ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KREIN TEOREMİ VE İLETİM KOŞULLU DİSSİPATİF OPERATÖRLER

Ekin UĞURLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2014

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

10/09/2014

Ekin UĞURLU

ÖZET

Doktora Tezi

KREIN TEOREMİ VE İLETİM KOŞULLU DİSSİPATİF OPERATÖRLER

Ekin UĞURLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde bilinen bazı tanım ve teoremler verilmiştir.
Üçüncü bölümde keyfi $n-$noktada iletim koşullu singüler dissipatif Sturm-Liouville operatörün spektral analizi incelenmiştir. Bu analiz Krein teoremi yardımıyla yapılmıştır. Krein teoremini kullanmak için ise tam fonksiyonlar teorisinden yararlanılmıştır. Sonuç olarak, ilgili operatörün kök vektörler sisteminin Hilbert uzayında tam bir sistem oluşturduğu gösterilmiştir.
Dördüncü bölümde yine keyfi $n-$noktada iletim koşulu içeren Bessel-tipli Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi incelenmiştir. İnceleme yöntemi üçüncü bölümde bahsedilen yöntemle benzerdir.
Beşinci bölüm tartışma ve sonuç bölümüne ayrılmıştır.

Eylül 2014, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dissipatif operatörler, iletim koşulları, tamlık teoremi, Weyl teorisi

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

KREIN'S THEOREM AND DISSIPATIVE OPERATORS WITH TRANSMISSION CONDITIONS

Ekin UĞURLU

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This thesis consists of five chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter some definitions and theorems are given.
In the third chapter the spectral analysis of the singular dissipative Sturm-Liouville operator with transmission conditions which are given at arbitrary $n-$interior points is investigated. This analysis is done with the help of Krein's theorem. Further to use Krein's theorem, theory of entire functions is used. Consequently, it is shown that the system of root vectors of the related operator is complete in the Hilbert space.
In the fourth chapter the spectral analysis of the Bessel-type Sturm-Liouville operator with transmission conditions which are also given at arbitrary $n-$interior points is investigated. The method of investigation is similar to the method given in the third chapter.
The fifth chapter is devoted to the discussion and conclusion section.

September 2014, 53 pages

Key Words: Dissipative operators, transmission conditions, completeness theorem, Weyl's theory

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca özgür bir bilimsel ortamda engin bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, yol gösteren ve bilim insanı olarak yetişmemde en fazla emeği olan çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı) ve beni büyük bir sabır ve özveriyle yetiştiren, desteklerini bir an olsun eksiltmeyen çok sevgili aileme en içten saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca matematik alanında geçmişte ve günümüzde literatüre kazandırılmış bilimsel çalışmalara ulaşmamda yardımı olan temel kurum Orta Doğu Teknik Üniversitesi Kütüphanesi aracılığıyla, kütüphanenin oluşturulmasında ve bugüne getirilmesinde emeği geçenlere ve kütüphane çalışanlarına en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ekin UĞURLU
Ankara, Eylül 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

dim	Boyut
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\Re$	Reel kısım
$\Im$	İmajiner kısım
$\langle .,. \rangle_H$	H Hilbert uzayında tanımlı iç çarpım
$\sum$	Toplam sembolü
$\bigoplus$	Direkt toplam sembolü

1. GİRİŞ

Bir diferensiyel eşitlik ve belli anlardaki başlangıç ya da sınır koşullarıyla ele alınan problemlere başlangıç-değer ya da sınır-değer problemi denir. Bu türlü problemlerin çözülmesindeki amaçlardan bazıları, çözümlerin asimptotik davranışlarını belirlemek, kararlılık durumlarını incelemek, özdeğerlerin reel eksene veya kompleks düzleme dağılımlarını belirlemek ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektör ve eşleşen vektörler sisteminin tam bir sistem oluşturduğunu, bir başka deyişle, tanımlı oldukları uzayı gerdiğini belirlemektir. Bu türlü problemlerin çözümü için kullanılan en etkili yöntemlerden biri operatörler teorisi yöntemidir. Bu ise problemle uyumlu bir operatörün belirlenmesi ve operatörün çeşitli özelliklerinin incelenmesi üzerinedir. Ardından operatör ile ilgili elde edilen bu özellikler probleme taşınır.

Ele alınan sınır-değer problemindeki diferensiyel ifadenin katsayıları ve sınır koşullarındaki parametrelerin reel değerli olması durumunda, ilgili operatör, eşleniğine eşit olmaktadır. Bu türlü operatörlere kendine eşlenik operatör denilmektedir. İyi bilinmektedir ki kendine eşlenik operatörlerin tüm özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri reeldir. Fakat kendine eşlenik olmayan operatörlerin özdeğerleri reel olmayabilir. Özel olarak kendine eşlenik olmayan operatörlerin özel bir sınıfını oluşturan dissipatif operatörlerin özdeğerleri kompleks düzlemin kapalı üst yarısında bulunmaktadır. Fakat bu bilgi, dissipatif (akümülatif) operatörlerin spektral analizinde oldukça yetersizdir. Örneğin özdeğerlerin üst yarı düzleme dağılım durumları, özdeğerlerin katı, özdeğerlere karşılık gelen kök vektörlerin (özvektörler ve eşleşen vektörlerin) tam bir sistem oluşturup oluşturmadığı soruları cevap beklemektedir.

Literatürde dissipatif operatörlerin spektral analizini yapmak için çeşitli yöntemler mevcuttur. Bu yöntemlerden biri Riesz'in çevre integrali yöntemidir (Riesz ve Nagy 1955). Bu yöntem spektrumu ayıran çevreler üzerinde resolventin hesaplanmasıyla ilgilidir. Regüler diferensiyel operatörler için bu yöntem kullanışlı olmasına karşın, singüler diferensiyel operatörlerde yöntem işlevliğini kaybetmektedir. Bu durumun esas nedeni ise singüler diferensiyel operatörler ile ele alınan denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışları hakkında yeterli bilgiye sahip olunmamasıdır.

1967'de Sz.-Nagy ve Foiaş, bir Hilbert uzayında daralan bir lineer operatörün spektral analizi hakkında bilgi veren bir yöntem sunmuşlardır (Sz.-Nagy ve Foiaş 1970). Bu yöntem, daralan operatörün karakteristik fonksiyonu ile ilgilidir. Eğer karakteristik fonksiyon bir Blaschke çarpımıysa, operatörün tüm kök vektörler sistemi uzayı gerer. Bu basit anlatımın temelinde fonksiyonel model yöntemi yatmaktadır ve belirtilmelidir ki fonksiyonel model yöntemi günümüzde halen etkili bir şekilde kullanılmaktadır. Diğer yandan yine 1967'de Sz.-Nagy ve Foiaş'tan bağımsız olarak Lax ve Phillips, fizikçilerin saçılma fonksiyonunu başka bir açıdan ele almak için soyut saçılma fonksiyonunu oluşturmuşlardır (Lax ve Phillips 1967). Soyut saçılma fonksiyonu ya da Lax-Phillips saçılma fonksiyonunun temelinde, Hilbert uzayının ortogonal altuzayları cinsinden yeniden ele alınması yatar. Bu ortogonal alt uzaylar (gelen (incoming) ve giden (outgoing) altuzaylar) ve üniter grup, belli bazı özellikleri gerçekler. Dolayısıyla bu alt uzaylar üzerinde bir (soyut) saçılma fonksiyonu kurulabilir. Bu saçılma fonksiyonunun sıfırları, ortogonal alt uzayların ortogonal tümleyeni üzerinde tanımlı daralan yarıgrubun jeneratörünün özdeğerleriyle çakışır. Adamyan ve Arov ise Lax-Phillips saçılma fonksiyonu ve Sz.-Nagy-Foiaş karakteristik fonksiyonunun, temelde aynı fonksiyonlar olduğunu göstermiştir (Adamyan ve Arov 1966). İşte bu bağlantı bir dissipatif operatörün spektral analizinde önemli bir yöntem oluşturur.

Bir kompakt operatör ve onun eşleniği yardımıyla pozitif bir operatör kurulabilir. Bu pozitif operatörün özdeğerlerinin kareköküne, ele alınan kompakt operatörün $s-$sayıları denir. Bu $s-$sayılarının toplamı sonlu ise, ele alınan kompakt operatöre nükleer operatör denir (Pietsch 1987, Gohberg vd. 1990, Gohberg vd. 2000, Simon 2005). Nükleer operatörler sınıfı, dissipatif operatörlerin spektral analizinde kullanılan diğer yöntemlerde temel oluşturur. Ayrıca belirtilmelidir ki belli tip kompakt integral operatörlerin $s-$sayılarının belirlenmesi literatürde yoğun bir şekilde incelenmektedir.

Dissipatif operatörlerin spektral analizinde kullanılan teoremlerden biri Livšic teoremidir (Gohberg ve Krein 1969). Bu teorem, bir dissipatif operatörün kompakt ve imajiner kısmının izinin sonlu olması üzerinedir. Bir başka deyişle kompakt dissipatif operatörün imajiner kısmının nükleer olması üzerinedir. Bu durumda dissipatif operatörün kök vektörler sisteminin tam olması için gerek ve yeter koşul dissipatif operatörün özdeğerlerinin imajiner kısmının toplamıyla, operatörün imajiner kısmının izinin çakışmasıdır. Dissipatif operatörlerin spektral analiziyle ilgili bir başka yöntem Lidskii teoremiyle ilgilidir (Gohberg ve Krein 1969). Bu yöntem ise bir dissipatif operatörün iz sınıfından (nükleer) olmasıyla ilgilidir. Diğer bir yöntem ise Krein teoremi kullanılarak oluşturulur (Gohberg ve Krein 1969). Krein teoremi, imajiner kısmı nükleer olan bir kompakt dissipatif operatörün reel kısmının karakteristik sayılarının miktarı üzerinedir. Bu yöntem için tam fonksiyonlar teorisine ihtiyaç duyulmaktadır. Literatürde, bu yöntem kullanılarak yapılmış çalışmalar mevcuttur (Guseinov 1993, 2002). Ayrıca Krein teoremi bu tez hazırlanırken de kullanılan teoremler arasındadır.

