysel dağılım ( $\hat{F}$ ) arasındaki farkların kareleri toplamı olan

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n (F(x_{(i)}) - \hat{F}(x_{(i)}))^2$$

fonksiyonunu en küçük yapacak şekilde parametreleri tahmin etmektir. Daha açık bir anlatımla, sıralanmış gözlem değerleri göz önüne alınarak  $\theta$ 'nın LS tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n (F(x_{(i)}) - \hat{F}(x_{(i)}))^2 \quad (2.18)$$

olarak bulunur. Burada,  $\hat{F}(x_{(i)}) = E(F(x_{(i)})) = \frac{i}{n+1}$  olarak alınır (Günay ve Yılmaz 2018).

### 2.5 Karşılaştırma Kriterleri

Bu bölümde simölasyon çalışmalarında tahmin edicileri karşılaştırmak için kullanılan Bias ve RMSE karşılaştırma kriterlerine değinilmiştir.

### 2.5.1 Bias (Yan)

Bias, tahmin edicinin beklenen değerinin kitle parametresinin değerine olan uzaklığını ifade eder. Bir tahmin edicinin Bias değeri sıfırsa, bu tahmin edicinin yansız olduğu söylenir. Aksi durumda tahmin edici yanlı olarak ifade edilir ve Bias değeri yan miktarı olarak değerlendirilir.

Herhangi bir  $\theta$  parametresinin bir tahmin edicisi  $T$  olmak üzere Bias değeri,

$$Bias_{\theta}(T) = E_{\theta}(T) - \theta \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilir.

### 2.5.2 Root mean square error (RMSE)

İstatistikte genellikle yansız ve minimum varyanslı tahmin ediciler tercih edilir. RMSE, hata kareler ortalamasının karekökü olarak ifade edilmektedir. Hata kareler ortalamasının küçük olması, hem tahmin edicinin yanının hem de varyansının küçük olmasını gerektirmektedir. Ancak bazen yanlılık değeri yeterli düzeyde gözardı edilerek, küçük hata kareler ortalamasına sahip varyansı küçük ama yanlı tahmin ediciler tercih edilebilir.

Herhangi bir  $\theta$  parametresinin bir tahmin edicisi  $T$  olmak üzere RMSE,

$$\begin{aligned} RMSE_{\theta}(T) &= \sqrt{E_{\theta}(T - \theta)^2} \\ &= \sqrt{Var_{\theta}(T) + Bias_{\theta}^2(T)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

olarak ifade edilir. (2.20) eşitliğindeki toplanan ifadelerin her ikisi de pozitif olup,  $RMSE_{\theta}(T)$  'nin en küçük olması durumu  $T$  tahmin edicisinin  $Bias^2$  ve varyans toplamalarının en küçük olmasını gerektirir.

## 2.6 Uyum İyiliği Testi ve Bazı Bilgi Kriterleri

**Kolmogorov-Smirnov (K-S) uyum iyiliği testi**, iyi bilinen ve yaygın olarak kullanılan güvenilir bir testtir (Gupta ve Chen 2001). Sıfır ve seçenek hipotez matematiksel olarak

$$H_0: F(x) = F_0(x)$$

$$H_s: F(x) \neq F_0(x)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, incelenen veri setinin sahip olduğu dağılım fonksiyonu  $F(x)$ 'dir.  $F_0(x)$  ise uyum iyiliği testinin yapıldığı herhangi bir dağılım fonksiyonu olabilmektedir.  $D$  ile gösterilen K-S test istatistiği

$$D = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F_0(x)|$$

şeklinindedir. Burada  $\hat{F}_n(x)$  deneysel dağılım fonksiyonudur. Bu eşitlik gözlenen ve beklenen değerlerin arasındaki mutlak farkın en büyüğü şeklinde tanımlanmaktadır. Hesaplanan  $D$  test istatistiği değeri Miller (1956) tarafından verilen  $d_{\alpha,n}$  kritik değeri ile karşılaştırılır. Eğer  $D > d_{\alpha,n}$  ise sıfır hipotezi reddedilir. Bu çalışmada  $\alpha = 0.05$  olarak alınmıştır.

K-S testinin dezanavtajlarından birincisi, test istatistiği ( $D$ ) kesikli bir dağılıma sahip olduğundan dolayı, örneklem çapı yeterli büyüklükte olmadığında Tip I hatanın istenen seviyeye ( $\alpha$ ) yakın olmaması durumudur. İkincisi ise dağılımın parametrelerinin örneklemden tahmin edilmesi gerektiğinde, K-S testinin güvenilir sonuçlar vermediğidir (Wilcox 2005). Ancak genel olarak tablollaştırılmış kritik noktalar kullanılırsa bu anlamda bu test istatistiğini kullanmanın her hangi bir sakıncası yoktur (Adhikari 2014). Bu bağlamda Lilliefors (1969), üstel dağılım için Monte Carlo simülasyonu (Tekrar sayısı:1000,  $\alpha=0.05$ ) yaparak, çalışmasında K-S test istatistiğinin Tip I hatalarını gösteren sonuçlara yer vermiştir. Çalışmasında örneklem büyüklüğü arttıkça Tip 1 hata olasılığı düşerek, üstel dağılım için  $N > 9$  olduğu durumlarda elde edilen değerlerin neredeyse sabit olduğunu belirtmiştir.

**Bilgi kriterleri**, istatistik literatüründe farklı modellerin karşılaştırılması için kullanılır. Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICc) en yaygın kullanılan bilgi kriterleridir. AIC, modellerin karmaşıklığını dikkate alan ve parametre fazlalığını cezalandıran optimal bir bilgi kriteridir. Ayrıca bu kriter basit ve çok yönlüdür (Bozdoğan 1987). Örnek çapı (gözlem sayısı) yeterince büyükse Akaike (1974) tarafından önerilen AIC kriterini kullanmak yeterlidir (Snipes ve Taylorn, 2014). Aksi durumda AIC yerine Sugiura (1978) tarafından önerilen AICc kullanılması tavsiye edilmiştir.

Bu kriterler veri setine uygun olduğu düşünülen modeller arasında seçim yapabilmek için her bir model için kullanılan parametre sayısına, gözlem sayısına ve olabirlik fonksiyonu değerine göre AIC ve AICc olarak isimlendirilen belirli ceza değerleri atarlar.  $k$  parametre sayısı,  $n$  gözlem sayısı ve  $L$  olabirlik fonksiyonu olmak üzere, AIC ve AICc değerleri sırasıyla aşağıdaki eşitlikler yardımı ile hesaplanır.

$$AIC = -2 \log L + 2k$$

$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{(n-k-1)}$$

Kullanılan modeller içinde en küçük AIC veya AICc değerlerini veren model ilgili kritere göre en iyi model olarak değerlendirilir.

### 3. ALI-MIKHAIL-HAQ DAĞILIMI İLE ELDE EDİLEN YENİ TEK BOYUTLU DAĞILIM

(2.8) eşitliğinde verilen AMH dağılım ailesinin karmaşık bir yapıda olmasından dolayı birinci dereceden Taylor serisine açılmış şekli ele alınsın. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &\cong H(x, y) \\ &= F(x)G(y)[1 + \theta(1 - F(x))(1 - G(y))] \end{aligned} \quad (3.1)$$

olmaktadır. Taylor açılımı sonucunda (2.9)'daki FGM dağılım ailesi burada kolaylıkla elde edilebilmektedir.

İkinci bölümde verilen koşullu dağılım fonksiyonu bilgisi altında iki boyutlu AMH dağılım fonksiyonu için  $Y \leq t$  verilmişken  $X \leq t$  'nin koşullu olasılığı;

$$H(t) = P(X \leq t | Y \leq t) = \frac{F(t)}{1 - \theta(1 - F(t))(1 - G(t))}$$

olarak bulunur. Bu koşullu dağılım fonksiyonunun ikinci dereceden Taylor açılımı sonucu ortaya çıkan ifade,

$$H^*(t) = F(t) \left[ 1 + \theta(1 - F(t))(1 - G(t)) + (\theta(1 - F(t))(1 - G(t)))^2 \right]$$

olur.

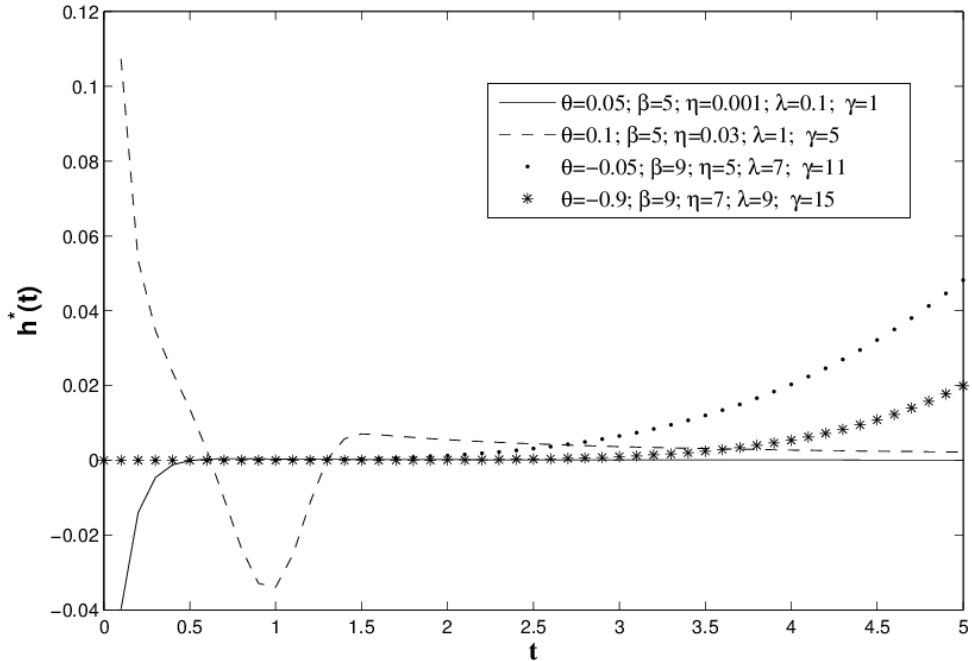
Gösterim kolaylığı açısından  $\bar{F} = 1 - F(t)$ ,  $\bar{G} = 1 - G(t)$  ve  $H^* = H^*(t)$  olarak gösterilecek olursa bu ifade,

$$H^* = F[1 + \theta\bar{F}\bar{G} + (\theta\bar{F}\bar{G})^2] \quad (3.2)$$

biçiminde yazılabilir.



$F$  ve  $G$  temel dağılım fonksiyonlarının birbirinden farklı olduğu durumda elde edilen  $H^*$  fonksiyonunun bir dağılım fonksiyonu olduğu düşünülün. (3.2) eşitliğinde  $t \in R$  olduğu kabulü altında sözde olasılık yoğunluk fonksiyonu olan  $h^*(t) = \frac{d}{dt}H^*(t)$  fonksiyonunun şekli incelensin. Herhangi iki rasgele değişken olan  $X$  ve  $Y$  sırasıyla  $X \sim Weibull(\beta, \eta)$  ve  $Y \sim Weibull(\lambda, \gamma)$  olsun. (3.2) eşitliği göz önüne alınarak farklı parametre değerleri ile çizdirilen sözde olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri Şekil 3.1’de verilmiştir.



Şekil 3.1 Temel dağılımı Weibull olan  $H^*(t)$ 'nin farklı parametre değerleri ile çizdirilmiş, sözde olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri

Şekil 3.1 incelendiğinde verilen parametre değerleri için gösterilen fonksiyonlar, olasılık yoğunluk fonksiyonu değerinin negatif olmama koşulunu sağlamamaktadır. Böylece  $F$  ve  $G$  temel dağılım fonksiyonlarının birbirinden farklı olduğu durumda elde edilen  $H^*(t)$  fonksiyonunun dağılım fonksiyonu olup olmadığı tartışma konusu olabilmektedir.

$F$  ve  $G$  temel dağılımlarının birbirine eşit olduğu fonksiyon ise

$$H_1(t) = F(t) \left[ 1 + \theta \bar{F}^2(t) + (\theta \bar{F}^2(t))^2 \right] \quad (3.3)$$

şeklindedir. Ele alınan (3.3) ifadesinin  $t \in R$  olduğu kabulü altında dağılım fonksiyonu özelliklerini sağlayıp sağlamadığı aşağıda kontrol edilmiştir. Buna göre,

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} H_1(t) = 1 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow -\infty} H_1(t) = 0 \text{ 'dır.}$$

$F(t)$  bir dağılım fonksiyonu ve  $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$  de bir yaşam fonksiyonu olduğundan (i) açık olarak sağlanır.

$$(ii) \quad H_1(t), \quad t \in R \quad \text{için azalmayan bir fonksiyondur, yani } \forall t_1 < t_2 \quad \text{için } H_1(t_1) \leq H_1(t_2) \text{ 'dir.}$$

Dağılım sürekli bir dağılım olduğundan,  $\frac{d}{dt} H_1(t) \geq 0$  olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için (3.3) ifadesinde  $F(t) = u$  dönüşümü yapılarak, bu dönüşüm altında türevin işaretine bakılacaktır.  $\phi(u) = u[1 + \theta(1 - u)^2 + \theta^2(1 - u)^4]$  olup bu ifadenin  $u$  'ya göre türevi,

$$\frac{d}{du} \phi(u) = 1 + \theta(1 - u)^2 + \theta^2(1 - u)^4 - 2\theta u(1 - u) - 4\theta^2 u(1 - u)^3 \quad (3.4)$$

şeklindedir.

$\theta \leq 0$  için türev fonksiyonunun işaretini kontrol edelim. Bu durumda (3.4) ifadesi yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= [1 + \theta(1 - u)^2]^2 - \theta(1 - u)^2 - 2\theta u(1 - u) - 4\theta^2 u(1 - u)^3 \\ &= [1 + \theta(1 - u)^2]^2 - \theta(1 - u)^2[1 + 4\theta u(1 - u)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Aşağıdaki eşitsizlikler türevin işaretini belirlemede yardımcı olacaktır.

$$\left\{ \begin{array}{l} g(u) = u(1 - u) \\ g'(u) = 1 - 2u = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2} \\ g''(u) = -2 < 0 \\ u = \frac{1}{2} \text{ için } g(u) = \frac{1}{4} \\ \text{maksimumdur.} \end{array} \right.$$

Buna göre,

$$\begin{cases} u(1-u) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 4u(1-u) \leq 1 \\ \Rightarrow 1 + 4\theta u(1-u) \geq \theta + 1 \end{cases}$$

eşitsizliği (3.5) nolu türev ifadesinde kullanılsın. Böylelikle (3.5) ifadesi için bir alt sınır aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi'(u) \geq [1 + \theta(1-u)^2]^2 + [-\theta(1-u)^2(1+\theta)] \quad (3.6)$$

(3.6) eşitsizliğinin sağındaki her iki toplam pozitif olduğundan türevin işareti de pozitiftir.

$\theta > 0$  için (3.4) ifadesi uygun olarak düzenlendiğinde,

$$\phi'(u) = 1 + \theta(1-u)^2[1 - 4\theta u(1-u)] + \theta^2(1-u)^4 - 2\theta u(1-u)$$

şeklinde yazılır.  $1 - 4\theta u(1-u) \geq 1 - \theta$  ve  $-2\theta u(1-u) \geq -\frac{\theta}{2}$  eşitsizlikleri yardımı ile türev ifadesi için bir alt sınır;

$$\begin{aligned} \phi'(u) &\geq 1 + \theta(1-u)^2(1-\theta) + \theta^2(1-u)^4 - \frac{\theta}{2} \\ &= \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) + (\theta(1-u)^2(1-\theta)) + (\theta^2(1-u)^4) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olup, eşitsizliğin sağındaki her üç toplam pozitif işaretli olduğundan  $\phi$  fonksiyonu,  $\theta > 0$  için  $u$  da azalmayandır.

Böylece  $\theta \in [-1,1]$  için  $\phi$  fonksiyonu  $u$  da azalmayandır yani  $\frac{d}{dt}H_1(t) \geq 0$  dır.

(iii)  $H_1(t)$  sağdan süreklidir, yani  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_1(t + \varepsilon) = H_1(t)$  dir.  $F(t)$  bir dağılım fonksiyonu olduğundan bu özellik de sağlanır.

Bu üç özellik sağlandığından, (3.3) ile verilen ifadenin bir dağılım fonksiyonu olduğunu söylemek mümkündür.

$H_1(t)$  dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$h_1(t) = f(t) \left[ \left( 1 + \theta \bar{F}^2(t) + \theta^2 \bar{F}^4(t) \right) - 2\theta F(t) \bar{F}(t) \left( 1 + 2\theta \bar{F}^2(t) \right) \right] \quad (3.7)$$

$t \in R, \theta \in [-1,1]$  şeklinde elde edilir. Söz konusu dağılımın yaşam fonksiyonu ise daha önce verilen (2.3) eşitliği yardımıyla;

$$\begin{aligned} S_1(t) &= 1 - \left[ F(t) \left( 1 + \theta \bar{F}^2(t) + \left( \theta \bar{F}^2(t) \right)^2 \right) \right] \\ &= \bar{F}(t) \left( 1 - \theta F(t) \bar{F}(t) - \theta^2 F(t) \bar{F}^3(t) \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak bulunur.

(2.4) ile verilen eşitlik göz önüne alınarak  $H_1(t)$  dağılımının bozulma oranı fonksiyonu ise,

$$r_1(t) = \frac{f(t) \left[ \left( 1 + \theta \bar{F}^2(t) + \theta^2 \bar{F}^4(t) \right) - 2\theta F(t) \bar{F}(t) \left( 1 + 2\theta \bar{F}^2(t) \right) \right]}{\bar{F}(t) \left( 1 - \theta F(t) \bar{F}(t) - \theta^2 F(t) \bar{F}^3(t) \right)} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir.

### 3.1 Temel Dağılımı Üstel Olan $H_1(t)$ Dağılımının Bazı Karakteristik Özellikleri

Bu bölümde elde edilen  $H_1(t)$  dağılımının temel dağılımı üstel alınarak, moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, varyansı, basıklık ve çarpıklık gibi karakteristik özellikleri elde edilecektir. Temel dağılımı üstel olan dağılım fonksiyonu,

$$H_1(t) = \left(1 - e^{-t/\alpha}\right) \left[1 + \theta \left(e^{-t/\alpha}\right)^2 + \theta^2 \left(e^{-t/\alpha}\right)^4\right] \quad (3.10)$$

şeklindedir. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$h_1(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-t/\alpha} \left[1 - 2\theta e^{-t/\alpha} + 3\theta e^{-2t/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t/\alpha}\right] \quad (3.11)$$

$t \geq 0$ ;  $\alpha > 0$ ;  $\theta \in [-1,1]$  olarak bulunur. Buradan moment çıkaran fonksiyon için;

$$M_T(u) = E(e^{uT})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut} \left( \frac{1}{\alpha} e^{-t/\alpha} - \frac{2\theta}{\alpha} e^{-2t/\alpha} + \frac{3\theta}{\alpha} e^{-3t/\alpha} - \frac{4\theta^2}{\alpha} e^{-4t/\alpha} + \frac{5\theta^2}{\alpha} e^{-5t/\alpha} \right) dt$$

olup, integralin çözülmesi ile,

$$M_T(u) = \frac{1}{1 - \alpha u} - \frac{2\theta}{2 - \alpha u} + \frac{3\theta}{3 - \alpha u} - \frac{4\theta^2}{4 - \alpha u} + \frac{5\theta^2}{5 - \alpha u}, \quad u < \frac{1}{\alpha} \quad (3.12)$$

elde edilir. Bulunan moment çıkaran fonksiyon,

$$M_T(u) = \frac{1}{1 - \alpha u} - \theta \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}u} + \theta \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3}u} - \theta^2 \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{4}u} + \theta^2 \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{5}u}, \quad u < \frac{1}{\alpha}$$

şeklinde yazılabileceğinden;

$\omega_1 = 1, \omega_2 = -\theta, \omega_3 = \theta, \omega_4 = -\theta^2, \omega_5 = \theta^2$  katsayıları göstermek üzere ve aynı zamanda,  $\frac{1}{1-au} = M_{\text{Üstel}(\alpha)}(u)$ ,  $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}u} = M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{2})}(u)$ ,  $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{3}u} = M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{3})}(u)$ ,  $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{4}u} = M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{4})}(u)$  ve  $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{5}u} = M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{5})}(u)$  olacağından, moment çıkaran fonksiyonu bu bilgiler doğrultusunda lineer kombinasyon biçiminde ifade edebilmek mümkündür. Yani moment çıkaran fonksiyon,

$$M_T(u) = \sum_{j=1}^5 \omega_j M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{j})}(u) \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

$H_1(t)$  dağılımının yaşam ve bozulma oranı fonksiyonlarının genel formu daha önce sırasıyla (3.8) ve (3.9) eşitlikleri ile bulunmuştu. Dolayısıyla  $H_1(t)$  dağılımının temel dağılımı üstel alındığında yaşam fonksiyonu,

$$\begin{aligned} S_1(t) &= 1 - \left[ \left(1 - e^{-t/\alpha}\right) \left[1 + \theta \left(e^{-t/\alpha}\right)^2 + \theta^2 \left(e^{-t/\alpha}\right)^4\right] \right] \\ &= e^{-t/\alpha} \left[1 - \left(1 - e^{-t/\alpha}\right) \left(\theta e^{-t/\alpha} + \theta^2 e^{-3t/\alpha}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

olup, bozulma oranı fonksiyonu da,

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \frac{\frac{1}{\alpha} e^{-t/\alpha} \left[1 - 2\theta e^{-t/\alpha} + 3\theta e^{-2t/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t/\alpha}\right]}{e^{-t/\alpha} \left[1 - \left(1 - e^{-t/\alpha}\right) \left(\theta e^{-t/\alpha} + \theta^2 e^{-3t/\alpha}\right)\right]} \\ &= \frac{1 - 2\theta e^{-t/\alpha} + 3\theta e^{-2t/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t/\alpha}}{\alpha \left[1 - \left(1 - e^{-t/\alpha}\right) \left(\theta e^{-t/\alpha} + \theta^2 e^{-3t/\alpha}\right)\right]} \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre bozulma oranı fonksiyonu için,

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 2\theta e^{-t/\alpha} + 3\theta e^{-2t/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t/\alpha}}{\alpha \left[1 - \left(1 - e^{-t/\alpha}\right) \left(\theta e^{-t/\alpha} + \theta^2 e^{-3t/\alpha}\right)\right]} = \frac{1 + \theta + \theta^2}{\alpha}$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - 2\theta e^{-t/\alpha} + 3\theta e^{-2t/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t/\alpha}}{\alpha[1 - (1 - e^{-t/\alpha})(\theta e^{-t/\alpha} + \theta^2 e^{-3t/\alpha})]} = \frac{1}{\alpha}$$

olarak bulunur.

### 3.1.1 $H_1(t)$ dağılımının momentleri

Birinci merkezi olmayan moment, elde edilen moment çıkararak fonksiyonun birinci türevinin alınıp,  $u$  yerine sıfır konulması ile

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{d}{du} M_T(u) \Big|_{u=0} \\ \mu_1' &= \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{2\theta}{2-\alpha u} + \frac{3\theta}{3-\alpha u} - \frac{4\theta^2}{4-\alpha u} + \frac{5\theta^2}{5-\alpha u} \right] \Big|_{u=0} \\ &= \frac{\alpha}{(1-\alpha u)^2} - \frac{2\theta\alpha}{(2-\alpha u)^2} + \frac{3\theta\alpha}{(3-\alpha u)^2} - \frac{4\theta^2\alpha}{(4-\alpha u)^2} + \frac{5\theta^2\alpha}{(5-\alpha u)^2} \Big|_{u=0} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Daha farklı bir gösterim ile ifade edilecek olursa birinci moment;

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{d}{du} \left[ \sum_{j=1}^5 \omega_j M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{j})}(u) \right] \Big|_{u=0} \\ &= \sum_{j=1}^5 \omega_j \frac{\alpha}{j} \\ &= \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani

$$E(T) = \mu'_1 = \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \quad (3.16)$$

şeklindedir.

Bulunan beklenen değer ifadesinin üstel dağılımın ortalaması olan  $\alpha$  ile ilişkisini göstermede aşağıdaki açıklamalar yol gösterici olacaktır. (3.16) ifadesine bakılırsa,  $1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} < 1$  durumunda  $E(T) < \alpha$  ve  $1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} > 1$  durumunda ise  $E(T) > \alpha$  olacaktır.

Öncelikle  $E(T) < \alpha$  olması durumu incelenir. Bu durum,  $\frac{\theta}{6} + \frac{\theta^2}{20} > 0$  olduğunda sağlanır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $\frac{\theta}{6} + \frac{\theta^2}{20} = \frac{\theta}{20} \left[ \frac{20}{6} + \theta \right]$  ifadesi elde edilir. Bu ifadenin pozitif olması görüleceği üzere,  $\theta \in (0,1]$  olduğunda sağlanmaktadır. Benzer şekilde  $E(T) > \alpha$  durumu ise,  $\frac{\theta}{20} \left[ \frac{20}{6} + \theta \right] < 0$  olduğunda sağlanmaktadır. Bu ise,  $\theta \in [-1,0)$  koşulu ile gerçekleşmektedir. Sonuç olarak,

$$\theta \in [-1,0) \Rightarrow E(T) > \alpha$$

$$\theta = 0 \Rightarrow E(T) = \alpha$$

$$\theta \in (0,1] \Rightarrow E(T) < \alpha$$

elde edilir. İkinci merkezi olmayan moment, moment çıkaran fonksiyonun ikinci türevinin alınıp  $u$  yerine sıfır konulması ile,

$$\begin{aligned} \mu'_2 &= \frac{d^2}{du^2} M_T(u) \Big|_{u=0} \\ \mu'_2 &= \frac{d^2}{du^2} \left[ \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{2\theta}{2-\alpha u} + \frac{3\theta}{3-\alpha u} - \frac{4\theta^2}{4-\alpha u} + \frac{5\theta^2}{5-\alpha u} \right] \Big|_{u=0} \\ &= \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha u)^3} - \frac{4\theta\alpha^2}{(2-\alpha u)^3} + \frac{6\theta\alpha^2}{(3-\alpha u)^3} - \frac{8\theta^2\alpha^2}{(4-\alpha u)^3} + \frac{10\theta^2\alpha^2}{(5-\alpha u)^3} \Big|_{u=0} \\ &= 2\alpha^2 \left( 1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400} \right) \end{aligned}$$



olarak elde edilir. Yani

$$E(T^2) = \mu'_2 = 2\alpha^2 \left(1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right) \quad (3.17)$$

olur. Dağılımın varyansı ise (3.16) ve (3.17) eşitlikleri yardımıyla;

$$\begin{aligned} Var(T) &= E(T - \mu)^2 = E(T^2) - [E(T)]^2 \\ &= 2\alpha^2 \left(1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right) - \left[\alpha \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right)\right]^2 \\ &= \alpha^2 \left(1 + \frac{\theta}{18} + \frac{49\theta^2}{1800} - \frac{\theta^3}{60} - \frac{\theta^4}{400}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

olarak bulunur.

Elde edilen varyansın, üstel dağılımın varyansı olan  $\alpha^2$  ile ilişkisi için (3.18) ifadesi dikkate alınsın.  $\left(1 + \frac{\theta}{18} + \frac{49\theta^2}{1800} - \frac{\theta^3}{60} - \frac{\theta^4}{400}\right) < 1$  durumunda  $V(T) < \alpha^2$  ve  $\left(1 + \frac{\theta}{18} + \frac{49\theta^2}{1800} - \frac{\theta^3}{60} - \frac{\theta^4}{400}\right) > 1$  durumunda ise  $V(T) > \alpha^2$  olur.

Öncelikle  $V(T) < \alpha^2$  olması durumu incelensin. Bu durum,

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{18} + \frac{49\theta^2}{1800} - \frac{\theta^3}{60} - \frac{\theta^4}{400} &= \frac{\theta}{3600} (200 + 98\theta - 60\theta^2 - 9\theta^3) \\ &= \frac{\theta}{3600} (33 + 98(1 + \theta) + 60(1 - \theta^2) + 9(1 - \theta^3)) < 0 \end{aligned}$$

olup bu eşitsizlik  $\theta \in [-1,0)$  için geçerlidir.

Benzer şekilde  $V(T) > \alpha^2$  koşulu  $\theta \in (0,1]$  olması durumunda sağlanır. Buradan hareketle,

$$\theta \in [-1,0) \Rightarrow V(T) < \alpha^2$$

$$\theta \in (0,1] \Rightarrow V(T) > \alpha^2$$

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow V(T) = \alpha^2$$

olduğu sonucuna varılır. Üçüncü merkezi olmayan moment,

$$\begin{aligned} \mu_3' &= \left. \frac{d^3}{du^3} M_T(u) \right|_{u=0} \\ \mu_3' &= \left. \frac{d^3}{du^3} \left[ \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{2\theta}{2-\alpha u} + \frac{3\theta}{3-\alpha u} - \frac{4\theta^2}{4-\alpha u} + \frac{5\theta^2}{5-\alpha u} \right] \right|_{u=0} \\ &= \left. \frac{6\alpha^3}{(1-\alpha u)^4} - \frac{120\theta\alpha^3}{(2-\alpha u)^4} + \frac{180\theta\alpha^3}{(3-\alpha u)^4} - \frac{24\theta^2\alpha^3}{(4-\alpha u)^4} + \frac{30\theta^2\alpha^3}{(5-\alpha u)^4} \right|_{u=0} \\ &= 6\alpha^3 - \frac{30\theta\alpha^3}{4} + \frac{20\theta\alpha^3}{9} - \frac{3\theta^2\alpha^3}{32} + \frac{6\theta^2\alpha^3}{125} \\ &= 6\alpha^3 \left[ 1 - \frac{35\theta}{216} - \frac{189\theta^2}{8000} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

olup, dördüncü merkezi olmayan moment ise;

$$\begin{aligned} \mu_4' &= \left. \frac{d^4}{du^4} M_T(u) \right|_{u=0} \\ \mu_4' &= \left. \frac{d^4}{du^4} \left[ \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{2\theta}{2-\alpha u} + \frac{3\theta}{3-\alpha u} - \frac{4\theta^2}{4-\alpha u} + \frac{5\theta^2}{5-\alpha u} \right] \right|_{u=0} \\ &= \left. \frac{24\alpha^4}{(1-\alpha u)^5} - \frac{480\theta\alpha^4}{(2-\alpha u)^5} + \frac{720\theta\alpha^4}{(3-\alpha u)^5} - \frac{96\theta^2\alpha^4}{(4-\alpha u)^5} + \frac{120\theta^2\alpha^4}{(5-\alpha u)^5} \right|_{u=0} \\ &= 24\alpha^4 \left[ 1 - \frac{97\theta}{1296} - \frac{881\theta^2}{160000} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

şeklindedir.

Elde edilen  $H_1(t)$  dağılımının merkezi momentleri hesaplanmak istensin. İkinci merkezi moment  $E(T - \mu)^2 = \mu_2$  olacağından daha önce (3.18) eşitliğinde gösterilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü merkezi momentler ise;  $(a + b)^n = \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right]$  şeklinde bilinen binom açılımı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$\mu$  kitle ortalamasını göstermek üzere;

$$\begin{aligned}
E(T - \mu)^3 &= \mu_3 = E \left[ \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} T^k (-\mu)^{3-k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} E[T^k] (-\mu)^{3-k} \\
&= \binom{3}{0} (-\mu)^3 + \binom{3}{1} E(T) (-\mu)^2 + \binom{3}{2} E(T^2) (-\mu) + \binom{3}{3} E(T^3)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
E(T - \mu)^3 &= \mu_3 = \left( -\alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \right)^3 + 3 \left( \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \right)^3 \\
&\quad + 6\alpha^2 \left( 1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400} \right) \left( -\alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \right) + 6\alpha^3 \left( 1 - \frac{35\theta}{216} - \frac{189\theta^2}{8000} \right) \\
&= 2\alpha^3 \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right)^3 - 6\alpha^3 \left( 1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400} \right) \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \\
&\quad + 6\alpha^3 \left( 1 - \frac{\theta}{8} + \frac{\theta}{27} - \frac{\theta^2}{64} + \frac{\theta^2}{125} \right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olarak elde edilir.

