

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**DUAL UZAYLARDA DUAL DÖNÜŞÜMLER
VE GEOMETRİK UYGULAMALARI**

Gölsüm YÜCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

17/11/2014

Gülsüm YÜCA

ÖZET

Doktora Tezi

DUAL UZAYLARDA DUAL DÖNÜŞÜMLER VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Gülsüm YÜCA

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde gerekli olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, dual dönüşümün tanımı yapılarak örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, dual uzaylarda dual dönüşümün tanımı yapılmış ve uygulamalara yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, dual dönüşüm yardımıyla küresel hareketlerin dönme eksenleri ve ani dönme eksenleri incelenmiştir, dönel yüzeylere örnekler verilmiştir.

Altıncı bölümde, uzay hareketlerinin vida eksenleri dual dönüşüm yardımıyla incelenmiştir ve son bölümde tezde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Kasım 2014, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dual dönüşüm, dönme eksenleri, ani dönme eksenleri, vida eksenleri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

DUAL TRANSFORMATIONS IN DUAL SPACES AND THEIR GEOMETRIC APPLICATIONS

Gülşim YÜCA

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains basic definitions and theorems needed in the thesis.

In the third chapter, dual transformation has been defined, exercises have been given.

In the fourth chapter, dual transformation in dual spaces has been defined and applications have been given.

In the fifth chapter, rotation axes and instantaneous rotation axes of spherical motions have been examined with the help of dual transformation, rotational surfaces has been drawn under this dual transformation.

In the sixth chapter, screw axes of space motions have been examined, the results obtained in the thesis have been discussed.

November 2014, 70 pages

Key Words: Dual transformation, rotation axis, instantaneous rotation axis, screw axis.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım ilk günden bu yana çalışmalarımın her aşamasında değerli bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek katkıda bulunan, çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışmalarım süresince benden bilgi ve yardımlarını esirgemeyen tik jürilerim Sayın Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN'a (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), Aksaray Üniversitesi'ndeki saygıdeğer çalışma arkadaşlarıma, doktora çalışmalarım ve akademik yaşamımda fedakarlıklar göstererek her zaman yanımda ve destekçim olan eşim Burak YÜCA'ya ve hayatımın her anında olduğu gibi çalışmalarım süresince de beni destekleyen ve yalnız bırakmayan babam Hüseyin BİÇER, annem Ayşe BİÇER ve kardeşim Yusuf BİÇER'e en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Gülsüm YÜCA

Ankara, Kasım 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1 Öklid Uzayı.....	2
2.2 Lorentz Uzayı.....	4
2.3 Öklid Uzayı ve Lorentz Uzayında Anti-Simetrik Matrislerin Gösterimi.....	22
2.4 Dual Uzay.....	23
3. DUAL DÖNÜŞÜM.....	30
4. DUAL UZAYLARDA DUAL DÖNÜŞÜM.....	42
4.1 Dual Uzaylarda Dual Dönüşüm.....	42
4.2 Dual Uzaylarda Dual Dönüşüm Uygulamaları.....	44
5. KÜRESEL HAREKETLER.....	48
5.1 Küresel Hareketlerin Dönme Ekseninin Dual Dönüşüm Yardımla İncelenmesi.....	48
5.2 Küresel Hareketlerin Ani Dönme Ekseninin Dual Dönüşüm Yardımla İncelenmesi.....	51
5.3 Dual Dönüşüm İle Elde Edilen Dönel Yüzeyler.....	55
6. UZAY HAREKETLERİ	62
6.1 Uzay Hareketlerinin Vida Ekseninin Dual Dönüşüm Yardımla İncelenmesi.....	62
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	66
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar cümlesi
\mathbb{R}^3	3 – boyutlu Reel uzay
\mathbb{E}^3	3 – boyutlu Öklid uzayı
\mathbb{E}_1^n	n – boyutlu Lorentz uzayı
\mathbb{E}_1^3	3 – boyutlu Lorentz uzayı
\mathbb{D}	Dual sayılar cümlesi
\mathbb{D}^3	3 – boyutlu Dual uzay
$SO(n)$	Özel ortogonal matrislerin cümlesi
$SO(3)$	3x3-lük özel ortogonal matrislerin cümlesi
$S\hat{O}(n)$	Özel dual ortogonal matrislerin cümlesi
$S\hat{O}(3)$	3x3-lük özel dual ortogonal matrislerin cümlesi
$SO(n-1, 1)$	Özel semi-ortogonal matrislerin cümlesi
$SO(2, 1)$	3x3-lük özel semi-ortogonal matrislerin cümlesi
$S\hat{O}(n-1, 1)$	Özel dual semi-ortogonal matrislerin cümlesi
$S\hat{O}(2, 1)$	3x3-lük özel dual semi-ortogonal matrislerin cümlesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Light koni	6
Şekil 2.2	Lorentz uzayında w nın ortogonal vektörleri u ve v	16
Şekil 5.1	Ani dönme hareketi	52
Şekil 5.2	Çemberin döndürülmesiyle elde edilen 1. dönел yüzey	57
Şekil 5.3	Çemberin döndürülmesiyle elde edilen 2. dönел yüzey	58
Şekil 5.4	Hiperbolün döndürülmesiyle elde edilen dönел yüzey	59
Şekil 5.5	Parabolün döndürülmesiyle elde edilen dönел yüzey	61

1. GİRİŞ

Öklid uzayı ve Lorentz-Minkowski uzayındaki ortogonal çatıların görünümelerini mukayese etmek amacıyla, kutu ve eğik kutu resimleri bir dual dönüşüm yardımıyla incelenmiştir (Dohi vd. 2010). Dual dönüşüm bu iki uzay arasında bir köprü görevi görmektedir. Bu çalışmada, dual dönüşüm ve uygulamaları dual uzaylara genişletilecektir.

$S\widehat{O}(n) \setminus \{a_{nn} = 0\}$ ve $S\widehat{O}(n-1, 1)$ dual uzayları arasında bir dual dönüşüm vardır. Bu dönüşüm, Öklid uzayı ve Lorentz-Minkowski uzayının dual uzayları arasındaki ilişkiyi görmemize yardımcı olacaktır. Bu bölümde önemli rol oynayacak 3x3-lük dual matrislerin iki kümesi aşağıdaki gibidir.

$$S\widehat{O}(n) = \{\widehat{A} \in GL(n, \mathbb{D}) \mid \widehat{A}^T \widehat{A} = \widehat{A} \widehat{A}^T = I_n, \det \widehat{A} = 1\},$$

$$S\widehat{O}(n-1, 1) = \{\widehat{A} \in GL(n, \mathbb{D}) \mid \widehat{A}^T G \widehat{A} = \widehat{A} G \widehat{A}^T = G, \det \widehat{A} = 1\},$$

$G = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right)$ ve I_{n-1} , (n-1)x(n-1)-lik birim matris ve \mathbb{D} dual sayılar halkasıdır. Burada, \mathbb{D} yerine \mathbb{R} -reel sayılar kullanılırsa,

$$S\widehat{O}(n) = SO(n),$$

$$S\widehat{O}(n-1, 1) = SO(n-1, 1)$$

olur.

Bu çalışmada, önce dual dönüşümün tanımı yapılarak örnekler verilecektir, sonra dual dönüşüm dual uzaylara genişletilecektir. Dual dönüşüm yardımıyla küresel hareketlerin dönme eksenini ve ani dönme eksenini üzerine, uzay hareketlerinin vida eksenini üzerine geometrik uygulamalar yapılacaktır. Ayrıca iki uzay arasındaki benzerlikleri incelemek amacıyla dual dönüşüm kullanılarak elde edilen dönelemler Mapple 13 yardımıyla çizdirilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

\mathbb{R}^n , bilinen vektör yapısı ile n boyutlu reel vektör uzayı olsun. \mathbb{R}^n uzayında bir vektörün bilinen koordinatları (x_1, \dots, x_n) olarak verilir. Burada, \mathbb{R}^n uzayında iken \mathbb{R}^n nin genel yapısı düşünülecektir ve bilinen anlamdaki "yatay" veya "dikey" ler ile ifade edilecektir.

2.1 Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 Boş olmayan bir A cümlesi ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

- (1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$
- (2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.2 \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzayı ele alalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. \mathbb{R}^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanırsa böylece \mathbb{R}^3 afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve \mathbb{E}^3 ile gösterilir.

Bir reel afin uzayda tanımlanabilen bütün kavramlar, bir Öklid uzayında anlam kazanırlar. Bununla beraber reel afin uzayı ile Öklid uzayı farklıdır. Çünkü, bir V reel vektör uzayı ile birleşen A afin uzaydaki metrik özellikler V de seçilecek olan iç çarpımdan doğarlar, bu nedenle Öklid uzayındaki özelliklerle diğer afin uzaylardakiler farklı olurlar (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.3 $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} d : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.4

$$\begin{aligned} d : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna \mathbb{E}^3 de Öklid metriği denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.5 $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^3$ için \widehat{xyz} açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{yx}, \vec{yz} \rangle}{\|\vec{yx}\| \|\vec{yz}\|}$$

den hesaplanan θ reel sayıdır (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.6 \mathbb{E}^3 de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dördlüsüne, \mathbb{R}^3 de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör üçlüsü, \mathbb{R}^3 için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine \mathbb{E}^3 ün bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu 2000).

Sonuç 2.1.1 \mathbb{E}^3 de $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ ve $E_3 = (0, 0, 1)$ noktaları standart bir dik çatı oluştururlar. $\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij}$ oldu gundan, $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$ sistemi \mathbb{R}^3 vektör uzayı için bir ortonormal bazdır. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dır (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.7 \mathbb{E}^3 deki $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu 2000).

2.2 Lorentz Uzayı

Tanım 2.2.1 Lorentz-Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^n = (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ metrik uzayıdır, \langle, \rangle metriği ile aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n \quad u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n).$$

\langle, \rangle metriği, Lorentz metriği olarak adlandırılır, indeksi 1 olan non-dejenere metrik olarak yorumlanır. \mathbb{E}_1^n Minkowski uzayı ve \langle, \rangle Minkowski metriği olarak da adlandırılır. Burada, \mathbb{R}^n uzayında iken Öklid metriği düşünülecek ve Öklid uzayını karşılayan \mathbb{E}^n ifadesi kullanılacaktır.

Aynı zamanda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\langle u, v \rangle = u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v = u^T G v.$$

Lorentz-Minkowski uzayının alt boyutları aşağıdaki gibi gösterilir:

$$n = 1, \mathbb{E}_1^1 = (\mathbb{R}, \langle, \rangle), \langle u, v \rangle = -uv.$$

$n = 2, \mathbb{E}_1^2 = (\mathbb{R}^2, \langle, \rangle), \langle u, v \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$. \mathbb{E}_1^2 , Lorentz-Minkowski düzlemi olarak ifade edilecektir (Lopez 2008).

Tanım 2.2.2 Bir $v \in \mathbb{E}_1^n$ vektörü,

- (i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise spacelike,
- (ii) $\langle v, v \rangle < 0$ ise timelike,
- (iii) $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise lightlike

olarak adlandırılır.

Burada, $v = 0$ olması durumunda $\langle v, v \rangle = 0$ sağlanmasına rağmen vektörün spacelike olduğu belirtilir(Lopez 2008).

Tanım 2.2.3 Verilen $u \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü için $\sqrt{|\langle u, u \rangle|}$ ifadesi u vektörünün normu olarak adlandırılır ve $|u|$ ile gösterilir. u vektörünün normu 1 ise bu vektöre birim denir.

Sonuç 2.2.1

i) u bir spacelike vektör ise $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$,

ii) timelike vektör ise $|u| = \sqrt{-\langle u, u \rangle}$ olur (Lopez 2008).

Tanım 2.2.4 \mathbb{E}_1^n uzayına ait light koni, \mathbb{E}_1^n uzayının tüm lightlike vektörlerinin kümesidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C = \{v \in \mathbb{E}_1^n; \langle v, v \rangle = 0\} - \{(0, \dots, 0)\}$$

C , alt boyutlarda aşağıdaki gibi hesaplanır:

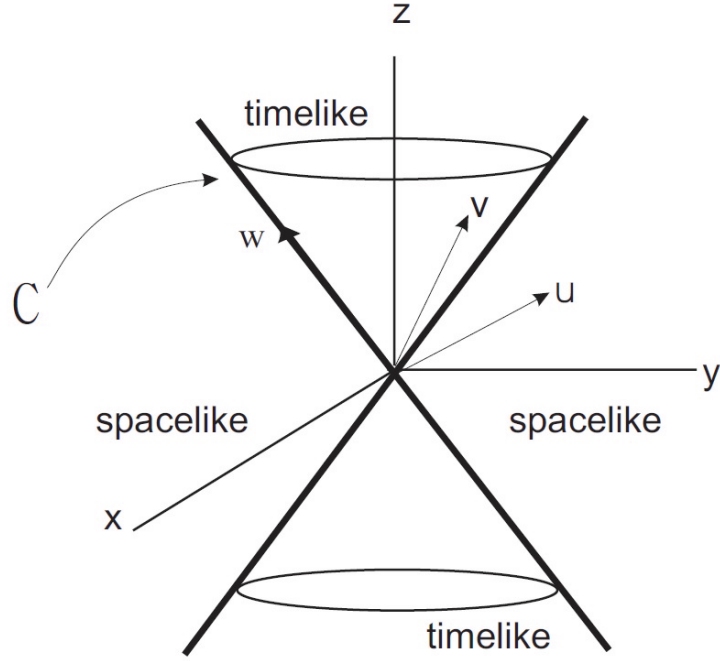
$n = 2$ için, $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2; x^2 - y^2 = 0\} - \{(0, 0)\}$ biri $x - y = 0$ diğeri $x + y = 0$ olan iki doğrudan oluşur.

$n = 3$ için, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$ tepe noktası orijin olan konidir.

Timelike vektörlerinin kümesi T ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde verilir:

$$T = \{v \in \mathbb{E}_1^n; \langle v, v \rangle < 0\}.$$

T timelike vektörlerin kümesinin iki bileşeni $\{v \in T; v_n > 0\}$ ve $\{v \in T; v_n < 0\}$, birbiri ile tam olarak bağlantılı değildir. Spacelike vektörler kümesi daima bağlantılıdır. C light konisi, $n = 2$ durumunda birbirleri ile bağlantılı dört bileşenden oluşurken $n > 2$ olması durumunda iki bileşenlidir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Light koni

Tanım 2.2.5 $U \subset \mathbb{E}_1^n$ bir alt vektör uzayı olsun. U daki indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise U spacelike, indeksi 1 olan non-dejenere ise timelike ve $U \neq \{0\}$ ise lightlike olarak adlandırılır.