Diferensiyel denklemin katsayılarından en az birinin tanımlı olduğu aralığın en az bir noktasında sınırsız olarak artması durumunda, diferensiyel denklemin ya da diferensiyel denklem ve uygun sınır-değer problemi ile üretilen operatörün spektral özelliklerini belirlemedeki temel araçlardan biri Weyl teorisidir. Weyl 1910 yılında yayınladığı makalesinde yarı-sınırsız bir aralıkta tanımlı ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemin lineer bağımsız çözümlerinden en azından birinin mutlaka karesel integrallenebilir olması gerektiğini göstermiştir (Weyl 1910). Bunun yanı sıra diğer lineer bağımsız çözüm ve bu çözümlerin lineer kombinasyonlarının da karesel integrallenebilir olabileceğini göstermiştir. İkinci durum literatürde limit-çemberi durumu olarak bilinir. Denklem ya da operatör, limit-çemberi durumunda değilse denkleme ya da operatöre limit-noktası durumundadır denir. Weyl teorisi, operatörler teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Operatörler teorisinin temel problemlerinden biri verilen minimal simetrik bir diferensiyel operatörün tüm kendine eşlenik genişlemelerinin belirlenmesidir. Bu problem, Weyl teorisiyle yakından ilgilidir. Simetrik operatörlerin genişleme teorisinde, Neumann'ın teorisindeki eksiklik sayıları temel oluşturur. Bu teoriye göre L_0, tanım kümesi $D(L_0)$ olan minimal simetrik bir operatör ve λ kompleks bir sayı olmak üzere

$$m = \dim\left\{\left(L_0 - \overline{\lambda} I\right) D(L_0)\right\}^{\perp}, \quad n = \dim\left\{(L_0 - \lambda I)\, D(L_0)\right\}^{\perp}$$

şeklinde tanımlanan (m, n) ikilisine L_0 operatörünün eksiklik sayıları denir (Naimark 1968). L_0 ın kendine eşlenik genişlemelerinin olması için gerek ve yeter koşul $m = n$ olmasıdır. Buradaki eksiklik sayıları L_0 ın kendine eşlenik genişlemesini elde etmek için gerekli olan lineer bağımsız kendine eşlenik sınır koşullarının sayılarıyla aynıdır. Dolayısıyla Weyl teorisi ile Neumann'ın genişleme teorisi birbirini tamamlamaktadır. Bu konuyla ilgili detaylı bilgi Devinatz'ın makalesinde bulunabilir (Devinatz 1973). Literatürde $(1, 1)$ durumu limit-noktası durumu ve $(2, 2)$ durumu ise limit-çemberi durumu olarak bilinir.

1981 yılında yayınlanan bir makalede bir diferensiyel denklemin katsayılarının, tanımlı oldukları aralığın bir iç noktasında singülerliğe sahip olması durumu ele alınmıştır (Boyd 1981). Bu durumda esas aralık, ayrılan iki aralığın birleşimi şeklinde ele alınabilir. Daha da ileri bir durum olarak ayrık iki aralık üzerinde tanımlı bir diferensiyel denklem ele alınabilir. Bu diferensiyel denklem, direkt toplam şeklinde yazılabilen bir diferensiyel operatör tarafından kurulur. Bu durumda ise ortaya çıkacak minimal simetrik operatörün eksiklik sayılarının belirlenmesi yeni bir problemdir. Bu problem 1986 yılında Everitt ve Zettl tarafından çözülmüştür (Everitt ve Zettl 1986). Everitt ve Zettl minimal simetrik direkt toplam operatörünün tüm olası eksiklik sayılarını ve bu operatörün tüm kendine eşlenik genişlemesinin nasıl olacağını sunmuştur.

2004 yılında Muhtarov ve öğrencileri literatürde yeni sayılabilecek bir dizi problemi incelediler (Tunç ve Muhtarov 2004, Mukhtarov ve Tunç 2004, Muhtarov vd. 2004, Altınışık vd. 2004, Mukhtarov ve Kadakal 2005). Bu problemlerde, regüler bir aralıkta tanımlı ikinci mertebeden bir diferensiyel denklem ve uygun sınır koşulları yanı sıra denklemin tanımlı olduğu aralığın bir iç noktasında, denklemin çözümlerinin belli geçiş koşullarını sağlamaları istenmektedir. Bu türlü problemlerin çözümü için geliştirilen yöntem, iç noktada süreksizlik durumlarının nasıl ele alınabileceğine bir temel oluşturur. İlerleyen yıllarda Muhtarov ve öğrencileri bu türlü problemlerin spektral özellikleri hakkında literatüre yeterince bilgi vermişlerdir (Kadakal ve Muhtarov 2006, 2007, Akdoğan vd. 2007). Son yıllarda ise süreksizlik koşulu içeren sınır-değer problemleri matematikçiler tarafından yoğun bir şekilde incelenmektedir (Ao vd. 2011, 2012). Bu incelemelerin temelinde ise Hilbert uzayının, bir direkt toplam Hilbert uzayı şeklinde ele alınması ve bu uzay üzerinde problemle uyumlu bir iç çarpımın oluşturulması yatar. Bu fikir, Friedman'ın sınır koşullarında spektral parametre içeren problemlere yaklaşım tarzının bir benzeri formundadır (Friedman 1956).

2007 yılında Sun, Wang ve Zettl, bu türlü iç çarpım katsayıları içeren direkt toplam uzaylarında eksiklik sayı teorisini geliştirmişlerdir (Sun vd. 2007). 2009 yılında ise Cao, Wang ve Wu bu teoriyi keyfi $n-$aralık üzerinde tanımlı diferensiyel operatörlere genişletmişlerdir (Cao vd. 2009).

Bu tezde ise keyfi $n-$noktada iletim koşulu içeren singüler dissipatif Sturm-Liouville ve Bessel-tipli Sturm-Liouville sınır-değer-iletim probleminin spektral analizi, Krein teoremi yardımıyla incelenmiştir. Problemin spektral analizi incelenirken tam fonksiyonlar teorisinden faydalanılmıştır. Ayrıca ele alınan Hilbert uzayında problemlerle uyumlu iç çarpım ve operatörler kurulmuştur. Bu yeni operatörlerin spektral özellikleri hakkında temel bilgilere ulaşılmış ve ardından ters operatöre geçilmiştir. Ters operatörünün Green fonksiyonu yardımıyla ters operatör, iki operatörün toplamı şeklinde yazılabilmiş ve bu toplam operatörlerin özellikleri ve Krein teoremi yardımıyla ele alınan problemlerin spektral analizi öğrenilmiştir. Elde edilen sonuçlar $n-$noktada iletim koşuluna sahip problemler için iyi bir kaynak oluşturacak niteliktedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bilinen bazı tanım ve teoremler ifade edilecektir.

Öncelikle tam fonksiyonlar ve bazı özellikleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.1. Düzlemin tamamında analitik olan kompleks değerli fonksiyona tam fonksiyon denir (Levin 1972).

Tanım 2.2. Bir tam fonksiyon olan $f(z)$ nin büyüklüğünü karakterize etmek için

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

fonksiyonu belirlensin. Yeterince büyük tüm r değerleri için

$$M_f(r) < e^{r^k}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif bir k sayısı bulunabiliyorsa, $f(z)$ tam fonksiyonuna sonlu mertebeli fonksiyon denir (Levin 1972).

Mertebesi belli olan bir fonksiyonun büyüklüğü daha açık bir şekilde ifade edilebilir.

Tanım 2.3. Mertebesi ρ olan bir $f(z)$ tam fonksiyonunun cinsi,

$$M_f(r) < e^{Ar^\rho}$$

eşitsizliğini gerçekleyen A pozitif sayılarının en küçüğü olarak tanımlanır.

$f(z)$ nin cinsine σ denirse

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$$

eşitliği ile verilir. $\sigma = 0$ ise $f(z)$ ye minimal cinsten, $0 < \sigma < \infty$ ise normal cinsten ve $\sigma = \infty$ ise maksimal cinsten denir (Levin 1972).

Teorem 2.4. (a) Farklı mertebelere sahip iki tam fonksiyonun çarpımının mertebesi, çarpanların mertebesinin büyük olanına ve cinsi de, mertebesi büyük olanın cinsine eşittir.

(b) Biri normal σ cinsine ve diğeri minimal cinse sahip ve aynı mertebeden iki tam fonksiyonun çarpımı, aynı mertebeye ve σ cinsine sahip bir tam fonksiyondur.

(c) Biri maksimal cinsten ve diğeri normal cinsten olan aynı ρ mertebesine sahip iki tam fonksiyonun çarpımı, mertebesi ρ olan ve maksimal cinsten bir tam fonksiyondur (Levin 1972).

Tam fonksiyonlar teorisiyle ilgili kullanışlı bir teorem sıradaki gibidir.

Teorem 2.5. Bir $f(z)$ fonksiyonunun $[0, \rho]$ ve $[-\rho, 0]$ aralıklarındaki sıfırlarının miktarı sırasıyla $n_+(\rho, f)$ ve $n_-(\rho, f)$ ile gösterilsin. Eğer $f(z)$ tam fonksiyonunun mertebesi en çok 1 ise (≤ 1) ve cinsi minimalse bu durumda

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{n_+(\rho, f)}{\rho} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{n_-(\rho, f)}{\rho} = 0$$

eşitliği gerçeklenir (Krein 1952).