Dördüncü merkezi moment ise benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
E(T - \mu)^4 &= \mu_4 = E \left[ \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} T^k (-\mu)^{4-k} \right] = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} E[T^k] (-\mu)^{4-k} \\
&= \binom{4}{0} (-\mu)^4 + \binom{4}{1} E(T) (-\mu)^3 + \binom{4}{2} E(T^2) (-\mu)^2 + \binom{4}{3} E(T^3) (-\mu) \\
&\quad + \binom{4}{4} E(T^4)
\end{aligned}$$

olur. Gerekli ifadeler eşitlikte yerine konulup, düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
E(T - \mu)^4 = \mu_4 = & \left( \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \right)^4 - 4 \left( \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \right)^3 \\
& + 12 \left( \alpha^2 \left( 1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400} \right) \right) \left( -\alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \right)^2 \\
& + 4 \left( 6\alpha^3 \left( 1 - \frac{35\theta}{216} - \frac{189\theta^2}{8000} \right) \right) \left( -\alpha \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \right) \\
& + 24\alpha^4 \left( 1 - \frac{97\theta}{1296} - \frac{881\theta^2}{160000} \right)
\end{aligned}$$

olup, dördüncü merkezi moment;

$$\begin{aligned}
E(T - \mu)^4 = & -3\alpha^4 \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right)^4 + 12\alpha^4 \left( 1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400} \right) \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right)^2 \\
& - 24\alpha^4 \left( 1 - \frac{35\theta}{216} - \frac{189\theta^2}{8000} \right) \left( 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \right) \\
& + 24\alpha^4 \left( 1 - \frac{97\theta}{1296} - \frac{881\theta^2}{160000} \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

olarak elde edilir.

### 3.1.2 $H_1(t)$ dağılımının basıklık ve çarpıklığı

Daha önce (3.21)'de hesaplanan üçüncü merkezi moment, standart sapmanın üçüncü kuvvetine bölünürse çarpıklık ölçüsü elde edilmiş olur. Momentler yardımıyla çarpıklık ölçüsü,

$$\beta_1(\alpha, \theta) = \frac{E(T - \mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

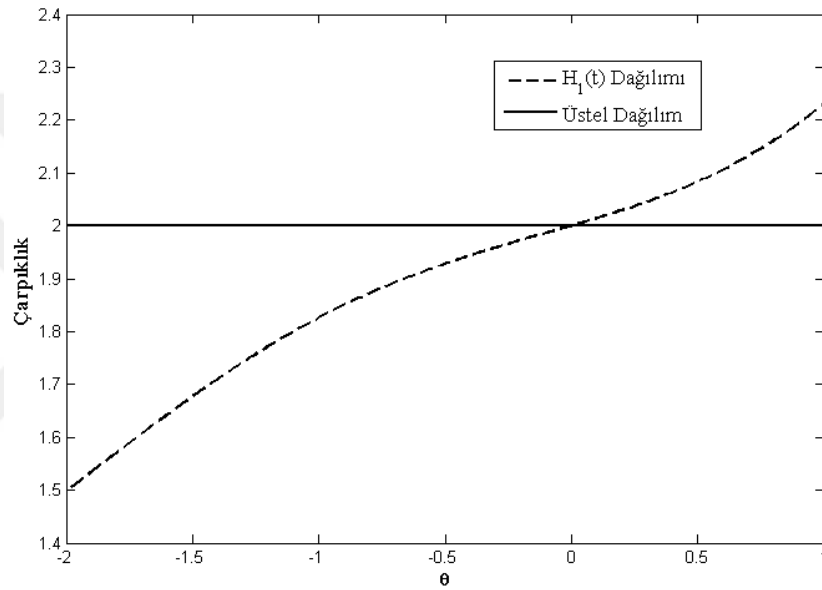
şeklinde hesaplanır.

Belirli bir  $\alpha$  değeri için, sözgelimi  $\alpha = 1$  alınarak, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının çarpıklığı;

$$\beta_1(1, \theta) = \frac{2 \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right)^3 - 6 \left(1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right) \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right) + 6 \left(1 - \frac{\theta}{8} + \frac{\theta}{27} - \frac{\theta^2}{64} + \frac{\theta^2}{125}\right)}{\left(1 + \frac{\theta}{18} + \frac{49\theta^2}{1800} - \frac{\theta^3}{60} - \frac{\theta^4}{400}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{2(-27\theta^6 - 270\theta^5 - 9\theta^4 + 2870\theta^3 + 12639\theta^2 + 33000\theta + 216000)}{(-9\theta^4 - 60\theta^3 + 98\theta^2 + 200\theta + 3600)^{3/2}} \quad (3.23)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere,  $H_1(t)$  dağılımının çarpıklık katsayısı üstel dağılımın parametresine ( $\alpha$ ) bağlı değildir.



Şekil 3.2 Üstel dağılım ve  $H_1(t)$ 'nin çarpıklık grafiği

Şekil 3.2'de  $H_1(t)$  dağılımının çarpıklığı ve tek parametrelili üstel dağılımın çarpıklığı ile beraber çizdirilmiştir. Üstel dağılımın çarpıklık değeri 2 olduğundan asimetrikliğin bu değerle karşılaştırılması sağlanmıştır.

Söz konusu dağılımın çarpıklığı için,  $\theta \geq 0$  iken üstel dağılıma göre daha sağa çarpık,  $\theta < 0$  iken üstel dağılıma göre daha sola çarpık olduğu söylenebilir.

Dağılımın basıklığının hesaplanması için, daha önce (3.22)'de hesaplanan dördüncü merkezi moment, standart sapmanın dördüncü kuvvetine bölünmesiyle elde edilir. Böylelikle dağılımın basıklığı,

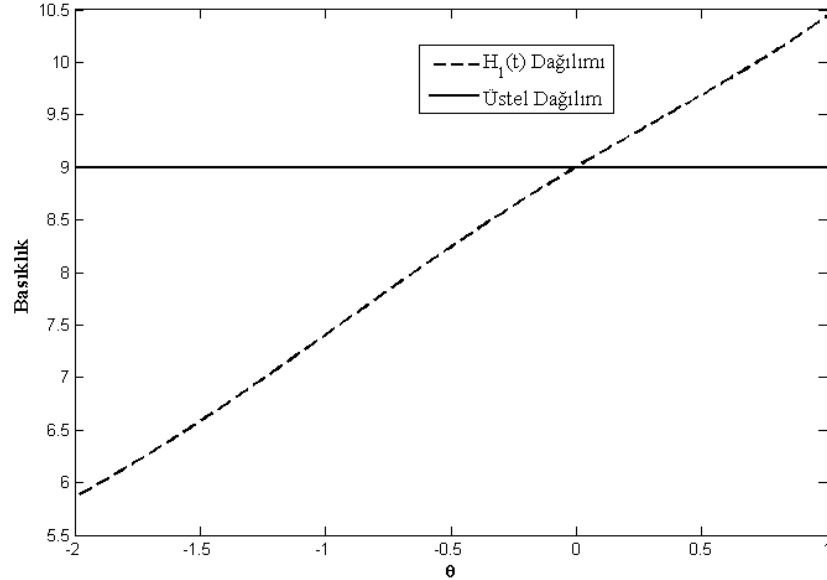
$$\beta_2(\alpha, \theta) = \frac{E(T - \mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

olmak üzere,  $\alpha = 1$  iken  $H_1(t)$ 'nin basıklığı,

$$\beta_2(1, \theta) = \frac{-3 \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right)^4 + 12 \left(1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right) \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right)^2}{\left(1 + \frac{\theta}{18} + \frac{49\theta^2}{1800} - \frac{\theta^3}{60} - \frac{\theta^4}{400}\right)^2} - \frac{24 \left(1 - \frac{35\theta}{216} - \frac{189\theta^2}{8000}\right) \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right) - 24 \left(1 - \frac{97\theta}{1296} - \frac{881\theta^2}{160000}\right)}{\left(1 + \frac{\theta}{18} + \frac{49\theta^2}{1800} - \frac{\theta^3}{60} - \frac{\theta^4}{400}\right)^2}$$

$$\beta_2(1, \theta) = \frac{3(-81\theta^8 - 1080\theta^7 - 1836\theta^6 + 15360\theta^5 - 17032\theta^4 - 531440\theta^3)}{(9\theta^4 + 60\theta^3 - 98\theta^2 - 200\theta - 3600)^2} + \frac{3(2184152\theta^2 + 10480000\theta + 38880000)}{(9\theta^4 + 60\theta^3 - 98\theta^2 - 200\theta - 3600)^2} \quad (3.24)$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü üzere,  $H_1(t)$  dağılımının basıklık katsayısı üstel dağılımın parametresine ( $\alpha$ ) bağlı değildir.



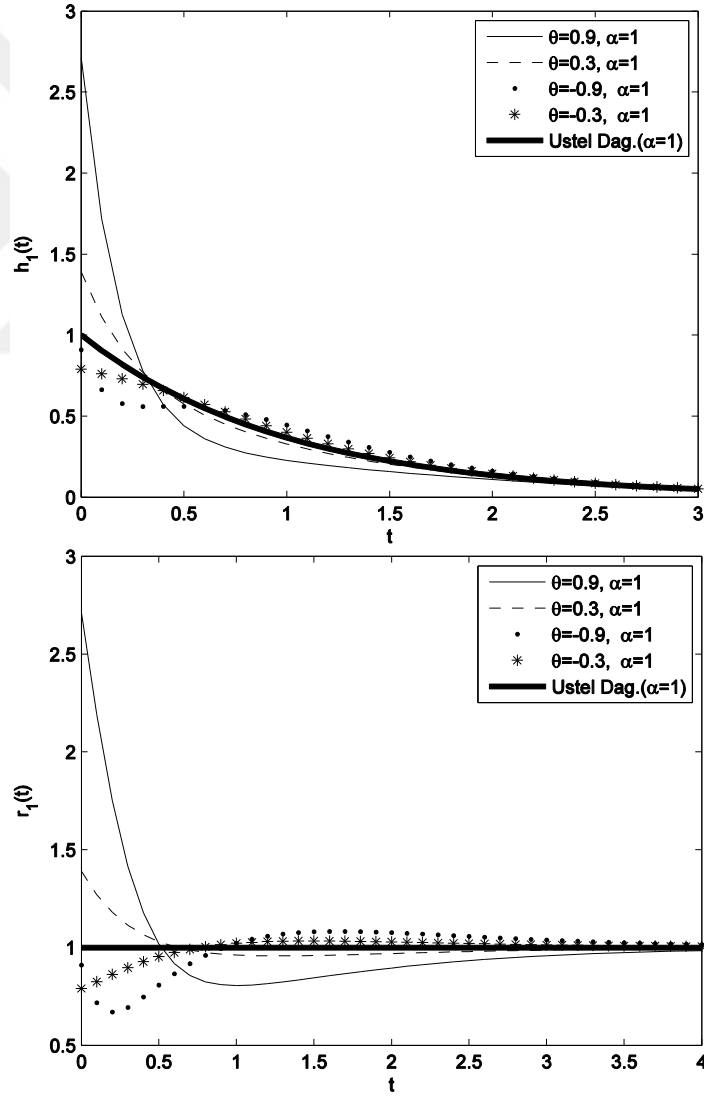
Şekil 3.3 Üstel dağılım ve  $H_1(t)$ 'nin basıklık grafiği

Şekil 3.3'de temel dağılımı üstel olan dağılımın basıklığı ve tek parametrelili üstel dağılımın basıklığı çizdirilmiştir. Burada  $\theta > 0$  olduğunda dağılımın basıklığı üstel dağılımın basıklığından daha büyüktür. Bu durumda dağılımın üstel dağılıma göre daha

dik bir dağılım olduğu söylenebilir.  $\theta < 0$  olduğunda ise dağılımın üstel dağılıma göre daha basık olduğu söylenebilir.

### 3.1.3 $H_1(t)$ dağılımının yapısı için görsel gösterimler

Bu bölümde temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının şekli hakkında fikir edinebilmek amacıyla farklı parametre değerleri için olasılık yoğunluk ve bozulma oranı fonksiyonlarının grafiklerine yer verilmiştir. Ayrıca, üstel dağılıma ait yoğunluk ve bozulma oranı fonksiyonu grafikleri de bu gösterimlerle beraber çizdirilerek, farklılığın bir arada gösterilmesi sağlanmıştır.



Şekil 3.4  $H_1(t)$ 'nin farklı  $\theta$  parametre değerleri için olasılık yoğunluk  $h_1(t)$  ve bozulma oranı  $r_1(t)$  fonksiyonları ( $\alpha = 1$ )

Şekil 3.4 incelendiğinde  $h_1(t)$  yoğunluk fonksiyonu,  $t$ 'nin küçük değerlerinde  $\theta$ 'nın negatif değerleri için üstel dağılımın yoğunluk fonksiyonuna göre daha basık iken  $t$ 'nin büyük değerlerinde ise  $\theta$ 'nın pozitif değerleri için daha basıktır. Bozulma oranı fonksiyonu  $r_1(t)$ ,  $t$  arttıkça üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonuna yaklaşmaktadır. Ayrıca  $\theta$ 'nın pozitif değerleri için çizdirilen bozulma oranı fonksiyonlarının,  $t$ 'nin küçük değerlerinde üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonundan büyük,  $t$ 'nin büyük değerlerinde ise üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonundan küçük oldukları görülmektedir.  $\theta$ 'nın negatif değerleri için tam aksi durum söz konusudur.

### 3.2 Temel Dağılımı Üstel Olan $H_1(t)$ Dağılımının Parametre Tahmini

Bu bölümde, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının parametrelerini tahmin etmek için ML, MOM ve LS tahmin yöntemleri incelenmektedir.

#### 3.2.1 ML tahmin yöntemi

Elde edilen dağılımın olabilirlik fonksiyonu (2.13) eşitliği ile hesaplanacağından, (3.11)'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun göz önüne alınması ile,

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta; \underline{t}) &= \prod_{i=1}^n h(t_i) \\ &= \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha}} \prod_{i=1}^n \left[ 1 - 2\theta e^{-t_i/\alpha} + 3\theta e^{-2t_i/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t_i/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t_i/\alpha} \right] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \log L(\alpha, \theta; \underline{t}) &= -n \log \alpha - \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log \left( 1 - 2\theta e^{-t_i/\alpha} + 3\theta e^{-2t_i/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t_i/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t_i/\alpha} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyonunun  $\alpha$  parametresine göre kısmi türevi,



$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \alpha} &= -\frac{n}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{-2\theta \frac{t_i}{\alpha^2} e^{-t_i/\alpha} + 6\theta \frac{t_i}{\alpha^2} e^{-2t_i/\alpha} - 12\theta^2 \frac{t_i}{\alpha^2} e^{-3t_i/\alpha} + 20\theta^2 \frac{t_i}{\alpha^2} e^{-4t_i/\alpha}}{1 - 2\theta e^{-t_i/\alpha} + 3\theta e^{-2t_i/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t_i/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t_i/\alpha}} \right] \end{aligned}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \alpha} &= -\frac{n}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha^2} \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{-t_i/\alpha} (-2\theta + 6\theta e^{-t_i/\alpha} - 12\theta^2 e^{-2t_i/\alpha} + 20\theta^2 e^{-3t_i/\alpha})}{1 - 2\theta e^{-t_i/\alpha} + 3\theta e^{-2t_i/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t_i/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t_i/\alpha}} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Benzer şekilde,  $\theta$  parametresine göre kısmi türev,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{-2e^{-t_i/\alpha} + 3e^{-2t_i/\alpha} - 8\theta e^{-3t_i/\alpha} + 10\theta e^{-4t_i/\alpha}}{1 - 2\theta e^{-t_i/\alpha} + 3\theta e^{-2t_i/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t_i/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t_i/\alpha}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{e^{-t_i/\alpha} (-2 + 3e^{-t_i/\alpha} - 8\theta e^{-2t_i/\alpha} + 10\theta e^{-3t_i/\alpha})}{1 - 2\theta e^{-t_i/\alpha} + 3\theta e^{-2t_i/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t_i/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t_i/\alpha}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Kısmi türev fonksiyonlarının sıfıra eşitlenmesi ile,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \alpha} &= -n\alpha + \sum_{i=1}^n t_i \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{-t_i/\alpha} (-2\theta + 6\theta e^{-t_i/\alpha} - 12\theta^2 e^{-2t_i/\alpha} + 20\theta^2 e^{-3t_i/\alpha})}{1 - 2\theta e^{-t_i/\alpha} + 3\theta e^{-2t_i/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t_i/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t_i/\alpha}} = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-t_i/\alpha} (-2 + 3e^{-t_i/\alpha} - 8\theta e^{-2t_i/\alpha} + 10\theta e^{-3t_i/\alpha})}{1 - 2\theta e^{-t_i/\alpha} + 3\theta e^{-2t_i/\alpha} - 4\theta^2 e^{-3t_i/\alpha} + 5\theta^2 e^{-4t_i/\alpha}} = 0 \quad (3.26)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler ile parametrelerin ML tahmin edicilerinin analitik çözümü elde edilememektedir. Bu durumda log-olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyon problemi bir algoritma ile çözdürülerek ML tahmini elde edilebilir.

Sayısal çözümün elde edilmesinde Matlab 2013 programı kullanılmış ve ML tahminlerini başlangıç değeri belirleme stratejisine dayalı olarak yakınsama yöntemi ile bulduran “mle” komutundan faydalanılmıştır. Bu komut için optimizasyon seçeneklerini içeren bir yapıdan faydalanılmıştır. Söz konusu bu yapı içeriğinde amaç fonksiyonunu oluşturan kısıtlar ve karar değişkenlerini barındırmaktadır. Burada türev temelli tekniklerden biri olan, kısmi türevleri içeren “GradObj” işaretlenmiştir.

### 3.2.2 MOM tahmin yöntemi

İkinci bölümde verilen MOM tahmin yöntemi bilgisi göz önüne alınsın.  $E(T)$  ve  $E(T^2)$  sırasıyla (3.16) ve (3.17) eşitlikleri ile verilen  $H_1(t)$ 'nin kitle momentleri ve  $m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ ,  $m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2$  örneklem momentleri olmak üzere,  $\alpha \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right) = m_1$  ve  $2\alpha^2 \left(1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right) - m_1^2 = m_2$  olup,  $\frac{m_1^2}{\left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right)^2} \left(1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right) = m_2 + m_1^2$  elde edilir.

Buradan  $\theta$  için dördüncü dereceden bir polinom elde edilmektedir. Bu bakımdan parametrelerin momentler tahmini için Newton-Raphson algoritmasından faydalanılmıştır.

$H_1(t)$  dağılımının momentler tahmin edicilerine,  $\left. \begin{array}{l} g_1(\alpha, \theta) = 0 \\ g_2(\alpha, \theta) = 0 \end{array} \right\}$  denklem sisteminin

Newton-Raphson iteratif yöntemi ile çözümüne ulaşılabilir.  $g_1(\alpha, \theta)$  ve  $g_2(\alpha, \theta)$

fonksiyonlarının kısmi türevleri alınarak  $\mathbf{G}[(\alpha, \theta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}$  matrisi elde edilip,

buradan  $i$ . adım için iterasyon eşitliği;

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \theta^{(i)} \end{bmatrix} - [\mathbf{G}[(\alpha^{(i)}, \theta^{(i)})]]^{-1} \begin{bmatrix} g_1(\alpha^{(i)}, \theta^{(i)}) \\ g_2(\alpha^{(i)}, \theta^{(i)}) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Burada  $\varepsilon > 0$  için;  $\left\| \begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \theta^{(i)} \end{bmatrix} \right\| \leq \varepsilon$  ise iterasyon durdurulur ve çözüm  $\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix}$  vektörüdür. Aksi halde iterasyon  $(i + 1)$ . adımdan devam eder. Burada,  $\left\| \begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \theta^{(i)} \end{bmatrix} \right\| \cong \sqrt{(\alpha^{(i+1)} - \alpha^{(i)})^2 + (\theta^{(i+1)} - \theta^{(i)})^2}$  şeklinde hesaplanır.

(3.16) ve (3.17) eşitlikleri yardımıyla,  $g_1(\alpha, \theta) = \alpha \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right) - m_1$  ve  $g_2(\alpha, \theta) = 2\alpha^2 \left(1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right) - m_2$  olarak bulunur.  $\mathbf{G}$  matrisi,

$$\mathbf{G}[\alpha, \theta] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} & -\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha\theta}{10} \\ 4\alpha \left[1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right] & \alpha^2 \left[-\frac{5}{18} - \frac{9\theta}{100}\right] \end{bmatrix}$$

olup,  $\mathbf{G}$  matrisinin tersi bulunmak istensin. Buna göre,

$$A = \frac{1}{\alpha^2 \left(1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20}\right) \left(-\frac{5}{18} - \frac{9\theta}{100}\right) + 4\alpha \left(1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right) \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha\theta}{10}\right)}$$

olmak üzere;  $\mathbf{G}$  matrisinin tersi,

$$[\mathbf{G}[\alpha, \theta]]^{-1} = A \begin{bmatrix} \alpha^2 \left[-\frac{5}{18} - \frac{9\theta}{100}\right] & \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha\theta}{10} \\ -4\alpha \left[1 - \frac{5\theta}{36} - \frac{9\theta^2}{400}\right] & 1 - \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{20} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Verilen bu bilgiler doğrultusunda iterasyon eşitliği,

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \theta^{(i)} \end{bmatrix} - [\mathbf{G}[\alpha^{(i)}, \theta^{(i)}]]^{-1} \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \left(1 - \frac{\theta^{(i)}}{6} - \frac{\theta^{(i)2}}{20}\right) - m_1 \\ 2\alpha^{(i)2} \left(1 - \frac{5\theta^{(i)}}{36} - \frac{9\theta^{(i)2}}{400}\right) - m_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

şeklinde elde edilir. Böylelikle bu adımların hesaplanması ile MOM tahmin değerleri Matlab 2013 programında sayısal olarak hesap edilmiştir.

### 3.2.3 LS tahmin yöntemi

$H_1(t)$  dağılım fonksiyonu için (2.18)'de verilen minimum yapılacak karesel ifade gözönüne alındığında,

$$Q(\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^n \left( \left( 1 - e^{-t(i)/\alpha} \right) \left[ 1 + \theta \left( e^{-t(i)/\alpha} \right)^2 + \theta^2 \left( e^{-t(i)/\alpha} \right)^4 \right] - u(i) \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[ \left( 1 - e^{-t(i)/\alpha} + \theta e^{-2t(i)/\alpha} - \theta e^{-3t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-4t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-5t(i)/\alpha} \right) - u(i) \right]^2$$

şeklinde elde edilir. Toplamın içindeki ifade aşağıdaki gibi düzelenerek,

$$1 - u(i) = e^{-t(i)/\alpha} - \theta e^{-2t(i)/\alpha} + \theta e^{-3t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-4t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-5t(i)/\alpha}$$

$$1 - u(i) = e^{-t(i)/\alpha} \left( 1 - \theta e^{-t(i)/\alpha} + \theta e^{-2t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-3t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-4t(i)/\alpha} \right)$$

eşitliğin her iki tarafının doğal logaritması alınırsa,

$$\log(1 - u(i)) = -\frac{t}{\alpha} + \log \left( 1 - \theta e^{-t(i)/\alpha} + \theta e^{-2t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-3t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-4t(i)/\alpha} \right)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla ifade,

$$Q^*(\alpha, \theta) = \left[ \sum_{i=1}^n -\frac{t}{\alpha} + \log \left( 1 - \theta e^{-t(i)/\alpha} + \theta e^{-2t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-3t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-4t(i)/\alpha} \right) - \log(1 - u(i)) \right]^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin  $\alpha$  ve  $\theta$  parametrelerine göre kısmi türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesi sonucu,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^*}{\partial \alpha} = & 2 \sum_{i=1}^n \left( -\frac{t_{(i)}}{\alpha} \right. \\ & + \ln \left( 1 - \theta e^{-t_{(i)}/\alpha} + \theta e^{-2t_{(i)}/\alpha} - \theta^2 e^{-3t_{(i)}/\alpha} + \theta^2 e^{-4t_{(i)}/\alpha} \right) - \ln(1 - u_{(i)}) \left. \right) \left( 1 \right. \\ & \left. + \frac{-\theta e^{-t_{(i)}/\alpha} + 2\theta e^{-2t_{(i)}/\alpha} - 3\theta^2 e^{-3t_{(i)}/\alpha} + 4\theta^2 e^{-4t_{(i)}/\alpha}}{1 - \theta e^{-t_{(i)}/\alpha} + \theta e^{-2t_{(i)}/\alpha} - \theta^2 e^{-3t_{(i)}/\alpha} + \theta^2 e^{-4t_{(i)}/\alpha}} \right) \frac{t_{(i)}}{\alpha^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^*}{\partial \theta} = & 2 \sum_{i=1}^n \left( -\frac{t_{(i)}}{\alpha} \right. \\ & + \ln \left( 1 - \theta e^{-t_{(i)}/\alpha} + \theta e^{-2t_{(i)}/\alpha} - \theta^2 e^{-3t_{(i)}/\alpha} + \theta^2 e^{-4t_{(i)}/\alpha} \right) \\ & \left. - \ln(1 - u_{(i)}) \right) \left( \frac{-e^{-t_{(i)}/\alpha} + e^{-2t_{(i)}/\alpha} - 2\theta e^{-3t_{(i)}/\alpha} + 2\theta e^{-4t_{(i)}/\alpha}}{1 - \theta e^{-t_{(i)}/\alpha} + \theta e^{-2t_{(i)}/\alpha} - \theta^2 e^{-3t_{(i)}/\alpha} + \theta^2 e^{-4t_{(i)}/\alpha}} \right) = 0 \end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler ile parametrelerin LS tahmin edicilerinin analitik çözümü elde edilememektedir. Bu durumda LS tahminlerinin elde edilmesinde nümerik yollara başvurulmalıdır. Sayısal olarak çözümün elde edilmesinde Matlab 2013 programı kullanılmış ve LS tahminlerini bir başlangıç değeri belirleme stratejisine dayalı olarak, eğri uydurma yöntemi ile bulduran “lsqcurvefit” komutundan faydalanılmıştır.

### 3.3 $H_1(t)$ Dağılımının Parametrelerinin Tahmini İçin Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, daha önce bahsi geçen ML, MOM ve LS tahmin yöntemlerinden faydalanılarak  $H_1(t)$  dağılımının parametrelerinin tahmini için simülasyon çalışması yapılmıştır. Islam ve Tiku (2007), Çelik vd. (2015), Arslan ve Şenoğlu (2017) çalışmaları gözönüne alındığında hem bilgi kaybını en aza indirmek, hem de zaman kaybını önlemek için tekrar sayısı örnek çapıyla ters orantılı olarak  $\lceil \lceil 100,000/n \rceil \rceil$  olarak ele alınmıştır. Burada,  $\lceil \cdot \rceil$  tam değer fonksiyonunu ifade etmektedir.

$\alpha = \{0.5, 1, 4, 8, 16\}$  ve  $\theta = \{1, 0.7, 0.3, -0.3, -0.7, -1\}$  parametre değerleri için örnek çapları küçük örneklemde  $n = 30$ , orta örneklemde  $n = 50$  ve büyük örneklemde  $n = 100$  olarak alınmıştır. Sonuçlar; parametre tahminlerinin ortalamalarını, bias (yan) ve RMSE değerlerini içermekte olup izelge 3.1-3.6'da verilmiştir. Simülasyon alışmasında Matlab 2013 programı kullanılmıştır.