Bir vektörün veya bir alt uzayın spacelike, timelike veya lightlike bir causal karaktere sahip olması beklenir.

Bir alt uzay ve bu alt uzayın causal karakteri ile ilgili örnekler aşağıda verilmiştir:

1. $(1, 0, 0)$ ve $(0, 1, 0)$ spacelike vektörlerdir. $(0, 0, 1)$ bir timelike vektördür. $(1, 0, 1)$ ve $(0, 1, 1)$ lightlike vektörlerdir.

2. $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ spacelike bir düzlemdir. $\langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$ ve $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ timelike düzlemlerdir. $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$ lightlike bir düzlemdir. Yukarıda verilen alt uzayların her birindeki metriğe ait matrisler, verilen bazlara göre sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\langle (1, 0, 0), (1, 1, 1) \rangle$ lightlike bir düzlemdir fakat $\{(1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ spacelike vektörlerdir. Metriğe ait matris aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $\langle (0, 1, 0), (0, 2, 1) \rangle$ timelike bir düzlemdir fakat $\{(0, 1, 0), (0, 2, 1)\}$ spacelike vektörlerdir. Metrik şu şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. $(0, 1, 0)$ spacelike bir vektördür, $(0, 1, 1)$ lightlike bir vektördür fakat $\langle (0, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$ timelike bir düzlemdir. Metrik aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Önerme 2.2.1 \mathbb{E}_1^n uzayının her alt uzayı spacelike, timelike veya lightlike olmak zorundadır.

İspat n boyut üzerinde tümevarım uygulansın. $n = 2$ ise non-trivial alt uzaylar 1 boyutludur ve sonuç aşikardır.

1. U non-dejenere ise U^\perp de non-dejenere olur. O halde U nun ortonormal bazı

ve U^\perp in ortonormal bazı, \mathbb{E}_1^n in ortonormal bazlarını verir. Dolayısıyla U daki -1 lerin sayısı, 1 veya 1 den az olur. Böylece U daki metriğe ait matrisler aşağıdaki gibidir, U timelike veya pozitif tanımlı olur.

$$\begin{pmatrix} +1 & \dots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & +1 & \vdots & \\ & & \dots & -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 & \dots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & +1 & \vdots & \\ & & \dots & +1 & \end{pmatrix}.$$

2. U dejenere ise U nun bazında bulunan sayılar: $+1$, -1 , ve 0 dır.

$W \subset U$ alt uzayı, bazlarında $+1$ ve -1 sayıları bulunan non-dejenere bir alt uzayıdır. Dolayısıyla W , Lorentzian veya pozitif tanımlıdır. Bu, U daki metriğe ait matrislerin aşağıdaki gibi oldukları anlamına gelir.

$$\begin{pmatrix} +1 & \dots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & +1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & 0 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 & \dots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & 0 & \end{pmatrix}.$$

O halde W nin ortonormal altuzayı W^\perp ve $W^\perp \subset \mathbb{E}_1^n$ olduğu düşünülerek, W^\perp iki durumda aşağıdaki gibi gösterilir. İlk durum, W^\perp spacelike olduğunda; ikinci durum, W^\perp timelike olduğundadır.

İlk durum için: W^\perp spacelike ise, bir ortonormal baz düşünülün, $U \subset W^\perp$ içinde bir lightlike vektör vardır ki bu da imkansızdır.

İkinci durum için: W^\perp timelike ise boyutu \mathbb{E}_1^n in boyutundan bir eksik olur, yani $\text{boy}(W^\perp) = n - 1$ olur ve tümevarım hipotezi kullanılır. Bunun için U ile W^\perp nin arakesiti düşünülür, bu da $W \subset U$ nin ortogonalı olan bir W' olur. Bu alt uzay W^\perp içindedir, dolayısıyla spacelike, timelike veya lightlike'tır. W' deki metrik dejenere olduğundan lightlike'tır. Böylelikle, ortonormal baza göre verilen W' deki metriğin matrisi $+1, \dots, +1, 0$ dır.

$$\begin{pmatrix} +1 & \dots & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & & & \\ & & & +1 & \vdots & \\ & & & \dots & 0 & \end{pmatrix}.$$

Bu baz ve W nin bir bazı birlikte, U nun bir bazını oluşturur. Oluşturulan baz $(+1, \dots, +1) + (+1, \dots, +1, 0)$ dır ve bu baza göre verilen metriğe ait matris aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} +1 & \dots & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & & & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & \dots & +1 & \\ & & & & & +1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 & \dots & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & +1 & \vdots \\ & & & & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

U nun lightlike olduğu anlamına gelir.

Şimdi, causal karakterine bağlı olarak alt uzayların karakterizasyonları verilecektir.

Önerme 2.2.2

1. $v \in \mathbb{E}_1^n$ olsun. $\langle v \rangle^\perp$ timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) $\Leftrightarrow v$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) vektör olur.

2. $U \subset \mathbb{E}_1^n$ bir alt uzay olsun. U^\perp timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) $\Leftrightarrow U$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) alt uzaydır.

İspat

1. v spacelike veya timelike bir vektör olsun ve $\epsilon = \pm 1$ olduğunda $\langle v, v \rangle = \epsilon$ olduğu varsayalım. \mathbb{E}_1^n in ortonormal bazı, bir elemanı v olacak şekilde genişletilirse, $\langle e_n, e_n \rangle = -\epsilon$ olduğunda $B = \{v, e_2, \dots, e_n\}$ olur. O halde $\langle v \rangle^\perp = \langle e_2, \dots, e_n \rangle$ dir, ki bu alt uzay $\epsilon = 1$ ise timelike, $\epsilon = -1$ ise spacelike bir alt uzaydır. Diğer taraftan $\{e_2, \dots, e_n\}$ bazı, $\langle e_n, e_n \rangle = \pm 1$ olduğunda $\langle v \rangle^\perp$ nin ortonormal bir bazı olsun.

$B = \{v, e_2, \dots, e_n\}$ ye bağlı olarak verilen metriğe ait matris şöyledir:

$$\begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Lorentz metriğinin indeksi 1 dir, o halde $\langle v, v \rangle = -\epsilon$ olur ve bu da sonucu gösterir.

v bir lightlike vektör olsun. Yukarıdaki düşünce ile, $v \in \langle v \rangle^\perp$ alt uzayı lightlike olmak zorundadır. $\langle v \rangle^\perp$ lightlike ise, yine yukarıdaki düşünce ile, v vektörü spacelike veya timelike olamaz, v lightlike olmak zorundadır.

2. U timelike iken $v \in U$ bir timelike vektör olsun. O halde $U^\perp \subset \langle v \rangle^\perp$ olur. Yukarıdaki madde ile, $\langle v \rangle^\perp$ spacelike olduğu görülür ve spacelike alt uzayın her alt uzayı da spacelike olduğu için U^\perp spacelikedir.

U spacelike ise ve $\mathbb{E}_1^n = U \oplus U^\perp$ olduğundan U^\perp alt uzayı spacelike olamaz. U^\perp lightlike ise Lorentz metriği dejenerer olmalıdır. O halde, önerme 2.2.1 ile U^\perp timelike olur.

Sonuç olarak U lightlike ise, yukarıdaki yukarıdaki düşünce ile, U^\perp spacelike veya timelike olamaz. O halde U^\perp lightlike olur.

Önerme 2.2.3

1. $u, v \in \mathbb{E}_1^n$ olsun. u ve v timelike vektörler ise $\langle u, v \rangle \neq 0$ dır.
2. u ve v iki lightlike vektör ise, ancak ve ancak $\langle u, v \rangle = 0$ olursa lineer bağımlı olurlar.

İspat

1. Genel durumu bozmadan, $|u| = 1$ olduğu varsayalım. $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $u = e_n$ gibi, \mathbb{E}_1^n in ortonormal bir bazı olduğu düşünülün. $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ olsun. $\langle u, v \rangle = 0$ ise $x_n \langle u, u \rangle = 0$ olur. O halde $x_n = 0$ dır. Dolayısıyla $v = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$ dir ve bu nedenle $\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \geq 0$ olur, ki bu bir çelişkidir.

2. u ve v lineer bağımlı ise ortogonaldirler. Şimdi, bu vektörlerin ortogonal oldukları düşünülün. $e_n = (0, \dots, -1)$ olsun. $\mathbb{E}_1^n = \langle e_n \rangle^\perp \oplus \langle e_n \rangle$ ifadesi içinde $u = x + \lambda e_n$ ve $v = y + \mu e_n$ yazalım. $\langle u, v \rangle = 0$ iken ve bunlar lightlike vektörler olacak şekilde, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\langle x, y \rangle - \lambda\mu = 0.$$

$$|x|^2 - \lambda^2 = 0.$$

$$|y|^2 - \mu^2 = 0.$$

Üç eşitliğin toplamı ile,

$$\langle x, y \rangle^2 = |x|^2 |y|^2$$

elde edilir. x ve y spacelike vektör oldukları için Cauchy-Schwarz eşitsizliği x ve y

nin lineer bağımlı olduğunu garanti eder. O halde u ve v vektörleri için de aynı şey söz konusudur.

Şimdi, timelike alt uzaylarda çalışılacaktır.

Önerme 2.2.4 $U \subset \mathbb{E}_1^n$ bir alt uzay ve $\text{boy}(U) \geq 2$ olsun. Aşağıda verilen ifadeler birbiri ile eşdeğerdir:

1. U bir timelike alt uzaydır.
2. U lineer bağımsız iki lightlike vektör içerir.
3. U bir timelike vektör içerir.

İspat

$1 \Rightarrow 2$ $\{e_1, \dots, e_m\}$ bazı, e_m timelike vektörü ile, U nun bir ortonormal baz olsun. O halde $e_1 + e_m$ ve $e_1 - e_m$ lineer bağımsız lightlike vektörler olurlar.

$2 \Rightarrow 3$ u ve v lineer bağımsız iki lightlike vektör ise $u + v$ veya $u - v$ bir timelike vektör olur, çünkü

$$\langle u \pm v, u \pm v \rangle = \pm 2\langle u, v \rangle$$

ve $\langle u, v \rangle \neq 0$ dir (Önerme 2.2.3).

$3 \Rightarrow 1$ v vektörü U ya ait bir timelike vektör olsun. O halde $U^\perp \subset \langle v \rangle^\perp$ dir ve $\langle v \rangle^\perp$ bir spacelike alt uzaydır. Sonuç olarak U^\perp spacelike tır ve bu nedenle U timelike olur (Önerme 2.2.2).

Yukarıdaki sonuç, bir alt uzayın timelike olup olmadığını bilmek için, o alt uzayda yalnız bir timelike vektör bulmanın yeterli olacağını söylemektedir. Bu durum diğer alt uzaylar için geçerli değildir. Örneğin \mathbb{E}_1^3 uzayında $x = 0$ düzlemi $(0, 1, 0)$ spacelike

vektörünü ve $(0, 1, 1)$ lightlike vektörünü barındırır fakat düzlem ne spacelike ne de lightlike bir düzlemdir. Buna ek olarak, $y - z = 0$ bir lightlike düzlemdir ve lightlike vektörler içermektedir. Fakat düzlemdeki tüm lightlike vektörler $(0, 1, 1)$ vektörünün bir katı olan, diğer bir deyişle bu vektör ile lineer bağımlı olan vektörlerdir.

Lightlike alt uzaylar ile devam edilecektir.

Önerme 2.2.5 U , \mathbb{E}_1^n de bir alt uzay olsun. Aşağıda verilen ifadeler birbiri ile eşdeğerdir:

1. U bir lightlike alt uzaydır.
2. U bir lightlike vektör içerir fakat timelike vektör içermez.
3. $U \cap C = L - \{0\}$ ve $(L) = 1$.

$\text{boy}(U \cap U^\perp) = 1$ olduğu durumdadır.

İspat

$1 \Rightarrow 2$ U daki metrik dejenere olduğu için U da bir lightlike vektör vardır. Timelike vektör yoktur (Önerme 2.2.4).

$2 \Rightarrow 3$ Lightlike vektörler bulunduğu için $U \cap C$ arakesiti boş küme değildir. Tekrar önerme 2.2.4 ile, eğer iki lineer bağımsız lightlike vektör olsaydı bir timelike vektör var olurdu, ki bu imkansızdır. Dolayısıyla, U daki tüm lightlike vektörler lineer bağımlıdır.

$3 \Rightarrow 1$ Lightlike vektörler var olduğundan alt uzay spacelike değildir. Hipotez ile, U daki tüm lightlike vektörler lineer bağımlıdır ve önerme 2.2.4 U nun timelike olmadığını belirtir. Sonuç itibariyle, Önerme 2.2.1 U nun lightlike olduğunu söyler.

Alt uzayların hiper düzlemler için olan daha yüksek boyutlu olduğu hallerde, \mathbb{R}^n deki Öklid metriğini kullanarak causal karakteri ayırt etmek mümkündür.

Önerme 2.2.6 P , \mathbb{E}_1^n in bir hiperdüzlemi olsun. v de Öklid metriği ile bir ortogonal vektör olsun. Bu durumda, v bir timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) vektör $\Leftrightarrow P$ bir spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) düzlem olur.

İspat P ,

$$P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

olarak yazılırsa v vektörü (a_1, \dots, a_n) vektörü ile lineer bağımlı olur. P aynı zamanda şu şekilde de yazılır:

$$\begin{aligned} P &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_1^n; \langle (x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, -a_n) \rangle \\ &= 0 \\ &= \langle (a_1, \dots, -a_n) \rangle^\perp . \end{aligned}$$

$(a_1, \dots, -a_n)$ in causal karakteri v ninki ile aynıdır, çünkü

$$\langle (a_1, \dots, -a_n), (a_1, \dots, -a_n) \rangle = a_1^2 + \dots - a_n^2 = \langle v, v \rangle$$

olur ki bu sonucu ispatlar.

\mathbb{E}_1^n de hiperdüzlemler üzerine çalışılmaya devam edilecektir. Burada, hiperdüzleme ait bir normal vektörü düşünülün ve bu vektörün normu Lorentz ve Öklid metriği ile ayrı ayrı hesaplanarak bir karşılaştırma yapılınsın.

Önerme 2.2.7 P spacelike veya timelike bir hiperdüzlem ve $P = \langle v \rangle^\perp$ ise, $|v| = 1$ iken,

$$|v|_e \geq 1$$

olur, e alt indeksi olduğunda hesaplama \mathbb{E}^n nin Öklid metriği ile yapıldığını gösterir.