Şimdi operatörler teorisi üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.6. Bir F cismi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlı olan X uzayına lineer uzay denir (Lax 2002).

Tanım 2.7. Aynı skaler cisim üzerinde tanımlı lineer bir X uzayından lineer bir U uzayına olan bir

$$M : X \to U$$

dönüşümü

$$M(x+y) = M(x) + M(y),$$
$$M(kx) = kM(x),$$

özelliklerini gerçeklemesi durumunda, M dönüşümüne lineer dönüşüm denir (Lax 2002).

Tanım 2.8. X uzayı $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ üzerinde lineer uzay olsun. X üzerinde bir norm ile aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli bir fonksiyon belirtilir:

$i)$ $\|x\| > 0$, $x \neq 0$; $\|0\| = 0$,

$ii)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

$iii)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, α skaler (Lax 2002).

Tanım 2.9. Tam olan normlu lineer uzaya Banach uzayı denir (Lax 2002).

Tanım 2.10. Bir X Banach uzayından bir U Banach uzayına tanımlı lineer bir $M : X \to U$ dönüşümüne, her $x \in X$ için

$$\|Mx\| \leq c \|x\|, \ c \text{ sabit},$$

eşitsizliğini gerçeklemesi durumunda sınırlı lineer bir dönüşüm denir (Lax 2002).

Tanım 2.11. $\mathbb{R}$ cismi üzerinde lineer bir X uzayında tanımlı bir iç çarpım ile X te bulunan x ve y noktalarının (x, y) ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli bir fonksiyon ifade edilir:

$i)$ her sabitlenmiş y için (x, y), x in bir lineer fonksiyonudur ve her sabitlenmiş x için (x, y), y nin bir lineer fonksiyonudur,

$ii)$ $(y, x) = (x, y)$,

$iii)$ $(x, x) > 0$, $x \neq 0$.

Skaler cisim $\mathbb{C}$ alındığında (x, y) kompleks değerlidir ve $i)$ ve $ii)$ şu şekilde ifade edilir:

i') $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$,

ii') $(y, x) = \overline{(x, y)}$.

Verilen bir iç çarpımdan bir norm

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

eşitliği ile elde edilir (Lax 2002).

Tanım 2.12. Üzerinde iç çarpım tanımlı bir lineer uzay, ürettiği norma göre tam ise lineer uzaya Hilbert uzayı denir (Lax 2002).

X lineer uzayında iki nokta arasındaki uzaklık norm yardımıyla

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada tanımlanan fonksiyona X üzerinde bir metrik denir (Lax 2002).

Tanım 2.13. Bir tam, normlu R uzayında bir M kümesine, M nin her sonsuz $\{x_n\}$ dizisinin R deki norma göre yakınsaması durumunda kompakt denir (Naimark 1968).

Tanım 2.14. Bir tam metrik uzayının S altcümlesinin kapanışı kompakt ise S ye önkompakt (precompact) denir (Lax 2002).

Tanım 2.15. X ve U Banach uzayları olsun. Eğer X te B birim küresinin $C : X \to U$ lineer dönüşümü altındaki görüntüsü U da önkompakt ise C lineer dönüşümüne kompakt denir (Lax 2002).

Tanım 2.16. M operatörü X Banach uzayından X e sınırlı lineer bir operatör olsun.

$$\lambda I - M$$

operatörünü tersinir yapan tüm λ kompleks sayılarının kümesine M nin resolvent kümesi denir ve $\rho(M)$ ile gösterilir. M nin spektrumu ile $\lambda I - M$ yi tersinir yapmayan λ ların oluşturduğu küme ifade edilir (Lax 2002).

Teorem 2.17. X bir Banach uzayını ve C, X uzayından X uzayına kompakt lineer bir dönüşümü göstersin.

i) C nin spektrumu sayılabilir bir $\{\lambda_n\}$ kompleks dizisinden oluşur. Bu dizi sadece sıfıra yakınsar.

ii) Sıfırdan farklı her bir λ_j, C nin sonlu katlı bir nokta özdeğeridir. Yani her bir $\lambda = \lambda_j$ için $C - \lambda$ nın çekirdek uzayı sonlu boyutludur ve öyle bir i tamsayısı vardır ki $(C - \lambda)^i$ nin çekirdek uzayı ile her $k > i$ için $(C - \lambda)^k$ nın çekirdek uzayı aynıdır.

iii) $(\zeta - C)^{-1}$ resolvent operatörü sıfırdan farklı her bir λ_j de bir kutba sahiptir (Lax 2002).

Tanım 2.18. Tanım kümesi $D(A)$ olan bir A operatörü için $f, g \in D(A)$ olmak üzere

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa A operatörüne Hermityen denir (Naimark 1968).

Tanım 2.19. H kompleks bir Hilbert uzayı, D, H ın yoğun bir alt uzayı ve A, D de tanımlı lineer bir operatör olsun. A nın eşleniği A^*, her $u \in D$ için

$$(Au, v) = (u, A^*v)$$

eşitliğini sağlayan H da A^*v ile gösterilen bir vektörün olduğu tüm $v \in H$ vektörlerinden oluşan D^* tanım kümesine sahip bir operatördür. $D^* = D$ ve $A^* = A$ olması halinde A ya kendine eşlenik denir (Lax 2002).

Tanım 2.20. $A : D(A) \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere her $f, g \in D(A)$ için

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

gerçekleniyorsa, yani $A \subset A^*$ ise A ya simetrik operatör denir. Adjoint operatör kapalı olduğundan $A \subset A^*$ bağıntısı simetrik operatörün kapanabilir olduğunu ifade eder (Naimark 1968).

Tanım 2.21. H Hilbert uzayında A simetrik bir operatör ve λ reel olmayan keyfi bir sayı olsun. R_λ ve $R_{\overline{\lambda}}$ ile sırasıyla $(A - \lambda I)$ ve $(A - \overline{\lambda} I)$ operatörlerinin görüntü kümeleri gösterilsin.

$$N_\lambda := (H - R_\lambda)$$

ve

$$N_{\overline{\lambda}} := (H - R_{\overline{\lambda}})$$

altuzaylarına A operatörünün eksiklik uzayları denir (Naimark 1968).

Teorem 2.22. H Hilbert uzayında A, kapalı, simetrik bir operatör ve B, uzayın tamamında sınırlı ve Hermityen operatör olsun. Bu durumda A ve $A + B$ operatörlerinin eksiklik sayıları aynıdır (Naimark 1968).

Tanım 2.23. A kompakt bir operatör olsun. Bu durumda $(A^*A)^{1/2}$ operatörü kompakttır. $(A^*A)^{1/2}$ operatörünün özdeğerlerine A nın $s-$sayıları denir. Eğer

$$\sum s_j(A) < \infty$$

ise A ya nükleer,

$$\sum s_j^2(A) < \infty$$

ise A ya Hilbert-Schmidt operatörü denir (Gohberg ve Krein 1969).

Tanım 2.24. Tanım kümesi $D(A)$ olan H Hilbert uzayı üzerinde rol oynayan lineer bir A operatörü için

$$\Im(Af, f) \geq 0, \ f \in D(A)$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa, A ya dissipatif operatör denir. H Hilbert uzayının tamamında tanımlı ve sınırlı bir A operatörü için dissipatiflik

$$\Im A = \frac{A - A^*}{2i} \geq 0$$

eşitsizliğinin gerçeklenmesine denktir (Gohberg ve Krein 1969).

Teorem 2.25. A tersinir bir operatör olsun. Bu durmda $-A$ nin dissipatif olması için gerek ve yeter koşul A^{-1} in dissipatif olmasıdır (Wang ve Wu 2012).

Tanım 2.26. $(A - \lambda I)\phi = 0$ denklemini gerçekleyen en azından bir tane sıfırdan farklı $\phi \in D(A)$ vektörü varsa, λ sayısına A nın özdeğeri ve ϕ vektörüne de A nın özvektörü denir (Gohberg ve Krein 1969).

Tanım 2.27. λ_0, A nın özdeğeri olmak üzere

$$(A - \lambda_0 I)\phi_0 = 0, \quad (A - \lambda_0 I)\phi_k = \phi_{k-1}, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

eşitlikleri gerçekleniyorsa $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$ vektörlerine A nın eşleşen vektörleri denir (Guseinov 1993).

Tanım 2.28. A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olmak üzere $(A - \lambda_0 I)^n \phi = 0$ eşitliği pozitif bir n tamsayısı için gerçekleniyorsa, $\phi \in D(A)$ vektörüne A operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen kök vektörü denir (Gohberg ve Krein 1969).

Tanım 2.29. A lineer bir operatör olmak üzere $y = \lambda Ay$, $\lambda \in \mathbb{C}$, eşitliğini gerçekleyen sıfırdan farklı y vektörüne A nın karakteristik vektörü ve λ sayısına A nın karakteristik sayısı denir (Smithies 1958).

Teorem 2.30. H Hilbert uzayında tanımlı, imajiner kısmı nükleer operatör olan bir kompakt dissipatif A operatörünün kök vektörler sisteminin H da tam olması için aşağıdaki iki koşuldan birinin gerçeklenmesi yeterlidir:

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{n_+(\rho,\Re A)}{\rho}=0 \text{ veya } \lim_{\rho\to\infty}\frac{n_-(\rho,\Re A)}{\rho}=0.$$

Burada $n_+(\rho,\Re A)$ ve $n_-(\rho,\Re A)$ ile A operatörünün reel kısmının sırasıyla $[0,\rho]$ ve $[-\rho,0]$ aralıklarındaki karakteristik sayılarının miktarı gösterilmektedir (Gohberg ve Krein 1969).