Çizelge 3.1  $H_1(t)$  dağılımı için  $\theta = 1$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
<b>30</b>	0.8477	0.6876	0.8599	0.4781	0.4708	0.4709	-0.1523	-0.3124	-0.1401	-0.0219	-0.0292	-0.0291	0.2778	0.4999	0.2726	0.1120	0.1175	0.1400
<b>50</b>	0.8907	0.7851	0.8965	0.4836	0.4795	0.4731	-0.1093	-0.2149	-0.1035	-0.0164	-0.0205	-0.0269	0.1969	0.3523	0.1953	0.0841	0.0888	0.1099
<b>100</b>	0.9274	0.8599	0.9258	0.4904	0.4866	0.4772	-0.0726	-0.1401	-0.0742	-0.0096	-0.0134	-0.0228	0.1325	0.2281	0.1368	0.0615	0.0656	0.0797
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
<b>30</b>	0.8476	0.6870	0.8599	0.9557	0.9435	0.9418	-0.1524	-0.3130	-0.1401	-0.0443	-0.0565	-0.0582	0.2779	0.5010	0.2726	0.2234	0.2335	0.2800
<b>50</b>	0.8906	0.7845	0.8965	0.9666	0.9605	0.9462	-0.1094	-0.2155	-0.1035	-0.0334	-0.0395	-0.0538	0.1971	0.3529	0.1953	0.1677	0.1761	0.2197
<b>100</b>	0.9273	0.8592	0.9258	0.9803	0.9741	0.9543	-0.0727	-0.1408	-0.0742	-0.0197	-0.0259	-0.0457	0.1327	0.2285	0.1368	0.1227	0.1304	0.1594
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
<b>30</b>	0.8468	0.6906	0.8575	3.8118	3.7632	3.7522	-0.1532	-0.3094	-0.1425	-0.1882	-0.2368	-0.2478	0.2879	0.5067	0.2827	0.8593	0.8904	1.1296
<b>50</b>	0.8837	0.7715	0.8881	3.8460	3.8040	3.7734	-0.1163	-0.2285	-0.1119	-0.1540	-0.1960	-0.2266	0.2058	0.3651	0.2090	0.6879	0.7213	0.8798
<b>100</b>	0.9209	0.8511	0.9215	3.9057	3.8825	3.8217	-0.0791	-0.1489	-0.0785	-0.0943	-0.1175	-0.1783	0.1421	0.2411	0.1443	0.4633	0.4930	0.6077
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
<b>30</b>	0.8465	0.6890	0.8575	7.6128	7.5069	7.5040	-0.1535	-0.3110	-0.1425	-0.3872	-0.4931	-0.4960	0.2882	0.5078	0.2827	1.7110	1.7626	2.2586
<b>50</b>	0.8834	0.7696	0.8881	7.6820	7.5886	7.5466	-0.1166	-0.2304	-0.1119	-0.3180	-0.4114	-0.4534	0.2062	0.3663	0.2091	1.3704	1.4299	1.7591
<b>100</b>	0.9206	0.8483	0.9215	7.8004	7.7402	7.6433	-0.0794	-0.1517	-0.0785	-0.1996	-0.2598	-0.3567	0.1425	0.2431	0.1443	0.9237	0.9769	1.2153
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
<b>30</b>	0.8457	0.6780	0.8598	15.163	14.881	15.065	-0.1543	-0.3220	-0.1402	-0.8368	-1.1185	-0.9344	0.2797	0.5068	0.2726	3.4681	3.5153	4.4742
<b>50</b>	0.8886	0.7721	0.8965	15.340	15.132	15.137	-0.1114	-0.2279	-0.1035	-0.6596	-0.8680	-0.8631	0.1991	0.3613	0.1954	2.6147	2.6385	3.5119
<b>100</b>	0.9255	0.8421	0.9257	15.564	15.325	15.267	-0.0745	-0.1579	-0.0743	-0.4359	-0.6754	-0.7329	0.1346	0.2417	0.1369	1.9223	1.9816	2.5483

Çizelge 3.2  $H_1(t)$  dağılımı için  $\theta = 0.7$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
<b>30</b>	0.5791	0.3580	0.6357	0.4878	0.4730	0.5142	-0.1209	-0.3420	-0.0643	-0.0122	-0.0270	0.0142	0.4346	0.6676	0.3932	0.1093	0.1105	0.1342
<b>50</b>	0.6465	0.4808	0.6793	0.4970	0.4845	0.5153	-0.0535	-0.2192	-0.0207	-0.0030	-0.0155	0.0153	0.2987	0.4941	0.2863	0.0870	0.0878	0.1071
<b>100</b>	0.6720	0.5909	0.6877	0.4970	0.4908	0.5079	-0.0280	-0.1091	-0.0123	-0.0030	-0.0092	0.0079	0.1909	0.3103	0.1905	0.0623	0.0633	0.0768
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
<b>30</b>	0.5789	0.3565	0.6357	0.9752	0.9457	1.0285	-0.1211	-0.3435	-0.0643	-0.0248	-0.0543	0.0285	0.4346	0.6694	0.3932	0.2181	0.2203	0.2684
<b>50</b>	0.6462	0.4794	0.6793	0.9934	0.9685	1.0306	-0.0538	-0.2206	-0.0207	-0.0066	-0.0315	0.0306	0.2988	0.4951	0.2863	0.1735	0.1747	0.2142
<b>100</b>	0.6717	0.5884	0.6877	0.9935	0.9804	1.0158	-0.0283	-0.1116	-0.0123	-0.0065	-0.0196	0.0158	0.1910	0.3102	0.1905	0.1242	0.1256	0.1535
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
<b>30</b>	0.5891	0.3608	0.6484	3.9307	3.8083	4.1631	-0.1109	-0.3392	-0.0516	-0.0693	-0.1917	0.1631	0.4091	0.6550	0.3709	0.8750	0.8692	1.0850
<b>50</b>	0.6278	0.4701	0.6602	3.9378	3.8356	4.0824	-0.0722	-0.2299	-0.0398	-0.0622	-0.1644	0.0824	0.3091	0.5004	0.2948	0.6940	0.6906	0.8549
<b>100</b>	0.6804	0.5784	0.7009	3.9847	3.9111	4.0958	-0.0196	-0.1216	0.0009	-0.0153	-0.0889	0.0958	0.1927	0.3059	0.1911	0.5182	0.5260	0.6360
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
<b>30</b>	0.5929	0.3808	0.6452	7.8210	7.5744	8.2244	-0.1071	-0.3192	-0.0548	-0.1790	-0.4256	0.2244	0.4001	0.6392	0.3720	1.6818	1.7178	2.1686
<b>50</b>	0.6305	0.4642	0.6663	7.8525	7.6422	8.1697	-0.0695	-0.2358	-0.0337	-0.1475	-0.3578	0.1697	0.2929	0.4975	0.2780	1.3628	1.3696	1.6671
<b>100</b>	0.6645	0.5598	0.6852	7.9262	7.7755	8.1394	-0.0355	-0.1402	-0.0148	-0.0738	-0.2245	0.1394	0.2052	0.3328	0.2040	0.9321	0.9383	1.1810
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
<b>30</b>	0.5912	0.3733	0.6451	15.594	15.067	16.447	-0.1088	-0.3267	-0.0549	-0.4056	-0.9332	0.4468	0.4015	0.6419	0.3720	3.3982	3.2966	4.3328
<b>50</b>	0.6290	0.4542	0.6662	15.663	15.202	16.338	-0.0710	-0.2458	-0.0338	-0.3375	-0.7980	0.3378	0.2936	0.5002	0.2780	2.6971	2.6895	3.3312
<b>100</b>	0.6628	0.5458	0.6851	15.804	15.453	16.277	-0.0372	-0.1542	-0.0149	-0.1951	-0.5473	0.2773	0.2054	0.3361	0.2040	1.8428	1.8442	2.3602



Çizelge 3.3  $H_1(t)$  dağılımı için  $\theta = 0.3$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
30	0.1482	-0.0753	0.2541	0.4982	0.4825	0.5324	-0.1518	-0.3753	-0.0459	-0.0018	-0.0175	0.0324	0.5555	0.7546	0.5159	0.1073	0.1060	0.1308
50	0.1779	0.0099	0.2433	0.4943	0.4840	0.5147	-0.1221	-0.2901	-0.0567	-0.0057	-0.0160	0.0147	0.4523	0.6535	0.4291	0.0834	0.0853	0.0995
100	0.2588	0.1397	0.2936	0.4997	0.4924	0.5114	-0.0412	-0.1603	-0.0064	-0.0003	-0.0076	0.0114	0.2815	0.4509	0.2762	0.0621	0.0661	0.0715
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
30	0.1479	-0.0780	0.2541	0.9960	0.9631	1.0648	-0.1521	-0.3780	-0.0459	-0.0040	-0.0369	0.0648	0.5555	0.7566	0.5159	0.2138	0.2118	0.2616
50	0.1776	0.0062	0.2433	0.9882	0.9665	1.0293	-0.1224	-0.2938	-0.0567	-0.0118	-0.0335	0.0293	0.4523	0.6554	0.4291	0.1664	0.1699	0.1989
100	0.2584	0.1354	0.2936	0.9991	0.9834	1.0228	-0.0416	-0.1646	-0.0064	-0.0009	-0.0166	0.0228	0.2816	0.4513	0.2762	0.1238	0.1311	0.1431
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
30	0.1477	-0.0548	0.2462	3.9510	3.8307	4.2020	-0.1523	-0.3548	-0.0538	-0.0490	-0.1693	0.2020	0.5462	0.7430	0.5124	0.8357	0.8191	1.0377
50	0.1769	0.0021	0.2454	3.9483	3.8503	4.1219	-0.1231	-0.2979	-0.0546	-0.0517	-0.1497	0.1219	0.4560	0.6377	0.4312	0.6606	0.6703	0.7952
100	0.2342	0.1121	0.2717	3.9771	3.9110	4.0733	-0.0658	-0.1879	-0.0283	-0.0229	-0.0890	0.0733	0.3219	0.4760	0.3028	0.4452	0.4648	0.5340
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
30	0.1469	-0.0801	0.2457	7.8899	7.6281	8.4458	-0.1531	-0.3801	-0.0543	-0.1101	-0.3719	0.4458	0.5494	0.7517	0.5244	1.6555	1.6487	2.0932
50	0.1916	0.0195	0.2641	7.9027	7.7153	8.2558	-0.1084	-0.2805	-0.0359	-0.0973	-0.2847	0.2558	0.4415	0.6261	0.4085	1.2418	1.2486	1.5342
100	0.2399	0.1125	0.2758	7.9356	7.7852	8.1187	-0.0601	-0.1875	-0.0242	-0.0644	-0.2148	0.1187	0.3053	0.4543	0.2902	0.9335	0.9429	1.1048
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
30	0.1444	-0.0908	0.2455	15.741	15.183	16.889	-0.1556	-0.3908	-0.0545	-0.2591	-0.8171	0.8887	0.5505	0.7524	0.5243	3.2769	3.2320	4.1806
50	0.1895	0.0053	0.2640	15.769	15.352	16.509	-0.1105	-0.2947	-0.0360	-0.2308	-0.6480	0.5098	0.4418	0.6274	0.4085	2.4494	2.4609	3.0655
100	0.2385	0.0936	0.2757	15.836	15.484	16.236	-0.0615	-0.2064	-0.0243	-0.1636	-0.5164	0.2359	0.3033	0.4588	0.2902	1.8507	1.8595	2.2079

Çizelge 3.4  $H_1(t)$  dağılımı için  $\theta = -0.3$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3524	-0.5235	-0.2589	0.5038	0.4897	0.5359	-0.0524	-0.2235	0.0411	0.0038	-0.0103	0.0359	0.5077	0.6254	0.5607	0.0964	0.0989	0.1181
<b>50</b>	-0.3690	-0.5009	-0.3106	0.5001	0.4906	0.5189	-0.0690	-0.2009	-0.0106	0.0001	-0.0094	0.0189	0.4514	0.5740	0.4880	0.0723	0.0759	0.0856
<b>100</b>	-0.3605	-0.4621	-0.3169	0.5014	0.4961	0.5117	-0.0605	-0.1621	-0.0169	0.0014	-0.0039	0.0117	0.3854	0.5146	0.4027	0.0520	0.0566	0.0619
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3531	-0.5273	-0.2589	1.0070	0.9746	1.0719	-0.0531	-0.2273	0.0411	0.0070	-0.0254	0.0719	0.5076	0.6243	0.5607	0.1920	0.1982	0.2362
<b>50</b>	-0.3698	-0.5060	-0.3106	0.9997	0.9776	1.0378	-0.0698	-0.2060	-0.0106	-0.0003	-0.0224	0.0378	0.4516	0.5727	0.4880	0.1442	0.1521	0.1713
<b>100</b>	-0.3611	-0.4709	-0.3169	1.0023	0.9894	1.0234	-0.0611	-0.1709	-0.0169	0.0023	-0.0106	0.0234	0.3853	0.5138	0.4027	0.1036	0.1128	0.1238
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3472	-0.5165	-0.2551	4.0066	3.8758	4.2630	-0.0472	-0.2165	0.0449	0.0066	-0.1242	0.2630	0.5028	0.6191	0.5591	0.7537	0.7807	0.9385
<b>50</b>	-0.3742	-0.5203	-0.3089	3.9993	3.9004	4.1645	-0.0742	-0.2203	-0.0089	-0.0007	-0.0996	0.1645	0.4605	0.5776	0.4967	0.5791	0.6026	0.6967
<b>100</b>	-0.3759	-0.5141	-0.3390	3.9772	3.9015	4.0662	-0.0759	-0.2141	-0.0390	-0.0228	-0.0985	0.0662	0.3820	0.4987	0.4102	0.4179	0.4534	0.4743
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3669	-0.5417	-0.2694	7.9987	7.7061	8.5266	-0.0669	-0.2417	0.0306	-0.0013	-0.2939	0.5266	0.5076	0.6113	0.5602	1.4548	1.4843	1.8218
<b>50</b>	-0.3547	-0.5177	-0.2881	8.0228	7.8039	8.3533	-0.0547	-0.2177	0.0119	0.0228	-0.1961	0.3533	0.4496	0.5717	0.4858	1.1316	1.1882	1.3969
<b>100</b>	-0.3795	-0.5129	-0.3372	7.9651	7.8189	8.1431	-0.0795	-0.2129	-0.0372	-0.0349	-0.1811	0.1431	0.3835	0.4941	0.4001	0.8326	0.8717	0.9783
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3730	-0.5742	-0.2696	15.927	15.255	17.050	-0.0730	-0.2742	0.0304	-0.0731	-0.7448	1.0502	0.5065	0.6003	0.5600	2.8184	2.8315	3.6356
<b>50</b>	-0.3606	-0.5598	-0.2883	15.981	15.434	16.705	-0.0606	-0.2598	0.0117	-0.0193	-0.5660	0.7049	0.4487	0.5609	0.4857	2.2139	2.2477	2.7900
<b>100</b>	-0.3887	-0.5744	-0.3374	15.861	15.443	16.285	-0.0887	-0.2744	-0.0374	-0.1386	-0.5571	0.2846	0.3859	0.5002	0.4001	1.6335	1.6693	1.9545

Çizelge 3.5  $H_1(t)$  dağılımı için  $\theta = -0.7$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
30	-0.6204	-0.6412	-0.4682	0.5075	0.4977	0.5429	0.0796	0.0588	0.2318	0.0075	-0.0023	0.0429	0.4340	0.5324	0.5893	0.0891	0.0948	0.1128
50	-0.6429	-0.6604	-0.5327	0.5068	0.4993	0.5317	0.0571	0.0396	0.1673	0.0068	-0.0007	0.0317	0.3987	0.4849	0.5088	0.0681	0.0730	0.0849
100	-0.6590	-0.7027	-0.5848	0.5036	0.4973	0.5192	0.0410	-0.0027	0.1152	0.0036	-0.0027	0.0192	0.3363	0.4018	0.4093	0.0488	0.0536	0.0573
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
30	-0.6210	-0.6464	-0.4682	1.0144	0.9888	1.0858	0.0790	0.0536	0.2318	0.0144	-0.0112	0.0858	0.4333	0.5265	0.5893	0.1776	0.1896	0.2257
50	-0.6434	-0.6676	-0.5327	1.0132	0.9932	1.0634	0.0566	0.0324	0.1673	0.0132	-0.0068	0.0634	0.3982	0.4773	0.5088	0.1357	0.1456	0.1698
100	-0.6595	-0.7122	-0.5848	1.0067	0.9904	1.0384	0.0405	-0.0122	0.1152	0.0067	-0.0096	0.0384	0.3359	0.3962	0.4093	0.0974	0.1075	0.1146
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
30	-0.6316	-0.6755	-0.4765	4.0522	3.9195	4.3504	0.0684	0.0245	0.2235	0.0522	-0.0805	0.3504	0.4325	0.4972	0.5869	0.6798	0.7122	0.8855
50	-0.6400	-0.6772	-0.5229	4.0570	3.9608	4.2565	0.0600	0.0228	0.1771	0.0570	-0.0392	0.2565	0.3926	0.4643	0.5069	0.5296	0.5691	0.6768
100	-0.6695	-0.7165	-0.5989	4.0289	3.9601	4.1521	0.0305	-0.0165	0.1011	0.0289	-0.0399	0.1521	0.3361	0.3778	0.4078	0.3877	0.4113	0.4724
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
30	-0.6345	-0.6727	-0.4863	8.1562	7.8914	8.7394	0.0655	0.0273	0.2137	0.1562	-0.1086	0.7394	0.4298	0.4933	0.5829	1.3721	1.4306	1.8117
50	-0.6448	-0.6972	-0.5468	8.0802	7.8638	8.4715	0.0552	0.0028	0.1532	0.0802	-0.1362	0.4715	0.3814	0.4372	0.4907	1.0788	1.1255	1.3371
100	-0.6440	-0.7227	-0.5671	8.0840	7.9166	8.3414	0.0560	-0.0227	0.1329	0.0840	-0.0834	0.3414	0.3397	0.3727	0.4179	0.8178	0.8718	0.9766
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
30	-0.6364	-0.6808	-0.4865	16.294	15.744	17.476	0.0636	0.0192	0.2135	0.2941	-0.2563	1.4764	0.4285	0.4875	0.5827	2.7278	2.8354	3.6185
50	-0.6461	-0.7071	-0.5470	16.144	15.685	16.942	0.0539	-0.0071	0.1530	0.1443	-0.3148	0.9416	0.3804	0.4309	0.4905	2.1448	2.2287	2.6720
100	-0.6458	-0.7372	-0.5673	16.149	15.784	16.682	0.0542	-0.0372	0.1327	0.1499	-0.2159	0.6816	0.3385	0.3667	0.4177	1.6245	1.7227	1.9519

Çizelge 3.6  $H_1(t)$  dağılımı için  $\theta = -1$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
30	-0.7406	-0.6901	-0.7748	0.5138	0.5027	0.5284	0.2594	0.3099	0.2252	0.0138	0.0027	0.0284	0.4679	0.5867	0.4579	0.0866	0.0910	0.0982
50	-0.7659	-0.7166	-0.7915	0.5137	0.5054	0.5246	0.2341	0.2834	0.2085	0.0137	0.0054	0.0246	0.4182	0.5299	0.4114	0.0698	0.0723	0.0790
100	-0.8228	-0.7472	-0.8265	0.5097	0.5056	0.5177	0.1772	0.2528	0.1735	0.0097	0.0056	0.0177	0.3306	0.4553	0.3489	0.0490	0.0532	0.0564
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
30	-0.7410	-0.6947	-0.7746	1.0272	0.9983	1.0569	0.2590	0.3053	0.2254	0.0272	-0.0017	0.0569	0.4672	0.5793	0.4581	0.1725	0.1818	0.1964
50	-0.7671	-0.7235	-0.7894	1.0269	1.0046	1.0496	0.2329	0.2765	0.2106	0.0269	0.0046	0.0496	0.4164	0.5194	0.4150	0.1390	0.1438	0.1579
100	-0.8241	-0.7568	-0.8265	1.0188	1.0063	1.0353	0.1759	0.2432	0.1735	0.0188	0.0063	0.0353	0.3285	0.4427	0.3489	0.0976	0.1056	0.1127
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
30	-0.7433	-0.7100	-0.7737	4.1280	3.9918	4.2545	0.2567	0.2900	0.2263	0.1280	-0.0082	0.2545	0.4651	0.5597	0.4625	0.7102	0.7363	0.8058
50	-0.7656	-0.7330	-0.7819	4.1000	3.9958	4.1983	0.2344	0.2670	0.2181	0.1000	-0.0042	0.1983	0.4188	0.5030	0.4260	0.5344	0.5596	0.6156
100	-0.8178	-0.7512	-0.8097	4.0865	4.0310	4.1547	0.1822	0.2488	0.1903	0.0865	0.0310	0.1547	0.3335	0.4547	0.3659	0.3673	0.4080	0.4272
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
30	-0.7345	-0.7095	-0.7416	8.2129	7.9401	8.5067	0.2655	0.2905	0.2584	0.2129	-0.0599	0.5067	0.4702	0.5562	0.5030	1.3946	1.4295	1.5866
50	-0.7745	-0.7435	-0.7858	8.1964	7.9733	8.4093	0.2255	0.2565	0.2142	0.1964	-0.0267	0.4093	0.4170	0.4900	0.4331	1.0576	1.0872	1.2130
100	-0.8224	-0.8029	-0.8146	8.1249	7.9548	8.2921	0.1776	0.1971	0.1854	0.1249	-0.0452	0.2921	0.3317	0.3873	0.3663	0.7433	0.7997	0.8631
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
30	-0.7349	-0.7103	-0.7205	16.422	15.873	17.081	0.2651	0.2897	0.2795	0.4221	-0.1265	1.0814	0.4698	0.5570	0.5302	2.7870	2.8675	3.1600
50	-0.7749	-0.7433	-0.7689	16.389	15.943	16.873	0.2251	0.2567	0.2311	0.3889	-0.0565	0.8732	0.4167	0.4921	0.4562	2.1138	2.1846	2.4313
100	-0.8232	-0.8021	-0.8008	16.244	15.903	16.625	0.1768	0.1979	0.1992	0.2440	-0.0972	0.6253	0.3309	0.3876	0.3881	1.4840	1.6039	1.7173

Çizelge 3.1-3.6 incelendiğinde örneklem çapındaki artış ile beraber bütün tahmin yöntemleri için RMSE değerlerinin azaldığı görülmektedir. Tahmin yöntemleri kendi içinde RMSE kriterine göre ayrı ayrı kıyaslandığında ;

$\hat{\theta}$  için:

- $\theta = 1$  iken  $\alpha$ 'nın tüm değerlerinde  $n = 30$  ve  $n = 50$  örneklem durumları için LS, büyük örneklem çapı için ise ML,
- $\theta$ 'nın diğer pozitif değerleri olan 0.7 ve 0.3 için tüm durumlarda ( $\alpha$  ve örneklem çapı değerlerinin tamamı için) LS,
- $\theta = -1$  iken  $\alpha \leq 1$  durumlarında küçük örnekleme LS, büyük örnekleme ML, diğer tüm  $\alpha$  değerleri ve örneklem durumları için ML,
- $\theta = \{-0.7, -0.3\}$  için tüm durumlarda ML,

yöntemi daha iyi sonuç vermiştir.

$\hat{\alpha}$  için:

$\theta = -0.3$  iken  $n = 30$  olduğunda MOM tahmin yöntemi, diğer örneklem çaplarında ise ML tahmin yöntemi RMSE kriteri açısından en etkin sonuçları vermiştir. Ayrıca örnek çapındaki artışa paralel olarak MOM tahmin edici performansının ML tahmin edici performansına yaklaştığını (RMSE bazında) gözlemleyebiliriz.

#### 4. ALI-MIKHAIL-HAQ DAĞILIMI İLE ELDE EDİLEN DİĞER BİR YENİ TEK BOYUTLU DAĞILIM

(2.8) eşitliğindeki AMH dağılım ailesi ve koşullu dağılım fonksiyonu bilgisi gözönüne alındığında,  $Y \leq y$  verilmişken  $X \leq t$  'nin olasılığı,

$$P(X \leq t | Y \leq y) = \frac{F(t)}{1 - \theta(1 - F(t))(1 - G(y))} \quad (4.1)$$

olarak elde edilir.

İlk olarak;  $y \rightarrow -\infty$  iken (4.1) eşitliği;

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} P(X \leq t | Y \leq y) \cong \frac{F(t)}{1 - \theta \bar{F}(t)} \quad (4.2)$$

olduğu görülür. Elde edilen bu eşitlik ile daha önce (2.10)'da verilen Marshall-Olkin dağılım ailesi gözönüne alınarak  $\beta = 1 - \theta$  ve  $0 \leq \beta \leq 2$  olduğu varsayımı altında

$$G(t) = \frac{1 - (1 - \beta)\bar{F}(t) - \beta\bar{F}(t)}{1 - (1 - \beta)\bar{F}(t)} = \frac{F(t)}{1 - (1 - \beta)\bar{F}(t)} \quad (4.3)$$

şeklinindedir. Kısaca bu varsayım altında açık olarak Marshall-Olkin dağılım ailesinin elde edildiği görülmektedir.

Yeniden (4.1) eşitliğinde elde edilen koşullu olasılık göz önüne alınırsa bu eşitliğin birinci dereceden Taylor açılımı (4.4)'de gösterildiği gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} P(X \leq t | Y \leq y) &\cong F(t)[1 + \theta(1 - F(t))(1 - G(y))] \\ &= F(t)[1 + \theta\bar{F}(t)\bar{G}(y)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Bu eşitlikte  $y \rightarrow -\infty$  durumunda,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} P(X \leq t | Y \leq y) \cong F(t)[1 + \theta \bar{F}(t)] \quad (4.5)$$

olduğu görülür.

Daha önce (2.11)'de verilen karesel dönüştürülmüş dağılım bilgileri dahilinde birinci dereceden Taylor açılımıyla elde edilen (4.5) eşitliğinde, karesel dönüştürülmüş (transmuted) dağılım ailesi kolaylıkla görülebilmektedir.

(4.1) ile verilen koşullu dağılım için belirli durumlarda görülen benzerliklerin ardından şimdi de bu fonksiyonun ikinci dereceden Taylor açılımına sahip eşitliği bulunsun. Bu eşitlik,

$$\begin{aligned} P(X \leq t | Y \leq y) &\cong H^*(t, y) \\ &= F(t) \left[ 1 + \theta(1 - F(t))(1 - G(y)) + \left( \theta(1 - F(t))(1 - G(y)) \right)^2 \right] \\ &= F(t)[1 + \theta \bar{F}(t) \bar{G}(y) + \theta^2 \bar{F}^2(t) \bar{G}^2(y)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde bulunur.

$y \rightarrow -\infty$  iken bu koşullu dağılım tekrar gözönüne alınırsa,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} P(X \leq t | Y \leq y) \cong F(t)[1 + \theta \bar{F}(t) + \theta^2 \bar{F}^2(t)]$$

elde edilir. Üçüncü bölümde (3.3) eşitliği ile elde edilen dağılım fonksiyonu ile karıştırılmaması amacıyla bu fonksiyon  $H_2(t)$  olarak gösterilir.

$$H_2(t) = F(t)[1 + \theta \bar{F}(t) + \theta^2 \bar{F}^2(t)] \quad (4.7)$$

(4.7) ifadesinin  $t \in R$  olduğu kabulü altında dağılım fonksiyonu özelliklerini sağlayıp sağlamadığı aşağıda kontrol edilmiştir. Buna göre,

(i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} H_2(t) = 1$  ve  $\lim_{t \rightarrow -\infty} H_2(t) = 0$ 'dir.

$F(t)$  bir dağılım fonksiyonu ve  $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$  de bir yaşam fonksiyonu olduğundan (i) açık olarak sağlanır.

(ii)  $H_2(t)$ ,  $t \in R$  için azalmayan bir fonksiyondur, yani  $\forall t_1 < t_2$  için  $H_2(t_1) \leq H_2(t_2)$ 'dir.

Dağılım sürekli bir dağılım olduğundan,  $\frac{d}{dt}H_2(t) \geq 0$  olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için (4.7) ifadesinde  $F(t) = u$  dönüşümü yapılarak, bu dönüşüm altında türevin işaretine bakılacaktır.

$$\phi(u) = u[1 + \theta(1 - u) + \theta^2(1 - u)^2] \quad (4.8)$$

olup, bu ifadenin  $u$ 'ya göre türevi,

$$\frac{d}{du}\phi(u) = 1 + \theta(1 - u) - \theta u + \theta^2(1 - u)^2 - 2\theta^2u(1 - u) \quad (4.9)$$

şeklindedir.

$\theta \leq 0$  için türevin işareti kontrol edilsin. (4.9) ifadesi yeniden düzenlenirse,

$$\phi'(u) = 1 + \theta - 2u\theta(1 + \theta(1 - u)) + \theta^2(1 - u)^2 \quad (4.10)$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki terimlerin işareti tek tek incelendiğinde;

$\theta(1 - u) \leq 0$  olup,  $-1 \leq \theta \leq 1$  olduğu için  $-2u\theta(1 + \theta(1 - u))$  teriminin pozitif olduğu görülmektedir. Benzer şekilde diğer terimler de pozitif olduğundan türevin işareti de  $\theta \leq 0$  için pozitiftir.

$\theta > 0$  için yine (4.9) ifadesi uygun olarak düzenlendiğinde,

$$\phi'(u) = \theta^2(1 - u)^2 + (1 - u\theta)^2 + (\theta - u\theta)^2 + \theta(1 - \theta)$$

şeklinde yazılır.



$\theta(1 - \theta) > 0$  olup  $-1 \leq \theta \leq 1$  olduğundan eşitliğin sağındaki toplamlar pozitif işaretli olup  $\phi(u)$  fonksiyonu,  $\theta > 0$  için  $u$  da azalmayıdır. Böylece  $\theta \in [-1,1]$  için  $\phi$  fonksiyonu  $u$  da azalmayıdır yani  $\frac{d}{dt} H_2(t) \geq 0$  dır.

(iii)  $H_2(t)$  sağdan süreklidir, yani  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_2(t + \varepsilon) = H_2(t)$  dir.  $F(t)$  bir dağılım fonksiyonu olduğundan bu özellik de sağlanır.

Bu üç özellik sağlandığından, (4.7) ile verilen ifadenin bir dağılım fonksiyonu olduğunu söylemek mümkündür. Elde edilen bu dağılım fonksiyonu tekrar düzenlenerek,

$$\begin{aligned} H_2(t) &= \varphi(F(t)) \\ &= (1 + \theta + \theta^2)F(t) - \theta F^2(t) - \theta^2 F(t)(2F(t) - F^2(t)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

fonksiyonu elde edilir.

Bu dağılımın aynı zamanda dönüştürülmüş bir aile olarak yazılabileceği aşağıdaki gibi gösterilsin.

$u \in [0,1]$  olduğu bilindiğinde  $F(t) = u$  dönüşümü uygulanıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\varphi(u) = (1 + \theta + \theta^2)u - \theta u^2 - \theta^2 u(2u - u^2) \quad (4.12)$$

olur. Ayrıca bu fonksiyon,

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= u + u\theta + u\theta^2 - u^2\theta - 2u^2\theta^2 + u^3\theta^2 \\ &= u + u(\theta + \theta^2) - u^2(\theta + 2\theta^2 - u\theta^2) \\ &= u + (u - u^2)(\theta + \theta^2) + u^3\theta^2 - u^2\theta^2 \\ &= u + (u - u^2)(\theta + \theta^2) - u\theta^2(u - u^2) \\ &= u + u(1 - u)(\theta + \theta^2 - u\theta^2) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle  $P(u) = (\theta + \theta^2 - u\theta^2)$  olmak üzere (2.12) ile verilen polinomial dönüşüm ailesi bilgisi altında bu dağılımın aynı zamanda dönüştürülmüş bir aile olduğu söylenir.

(4.11) fonksiyonunun daha önce  $-1 \leq \theta \leq 1$  için dağılım fonksiyonu olduğu gösterilmişti. Bu fonksiyonunun  $\theta$  parametresi için herhangi bir ön sınırlandırmanın yapılmadığı durumda da dağılım fonksiyonu olduğu kabul edilsin. Buna göre dağılım fonksiyonunun azalmayan olması gerektiği koşulunun hangi  $\theta$  parametre değer aralığında sağlandığı aşağıdaki gibi belirlenir.

(4.12) fonksiyonun  $u = 0$  ve  $u = 1$  noktalarında aldığı değerler sırasıyla  $\varphi(0) = 0$  ve  $\varphi(1) = 1$  dir. Bu noktalarda parametre için herhangi bir kısıt yoktur.  $u \in [0,1]$  aralığında  $\varphi$  fonksiyonunun azalmayan olması için  $\varphi' \geq 0$  olması gerekmektedir. Türev fonksiyonu,

$$\varphi' = 3\theta^2 u^2 - 4\theta^2 u + \theta^2 - 2\theta u + 1 + \theta$$

olup,  $u = 0$  için  $\varphi'(0) = 1 + \theta + \theta^2 \geq 0$  koşulu  $\forall \theta$  için sağlanırken,  $u = 1$  için  $\varphi'(1) = 1 - \theta \geq 0$  koşulu  $\theta \leq 1$  iken sağlanır.

$u \in (0,1)$  için de  $\varphi' \geq 0$  olmalıdır. Bunun için  $\varphi' = 0$  denkleminin köklerine bakılırsa,

$$u_{1,2} = \frac{\theta + 2\theta^2 \pm \theta\sqrt{(\theta - 1)(\theta + 2)}}{3\theta^2}$$

olur. Burada  $\Delta = (\theta - 1)(\theta + 2)$  olup,  $\Delta < 0$  ise  $u$  için reel kök bulunamayacaktır. Bu istenilen bir durumdur çünkü böyle bir durumda  $\varphi' > 0$  veya  $\varphi' < 0$  sağlanacaktır. O halde daha önce bulunan koşuldaki  $\theta - 1 < 0$  olup  $\Delta < 0$  olması için  $\theta + 2 \geq 0 \Rightarrow \theta \geq -2$  olmalıdır. Ayrıca,  $\varphi'$  fonksiyonu konveks bir fonksiyon olup minimum noktası vardır ve bu optimal nokta  $u^* = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\theta}$  olup fonksiyonda yerine konularsa;

$$\varphi'(u^*) = \frac{-(\theta - 1)(\theta + 2)}{3\theta^2} \geq 0$$

olmaktadır. Bu yüzden herhangi bir  $u \in (0,1)$  için  $\varphi'(u) \geq \varphi'(u^*) \geq 0$  olacaktır. Dolayısıyla  $-2 \leq \theta \leq 1$  için  $\varphi$  fonksiyonu azalmayan bir fonksiyondur.