İspat

$$P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

şeklinde yazılsın. Genel durumu bozmadan, $v = (a_1, \dots, -a_n)$ olduğu varsayılınsın. $a_1^2 + \dots - a_n^2 = \epsilon$ ve $\langle v, v \rangle = \epsilon$ olduğunu biliriz. Burada, $\epsilon = -1$ ise P timelike, $\epsilon = 1$ ise P spacelike'tir. v nin normu Öklid metriği ile hesaplınsın. $\epsilon = 1$ ise sonuç,

$$\begin{aligned} |v|_e^2 &= a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 \geq a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 - a_n^2 \\ &= \epsilon \\ &= 1 \end{aligned}$$

şeklinde olur. Eğer $\epsilon = -1$ ve $\langle v, v \rangle = -1$ ise $a_n^2 = 1 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 \geq 1$ olur. O halde $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2 - 1$ ve

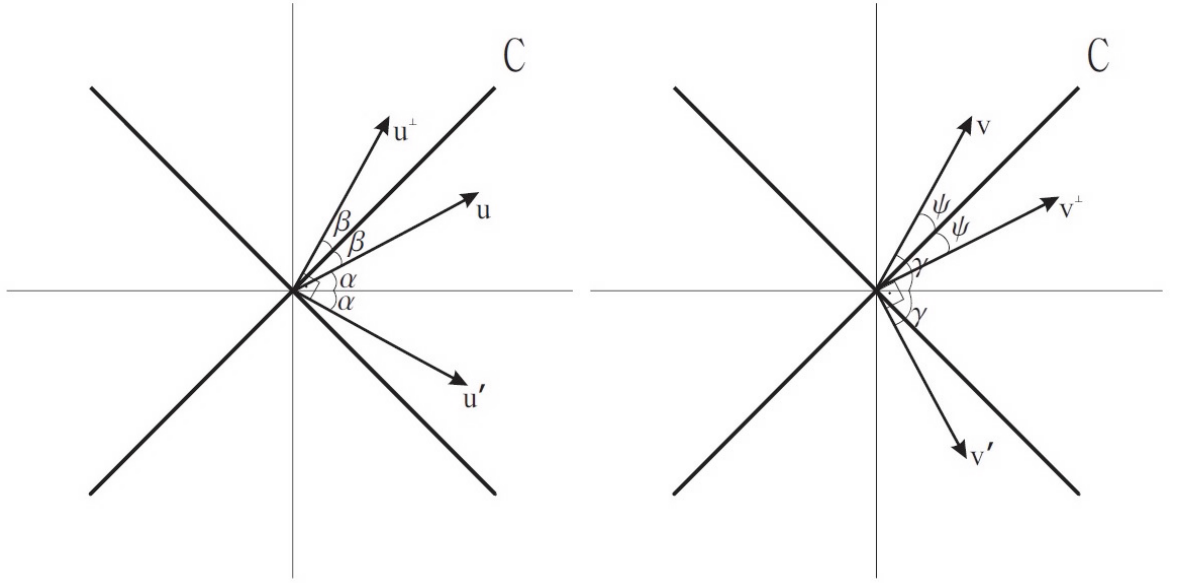
$$|v|_e^2 = a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = 2a_n^2 - 1 \geq 1$$

elde edilir.

Yansımalar (Öklid anlamdaki) ile \mathbb{E}_1^n deki ortogonalliğin ilişkilendirilmesi aşağıdaki gibidir. Bu ilişkilendirme \mathbb{E}_1^2 de yapılacaktır.

Önerme 2.2.8 \mathbb{E}_1^2 Lorentz-Minkowski düzlemi düşünülün. $u \in \mathbb{E}_1^2$ ise u nun ortogonal bir vektörü C light konisine göre u nun bir yansımasıdır (Şekil 2.2)

İspat $u = (x, y)$ olsun. $ax - by = 0$ ise $(a, b) \in u^\perp$ olur. u nun $x_2 = x_1$ doğrusuna göre yansıması e içindedir ve (y, x) tir. Doğrunun denklemi (y, x) noktasını sağlar, $x.x_1 - y.x_2 = 0$ olur. Sonuç olarak, (a, b) vektörü denklemi sağlar.



Şekil 2.2 Lorentz uzayında w nin ortogonal vektörleri u ve v

Bu bölümde son olarak, \mathbb{E}_1^n in timelike vektörlerinin T kümesinde bir denklik bağıntısı tanımlanacaktır. $\forall u \in T$ için, u nun aşağıdaki küme ile verilen timelike konisi tanımlanır.

$$C(u) = \{v \in T; \langle u, v \rangle < 0\}.$$

Bu küme $u \in C(u)$ olduğundan boş küme değildir. Buna ek olarak T , $C(u)$ ve $C(-u)$ nun ayrık birleşimidir: $v \in T$ ise $\langle u, v \rangle \neq 0$ olur ve bu nedenle $v \in C(u)$ veya $v \in C(-u)$ dur. Bundan başka, $C(u) \cap C(-u) = \emptyset$ dir. Timelike konilerin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

Önerme 2.2.9

1. $\langle u, v \rangle < 0 \Leftrightarrow u$ ve v aynı timelike konide yatan iki timelike vektördür.
2. $C(u) = C(v) \Leftrightarrow u \in C(v)$

İspat 1. $\langle u, v \rangle < 0$ ise $u \in C(v)$ dir. $u, v \in C(w)$ olduğu varsayalım. $\langle w, w \rangle = -1$ olduğu düşünülebilir. $x, y \in \langle w \rangle^\perp$ ve (a, b) den, $u = x + aw$ ve $v = y + bw$ olsun.

$\langle w \rangle^\perp$ bir spacelike alt uzay oldu ğundan, $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ ve

$$\langle u, v \rangle = -ab + \langle x, y \rangle \leq -ab + |x||y| \quad (2.1)$$

olur. Fakat $\langle x, x \rangle < a^2$ and $\langle y, y \rangle < b^2$ dir. O halde $|x| < |a|$, $|y| < |b|$ ve eşitlik 2.1 in sonucu olarak $\langle u, v \rangle < 0$ olur.

2. $u \in C(v)$ ise $\langle u, v \rangle < 0$ olur, yani $v \in C(u)$ dir (Lopez 2008).

Şimdi timelike vektörler için Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla iki timelike vektör arasındaki açı tanımlanacaktır.

Teorem 2.2.1 u ve v timelike vektörler olsun. Bu takdirde

$$|\langle u, v \rangle| \geq \sqrt{-\langle u, u \rangle} \sqrt{-\langle v, v \rangle}$$

dir ve eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul u ve v vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır. u ve v vektörleri aynı zaman konisi içinde ise

$$\langle u, v \rangle = -|u||v| \cosh \varphi$$

olacak biçimde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. φ sayısına u ve v vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (O'Neill 1983).

Sonuç 2.2.2 u, v aynı zaman konisinde yatan iki timelike vektör olsun. Bu takdirde

$$|u + v| \geq |u| + |v|$$

dir ve eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul u ve v vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır (Lopez 2008).

Tanım 2.2.6 u ve v , \mathbb{E}_1^3 uzayının vektörleri olsun. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve

$v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere,

$$u \times v = (-(u_2v_3 - u_3v_2), -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1)$$

eşitliği ile belirli $u \times v$ vektörlerine u ile v nin vektörel çarpımı denir (Lopez 2008).

$i \in \{1, 2, 3\}$ için $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ olmak üzere,

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

determinantı açılarak $e_1, e_2, -e_3$ vektörlerine göre düzenlenirse elde edilen vektörün $u \times v$ vektörüne eşit olduğu kolayca görülür (Lopez 2008).

Tanım 2.2.7 $u, v, w \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$ sayısına u, v, w vektörlerinin karma çarpımı denir (Lopez 2008).

Önerme 2.2.10 $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere,

- (i) $\forall u, v \in \mathbb{E}_1^3, u \times v = -v \times u$.
- (ii) $u \times v$ vektörü u ve v vektörlerine diktir.
- (iii) $u \times v = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\{u, v\}$ nin lineer bağımlı olmasıdır.
- (iv) $u \times v \neq 0$ vektörünün $P = \langle u, v \rangle$ düzleminde olması için gerek ve yeter koşul P düzleminin null olmasıdır (Lopez 2008).

\mathbb{E}_1^n Lorentz-Minkowski uzayına ait izometrilere devam edilecektir. $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$, \mathbb{E}_1^n in bir izometrisi olsun, $\forall u, v \in \mathbb{E}_1^n$ için $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ dir. \mathbb{E}_1^n e ait bir $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal baza göre f nin matrisi A olsun. $g = \langle, \rangle$ olduğunda $G = M_g(B, B)$ olur. $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x$ ve $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv y$ olsun.

O halde, $f(u) = M(f, B, B)x$, $f(v) = M(f, B, B)y$ ve

$$\langle f(u), f(v) \rangle = x^T A^T G A$$

$$\langle u, v \rangle = x^T G y$$

olur. Çünkü bu, $\forall x, y$ için sağlanır. Dolayısıyla A matrisi,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

iken, $A^T G A = G$ yi sağlar.

Herhangi bir izometriye ait eigen değerler 1 veya -1 olduğu için, \mathbb{E}_1^n in ortonormal bir bazı şu durumda seçilebilir: A ya karşılık gelen matris, esas köşegende sadece 1, -1 ve 2×2 -lik bloklar (her biri köşegenleştirilebilir olmayan) ile oluşturulduğunda, 2×2 -lik blokların her biri bir vektör uzayının izometrilere karşılık gelmektedir. \mathbb{E}_1^2 deki izometrilere örnekler ile devam edilecektir.

$f : \mathbb{E}_1^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, \mathbb{E}_1^2 de bir izometri olsun. $B = \{e_1, e_2\}$ ortonormal baz ise, f nin matrisi A , $A^T G A = G$ yi sağlar.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T G A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}.$$

O halde,

$$a^2 - c^2 = 1$$

$$b^2 - d^2 = -1$$

$$ab - cd = 0$$

olur. İlk iki denkleme göre durumlar ayırt edilecektir.

1. $a = \cosh \theta$, $b = \sinh \varphi$, $c = \sinh \theta$ ve $d = \cosh \varphi$. O halde üçüncü deklemler $-\sinh(\theta - \varphi) = 0$ dır. Dolayısıyla, $\theta = \varphi$ olur. A matrisinin gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \det A = 1$$

2. $a = -\cosh \theta$, $b = \sinh \varphi$, $c = \sinh \theta$ and $d = \cosh \varphi$. O halde üçüncü deklemler $\sinh(\theta + \varphi) = 0$ dır. Dolayısıyla, $\varphi = -\theta$ olur. A matrisinin gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \det A = -1$$

3. $a = \cosh \theta$, $b = \sinh \varphi$, $c = \sinh \theta$ and $d = -\cosh \varphi$. O halde üçüncü deklemler $\sinh(\theta + \varphi) = 0$ dır. Dolayısıyla, $\varphi = -\theta$ olur. A matrisinin gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ \sinh \theta & -\cosh \theta \end{pmatrix}, \det A = -1$$

4. $a = -\cosh \theta$, $b = \sinh \varphi$, $c = \sinh \theta$ and $d = -\cosh \varphi$. O halde üçüncü deklemler $-\sinh(\theta - \varphi) = 0$ dır. Dolayısıyla, $\theta = \varphi$ olur. A matrisinin gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} -\cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & -\cosh \theta \end{pmatrix}, \det A = 1$$

Teorem 2.2.1 f, \mathbb{E}_1^n in bir izometrisi ise, $f(u)$ ve $f(v)$ arasındaki açı $A(u)$ ve $A(v)$ arasındaki açı ile aynıdır.

İspat Sadece timelike vektörler için ispat yapılacaktır.

Eğer u birim vektörü timelike ise, $f(u)$ birim timelike vektör olur. Bundan başka, u ve v aynı timelike konide yatıyorsa,

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle < 0$$

olur. u ve v arasındaki φ açısı $\varphi \in [0, \infty)$ iken şöyledir:

$$\cosh \varphi = -\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

$f(u)$ ve $f(v)$ arasındaki açı θ dır,

$$\cosh \theta = -\frac{\langle f(u), f(v) \rangle}{|f(u)||f(v)|} = -\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \cosh \varphi.$$

Sonuç olarak, $\varphi = \theta$ dır.

\mathbb{R}^n in her B bazı için pozitif yönlendirilme yapıldığında, bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izomorfizminin yönü koruduğu hatırlanır, o halde $f(B)$ pozitif yönlendirilmiştir. Bu, f nin determinantının pozitif olduğunu söylemek ile eşdeğerdir. \mathbb{E}_1^n in izometrilere determinantı $+1$ veya -1 olduğundan, determinantı $+1$ olan izometrilere yönü korurlar.

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$, e_n timelike vektör iken, \mathbb{E}_1^n in bir ortogonal bazı olsun. $e_n, (0, \dots, 0, 1)$ vektörü ile aynı timelike konide yatıyorsa, B ye geleceğe yönlendirilmiş (future-directed) baz denir.

Tanım 2.2.8 $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ bir izometri olsun. Eğer her ortogonal geleceğe yönlendirilmiş B bazı için $f(B)$ de geleceğe yönlendirilmiş bir baz oluyor ise, f timelike yönlendirmeyi korur denir.

Önerme 2.2.11 $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ bir izometri olsun ve $A = (a_{ij})$, \mathbb{E}_1^n in bir olağan bazına göre f nin matris gösterimi olsun. $a_{nn} > 0 \Leftrightarrow f$ timelike yönlendirmeyi korur.

İspat f dönüşümü,

$$\langle f(e_n), e_n \rangle = \langle f(e_n), (0, \dots, 0, 1) \rangle < 0$$

timelike yönlendirmesini korur. Çünkü

$$f(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{in} e_n, \langle f(e_n), e_n \rangle = -a_{nn}$$

dir. O halde $a_{nn} > 0 \Rightarrow \langle f(e_n), e_n \rangle < 0$ olur.

$O_1(n)$, \mathbb{E}_1^3 in tüm vektör izometrilerin kümesini ifade etsin ve $O_1(3)$ ile gösterilsin.

$$O_1(3) = \{A \in Gl(3, \mathbb{R}^n); A^T G A = G\}.$$

Sıradaki dört küme şu şekilde olacaktır:

$$O_1^{++}(n) = \{A \in O_1(n) : a_{nn} > 0, \det(A) = 1\}$$

$$O_1^{+-}(n) = \{A \in O_1(n) : a_{nn} > 0, \det(A) = -1\}$$

$$O_1^{-+}(n) = \{A \in O_1(n) : a_{nn} < 0, \det(A) = 1\}$$

$$O_1^{--}(n) = \{A \in O_1(n) : a_{nn} < 0, \det(A) = -1\}.$$

2.3 Öklid Uzayı ve Lorentz Uzayında Anti-Simetrik Matrislerin Gösterimi

Tanım 2.3.1 3x3-lük anti-simetrik matris $[B]$ nin üç bağımsız elemanı vardır.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Bu elemanlar bir vektör temsil eder, $b = (b_1, b_2, b_3)$ (McCarthy 1990).