Teorem 2.31. $g\in L^1[a,b]$ ve hemen hemen her yerde $g\geq 0$ olsun. f, $[a,b]$ üzerinde reel değerli ve sürekli olsun. Eğer y reel değerli, sürekli ve

$$y(t)\leq f(t)+\int_a^t g(s)y(s)ds,\ \ a\leq t\leq b,$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa, bu durumda

$$y(t)\leq f(t)+\left(\int_a^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds\right),\ \ a\leq t\leq b,$$

gerçeklenir. $f(t)\equiv c$ (sabit) olması durumunda

$$y(t)\leq c\left(\exp\int_a^t g(s)ds\right),\ \ a\leq t\leq b,$$

gerçeklenir (Zettl 2005).

3. DİSSİPATİF STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

3.1 Probleme Giriş

Bu bölümde tezde incelenecek olan problemlerden ilkinin kuruluşu verilecektir.

$\Omega = \bigcup\limits_{m=1}^{n+1} \Omega_m$, $\Omega_m = (c_{m-1}, c_m)$, aralığı üzerinde ℓ diferensiyel ifadesi

$$\ell(y) = \frac{1}{w(x)}\left[-(p(x)y')' + q(x)y\right]$$

şeklinde ele alınsın. Burada $-\infty < c_0 < c_1 < ... < c_{n+1} \leq \infty$ olup aşağıdaki özelliklerin gerçeklendiği kabul edilecektir:

i) c_k, $k = 1, 2, ..., n =: \overline{1, n}$, noktaları ℓ için regüler ve c_{n+1} noktası ℓ için singüler noktadır,

ii) p, q ve w fonksiyonları reel-değerli ve Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlardır,

iii) p^{-1}, q ve w fonksiyonları her bir Ω_m üzerinde lokal integrallenebilirdir ve

iv) her Ω_k $(k = \overline{1, n+1})$ aralığı üzerinde $w(x) > 0$ dır.

$$D = \left\{y \in L^2_w(\Omega) : y, py' \in AC_{loc}(\Omega_k), \ell(y) \in L^2_w(\Omega)\right\}$$

kümesi dikkate alınsın. Burada $AC_{loc}(\Omega_k)$ ile Ω_k $(k = \overline{1, n+1})$ aralıkları üzerinde lokal mutlak sürekli fonksiyonların kümesi gösterilmektedir. Keyfi $y, \chi \in D$ için Green formülü

$$\int\limits_{\Omega} w(x)\ell(y)\overline{\chi(x)}dx - \int\limits_{\Omega} w(x)y(x)\overline{\ell(\chi)}dx = \sum_{m=1}^{n+1}[y, \chi]_{c_{m-1}+}^{c_m-}$$

şeklinde elde edilir. Burada $[y, \chi]_{c_{m-1}+}^{c_m-} = [y, \chi]_{c_m-} - [y, \chi]_{c_{m-1}+}$, $[y, \chi]_x = y(x)\overline{\chi^{[1]}}(x) - y^{[1]}(x)\overline{\chi}(x)$ ve $y^{[1]} = py'$ eşitlikleriyle kullanılmıştır. Green formülünde eşitliğin sol tarafı anlamlı ve sonlu olduğundan sağ taraf da sonlu olmalıdır. Bu ise singüler nokta olan c_{n+1} noktasında $[y,\chi]_{c_{n+1}} = [y,\chi]_{c_{n+1}-} = \lim_{x\to c_{n+1}-}[y,\chi]_x$ limitinin mevcut ve sonlu olduğunu gösterir.

p, q ve w fonksiyonlarının c_{n+1} noktasında Weyl limit-çemberi durumunu gerçeklediği kabul edilecektir (Titchmarsh 1962, Naimark 1968). Weyl teorisi singüler diferensiyel operatörlerin spektral analizinde kullanılan temel teorilerden biridir. 1910 yılında Weyl, yarı-sınırsız bir aralık üzerinde ele alınan ikinci mertebeden diferensiyel denklemin lineer bağımsız çözümlerini kullanarak kurduğu $m-$fonksiyonu yardımıyla iç içe geçmiş çemberlerin varlığını göstermiştir. Bu çemberler ya bir çembere ya da bir noktaya yakınsamaktadır. İlk durum limit-çemberi durumu olarak bilinir ve denklemin tüm çözümlerinin karesel integrallenebilir olduğunu vurgular. İkinci durum ise limit-noktası durumu olarak bilinir. Limit-noktası durumu, lineer bağımsız çözümlerden sadece birinin karesel integrallenebilir olduğunu belirtir. Bu teori başta Titchmarsh olmak üzere pek çok matematikçi tarafından genişletilmiştir. Weyl limit-çemberi durumunu garanti eden pek çok yeter koşul mevcuttur (Titchmarsh 1962, Naimark 1968, Harris 1984, Everitt vd. 1986).

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{cases} \varphi_1(x,\lambda), \ x\in\Omega_1 \\ \varphi_2(x,\lambda), \ x\in\Omega_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}(x,\lambda), \ x\in\Omega_{n+1} \end{cases}, \quad \psi(x,\lambda) = \begin{cases} \psi_1(x,\lambda), \ x\in\Omega_1 \\ \psi_2(x,\lambda), \ x\in\Omega_2 \\ \vdots \\ \psi_{n+1}(x,\lambda), \ x\in\Omega_{n+1} \end{cases}$$

fonksiyonları

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y, \ x\in\Omega, \tag{3.1}$$

denkleminin

$$\begin{cases} \varphi_1(c_0,\lambda) = \cos\alpha, & \varphi_1^{[1]}(c_0,\lambda) = \sin\alpha, \\ \psi_1(c_0,\lambda) = -\sin\alpha, & \psi_1^{[1]}(c_0,\lambda) = \cos\alpha, \end{cases}$$

ve $m=\overline{1,n}$ olmak üzere

$$\begin{cases} \varphi_{m+1}(c_m+,\lambda)=\frac{1}{\kappa_m}\varphi_m(c_m-,\lambda), & \varphi_{m+1}^{[1]}(c_m+,\lambda)=\frac{1}{\kappa_m'}\varphi_m^{[1]}(c_m-,\lambda), \\ \psi_{m+1}(c_m+,\lambda)=\frac{1}{\kappa_m}\psi_m(c_m-,\lambda), & \psi_{m+1}^{[1]}(c_m+,\lambda)=\frac{1}{\kappa_m'}\psi_m^{[1]}(c_m-,\lambda), \end{cases}$$

koşullarını gerçekleyen çözümleri olsun. Burada α, κ_m ve κ_m' reel sayılardır ve $\kappa_m\kappa_m' > 0$ kabul edilecektir. Klasik anlamda verilen başlangıç koşullarını (c_0 noktasında verilen başlangıç koşulları) gerçekleyen çözümlerin varlığı, tekliği ve spektral parametreye göre tam fonksiyon oldukları bilinmektedir (Coddington ve Levinson 1955, Zettl 2005). İletim noktalarında verilen başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümlerin varlığı, tekliği ve spektral parametreye göre tam fonksiyon oldukları ise Muhtarov ve arkadaşlarının sonuçlarından elde edilir (Tunç ve Muhtarov 2004). ℓ diferensiyel ifadesi için c_{n+1} noktasında Weyl limit-çemberi durumu gerçeklendiğinden $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri $L_w^2(\Omega)$ uzayındandır.

$z(x)=\varphi(x,0)$ $(x\in\Omega)$ ve $u(x)=\psi(x,0)$ $(x\in\Omega)$ şeklinde seçilirse, $\{z,u\}$, $\ell(y)=0$ $(x\in\Omega)$ denkleminin

$$\begin{cases} z_1(c_0)=\cos\alpha, & z_1^{[1]}(c_0)=\sin\alpha, \\ u_1(c_0)=-\sin\alpha, & u_1^{[1]}(c_0)=\cos\alpha, \end{cases}$$

ve $m=\overline{1,n}$ için

$$\begin{cases} z_{m+1}(c_m+)=\frac{1}{\kappa_m}z_m(c_m-), & z_{m+1}^{[1]}(c_m+)=\frac{1}{\kappa_m'}z_m^{[1]}(c_m-), \\ u_{m+1}(c_m+)=\frac{1}{\kappa_m}u_m(c_m-), & u_{m+1}^{[1]}(c_m+)=\frac{1}{\kappa_m'}u_m^{[1]}(c_m-), \end{cases}$$

koşullarını gerçekleyen reel çözümleri haline gelir. $z,u\in L_w^2(\Omega)$ ve $z,u\in D$ dir. Dolayısıyla her $y\in D$ için $[y,z]_{c_{n+1}}$ ve $[y,u]_{c_{n+1}}$ değerleri mevcut ve sonludur.

$y\in D$ için aşağıdaki sınır ve iletim koşulları dikkate alınsın:

$$y(c_0)\cos\alpha+y^{[1]}(c_0)\sin\alpha=0, \tag{3.2}$$

$$[y,z]_{c_{n+1}} - h[y,u]_{c_{n+1}} = 0, \tag{3.3}$$

$$y(c_m-) = \kappa_m y(c_m+), \tag{3.4}$$

$$y^{[1]}(c_m-) = \kappa'_m y^{[1]}(c_m+). \tag{3.5}$$

Burada α, κ_m ve κ'_m reel sayılardır ve $\kappa_m \kappa'_m > 0$ dir. h, $h = h_1 + ih_2$ şeklinde kompleks sayıdır ve $h_2 > 0$ kabul edilecektir.

Literatürde singüler dissipatif sınır değer problemlerinin spektral analizi incelenmiştir (Guseinov 1993, 2002). Diğer yandan regüler, kendine eşlenik (simetrik) sınır-değer-iletim problemlerinin spektral analizi ise yeterince öğrenilmiştir. Bu bölüm boyunca amacımız, keyfi fakat sonlu iletim noktasına sahip singüler, dissipatif sınır-değer-iletim problemi olan (3.1)-(3.5) probleminin spektral analizini öğrenmektir.