Burada diğer dağılım fonksiyonu özellikleri  $\theta$  parametresinden bağımsız olarak sağlandığı için (4.11) fonksiyonu  $-2 \leq \theta \leq 1$  için dağılım fonksiyonu özelliklerini sağlamaktadır. Özetle bu dağılım fonksiyonu,

$$H_2(t) = F(t)[1 + \theta\bar{F}(t) + \theta^2\bar{F}^2(t)], \quad t \in R, \theta \in [-2,1] \quad (4.13)$$

olup yoğunluk fonksiyonu ise,

$$h_2(t) = f(t) \left[ \left( 1 + \theta\bar{F}(t) + \theta^2\bar{F}^2(t) \right) - \theta F(t) \left( 1 + 2\theta\bar{F}(t) \right) \right], \quad (4.14)$$

$$t \in R, \theta \in [-2,1]$$

şeklinde verilir. Yaşam fonksiyonu, (2.3)'den,

$$\begin{aligned} S_2(t) &= 1 - (F(t)[1 + \theta\bar{F}(t) + \theta^2\bar{F}^2(t)]) \\ &= \bar{F}(t) \left( 1 - \theta F(t) - \theta^2 F(t)\bar{F}(t) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

bulunur. Bozulma oranı fonksiyonu (2.4) eşitliği ile,

$$r_2(t) = \frac{f(t) \left[ \left( 1 + \theta\bar{F}(t) + \theta^2\bar{F}^2(t) \right) - \theta F(t) \left( 1 + 2\theta\bar{F}(t) \right) \right]}{\bar{F}(t) \left( 1 - \theta F(t) - \theta^2 F(t)\bar{F}(t) \right)}$$

olarak elde edilir. Burada  $F(t)$  temel dağılımının bozulma oranı fonksiyonu  $r_f(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$

olarak gösterilirse,  $H_2(t)$  dağılımının bozulma oranı fonksiyonu;

$$r_2(t) = r_f(t) \left( \frac{3F^2(t)\theta^2 - 4F(t)\theta^2 - 2F(t)\theta + \theta^2 + \theta + 1}{F^2(t)\theta^2 - F(t)\theta^2 - F(t)\theta + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= r_f(t) \left( 3 + \frac{\theta^2 - F(t)\theta^2 + F(t)\theta + \theta - 2}{F^2(t)\theta^2 - F(t)\theta^2 - F(t)\theta + 1} \right) \\
&= r_f(t) \left( 3 + \frac{(\bar{F}(t)\theta + 2)(\theta - 1)}{F^2(t)\theta^2 - F(t)\theta^2 - F(t)\theta + 1} \right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

yazılabilir. Bozulma oranı fonksiyonu için,  $\lim_{t \rightarrow \infty} r_2(t) = r_f(t)$  ve  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r_2(t) = r_f(t)(\theta^2 + \theta + 1)$  şeklindedir.

#### 4.1 Temel Dağılımı Üstel Olan $H_2(t)$ Dağılımının Bazı Karakteristik Özellikleri

Bu bölümde elde edilen  $H_2(t)$  dağılımının temel dağılımı üstel alınarak, moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, varyansı, basıklık ve çarpıklık gibi karakteristik özellikleri elde edilir. Buna göre temel dağılımı üstel olan dağılım fonksiyonu,

$$H_2(t) = (1 - e^{-t/\alpha}) [1 + \theta e^{-t/\alpha} + \theta^2 e^{-2t/\alpha}] \tag{4.17}$$

olmak üzere dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$h_2(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-t/\alpha} [1 - \theta + 2\theta e^{-t/\alpha} - 2\theta^2 e^{-2t/\alpha} + 3\theta^2 e^{-2t/\alpha}], \tag{4.18}$$

$$t \geq 0; \alpha > 0; \theta \in [-2,1]$$

olarak bulunur. Moment çıkaran fonksiyon ise;

$$\begin{aligned}
M_T(u) &= E(e^{uT}) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{ut} \left( \frac{1}{\alpha} e^{-t/\alpha} - \frac{\theta}{\alpha} e^{-t/\alpha} + \frac{2\theta}{\alpha} e^{-2t/\alpha} - \frac{2\theta^2}{\alpha} e^{-2t/\alpha} + \frac{3\theta^2}{\alpha} e^{-3t/\alpha} \right) dt
\end{aligned}$$

olup integralin çözülmesi ile,

$$M_T(u) = \frac{1}{1 - \alpha u} - \frac{\theta}{1 - \alpha u} + \frac{2\theta}{2 - \alpha u} - \frac{2\theta^2}{2 - \alpha u} + \frac{3\theta^2}{3 - \alpha u}, \quad u < \frac{1}{\alpha} \tag{4.19}$$

eşitliği elde edilir. Bulunan moment çıkaran fonksiyon,

$$M_T(u) = (1 - \theta) \frac{1}{1 - \alpha u} + (\theta - \theta^2) \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2} u} + \theta^2 \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3} u}, \quad u < \frac{1}{\alpha}$$

şeklinde yazılabileceğinden,  $\omega_1 = (1 - \theta)$ ,  $\omega_2 = (\theta - \theta^2)$ ,  $\omega_3 = \theta^2$  katsayıları göstermek üzere ve aynı zamanda,  $\frac{1}{1 - \alpha u} = M_{\text{Üstel}(\alpha)}(u)$ ,  $\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2} u} = M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{2})}(u)$ ,  $\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3} u} = M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{3})}(u)$  olacağından, moment çıkararı fonksiyonu bu bilgiler doğrultusunda lineer kombinasyon biçiminde ifade edebilmek mümkündür. Yani moment çıkararı fonksiyon,

$$M_T(u) = \sum_{j=1}^3 \omega_j M_{\text{Üstel}(\frac{\alpha}{j})}(u) \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

$H_2(t)$  dağılımının yaşam ve bozulma oranı fonksiyonlarının genel formu daha önce sırasıyla (4.15) ve (4.16) eşitlikleri ile bulunmuştu. Dolayısıyla  $H_2(t)$  dağılımının temel dağılımı üstel alındığında yaşam fonksiyonu,

$$\begin{aligned} S_2(t) &= 1 - \left(1 - e^{-t/\alpha}\right) \left[1 + \theta \left(e^{-t/\alpha}\right) + \theta^2 \left(e^{-t/\alpha}\right)^2\right] \\ &= e^{-t/\alpha} \left[1 - \left(1 - e^{-t/\alpha}\right) \left(\theta + \theta^2 e^{-t/\alpha}\right)\right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

olup,  $r_f(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$  olmak üzere, bozulma oranı fonksiyonu da,

$$r_2(t) = r_f(t) \left( 3 + \frac{(\theta e^{-t/\alpha} + 2)(\theta - 1)}{\theta^2(1 - e^{-t/\alpha})^2 - \theta^2(1 - e^{-t/\alpha}) - \theta(1 - e^{-t/\alpha}) + 1} \right) \quad (4.22)$$

şeklindedir.

### 4.1.1 $H_2(t)$ dağılımının momentleri

Birinci merkezi olmayan moment, elde edilen moment çıkaran fonksiyonun birinci türevinin alınıp,  $u$  yerine sıfır konulması ile aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= \frac{d}{du} M_T(u) \Big|_{u=0} \\ \mu'_1 &= \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{\theta}{1-\alpha u} + \frac{2\theta}{2-\alpha u} - \frac{2\theta^2}{2-\alpha u} + \frac{3\theta^2}{3-\alpha u} \right] \Big|_{u=0} \\ &= \frac{\alpha}{(1-\alpha u)^2} - \frac{\theta\alpha}{(1-\alpha u)^2} + \frac{2\theta\alpha}{(2-\alpha u)^2} - \frac{2\theta^2\alpha}{(2-\alpha u)^2} + \frac{3\theta^2\alpha}{(3-\alpha u)^2} \Big|_{u=0}\end{aligned}$$

Daha farklı bir gösterim ile ifade edilecek olursa (4.20) eşitliği yardımıyla birinci moment;

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= \frac{d}{du} \left[ \sum_{j=1}^3 \omega_j M_{\text{Üstel}}\left(\frac{\alpha}{j}\right)(u) \right] \Big|_{u=0} \\ &= \sum_{j=1}^3 \omega_j \frac{\alpha}{j} \\ &= \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yani;

$$E(T) = \mu'_1 = \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \quad (4.23)$$

şeklindedir.

Beklenen değer ifadesinin üstel dağılımın ortalaması olan  $\alpha$  ile ilişkisini göstermede aşağıdaki açıklamalar yol gösterici olacaktır. (4.21) ifadesine bakılırsa;  $1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} < 1$  durumunda;  $E(T) < \alpha$  ve  $1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} > 1$  durumunda ise  $E(T) > \alpha$  olacaktır.

Öncelikle  $E(T) < \alpha$  olması durumu incelenir. Bu durum,  $\frac{\theta}{2} + \frac{\theta^2}{6} > 0$  olduğunda sağlanır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $\frac{\theta}{2} + \frac{\theta^2}{6} = \frac{\theta}{6}[3 + \theta]$  ifadesi elde edilir. Bu ifadenin pozitif olması hemen görüleceği üzere,  $\theta \in (0,1]$  olduğunda sağlanır. Benzer şekilde  $E(T) > \alpha$  durumu ise,  $\frac{\theta}{6}[3 + \theta] < 0$  olduğunda sağlanmaktadır. Bu ise,  $\theta \in [-2,0)$  koşulu ile gerçekleşmektedir. Sonuç olarak,

$$\theta \in [-2,0) \Rightarrow E(T) > \alpha$$

$$\theta = 0 \Rightarrow E(T) = \alpha$$

$$\theta \in (0,1] \Rightarrow E(T) < \alpha$$

elde edilir. İkinci merkezi olmayan moment, moment çıkaran fonksiyonun ikinci türevinin alınıp  $u$  yerine sıfır konulması ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mu'_2 &= \left. \frac{d^2}{du^2} M_T(u) \right|_{u=0} \\ \mu'_2 &= \left. \frac{d^2}{du^2} \left[ \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{\theta}{1-\alpha u} + \frac{2\theta}{2-\alpha u} - \frac{2\theta^2}{2-\alpha u} + \frac{3\theta^2}{3-\alpha u} \right] \right|_{u=0} \\ &= \left. \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha u)^3} - \frac{2\theta\alpha^2}{(1-\alpha u)^3} + \frac{4\theta\alpha^2}{(2-\alpha u)^3} - \frac{4\theta^2\alpha^2}{(2-\alpha u)^3} + \frac{6\theta^2\alpha^2}{(3-\alpha u)^3} \right|_{u=0} \\ &= 2\alpha^2 \left( 1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36} \right) \end{aligned}$$

Sonuç olarak ikinci merkezi olmayan moment aşağıda gösterilen eşitlikteki gibi elde edilir.

$$E(T^2) = \mu'_2 = 2\alpha^2 \left( 1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36} \right) \quad (4.24)$$

Dağılımın varyansı ise (4.23) ve (4.24) eşitlikleri yardımıyla;

$$V(T) = E(T - \mu)^2 = E(T^2) - [E(T)]^2$$

$$\begin{aligned}
&= 2\alpha^2 \left(1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right) - \left[\alpha \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right)\right]^2 \\
&= \alpha^2 \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{7\theta^2}{36} - \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{36}\right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olarak bulunur.

Elde edilen varyansın, üstel dağılımın varyansı olan  $\alpha^2$  ile ilişkisi için (4.25) ifadesinden yararlanılsın.  $\left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{7\theta^2}{36} - \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{36}\right) < 1$  durumunda  $V(T) < \alpha^2$  ve  $\left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{7\theta^2}{36} - \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{36}\right) > 1$  durumunda ise  $V(T) > \alpha^2$  olacaktır. Öncelikle  $V(T) < \alpha^2$  olması durumu incelenir. Bu durum,

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{2} + \frac{7\theta^2}{36} + \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{36} &= \frac{\theta}{36} (18 + 7\theta + 6\theta^2 + \theta^3) \\
&= \frac{\theta}{36} (4 + 7(1 + \theta) + 6(1 + \theta^2) + (1 + \theta^3)) > 0
\end{aligned}$$

olup,  $V(T) < \alpha^2$  olması durumu sağlanır. Bu ise ancak  $\theta \in (0,1]$  için geçerlidir. Benzer şekilde ikinci durum yani  $V(T) > \alpha^2$  koşulu için  $\theta \in [-2,0)$  olması durumunda sağlanır. Buradan hareketle;

$$\theta \in [-2,0) \Rightarrow V(T) > \alpha^2$$

$$\theta = 0 \Rightarrow V(T) = \alpha^2$$

$$\theta \in (0,1] \Rightarrow V(T) < \alpha^2$$

olduğu sonucuna varılır. Üçüncü ve dördüncü merkezi olmayan momentler sırasıyla;

$$\begin{aligned}
\mu'_3 &= \left[ \frac{6\alpha^3}{(1-\alpha u)^4} - \frac{6\theta\alpha^3}{(1-\alpha u)^4} + \frac{12\theta\alpha^3}{(2-\alpha u)^4} - \frac{12\theta^2\alpha^3}{(2-\alpha u)^4} + \frac{18\theta^2\alpha^3}{(3-\alpha u)^4} \right] \Bigg|_{u=0} \\
&= 6\alpha^3 \left[ 1 - \frac{7\theta}{8} - \frac{19\theta^2}{216} \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mu_4' &= \left[ \frac{24\alpha^4}{(1-\alpha u)^5} - \frac{24\theta\alpha^4}{(1-\alpha u)^5} + \frac{48\theta\alpha^4}{(2-\alpha u)^5} - \frac{48\theta^2\alpha^4}{(2-\alpha u)^5} + \frac{72\theta^2\alpha^4}{(3-\alpha u)^5} \right] \Big|_{u=0} \\ &= 24\alpha^4 \left[ 1 - \frac{15\theta}{16} - \frac{65\theta^2}{1296} \right]\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Elde edilen  $H_1(t)$  dağılımının merkezi momentleri hesaplanmak istensin. İkinci merkezi moment  $E(T - \mu)^2 = \mu_2$  olacağından daha önce (4.25) eşitliğinde gösterilmişti. Üçüncü ve dördüncü merkezi momentler ise;  $(a + b)^n = \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right]$  şeklinde bilinen binom açılımı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunmaktadır.  $\mu$  kitle ortalamasını göstermek üzere;

$$\begin{aligned}E(T - \mu)^3 &= \mu_3 = E \left[ \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} T^k (-\mu)^{3-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} E[T^k] (-\mu)^{3-k} \\ &= \binom{3}{0} (-\mu)^3 + \binom{3}{1} E(T) (-\mu)^2 + \binom{3}{2} E(T^2) (-\mu) + \binom{3}{3} E(T^3)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}E(T - \mu)^3 &= \left( -\alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \right)^3 + 3 \left( \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \right)^3 \\ &\quad + 6\alpha^2 \left( 1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36} \right) \left( -\alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \right) + 6\alpha^3 \left( 1 - \frac{7\theta}{8} - \frac{19\theta^2}{216} \right) \\ &= 2\alpha^3 \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right)^3 - 6\alpha^3 \left( 1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36} \right) \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \\ &\quad + 6\alpha^3 \left( 1 - \frac{7\theta}{8} - \frac{19\theta^2}{216} \right)\end{aligned} \tag{4.26}$$

olarak elde edilir.

Dördüncü merkezi moment ise benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
 E(T - \mu)^4 &= \mu_4 = E \left[ \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} T^k (-\mu)^{4-k} \right] = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} E[T^k] (-\mu)^{4-k} \\
 &= \binom{4}{0} (-\mu)^4 + \binom{4}{1} E(T) (-\mu)^3 + \binom{4}{2} E(T^2) (-\mu)^2 + \binom{4}{3} E(T^3) (-\mu) \\
 &\quad + \binom{4}{4} E(T^4)
 \end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
 E(T - \mu)^4 &= \left( \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \right)^4 - 4 \left( \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \right)^4 \\
 &\quad + 12 \left( \alpha^2 \left( 1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36} \right) \right) \left( -\alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \right)^2 \\
 &\quad + 4 \left( 6\alpha^3 \left( 1 - \frac{7\theta}{8} - \frac{19\theta^2}{216} \right) \right) \left( -\alpha \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \right) \\
 &\quad + 24\alpha^4 \left( 1 - \frac{15\theta}{16} - \frac{65\theta^2}{1296} \right)
 \end{aligned}$$

bulunur. Dördüncü merkezi moment,

$$\begin{aligned}
 E(T - \mu)^4 &= -3\alpha^4 \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right)^4 + 12\alpha^4 \left( 1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36} \right) \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right)^2 \\
 &\quad - 24\alpha^4 \left( 1 - \frac{7\theta}{8} - \frac{19\theta^2}{216} \right) \left( 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \right) \\
 &\quad + 24\alpha^4 \left( 1 - \frac{15\theta}{16} - \frac{65\theta^2}{1296} \right)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

şeklindedir.

#### 4.1.2 $H_2(t)$ dağılımının basıklık ve çarpıklığı

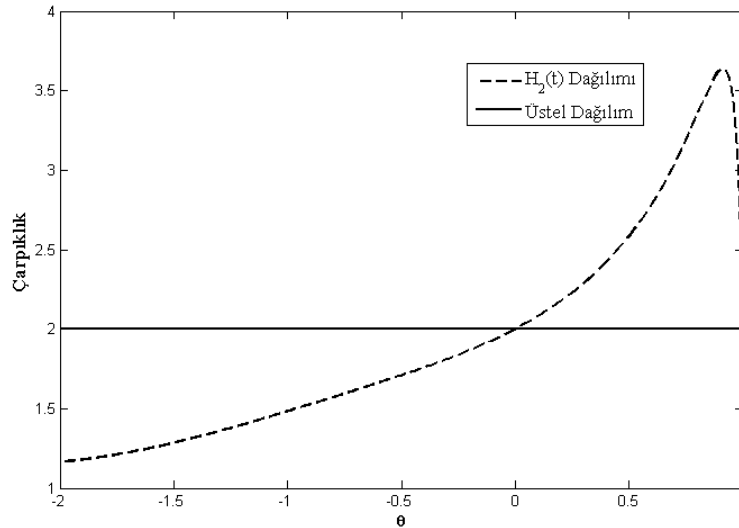
Daha önce (4.26)'da hesaplanan üçüncü merkezi moment, standart sapmanın üçüncü kuvvetine bölünürse bir çarpıklık ölçüsü elde edilmiş olur. Yani; momentler yardımıyla çarpıklık;

$$\beta_1(\alpha, \theta) = \frac{E(T - \mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

şeklinde hesaplanır. Belirli bir  $\alpha$  değeri için, sözgelimi  $\alpha = 1$  alınarak, temel dağılımı üstel olan  $H_2(t)$  dağılımının çarpıklığı;

$$\begin{aligned} \beta_1(1, \theta) &= \frac{2 \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right)^3 - 6 \left(1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right) \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right) + 6 \left(1 - \frac{7\theta}{8} - \frac{19\theta^2}{216}\right)}{\left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{7\theta^2}{36} - \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{36}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{2(216 - \theta^6 - 9\theta^5 - 24\theta^4 - 45\theta^3 - 48\theta^2 - 81\theta)}{(36 - \theta^4 - 6\theta^3 - 7\theta^2 - 18\theta)^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere,  $H_2(t)$  dağılımının çarpıklık katsayısı üstel dağılımın parametresine ( $\alpha$ ) bağlı değildir.



Şekil 4.1 Üstel dağılım ve  $H_2(t)$ 'nin çarpıklık grafiği

Şekil 4.1’de temel dağılımı üstel olan dağılımın çarpıklığı ve tek parametrelili üstel dağılımın çarpıklığı ile beraber çizdirilmiştir. Bilindiği üzere üstel dağılımın çarpıklık değeri 2 olduğu için asimetrikliğin bu değerle karşılaştırılması sağlanmıştır.

$H_2(t)$  dağılımının çarpıklığı için,  $\theta$  değeri 0 ile 1 aralığında üstel dağılıma göre daha sağa çarpık, 0 dan küçük iken üstel dağılıma göre daha sola çarpık olduğu söylenebilir. Ayrıca  $\theta$  değeri 0 ve 1 iken  $H_2(t)$  dağılımının çarpıklık değeri 2 olup, üstel dağılım ile aynı çarpıklık özelliği göstermektedir.

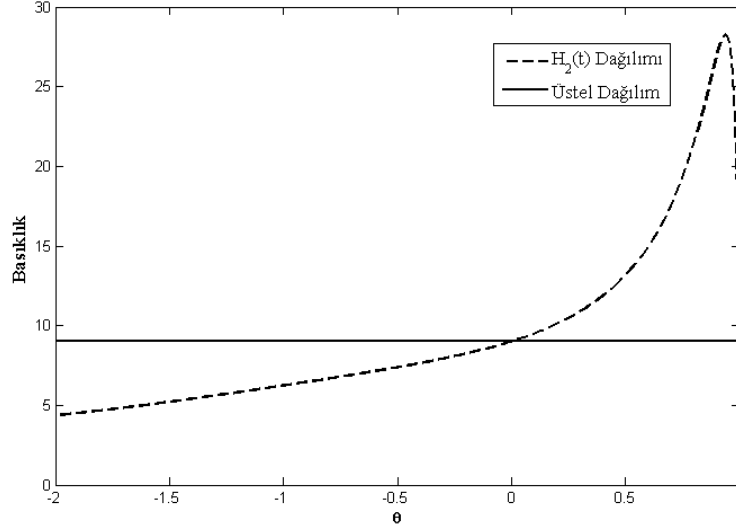
Dağılımın basıklığının hesaplanması için, daha önce (4.27)’de hesaplanan dördüncü merkezi moment, standart sapmanın dördüncü kuvvetine bölünmesiyle elde edilmektedir. Böylelikle  $H_2(t)$  dağılımının basıklığı;

$$\beta_2(\alpha, \theta) = \frac{E(T - \mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

eşitliği ile bulunur. Yine belirli bir  $\alpha$  değeri için, sözgelimi  $\alpha = 1$  alınarak, temel dağılımı üstel olan  $H_2(t)$  dağılımının basıklığı;

$$\begin{aligned} \beta_2(1, \theta) &= \frac{-3 \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right)^4 + 12 \left(1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right) \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right)^2}{\left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{7\theta^2}{36} - \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{36}\right)^2} \\ &\quad - \frac{24 \left(1 - \frac{7\theta}{8} - \frac{19\theta^2}{216}\right) \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right) - 24 \left(1 - \frac{15\theta}{16} - \frac{65\theta^2}{1296}\right)}{\left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{7\theta^2}{36} - \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{36}\right)^2} \\ &= \frac{11664 - 3\theta^8 - 36\theta^7 - 150\theta^6 - 360\theta^5 - 735\theta^4 - 2124\theta^3 - 2280\theta^2 - 5832\theta}{(\theta^4 + 6\theta^3 + 7\theta^2 + 18\theta - 36)^2} \quad (4.29) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü üzere,  $H_2(t)$  dağılımının basıklık katsayısı üstel dağılımın parametresine ( $\alpha$ ) bağlı değildir.

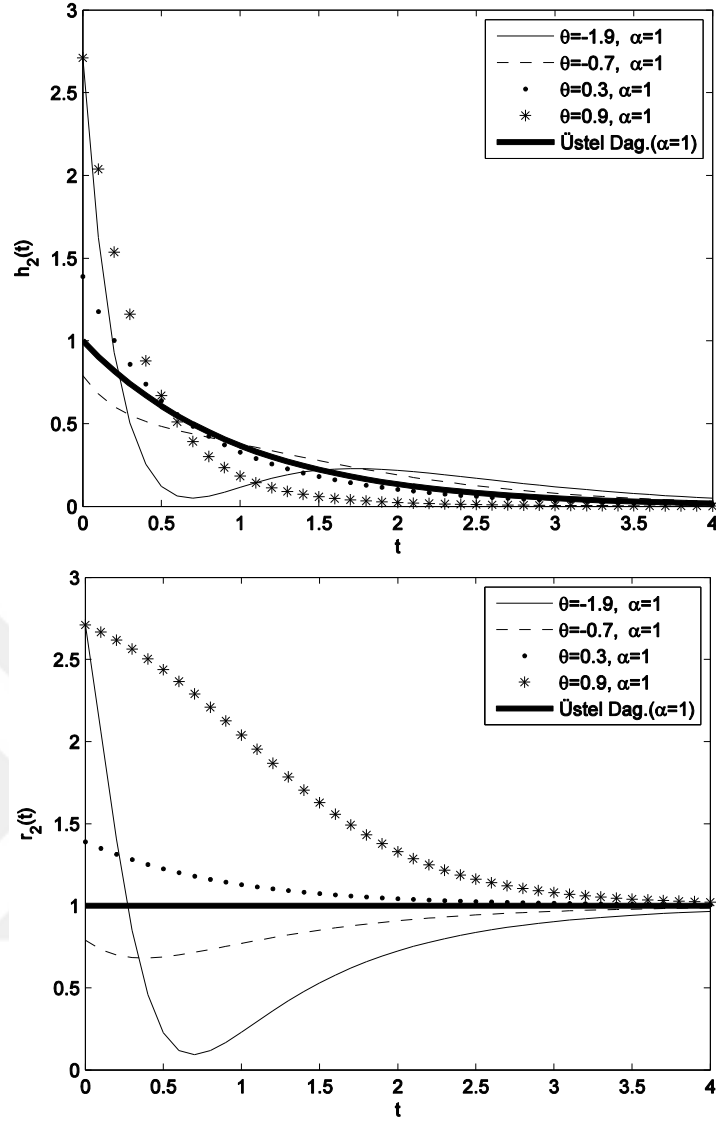


Şekil 4.2 Üstel dağılım ve  $H_2(t)$ 'nin basıklık grafiği

Şekil 4.2'de temel dağılımı üstel olan dağılımın basıklığı ve tek parametrelili üstel dağılımın basıklığı birlikte çizdirilmiştir. Burada  $\theta$  değeri 0 ile 1 aralığında  $H_2(t)$ 'nin basıklığı üstel dağılımın basıklığına göre daha dik,  $\theta$  değeri 0'dan küçükken üstel dağılıma göre daha basık olduğu söylenebilir.

#### 4.1.3 $H_2(t)$ dağılımının yapısı için görsel gösterimler

Temel dağılımı üstel olan  $H_2(t)$  dağılımının şekli hakkında fikir edinebilmek amacıyla farklı parametre değerleri için olasılık yoğunluk ve bozulma oranı fonksiyonlarının grafiklerine yer verilmiştir. Üstel dağılıma ait olasılık yoğunluk ve bozulma oranı fonksiyonu grafikleri de bu gösterimlerle beraber çizdirilerek, farklılığın bir arada gösterilmesi sağlanmıştır.



Şekil 4.3  $H_2(t)$ 'nin farklı  $\theta$  parametre değerleri için olasılık yoğunluk  $h_2(t)$  ve bozulma oranı  $r_2(t)$  fonksiyonları ( $\alpha = 1$ )

Şekil 4.3'de  $h_2(t)$  incelendiğinde,  $t$ 'nin yaklaşık 0.5'den büyük değerlerinde  $\theta$ 'nın pozitif değerleri için üstel dağılımın yoğunluk fonksiyonuna göre daha basık olduğu görülmektedir. Ancak  $\theta$  negatif olduğunda  $t$ 'nin aldığı değerler ile bu durum farklılık gösterebilmektedir. Ayrıca  $r_2(t)$ ,  $t$  arttıkça üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonuna yaklaşmaktadır.

#### 4.2 Temel Dağılımı Üstel Olan $H_2(t)$ Dağılımının Parametre Tahmini

Bu bölümde, temel dağılımı üstel olan  $H_2(t)$  dağılımının parametrelerini tahmin etmek için ML, MOM ve LS tahmin yöntemleri incelenmektedir.

#### 4.2.1 ML tahmin yöntemi

Elde edilen dağılımın olabilirlik fonksiyonu (2.13) eşitliği ile hesaplanacağından, (4.18)'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta; \underline{t}) &= \prod_{i=1}^n h_2(t_i) \\ &= \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha}} \prod_{i=1}^n [1 - \theta + 2\theta e^{-t_i/\alpha} - 2\theta^2 e^{-t_i/\alpha} + 3\theta^2 e^{-2t_i/\alpha}] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \log L(\alpha, \theta; \underline{t}) &= -n \log \alpha - \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log (1 - \theta + 2\theta e^{-t_i/\alpha} - 2\theta^2 e^{-t_i/\alpha} + 3\theta^2 e^{-2t_i/\alpha}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyonunun  $\alpha$  parametresine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2\theta \frac{t_i}{\alpha^2} e^{-t_i/\alpha} - 2\theta^2 \frac{t_i}{\alpha^2} e^{-t_i/\alpha} + 6\theta^2 \frac{t_i}{\alpha^2} e^{-2t_i/\alpha}}{1 - \theta + 2\theta e^{-t_i/\alpha} - 2\theta^2 e^{-t_i/\alpha} + 3\theta^2 e^{-2t_i/\alpha}} \right]$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{-t_i/\alpha} (2\theta - 2\theta^2 + 6\theta^2 e^{-t_i/\alpha})}{1 - \theta + 2\theta e^{-t_i/\alpha} - 2\theta^2 e^{-t_i/\alpha} + 3\theta^2 e^{-2t_i/\alpha}}$$

biçiminde bulunur. Benzer şekilde,  $\theta$  parametresine göre kısmi türev,

$$\frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{-1 + 2e^{-t_i/\alpha} - 4\theta e^{-t_i/\alpha} + 6\theta e^{-2t_i/\alpha}}{1 - \theta + 2\theta e^{-t_i/\alpha} - 2\theta^2 e^{-t_i/\alpha} + 3\theta^2 e^{-2t_i/\alpha}}$$

elde edilir. Kısmi türev fonksiyonlarının sıfıra eşitlenmesi ile,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \alpha} &= -\frac{n}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\alpha^2} \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{-t_i/\alpha} (2\theta - 2\theta^2 + 6\theta^2 e^{-t_i/\alpha})}{1 - \theta + 2\theta e^{-t_i/\alpha} - 2\theta^2 e^{-t_i/\alpha} + 3\theta^2 e^{-2t_i/\alpha}} = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \log L(\alpha, \theta; \underline{t})}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{-1 + 2e^{-t_i/\alpha} - 4\theta e^{-t_i/\alpha} + 6\theta e^{-2t_i/\alpha}}{1 - \theta + 2\theta e^{-t_i/\alpha} - 2\theta^2 e^{-t_i/\alpha} + 3\theta^2 e^{-2t_i/\alpha}} = 0 \quad (4.31)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler ile parametrelerin ML tahmin edicilerinin analitik çözümü elde edilememektedir. Bu durumda log-olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyon problemi bir algoritma ile çözdürülerek ML tahmini elde edilebilir. Sayısal olarak çözümün elde edilmesinde Matlab 2013 programı kullanılmış ve ML tahminlerini başlangıç değeri belirleme stratejisine dayalı olarak yakınsama yöntemi ile bulduran “mle” komutundan faydalanılmıştır. Bu komut için optimizasyon seçeneklerini içeren bir yapıdan faydalanılmıştır. Söz konusu bu yapı içeriğinde amaç fonksiyonunu oluşturan kısıtlar ve karar değişkenlerini barındırmaktadır. Burada türev temelli tekniklerden biri olan, kısmi türevleri içeren “GradObj” işaretlenmiştir.

#### 4.2.2 MOM tahmin yöntemi

İkinci bölümde verilen MOM tahmin yöntemi bilgisi göz önüne alınsın.  $E(T)$  ve  $E(T^2)$  sırasıyla (4.23) ve (4.24) eşitlikleri ile verilen  $H_2(t)$ 'nin kitle momentleri ve  $m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ ,  $m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2$  örneklem momentleri olmak üzere,  $\alpha \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right) = m_1$  ve  $2\alpha^2 \left(1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right) - m_1^2 = m_2$  olup,  $\frac{m_1^2}{\left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right)^2} \left(1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right) = m_2 + m_1^2$  elde edilir.

Buradan  $\theta$  için dördüncü dereceden bir polinom elde edilmektedir. Bu bakımdan parametrelerin momentler tahmini için Newton-Raphson algoritmasından faydalanılmıştır.

$H_2(t)$  dağılımının momentler tahmin edicilerine,  $\left. \begin{aligned} g_1(\alpha, \theta) &= 0 \\ g_2(\alpha, \theta) &= 0 \end{aligned} \right\}$  denklem sisteminin

Newton-Raphson iteratif yöntemi ile çözümüne ulaşılabilir.  $g_1(\alpha, \theta)$  ve  $g_2(\alpha, \theta)$



fonksiyonlarının kısmi türevleri alınarak  $\mathbf{G}[(\alpha, \theta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}$  matrisi elde edilip,

buradan  $i$ . adım için iterasyon eşitliği;

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \theta^{(i)} \end{bmatrix} - [\mathbf{G}[(\alpha^{(i)}, \theta^{(i)})]]^{-1} \begin{bmatrix} g_1(\alpha^{(i)}, \theta^{(i)}) \\ g_2(\alpha^{(i)}, \theta^{(i)}) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan  $\varepsilon > 0$  için;  $\left\| \begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \theta^{(i)} \end{bmatrix} \right\| \leq \varepsilon$  ise iterasyon durdurulur

ve çözüm  $\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix}$  vektörüdür. Aksi halde iterasyon  $(i + 1)$ . adımdan devam eder.