Tanım 2.3.2 E_1^3 de, her 3x3-lük semi anti-simetrik matris ϕ izomorfizmi altında bir vektör belirler:

$$\phi : \diamond_1(3) \rightarrow E_1^3$$
$$W = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \phi(W) = W^v = (w_1, w_2, w_3). \quad (2.3)$$

Burada $\diamond_1(3)$, 3x3-lük semi ortogonal matrislerin grubu $O_1(3, \mathbb{R})$ in Lie cebiridir.

Not: Burada, \mathbb{R} - reel sayılar yerine \mathbb{D} dual sayılar halkası kullanılırsa, matrislerin elemanları eşitlik 2.2 ve eşitlik 2.3 te olduğu gibi bir vektöre karşılık gelir.

2.4 Dual Uzay

Tanım 2.4.1 \mathbb{R} -reel sayılar cümlesi (+) toplama ve (.) çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar cismi de \mathbb{R} ile gösterilsin.

$\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A = (a, a^*)$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi \mathbb{D} ile gösterilsin.

$\mathbb{D} = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$ üzerinde iki iç işlem ve eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.2 $\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ iç işleminin, $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere, $A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$ şeklinde tanımlanır ve \mathbb{D} deki toplama olarak adlandırılır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.3. $\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ iç işleminin, $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $A \odot B = AB = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$ şeklinde tanımlanır ve \mathbb{D} deki çarpma olarak adlandırılır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.4. $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ için, $a = b, a^* = b^*$ ise A ile B eşittir denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.5 $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise \mathbb{D} cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall (a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.1 $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli değişimli bir halkadır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.6 $A \oplus X = A$ denkleminin çözümü olarak tanımlanan dual sayıya \mathbb{D} nin sıfırı denir ve $0 = (0, 0)$ ile gösterilir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.7 Bir $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında " a " reel sayısına A nin reel kısmı, " a^* " reel sayısına da A nin dual kısmı denir ve $\text{Re}A = a, \text{Du}A = a^*$ şeklinde yazılır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.8 $(1, 0) = 1$ dual sayısına \mathbb{D} deki çarpma işleminin birim elemanı veya \mathbb{D} deki reel birim denir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.9 $(0, 1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilecektir. Yani $(0, 1) = \varepsilon$ alınacak ve dual birim olarak adlandırılacaktır (Hacısalihoglu 1983).

Sonuç 2.4.1 $\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0, 0)$ olduğu görülür (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.2 $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı, $A = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir. Yani $(a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ dır (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.3 $A = (a, a^*)$ bir dual sayı ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile A nin çarpımı, $\lambda A = (\lambda a, \lambda a^*)$ dır. (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.10

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{\hat{a} = (A_1, A_2, A_3) | A_i \in \mathbb{D}, 1 \leq i \leq 3\}$$

kartezyen çarpım cümlesi \mathbb{D} halkası üzerinde bir modüldür, \mathbb{D} -modül veya dual uzay olarak isimlendirilir. \mathbb{D}^3 ün bileşenleri dual vektörlerdir.

Tanım 2.4.11 \mathbb{D} -Modül'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.4 $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere \mathbb{D} -Modül'de her bir \vec{A} dual vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \quad [\varepsilon = (0, 1) \in \mathbb{D}]$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.5

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{D}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda \vec{A} = (\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}^*)$$

dır (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.6

$\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ ve $\vec{B} = (\vec{b}, \vec{b}^*) \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ için,

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}, \vec{a}^* = \vec{b}^*$$

dir (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.7 \mathbb{R}^3 vektör uzayı $\mathbb{D}\text{-Modül}$ 'ün, elemanları $(\vec{a}, 0)$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.12 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ dual vektörlerinin iç çarpımı,

$$f : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir lineer dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} f(\vec{A}, \vec{B}) &= \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \\ &= \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon [\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Tıpkı bir vektör uzayı üzerinde olduğu gibi iç çarpım aksiyomlarını $\mathbb{D}\text{-Modül}$ üzerinde de kabul edebiliriz. Bu aksiyomlar şunlardır:

\dot{I}_1 : $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ için,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle \quad (\text{değişim özelliği})$$

İ₂: $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ ve $\alpha \in \mathbb{D}$ için,

$$\langle \alpha \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \alpha \vec{B} \rangle = \alpha \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \quad (\text{skaler ile çarpımın birleşme özelliği})$$

İ₃: $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ için,

$$\langle \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} + \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \quad (\text{dağılım özelliği})$$

$$\langle \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle$$

İ₄: $\forall \vec{A} \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ için,

$$\vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$$

(Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.13 Bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün normu diye ($\vec{a} \neq \vec{0}$),

$$\|\vec{A}\| = \left(\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = (\|\vec{a}\|, \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|})$$

dual sayısına denir. Bundan sonra bu dual sayı,

$$a = \|\vec{a}\| \quad \text{ve} \quad a^* = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

olmak üzere,

$$\|\vec{A}\| = a + \varepsilon a^*$$

olarak yazılacaktır (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.14 Normu reel birime karşılık gelen $(1, 0)$ dual sayısı olan dual vektöre

birim dual vektör denir (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.8 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektör ve $\vec{a} \neq 0$ ise,

$$\|\vec{a}\| = 1, \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dır (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.9 $\vec{A} \neq (0, \vec{a}) \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere,

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

birim dual vektördür (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.15

$$\{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \mid \|\vec{X}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3\}$$

cümlesine \mathbb{D} -Modül'de birim dual küre denir (Hacısalihoglu 1983).

Teorem 2.4.10 (E.Study dönüşümü) $\vec{A} \neq (0, \vec{a}) \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere \mathbb{D} -Modül'de denklemi

$$\|\vec{A}\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, \mathbb{R}^3 'teki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.16 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere,

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

birim dual vektörüne \vec{A} vektörünün ekseni denir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.17 $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ birim dual vektörlerinin \mathbb{R}^3 'teki temsil ettikleri yönlü doğrular bir noktada dik olarak kesişirlerse \vec{A}_1, \vec{A}_2 ve \vec{A}_3 birim dual vektörlerine ortonormal dual vektörler denir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.18 Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine dual matris denir ve

$$A = [A_{ij}], \quad A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*$$

şeklinde gösterilir. Reel matrisler için geçerli olan işlemler dual matrisler için de geçerlidir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.4.19 A dual matrisi için $AA^T = A^T A = I_n$ ise A dual matrisine ortogonal dual matris denir (Hacısalihoglu 1983).

3. DUAL DÖNÜŞÜM

Bu bölümde, bu tezin başlangıç noktası olan çalışmamın (Dohi vd. 2010) açıklaması yapılacaktır. Kullanılacak $n \times n$ -lik matrislerin iki kümesi aşağıdaki gibidir.

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T A = AA^T = I_n, \det A = 1\},$$

$$SO(n-1, 1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T G A = A G A^T = G, \det A = 1\},$$

buradaki G matrisi, $G = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right)$ dir ve I_n , $n \times n$ -lik birim matristir.

Birinci küme, \mathbb{E}^n Öklid uzayındaki izometrilere ile oluşturulmuştur ve bu izometrilere \mathbb{R}^n deki yönlendirmeyi korurlar. İkinci küme olarak ifade edilen $SO(n-1, 1)$, \mathbb{E}_1^n Minkowski uzayındaki determinanı 1 olan izometrilere dir.

Bu ve bundan sonraki bölümde, $n \times n$ -lik matrisler aşağıda verilen A matrisi gibi bloklara bölünmüş şekilde yazılacaktır,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right),$$

$a_{nn} \neq 0$ dir. Buradaki B matrisi, $(n-1) \times (n-1)$ -lik bir kare matris; C , $(n-1) \times 1$ -lik bir sütun matrisi ve D bir satır matrisidir. Bu matriste, $a_{nn} \neq 0$ olduğu için,

$$X = \{A \in SO(n); a_{nn} \neq 0\}$$

$$Y = \{A \in SO(n-1, 1); a_{nn} \neq 0\}$$

kümeleri kullanılacaktır.

$X = \{A \in SO(n); a_{nn} \neq 0\}$ ve $Y = \{A \in SO(n-1, 1); a_{nn} \neq 0\}$ kümeleri arasında,

$f : X \rightarrow Y$ olacak şekilde bir dönüşüm tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f : A \mapsto f(A) = \frac{1}{a_{nn}} \left(\begin{array}{c|c} a_{nn}(B^{-1})^T & C \\ \hline -D & 1 \end{array} \right),$$

buradaki T üst indisi matristeki transpozundur.

Şimdi, f nin iyi tanımlı olduğu gösterilmelidir. Öncesinde, sıradaki bir önerme ve iki yardımcı önerme ispat edilecektir.

Önerme 3.1 $A \in X$ ise, $f(A) \in Y$ olur.

İspat $f(A)^T G f(A) = G$ ve $f(A) G f(A)^T = G$ olduğu ispatlanacaktır. A matrisi, $SO(n)$ kümesinin içindedir. Bundan dolayı $A, A^T A = A A^T = I$ eşitliğini sağlar.

Bu ifade,

$$A A^T = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B^T & D^T \\ \hline C^T & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B B^T + C C^T & B D^T + a_{nn} C \\ \hline D B^T + a_{nn} C^T & D D^T + a_{nn}^2 \end{array} \right) = I$$

olduğu anlamına gelir.

Bu çarpım sonucunda elde edilen eşitlikler aşağıdaki gibi yazılır.

$$B B^T + C C^T = I_{n-1} \quad (3.1)$$

$$B D^T + a_{nn} C = D B^T + a_{nn} C^T = 0 \quad (3.2)$$

$$D D^T + a_{nn}^2 = 1 \quad (3.3)$$

Eşitlik 3.2 den

$$C = -\frac{B D^T}{a_{nn}},$$

$$C^T = -\frac{D B^T}{a_{nn}}$$

elde edilir.

Eşitlik 3.1 kullanılarak,

$$BB^T + \frac{BD^TDB^T}{a_{nn}^2} = B\left(B^T + \frac{D^TDB^T}{a_{nn}^2}\right),$$

$$BB^{-1} = I \Rightarrow B^{-1} = B^T + \frac{D^TDB^T}{a_{nn}^2}$$

elde edilir.

Eşitliğin diğer tarafı ele alındığında,

$$A^T A = \left(\begin{array}{c|c} B^T & D^T \\ \hline C^T & a_{nn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B^T B + D^T D & B^T C + a_{nn} D^T \\ \hline C^T B + a_{nn} D & C^T C + a_{nn}^2 \end{array} \right) = I$$

olduğu görülür.

Bu çarpım sonucunda aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$B^T B + D^T D = I_{n-1} \quad (3.4)$$

$$B^T C + a_{nn} D^T B + a_{nn} D = 0 \quad (3.5)$$

$$C^T C + a_{nn}^2 = 1 \quad (3.6)$$

Eşitlik 3.5 ten

$$D^T = -\frac{B^T C}{a_{nn}},$$

$$D = -\frac{C^T B}{a_{nn}}$$

elde edilir.

Eşitlik 3.4 kullanılarak,

$$B^T B + \frac{B^T C C^T B}{a_{nn}^2} = \left(B^T + \frac{B^T C C^T}{a_{nn}^2}\right) B,$$

$$B^{-1} B = I \Rightarrow B^{-1} = B^T + \frac{B^T C C^T}{a_{nn}^2}$$

elde edilir.

A matrisinin, $A^T A = A A^T = I$ eşitliğini sağladığı görülür. Şimdi, $f(A)^T G f(A) = G$ ve $f(A) G f(A)^T = G$ olduğu ispatlanmalıdır.

$$\begin{aligned}
f(A)^T G f(A) &= \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \frac{-D^T}{a_{nn}} \\ \hline \frac{C^T}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^T & \frac{C}{a_{nn}} \\ \hline \frac{-D}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \frac{-D^T}{a_{nn}} \\ \hline \frac{C^T}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^T & \frac{C}{a_{nn}} \\ \hline \frac{D}{a_{nn}} & -\frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} B^{-1}(B^{-1})^T - \frac{D^T D}{a_{nn}^2} & \frac{B^{-1}C}{a_{nn}} + \frac{D^T}{a_{nn}^2} \\ \hline \frac{C^T(B^{-1})^T}{a_{nn}} + \frac{D}{a_{nn}^2} & \frac{C^T C}{a_{nn}^2} - \frac{1}{a_{nn}^2} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Bu çarpım sonucunda elde edilen eşitlikler şu şekilde gösterilmelidir.

$$B^{-1}(B^{-1})^T - \frac{D^T D}{a_{nn}^2} = I_{n-1} \quad (3.7)$$

$$\frac{B^{-1}C}{a_{nn}} + \frac{D^T}{a_{nn}^2} = \frac{C^T(B^{-1})^T}{a_{nn}} + \frac{D}{a_{nn}^2} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{C^T C}{a_{nn}^2} - \frac{1}{a_{nn}^2} = -1 \quad (3.9)$$

Eşitlik 3.7 nin ispatında, B^{-1} kullanılmalıdır.

$$\begin{aligned}
\left(B^T + \frac{D^T D B^T}{a_{nn}^2} \right) \left(B + \frac{B D^T D}{a_{nn}^2} \right) - \frac{D^T D}{a_{nn}^2} &= \left(\frac{a_{nn}^2 B^T + D^T B^T}{a_{nn}^2} \right) \left(\frac{a_{nn}^2 B + B D^T D}{a_{nn}^2} \right) - \frac{D^T D}{a_{nn}^2} \\
&= \left(\frac{a_{nn}^4 B^T B + a_{nn}^2 B^T B D^T D + a_{nn}^2 D^T D B^T B + D^T D B^T B D^T D}{a_{nn}^4} \right) - \frac{D^T D}{a_{nn}^2}
\end{aligned}$$

Eşitlik 3.3. ve 3.4 ten,

$$B^T B = I - D^T D,$$

$$D D^T = 1 - a_{nn}^2$$

kullanılarak,

$$= \left(\frac{a_{nn}^4 I + D^T D a_{nn}^2}{a_{nn}^4} \right) - \frac{D^T D}{a_{nn}^2} = I$$

olduğu görülür. B^{-1} , eşitlik 3.8 in ispatında kullanılır.

$$\begin{aligned} \frac{B^{-1}C}{a_{nn}} + \frac{D^T}{a_{nn}^2} &= \frac{(B^T + \frac{B^T C C^T}{a_{nn}^2})C}{a_{nn}} + \frac{D^T}{a_{nn}} \\ &= \frac{B^T C}{a_{nn}} + \frac{B^T C C^T C}{a_{nn}^3} + \frac{D^T}{a_{nn}} = \frac{B^T C}{a_{nn}} + \frac{B^T C}{a_{nn}^3} - \frac{B^T C}{a_{nn}} + \frac{D^T}{a_{nn}^2} \end{aligned}$$

Eşitlik 3.5 ve 3.6 dan,

$$\begin{aligned} C^T C &= 1 - a_{nn}^2, \\ D^T &= -\frac{B^T C}{a_{nn}} \end{aligned}$$

kullanılarak,

$$= \frac{B^T C}{a_{nn}} + \frac{B^T C}{a_{nn}^3} - \frac{B^T C}{a_{nn}} + \frac{B^T C}{a_{nn}^3} = 0$$

elde edilir.