3.2 Özel İç Çarpım Uzayının Kurulması

(3.1)-(3.5) problemini incelemek için teorik-operatör yöntemi kullanılacaktır. Bu nedenle problemle uyumlu bir operatör kurulmalıdır. Bu ise $L^2_w(\Omega)$ uzayında tanımlanacak özel bir iç çarpımla mümkün olur. Bu yöntem literatürde ilk kez Muhtarov ve arkadaşları tarafından ortaya konmuştur (Tunç ve Muhtarov 2004). Bu yöntemle pek çok çalışma da yapılmıştır (Mukhtarov ve Kadakal 2005, Kadakal ve Mukhtarov 2006, 2007, Akdoğan vd. 2007).

Öncelikle $H = \bigoplus_{k=1}^{n+1} H_k$, $H_k = L^2_{w_k}(\Omega_k)$, direkt toplam uzayı göz önünde bulundurulsun. Bu uzay aslında $L^2_w(\Omega)$ uzayının kendisidir; fakat tanımlanacak iç çarpımla uyumlu olması için direkt toplam şeklinde yazılmıştır. Keyfi

$$y(x)=\begin{cases} y_1(x),\ x\in\Omega_1 \\ y_2(x),\ x\in\Omega_2 \\ \vdots \\ y_{n+1}(x),\ x\in\Omega_{n+1} \end{cases} \in H,\quad \chi(x)=\begin{cases} \chi_1(x),\ x\in\Omega_1 \\ \chi_2(x),\ x\in\Omega_2 \\ \vdots \\ \chi_{n+1}(x),\ x\in\Omega_{n+1} \end{cases} \in H\ ,$$

fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \langle y,\chi\rangle_H &= \int\limits_{\Omega_1} w_1(x)y_1(x)\overline{\chi_1}(x)dx+\kappa_1\kappa_1'\int\limits_{\Omega_2} w_2(x)y_2(x)\overline{\chi_2}(x)dx \\ &+...+\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'\int\limits_{\Omega_{n+1}} w_{n+1}(x)y_{n+1}(x)\overline{\chi_{n+1}}(x)dx, \end{aligned}$$

iç çarpımı tanımlansın. Burada

$$w(x)=\begin{cases} w_1(x),\ x\in\Omega_1 \\ w_2(x),\ x\in\Omega_2 \\ \vdots \\ w_{n+1}(x),\ x\in\Omega_{n+1} \end{cases}$$

şeklindedir.

3.3 Dissipatif Operatörler

Bölüm 3.2 de tanımlanan iç çarpım uzayında bir operatör kurulmalıdır. Bunun için sıradaki notasyonlar belirlensin: $R_0(y)=y(c_0)\cos\alpha+y^{[1]}(c_0)\sin\alpha$, $R_m(y)=y(c_m-)-\kappa_m y(c_m+)$, $R_m'(y)=y^{[1]}(c_m-)-\kappa_m' y^{[1]}(c_m+)$, $m=\overline{1,n}$, $R_{n+1}(y)=[y,z]_{c_{n+1}}-h[y,u]_{c_{n+1}}$. Şimdi H da, $D(L)$ kümesi şu şekilde dikkate alınsın:

$$D(L)=\left\{ y\in H: y,y^{[1]}\in AC_{loc}(\Omega_k),\ \begin{matrix} R_0(y)=0, \\ R_m(y)=0, \\ R_m'(y)=0, \\ R_{n+1}(y)=0, \end{matrix}\quad \ell(y)\in H \right\}.$$

$D(L)$ üzerinde L operatörü $y \in D(L)$ için $Ly = \ell(y)$ şeklinde tanımlansın. Her bir Ω_k $(k = \overline{1, n+1})$ üzerinde Wronskian'ın sabitliği ve c_m $(m = \overline{1, n})$ noktalarında iletim koşulları dikkate alınarak keyfi $y, \chi \in D(L)$ için sıradaki eşitlikler doğrudan bir hesaplamayla elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&[y_1, \chi_1]_x = [y_1, z_1]_x[\overline{\chi}_1, u_1]_x - [y_1, u_1]_x[\overline{\chi}_1, z_1]_x, \ x \in \Omega_1, \\
&[y_2, \chi_2]_x = \kappa_1\kappa_1' \left([y_2, z_2]_x[\overline{\chi}_2, u_2]_x - [y_2, u_2]_x[\overline{\chi}_2, z_2]_x\right), \ x \in \Omega_2, \\
&\vdots \\
&[y_{n+1}, \chi_{n+1}]_x = \kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n' \big([y_{n+1}, z_{n+1}]_x[\overline{\chi}_{n+1}, u_{n+1}]_x \\
&- [y_{n+1}, u_{n+1}]_x[\overline{\chi}_{n+1}, z_{n+1}]_x\big), \ x \in \Omega_{n+1}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

(3.6) eşitliğinin bir tek aralıktaki açılımı bilinmektedir (Plücker özdeşliği). Ayrıca (3.6) eşitliği sıradaki teoremin ispatında önemlidir.

Teorem 3.3.1. L operatörü H da dissipatiftir.

İspat. $y \in D(L)$ olsun. Doğrudan bir hesaplamayla

$$
\langle Ly, y\rangle_H - \langle y, Ly\rangle_H = [y, y]_{c_0+}^{c_1-} + \kappa_1\kappa_1'[y, y]_{c_1+}^{c_2-} + ... + \kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'[y, y]_{c_n+}^{c_{n+1}-} \tag{3.7}
$$

elde edilir. $R_0(y) = 0$ koşulundan

$$
[y, y]_{c_0+} = 0 \tag{3.8}
$$

bulunur. $R_m(y) = 0$ ve $R_m'(y) = 0$ koşullarından ise

$$
[y, y]_{c_1-} = \kappa_1\kappa_1'[y, y]_{c_1+}, [y, y]_{c_2-} = \kappa_2\kappa_2'[y, y]_{c_2+}, ..., [y, y]_{c_n-} = \kappa_n\kappa_n'[y, y]_{c_n+} \tag{3.9}
$$

elde edilir. Ayrıca (3.6) eşitliği ve $R_{n+1}(y) = 0$ koşulu kullanılarak

$$[y,y]_{c_{n+1}} = 2ih_2\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n' \left|[y,u]_{c_{n+1}}\right|^2 \tag{3.10}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.8)-(3.10) eşitlikleri (3.7) de kullanılarak

$$\Im \langle Ly, y\rangle_H = h_2 \left(\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'\right)^2 \left|[y,u]_{c_{n+1}}\right|^2 \tag{3.11}$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.2. L operatörünün reel özdeğeri yoktur.

İspat. $D(L)$ den alınacak keyfi y için sıradaki eşitlik gerçeklenir

$$\Im \langle Ly, y\rangle_H = \Im \left(\lambda \|y\|_H^2\right). \tag{3.12}$$

Şimdi kabul edilsin ki $\lambda = \lambda_0$, L operatörünün reel bir özdeğeridir ve $\psi(x,\lambda_0)$, λ_0 a karşılık gelen özfonksiyonudur. Bu durumda (3.11) ve (3.12) eşitliklerinden $[\psi,u]_{c_{n+1}} = 0$ bulunur. $R_{n+1}(y) = 0$ koşulundan $[\psi,z]_{c_{n+1}} = 0$ elde edilir. $\varphi(x,\lambda_0)$ ı dikkate alarak $x \in \Omega_{n+1}$ için

$$\begin{aligned} 1 &= \kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'[\varphi,\overline{\psi}]_{c_{n+1}} \\ &= \left(\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'\right)^2 \left\{[\varphi,z]_{c_{n+1}}[\psi,u]_{c_{n+1}} - [\varphi,u]_{c_{n+1}}[\psi,z]_{c_{n+1}}\right\} = 0 \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu çelişki ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 den L operatörünün tüm özdeğerlerinin açık üst yarı düzlemde bulunduğu sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla özel olarak sıfır, L nin bir özdeğeri olamaz. Bu durum ise L nin tersinin mevcut olduğunu gösterir.

3.4 Tam Fonksiyonlar

Sıradaki fonksiyonlar tanımlansın

$$\eta_1(x,\lambda) = [\psi_{n+1}(x,\lambda), z_{n+1}(x)]_x, \quad \eta_2(x,\lambda) = [\psi_{n+1}(x,\lambda), u_{n+1}(x)]_x.$$

Sıradaki teorem gösterecektir ki c_{n+1} noktasında η_1 ve η_2 fonksiyonları λ nın tam fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla büyüklükleri hakkında daha fazla bilgi edinilebilir. Temel kavramlar kısmında verilen tam fonksiyonların büyüklükleri teorisi yardımıyla Krein teoremi (Teorem 2.30) kullanılacaktır.

Teorem 3.4.1. $\eta_1(c_{n+1}, \lambda)$, $\eta_2(c_{n+1}, \lambda)$ fonksiyonları λ nın tam fonksiyonları olup mertebeleri en çok birdir (≤ 1) ve cinsleri minimaldir.