Burada,  $\left\| \begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \theta^{(i)} \end{bmatrix} \right\| \cong \sqrt{(\alpha^{(i+1)} - \alpha^{(i)})^2 + (\theta^{(i+1)} - \theta^{(i)})^2}$  şeklinde

hesaplanır. (4.23) ve (4.24) eşitlikleri yardımıyla,  $g_1(\alpha, \theta) = \alpha \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right) - m_1$  ve

$g_2(\alpha, \theta) = 2\alpha^2 \left(1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right) - m_2$  olarak bulunur.  $\mathbf{G}$  matrisi,

$$\mathbf{G}[(\alpha, \theta)] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} & -\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\theta}{3} \\ 4\alpha \left[1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right] & 2\alpha^2 \left[-\frac{3}{4} - \frac{5\theta}{18}\right] \end{bmatrix}$$

olup,  $\mathbf{G}$  matrisinin tersi bulunmak istensin. Buna göre,

$$B = \frac{1}{2\alpha^2 \left(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6}\right) \left(-\frac{3}{4} - \frac{5\theta}{18}\right) + 4\alpha \left(1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right) \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\theta}{3}\right)}$$

olmak üzere;  $\mathbf{G}$  matrisinin tersi,

$$[\mathbf{G}[(\alpha, \theta)]]^{-1} = B \begin{bmatrix} 2\alpha^2 \left[-\frac{3}{4} - \frac{5\theta}{18}\right] & \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\theta}{3} \\ -4\alpha \left[1 - \frac{3\theta}{4} - \frac{5\theta^2}{36}\right] & 1 - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{6} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Verilen bu bilgiler doğrultusunda iterasyon eşitliği,

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \theta^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \theta^{(i)} \end{bmatrix} - [\mathbf{G}[(\alpha^{(i)}, \theta^{(i)})]]^{-1} \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \left(1 - \frac{\theta^{(i)}}{2} - \frac{\theta^{(i)2}}{6}\right) - m_1 \\ 2\alpha^{(i)2} \left(1 - \frac{3\theta^{(i)}}{4} - \frac{5\theta^{(i)2}}{36}\right) - m_2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

şeklinde bulunur. Böylelikle bu adımların hesaplanması ile MOM tahmin değerleri Matlab 2013 programında sayısal olarak hesap edilmiştir.

#### 4.2.3 LS tahmin yöntemi

$H_2(t)$  dağılım fonsiyonu için (2.18)'da verilen minimum yapılacak karesel ifade gözönüne alındığında,

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \theta) &= \sum_{i=1}^n \left( \left(1 - e^{-t(i)/\alpha}\right) \left[1 + \theta e^{-t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha}\right] - u(i) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \left(1 - e^{-t(i)/\alpha} + \theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta e^{-2t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-3t(i)/\alpha}\right) \right. \\ &\quad \left. - u(i) \right]^2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Toplamın içindeki ifade aşağıdaki gibi düzelenerek,

$$\begin{aligned} 1 - u(i) &= e^{-t(i)/\alpha} - \theta e^{-t(i)/\alpha} + \theta e^{-2t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-3t(i)/\alpha} \\ 1 - u(i) &= e^{-t(i)/\alpha} \left(1 - \theta + \theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha}\right) \end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafının doğal logaritması alınırsa,

$$\log(1 - u(i)) = -\frac{t}{\alpha} + \log\left(1 - \theta + \theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha}\right)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla ifade,

$$Q^*(\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{t(i)}{\alpha} + \log \left( 1 - \theta + \theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha} \right) - \log(1 - u(i)) \right]^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin  $\alpha$  ve  $\theta$  parametrelerine göre kısmi türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesi sonucu,

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{t(i)}{\alpha} + \log \left( 1 - \theta + \theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha} \right) - \log(1 - u(i)) \right] \left[ \frac{t(i)}{\alpha^2} \left( 1 + \frac{\theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-t(i)/\alpha} + 2\theta^2 e^{-2t(i)/\alpha}}{1 - \theta + \theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha}} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \theta} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{t(i)}{\alpha} + \log \left( 1 - \theta + \theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha} \right) - \log(1 - u(i)) \right] \left[ \frac{-1 + e^{-t(i)/\alpha} - 2\theta e^{-t(i)/\alpha} + 2\theta e^{-2t(i)/\alpha}}{1 - \theta + \theta e^{-t(i)/\alpha} - \theta^2 e^{-t(i)/\alpha} + \theta^2 e^{-2t(i)/\alpha}} \right] = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler ile parametrelerin LS tahmin edicilerinin analitik çözümü elde edilememektedir. Bu durumda LS tahminlerinin elde edilmesinde nümerik yollara başvurulmalıdır. Sayısal olarak çözümün elde edilmesinde Matlab 2013 programı kullanılmış ve LS tahminlerini bir başlangıç değeri belirleme stratejisine dayalı olarak, eğri uydurma yöntemi ile bulduran “lsqcurvefit” komutundan faydalanılmıştır.

### 4.3 $H_2(t)$ Dağılımının Parametrelerinin Tahmini İçin Simülasyon Çalışması

Bölüm 3.3’deki simülasyon senaryosu gözönüne alınarak  $\alpha = \{0.5, 1, 4, 8, 16\}$  ve  $\theta = \{1, 0.7, 0.3, -0.3, -0.7, -1, -1.5, -2\}$  parametre değerleri için sonuçlar elde edilmiş, Çizelge 4.1- 4.8’de tabloleştirilmiştir.

Çizelge 4.1  $H_2(t)$  dağılımı için  $\theta = 1$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
<b>30</b>	0.9457	0.9813	0.8724	0.4638	0.4764	0.4369	-0.0543	-0.0187	-0.1276	-0.0362	-0.0236	-0.0631	0.1472	0.0491	0.1924	0.1206	0.0950	0.1321
<b>50</b>	0.9465	0.9838	0.9014	0.4655	0.4798	0.4427	-0.0535	-0.0162	-0.0986	-0.0345	-0.0202	-0.0573	0.1451	0.0429	0.1562	0.1065	0.0763	0.1134
<b>100</b>	0.9617	0.9895	0.9393	0.4749	0.4856	0.4583	-0.0383	-0.0105	-0.0607	-0.0251	-0.0144	-0.0417	0.1230	0.0256	0.1095	0.0836	0.0544	0.0866
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
<b>30</b>	0.9421	0.9804	0.8711	0.9215	0.9370	0.8699	-0.0579	-0.0196	-0.1289	-0.0785	-0.0630	-0.1301	0.1493	0.0502	0.1927	0.2481	0.1914	0.2667
<b>50</b>	0.9528	0.9873	0.9036	0.9374	0.9525	0.8869	-0.0472	-0.0127	-0.0964	-0.0626	-0.0475	-0.1131	0.1383	0.0336	0.1582	0.2056	0.1485	0.2264
<b>100</b>	0.9647	0.9905	0.9415	0.9564	0.9670	0.9206	-0.0353	-0.0095	-0.0585	-0.0436	-0.0330	-0.0794	0.1203	0.0238	0.1080	0.1622	0.1041	0.1655
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
<b>30</b>	0.9452	0.9835	0.8736	3.7295	3.7283	3.5138	-0.0548	-0.0165	-0.1264	-0.2705	-0.2717	-0.4862	0.1496	0.0445	0.1924	0.9645	0.7631	1.0574
<b>50</b>	0.9519	0.9877	0.9048	3.7501	3.7640	3.5509	-0.0481	-0.0123	-0.0952	-0.2499	-0.2360	-0.4491	0.1418	0.0327	0.1553	0.8354	0.6120	0.9091
<b>100</b>	0.9679	0.9922	0.9456	3.8403	3.8497	3.7089	-0.0321	-0.0078	-0.0544	-0.1597	-0.1503	-0.2911	0.1147	0.0182	0.1023	0.6473	0.4537	0.6570
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
<b>30</b>	0.9465	0.9834	0.8721	7.4343	7.4155	6.9735	-0.0535	-0.0166	-0.1279	-0.5657	-0.5845	-1.0265	0.1491	0.0437	0.1933	1.9454	1.5665	2.1289
<b>50</b>	0.9475	0.9865	0.9015	7.4695	7.5306	7.0745	-0.0525	-0.0135	-0.0985	-0.5305	-0.4694	-0.9255	0.1455	0.0365	0.1576	1.7237	1.2396	1.8392
<b>100</b>	0.9631	0.9922	0.9405	7.6317	7.6730	7.3503	-0.0369	-0.0078	-0.0595	-0.3683	-0.3270	-0.6497	0.1277	0.0195	0.1123	1.3526	0.8761	1.4051
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
<b>30</b>	0.9472	0.9845	0.8722	14.884	14.839	13.939	-0.0528	-0.0155	-0.1278	-1.1162	-1.1602	-2.0601	0.1468	0.0412	0.1938	3.8930	3.1211	4.2795
<b>50</b>	0.9496	0.9875	0.9020	14.983	15.068	14.158	-0.0504	-0.0125	-0.0980	-1.0165	-0.9316	-1.8416	0.1457	0.0346	0.1578	3.4277	2.4652	3.6994
<b>100</b>	0.9643	0.9929	0.9424	15.291	15.347	14.748	-0.0357	-0.0071	-0.0576	-0.7092	-0.6525	-1.2519	0.1276	0.0176	0.1116	2.6860	1.7402	2.7962

Çizelge 4.2  $H_2(t)$  dağılımı için  $\theta = 0.7$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
<b>30</b>	0.5887	0.2625	0.7085	0.4945	0.4105	0.6152	-0.1113	-0.4375	0.0085	-0.0055	-0.0895	0.1152	0.4192	0.6970	0.2672	0.1683	0.2070	0.2051
<b>50</b>	0.6110	0.3458	0.6998	0.4995	0.4180	0.5890	-0.0890	-0.3542	-0.0002	-0.0005	-0.0820	0.0890	0.3575	0.5795	0.2817	0.1603	0.1871	0.1719
<b>100</b>	0.6403	0.4880	0.7081	0.5044	0.4464	0.5719	-0.0597	-0.2120	0.0081	0.0044	-0.0536	0.0719	0.2736	0.3837	0.2112	0.1433	0.1501	0.1478
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
<b>30</b>	0.5826	0.2678	0.7033	0.9885	0.8310	1.2267	-0.1174	-0.4322	0.0033	-0.0115	-0.1690	0.2267	0.4293	0.7013	0.2824	0.3380	0.4152	0.4070
<b>50</b>	0.6068	0.3761	0.7014	0.9915	0.8559	1.1748	-0.0932	-0.3239	0.0014	-0.0085	-0.1441	0.1748	0.3542	0.5497	0.2498	0.3141	0.3623	0.3362
<b>100</b>	0.6358	0.4950	0.7045	0.9945	0.8919	1.1335	-0.0642	-0.2050	0.0045	-0.0055	-0.1081	0.1335	0.2605	0.3664	0.2125	0.2786	0.2974	0.2867
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
<b>30</b>	0.5815	0.2826	0.7028	3.9461	3.3453	4.8917	-0.1185	-0.4174	0.0028	-0.0539	-0.6547	0.8917	0.4295	0.6906	0.2825	1.3487	1.6280	1.6052
<b>50</b>	0.6040	0.3811	0.7002	3.9501	3.4242	4.6797	-0.0960	-0.3189	0.0002	-0.0499	-0.5758	0.6797	0.3557	0.5445	0.2499	1.2479	1.4278	1.3206
<b>100</b>	0.6334	0.4911	0.7021	3.9639	3.5455	4.5105	-0.0666	-0.2089	0.0021	-0.0361	-0.4545	0.5105	0.2611	0.3684	0.2131	1.1111	1.1834	1.1250
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
<b>30</b>	0.5827	0.2968	0.7060	7.8404	6.6472	9.7216	-0.1173	-0.4032	0.0060	-0.1596	-1.3528	1.7216	0.4226	0.6730	0.2812	2.6481	3.0926	3.0904
<b>50</b>	0.6056	0.3508	0.6975	7.9045	6.6169	9.2919	-0.0944	-0.3492	-0.0025	-0.0955	-1.3831	1.2919	0.3582	0.5733	0.2697	2.5203	2.8672	2.5591
<b>100</b>	0.6138	0.4661	0.6970	7.7954	6.9095	8.9021	-0.0862	-0.2339	-0.0030	-0.2046	-1.0905	0.9021	0.2813	0.3943	0.2078	2.2655	2.3782	2.1537
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
<b>30</b>	0.5651	0.3257	0.7059	15.590	13.129	19.385	-0.1349	-0.3743	0.0059	-0.4098	-2.8711	3.3849	0.4405	0.6001	0.2548	5.3955	6.0404	6.0877
<b>50</b>	0.6001	0.3849	0.7000	15.679	13.162	18.437	-0.0999	-0.3151	-0.0000	-0.3212	-2.8376	2.4367	0.3533	0.5013	0.2511	5.0339	5.4858	4.9133
<b>100</b>	0.6032	0.4679	0.6713	15.334	13.567	17.302	-0.0968	-0.2321	-0.0287	-0.6658	-2.4328	1.3022	0.2802	0.3608	0.2443	4.4391	4.7187	4.0685

Çizelge 4.3  $H_2(t)$  dağılımı için  $\theta = 0.3$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
30	0.0578	-0.0267	0.3069	0.4912	0.4842	0.6793	-0.2422	-0.3267	0.0069	-0.0088	-0.0158	0.1793	0.6145	0.6520	0.6122	0.1859	0.2086	0.3239
50	0.1416	0.0788	0.3838	0.5037	0.4942	0.6803	-0.1584	-0.2212	0.0838	0.0037	-0.0058	0.1803	0.5071	0.5379	0.5405	0.1673	0.1755	0.3018
100	0.2243	0.1768	0.4276	0.5129	0.4993	0.6578	-0.0757	-0.1232	0.1276	0.0129	-0.0007	0.1578	0.3713	0.3892	0.4318	0.1433	0.1386	0.2702
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
30	0.0399	-0.0392	0.3059	0.9736	0.9582	1.3615	-0.2601	-0.3392	0.0059	-0.0264	-0.0418	0.3615	0.6258	0.6560	0.6145	0.3604	0.4026	0.6449
50	0.1136	0.0436	0.3607	0.9889	0.9667	1.3338	-0.1864	-0.2564	0.0607	-0.0111	-0.0333	0.3338	0.5280	0.5660	0.5418	0.3218	0.3449	0.5925
100	0.2248	0.1631	0.3984	1.0240	0.9872	1.2906	-0.0752	-0.1369	0.0984	0.0240	-0.0128	0.2906	0.3614	0.3867	0.4425	0.2816	0.2703	0.5338
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
30	0.0635	-0.0200	0.3205	3.9087	3.8340	5.4368	-0.2365	-0.3200	0.0205	-0.0913	-0.1660	1.4368	0.6121	0.6445	0.6081	1.4078	1.5600	2.5206
50	0.1136	0.0406	0.3482	3.9224	3.8116	5.2725	-0.1864	-0.2594	0.0482	-0.0776	-0.1884	1.2725	0.5142	0.5515	0.5552	1.2459	1.3066	2.2861
100	0.2041	0.1446	0.4001	4.0365	3.8856	5.1358	-0.0959	-0.1554	0.1001	0.0365	-0.1144	1.1358	0.3795	0.4035	0.4396	1.0739	0.9832	2.0421
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
30	0.0459	-0.0425	0.3030	7.6989	7.5153	10.714	-0.2541	-0.3425	0.0030	-0.3011	-0.4847	2.7146	0.6126	0.6533	0.6108	2.7145	2.9814	4.9198
50	0.1211	0.0549	0.3749	7.7983	7.6267	10.667	-0.1789	-0.2451	0.0749	-0.2017	-0.3733	2.6676	0.5001	0.5367	0.5367	2.2648	2.4323	4.5025
100	0.1987	0.1406	0.3968	7.9220	7.6382	10.004	-0.1013	-0.1594	0.0968	-0.0780	-0.3618	2.0048	0.3612	0.3821	0.4109	1.9178	1.8214	3.6535
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
30	0.0236	-0.0449	0.2974	15.170	14.671	21.330	-0.2764	-0.3449	-0.0026	-0.8295	-1.3285	5.3308	0.6238	0.6223	0.6141	5.1518	5.3505	9.6021
50	0.0883	0.0246	0.3429	15.271	14.691	20.657	-0.2117	-0.2754	0.0429	-0.7288	-1.3091	4.6569	0.5255	0.5293	0.5376	4.4321	4.4560	8.5136
100	0.1903	0.1220	0.3460	15.644	14.953	19.017	-0.1097	-0.1780	0.0460	-0.3558	-1.0471	3.0177	0.3493	0.3652	0.4130	3.5450	3.3777	6.3049

Çizelge 4.4  $H_2(t)$  dağılımı için  $\theta = -0.3$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3857	-0.4626	-0.0898	0.5227	0.5001	0.7219	-0.0857	-0.1626	0.2102	0.0227	0.0001	0.2219	0.5406	0.5021	0.7558	0.1639	0.1555	0.3985
<b>50</b>	-0.3643	-0.4399	-0.1131	0.5236	0.5029	0.6830	-0.0643	-0.1399	0.1869	0.0236	0.0029	0.1830	0.4881	0.4726	0.7034	0.1449	0.1297	0.3528
<b>100</b>	-0.3743	-0.4327	-0.1284	0.5062	0.4947	0.6232	-0.0743	-0.1327	0.1716	0.0062	-0.0053	0.1232	0.3912	0.4078	0.5819	0.0912	0.0871	0.2730
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3692	-0.4522	-0.0838	1.0514	0.9972	1.4490	-0.0692	-0.1522	0.2162	0.0514	-0.0028	0.4490	0.5431	0.5022	0.7632	0.3301	0.2973	0.7975
<b>50</b>	-0.3760	-0.4583	-0.1077	1.0313	0.9877	1.3553	-0.0760	-0.1583	0.1923	0.0313	-0.0123	0.3553	0.4768	0.4667	0.6929	0.2547	0.2297	0.6893
<b>100</b>	-0.3744	-0.4599	-0.1844	1.0054	0.9731	1.1725	-0.0744	-0.1599	0.1156	0.0054	-0.0269	0.1725	0.3793	0.4074	0.5406	0.1673	0.1656	0.4026
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3950	-0.4743	-0.1045	4.1607	3.9432	5.7419	-0.0950	-0.1743	0.1955	0.1607	-0.0568	1.7419	0.5407	0.4973	0.7579	1.2503	1.1370	3.1412
<b>50</b>	-0.3760	-0.4662	-0.1102	4.0959	3.9085	5.2972	-0.0760	-0.1662	0.1898	0.0959	-0.0915	1.2972	0.4651	0.4580	0.6727	0.9611	0.8650	2.4999
<b>100</b>	-0.3638	-0.4561	-0.1746	4.0704	3.9225	4.7384	-0.0638	-0.1561	0.1254	0.0704	-0.0775	0.7384	0.3904	0.4182	0.5459	0.7299	0.6625	1.6321
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
<b>30</b>	-0.3903	-0.4712	-0.0858	8.3020	7.8461	11.520	-0.0903	-0.1712	0.2142	0.3020	-0.1539	3.5208	0.5352	0.4896	0.7564	2.4043	2.0907	6.1927
<b>50</b>	-0.3762	-0.4637	-0.0957	8.2188	7.8300	10.702	-0.0762	-0.1637	0.2043	0.2188	-0.1700	2.7022	0.4710	0.4591	0.6803	1.9333	1.6677	5.0469
<b>100</b>	-0.3708	-0.4687	-0.1835	8.0674	7.7571	9.2084	-0.0708	-0.1687	0.1165	0.0674	-0.2429	1.2084	0.3817	0.4097	0.5134	1.3851	1.2776	2.6931
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
<b>30</b>	-0.4016	-0.4821	-0.0990	16.411	15.466	22.632	-0.1016	-0.1821	0.2010	0.4116	-0.5332	6.6326	0.5298	0.4729	0.7484	4.4318	3.7838	11.751
<b>50</b>	-0.3873	-0.4783	-0.1262	16.258	15.441	20.566	-0.0873	-0.1783	0.1738	0.2580	-0.5587	4.5667	0.4645	0.4435	0.6551	3.5039	3.0192	8.6838
<b>100</b>	-0.3843	-0.4872	-0.2228	16.011	15.326	17.839	-0.0843	-0.1872	0.0772	0.0115	-0.6736	1.8399	0.3818	0.4009	0.4868	2.6477	2.4013	4.3672

Çizelge 4.5  $H_2(t)$  dağılımı için  $\theta = -0.7$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
30	-0.6782	-0.5423	-0.2479	0.5283	0.5349	0.7492	0.0218	0.1577	0.4521	0.0283	0.0349	0.2492	0.5060	0.4684	0.8870	0.1437	0.1485	0.4297
50	-0.6872	-0.5797	-0.3237	0.5169	0.5220	0.6766	0.0128	0.1203	0.3763	0.0169	0.0220	0.1766	0.4165	0.3965	0.7773	0.1003	0.1068	0.3454
100	-0.6702	-0.5856	-0.3815	0.5159	0.5213	0.6091	0.0298	0.1144	0.3185	0.0159	0.0213	0.1091	0.3569	0.3615	0.6428	0.0769	0.0801	0.2261
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
30	-0.7119	-0.5632	-0.2978	1.0426	1.0499	1.4489	-0.0119	0.1368	0.4022	0.0426	0.0499	0.4489	0.4919	0.4421	0.8569	0.2686	0.2769	0.8086
50	-0.6870	-0.5663	-0.3376	1.0438	1.0508	1.3555	0.0130	0.1337	0.3624	0.0438	0.0508	0.3555	0.4416	0.4151	0.7845	0.2230	0.2274	0.6881
100	-0.6888	-0.6007	-0.3948	1.0238	1.0321	1.1873	0.0112	0.0993	0.3052	0.0238	0.0321	0.1873	0.3458	0.3417	0.6186	0.1423	0.1501	0.3646
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
30	-0.7191	-0.5684	-0.2916	4.1666	4.1827	5.7954	-0.0191	0.1316	0.4084	0.1666	0.1827	1.7954	0.4838	0.4282	0.8533	1.0007	1.0143	3.1494
50	-0.6868	-0.5886	-0.3393	4.1160	4.1160	5.2327	0.0132	0.1114	0.3607	0.1160	0.1160	1.2327	0.4109	0.3796	0.7505	0.7405	0.7550	2.3432
100	-0.6745	-0.6182	-0.4595	4.1027	4.0923	4.5838	0.0255	0.0818	0.2405	0.1027	0.0923	0.5838	0.3393	0.3211	0.5740	0.5530	0.5740	1.1241
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
30	-0.7186	-0.5651	-0.2923	8.2494	8.2999	11.517	-0.0186	0.1349	0.4077	0.2494	0.2999	3.5175	0.4824	0.4311	0.8590	1.8998	1.9446	6.2238
50	-0.7120	-0.5953	-0.3506	8.1947	8.2325	10.489	-0.0120	0.1047	0.3494	0.1947	0.2325	2.4899	0.4148	0.3822	0.7512	1.4631	1.5139	4.8081
100	-0.6879	-0.6390	-0.4865	8.1373	8.0900	9.0285	0.0121	0.0610	0.2135	0.1373	0.0900	1.0285	0.3325	0.3092	0.5534	1.0499	1.0681	2.1515
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
30	-0.7237	-0.5918	-0.3126	16.461	16.341	22.501	-0.0237	0.1082	0.3874	0.4610	0.3417	6.5016	0.4768	0.3960	0.8368	3.6764	3.3795	11.553
50	-0.7007	-0.5991	-0.3804	16.491	16.422	20.441	-0.0007	0.1009	0.3196	0.4916	0.4222	4.4414	0.4255	0.3709	0.7337	3.0619	2.8651	8.4644
100	-0.7024	-0.7024	-0.4661	16.240	16.240	18.060	-0.0024	-0.0024	0.2339	0.2405	0.2405	2.0601	0.3334	0.3334	0.5452	2.0029	2.0029	3.8899



Çizelge 4.6  $H_2(t)$  dağılımı için  $\theta = -1$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
30	-0.9205	-0.9904	-0.5273	0.5214	0.5004	0.7168	0.0795	0.0096	0.4727	0.0214	0.0004	0.2168	0.4883	0.4753	0.9570	0.1207	0.0739	0.4067
50	-0.9136	-1.0369	-0.5127	0.5203	0.5003	0.6800	0.0864	-0.0369	0.4873	0.0203	0.0003	0.1800	0.4268	0.4396	0.8946	0.0964	0.0589	0.3491
100	-0.9406	-1.0662	-0.5515	0.5119	0.4982	0.6050	0.0594	-0.0662	0.4485	0.0119	-0.0018	0.1050	0.3180	0.3661	0.7479	0.0696	0.0425	0.1970
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
30	-0.8831	-1.0043	-0.4807	1.0575	1.0009	1.4682	0.1169	-0.0043	0.5193	0.0575	0.0009	0.4682	0.5150	0.4903	0.9868	0.2543	0.1477	0.8326
50	-0.9146	-1.0220	-0.5285	1.0358	0.9962	1.3316	0.0854	-0.0220	0.4715	0.0358	-0.0038	0.3316	0.4165	0.4241	0.8733	0.1775	0.1149	0.6515
100	-0.9439	-1.0606	-0.5778	1.0234	0.9957	1.1960	0.0561	-0.0606	0.4222	0.0234	-0.0043	0.1960	0.3225	0.3700	0.7289	0.1191	0.0811	0.3614
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
30	-0.8852	-0.9946	-0.4843	4.2198	3.9996	5.8439	0.1148	0.0054	0.5157	0.2198	-0.0004	1.8439	0.5116	0.4888	0.9828	0.9889	0.5888	3.2812
50	-0.9156	-1.0136	-0.5404	4.1389	3.9801	5.2399	0.0844	-0.0136	0.4596	0.1389	-0.0199	1.2399	0.4152	0.4198	0.8584	0.7016	0.4598	2.4048
100	-0.9457	-1.0499	-0.5967	4.0885	3.9795	4.7305	0.0543	-0.0499	0.4033	0.0885	-0.0205	0.7305	0.3201	0.3627	0.7096	0.4687	0.3234	1.3460
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
30	-0.9117	-0.9808	-0.5444	8.3642	7.9835	11.244	0.0883	0.0192	0.4556	0.3642	-0.0165	3.2443	0.4902	0.4689	0.9409	1.7874	1.1737	5.9216
50	-0.9314	-0.9919	-0.5170	8.2371	7.9968	10.310	0.0686	0.0081	0.4830	0.2371	-0.0032	2.3109	0.4002	0.4300	0.8506	1.3166	0.9292	4.1290
100	-0.9232	-1.0150	-0.6404	8.1965	7.9544	9.1692	0.0768	-0.0150	0.3596	0.1965	-0.0456	1.1692	0.3385	0.3494	0.6585	1.0327	0.6665	2.0471
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
30	-0.9205	-0.9781	-0.5429	16.638	15.933	22.399	0.0795	0.0219	0.4571	0.6384	-0.0663	6.3998	0.4759	0.4600	0.9375	3.4423	2.3106	11.674
50	-0.9282	-1.0002	-0.5207	16.490	15.936	20.580	0.0718	-0.0002	0.4793	0.4906	-0.0639	4.5801	0.4070	0.4207	0.8481	2.6756	1.7765	8.2154
100	-0.9247	-1.0143	-0.6445	16.378	15.900	18.304	0.0753	-0.0143	0.3555	0.3780	-0.0993	2.3046	0.3388	0.3480	0.6566	2.0094	1.3302	4.0429

Çizelge 4.7  $H_2(t)$  dağılımı için  $\theta = -1.5$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
30	-1.4599	-1.3005	-1.2144	0.5077	0.5105	0.6361	0.0401	0.1995	0.2856	0.0077	0.0105	0.1361	0.3554	0.5150	0.8481	0.0915	0.0850	0.3156
50	-1.4840	-1.3383	-1.1643	0.5019	0.5088	0.6104	0.0160	0.1617	0.3357	0.0019	0.0088	0.1104	0.2269	0.4676	0.8334	0.0607	0.0683	0.2584
100	-1.4992	-1.3683	-1.1430	0.5022	0.5103	0.5760	0.0008	0.1317	0.3570	0.0022	0.0103	0.0760	0.1408	0.4143	0.7707	0.0397	0.0490	0.1601
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
30	-1.4723	-1.3084	-1.2113	1.0078	1.0168	1.2848	0.0277	0.1916	0.2887	0.0078	0.0168	0.2848	0.3352	0.5238	0.8797	0.1724	0.1686	0.6640
50	-1.4858	-1.3322	-1.1340	1.0035	1.0191	1.2535	0.0142	0.1678	0.3660	0.0035	0.0191	0.2535	0.2414	0.4729	0.8639	0.1254	0.1343	0.5900
100	-1.4950	-1.3560	-1.1899	1.0003	1.0145	1.1249	0.0050	0.1440	0.3101	0.0003	0.0145	0.1249	0.1496	0.4109	0.7170	0.0842	0.0998	0.2815
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
30	-1.4594	-1.3007	-1.1908	4.0672	4.0770	5.1547	0.0406	0.1993	0.3092	0.0672	0.0770	1.1547	0.3662	0.5237	0.8767	0.7150	0.6630	2.6177
50	-1.4834	-1.3330	-1.1392	4.0157	4.0750	4.9143	0.0166	0.1670	0.3608	0.0157	0.0750	0.9143	0.2432	0.4734	0.8561	0.4859	0.5303	2.0571
100	-1.4850	-1.3682	-1.1841	4.0119	4.0622	4.5110	0.0150	0.1318	0.3159	0.0119	0.0622	0.5110	0.1465	0.4129	0.7222	0.3346	0.4078	1.0784
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
30	-1.4614	-1.2942	-1.2087	8.1146	8.1374	10.079	0.0386	0.2058	0.2913	0.1146	0.1374	2.0797	0.3609	0.5235	0.8485	1.3690	1.3094	4.6589
50	-1.4845	-1.3225	-1.1780	8.0195	8.1368	9.4813	0.0155	0.1775	0.3220	0.0195	0.1368	1.4813	0.2401	0.4742	0.7978	0.9543	1.0537	3.1804
100	-1.4855	-1.3532	-1.2499	8.0148	8.1131	8.7947	0.0145	0.1468	0.2501	0.0148	0.1131	0.7947	0.1463	0.4134	0.6351	0.6649	0.8124	1.7245
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
30	-1.4553	-1.2889	-1.2102	16.176	16.260	20.072	0.0447	0.2111	0.2898	0.1764	0.2603	4.0727	0.3452	0.5315	0.8427	2.6225	2.6078	9.1673
50	-1.4792	-1.3032	-1.2071	16.015	16.228	18.698	0.0208	0.1968	0.2929	0.0156	0.2283	2.6984	0.2422	0.4778	0.7635	1.9781	2.1241	6.2347
100	-1.4957	-1.3343	-1.2303	15.970	16.261	17.628	0.0043	0.1657	0.2697	-0.0291	0.2617	1.6280	0.1423	0.4161	0.6479	1.2668	1.5297	3.4042

Çizelge 4.8  $H_2(t)$  dağılımı için  $\theta = -2$  iken  $\alpha$ 'nın farklı değerleri ile hesaplanmış ortalama, yan ve RMSE değerleri

n	Mean $\hat{\theta}$			Mean $\hat{\alpha}$			Bias $\hat{\theta}$			Bias $\hat{\alpha}$			RMSE $\hat{\theta}$			RMSE $\hat{\alpha}$		
	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE	MLE	MOM	LSE
<b><math>\alpha = 0.5</math></b>																		
30	-1.9678	-1.7028	1.8468	0.5049	0.5053	0.5708	0.0322	0.2972	-0.1532	0.0049	0.0053	0.0708	0.0821	0.5023	0.4651	0.0531	0.0917	0.1931
50	-1.9742	-1.7673	-1.8603	0.5028	0.5038	0.5530	0.0258	0.2327	0.1397	0.0028	0.0038	0.0530	0.0588	0.4077	0.4388	0.0402	0.0680	0.1583
100	-1.9779	-1.8534	-1.9349	0.5016	0.5020	0.5234	0.0221	0.1466	0.0651	0.0016	0.0020	0.0234	0.0410	0.2610	0.1664	0.0282	0.0473	0.0564
<b><math>\alpha = 1</math></b>																		
30	-1.9654	-1.6896	-1.8530	1.0116	1.0180	1.1397	0.0346	0.3104	0.1470	0.0116	0.0180	0.1397	0.0799	0.5138	0.4379	0.1099	0.1761	0.3746
50	-1.9695	-1.7556	-1.8806	1.0027	1.0089	1.0871	0.0305	0.2444	0.1194	0.0027	0.0089	0.0871	0.0639	0.4239	0.3647	0.0834	0.1369	0.2411
100	-1.9736	-1.8581	-1.9410	1.0035	1.0059	1.0460	0.0264	0.1419	0.0590	0.0035	0.0059	0.0460	0.0467	0.2539	0.1527	0.0606	0.0991	0.1142
<b><math>\alpha = 4</math></b>																		
30	-1.9660	-1.6883	-1.8680	4.0806	4.0609	4.4771	0.0340	0.3117	0.1320	0.0806	0.0609	0.4771	0.0779	0.5192	0.3874	0.4380	0.6881	1.1778
50	-1.9694	-1.7568	-1.9140	4.0581	4.0204	4.2641	0.0306	0.2432	0.0860	0.0581	0.0204	0.2641	0.0633	0.4208	0.2261	0.3343	0.5362	0.6693
100	-1.9749	-1.8564	-1.9507	4.0650	4.0078	4.1518	0.0251	0.1436	0.0493	0.0650	0.0078	0.1518	0.0455	0.2562	0.1115	0.2491	0.3869	0.4083
<b><math>\alpha = 8</math></b>																		
30	-1.9691	-1.7028	1.8707	8.1450	8.0808	8.9287	0.0309	0.2972	-0.1293	0.1450	0.0808	0.9287	0.0762	0.5084	0.3774	0.8619	1.3786	2.2478
50	-1.9760	-1.7629	-1.8986	8.1008	8.0453	8.5740	0.0240	0.2371	0.1014	0.1008	0.0453	0.5740	0.0524	0.4128	0.2969	0.6601	1.0817	1.4361
100	-1.9793	-1.8397	-1.9439	8.1090	8.0349	8.3136	0.0207	0.1603	0.0561	0.1090	0.0349	0.3136	0.0402	0.2934	0.1190	0.4579	0.7145	0.7609
<b><math>\alpha = 16</math></b>																		
30	-1.7899	-1.8363	-1.9494	19.030	15.478	17.312	0.2101	0.1637	0.0506	3.0302	-0.5217	1.3123	0.2988	0.3777	0.1392	5.1324	2.7449	2.9617
50	-1.7871	-1.8998	-1.9617	19.206	15.424	16.804	0.2129	0.1002	0.0383	3.2069	-0.5758	0.8049	0.2680	0.2424	0.1105	4.7693	2.1461	2.1294
100	-1.7851	-1.9539	-1.9795	19.538	15.452	16.427	0.2149	0.0461	0.0205	3.5385	-0.5479	0.4276	0.2471	0.1371	0.0526	4.4530	1.4481	1.3241

Elde edilen çizelgeler yardımıyla, tahmin yöntemleri kendi içinde RMSE kriterine göre ayrı ayrı kıyaslanırsa,

$\hat{\theta}$  için:

- $\theta = 1$  iken tüm durumlarda ( $\alpha$  ve örneklem çapı değerlerinin tamamı için) MOM,
- $\theta = 0.7$  için tüm durumlarda LS,
- $\theta = 0.3$  iken  $n = 30$  için LS, diğer örneklem çapı değerleri için ML,
- $\theta = -0.3$  iken  $n = \{30,50\}$  olduğunda MOM,  $n = 100$  olduğunda ise ML,
- $\theta = -0.7$  için tüm durumlarda MOM,
- $\theta = -1$  iken  $n = 30$  için MOM, diğer örneklem çapları için ML,
- $\theta = -1.5$  için tüm durumlarda ML,
- $\theta = -2$  iken  $\alpha \leq 8$  için ML,  $\alpha = 16$  için LS yöntemi en etkin sonuçları

vermiştir.