Eşitlik 3.9 un, 3.6 dan elde edildiği açıktır.

$$\frac{C C^T - 1}{a_{nn}^2} = -1.$$

$f(A)Gf(A)^T$ çarpımı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} f(A)Gf(A)^T &= \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^T & \frac{C}{a_{nn}} \\ \hline -\frac{D}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \frac{-D^T}{a_{nn}} \\ \hline \frac{C^T}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^T & \frac{C}{a_{nn}} \\ \hline -\frac{D}{a_{nn}} & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \frac{-D^T}{a_{nn}} \\ \hline -\frac{C^T}{a_{nn}} & -\frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} (B^{-1})^T B^{-1} - \frac{C C^T}{(a_{nn})^2} & -\frac{(B^{-1})^T D^T}{a_{nn}} - \frac{C}{a_{nn}^2} \\ \hline \frac{-DB^{-1}}{a_{nn}} - \frac{C^T}{a_{nn}^2} & \frac{D D^T}{a_{nn}^2} - \frac{1}{a_{nn}^2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Bu çarpım sonucunda elde edilen eşitlikler şu şekilde gösterilmelidir.

$$(B^{-1})^T B^{-1} - \frac{C C^T}{a_{nn}^2} = I_{n-1} \quad (3.10)$$

$$-\frac{(B^{-1})^T D^T}{a_{nn}} - \frac{C}{a_{nn}^2} = \frac{-DB^{-1}}{a_{nn}} - \frac{C^T}{a_{nn}^2} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{DD^T}{a_{nn}^2} - \frac{1}{a_{nn}^2} = -1 \quad (3.12)$$

Eşitlik 3.10 un ispatında B^{-1} kullanılır.

$$\begin{aligned} & \left(B + \frac{CC^T B}{a_{nn}^2}\right) \left(B^T + \frac{B^T CC^T}{a_{nn}^2}\right) - \frac{CC^T}{a_{nn}^2} = \\ & = \left(\frac{a_{nn}^2 B + C^T C B}{a_{nn}^2}\right) \left(\frac{a_{nn}^2 B^T + B^T CC^T}{a_{nn}^2}\right) - \frac{CC^T}{a_{nn}^2} \\ & = \left(\frac{a_{nn}^4 BB^T + a_{nn}^2 BB^T CC^T + a_{nn}^2 CC^T BB^T + CC^T BB^T CC^T}{a_{nn}^4}\right) - \frac{CC^T}{a_{nn}^2} \end{aligned}$$

Eşitlik 3.1 ve eşitlik 3.6 dan,

$$BB^T = I - CC^T,$$

$$C^T C = 1 - a_{nn}^2$$

kullanılarak,

$$= \left(\frac{a_{nn}^4 I + a_{nn}^2 CC^T}{a_{nn}^4}\right) - \frac{CC^T}{a_{nn}^2} = I$$

olduğu görülür.

B^{-1} , eşitlik 3.11 in ispatında kullanılır.

$$\frac{-DB^{-1}}{a_{nn}} - \frac{C^T}{a_{nn}^2} = \frac{-D\left(B^T + \frac{D^T DB^T}{a_{nn}^2}\right)}{a_{nn}} - \frac{C^T}{a_{nn}^2}$$

Eşitlik 3.4 ve 3.2 den,

$$B^T B = I - D^T D,$$

$$C^T = -\frac{DB^T}{a_{nn}}$$

kullanılarak

$$\frac{-a_{nn}^2 DB^T - DD^T DB^T + DB^T}{a_{nn}^3} = 0$$

elde edilir.

Eşitlik 3.12 nin, 3.3 ten geldiği açıktır.

$$\frac{DD^T - 1}{a_{nn}^2} = -1.$$

İspatın tamamlanması için, $f(A)$ nın determinantının $+1$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için aşağıdaki iki yardımcı önermeye ihtiyaç vardır.

Yardımcı Önerme 3.1 A matrisi $SO(n)$ kümesinde ise, $a_{nn} \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{\det(B)}{a_{nn}} = 1$$

olur.

İspat A matrisi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B & \frac{-BD^T}{a_{nn}} \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right)$$

Bu matris, $\det(A)$ nın hesabı için, iki matrisin çarpımı şeklinde de yazılabilir.

$$= \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & \frac{-D^T}{a_{nn}} \\ \hline 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right)$$

$$\det(A) = \det(B) \frac{1}{a_{nn}}$$

O halde, $\det(A) = 1$ dir. Sonuç olarak, $\det(B) = a_{nn}$ olarak elde edilir.

Yardımcı Önerme 3.2 $A \in SO(n-1, 1)$ ise, $a_{nn} \neq 0$ olmak üzere,

$$\det(B) \frac{1}{a_{nn}} = 1$$

dir.

İspat A matrisi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B & \frac{BD^T}{a_{nn}} \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right)$$

Bu matris, $\det(A)$ nın hesabı için, iki matrisin çarpımı şeklinde de yazılabilir.

$$= \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & \frac{D^T}{a_{nn}} \\ \hline 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{array} \right)$$

Buradan,

$$\det(A) = \det(B) \frac{1}{a_{nn}}$$

olduğu görülür.

Yardımcı Önerme 3.1'in ispatının devamı için, $\det(A) = 1$, $\frac{\det(B)}{a_{nn}} = 1$ ve yardımcı önerme 3.2 kullanılır.

$$\det(f(A)) = \det((B^{-1})^T) \frac{1}{\frac{1}{a_{nn}}} = \frac{a_{nn}}{\det(B)} = 1$$

f nin iyi tanımlı olduğunun ispatından hemen sonra, 1-1 ve örten olduğu gösterilmelidir. Bunun için $f^{-1} : Y \rightarrow X$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f^{-1} \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & a_{nn} \end{array} \right) = \frac{1}{a_{nn}} \left(\begin{array}{c|c} a_{nn}(B^{-1})^T & C \\ \hline -D & 1 \end{array} \right)$$

Önerme 3.2 f , 1-1 ve örtendir; f^{-1} , f nin inversidir.

İspat f nin 1-1 ve örten olması, f^{-1} in iyi tanımlı olduğu anlamına gelir. Çünkü ,

$$f \circ f^{-1} = I_Y$$

$$f^{-1} \circ f = I_X$$

dir.

O halde, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$f \circ f^{-1}(A) = I_Y(A)$$

$$f^{-1} \circ f(A) = I_X(A)$$

$$(B'^{-1})^t = B, B'^{-1} = B^t, (B'^t)^{-1} = (B^{-1})^t,$$

$$C = \frac{C'}{x}$$

$$D = \frac{-D'}{x}$$

$$a_{nn} = \frac{1}{x}$$

$$C' = \frac{C}{a_{nn}}$$

$$D' = -xD = -\frac{1}{a_{nn}}D$$

$$x = \frac{1}{a_{nn}}$$

$f(A)$ ve $f^{-1}(A)$ için örnek verilebilecek özel matrisler aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.1.

1. A matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}$$

$SO(2)$ kümesine aittir. $A \in X$ olması için $a_{22} = \cos s \neq 0$ olmalıdır. Yani, $s \neq \pm \frac{\pi}{2}$ olur.

A matrisinin f dual dönüşümü altındaki görüntüsü $f(A)$,

$$f(A) = \frac{1}{\cos s} \begin{pmatrix} 1 & \sin s \\ \sin s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sec(s) & \tan(s) \\ \tan(s) & \sec(s) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Elde edilen bu matris $SO(1,1)$ kümesine aittir. Önceki bölümden hatırlanacak olursa, $SO(1,1) = O_1^{++}(2) \cup O_1^{-+}(2)$ olarak ifade edilir. O halde $\theta \in R$ açısına bağlı olarak $f(A)$,

$$\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

olarak yazılır.

θ açısının seçimi, $\cos(s)$ değerinin pozitif veya negatif oluşuna bağlıdır. İlk durumda, θ açısı $\cosh(\theta) = \sec(s)$ ve $\sinh(\theta) = \tan(s)$ eşitliklerini sağlamalıdır. $\sec(s)^2 - \tan(s)^2 = 1$ olduğundan, tek bir θ açısının varlığından söz edilir.

2. B matrisi,

$$B = \begin{pmatrix} \pm \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \pm \cosh t \end{pmatrix}$$

$SO(1,1)$ kümesine aittir. f dual dönüşümü ile $f(B)$,

$$f(B) = \frac{1}{\pm \cosh t} \begin{pmatrix} 1 & \sinh t \\ -\sinh t & 1 \end{pmatrix} (t \in R)$$

olarak elde edilir, $SO(2)$ kümesine aittir.

Not: f dönüşümü lineer değildir. $f(A + B) \neq f(A) + f(B)$

Örnek 3.2 3x3-lük bir ortogonal A matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right)$$

f dual dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$f(A) = \sqrt{3} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{array} \right)$$

semi-ortogonal matrisi olur.

$f(A) \in SO(2, 1)$ olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 0 &= 1 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 &= 1 \\ (1)^2 + (1)^2 - (\sqrt{3})^2 &= -1 \end{aligned}$$

Aynı zamanda $f(A)$ satırlarının ve sütunlarının kendi aralarında iç çarpımı sıfırdır.

Örnek 3.3 3x3-lük bir ortogonal B matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{-1}{\sqrt{66}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} & \frac{-1}{\sqrt{11}} \end{array} \right)$$

f dual dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$f(B) = -\sqrt{11} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \\ \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} & 1 \end{array} \right)$$

semi-ortogonal matrisi elde edilir ve sağlaması örnek 3.2'dekine benzer şekilde yapılır.

4. DUAL UZAYLARDA DUAL DÖNÜŞÜM

4.1 Dual Uzaylarda Dual Dönüşüm

Tanım 4.1.1 $\widehat{A} = [\widehat{a}_{ij}]_{n \times n}$, $\widehat{a}_{ij} \in \mathbb{D}$ olmak üzere $\widehat{A}\widehat{A}^T = \widehat{A}^T\widehat{A} = I_n$ ise \widehat{A} ya dual ortogonal matris denir.

Sonuç 4.1.1 $\widehat{A} \in \widehat{O}(n)$ olmak üzere $\widehat{A} = A + \varepsilon A^*$ dual ortogonal matrisinde $A^* = WA$ ve $A \in O(n)$ dir. Burada W , $n \times n$ -lik anti-simetrik matristir. Gerçekten,

$$\widehat{A}\widehat{A}^T = I_n$$

eşitliğinden,

$$(A + \varepsilon A^*)(A^T + \varepsilon A^{*T}) = I_n + \varepsilon \cdot 0$$

$$AA^T + \varepsilon(AA^{*T} + A^*A^T) = I_n$$

$$AA^T = I_n, \quad A \in O(n)$$

$$AA^{*T} + A^*A^T = 0$$

elde edilir.

$$A^*A^T = W$$

olsun.

$$W^T + W = 0$$

$$A^* = WA$$

elde edilir. O halde,

$$\widehat{A}\widehat{A}^T = I_n \text{ ise } \det \widehat{A} = \pm 1 \text{ dir.}$$

Bu ve bundan sonraki kısımlarda, 3x3-lük matrisler, aşağıda verilen \widehat{A} matrisi gibi

bloklara bölünmüş şekilde yazılacaktır,

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|c} \widehat{B} & \widehat{C} \\ \hline \widehat{D} & \widehat{a}_{nn} \end{array} \right)$$

\widehat{a}_{nn} in reel kısmı sıfırdan farklıdır. Burada, \widehat{B} bir $(n-1) \times (n-1)$ -lik dual matris, \widehat{C} bir $(n-1) \times 1$ -lik dual sütun matrisi ve \widehat{D} bir satır matrisidir. Bu matriste $\widehat{a}_{nn} \neq 0$ olduğundan, $\widehat{X} = \{\widehat{A} \in S\widehat{O}(n); \widehat{a}_{nn} \neq 0\}$ ve $\widehat{Y} = \{\widehat{A} \in S\widehat{O}(n-1, 1); \widehat{a}_{nn} \neq 0\}$ kümeleri kullanılacaktır. Bu kümeler arasında bir dual dönüşüm tanımlanır.

Teorem 4.1.1. \widehat{X} ve \widehat{Y} arasında bir dual dönüşüm vardır.

$$f : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$$

$$\widehat{A} \mapsto f(\widehat{A}) = \frac{1}{\widehat{a}_{nn}} \left(\begin{array}{c|c} \widehat{a}_{nn}(\widehat{B}^{-1})^T & \widehat{C} \\ \hline -\widehat{D} & 1 \end{array} \right) \quad (4.1)$$

buradaki T , tranpozunu göstermektedir.

$n = 3$ için $S\widehat{O}(3) \setminus \{a_{33} = 0\}$ ve $S\widehat{O}(2, 1)$ arasındaki dual dönüşüm aşağıdaki gibidir.

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{13} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} & \widehat{a}_{23} \\ \widehat{a}_{31} & \widehat{a}_{32} & \widehat{a}_{33} \end{bmatrix} \mapsto f(\widehat{A}) = \frac{1}{\widehat{a}_{33}} \begin{bmatrix} \widehat{a}_{22} & -\widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{13} \\ -\widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{23} \\ -\widehat{a}_{31} & -\widehat{a}_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

İspat Teoremin ispatı için $f(\widehat{A}) \in S\widehat{O}(2, 1)$ olduğunu göstermeliyiz. ε işaret matrisi ve $B = f(\widehat{A})$ dual semi-ortogonal matris olsun.

$$B^T = \varepsilon B^{-1} \varepsilon. \quad (4.3)$$

Eşitlik 4.3 ün her iki tarafı, soldan $B\varepsilon$ ve sağdan ε ile çarpılırsa,

$$B\varepsilon B^T \varepsilon = I_3 \quad (4.4)$$

elde edilir. Eşitlik 4.4 ün sağlanması yapılırsa,

$$\begin{aligned}
B\varepsilon B^T\varepsilon &= \frac{1}{\widehat{a}_{33}} \begin{bmatrix} \widehat{a}_{22} & -\widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{13} \\ -\widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{23} \\ -\widehat{a}_{31} & -\widehat{a}_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\widehat{a}_{33}} \begin{bmatrix} \widehat{a}_{22} & -\widehat{a}_{12} & -\widehat{a}_{31} \\ -\widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{11} & -\widehat{a}_{32} \\ \widehat{a}_{13} & \widehat{a}_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2 Dual Uzaylarda Dual Dönüşüm Uygulamaları

Tanımı verilen dual dönüşüm için bu bölümde uygulamalar yapılacaktır.