İspat. (3.1) denkleminin

$$\psi(x,\lambda) = \begin{cases} \psi_1(x,\lambda), \ x \in \Omega_1 \\ \psi_2(x,\lambda), \ x \in \Omega_2 \\ \vdots \\ \psi_{n+1}(x,\lambda), \ x \in \Omega_{n+1} \end{cases}$$

çözümü için

$$\psi_{n+1}(x,\lambda) = \kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'(\eta_2(x,\lambda)z_{n+1}(x) - \eta_1(x,\lambda)u_{n+1}(x)) \tag{3.13}$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Fulton un (Fulton 1977) fikri takip edilerek $x \in \Omega_{n+1}$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\eta_1(x,\lambda) &= \lambda\psi_{n+1}(x,\lambda)z_{n+1}(x)w_{n+1}(x), \\ \frac{\partial}{\partial x}\eta_2(x,\lambda) &= \lambda\psi_{n+1}(x,\lambda)u_{n+1}(x)w_{n+1}(x), \end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitliklerine ulaşılır. (3.13) eşitliği (3.14) te kullanılarak ve

$$\mathbf{n}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \eta_1(x,\lambda) \\ \eta_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} -\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'z_{n+1}(x)u_{n+1}(x)w_{n+1}(x) & \kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'z_{n+1}^2(x)w_{n+1}(x) \\ -\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'u_{n+1}^2(x)w_{n+1}(x) & \kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'z_{n+1}(x)u_{n+1}(x)w_{n+1}(x) \end{pmatrix}$$

matris gösterimleri kabul edilerek

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{n}(x,\lambda) = \lambda A(x)\mathbf{n}(x,\lambda) \tag{3.15}$$

denklemine ulaşılır. $z_{n+1}, u_{n+1} \in L^2_{w_{n+1}}(\Omega_{n+1})$ olduğundan $A(x)$ in elemanları $L^1(\Omega_{n+1})$ uzayındandır.

Biliniyor ki (Titchmarch 1962, Zettl 2005) sabitlenmiş $d \in \Omega_1$ için $\psi_1(d,\lambda)$ ve $\psi_1^{[1]}(d,\lambda)$ fonksiyonları λ nın tam fonksiyonları olup mertebeleri $\frac{1}{2}$ dir. (3.4) ve (3.5) iletim koşulları ise sabitlenmiş $e \in \Omega_p$ $(p = \overline{2, n+1})$ için $\psi_p(e,\lambda)$ ve $\psi_p^{[1]}(e,\lambda)$ fonksiyonlarının mertebesi $\frac{1}{2}$ olan λ nın tam fonksiyonları olduklarını gösterir (Zettl 2005). Dolayısıyla $c_n \leq b < c_{n+1}$ olmak üzere $\eta_j(b,\lambda)$ $(j = 1,2)$, sabitlenmiş b için mertebesi $\frac{1}{2}$ olan λ nın tam fonksiyonudur.

(3.15) ten $x \in \Omega_{n+1}$ için

$$\mathbf{n}(x,\lambda) = \mathbf{n}(b,\lambda) + \lambda \int_b^x A(\xi)\mathbf{n}(\xi,\lambda)d\xi \tag{3.16}$$

eşitliğine ulaşılır. Gronwall eşitsizliğini kullanarak (3.16) dan

$$\|\mathbf{n}(x,\lambda)\| \leq \|\mathbf{n}(b,\lambda)\| \exp\left(|\lambda| \int_b^x \|A(\xi)\|\, d\xi\right),\ x \in \Omega_{n+1} \tag{3.17}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.16) ve (3.17)

$$\|\mathbf{n}(c_{n+1},\lambda) - \mathbf{n}(b,\lambda)\| \leq |\lambda|\, \|\mathbf{n}(b,\lambda)\| \left(\int_b^{c_{n+1}} \|A(\xi)\|\, d\xi\right) \exp\left(|\lambda| \int_{c_n}^{c_{n+1}} \|A(\xi)\|\, d\xi\right) \tag{3.18}$$

ve

$$\|\mathbf{n}(c_{n+1},\lambda)\| \leq \|\mathbf{n}(b,\lambda)\| \exp\left(|\lambda| \int_b^{c_{n+1}} \|A(\xi)\|\, d\xi\right), x \in \Omega_{n+1} \tag{3.19}$$

eşitsizliklerini verir. (3.18) gösterir ki $b \to c_{n+1}$ için λ nın her kompakt kümesinde $\mathbf{n}(b,\lambda) \to \mathbf{n}(c_{n+1},\lambda)$ (*düzgün*) gerçeklenir. Dolayısıyla $\eta_1(c_{n+1},\lambda)$ ve $\eta_2(c_{n+1},\lambda)$, λ nın tam fonksiyonlarıdır.

(3.19) da $b = c_n +$ alınırsa

$$\|\mathbf{n}(c_{n+1},\lambda)\| \leq \|\mathbf{n}(c_n+,\lambda)\| \exp\left(|\lambda| \int\limits_{c_n}^{c_{n+1}} \|A(\xi)\| \, d\xi \right)$$

elde edilir ve bu gösterir ki $\eta_j(c_{n+1},\lambda)$ $(j = 1,2)$ fonksiyonunun mertebesi biri geçemez. Ayrıca (3.19) dan $\eta_j(c_{n+1},\lambda)$ nın minimal tipte olduğu görülür. Bu sonuçlar ise ispatı tamamlar.

3.5 Resolvent Operatör ve Tamlık Teoremi

Temel kavramlar kısmında bahsedilen kompakt operatörlerin $s-$sayılarının belirlenmesi, operatörlerin spektral özelliklerinin belirlenmesinde özem arz eder. Özellikle belli tip çekirdek fonksiyonuna sahip integral operatörlerin $s-$sayılarının belirlenmesi halen yoğun bir şekilde çalışılan teoriler arasındadır.

X ve Y, sırasıyla μ ve ν ölçülerine göre ölçülebilir uzay olsun. Eğer $K(y,x)$ fonksiyonu $Y \times X$ üzerinde karesel integrallenebilirse, yani

$$\int\limits_Y \int\limits_X |K(y,x)|^2 \, d\nu(y) d\mu(x) < \infty$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa

$$(Tf)(y) = \int\limits_X K(y,x) f(x) d\mu(x)$$

ile verilen operatör bir Hilbert-Schmidt operatörüdür. Şimdi sorulacak bir sonraki soru hangi koşullar altında T operatörü iz-sınıfından ya da nükleer operatörler sınıfındandır. X ve Y nin kompakt küme olması ya da $K(y,x)$ fonksiyonunun pürüzsüz (smooth) bir fonksiyon olması durumunda T operatörünün nükleer olması için yeter koşul pek çok çalışmada verilmiştir (Stinespring 1958, Smithies 1958, Kotljar 1976, Birman ve Solomyak 1977, Cochran 1977, Pietsch 1981, Chen vd. 2008). Ayrıca Smithies'in kitabı genel olarak integral operatörlerin karakteristik değerleri ve karakteristik fonksiyonlarının özellikleri ile ilgili temel bir kaynak oluşturacak niteliktedir (Smithies 1958).

Bu çalışmada ele alınan integral operatörlerin (resolvent operatörlerin) sadece imajiner kısmının nükleer olup olmadığının belirlenmesi Krein teoremini uygulamak için yeterli olduğundan, durum yukarıdaki integral operatörlerin $s-$sayılarını belirlemedeki genel teoriye göre daha kolaydır.

Şimdi L operatörünün tersi belirlensin.

$\ell(y) = 0$ $(x \in \Omega)$ denkleminin

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), \ x \in \Omega_1 \\ u_2(x), \ x \in \Omega_2 \\ \vdots \\ u_{n+1}(x), \ x \in \Omega_{n+1} \end{cases}, \quad v(x) = \begin{cases} v_1(x), \ x \in \Omega_1 \\ v_2(x), \ x \in \Omega_2 \\ \vdots \\ v_{n+1}(x), \ x \in \Omega_{n+1} \end{cases},$$

$v_k = z_k - hu_k$, $k = \overline{1, n+1}$, çözümleri ele alınsın. Kolaylıkla görülebileceği gibi u çözümü (3.2), (3.4), (3.5) koşullarını ve v çözümü (3.3)-(3.5) koşullarını gerçekler.

$y \in D(L)$ ve $f \in L^2_w(\Omega)$,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ x \in \Omega_1 \\ f_2(x), \ x \in \Omega_2 \\ \vdots \\ f_{n+1}(x), \ x \in \Omega_{n+1} \end{cases}$$

için $Ly = f(x)$ $(x \in \Omega)$ denklemi ele alınsın. Bu denklem

$$\ell(y) = f(x), \ x \in \Omega,$$

homogen olmayan diferensiyel denklem ve (3.2)-(3.5) sınır-iletim koşullarına denktir. Denklemin homogen kısmının çözümü

$$y(x)=\begin{cases} s_1u_1(x)+l_1v_1(x),\ x\in\Omega_1\\ s_2u_2(x)+l_2v_2(x),\ x\in\Omega_2\\ \vdots\\ s_{n+1}u_{n+1}(x)+l_{n+1}v_{n+1}(x),\ x\in\Omega_{n+1}\end{cases}$$