$\hat{\alpha}$  için:

$\theta = \{1, -0.3, -1\}$  değerini aldığı tüm örneklem çapları için MOM tahmin yönteminin,  $\theta = \{0.3, 0.7\}$  olduğunda ise örneklem çapının 30 ve 50 olduğu durumlarda ML tahmin yönteminin RMSE bazında daha iyi olduğu görülmektedir.

## 5. UYGULAMA ÇALIŞMASI

Bu bölümde temel dağılımları üstel olarak belirlenen bu yeni dağılımların modelleme başarısı için literatürde kullanılan gerçek veri setleri kullanılmıştır. Böylelikle elde edilen dağılımların hangi tür veri setlerini modelleyebileceği ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bunun için karşılaştırılan dağılımların parametrelerinin tahmini için ML tahmin yöntemi kullanılmıştır. Daha önceki bölümlerde de belirtildiği gibi;  $H_1(t)$  ve  $H_2(t)$  dağılımlarının ML tahmin edicilerinin analitik ifadeleri yoktur ve bu dağılımların ML tahminleri sayısal çözüm yöntemleri yardımıyla elde edilmiştir.

Krishna ve Kumar (2013), Ristić ve Balakrishnan(2012), Nadarajah ve Okorie (2017) gibi birçok araştırmacı çalışmalarında üstel ve üstel temelli dağılımların modellemeleri için K-S istatistiği, AIC ve AICc bilgi kriterleri kullanmışlardır. Bu durum bu çalışmada da söz konusu olan bu kriterlerin kullanılabilir olmasına işaret etmektedir. Bu bölümde yer alan veri setlerinin dağılımlara uygunluğunu irdelemek ve bir klasik dağılım olan üstel dağılım ile karşılaştırmasını yapabilmek için bahsi geçen bilgi kriterlerinden faydalanılmıştır.

İlgilenilen veri setlerindeki hesaplamalar için Matlab 2013 programı kullanılmıştır.

### 5.1 Veri Seti 1 (Wheaton Nehri Su Taşkını Verileri)

Çizelge 5.1'de verilen veri seti, Kanada'da bulunan Wheaton Nehri'nin su taşkını verileri olup, 1958-1984 yılları için  $m^3/s$  cinsinden 72 su aşım değerini içermektedir. Bu veriler ilk kez Choulakian ve Stephens (2001) tarafından analiz edilmiştir (Merovci ve Puka 2014).

Çizelge 5.1 Wheaton Nehri su taşkını veri seti ( $m^3/s$ )

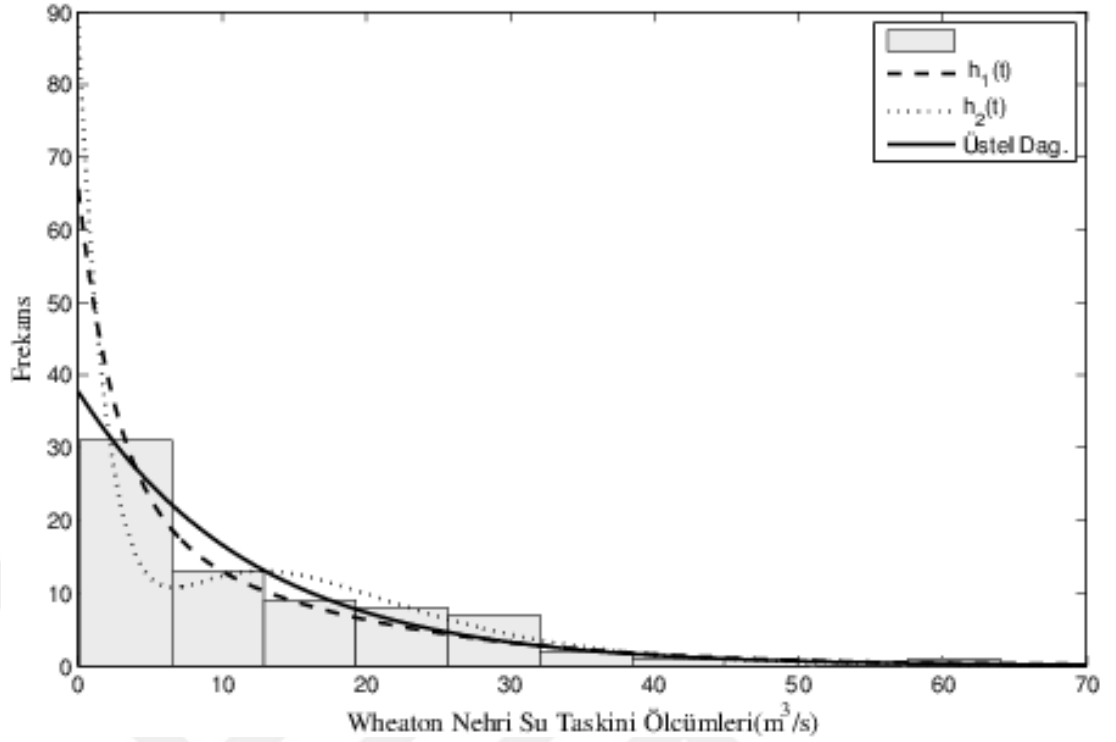
1.70	2.20	14.40	1.10	0.40	20.60	5.30	0.70	13.00	12.00
9.30	1.40	18.70	8.50	25.50	11.60	14.10	22.10	1.10	2.50
14.40	1.70	37.60	0.60	2.20	39.00	0.30	15.00	11.00	7.30
22.90	1.70	0.10	1.10	0.60	9.00	1.70	7.00	20.10	0.40
14.10	9.90	10.40	10.70	30.00	3.60	5.60	30.80	13.30	4.20
25.50	3.40	11.90	21.50	27.60	36.40	2.70	64.00	1.50	2.50
27.40	1.00	27.10	20.20	16.80	5.30	9.70	27.50	2.50	27.00
1.90	2.80								

Çizelge 5.2 Wheaton Nehri su taşkını veri setinin model uyarlaması

<i>Model</i>	<i>Parametre Tahmini</i>	<i>p Değeri</i>	<i>K-S İstatistiği</i>	<i>AIC</i>	<i>AICc</i>
$H_1(t)$	$\hat{\alpha} = 13.0532$ $\hat{\theta} = 0.5543$	0.3768	0.1052	504.3918	504.5657
$H_2(t)$	$\hat{\alpha} = 9.2190$ $\hat{\theta} = -1.5056$	0.7858	<u>0.0749</u>	<u>499.4530</u>	<u>499.6269</u>
<i>Üstel Dağılım</i>	$\hat{\alpha} = 12.2042$	0.0984	0.1422	506.2559	506.3131

Çizelge 5.2’de üstel,  $H_1(t)$  ve  $H_2(t)$  dağılımları ile kurulan modeller için K-S istatistiği, AIC ve AICc bilgi kriterleri incelendiğinde  $H_2(t)$ ’nin bu veri setini diğerlerinden daha iyi modelleyebildiği sonucuna varılır.

72 su taşkını verisinin verilen dağılımlar üzerindeki uyumluluğu karşılaştırıldığında, temel dağılımı üstel olan  $H_2(t)$  dağılımının diğerlerine oranla daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.



Şekil 5.1 Wheaton Nehri su taşkını veri setine ilişkin histogram

Şekil 5.1’de söz konusu dağılımların Çizelge 5.2’deki parametre tahmin değerleriyle elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonları ile veri setinin histogramı birlikte çizdirilmiştir. Buna göre;  $H_2(t)$  dağılımının Çizelge 5.1’de verilen veri setini daha iyi bir şekilde modelleyebildiğini söylemek mümkündür. Şekil 5.1, Çizelge 5.2’nin incelenmesiyle varılan sonucu desteklemektedir.

## 5.2 Veri Seti 2 (Uranyum Konsantrasyon Verileri)

Kuzeybatı Teksas kuyularındaki yeraltı sularında oluşan uranyum konsantrasyon miktarını gösteren veri seti Çizelge 5.3’de gösterilmiştir. 100 ölçümden oluşan veri seti, milyarda bir (nano) ölçü birimine sahiptir. (Anonymous. 2010. Web Sitesi: [https://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable\\_statistics/7e/students/datasets/svls/frames/svls15.html](https://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/svls/frames/svls15.html), Erişim Tarihi: 05.11.2019)

Çizelge 5.3 Uranyum konsantrasyonları veri seti (milyarda bir (nano)-ppb)

8.0	13.7	4.9	3.1	78.0	9.7	6.9	21.7	26.8	56.2	25.3	4.4	29.8
22.3	9.5	13.5	47.8	29.8	13.4	21.0	26.7	52.5	6.5	15.8	21.2	13.2
12.3	5.7	11.1	16.1	11.4	18.0	15.5	35.3	9.5	2.1	10.4	5.3	11.2
0.9	7.8	6.7	21.9	20.3	2.9	124.2	58.3	83.4	8.9	18.1	11.9	6.7
9.8	15.1	70.4	21.3	58.2	25.0	5.5	14.0	6.0	11.9	15.3	7.0	13.6
16.4	35.9	19.4	19.8	6.3	2.3	1.9	6.0	1.5	4.1	34.0	17.6	18.6
8.0	7.9	56.9	53.7	8.3	33.5	38.2	2.8	4.2	18.7	12.7	3.8	8.8
2.3	7.2	9.8	7.7	27.4	7.9	11.1	24.7					

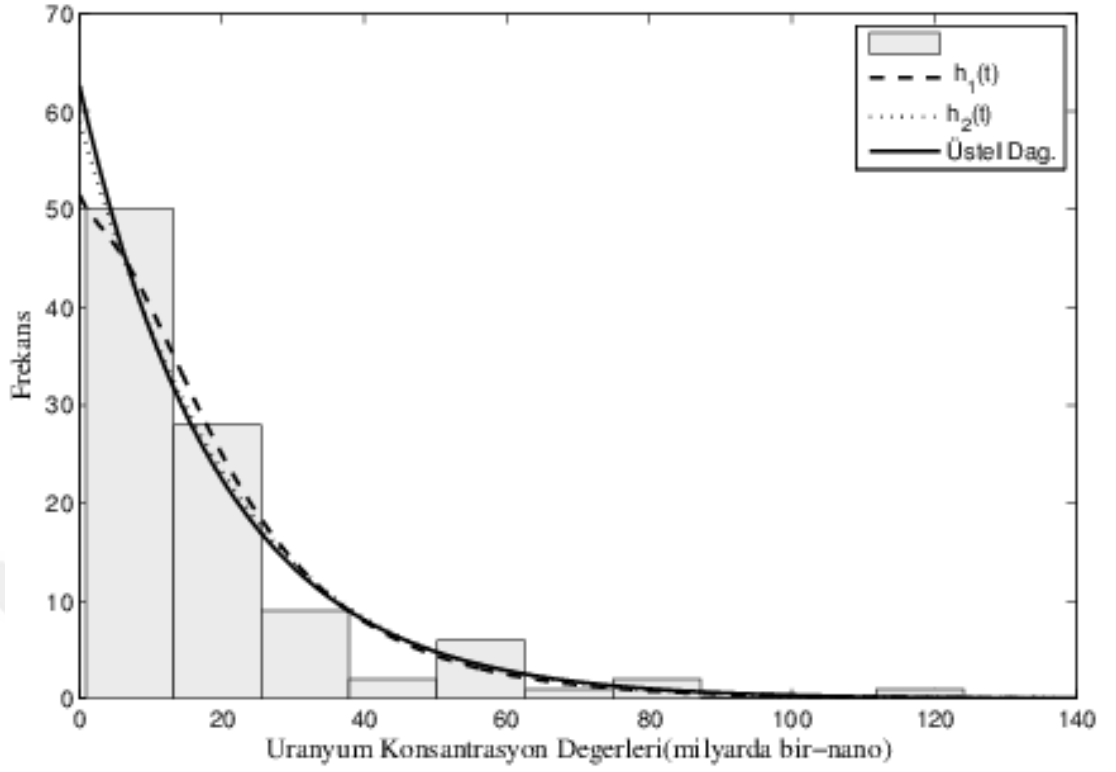
Çizelge 5.4 Uranyum konsantrasyonları veri seti için model uyarlaması

<i>Model</i>	<i>Parametre Tahmini</i>	<i>p Değeri</i>	<i>K-S İstatistiği</i>	<i>AIC</i>	<i>AICC</i>
$H_1(t)$	$\hat{\alpha} = 18.0546$ $\hat{\theta} = -0.3940$	0.6702	<u>0.0712</u>	<u>787.7484</u>	<u>787.8734</u>
$H_2(t)$	$\hat{\alpha} = 18.2075$ $\hat{\theta} = -0.1400$	0.4113	0.0875	789.8778	790.0028
<i>Üstel Dağılım</i>	$\hat{\alpha} = 19.4960$	0.2945	0.0966	788.101	788.1423

Yeraltı sularında oluşan uranyum konsantrasyonları veri setinin model uyarlaması için Çizelge 5.4'deki K-S istatistiği, AIC ve AICC bilgi kriterleri incelendiğinde,  $H_1(t)$ 'nin bu veri setini diğerlerinden daha iyi bir şekilde modelleyebildiği sonucuna varılır.

100 uranyum konsantrasyonu verisinin verilen dağılımlar üzerindeki uyumluluğu karşılaştırıldığında, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının diğerlerine oranla daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.





Şekil 5.2 Uranyum konsantrasyonları veri setine ilişkin histogram

Şekil 5.2’de söz konusu dağılımların Çizelge 5.4’deki parametre tahmin değerleriyle elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonları ile veri setinin histogramı birlikte çizdirilmiştir. Buna göre;  $H_1(t)$  dağılımının Çizelge 5.3’de verilen veri setini daha iyi bir şekilde modelleyebildiğini söylemek mümkündür. Şekil 5.2, Çizelge 5.4’ün incelenmesiyle varılan sonucu desteklemektedir.

### 5.3 Veri Seti 3 (Kalsiyum Konsantrasyon Verileri)

79 adet idrardaki kalsiyum konsantrasyonunu litre başına milimol cinsinden gösteren veri seti Çizelge 5.5’de verilmiştir (Andrews ve Herzberg 2012).

Çizelge 5.5 Kalsiyum konsantrasyonları veri seti (milimol/lt)

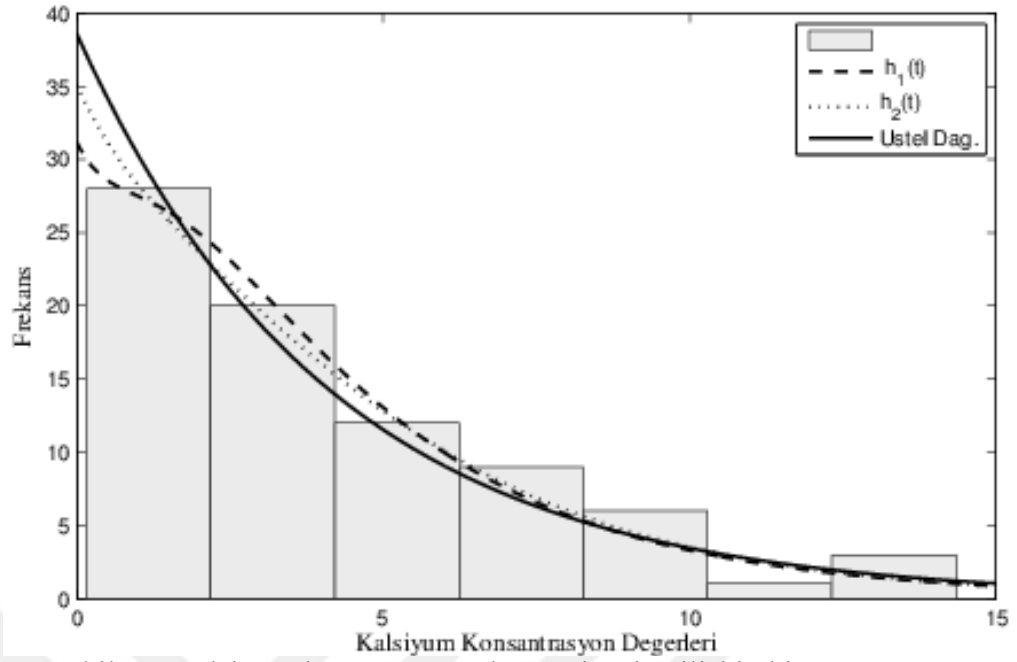
2.45	4.49	2.36	2.15	1.16	3.34	1.40	8.48	1.16	2.21	1.93
1.27	1.03	1.47	1.53	5.09	1.05	2.03	7.68	1.45	5.16	0.81
1.32	1.55	1.52	0.77	2.17	0.17	0.83	3.04	1.06	3.93	5.38
3.53	4.54	3.98	1.02	3.46	1.19	5.64	2.66	1.22	2.64	2.31
4.49	6.96	13.00	5.54	6.19	7.31	14.34	4.74	2.50	1.27	4.18
3.10	3.01	6.81	8.28	2.33	7.18	5.67	12.68	8.94	3.16	3.30
6.99	0.65	4.18	4.45	0.27	7.64	6.63	8.53	9.04	0.58	7.82
12.20	9.39									

Çizelge 5.6 Kalsiyum konsantrasyonları veri seti için model uyarlaması

<i>Model</i>	<i>Parametre Tahmini</i>	<i>p Değeri</i>	<i>K-S İstatistiği</i>	<i>AIC</i>	<i>AICC</i>
$H_1(t)$	$\hat{\alpha} = 3.8414$ $\hat{\theta} = -0.5188$	0.4444	<u>0.0952</u>	<u>383.0272</u>	<u>383.1851</u>
$H_2(t)$	$\hat{\alpha} = 3.4214$ $\hat{\theta} = -0.4606$	0.2628	0.1112	383.6561	383.8140
<i>Üstel Dağılım</i>	$\hat{\alpha} = 4.1390$	0.1276	0.1298	384.4313	384.4832

Çizelge 5.6’da üstel,  $H_1(t)$  ve  $H_2(t)$  dağılımları ile kurulan modeller için K-S istatistiği, AIC ve AICC bilgi kriterleri incelendiğinde  $H_1(t)$ ’nin bu veri setini diğerlerinden daha iyi modelleyebildiği sonucuna varılır.

79 kalsiyum konsantrasyonları veri setinin verilen dağılımlar üzerindeki uyumluluğu karşılaştırıldığında, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının diğerlerine oranla daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.



Şekil 5.3 Kalsiyum konsantrasyonları veri setine ilişkin histogram

Şekil 5.3’de söz konusu dağılımların Çizelge 5.6’daki parametre tahmin değerleriyle elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonları ile veri setinin histogramı birlikte çizdirilmiştir. Buna göre;  $H_1(t)$  dağılımının Çizelge 5.5’de verilen veri setini daha iyi bir şekilde modelleyebildiğini söylemek mümkündür. Şekil 5.3, Çizelge 5.6’da verilen model uyarlamasının incelenmesiyle varılan sonucu desteklemektedir.

#### 5.4 Veri Seti 4 (Bir Bankadaki Müşterilerin Bekleme Zamanı Verileri)

Bir bankadaki 60 müşterinin hizmet almadan önceki bekleme sürelerinden oluşan veri seti dakika olarak Çizelge 5.7’de verilmiştir (Al-Mutairi vd., 2013).

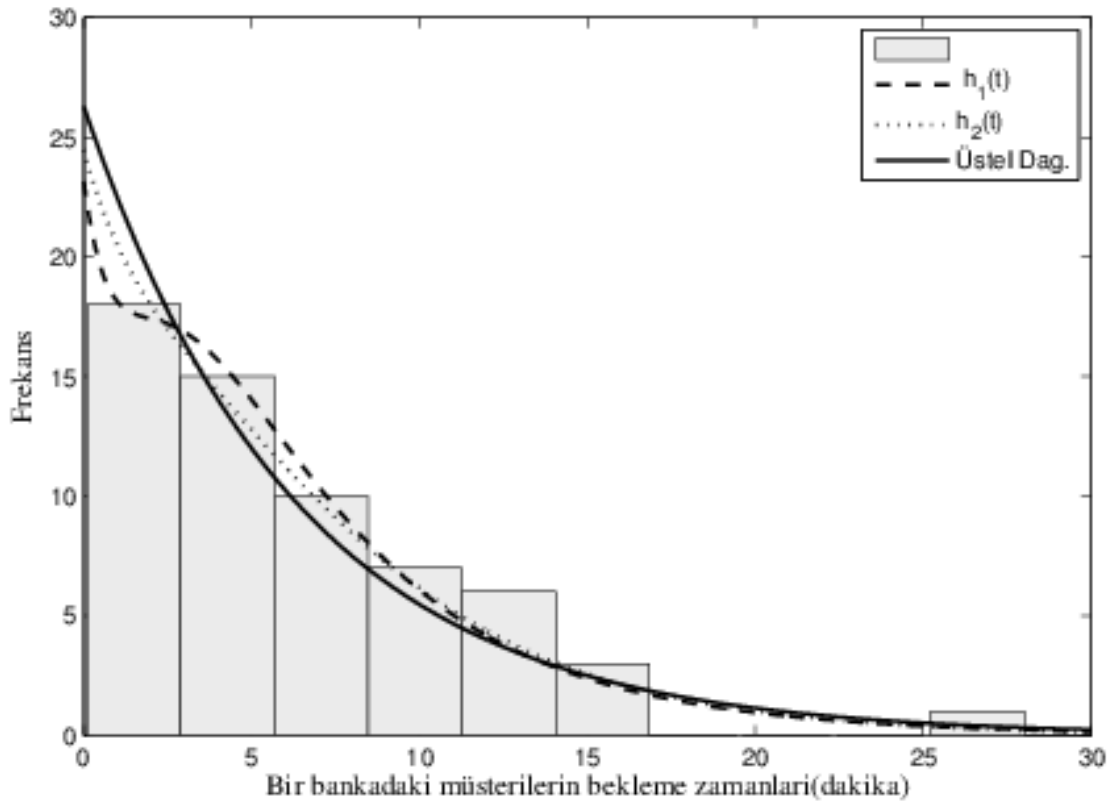
Çizelge 5.7 Bir bankadaki müşterin bekleme zamanı verileri (dakika)

0.1	0.2	0.3	0.7	0.9	1.1	1.2	1.8	1.9	2.0
2.2	2.3	2.3	2.3	2.5	2.6	2.7	2.7	2.9	3.1
3.1	3.2	3.4	3.4	3.5	3.9	4.0	4.2	4.5	4.7
5.3	5.6	5.6	6.2	6.3	6.6	6.8	7.3	7.5	7.7
7.7	8.0	8.0	8.5	8.5	8.7	9.5	10.7	10.9	11.0
12.1	12.3	12.8	12.9	13.2	13.7	14.5	16.0	16.5	28.0

Çizelge 5.8 Bir bankadaki müşterilerin bekleme zamanlarının veri seti için model uyarlaması

<i>Model</i>	<i>Parametre Tahmini</i>	<i>p Değeri</i>	<i>K-S İstatistiği</i>	<i>AIC</i>	<i>AICC</i>
$H_1(t)$	$\hat{\alpha} = 5.7888$ $\hat{\theta} = -0.7249$	0.7205	<u>0.0870</u>	<u>343.2584</u>	<u>343.4690</u>
$H_2(t)$	$\hat{\alpha} = 5.1390$ $\hat{\theta} = -0.5381$	0.4396	0.1093	343.9310	344.1415
<i>Üstel Dağılım</i>	$\hat{\alpha} = 6.3683$	0.2443	0.1295	344.1605	344.2295

Bir bankadaki 60 müşterinin bekleme zamanlarını içeren veri setinin model uyarlaması için K-S istatistiği, AIC ve AICc bilgi kriterleri incelendiğinde  $H_1(t)$ 'nin bu veri setini diğerlerinden daha iyi modelleyebildiği sonucuna varılır. Kısaca söz konusu verinin dağılımlar üzerindeki uyumluluğu karşılaştırıldığında, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının diğerlerine oranla daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.



Şekil 5.4 Bir bankadaki müşterilerin bekleme zamanlarını içeren veri setine ilişkin histogram

Şekil 5.4’de söz konusu dağılımların Çizelge 5.8’deki parametre tahmin değerleriyle elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonları ile veri setinin histogramı birlikte çizdirilmiştir. Buna göre;  $H_1(t)$  dağılımının Çizelge 5.7’de verilen veri setini daha iyi modelleyebildiğini söylemek mümkündür. Şekil 5.4, Çizelge 5.8’de verilen model uyarlamasının incelenmesiyle varılan sonucu desteklemektedir.

### 5.5 Veri Seti 5 (Mesane Kanseri Hastalarının İyileşme Süresi Verileri)

Çizelge 5.9’de verilen veri seti, 128 mesane kanseri hastasının ay bazında iyileşme sürelerini içermektedir (Merovci 2013).

Çizelge 5.9 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süresi verileri (ay)

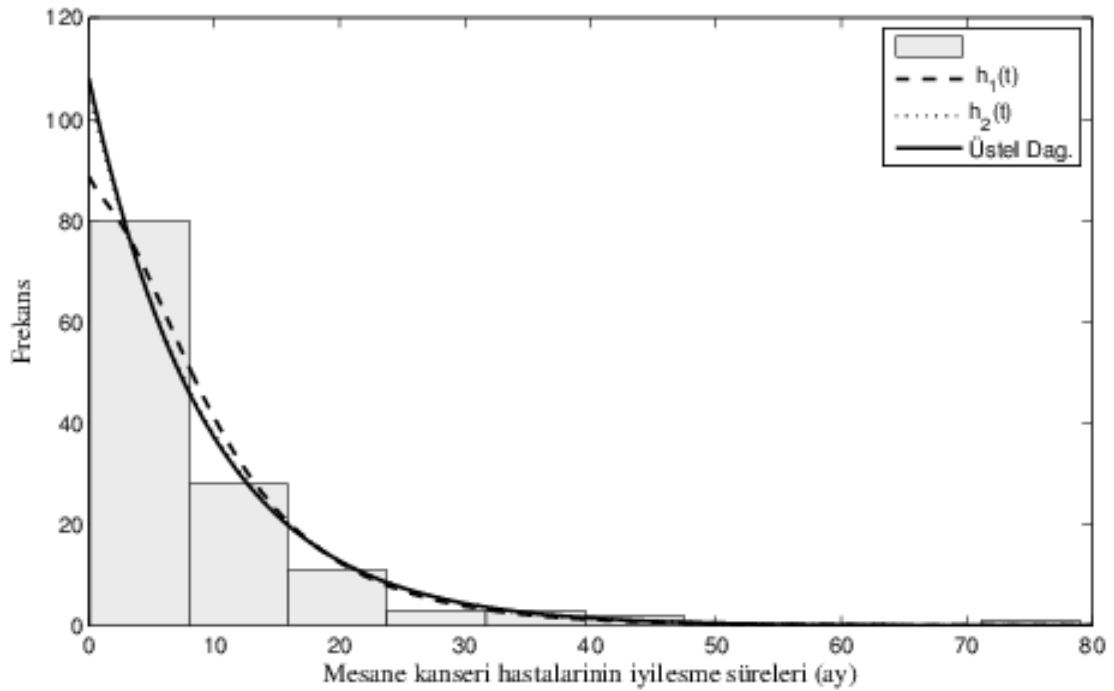
0.08	0.2	0.4	0.5	0.51	0.81	0.9	1.05	1.19	1.26
1.35	1.4	1.46	1.76	2.02	2.02	2.07	2.09	2.23	2.26
2.46	2.54	2.62	2.64	2.69	2.69	2.75	2.83	2.87	3.02
3.25	3.31	3.36	3.36	3.48	3.52	3.57	3.64	3.7	3.82
3.88	4.18	4.23	4.26	4.33	4.34	4.4	4.5	4.51	4.87
4.98	5.06	5.09	5.17	5.32	5.32	5.34	5.41	5.41	5.49
5.62	5.71	5.85	6.25	6.54	6.76	6.93	6.94	6.97	7.09
7.26	7.28	7.32	7.39	7.59	7.62	7.63	7.66	7.87	7.93
8.26	8.37	8.53	8.65	8.66	9.02	9.22	9.47	9.74	10.06
10.34	10.66	10.75	11.25	11.64	11.79	11.98	12.02	12.03	12.07
12.63	13.11	13.29	13.8	14.24	14.76	14.77	14.83	15.96	16.62
17.12	17.14	17.36	18.1	19.13	20.28	21.73	22.69	23.63	25.74
25.82	26.31	32.15	34.26	36.66	43.01	46.12	79.05		

Çizelge 5.10 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süresi veri setinin model uyarlaması

<i>Model</i>	<i>Parametre Tahmini</i>	<i>p Değeri</i>	<i>K-S İstatistiği</i>	<i>AIC</i>	<i>AICc</i>
$H_1(t)$	$\hat{\alpha} = 8.7477$ $\hat{\theta} = -0.3691$	0.6080	<u>0.0660</u>	<u>830.6244</u>	<u>830.7104</u>
$H_2(t)$	$\hat{\alpha} = 9.1260$ $\hat{\theta} = -0.0506$	0.3448	0.0815	832.6543	832.7503
<i>Üstel Dağılım</i>	$\hat{\alpha} = 9.3656$	0.3012	0.0846	830.6838	830.7155

Çizelge 5.10’da üstel,  $H_1(t)$  ve  $H_2(t)$  dağılımları ile kurulan modeller için K-S istatistiği, AIC ve AICc bilgi kriterleri incelendiğinde  $H_1(t)$ ’nin bu veri setini diğerlerinden daha iyi modelleyebildiği sonucuna varılır.