Örnek 4.2.1. \widehat{A} , 2x2-lik özel bir dual matris olsun.

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \cos \widehat{\theta} & \sin \widehat{\theta} \\ -\sin \widehat{\theta} & \cos \widehat{\theta} \end{pmatrix},$$

burada $\widehat{A} \in \widehat{X}$ ve $\widehat{a}_{22} = \cos \widehat{\theta} \neq 0$ ($\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$) dir. \widehat{A} matrisinin f dual dönüşümü altındaki görüntüsü $f(\widehat{A})$ aşağıdaki gibidir.

$$f(\widehat{A}) = \frac{1}{\cos \widehat{\theta}} \begin{pmatrix} 1 & \sin \widehat{\theta} \\ \sin \widehat{\theta} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sec \widehat{\theta} & \tan \widehat{\theta} \\ \tan \widehat{\theta} & \sec \widehat{\theta} \end{pmatrix}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ ve $\theta^* = 1$ alınırsa,

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon f'(x)x^*$$

$$\cos(\theta + \varepsilon\theta^*) = \cos \theta - \varepsilon \sin \theta.\theta^*$$

$$\sin(\theta + \varepsilon\theta^*) = \sin \theta - \varepsilon \cos \theta.\theta^*$$

$$\tan(\theta + \varepsilon\theta^*) = \tan\theta + \varepsilon(1 + \tan^2\theta).\theta^*$$

elde edilir. Bulunan değerler matriste yerine yazılırsa,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. \hat{A} matrisinin dual ortogonal matris olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Aynı zamanda satırların ve sütunların kendi aralarında i çarpımları sıfırdır.

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

\hat{A} dual ortogonal matrisinin f dual dönüşüm altındaki görüntüsü aşağıdaki gibidir.

$$f(\hat{A}) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\sqrt{3}\varepsilon & \sqrt{3} + 4\varepsilon \\ \sqrt{3} + 4\varepsilon & 2 + 2\sqrt{3}\varepsilon \end{pmatrix}$$

$f(\hat{A})$ matrisinin dual semi-ortogonal matris olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\left(2 + 2\sqrt{3}\varepsilon\right)^2 - \left(\sqrt{3} + 4\varepsilon\right)^2 = 1$$

$$\left(\sqrt{3} + 4\varepsilon\right)^2 - \left(2 + 2\sqrt{3}\varepsilon\right)^2 = -1.$$

Satırların ve stunların kendi aralarında i arpımları da sıfırdır.

$$\left(2 + 2\sqrt{3}\varepsilon\right) \left(\sqrt{3} + 4\varepsilon\right) - \left(\sqrt{3} + 4\varepsilon\right) \left(2 + 2\sqrt{3}\varepsilon\right) = 0$$

$$(2 + 2\sqrt{3}\varepsilon)(\sqrt{3} + 4\varepsilon) - (2 + 2\sqrt{3}\varepsilon)(\sqrt{3} + 4\varepsilon) = 0$$

Örnek 4.2.2 \hat{A} , 3x3-lük dual ortogonal bir matris olsun.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon(1 + \frac{2}{\sqrt{6}}) & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}) & \varepsilon(\frac{-2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} + \varepsilon(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}) & \frac{1}{\sqrt{6}} + \varepsilon(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}) & \frac{2}{\sqrt{6}} - \varepsilon\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \varepsilon(\frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}) & -\frac{1}{\sqrt{3}} + \varepsilon(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}) & \frac{1}{\sqrt{3}} + \varepsilon\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Dual dönüşüm yardımıyla $f(\hat{A})$ hesaplanırsa,

$$f(\hat{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon(\frac{3}{\sqrt{6}}) & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon(\frac{3}{\sqrt{6}}) & \varepsilon(1 - \sqrt{2}) \\ \frac{3}{\sqrt{6}} + \varepsilon(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}) & \frac{3}{\sqrt{6}} - \varepsilon(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}) & \sqrt{2} - 3\varepsilon \\ 1 + \varepsilon(\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}) & 1 + \varepsilon(\frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}) & \sqrt{3} - \varepsilon\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $f(\hat{A})$ matrisinin dual semi-ortogonal matris olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right)^2 - \left(\varepsilon(1 - \sqrt{2})\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{3}{\sqrt{6}} + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{6}} - \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right)^2 - \left(\sqrt{2} - 3\varepsilon\right)^2 &= 1 \\ \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + \left(1 + \varepsilon\left(\frac{-\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 - \left(\sqrt{3} - \varepsilon\sqrt{6}\right)^2 &= -1 \end{aligned}$$

Ayrıca, matrisin satırlarının ve sütunlarının kendi aralarında iç çarpımları sıfırdır.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{6}} + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(\frac{3}{\sqrt{6}} - \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right) - \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(1 + \varepsilon\left(\frac{-\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(\varepsilon(1 - \sqrt{2})\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{6}} + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(\sqrt{2} - 3\varepsilon\right) - \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\sqrt{3} - \varepsilon\sqrt{6}\right) = 0$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(\varepsilon(1 - \sqrt{2})\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{6}} - \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(\sqrt{2} - 3\varepsilon\right) - \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\sqrt{3} - \varepsilon\sqrt{6}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(\frac{3}{\sqrt{6}} + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(\frac{3}{\sqrt{6}} - \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right) - \left(\varepsilon(1 - \sqrt{2})\right)\left(\sqrt{2} - 3\varepsilon\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right) \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right) \left(1 + \varepsilon\left(\frac{-\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right) - (\varepsilon(1 - \sqrt{2})) (\sqrt{3} - \varepsilon\sqrt{6}) = 0$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{6}} + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right) \left(1 + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{6}} - \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\right) \left(1 + \varepsilon\left(\frac{-\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}\right)\right) - (\sqrt{2} - 3\varepsilon) (\sqrt{3} - \varepsilon\sqrt{6}) = 0$$

5. KÜRESEL HAREKETLER

5.1 Küresel Hareketlerin Dönme Ekseninin Dual Dönüşüm Yardımıyla İncelenmesi

Bu bölümde, dönme matrisleri eksenlerinin dual dönüşüm altında değişmez veya paralel kaldığı gösterilecektir.

Teorem 5.1.1 f dual dönüşümü aşağıdaki gibi verilsin.

$$f : SO(3) \rightarrow SO(2, 1)$$
$$A \mapsto f(A) = B$$

Dönme matrisi A nın eksenini ile boost matrisi B nin eksenini, dual dönüşüm altında değişmez veya paralel kalır.

İspat. $A \in SO(3)$ bir ortogonal matris olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$A - A^T$ ile A nın dönme eksenini hesaplanır (Ramis ve Yaylı 2010).

$$A - A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Eşitlik 2.2 den, dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{u} aşağıdaki gibidir:

$$\vec{u} = (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12}).$$

$A\vec{u} = \vec{u}$ eşitliğinin sağlaması aşağıdaki gibidir.

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix} = \vec{u}$$

Şimdi, bu hesaplamalar E_1^3 e taşınacaktır. Bunun için öncelikle $f(A) = B \in SO(2, 1)$ nin dönme eksenini bulunmalıdır.

$O_1(3)$ ün bileşenlerinden biri $O_1^{++}(3)$,

$$O_1^{++}(3) = \{A \in O_1(3); \det(A) = 1, a_{33} > 0\}$$

şeklinde ifade edilir. $O_1^{++}(3)$ ün sabit bıraktığı eksen L olmak üzere, bu tür izometrilere boost adı verilir (Lopez 2008).

$$f(A) = B = \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} & a_{13} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $B - B^{-1}$ matrisi ile B nin dönme eksenini hesaplanır.

$$B^{-1} = \varepsilon B^T \varepsilon = \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{31} \\ -a_{21} & a_{11} & a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - B^{-1} = \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} + a_{12} & a_{13} - a_{31} \\ -a_{12} + a_{21} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ -a_{31} + a_{13} & -a_{32} + a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

E_1^3 de, dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{w} aşağıdaki gibidir.

$$\vec{w} = \frac{1}{a_{33}} (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})$$

Böylelikle,

$$\vec{w} = \frac{1}{a_{33}} \vec{u}$$

olduğu görülür.

$$Sp\{\vec{u}\} = Sp\{\vec{w}\}$$

olduğundan, A ve B nin dönme eksenleri paraleldir.

Örnek 5.1.1 $A \in SO(3)$ matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & 0 \\ -\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \sin t \\ \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \cos t \end{bmatrix}$$

Bir eliptik harekete karşılık gelen bu ortogonal A matrisinin ve f dönüşümü altındaki $f(A)$ matrisinin dönme eksenleri hesaplanacaktır (Örnek 3.26, Karger ve Novak 1985). Öncelikle E^3 'teki hesaplamalar yapılacaktır. $A(t) - A(t)^T$, matrisin dönme ekseninin bulunmasına yardımcı olacaktır.

$$\begin{aligned} A(t) - A(t)^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & 0 \\ -\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \sin t \\ \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \cos t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \\ \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin t(1+\cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \\ -\frac{\sin t(1+\cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & 0 & \sin t + \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \\ \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} - \sin t & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{a} ,

$$\vec{a} = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} - \sin t, -\frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}}, -\frac{\sin t(1 + \cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \right)$$

olur. Şimdi $f(A) = B$ 'nin dönme eksenini, için $B - B^{-1}$ matrisi hesaplanacaktır.

$$B(t) = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & 0 \\ -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \sin t \\ -\frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(t)^{-1} = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \\ \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \\ 0 & -\sin t & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(t) - B(t)^{-1} = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin t(1+\cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \\ -\frac{\sin t(1+\cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & 0 & \sin t + \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \\ -\frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} + \sin t & 0 \end{bmatrix}$$

Dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{b} ,

$$\vec{b} = \frac{1}{\cos t} \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} - \sin t, -\frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}}, -\frac{\sin t(1 + \cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} \right)$$

olur.

$$\vec{b} = \frac{1}{\cos t} \vec{a}$$

$$Sp\{\vec{a}\} = Sp\{\vec{b}\}$$

elde edilir. O halde, bu iki eksen birbirine paraleldir.

5.2 Küresel Hareketlerin Ani Dönme Ekseninin Dual Dönüşüm Yardımıyla İncelenmesi

Bu bölümde, dual dönüşüm yardımıyla ani dönme hareketi ile ilgili uygulamalar yapılacaktır. Hareketin ani dönme eksenini önce Öklid uzayında sonra Lorentz uzayında incelenecektir.

A bir ortogonal matris olsun. Öyleyse $A'A^T$, Öklid uzayında bir anti-simetrik matris olmalıdır (Karger ve Novak 1985). Benzer şekilde A bir semi-ortogonal matris olsun.

O halde $A'A^{-1}$ Lorentz uzayında bir antisimetrik matris olmalıdır.

$$Y = AX \quad (4.1)$$

Eşitlik 4.1 in her iki tarafı A^{-1} ile çarpılırsa,

$$A^{-1}Y = A^{-1}AX$$

$$A^{-1}Y = X.$$

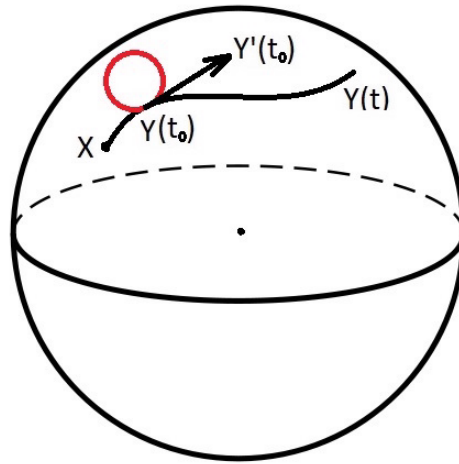
elde edilir. Eşitlik 4.1'nin türevi alınırsa,

$$Y' = A'X.$$

$$Y = A'A^{-1}Y$$

$$Y' = WY$$

elde edilir, burada W Lorentz uzayında anti-simetrik bir matristir ve küresel hareketin ani dönme eksenini verir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 Ani dönme hareketi

Teorem 5.2.1 f dual dönüşümü aşağıdaki gibi verilsin.

$$f : SO(3) \rightarrow SO(2, 1)$$

$$A \mapsto f(A) = B$$

Bir parametrelili hareket matrisi A 'nın ani dönme eksenini ile B 'nin ani dönme eksenini dual dönüşüm altında aynı kalmaz.

İspat $A \in SO(3)$ ortogonal matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A matrisinin ani dönme eksenini, $A'A^T$ matrisinin hesaplanmasıyla elde edilir. Burada A' matrisi, A 'nın türevidir.

$$A'A^T = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a'_{11}a_{21} + a'_{12}a_{22} + a'_{13}a_{23} & a'_{11}a_{31} + a'_{12}a_{32} + a'_{13}a_{33} \\ a'_{21}a_{11} + a'_{22}a_{12} + a'_{23}a_{13} & 0 & a'_{21}a_{31} + a'_{22}a_{32} + a'_{23}a_{33} \\ a'_{31}a_{11} + a'_{32}a_{12} + a'_{33}a_{13} & a'_{31}a_{21} + a'_{32}a_{22} + a'_{33}a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Anti-simetrik matrisi elde edilir. Eşitlik 2.2 den, ani dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{u} ,

$$\vec{u} = (a'_{31}a_{21} + a'_{32}a_{22} + a'_{33}a_{23}, a'_{11}a_{31} + a'_{12}a_{32} + a'_{13}a_{33}, a'_{21}a_{11} + a'_{22}a_{12} + a'_{23}a_{13})$$

olarak ifade edilir.