şeklinde aranabilir. Parametrelerin değişimi yöntemi kullanılır ve $\Delta_k=[u_k,v_k]_x$ $(x\in\Omega_k)$ gösterimi kabul edilirse

$$\begin{aligned} s_k'(x)&=\tfrac{v_k(x)f_k(x)w_k(x)}{\Delta_k},\ x\in\Omega_k,\\ l_k'(x)&=-\tfrac{u_k(x)f_k(x)w_k(x)}{\Delta_k},\ x\in\Omega_k,\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\widetilde{s}_k$ ve $\widetilde{l}_k$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} s_k(x)&=\widetilde{s}_k-\tfrac{1}{\Delta_k}\int\limits_x^{c_k}v_kf_kw_kd\xi,\ x\in\Omega_k,\\ l_k(x)&=\widetilde{l}_k-\tfrac{1}{\Delta_k}\int\limits_{c_{k-1}}^{x}u_kf_kw_kd\xi,\ x\in\Omega_k,\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Dolayısıyla denklemin çözümü

$$y(x)=\begin{cases} \left(\widetilde{s}_1-\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_x^{c_1}v_1f_1w_1d\xi\right)u_1(x)+\left(\widetilde{l}_1-\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{x}u_1f_1w_1d\xi\right)v_1(x),\ x\in\Omega_1\\ \left(\widetilde{s}_2-\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_x^{c_2}v_2f_2w_2d\xi\right)u_2(x)+\left(\widetilde{l}_2-\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{x}u_2f_2w_2d\xi\right)v_2(x),\ x\in\Omega_2\\ \vdots\\ \left(\widetilde{s}_{n+1}-\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_x^{c_{n+1}}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right)u_{n+1}(x)\\ +\left(\widetilde{l}_{n+1}-\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{x}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right)v_{n+1}(x),\ x\in\Omega_{n+1}\end{cases}$$

halini alır. (3.2) ve (3.3) koşulları uygulatılırsa

$$\widetilde{l}_1 = 0,\ \widetilde{s}_{n+1} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla çözüm

$$y(x) = \begin{cases} \left(\widetilde{s}_1 - \frac{1}{\Delta_1}\int\limits_x^{c_1} v_1 f_1 w_1 d\xi\right) u_1(x) - \frac{v_1(x)}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{x} u_1 f_1 w_1 d\xi,\ x \in \Omega_1 \\ \left(\widetilde{s}_2 - \frac{1}{\Delta_2}\int\limits_x^{c_2} v_2 f_2 w_2 d\xi\right) u_2(x) + \left(\widetilde{l}_2 - \frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{x} u_2 f_2 w_2 d\xi\right) v_2(x),\ x \in \Omega_2 \\ \vdots \\ -\frac{u_{n+1}(x)}{\Delta_{n+1}}\int\limits_x^{c_{n+1}} v_{n+1} f_{n+1} w_{n+1} d\xi \\ +\left(\widetilde{l}_{n+1} - \frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{x} u_{n+1} f_{n+1} w_{n+1} d\xi\right) v_{n+1}(x),\ x \in \Omega_{n+1} \end{cases}$$

halini alır. Şimdi (3.4) ve (3.5) koşulları uygulatılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_1 &= -\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}} v_{n+1} f_{n+1} w_{n+1} d\xi - \frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n} v_n f_n w_n d\xi - ... - \frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2} v_2 f_2 w_2 d\xi, \\ \widetilde{s}_2 &= -\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}} v_{n+1} f_{n+1} w_{n+1} d\xi - \frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n} v_n f_n w_n d\xi - ... - \frac{1}{\Delta_3}\int\limits_{c_2}^{c_3} v_3 f_3 w_3 d\xi, \\ &\vdots \\ \widetilde{s}_n &= -\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}} v_{n+1} f_{n+1} w_{n+1} d\xi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{l}_2 &= -\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1} u_1 f_1 w_1 d\xi, \\ \widetilde{l}_3 &= -\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1} u_1 f_1 w_1 d\xi - \frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2} u_2 f_2 w_2 d\xi, \\ &\vdots \\ \widetilde{l}_{n+1} &= -\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1} u_1 f_1 w_1 d\xi - \frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2} u_2 f_2 w_2 d\xi - ... - \frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n} u_n f_n w_n d\xi \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla çözüm

$$y(x)=\begin{cases} u_1(x)\left(-\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2}v_2f_2w_2d\xi-...-\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi-\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{x}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi\right)\\ -\frac{v_1(x)}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{x}u_1f_1w_1d\xi,\ x\in\Omega_1\\ u_2(x)\left(-\frac{1}{\Delta_3}\int\limits_{c_2}^{c_3}v_3f_3w_3d\xi-...-\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right.\\ \left.-\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{x}^{c_2}v_2f_2w_2d\xi\right)+v_2(x)\left(-\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1}u_1f_1w_1d\xi-\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{x}u_2f_2w_2d\xi\right),\ x\in\Omega_2\\ \vdots\\ -\frac{u_{n+1}(x)}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{x}^{c_{n+1}}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi+v_{n+1}(x)\left(-\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1}u_1f_1w_1d\xi-\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2}u_2f_2w_2d\xi\right.\\ \left.-...-\frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}u_nf_nw_nd\xi-\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{x}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right),\ x\in\Omega_{n+1} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

$$\Delta_1=-1,\Delta_2=-\frac{1}{\kappa_1\kappa_1'},...,\Delta_{n+1}=-\frac{1}{\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'}$$

eşitlikleri dikkate alınarak $Ly=f(x)$ denkleminin çözümü

$$
y(x)=\begin{cases}
u_1(x)\left(\kappa_1\kappa_1'\int\limits_{c_1}^{c_2}v_2f_2w_2d\xi+...+\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right.\\
\left.+\int\limits_{x}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi\right)+v_1(x)\int\limits_{c_0}^{x}u_1f_1w_1d\xi,\ x\in\Omega_1\\
u_2(x)\left(\kappa_1\kappa_1'\kappa_2\kappa_2'\int\limits_{c_2}^{c_3}v_3f_3w_3d\xi+...+\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right.\\
\left.+\kappa_1\kappa_1'\int\limits_{x}^{c_2}v_2f_2w_2d\xi\right)+v_2(x)\left(\int\limits_{c_0}^{c_1}u_1f_1w_1d\xi+\kappa_1\kappa_1'\int\limits_{c_1}^{x}u_2f_2w_2d\xi\right),\ x\in\Omega_2\\
\vdots\\
\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'u_{n+1}(x)\int\limits_{x}^{c_{n+1}}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi+v_{n+1}(x)\left(\int\limits_{c_0}^{c_1}u_1f_1w_1d\xi\right.\\
+\kappa_1\kappa_1'\int\limits_{c_1}^{c_2}u_2f_2w_2d\xi+...+\kappa_1\kappa_1'...\kappa_{n-1}\kappa_{n-1}'\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}u_nf_nw_nd\xi\\
\left.+\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'\int\limits_{c_n}^{x}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right),\ x\in\Omega_{n+1}
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

şeklinde bulunur.

$G(x,\xi)$ çekirdeği

$$
G(x,\xi)=\begin{cases}
u(x)v(\xi),\ c_0\le x\le\xi\le c_{n+1};x,\xi\ne c_k;k=\overline{1,n}\\
u(\xi)v(x),\ c_0\le\xi\le x\le c_{n+1};x,\xi\ne c_k;k=\overline{1,n}
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

şeklinde seçilirse, (3.20)

$$
\begin{aligned}
y(x)\ &=\int\limits_{\Omega_1}G(x,\xi)f(\xi)w(\xi)d\xi+\kappa_1\kappa_1'\int\limits_{\Omega_2}G(x,\xi)f(\xi)w(\xi)d\xi\\
&+...+\kappa_1\kappa_1'...\kappa_n\kappa_n'\int\limits_{\Omega_{n+1}}G(x,\xi)f(\xi)w(\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise

$$
y(x)=\left\langle G(x,\xi),\overline{f}(\xi)\right\rangle_H
$$

iç çarpımının kendisidir. Dolayısıyla keyfi $f\in L_w^2(\Omega)$ için

$$Kf = \left\langle G(x,\xi), \overline{f}(\xi) \right\rangle_H \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlanan operatör, L nin tersi olur. Dolayısıyla K ve L nin kök sistemlerinin tamlığı çakışır.

$v(x) = z(x) - (h_1 + ih_2)u(x)$ şeklinde yazılabileceğinden (3.21) ve (3.22) yardımıyla

$$G_1(x,\xi) = \begin{cases} u(x)\left[z(\xi) - h_1 u(\xi)\right], c_0 \leq x \leq \xi \leq c_{n+1}; x,\xi \neq c_k; k = \overline{1,n} \\ u(\xi)\left[z(x) - h_1 u(x)\right], c_0 \leq \xi \leq x \leq c_{n+1}; x,\xi \neq c_k; k = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$G_2(x,\xi) = -h_2 u(x) u(\xi), \ \Im h > 0,$$

ve

$$K_1 f = \left\langle G_1(x,\xi), \overline{f}(\xi) \right\rangle_H, \ K_2 f = \left\langle G_2(x,\xi), \overline{f}(\xi) \right\rangle_H,$$

eşitlikleri yazılabilir. Açıktır ki $K = K_1 + iK_2$ dir. K ve K_1 Hilbert-Schmidt operatörleridir. Ayrıca K_1 ve K_2 kendine eşleniktir. K_2, bir boyutlu (rank-bir) operatördür. Bu durum K_2 operatörünün nükleer operatör olduğunu vurgular (Davies 2007). Ayrıca K_1, ℓ diferensiyel ifadesi ve

$$y(c_0)\cos\alpha + y^{[1]}(c_0)\sin\alpha = 0,$$

$$[y,z]_{c_{n+1}} - h_1[y,u]_{c_{n+1}} = 0,$$

$$y(c_m-) = \kappa_m y(c_m+),$$

$$y'(c_m-) = \kappa'_m y^{[1]}(c_m+),$$

sınır-iletim koşulları yardımıyla üretilen L_1 operatörünün tersidir.

Sıradaki eşitlikler ele alınsın

$$\eta(\lambda) = \eta_1(c_{n+1}, \lambda) - h\eta_2(c_{n+1}, \lambda),$$

$$\widehat{\eta}(\lambda) = \eta_1(c_{n+1}, \lambda) - h_1\eta_2(c_{n+1}, \lambda).$$

Bu eşitliklerden görüleceği gibi L ve L_1 in özdeğerleri, sırasıyla, η ve $\widehat{\eta}$ fonsiyonlarının sıfırlarıyla çakışır. Teorem 3.4.1 den L nin tüm özdeğerlerinin ayrık olduğu ve olası limit noktasının sonsuzluk olduğu görülebilir. Ayrıca keyfi $\epsilon > 0$ ve D sabiti için

$$\|\widehat{n}(\lambda)\| \leq D\exp(\epsilon\,|\lambda|),\ \ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.23}$$

eşitsizliği elde edilir.