Mesane kanseri hastalarının iyileşme süresi verileri için verilen dağılımlar üzerindeki uyumluluğu karşılaştırıldığında, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının diğerlerine oranla daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.



Şekil 5.5 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süresi veri setine ilişkin histogram

Şekil 5.5’de söz konusu dağılımların Çizelge 5.10’daki parametre tahmin değerleriyle elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonları ile veri setinin histogramı birlikte çizdirilmiştir. Buna göre;  $H_1(t)$  dağılımının verilen veri setini daha iyi bir şekilde modelleyebildiğini söylemek mümkündür. Şekil 5.5, Çizelge 5.10’da verilen model uyarlamasının incelenmesiyle varılan sonucu desteklemektedir.

## 5.6 Veri Seti 6 (Hastaların Beyin Cerrahisi Servisinde Kalış Süresi Verileri)

Çizelge 5.11’de verilen veri seti, 68 erkek hastanın Türkiye'deki bir araştırma hastanesinin beyin cerrahisi servisindeki kalış sürelerini (gün) göstermektedir (Büyüm 2017).

Çizelge 5.11 Hastaların beyin cerrahisi servisinde kalış süreleri (gün)

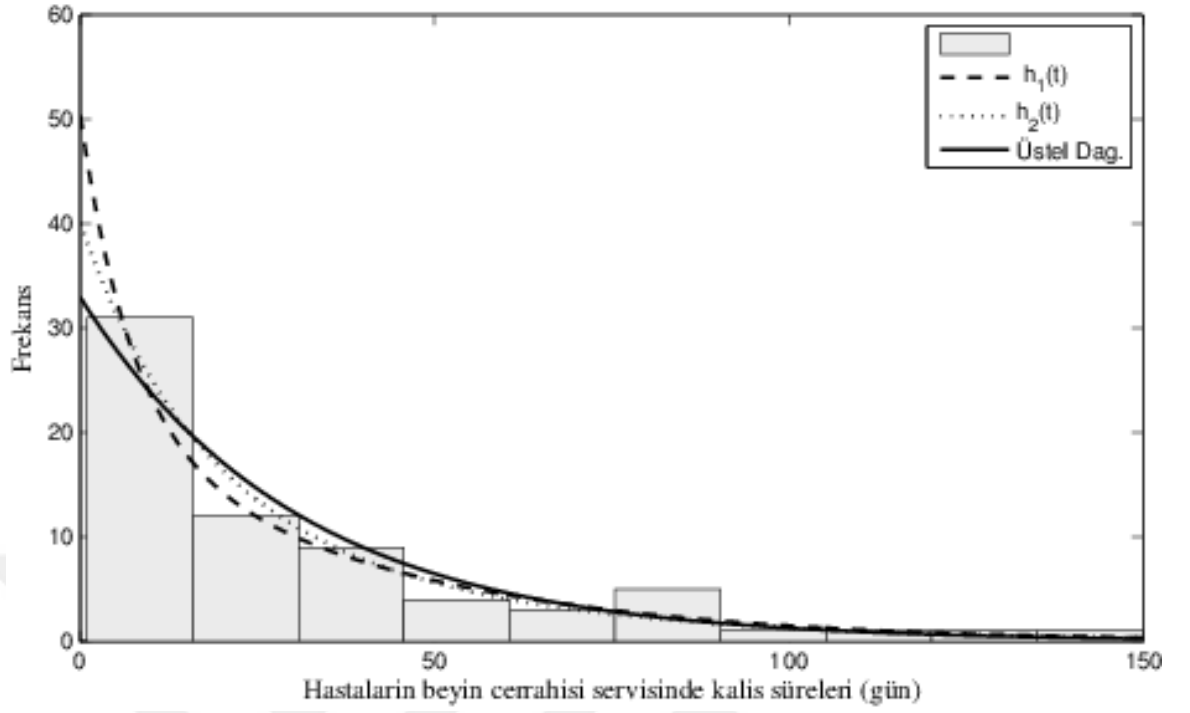
1	1	1	1	1	1	2	3	4	4
4	5	6	6	6	7	7	7	7	8
8	8	9	10	11	11	11	12	12	13
14	17	18	19	19	19	20	21	23	24
24	25	26	31	32	32	33	39	39	41
41	42	47	51	54	58	61	67	74	77
80	81	82	84	95	120	125	150		

Çizelge 5.12 Hastaların beyin cerrahisi servisindeki kalış süresi verilerinin model uyarlaması

Model	Parametre Tahmini	$p$ Değeri	K-S İstatistiği	AIC	AICC
$H_1(t)$	$\hat{\alpha} = 34.0876$ $\hat{\theta} = 0.4714$	0.9746	<u>0.0562</u>	<u>603.6866</u>	<u>603.8712</u>
$H_2(t)$	$\hat{\alpha} = 38.9959$ $\hat{\theta} = 0.3890$	0.9251	0.0642	604.4860	604.6706
Üstel Dağılım	$\hat{\alpha} = 30.7647$	0.4312	0.1035	603.9861	604.0467

Çizelge 5.12’de üstel,  $H_1(t)$  ve  $H_2(t)$  dağılımları ile kurulan modeller için K-S istatistiği, AIC ve AICC bilgi kriterleri incelendiğinde  $H_1(t)$ ’nin bu veri setini diğerlerinden daha iyi modelleyebildiği sonucuna varılır.

Hastaların beyin cerrahisi servisindeki kalış süresi verileri için verilen dağılımlar üzerindeki uyumluluğu karşılaştırıldığında, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının diğerlerine oranla daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.



Şekil 5.6 Hastaların beyin cerrahisi servisinde kalış sürelerini gösteren veri setine ilişkin histogram

Şekil 5.6’da söz konusu dağılımların Çizelge 5.12’deki parametre tahmin değerleriyle elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonları ile veri setinin histogramı birlikte çizdirilmiştir. Buna göre;  $H_1(t)$  dağılımının verilen veri setini daha iyi bir şekilde modelleyebildiğini söylemek mümkündür. Şekil 5.6, Çizelge 5.12’de verilen model uyarlamasının incelenmesiyle varılan sonucu desteklemektedir.

### 5.7 Veri Seti 7 (Böbrek Hastalarının Kateterizasyon Sonrası Enfeksiyona Kadar Geçen Süre Verileri)

Aşağıdaki veri seti ilk olarak McGilchrist ve Aisbett (1991) tarafından analiz edilmiştir. Veriler, portatif diyaliz ekipmanı kullanan 58 böbrek hastasının, kateterin yerleştirildiği andan enfeksiyon kapmalarına kadar geçen sürelerini gün olarak içermektedir. Veri seti Çizelge 5.13’de verilmiştir.



Çizelge 5.13 Böbrek hastalarının kateterizasyon sonrası enfeksiyona kadar geçen sürelerini içeren veri seti (gün)

8	16	23	22	28	447	318	30	12	24
245	7	9	511	30	53	196	15	154	7
333	141	96	38	536	17	185	177	292	114
15	152	562	402	13	66	39	12	40	201
132	156	34	30	2	25	130	26	27	58
43	152	30	190	119	8	78	63		

Söz konusu veri seti için daha önce bu çalışmada yapılan uygulama örneklerinden farklı bir yol izlenmiştir. Öncelikle literatürde bu veri seti kullanılarak, yeni önerilen dağılımların model uyarlamalarına ulaşılmıştır. Ardından bu model uyarlamalarının, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  ve  $H_2(t)$  dağılımları ile karşılaştırılması amaçlanmıştır.

Çizelge 5.14’de  $H_1(t)$  dağılımı ile karşılaştırılan dağılımlar, Mahdavi (2015) tarafından önerilen ağırlıklı gama-üstel (WGE) ve ağırlıklı genelleştirilmiş üstel-üstel (WGEE) dağılımlarıdır. Bu veri setinin, üstel dağılım ( $p = 0.0455$ ) ve  $H_2(t)$  dağılımı ( $p = 0.0191$ ) ile modellenemediği sonucuna varılmıştır.  $H_1(t)$  dağılımı ve modellenen diğer dağılımlar ile elde edilen sonuçlar Çizelge 5.14’de verilmiştir.

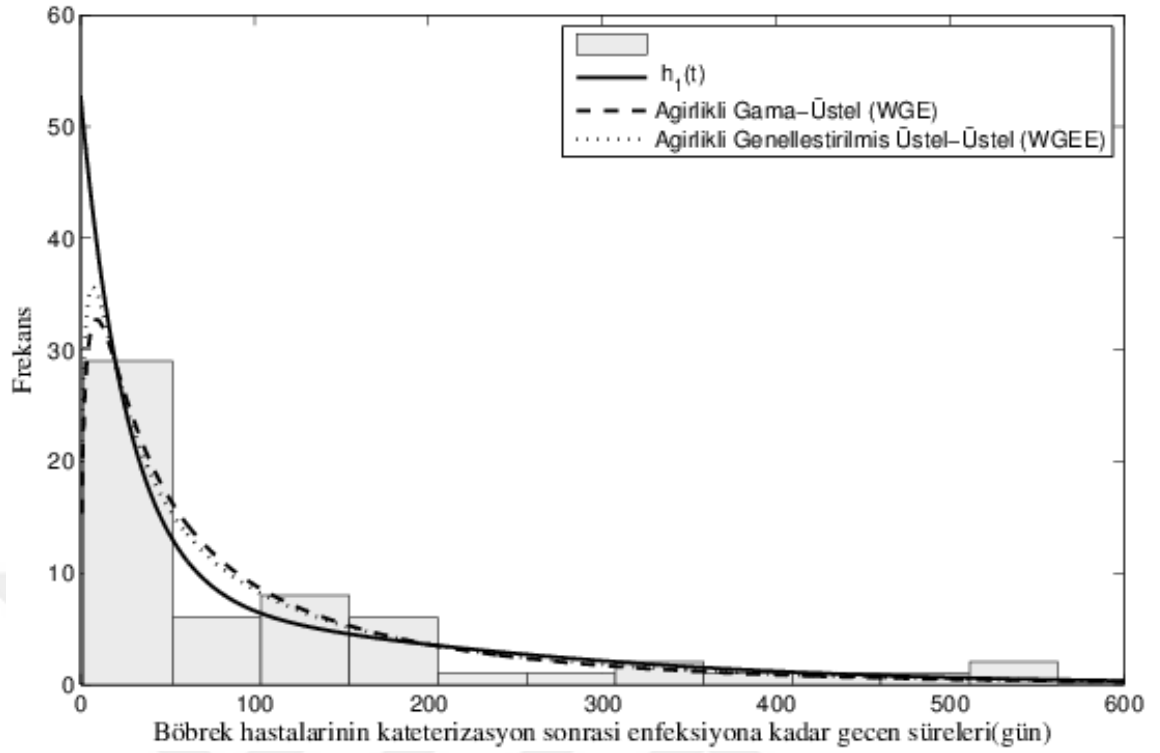
Söz konusu veri seti kullanılarak, WGE ve WGEE dağılımları için parametre tahmin ve AIC bilgi kriteri değerlerine Mahdavi (2015) çalışmasında Tablo 1’de yer vermiştir. Bu değerlere ek olarak, K-S istatistiği ve  $p$  değerleri hesaplanarak Çizelge 5.14’e eklenmiştir.

Çizelge 5.14 Böbrek hastalarının kateterizasyon sonrası enfeksiyona kadar geçen sürelerini içeren veri seti için model uyarlaması

<i>Model</i>	<i>Parametre Tahmini</i>	<i>p Değeri</i>	<i>K-S İstatistiği</i>	<i>AIC</i>	<i>AICC</i>
$H_1(t)$	$\hat{\alpha} = 145.854$ $\hat{\theta} = 0.8626$	0.6355	<u>0.0951</u>	<u>666.2486</u>	<u>666.4668</u>
<i>Ağırlıklı Gama-Üstel (WGE) Dağılımı</i>	$\hat{\alpha} = 19.0394$ $\hat{k} = 0.4376$ $\hat{\lambda} = 0.0052$	0.3030	0.1246	668.2001	668.6465
<i>Ağırlıklı Genelleştirilmiş Üstel-Üstel (WGEE) Dağılımı</i>	$\hat{\alpha} = 19.7047$ $\hat{\beta} = 0.3866$ $\hat{\lambda} = 0.0059$	0.4494	0.1102	667.5430	667.9874

Çizelge 5.14’de verilen WGE, WGEE ve  $H_1(t)$  ve dağılımları ile kurulan modeller için K-S istatistiği, AIC ve AICc bilgi kriterleri incelendiğinde  $H_1(t)$ ’nin bu veri setini diğerlerinden daha iyi modelleyebildiği sonucuna varılır.

Böbrek hastalarının kateterizasyon sonrası enfeksiyona kadar geçen sürelerini içeren veri seti için, literatürde önerilmiş ve bu veri seti ile modellenmiş yeni dağılımlara kıyasla, temel dağılımı üstel olan  $H_1(t)$  dağılımının daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.



Şekil 5.7 Böbrek hastalarının kateterizasyon sonrası enfeksiyona kadar geçen sürelerini içeren veri setine ilişkin histogram

Şekil 5.7’de söz konusu dağılımların Çizelge 5.14’deki parametre tahmin değerleriyle elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonları ile veri setinin histogramı birlikte çizdirilmiştir. Buna göre;  $H_1(t)$  dağılımının verilen veri setini daha iyi bir şekilde modelleyebildiğini söylemek mümkündür. Şekil 5.7, Çizelge 5.14’de verilen model uyarlamasının incelenmesiyle varılan sonucu desteklemektedir.

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında iki boyutlu AMH dağılımı kullanılarak tek boyutlu iki yeni dağılım elde edildi. Ayrıca temel dağılımları üstel olarak belirlenen bu dağılımların bazı veri setlerini modellemede daha elverişli olduğu görüldü. Böylelikle elde edilen dağılımların hangi tür veri setleriyle modellenebileceği ortaya konulmaya çalışıldı.

Çalışmada ilk olarak koşullu AMH dağılımının ikinci dereceden Taylor açılımı sonucu elde edilen ve temel dağılımları eşit olmayan durumu ele alındı. Fakat çeşitli incelemeler sonucunda, bahsedilen metotla elde edilen fonksiyonun, dağılım fonksiyonu özelliği taşımadığı sonucuna varıldı. Bu sonuç bundan sonra yapılacak çalışmalar için bir tartışma konusu olarak düşünülebilir. Aynı metotla elde edilen fonksiyonun temel dağılımları eşit alındığında ise bu fonksiyonun dağılım fonksiyonu özelliklerine sahip olduğu gösterildi ve çalışmanın bu doğrultuda devam etmesi sağlandı. Daha sonra tekrar AMH dağılımından faydalanılarak diğer bir yeni tek boyutlu dağılım elde edildi. Dağılımın  $\theta$  parametresi için herhangi bir sınırlandırmanın yapılmadığı durumda, bu parametrenin hangi değer aralığında olduğu araştırıldı. Yürütülen bu süreç sonucunda  $\theta$  parametresi için tanım aralığı  $-2 \leq \theta \leq 1$  olarak tespit edildi. Özetle bu dağılım için dönüşüm parametresinin tanım aralığının genişletilebilir olduğu sonucuna varıldı.

Yeni dağılımların olasılık yoğunluk ve bozulma oranı fonksiyonlarının görsel gösterimleri sayesinde parametrelerin, dağılımların şeklini nasıl etkilediklerine dair tespitlerde bulunuldu. Bunlara ek olarak bu iki dağılımın daha iyi anlaşılması ve yorumlanması bakımından karakteristikleri ele alındı, momentleri ve çarpıklık ile basıklık katsayısı değerleri incelendi. Bu incelemeler sonucu, dağılım tek boyutlu uzaya indirildiğinde dağılımın şeklinin, bir bağımlılık parametresi olan  $\theta$ 'nın pozitif veya negatif olmasından etkilendiği gözlemlendi.

Dağılımların parametrelerinin tahmini için, farklı örneklem büyüklükleri ve parametre değerleri kullanılarak bir simülasyon çalışması yapıldı. Simülasyon çalışmasında kullanılan tahmin yöntemlerinin etkinliği yönünden çeşitli değerlendirmeler yapıldı. Bu değerlendirmelerin sonucu, kullanılan tahmin yöntemlerinin her biri için çeşitli senaryolarda değişiklik gösterdiği şeklindedir.

Yeni dağılımların kullanım alanlarını tespit edebilmek için daha önce literatürde kullanılmış olan gerçek veri setlerinden faydalanıldı. Bu veri setlerinin dağılıma uygunluğu çeşitli kriterler yardımıyla irdelendi ve bir klasik dağılım olan üstel dağılım ile karşılaştırması sağlandı. Bu karşılaştırmalar sonucunda bu dağılımların, tıp, eczacılık, kimya, coğrafya gibi yaşam bilimleri ve sosyal bilimler alanlarındaki veri setlerini modellemede etkili olabileceği tespit edildi. Özetle, iki boyutlu AMH dağılımından yola çıkılarak tek boyutluya indirgenen bu iki dağılımın, birçok kullanım alanında klasik dağılımlara göre daha elverişli ve esnek olabileceği sonucuna varıldı.

Simülasyon ve veri modellemesi için yazılan bilgisayar kodlarının R vb. programlarda paket haline getirilmesi ile uygulamanın daha kullanılabilir olacağı düşünölmektedir. Ayrıca elde edilen bu yeni dağılımların, bahsedilen alanlar dışındaki çeşitli veri setleri ile uyumluluğu araştırılarak, daha fazla alan üzerinde kullanılabilir olup olmadığı incelenebilir. Bunlara ek olarak farklı iki boyutlu dağılım aileleri benzer yöntemler ile tek boyutluya indirgenerek yeni dağılımlar türetilebilir. Türetilen bu dağılımlar ise farklı kullanım alanlarındaki veri setlerini modellemede yol gösterici olabilirler.

## KAYNAKLAR

- Adamidis, K. and Loukas, K.S. 1998. A lifetime distribution with decreasing failure rate. *Statistics & Probability Letters*, 39(1); 35-42.
- Adhikari, A.P. 2014. Exponentiality test using a modified lilliefors test. *Scholarship & Creative Works*. University of Northern Colorado, College of Education and Behavioral Sciences Department of Applied Statistics and Research Methods, Colorado.
- Akaike, H. 1974. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723.
- Ali, M.M., Mikhail, N.N. and Haq, M.S. 1978. A class of bivariate distributions including the bivariate logistic. *Journal of Multivariate Analysis*, 8(3); 405-412.
- Al-Mutairi, D.K., Ghitany, M.E. ve Kundu, D. 2013. Inferences on stress-strength reliability from Lindley distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(8), 1443-1463.
- Andrews, D.F. and Herzberg, A.M. 2012. *Data: a collection of problems from many fields for the student and research worker*. Springer Science and Business Media, New York.
- Anonymous. Web.Sitesi <https://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable-statistics/7e/students/datasets/svls/frames/svls15.html>. Erişim Tarihi: 05.11.2019.
- Arslan, M.S.T. and şenoğlu, B. 2017. ift taraflı tip II sansürlenmiş örneklem için Jones ve Faddy' nin çarpık t dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin Tahmini. *Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B – Teorik Bilimler*, 5(1); 100-110.
- Aryal, G. R. and Tsokos, C. P. 2009. On the transmuted extreme value distribution with application . *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12); 1401-1407.
- Bain, L.J. and Engelhardt, M. 2000. *Introduction to probability and mathematical statistics*. Cengage Learning Inc, 645 p, California City.
- Balakrishnan, N. and Basu, A.P. 1995. *Exponential distribution-theory, methods and applications*. Taylor & Francis Group, CRC Press, 638 p, New York.
- Balakrishnan, N. and Lai, C.D. 2009. *Continuous bivariate distributions*. Springer, 684 p, New York.
- Barreto-Souza, W., Morais, A. L. and Cordeiro, G.M. 2010. The Weibull-geometric distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 81(5); 645–657.

- Bozdogan, H. 1987. Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, 52(3); 345-370.
- Büyüm B. 2017. İki bileşenli karma üstel dağılımlar için parametre tahmin yöntemleri. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Casella, G. and Berger, R.L. 2002. *Statistical inference*. Duxbury Thomson Learning, 660 p, California.
- Choulakian, V., Stephens, M. A. (2001). Goodness-of-fit tests for the generalized Pareto distribution, *Technometrics* 43(4), 478–484.
- Cohen, A. C. 1967. Estimation in mixtures of two normal distributions. *Technometrics*, 9(1); 15-28.
- Çelik, N., Şenoğlu, B. and Arslan, O. 2015. Estimation and testing in one-way ANOVA when the errors are skew-normal. *Revista Colombiana de Estadística*, 38(1); 75-91.
- Everitt, B. S. 1987. *Introduction to optimization methods and their application in statistics*. Chapman and Hall, 88 p, London.
- Everitt, B. S. and Hand, D.J. 1981. *Finite mixture distributions*. Chapman and Hall, 143 p, London.
- Farlie, D.J.G. 1960. The performance of some correlation coefficient for a general bivariate distribution. *Biometrika*, 47; 307-323.
- Fisher, N. I. 1997. Copulas. In: *Encyclopedia of statistical sciences*, Updated Volume 1, S. Kotz, C. B. Read, D. L. Banks (eds.), John Wiley and Sons, 159–164, New York.
- Gupta, A.K. and Chen, T. 2001. Goodness-of-fit tests for the skew-normal-distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 30 (4), 907–930.
- Günay, F. and Yılmaz, M. 2018. Different parameter estimation methods for exponential geometric distribution and it's applications in lifetime data analysis. *Biostatistics and Biometrics Open Access Journal*, 8(2);36-43.
- Hoeffding, W. 1940. Scale-invariant correlation theory. In: *The Collected Works of Wassily Hoeffding*. Fisher, N. I. ve Sen P.K., Springer-Verlag, 57–107, New York.
- Hoeffding, W. 1941. Scale-invariant correlation measures for discontinuous distributions. In: *The Collected Works of Wassily Hoeffding*. Fisher, N. I. ve Sen P.K., Springer-Verlag, 109-133, New York.
- Hogg, R.V., McKean, J. W. and Craig, A.T. 2005. *Introduction to mathematical statistics*, Pearson Prentice Hall, 704 p, New Jersey.

- Islam, Q. and Tiku, M.L. 2005. Multiple linear regression model under nonnormality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 33(10); 2443-2467.
- Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. 1994. *Continuous univariate distributions volume 1*. John Wiley and Sons, 784 p, New York.
- Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. 1995. *Continuous univariate distributions volume 2*. John Wiley and Sons, 752 p, New York.
- Krishna, H. and Kumar K. 2013. Reliability estimation in generalized inverted exponential distribution with progressively type II censored sample. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83(6); 1007-1019.
- Kuş, C. 2007. A new lifetime distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(9); 4497-4509.
- Lai, C.D. and Xie, M. 2000. A new family of positive quadrant dependent bivariate distributions. *Statistics and Probability Letters*, 46; 359-364.
- Lilliefors, H.W. 1969. On the kolmogorov-smirnov test for the exponential distribution with mean unknown. *Journal of the American Statistical Association*, 64(325); 387-389.
- Mahdavi, A. 2015. Two weighted distributions generated by exponential distribution. *Journal of Mathematical Extension*, 9(1); 1-12.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. 1997. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84, 641–652.
- McGilchrist, C.A. and Aisbett, C.W. 1991. Regression with frailty in survival Analysis. *Biometrics*, 47, 461–466.
- Merovci, F. 2013. Transmuted exponentiated exponential distribution. *Mathematical Sciences And Applications E-Notes*, 1(2); 112-122.
- Merovci, F. and Puka, L. 2014. Transmuted Pareto distribution. *ProbStat Forum*, 7; 1-11.
- Miller, L.H. 1956. Table of percentage points of Kolmogorov statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 51(273); 111-121.
- Nadarajah, S. and Okorie, I. E. 2017. On the Moments of the Alpha Power Transformed Generalized Exponential Distribution. *Ozone: Science & Engineering*, 40(4), 330–335.
- Nelsen, R.B. 1999. *An introduction to copulas*, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, 216 p, New York.
- Nelsen, R.B. 2006. *An introduction to copulas*. Springer, 269 p, New York.



- Pearson, K. 1894. Contributions to the mathematical theory of evolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 185(0); 71-110.
- Pollard, H.S. 1934. On the relative stability of the median and arithmetic mean, with particular reference to certain frequency distributions which can be dissected into normal distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 5(3); 227-262.
- Ristić, M. M. and Balakrishnan, N. 2012. The gamma-exponentiated exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82(8), 1191-1206.
- Shaw, W. T., and Buckley, I. R. 2007. The alchemy of probability distributions: Beyond gram-charlier and cornish-fisher expansions, and skew-normal or kurtotic-normal distributions. Submitted, Feb, 7; 64.
- Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6; 461-464.
- Schweizer, B. and Sklar, A. 1974. Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables. *Studia Mathematica*, 52(1); 43-52.
- Shaw, W. T., and Buckley, I. R. 2007. The alchemy of probability distributions: Beyond gram-charlier and cornish-fisher expansions, and skew-normal or kurtotic-normal distributions. Submitted, Feb, 7; 64.
- Shaw, W. T., and Buckley, I. R. 2009. The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. arXiv preprint arXiv:0901.0434.
- Sklar, A. 1959. Fonctions de repartition an dimensions at leurs marges. *Publ. Inst. Statis. Univ. Paris*, 8, 229-231.
- Snipes, M. ve Taylor C. D. 2014. Model selection and Akaike Information Criteria: An example from wine ratings and prices. *Wine Economics and Policy*, 3(1); 3-9.
- Sugiura, N. 1978. Further analysis of the data by Akaike's Information Criterion and the finite corrections. *Communications in Stat.-Theory and Methods A*, 7; 13-26.
- Topçu, Ç. 2013. Yarışan bağımlı risklerle sağkalım analizinde Archimedean kapula yaklaşımı. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Wilcox, R. 2005. Kolmogorov-smirnov test. *Encyclopedia of Biostatistics in 2005* by John Wiley & Sons, Ltd., 63; 421-422.
- Yılmaz, M. 2018. A new distribution family constructed by fractional polynomial rank transmutation. *Journal of the Iranian Statistical Society*, 17(2); 141-164.
- Yılmaz, M. ve Topçu, B. 2007. Konveks sıralı aile üzerinde iki boyutlu artan (azalan) bozulma oranı kavramları. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 7(1); 447-458.