Bu hesaplamalar E_1^3 e taşınacaktır. $B'B^{-1}$ matrisi, $f(A) = B \in SO(2, 1)$ matrisinin

ani dönme eksenini verir.

$$B^{-1} = \varepsilon B^T \varepsilon = \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{31} \\ -a_{21} & a_{11} & a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B'B^{-1} = \frac{1}{a_{33}^2} \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}a'_{22} - a_{11}a'_{21} - a_{23}a'_{13} & a'_{22}a_{31} - a'_{21}a_{32} + a'_{13} \\ -a'_{12}a_{22} - a'_{11}a_{21} - a'_{23}a_{13} & 0 & -a'_{12}a_{31} - a'_{11}a_{32} - a'_{23} \\ -a'_{31}a_{22} + a'_{32}a_{21} & a'_{31}a_{12} - a'_{32}a_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

Anti-simetrik matrisi elde edilir. Eşitlik 2.2 den, E_1^3 'deki ani dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{w} ,

$$\vec{w} = \frac{1}{a_{33}^2} (-a'_{31}a_{12} + a'_{32}a_{11}, a'_{22}a_{31} - a'_{21}a_{32} + a'_{13}, -a'_{12}a_{22} - a'_{11}a_{21} - a'_{23}a_{13})$$

olarak elde edilir. $\vec{u} \neq \vec{w}$ olur. O halde, f dual dönüşümü A ve B matrislerinin ani dönme eksenlerini sabit bırakmamıştır.

Örnek 5.2.1 Bir eliptik harekete karşılık gelen örnek 5.1.1 deki $A \in SO(3)$ ve $f(A) \in SO(2, 1)$ matrislerinin ani dönme eksenleri hesaplanacaktır.

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & 0 \\ -\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \sin t \\ \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} & \cos t \end{bmatrix}$$

Öncelikle $A'A^T$ matrisi hesaplanmalıdır.

$$A'(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\sin t \cos t}{(\sin^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\cos t}{(\sin^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ \frac{\sin^4 t + \sin^2 t - \cos^2 t}{(\sin^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2 \sin t}{(\sin^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}} & \cos t \\ \frac{\sin t (\sin^2 t + 2) \cos t}{(\sin^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{\cos t}{(\sin^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}} & -\sin t \end{bmatrix}$$

$$A'(t)A(t)^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t+1} & -\frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t+1} \\ -\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t+1} & 0 & 1 \\ \frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t+1} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elde edilen anti-simetrik matris yardımıyla ani dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{u} , aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\vec{u} = \left(-1, -\frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t + 1}, -\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t + 1}\right)$$

Şimdi $f(A) = B$ 'nin ani dönme eksenini için $B'B^{-1}$ matrisi hesaplanacaktır.

$$B'(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\sin t \cos t}{(\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\cos t}{(\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ -\frac{\sec^2 t - \sin^2 t \tan^2 t}{(\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{4\sqrt{2} \sin t \tan^2 t}{(3-\cos 2t)^{\frac{3}{2}}} & \sec^2 t \\ -\frac{2 \tan t \sec t}{(\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\sec^2 t + \sin^2 t \tan^2 t}{(\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}} & \sec t \tan t \end{bmatrix}$$

$$B'(t)B(t)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos t}{\sin^2 t+1} & -\frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t+1} \\ -\frac{\cos t}{\sin^2 t+1} & 0 & 1 \\ -\frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t+1} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ani dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{w} ,

$$\vec{w} = \left(-1, -\frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t + 1}, -\frac{\cos t}{\sin^2 t + 1}\right)$$

olur. $\vec{u} \neq \vec{w}$ olur. O halde, A ve B matrislerinin ani dönme eksenleri, f dual dönüşümü altında aynı kalmamıştır.

5.3 Dual Dönüşüm İle Elde Edilen Dönel Yüzeyler

Bu bölümde, dual dönüşüm yardımıyla elde edilen dönel yüzeylerin Lorentz ve Ök-lid uzaylarındaki görüntüleri incelenecektir. Bir dönme matrisi, bir eğriye etki ettirilerek dönel yüzey elde edilecektir. Elde edilen dönel yüzeylerin görüntüleri karşılaştırılacaktır. Yüzeyler, Mapple 13 yardımıyla çizdirilmiştir.

Örnek 5.3.1 A matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 - \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & -\frac{\theta^2}{2} & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{bmatrix}.$$

A matrisi, $\alpha(s) = (\cos s, 0, \sin s)$ (çember) eğrisine etki ettirilirse aşağıdaki matris elde edilir.

$$A.\alpha(s) = \begin{bmatrix} 1 & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 - \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & -\frac{\theta^2}{2} & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos s \\ 0 \\ \sin s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos s - \theta \sin s \\ -\theta \cos s + \frac{\theta^2}{2} \sin s \\ -\theta \cos s + \sin s + \frac{\theta^2}{2} \sin s \end{bmatrix}$$

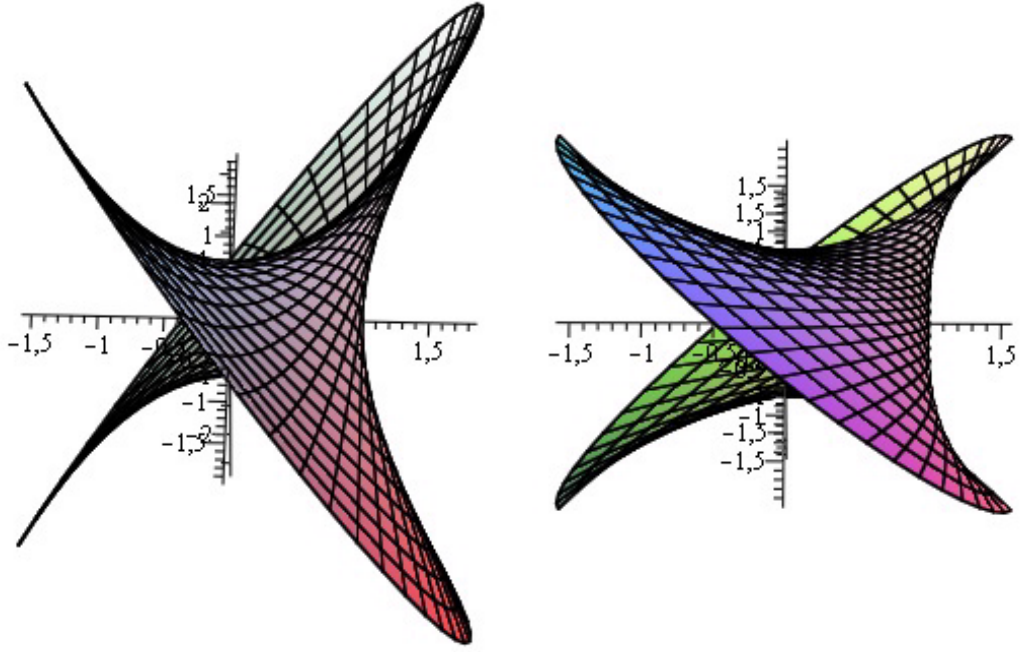
Elde edilen dönel yüzey, şekil 5.2 de sol taraftaki resimdir. Şimdi bu resmin Lorentz uzayındaki görünümünü incelemek için A matrisinin dual dönüşüm altındaki görüntüsü hesaplanacaktır.

$$f(A) = \frac{2}{2 + \theta^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 & \frac{\theta^2}{2} \\ \theta & \frac{\theta^2}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Elde edilen $f(A)$ matrisi $\alpha(s) = (\cos s, 0, \sin s)$ eğrisine etki ettirilirse,

$$f(A).\alpha(s) = \frac{2}{2 + \theta^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 & \frac{\theta^2}{2} \\ \theta & \frac{\theta^2}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos s \\ 0 \\ \sin s \end{bmatrix} = \frac{2}{2 + \theta^2} \begin{bmatrix} \cos s - \frac{\theta^2}{2} \cos s - \theta \sin s \\ -\theta \cos s + \frac{\theta^2}{2} \sin s \\ \theta \cos s + \sin s \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu dönel yüzey şekil 5.2 de sağ taraftaki resime karşılık gelmektedir. İki resim mukayese edildiğinde birbirine benzer görünümlere sahip oldukları dikkat çekmektedir.



Şekil 5.2 Çemberin döndürülmesiyle elde edilen 1. döneel yüzey

Örnek 5.3.2 Döneel yüzey elde etmek için seçilen A matrisi, x-ekseni etrafında dönme yaptıran matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Şimdi, A matrisi $\alpha(s) = (\cos s, 0, \sin s)$ (çember) eğrisine etki ettirilirse,

$$A \cdot \alpha(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos s \\ 0 \\ \sin s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin t \sin s \\ \cos t \sin s \end{bmatrix}$$

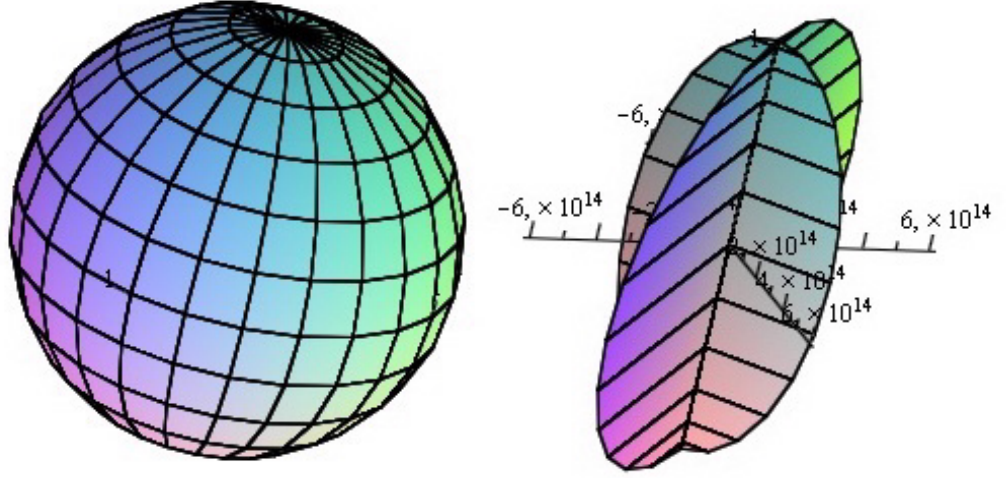
elde edilir. Bu, şekil 5.3 te soldaki resim yani küredir. İşlemler Lorentz uzayına taşınırsa,

$$f(A) = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin t \\ 0 & -\sin t & 1 \end{bmatrix}.$$

matrisi elde edilir. $f(A)$ matrisi yine çembere etki ettirilirse,

$$f(A).\alpha(s) = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin t \\ 0 & -\sin t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos s \\ 0 \\ \sin s \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \cos t \cos s \\ -\sin t \sin s \\ \sin s \end{bmatrix}.$$

matrisi hesaplanır. Sonuç olarak, şekil 5.3 te sağdaki resim elde edilmiş olur.



Şekil 5.3 Çemberin döndürülmesiyle elde edilen 2. dönel yüzey

Şekil 5.3 incelendiğinde, iki resmin birbirine benzediği görülür. Sağdaki resim soldakinin açılmış hali gibi görünmektedir. Aynı matris farklı eğrilere etki ettirilerek çıkan sonuçlar incelenmeye devam edilecektir.

Örnek 5.3.3 A , x-ekseni etrafında dönme yaptıran matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

A matrisine $\alpha(s) = \left(\frac{4}{\cos s}, 0, \frac{5 \sin s}{\cos s}\right)$ (hiperbol) eğrisi etki ettirilirse,

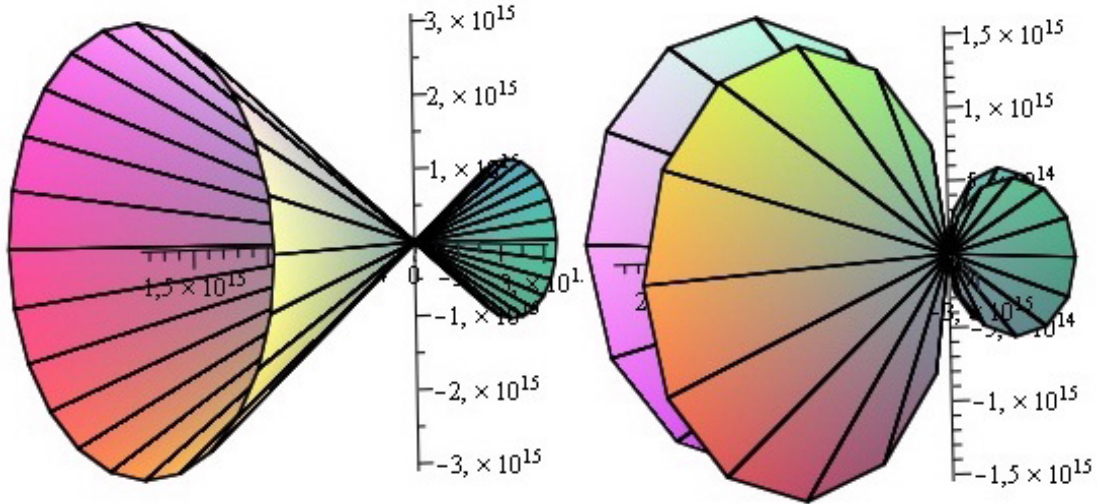
$$A.\alpha(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{\cos s} \\ 0 \\ \frac{5 \sin s}{\cos s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\cos s} \\ \frac{-5 \sin s \sin t}{\cos s} \\ \frac{5 \sin s \cos t}{\cos s} \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, şekil 5.4 te soldaki resim elde edilir. A nın dual dönüşüm altındaki görüntüsü ile resim Lorentz uzayına taşınacaktır.

$$f(A) = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin t \\ 0 & -\sin t & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi, $f(A)$ matrisi aynı eğriye etki ettirilirse, şekil 5.4 te sağdaki resim elde edilir.

$$f(A).\alpha(s) = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin t \\ 0 & -\sin t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{\cos s} \\ 0 \\ \frac{5 \sin s}{\cos s} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \frac{4 \cos t}{\cos s} \\ \frac{-5 \sin t \sin s}{\cos s} \\ \frac{5 \sin s}{\cos s} \end{bmatrix}$$



Şekil 5.4 Hiperbolün döndürülmesiyle elde edilen döneş yüzey

Bir önceki örnekte olduğu gibi şekil 5.4 te de iki resmin birbirine benzediği görülmek-

tedir. Yine sağdaki resim soldakinin açılmış halini anımsatmaktadır.