## EKLER

- Ek 1  $H_1(t)$ 'nin Temel Dağılımları Eşit Olmayan Durumu için Çizdirilen Grafiğin Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**
- Ek 2  $H_1(t)$ 'nin Olasılık Yoğunluk ve Bozulma Oranı Fonksiyonlarının Grafikleri için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**
- Ek 3  $H_2(t)$ 'nin Olasılık Yoğunluk ve Bozulma Oranı Fonksiyonlarının Grafikleri için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**
- Ek 4  $H_1(t)$ 'nin Çarpıklık ve Basıklık Katsayısı Değerleri için Çizdirilen Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**
- Ek 5  $H_1(t)$ 'nin Çarpıklık ve Basıklık Katsayısı Değerleri için Çizdirilen Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**
- Ek 6  $H_1(t)$ 'nin Simülasyon Çalışması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**
- Ek 7  $H_2(t)$ 'nin Simülasyon Çalışması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**
- Ek 8 Model Uyarlaması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları (Wheaton Nehri Su Taşkını Veri Seti Örneği)**
- Ek 9 Veri Setlerinin Histogramları için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları (Wheaton Nehri Su Taşkını Veri Seti Örneği)**

**Ek 1  $H_1(t)$ 'nin Temel Dağılımları Eşit Olmayan Durumu için Çizdirilen Grafiğin  
Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**

```
clc
clear all
close all
syms x t beta eta lambda gamma theta
theta(1)=.05; beta(1)=5; eta(1)=.001; lambda(1)=.1; gamma(1)=1;
theta(2)=.1; beta(2)=5; eta(2)=.03; lambda(2)=1; gamma(2)=5;
theta(3)=-.05; beta(3)=9; eta(3)=5; lambda(3)=7; gamma(3)=11;
theta(4)=-.9; beta(4)=9; eta(4)=7; lambda(4)=9; gamma(4)=15;
for j=1:4
    F(j)=1-exp(-(x/beta(j))^eta(j));
    G(j)=1-exp(-(x/lambda(j))^gamma(j));
    H(j)=F(j)*(1+(theta(j)*(1-F(j))*(1-G(j)))+(theta(j)*(1-F(j))*(1-G(j)))^2);
    h(j)=diff(H(j),x);
    x=t;
    ff(j)=eval(h(j));
end
figure(1)
i=1;
for t=0:0.1:5
    yy(i)=eval(ff(1));
    zz(i)=eval(ff(2));
    tt(i)=eval(ff(3));
    kk(i)=eval(ff(4));
    i=i+1;
end
t=0:0.1:5;
plot(t,yy,'k')
hold on
plot(t,zz,'k--')
hold on
plot(t,tt,'k.')
hold on
plot(t,kk,'k*')
hold off
legend('\theta=0.05; \beta=5; \eta=0.001; \lambda=0.1; \gamma=1', '\theta=0.1; \beta=5; \eta=0.03; \lambda=1; \gamma=5', '\theta=-0.05; \beta=9; \eta=5; \lambda=7; \gamma=11', '\theta=-0.9; \beta=9; \eta=7; \lambda=9; \gamma=15' )
xlabel('t');ylabel('h^(t)')
```

## Ek 2 $H_1(t)$ 'nin Olasılık Yoğunluk ve Bozulma Oranı Fonksiyonlarının Grafikleri için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları

```
clc
clear all
close all
syms x t alpha
theta(1)=.9;alpha(1)=1;
theta(2)=.3;alpha(2)=1;
theta(3)=-.9;alpha(3)=1;
theta(4)=-.3;alpha(4)=1;
for j=1:4
    F(j)=1-exp(-(x/alpha(j)));
    H(j)=F(j)*(1+theta(j)*((1-F(j))^2)+(theta(j)*((1-F(j))^2))^2);
    h(j)=diff(H(j),x);
    x=t;
    ff(j)=eval(h(j));
end
figure(1)
i=1;
for t=0:0.1:3
    yy(i)=eval(ff(1));
    zz(i)=eval(ff(2));
    tt(i)=eval(ff(3));
    kk(i)=eval(ff(4));
    i=i+1;
end
t=0:0.1:3;
plot(t,yy,'k')
hold on
plot(t,zz,'k--')
hold on
plot(t,tt,'k.')
hold on
plot(t,kk,'k*')
hold on
plot(t,exp-pdf(t,1),'k', 'LineWidth',2.5)
hold off
legend('\theta=0.9, \alpha=1', '\theta=0.3, \alpha=1', '\theta=-0.9, \alpha=1', '\theta=-0.3, \alpha=1', 'Ustel Dag. (\alpha=1)')
xlabel('t');ylabel('h_1(t)')

%Bozulma Oranı Fonksiyonu
clc
clear all
close all
syms x t alpha
```

```

theta(1)=.9;alpha(1)=1;
theta(2)=.3;alpha(2)=1;
theta(3)=-.9;alpha(3)=1;
theta(4)=-.3;alpha(4)=1;
for j=1:4
    F(j)=1-exp(-(x/alpha(j)));
    H(j)=F(j)*(1+theta(j)*((1-F(j))^2)+(theta(j)*((1-F(j))^2))^2);
    h(j)=diff(H(j),x);
    x=t;
    hh(j)=eval(h(j)/(1-H(j)));
end
figure(1)
i=1;
for t=0:0.1:4
    yy(i)=eval(hh(1));
    zz(i)=eval(hh(2));
    tt(i)=eval(hh(3));
    kk(i)=eval(hh(4));
    i=i+1;
end
t=0:0.1:4;
plot(t,yy,'k')
hold on
plot(t,zz,'k--')
hold on
plot(t,tt,'k.')
hold on
plot(t,kk,'k*')
hold on
plot(t,(exp-pdf(t,1))./(1-expcdf(t,1)),'k', 'LineWidth',2.5)
hold off
legend('\theta=0.9, \alpha=1', '\theta=0.3, \alpha=1', '\theta=-0.9, \alpha=1', '\theta=-0.3, \alpha=1', 'Ustel Dag.(\alpha=1)') %%ETIKET
xlabel('t');ylabel('r_1(t)')

```

**Ek 3  $H_2(t)$ 'nin Olasılık Yoğunluk ve Bozulma Oranı Fonksiyonlarının Grafikleri için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları**

```
clc
clear all
close all
syms x t alpha
theta(1)=-1.9; alpha(1)=1;
theta(2)=-0.7; alpha(2)=1;
theta(3)=0.3; alpha(3)=1;
theta(4)=0.9; alpha(4)=1;
for j=1:4
    F(j)=1-exp(-(x/alpha(j)));
    H(j)=F(j)*(1+theta(j)*(1-F(j))+((theta(j))^2*((1-F(j))^2)));
    h(j)=diff(H(j),x);
    x=t;
    ff(j)=eval(h(j));
end
figure(1)
i=1;
for t=0:0.1:4
    yy(i)=eval(ff(1));
    zz(i)=eval(ff(2));
    tt(i)=eval(ff(3));
    kk(i)=eval(ff(4));
    i=i+1;
end

t=0:0.1:4;
plot(t,yy,'k')
hold on
plot(t,zz,'k--')
hold on
plot(t,tt,'k.')
hold on
plot(t,kk,'k*')
hold on
plot(t,(exp-pdf(t,1)), 'k', 'LineWidth',2.5)
hold off
legend('\theta=-1.9, \alpha=1', '\theta=-0.7, \alpha=1', '\theta=0.3, \alpha=1', '\theta=0.9, \alpha=1', 'Üstel Dag.(\alpha=1)') %%ETİKET
xlabel('t');ylabel('h_2(t)')
%Bozulma Oranı Fonksiyonu
clc
clear all
close all
syms x t alpha
```

```

theta(1)=-1.9; alpha(1)=1;
theta(2)=-0.7; alpha(2)=1;
theta(3)=0.3; alpha(3)=1;
theta(4)=0.9; alpha(4)=1;
for j=1:4
    F(j)=1-exp(-(x/alpha(j)));
    H(j)=F(j)*(1+theta(j)*(1-F(j))+((theta(j))^2*((1-F(j))^2)));
    h(j)=diff(H(j),x);
    x=t;
    hh(j)=eval(h(j)/(1-H(j)));
end
figure(1)
i=1;
for t=0:0.1:4
    yy(i)=eval(hh(1));
    zz(i)=eval(hh(2));
    tt(i)=eval(hh(3));
    kk(i)=eval(hh(4));
    i=i+1;
end
t=0:0.1:4;
plot(t,yy,'k')
hold on
plot(t,zz,'k--')
hold on
plot(t,tt,'k.')
hold on
plot(t,kk,'k*')
hold on
plot(t,(exp-pdf(t,1))./(1-expcdf(t,1)),'k', 'LineWidth',2.5)
hold off
legend('\theta=-1.9, \alpha=1', '\theta=-0.7, \alpha=1', '\theta=0.3, \alpha=1', '\theta=0.9, \alpha=1', 'Üstel Dag. (\alpha=1)') %%ETIKET
xlabel('t');ylabel('r_2(t)')

```

## Ek 4 $H_1(t)$ 'nin Çarpıklık ve Basıklık Katsayısı Değerleri için Çizdirilen Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları

```
%Çarpıklık
clc
clear all
close all
syms theta;
carpiklik=(2*(1-(theta/6)-(theta^2/20))^3-6*(1-(5*theta)/36-(9*(theta^2))/400)*(1-
(theta/6)-(theta^2/20))+6*(1-(theta/8)+(theta/27)-
(theta^2)/64+(theta^2)/125))/(1+(theta/18)+(49*(theta^2)/1800)-((theta^3)/60)-
((theta^4)/400))^(3/2);
figure(1)
i=1;
for theta=-2:0.01:1
    car(i)=eval(carpiklik);
    i=i+1;
end
theta=-2:0.01:1;
plot(theta,car,'k--')
hold on
x=-2:0.01:1;
y=2*(ones(length(x),1));
plot(x,y,'k')
xlabel('\theta');ylabel('Çarpıklık')
legend('H_1(t) Dağılımı','Üstel Dağılım')

%Basıklık
clear all
close all
syms theta;
pay=-3*(1-(theta/6)-(theta^2/20))^4+12*(1-(5*theta)/36-(9*(theta^2))/400)*((1-
(theta/6)-(theta^2/20))^2)-(24*(1-(35*theta/216)-189*(theta^2)/8000)*(1-(theta/6)-
(theta^2/20))-24*(1-(97*theta/1296)-(881*(theta^2)/160000)));
payda=(1+(theta/18)+(49*(theta^2)/1800)-((theta^3)/60)-(theta^4)/400)^2;
basiklik=pay/payda;
figure(1)
i=1;
for theta=-2:0.01:1
    bas(i)=eval(basiklik);
    i=i+1;
end
theta=-2:0.01:1;
plot(theta,bas,'k--')
hold on
x=-2:0.01:1;
y=9*(ones(length(x),1));
```



```
plot(x,y,'k')  
xlabel('\theta');ylabel('Basıklık')  
legend('H_1(t) Dağılımı','Üstel Dağılım')
```



**Ek 5  $H_2(t)$ 'nin Çarpıklık ve Basıklık Katsayısı Değerleri için Çizdirilen Matlab  
2013 Programında Yazılmış Program Kodları**

```

%Çarpıklık
clc
clear all
close all
syms alpha theta;
pay=2*(1-(theta/2)-(theta^2/6))^3-6*(1-(3*theta)/4-(5*(theta^2))/36)*(1-(theta/2)-
(theta^2/6))+6*(1-(7*theta/8)-19*(theta^2)/216);
payda=((1-(theta/2)-(7*(theta^2)/36)-(theta^3)/6-((theta^4)/36)))^(3/2);
carpiklik=pay/payda;
figure(1)
i=1;
for theta=-2:0.01:1
    car(i)=eval(carpiklik);
    i=i+1;
end

theta=-2:0.01:1;
plot(theta,car,'k--')
hold on
x=-2:0.01:1;
y=2*(ones(length(x),1));
plot(x,y,'k')
xlabel('\theta');ylabel('Çarpıklık')
legend('H_2(t) Dağılımı','Üstel Dağılım')

%Basıklık
clc
clear all
close all
syms alpha theta;
pay=-3*(1-(theta/2)-(theta^2/6))^4+12*(1-(3*theta)/4-(5*(theta^2))/36)*((1-(theta/2)-
(theta^2/6))^2)-24*(1-(7*theta/8)-19*(theta^2)/216)*(1-(theta/2)-(theta^2/6))+24*(1-
(15*theta/16)-(65*(theta^2)/1296));
payda=((1-(theta/2)-(7*(theta^2)/36)-(theta^3)/6-((theta^4)/36)))^(2);
basiklik=pay/payda;
figure(1)
i=1;
for theta=-2:0.01:1
    bas(i)=eval(basiklik);
    i=i+1;
end
theta=-2:0.01:1;
plot(theta,bas,'k--')
hold on

```

```
x=-2:0.01:1;  
y=9*(ones(length(x),1));  
plot(x,y,'k')  
xlabel('\theta');ylabel('Basıklık')  
legend('H_2(t) Dağılımı','Üstel Dağılım')
```



## Ek 6 $H_1(t)$ 'nin Simülasyon Çalışması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları

```

clc
close all
clear all
N=[3333 2000 1000]; n=[30 50 100]; par=[0.5 1];
dn=length(n);dN=length(N);dp=length(par);
ml=zeros(dn,max(N),dp);mom=zeros(dn,max(N),dp);ls=zeros(dn,max(N),dp);
mltahmini=zeros(dn,dp);yanthetaml=zeros(dn,1);yanalphaml=zeros(dn,1);rmsethetaml
=zeros(dn,1);rmsealphaml =zeros(dn,1);
momtahmini=zeros(dn,dp);yanthetamom=zeros(dn,1);yanalphamom=zeros(dn,1);rmset
hetamom =zeros(dn,1);rmsealphamom =zeros(dn,1);
lstahmini=zeros(dn,dp);yanthetals=zeros(dn,1);yanalphals=zeros(dn,1);rmsethetals
=zeros(dn,1);rmsealphals =zeros(dn,1);
k=0;
for nn=n
    k=k+1;
    for j=1:N(k)
        %% SAYI ÜRET
        t=zeros(nn,1);
        for i=1:nn
            a=par(1);b=par(2);
            uuu(i)=rand;
            G=@(x) (1-exp(-x/a))*(1+b*exp(-2*x/a)+(b^2)*exp(-4*x/a))-uuu(i);
            g=@(x,a,b) exppdf(x,a).*(1+b*((1-expcdf(x,a)).*(1-
            3*expcdf(x,a)))+(b^2)*((1-expcdf(x,a)).^3).*(1-5*expcdf(x,a))));
            t(i)=fsolve(G,[1.24]);
        end
        %% ML TAHMİN
        lb = [0 -1];
        ub = [inf 1];
        options = statset('GradObj', 'on', 'FunValCheck','off','TolX',1e-6,'TolFun',1e-
        6,'MaxIter',12000, 'MaxFunEvals',60000);
        start=[0.5 1];
        [paramEsts] =mle(t, 'pdf', g, 'start', start, 'lower',lb, 'upper',ub, 'options',
        options);
        ml(k,j,1)=paramEsts(1);
        ml(k,j,2)=paramEsts(2);
        %% LSQNONLIN MOM
        m(1)=mean(t);
        m(2)=sum(t.^2)/nn;
        D=@(r)momdenklemlfs(r,m);
        lb=[0 -1];
        ub=[inf 1];
        paramEsts=lsqnonlin(D,[0.5 1],lb,ub);
        mom(k,j,1)=paramEsts(1);
    end
end

```

```

mom(k,j,2)=paramEsts(2);
    %% LS TAHMIN
xdata=sort(t');
i=1:1:nn;
w=(i/(nn+1));
[paramEsts resnorm]=lsqcurvefit(@(p,xdata)((1-exp(-
xdata/p(1)))*(1+p(2)*exp(-2*xdata/p(1))+(p(2)^2)*exp(-
4*xdata/p(1))),[0.5 1],xdata,w,[0 -1],[inf 1]);

ls(k,j,1)=paramEsts(1);
ls(k,j,2)=paramEsts(2);
fprintf('%d - %d \n',nn,j)
end
%% HESAPLAMALAR
% ML
mltahmini(k,:)=mean(ml(k,1:N(k),:));% [mean(p2) mean(p1)]
yanthetaml(k,1)=mltahmini(k,2)-par(2); % mean(p2)-b
yanalphaml(k,1)=mltahmini(k,1)-par(1);% mean(p1)-a
rmsethetaml(k,1)=sqrt(yanthetaml(k,1)^2+var(ml(k,1:N(k),2)));%sqrt(sum((p2-
b).^2)/numel(p2))
rmsealphaml(k,1)=sqrt(yanalphaml(k,1)^2+var(ml(k,1:N(k),1)));%sqrt(sum((p1-
a).^2)/numel(p1))
% MOM
momtahmini(k,:)=mean(mom(k,1:N(k),:));% [mean(r2) mean(r1)]
yanthetamom(k,1)=momtahmini(k,2)-par(2);% mean(r2)-b
yanalphamom(k,1)=momtahmini(k,1)-par(1);% mean(r1)-a
rmsethetamom(k,1)=sqrt(yanthetamom(k,1)^2+var(mom(k,1:N(k),2)));%sqrt(sum
((r2-b).^2)/numel(r2))
rmsealphamom(k,1)=sqrt(yanalphamom(k,1)^2+var(mom(k,1:N(k),1)));%sqrt(su
m((r1-a).^2)/numel(r1))
% LS
lstahmini(k,:)=mean(ls(k,1:N(k),:));% [mean(s2) mean(s1)]
yanthetals(k,1)=lstahmini(k,2)-par(2);% mean(s2)-b
yanalphals(k,1)=lstahmini(k,1)-par(1);% mean(s1)-a
rmsethetals(k,1)=sqrt(yanthetals(k,1)^2+var(ls(k,1:N(k),2)));
%sqrt(sum((s2-b).^2)/numel(s2))
rmsealphals(k,1)=sqrt(yanalphals(k,1)^2+var(ls(k,1:N(k),1)));
%sqrt(sum((s1-a).^2)/numel(s1))
save sonuc.mat
end
save sonuc.mat
%% LATEX TABLES
FID = fopen('sonuctabloANANAN.tex', 'w');
fprintf(FID, "\\begin{ table } [ht] \n");
fprintf(FID, "\\scalebox{0.75} { \n");
fprintf(FID, "\\begin{ tabular } { llllllll } \n");
fprintf(FID, "\\hline \n");

```

```

fprintf(FID, "\\multicolumn{8}{c}{\\alpha= %d , \\theta= %d }\\|\\|\\| \\hline
\\n',par(1),par(2));
fprintf(FID,' & & \\multicolumn{3}{c}{\\hat{\\alpha}} &
\\multicolumn{3}{c}{\\hat{\\theta}} \\|\\|\\| \\hline \\n');
fprintf(FID,'n & Method & Mean & Bias & rMSE & Mean & Bias & rMSE \\|\\|\\| \\hline
\\n');
kk=0;
for nn=n
    kk=kk+1;
    fprintf(FID, "\\multirow{3}{*}{ %d }',n(kk));
    fprintf(FID,'& ML & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f \\|\\|\\| \\n',
    mltahmini(kk,1), yanalphaml(kk,1), rmsealphaml(kk,1), mltahmini(kk,2),
    yanthetaml(kk,1), rmsethetaml(kk,1));
    fprintf(FID,'& LS & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f \\|\\|\\| \\n',
    lstahmini(kk,1), yanalphals(kk,1), rmsealphals(kk,1),lstahmini(kk,2),
    yanthetals(kk,1), rmsethetals(kk,1));
    fprintf(FID,'& MOM & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f \\|\\|\\|
\\n', momtahmini(kk,1), yanalphamom(kk,1),
    rmsealphamom(kk,1),momtahmini(kk,2), yanthetamom(kk,1),
    rmsethetamom(kk,1));
    fprintf(FID, "\\hline \\n');
end
fprintf(FID, "\\end{tabular} } \\n');
fprintf(FID, "\\end{table} \\n');
fclose(FID);

function M=momdenklems(d,m)
    M(1)=d(1)*(1-(d(2)/6)-((d(2)^2)/20))-m(1);
    M(2)=2*(d(1)^2)*(1-((5*d(2))/36)-(9*(d(2)^2)/400))-m(2);
end

```

## Ek 7 $H_2(t)$ 'nin Simülasyon Çalışması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları

```
clc
close all
clear all
N=[3333 2000 1000]; n=[30 50 100]; par=[0.5 0.7];
dn=length(n);dN=length(N);dp=length(par);
% ml=zeros(dn,dN,dp);mom=zeros(dn,dN,dp);ls=zeros(dn,dN,dp);
ml=zeros(dn,max(N),dp);mom=zeros(dn,max(N),dp);ls=zeros(dn,max(N),dp);
mltahmini=zeros(dn,dp);yanthetaml=zeros(dn,1);yanalphaml=zeros(dn,1);rmsethetaml
=zeros(dn,1);rmsealphaml =zeros(dn,1);
momtahmini=zeros(dn,dp);yanthetamom=zeros(dn,1);yanalphamom=zeros(dn,1);rmset
hetamom =zeros(dn,1);rmsealphamom =zeros(dn,1);
lstahmini=zeros(dn,dp);yanthetals=zeros(dn,1);yanalphals=zeros(dn,1);rmsethetals
=zeros(dn,1);rmsealphals =zeros(dn,1);
k=0;
for nn=n
    k=k+1;
    for j=1:N(k)
        %% SAYI ÜRET
        t=zeros(nn,1);
        for i=1:nn
            a=par(1);b=par(2);
            uuu(i)=rand;
            G=@(x) (1-exp(-x/a))*(1+b*exp(-x/a)+(b^2)*exp(-2*x/a))-uuu(i);
            g=@(x,a,b) exppdf(x,a).*(1-b+(1-expcdf(x,a)).*(2*b-2*b^2+3*b^2*(1-
            expcdf(x,a))));
            t(i)=fsolve(G,[1.24]);
        end
        %% ML TAHMİN
        lb = [0 -2];
        ub = [inf 1];
        options = statset('GradObj', 'on', 'FunValCheck','off','TolX',1e-6,'TolFun',1e-
        6,'MaxIter',12000, 'MaxFunEvals',60000);
        start=[0.5 0.7];
        [paramEsts] =mle(t, 'pdf', g, 'start', start, 'lower',lb, 'upper',ub, 'options',
        options);
        ml(k,j,1)=paramEsts(1);
        ml(k,j,2)=paramEsts(2);
        %% LSQNONLIN MOM
        m(1)=mean(t);
        m(2)=sum(t.^2)/nn;
        D=@(r)momdenklemlfs(r,m);
        % paramEst=fsolve(D,[0,1])
        lb=[0 -2];
        ub=[inf 1];
```

```

paramEsts=lsqnonlin(D,[0.5 0.7],lb,ub);
mom(k,j,1)=paramEsts(1);
mom(k,j,2)=paramEsts(2);
%% LS TAHMİN
xdata=sort(t');
i=1:1:nn;
w=(i/(nn+1));
% [paramEsts resnorm]=lsqcurvefit(@ (s,xdata) ((1-exp(-
xdata/s(1))).*(1+s(2)*exp(-xdata/s(1))+(s(2)^2)*exp(-2*xdata/s(1)))),[5
.5],xdata,w,[0 -2],[30 1]);
[paramEsts resnorm]=lsqcurvefit(@ (p,xdata) ((xdata/p(1))-(log(1-
p(2)+p(2)*exp(-xdata/p(1))-(p(2)^2)*exp(-xdata/p(1))+(p(2)^2)*exp(-
2*xdata/p(1)))))),[0.5 0.7],xdata, -log(1-w),[0 -2],[inf 1]);

ls(k,j,1)=paramEsts(1);
ls(k,j,2)=paramEsts(2);
fprintf('%d - %d \n',nn,j)
end
%% HESAPLAMALAR
% ML
mltahmini(k,:)=mean(ml(k,1:N(k),:));% [mean(p2) mean(p1)]
yanthetaml(k,1)=mltahmini(k,2)-par(2); % mean(p2)-b
yanalphaml(k,1)=mltahmini(k,1)-par(1);% mean(p1)-a
rmsethetaml(k,1)=sqrt(yanthetaml(k,1)^2+var(ml(k,1:N(k),2)));% sqrt(sum((p2-
b).^2)/numel(p2))
rmsealphaml(k,1)=sqrt(yanalphaml(k,1)^2+var(ml(k,1:N(k),1)));% sqrt(sum((p1-
a).^2)/numel(p1))
% MOM
momtahmini(k,:)=mean(mom(k,1:N(k),:));% [mean(r2) mean(r1)]
yanthetamom(k,1)=momtahmini(k,2)-par(2);% mean(r2)-b
yanalphamom(k,1)=momtahmini(k,1)-par(1);% mean(r1)-a
rmsethetamom(k,1)=sqrt(yanthetamom(k,1)^2+var(mom(k,1:N(k),2)));% sqrt(sum
((r2-b).^2)/numel(r2))
rmsealphamom(k,1)=sqrt(yanalphamom(k,1)^2+var(mom(k,1:N(k),1)));% sqrt(su
m((r1-a).^2)/numel(r1))
% LS
lstahmini(k,:)=mean(ls(k,1:N(k),:));% [mean(s2) mean(s1)]
yanthetals(k,1)=lstahmini(k,2)-par(2);% mean(s2)-b
yanalphals(k,1)=lstahmini(k,1)-par(1);% mean(s1)-a
rmsethetals(k,1)=sqrt(yanthetals(k,1)^2+var(ls(k,1:N(k),2)));
% sqrt(sum((s2-b).^2)/numel(s2))
rmsealphals(k,1)=sqrt(yanalphals(k,1)^2+var(ls(k,1:N(k),1)));
% sqrt(sum((s1-a).^2)/numel(s1))
save sonuc.mat
end
save sonuc.mat
%% LATEX TABLES
% LATEX TABLE OPENED

```



```

FID = fopen('sonuctabloANANAN.tex', 'w');
fprintf(FID, "\\begin{table}[ht] \n");
fprintf(FID, "\\scalebox{0.75}{ \n");
fprintf(FID, "\\begin{tabular}{llllllll} \n");
fprintf(FID, "\\hline \n");
fprintf(FID, "\\multicolumn{8}{c}{\\$\\alpha= %d , \\theta= %d $}\\\\ \\hline
\n',par(1),par(2));
fprintf(FID, ' & & \\multicolumn{3}{c}{\\$\\hat{\\alpha}$} &
\\multicolumn{3}{c}{\\$\\hat{\\theta}$} & \\hline \n');
fprintf(FID, 'n & Method & Mean & Bias & rMSE & Mean & Bias & rMSE & \\hline
\n');
kk=0;
for nn=n
    kk=kk+1;
    fprintf(FID, "\\multirow{3}{*}{ %d } ',n(kk));
    fprintf(FID, '& ML & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & \\n',
mltahmini(kk,1), yanalphaml(kk,1), rmsealphaml(kk,1), mlthahmini(kk,2),
yanthetaml(kk,1), rmsethetaml(kk,1));
    fprintf(FID, '& LS & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & \\n',
lstahmini(kk,1), yanalphals(kk,1), rmsealphals(kk,1), lstahmini(kk,2),
yanthetals(kk,1), rmsethetals(kk,1));
    fprintf(FID, '& MOM & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & %8.4f & \\n',
momtahmini(kk,1), yanalphamom(kk,1),
rmsealphamom(kk,1), momtahmini(kk,2), yanthetamom(kk,1),
rmsethetamom(kk,1));
    fprintf(FID, "\\hline \n");
end
fprintf(FID, "\\end{tabular} } \n");
fprintf(FID, "\\end{table} \n");
fclose(FID);
function M=momdenklems(d,m)
    M(1)=d(1)*(1-(d(2)/2)-((d(2)^2)/6))-m(1);
    M(2)=2*(d(1)^2)*(1-((3*d(2))/4)-(5*(d(2)^2)/36))-m(2);
end

```

## Ek 8 Model Uyarlaması için Matlab 2013 Programında Yazılmış Program Kodları (Wheaton Nehri Su Taşkını Veri Seti Örneği)

### $H_1(t)$ dağılımı için;

```
clc
close all
clear all
t=[1.7 2.2 14.4 1.1 0.4 20.6 5.3 0.7 13.0 12.0 9.3 1.4 18.7 8.5 25.5 11.6 14.1 22.1 1.1 2.5
14.4 1.7 37.6 0.6 2.2 39.0 0.3 15.0 11.0 7.3 22.9 1.7 0.1 1.1 0.6 9.0 1.7 7.0 20.1 0.4 14.1
9.9 10.4 10.7 30.0 3.6 5.6 30.8 13.3 4.2 25.5 3.4 11.9 21.5 27.6 36.4 2.7 64.0 1.5 2.5
27.4 1.0 27.1 20.2 16.8 5.3 9.7 27.5 2.5 27.0 1.9 2.8];
G=@(x,a,b) expcdf(x,a).*(1+b*(1-expcdf(x,a)).^2+(b*(1-expcdf(x,a)).^2).^2)
g=@(x,a,b) exppdf(x,a).*(1+b*((1-expcdf(x,a)).*(1-3*expcdf(x,a)))+(b^2)*((1-
expcdf(x,a)).^3).*(1-5*expcdf(x,a))));
%% Parametre Tahmini
lb = [0 -1];
ub = [Inf 1];
options = statset('GradObj', 'on', 'FunValCheck','off','TolX',1e-6,'TolFun',1e-
6,'MaxIter',12000, 'MaxFunEvals',60000);
start=[1 -.9];
[paramEsts] =mle(t, 'pdf', g, 'start', start, 'lower',lb, 'upper',ub, 'options', options)
llikelihoodest=sum(log(g(t,paramEsts(1), paramEsts(2))))
t=sort(t);
p1=paramEsts(1);
p2=paramEsts(2);
%% Hesaplamalar
[h,p,ksstat,cv] = kstest(t,[t ((G(t,p1, p2)))]
AIC=-2*llikelihoodest+2*length(paramEsts)
AICC=AIC+2*((length(paramEsts)+1)*length(paramEsts))/(length(t)-
((length(paramEsts)+1)))
BIC=-2*llikelihoodest+log(length(t))*length(paramEsts)
```

### $H_2(t)$ dağılımı için;

```
close all
clear all
t=[1.7 2.2 14.4 1.1 0.4 20.6 5.3 0.7 13.0 12.0 9.3 1.4 18.7 8.5 25.5 11.6 14.1 22.1 1.1 2.5
14.4 1.7 37.6 0.6 2.2 39.0 0.3 15.0 11.0 7.3 22.9 1.7 0.1 1.1 0.6 9.0 1.7 7.0 20.1 0.4 14.1
9.9 10.4 10.7 30.0 3.6 5.6 30.8 13.3 4.2 25.5 3.4 11.9 21.5 27.6 36.4 2.7 64.0 1.5 2.5
27.4 1.0 27.1 20.2 16.8 5.3 9.7 27.5 2.5 27.0 1.9 2.8];
G=@(x,a,b) expcdf(x,a).*(1+b*(1-expcdf(x,a))+(b^2)*((1-expcdf(x,a)).^2));
g=@(x,a,b) exppdf(x,a).*(1-b+(1-expcdf(x,a)).*(2*b-2*b^2+3*b^2*(1-expcdf(x,a))));
%% Parametre Tahmini
lb = [0 -2];
```

```

ub = [Inf 1];
options = statset('GradObj', 'on', 'FunValCheck','off','TolX',1e-6,'TolFun',1e-
6,'MaxIter',12000, 'MaxFunEvals',60000);
start=[1 -.9];
[paramEsts] =mle(t, 'pdf', g, 'start', start, 'lower',lb, 'upper',ub, 'options', options)
llikelihoodest=sum(log(g(t,paramEsts(1), paramEsts(2))))
t=sort(t);
p1=paramEsts(1);
p2=paramEsts(2);
%% Hesaplamalar
[h,p,ksstat,cv] = kstest(t,[t ((G(t,p1, p2)))]
AIC=-2*llikelihoodest+2*length(paramEsts)
AICC=AIC+2*((length(paramEsts)+1)*length(paramEsts))/(length(t)-
((length(paramEsts)+1)))
BIC=-2*llikelihoodest+log(length(t))*length(paramEsts)

```

**Ek 9 Veri Setlerinin Histogramları için Matlab 2013 Programında Yazılmış  
Program Kodları (Wheaton Nehri Su Taşkını Veri Seti Örneği)**

```
clc
clear all
close all
x1=[1.7 2.2 14.4 1.1 0.4 20.6 5.3 0.7 13.0 12.0 9.3 1.4 18.7 8.5 25.5 11.6 14.1 22.1 1.1
2.5 14.4 1.7 37.6 0.6 2.2 39.0 0.3 15.0 11.0 7.3 22.9 1.7 0.1 1.1 0.6 9.0 1.7 7.0 20.1 0.4
14.1 9.9 10.4 10.7 30.0 3.6 5.6 30.8 13.3 4.2 25.5 3.4 11.9 21.5 27.6 36.4 2.7 64.0 1.5
2.5 27.4 1.0 27.1 20.2 16.8 5.3 9.7 27.5 2.5 27.0 1.9 2.8]';
n=length(x1);
figure(1)
[binheight,bincenter] = hist(x1,15);
h = bar(bincenter,binheight,'hist');
set(h,'facecolor',[.9 .9 .9]);
hold on
xd = get(gca,'XLim');
xgrid = linspace(xd(1),xd(2),1000);
binwidth = (bincenter(2)-bincenter(1));
n1=1;
MarkerEdgeColors=jet(n1); Markers=['o','x','+','*','s','d','v','^','<','>','p','h','.',...
'+','*','o','x','^','<','h','.', '>','p','s','d','v',...
'o','x','+','*','s','d','v','^','<','>','p','h','.'];
renk = char('b','r','g','k','m');
hold on
linestyles = cellstr(char('--',':','-','!','-','!','-','!','-','!','*','-','o'));
a1=13.0532;b1=0.5543;
h_1=(n*binwidth)* exppdf(xgrid,a1).*(1+b1*((1-expcdf(xgrid,a1)).*(1-
3*expcdf(xgrid,a1)))+(b1^2)*((1-expcdf(xgrid,a1)).^3).*(1-5*expcdf(xgrid,a1))));
plot(xgrid, h_1,linestyles{1},'Color',renk(4),'linewidth',1.5);hold on
a2=9.2190; b2=-1.5056;
h_2= (n*binwidth)* exppdf(xgrid,a2).*(1-b2+(1
expcdf(xgrid,a2)).*(2*b2-2*b2^2+3*b2^2*(1
expcdf(xgrid,a2))));
plot(xgrid, h_2,linestyles{2},'Color',renk(4),'linewidth',1.5);hold on
a3=12.2042;
ust=(n*binwidth)* exppdf(xgrid,a3);
plot(xgrid, ust,linestyles{3},'Color',renk(4),'linewidth',1.5);
hold on

xlabel('Su Taskini Olcumleri','FontName','Times','FontSize',12)
ylabel('Frekans','FontName','Times','FontSize',12)
legend(' ' h_1(t) ' , ' h_2(t) ' , 'Ustel Dag.')
```