Örnek 5.3.4 A , x-eksenini sabit bırakan dönme matrisi olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

A matrisi $\alpha(s) = (s, s^2, 0)$ (parabol) eğrisine etki ettirilsin.

$$A.\alpha(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ s^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s^2 \cos t \\ s^2 \sin t \end{bmatrix}$$

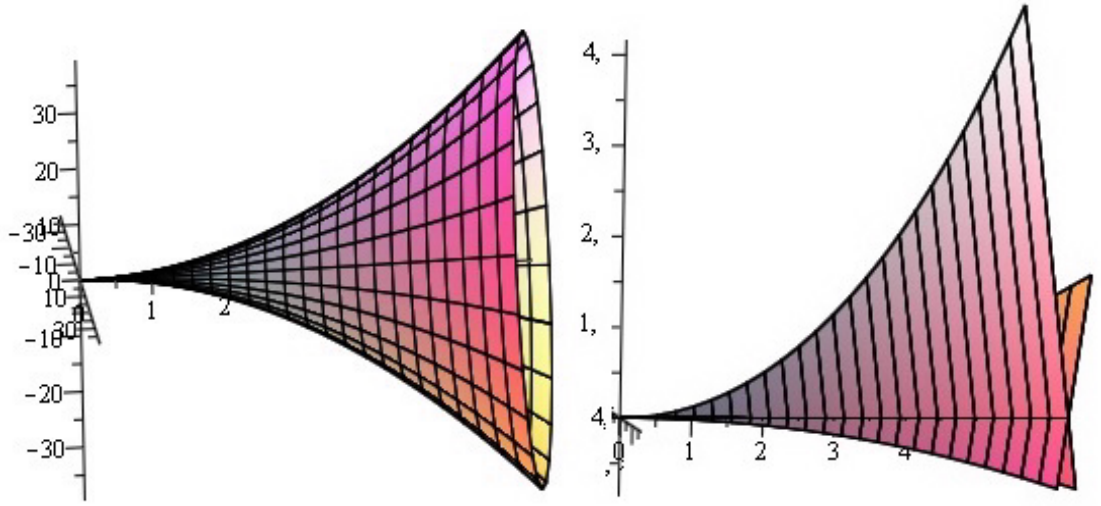
elde edilir. Sonuç olarak şekil 5.5 te soldaki resim elde edilmiş olur.

$$f(A) = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin t \\ 0 & -\sin t & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi ile Lorentz uzayındaki görünümünü incelemek için $f(A)$ aynı eğriye etki ettirilir.

$$f(A).\alpha(s) = \frac{1}{\cos t} \begin{bmatrix} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin t \\ 0 & -\sin t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ s^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s \cos t}{\cos t} \\ \frac{s^2}{\cos t} \\ -\frac{s^2 \sin t}{\cos t} \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 5.5 Parabolün döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey

Elde edilen resim şekil 5.5 te sağdaki resimdir ve soldaki resimle benzer görünüme sahiptir. Farklı uzaylarda benzer görünüme sahip olmaları ilgi çekicidir. Yukarıda verilen örnekler düşünüldüğünde, dual dönüşümün bu iki uzay arasında köprü vazifesi yaptığı görülmektedir.

6. UZAY HAREKETLERİ

6.1 Uzay Hareketlerinin Vida Ekseninin Dual Dönüşüm Yardımıyla İncelenmesi

E^3 de, dual ortogonal matris $\widehat{A} \in S\widehat{O}(3)$ bir uzay hareketine karşılık gelir ve bu hareketin eksenini vida eksenidir. Benzer şekilde, dual semi-ortogonal matris $f(\widehat{A}) = \widehat{B} \in S\widehat{O}(2,1)$, E_1^3 de bir katı harekete karşılık gelir ve bu hareketin eksenini vida eksenidir. Teorem 6.1.1'de, bu vida eksenlerinin aynı veya paralel olduğu gösterilecektir.

Teorem 6.1.1 f dual dönüşümü, katı cisim hareketi matrisleri \widehat{A} ve $f(\widehat{A})$ nın vida eksenlerini paralel ya da değişmez bırakır. (Bu, timelike ve spacelike durumlarda geçerlidir.)

İspat. $\widehat{A} \in S\widehat{O}(3)$ dual ortogonal matrisi verilsin.

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{13} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} & \widehat{a}_{23} \\ \widehat{a}_{31} & \widehat{a}_{32} & \widehat{a}_{33} \end{bmatrix}$$

$\widehat{A} - \widehat{A}^T$ matrisi ile E^3 deki vida eksenini hesaplanır (Ramis ve Yaylı 2010).

$$\widehat{A} - \widehat{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{a}_{12} - \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{13} - \widehat{a}_{31} \\ \widehat{a}_{21} - \widehat{a}_{12} & 0 & \widehat{a}_{23} - \widehat{a}_{32} \\ \widehat{a}_{31} - \widehat{a}_{13} & \widehat{a}_{32} - \widehat{a}_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\vec{u}} = (\widehat{a}_{32} - \widehat{a}_{23}, \widehat{a}_{13} - \widehat{a}_{31}, \widehat{a}_{21} - \widehat{a}_{12})$$

elde edilir. Vida eksenini, $\widehat{\vec{u}}$ vektörünün birim formu olarak hesaplanır.

$$\widehat{\vec{u}}_0 = \frac{\widehat{\vec{u}}}{\|\widehat{\vec{u}}\|}$$

\widehat{u}_0 birim dual vektörü E^3 de bir doğruya karşılık gelir. (E. Study dönüşümü). Bu doğru, hareketin vida eksenidir.

Bu hesaplamaları E_1^3 in dual uzayına taşımak için, $f(\widehat{A}) = \widehat{B} \in S\widehat{O}(2,1)$ nin vida eksenini bulunmalıdır.

$$f(\widehat{A}) = \frac{1}{\widehat{a}_{33}} \begin{bmatrix} \widehat{a}_{22} & -\widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{13} \\ -\widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{23} \\ -\widehat{a}_{31} & -\widehat{a}_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$\widehat{B} - \widehat{B}^{-1}$ matrisi ile \widehat{B} nin vida eksenini elde edilir. Öncelikle \widehat{B}^{-1} matrisi hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} \widehat{B}^{-1} = \varepsilon \widehat{B}^T \varepsilon &= \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{a}_{22} & -\widehat{a}_{12} & -\widehat{a}_{31} \\ -\widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{11} & -\widehat{a}_{32} \\ \widehat{a}_{13} & \widehat{a}_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \widehat{B} - \widehat{B}^{-1} &= \frac{1}{\widehat{a}_{33}} \begin{bmatrix} 0 & -\widehat{a}_{21} + \widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{13} - \widehat{a}_{31} \\ \widehat{a}_{21} - \widehat{a}_{12} & 0 & \widehat{a}_{23} - \widehat{a}_{32} \\ \widehat{a}_{13} - \widehat{a}_{31} & \widehat{a}_{23} - \widehat{a}_{32} & 0 \end{bmatrix} \\ \widehat{w} &= (\widehat{a}_{32} - \widehat{a}_{23}, \widehat{a}_{13} - \widehat{a}_{31}, \widehat{a}_{21} - \widehat{a}_{12}) \end{aligned}$$

vektörü elde edilir.

$$\widehat{w}_0 = \frac{\widehat{w}}{\|\widehat{w}\|}$$

birim dual vektörü, hareketin vida eksenidir.

$$\widehat{w}_0 = \widehat{u}_0$$

olduğu görülür. O halde, birim dual vektörlerin doğrultman vektörleri aynıdır, fakat geçtiği noktalar farklı olabilir (E.Study dönüşümü).

Örnek 6.1.1. $\widehat{A} \in S\widehat{O}(3)$ dual ortogonal matrisi aşağıdaki gibi olsun.

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \varepsilon \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & -\varepsilon \\ 0 & \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

Vida eksenini hesaplamak için, $\widehat{A} - \widehat{A}^T$ matrisi hesaplanmalıdır.

$$\widehat{A} - \widehat{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} & \varepsilon \\ \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} & 0 & \varepsilon\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \\ -\varepsilon & \varepsilon\left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

O halde,

$$\begin{aligned} \widehat{u} &= \left(\varepsilon\left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\right), \varepsilon, \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}\right), \\ \widehat{u}_o &= \frac{\widehat{u}}{\|\widehat{u}\|} = (\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \widehat{A}_3), \|\widehat{u}_o\| = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\|\widehat{u}\| = \sqrt{\langle \widehat{u}, \widehat{u} \rangle} = \sqrt{0 + 0 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\widehat{u}_o = \left(\frac{\varepsilon\left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}}, \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}}\right) = \left(\varepsilon\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right), \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

birim dual vektörü bulunur. Şimdi bu hesaplamalar E_1^3 in dual uzayına taşınacaktır.

\widehat{A} matrisinin dual dönüşüm altındaki görüntüsü olan $f(\widehat{A}) = \widehat{B} \in S\widehat{O}(2, 1)$ matrisi,

$$f(\widehat{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \varepsilon \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & -\varepsilon \\ 0 & -\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

olur. $\widehat{B} - \widehat{B}^{-1}$ matrisi ile \widehat{B} nin vida eksenini verecektir.

$$\widehat{B}^{-1} = \varepsilon \widehat{B}^T \varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{B} - \widehat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} & \varepsilon \\ \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} & 0 & \varepsilon \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \\ \varepsilon & \varepsilon \left(\frac{-\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{w} = \left(\varepsilon \left(\frac{-\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} \right), \varepsilon, \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\widehat{w}_o = \left(\frac{\varepsilon \left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{2} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}}, \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}} \right) = \left(\varepsilon \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right), \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

elde edilir. Bu örnekte, dual vektörlere karşılık gelen vektörler çakışıkır. Doğrunun geçtiği nokta $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0)$ ve doğrultmanı $(0, 0, 1)$ dir. Bu doğrular, E^3 deki \widehat{A} ve E_1^3 deki $f(\widehat{A})$ katı cisim hareketi matrislerinin vida eksenleridir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, Lorentz uzayı ve Öklid uzayı arasında bir köprü görevi gören dual dönüşümler çalışılmıştır. Bu dönüşümlerin dual uzayda tanımı yapılmış, reel ve dual uzaylardaki uygulamalarına yer verilmiştir. Dual dönüşümlerin invaryant bıraktığı özellikler incelenmiştir. Küresel hareketlerin dönme ve ani dönme eksenleri ile uzay hareketlerinin vida eksenleri üzerinde durulmuştur. Dual dönüşümlerin dönme ve vida eksenlerini invaryant bırakırken ani dönme eksenini bırakmadığı gözlemlenmiştir. Maple 13 yardımıyla çizilen dönel yüzey şekilleri ilgi çekici olmuştur. Şekillerin görünümünün benzerliği bu dönüşümün iki uzay arasında bir köprü görevi üstlendiğine ışık tutmaktadır.

KAYNAKLAR

- Dohi, R., Maeda, Y., Mori, M. and Yoshida, H. 2010. A dual transformation between $S\hat{O}(n+1)\setminus\{(00\text{-component})=0\}$ and $S\hat{O}(n,1)$ and its geometric applications, Linear Algebra and its Applications. 432, 770-776.
- Gray, A. 1998. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. Second ed. CrcPress, 1053, USA.
- Greub, W.H., 1967. "Linear Algebra". Springer-Verlag, New York.
- Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 272, Ankara.
- Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 340, Ankara.
- Hacısalihođlu, H. H. 2005. 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 453, Ankara
- Hacısalihoğlu, H. H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No:2, Ankara
- Jennings, G., 1994. "Modern Geometry with Applications". Springer-Verlag, New York.
- Karger, A. and Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, Montreux, Tokyo
- Lopez, R. 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, Mini-Course Taught at the Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP), University of Sao Paulo, Brasil
- Maeda, Y. and Maehara, H., 2003. "Observing an angle from various viewpoints". JCDCG 2002, LNCS 2866; 200-203 Springer-Verlag, Berlin.
- Maeda, Y. and Mori, M., 2005. "Three visual angles of three dimensional orthogonal axes and their visualization, Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics"
- Maeda, Y. and Yoshida, H., 2008. "Hyperbolic geometry as a view screen in Minkowski space". Proceedings of the 13th Asian Technology Conference in Mathematics, Mathematics and Technology, LLC; 143-152.

- McCarthy, J. M. 1990. An Introduction to Theoretical Kinematics, MIT Press, Cambridge.
- O' Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, A. Press, 482 p., New York.
- O' Neill, B. 2006. Elementary Differential Geometry. Academic Press, 518p., New York.
- Ramis, Ç. and Yaylı, Y. 2010. Dual split quaternions and Chasles theorem in 3-dimensional Minkowski Space E_1^3 , Adv. Appl. Clifford Algebras. 432, 770-776.
- Ryan, P.J. 1986. "Euclidean and non-Euclidean Geometry". Cambridge University Press, Cambridge.
- Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometri, 440, Nobel Yayınları, Ankara.
- Weinstein, T. 1996. "An Introduction to Lorentz surfaces". de Gruyter, New York.
- Yaylı, Y., Çalışkan, A. and Uğurlu, H. H. 2002. The E. Study maps of circles on dual hyperbolic and Lorentzian unit spheres H_0^2 and S_1^2 , Math. Proc. R. Ir. Acad. 102A, no. 1,37-47.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülstüm YÜCA
Doğum Yeri : Balıkesir
Doğum Tarihi : 26.06.1985
Medeni Hali : Evli
Yabancı Diller : İngilizce, İspanyolca, Almanca

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi (2001)
Erzurum Anadolu Lisesi (2003)
Lisans : Başkent Üniversitesi Eğitim Fakültesi
İlk. Matematik Öğretmenliği Bölümü Burslu (2008)
Başkent Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Bilgisayar ve Öğrt. Teknolojileri Öğretmenliği Bölümü Burslu (2009)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2009 – 2011)
Granada Üniversitesi Geometri Topoloji Bölümü - İspanya
Tez Çalışması (Davetli Öğrenci) (2010)
Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2011 – 2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve yıl

Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Ekim 2011 –)

Hakemli Dergi

1) **Biçer, G.**, Yaylı, Y. "Kinematics of Dual Transformation", European International Journal of Science and Technology, vol.3, no.8, pp 83-89 .

Uluslararası Kongreler

- 1) Öztislađlam E., **Biçer G.**, Atalay A., Poşpoş P., Open Source Softwares In Mathematics Education, I. Uluslararası Avrasya Matematik Bilimleri ve Uygulamaları Konferansı (IECMSA), Priştine Üniversitesi, 3-7 Eylül 2012 Priştine/KOSOVA
- 2) **Yüca, G.**, Yaylı, Y. "Different Metrics Similar Shapes", III. Uluslararası Avrasya Matematik Bilimleri ve Uygulamaları Konferansı (IECMSA), 25-28 Ağustos 2014, Viyana/AVUSTURYA
- 3) **Yüca, G.**, Yaylı, Y. "Dual Transformations and One-Parameter Motions", International Conference on Recent Advances In Pure And Applied Mathematics (ICRAPAM), 6-9 Kasım 2014, Antalya

Ulusal Kongre

- 1) **Biçer, G.**, Yaylı, Y. "Dual Transformations and Their Geometric Applications", 8. Geometri Sempozyumu, 29 Nisan-2 Mayıs 2010, Antalya.