L dissipatif olduğundan $-K$ dissipatiftir (Wang ve Wu 2012). Ayrıca $-K = -K_1 - iK_2$ olmak üzere $-K_1$ in karakteristik sayılarının $[0, \rho]$ ve $[-\rho, 0]$ aralıklarındaki miktarı $n_{\pm}(\rho, -K_1)$ ile gösterilirse (3.23) ün yardımıyla

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{n_+(\rho, -K_1)}{\rho} = 0,\ \ \lim_{\rho\to\infty} \frac{n_-(\rho, -K_1)}{\rho} = 0,$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla sıradaki teorem sunulabilir.

Teorem 3.5.1. $-K$ nın (K nın) tüm kök vektörlerinin sistemi H Hilbert uzayında tamdır.

K ve L nin kök vektörler sisteminin tamlığı çakıştığından sıradaki teorem elde edilir.

Teorem 3.5.2. (3.1)-(3.5) probleminin tüm özdeğerleri açık üst yarı düzlemde bulunur ve bu özdeğerler tamamen ayrıktır. Bu özdeğerlerin olası limit noktası sonsuzluktadır. (3.1)-(3.5) probleminin tüm özvektörler ve eşleşen vektörler sistemi $L^2_w(\Omega)$ da tam bir sistem oluşturur.

Uyarı 3.5.3. Teorem 3.5.2 deki sonuçlar $n = 1$ için Bairamov ve Ugurlu tarafından 2013'te elde edilmiştir (Bairamov ve Ugurlu 2013).

4. BESSEL-TİPLİ DİSSİPATİF STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

4.1 Giriş

Bu bölümde tezde incelenecek diğer problemin kuruluşu verilecektir.

Öncelikle $(0,1]$ aralığı üzerinde $0 = c_0 < c_1 < ... < c_{n+1} = 1$ seçilerek $\Lambda_k = (c_{k-1}, c_k)$, $k = \overline{1, n+1}$, aralıkları ele alınsın. Diferensiyel ifade bu aralıkların birleşimi üzerinde ve $\nu \in [0, \infty)$ olmak üzere aşağıdaki şekilde ele alınsın:

$$\tau(y) = \frac{1}{w(x)} \left[-y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y + q(x)y \right].$$

τ diferensiyel ifadesindeki katsayılar ile ilgili bilgi aşağıda verilmiştir:

i) $c_0 = 0$, τ için singüler nokta olup geri kalan c_k $(k = \overline{1, n+1})$ noktaları τ için regüler noktadır,

ii) w ve q fonksiyonları her bir Λ_k $(k = \overline{1, n+1})$ aralığı üzerinde reel değerli ve sürekli fonksiyonlardır,

iii) her Λ_k $(k = \overline{1, n+1})$ aralığı üzerinde $w(x) > 0$ dir ve

iv) $0 \leq \nu < 1$, $\nu \neq \frac{1}{2}$ dir.

Bu özellikler gösteriyor ki τ diferensiyel ifadesi c_0 singüler noktasında limit-çemberi durumundadır (Naimark 1968).

Green formülünden faydalanmak için sıradaki küme ele alınsın:

$$D = \left\{ y \in L^2_w(\Lambda) : y, y' \in AC_{loc}(\Lambda_k), \tau(y) \in L^2_w(\Lambda) \right\}.$$

Burada $AC_{loc}(\Lambda_k)$ ile Λ_k $(k = \overline{1, n+1})$ aralıkları üzerinde lokal mutlak sürekli fonksiyonların kümesi gösterilmektedir. Keyfi $y, \chi \in D$ için $[y, \chi]_x = y(x)\overline{\chi'}(x) -$

$y'(x)\overline{\chi}(x)$ gösterimi kabul edilerek

$$\int\limits_{\Lambda} w(x)\tau(y)\overline{\chi}(x)dx - \int\limits_{\Lambda} w(x)y(x)\overline{\tau(\chi)}dx = \sum_{k=1}^{n+1}[y,\chi]_{c_{k-1}+}^{c_k-}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik gösterir ki $y,\chi \in D$ için c_0 noktasında $[y,\chi]_{c_0} = \lim_{x\to c_0+}[y,\chi]_x$ limiti mevcut ve sonludur.

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{cases} \varphi_1(x,\lambda), \ x \in \Lambda_1 \\ \varphi_2(x,\lambda), \ x \in \Lambda_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}(x,\lambda), \ x \in \Lambda_{n+1} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \psi(x,\lambda) = \begin{cases} \psi_1(x,\lambda), \ x \in \Lambda_1 \\ \psi_2(x,\lambda), \ x \in \Lambda_2 \\ \vdots \\ \psi_{n+1}(x,\lambda), \ x \in \Lambda_{n+1} \end{cases}$$

ile

$$-y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}y + q(x)y = \lambda w(x)y, \ x \in \Lambda, \tag{4.1}$$

denkleminin

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(c_{n+1},\lambda) = \cos\beta, & \varphi'_{n+1}(c_{n+1},\lambda) = \sin\beta, \\ \psi_{n+1}(c_{n+1},\lambda) = -\sin\beta, & \psi'_{n+1}(c_{n+1},\lambda) = \cos\beta, \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \varphi_m(c_m-,\lambda) = \gamma_m\varphi_{m+1}(c_m+,\lambda), & \varphi'_m(c_m-,\lambda) = \gamma'_m\varphi'_{m+1}(c_m+,\lambda), \\ \psi_m(c_m-,\lambda) = \gamma_m\psi_{m+1}(c_m+,\lambda), & \psi'_m(c_m-,\lambda) = \gamma'_m\psi'_{m+1}(c_m+,\lambda), \end{cases}$$

koşullarını gerçekleyen çözümleri gösterilsin (Akdoğan vd. 2007, Bairamov ve Ugurlu 2012, 2013). Burada $\beta, \gamma_m, \gamma'_m$ $(m = \overline{1,n})$ reel sayılardır, $\gamma_m\gamma'_m > 0$ dir ve λ kompleks parametredir.

$z(x) = \varphi(x,0)$ $(x \in \Lambda)$ ve $u(x) = \psi(x,0)$ $(x \in \Lambda)$ denilsin. Dolayısıyla

$$z(x)=\begin{cases} z_1(x), x\in\Lambda_1 \\ z_2(x), x\in\Lambda_2 \\ \vdots \\ z_{n+1}(x), x\in\Lambda_{n+1}\end{cases} \quad \text{ve} \quad u(x)=\begin{cases} u_1(x), x\in\Lambda_1 \\ u_2(x), x\in\Lambda_2 \\ \vdots \\ u_{n+1}(x), x\in\Lambda_{n+1}\end{cases}$$

formundadır. Keyfi $y \in D$ için $[y,z]_{c_0}$ ve $[y,u]_{c_0}$ değerleri mevcut ve sonludur.

$y \in D$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları gerçeklediği düşünülsün:

$$[y,z]_{c_0}+\vartheta[y,u]_{c_0}=0, \tag{4.2}$$

$$y(c_{n+1})\cos\beta+y'(c_{n+1})\sin\beta=0, \tag{4.3}$$

$$y(c_m-)=\gamma_m y(c_m+), \tag{4.4}$$

$$y'(c_m-)=\gamma'_m y'(c_m+). \tag{4.5}$$

Burada β,γ_m,γ'_m $(m=\overline{1,n})$ reel sayılardır, $\gamma_m\gamma'_m>0$ ve $\vartheta=\vartheta_1+i\vartheta_2$, $\vartheta_2>0$ olacak şekilde bir kompleks sayıdır.

Bu bölüm boyunca (4.1)-(4.5) sınır-değer-iletim probleminin spektral analizi incelenecektir.

4.2 Dissipatif Operatörün Kurulması

$H_k=L^2_{w_k}(\Lambda_k)$ gösterimi yardımıyla $H=\bigoplus_{k=1}^{n+1}H_k$ Hilbert uzayı

$$y(x)=\begin{cases} y_1(x), x\in\Lambda_1 \\ y_2(x), x\in\Lambda_2 \\ \vdots \\ y_{n+1}(x), x\in\Lambda_{n+1}\end{cases} \in H, \quad \chi(x)=\begin{cases} \chi_1(x), x\in\Lambda_1 \\ \chi_2(x), x\in\Lambda_2 \\ \vdots \\ \chi_{n+1}(x), x\in\Lambda_{n+1}\end{cases} \in H\ ,$$

ve

$$w(x)=\begin{cases} w_1(x), x\in\Lambda_1 \\ w_2(x), x\in\Lambda_2 \\ \vdots \\ w_{n+1}(x), x\in\Lambda_{n+1}\end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle y,\chi\rangle_H &= \int\limits_{\Lambda_1} w_1(x)y_1(x)\overline{\chi_1}(x)dx+\gamma_1\gamma_1'\int\limits_{\Lambda_2} w_2(x)y_2(x)\overline{\chi_2}(x)dx \\ &+...+\gamma_1\gamma_1'...\gamma_n\gamma_n'\int\limits_{\Lambda_{n+1}} w_{n+1}(x)y_{n+1}(x)\overline{\chi_{n+1}}(x)dx\end{aligned}$$

iç çarpımı ile ele alınsın.

Şu notasyonlar dikkate alınsın: $R_0(y)=[y,z]_{c_0}+\vartheta[y,u]_{c_0}$, $R_m(y)=y(c_m-)-\gamma_m y(c_m+)$, $R_m'(y)=y'(c_m-)-\gamma_m' y'(c_m+)$, $R_{n+1}(y)=y(c_{n+1})\cos\beta+y'(c_{n+1})\sin\beta$.

$$D(T)=\left\{ y\in H: y,y'\in AC_{loc}(\Lambda_k), \begin{array}{c} R_0(y)=0, \\ R_m(y)=0, \\ R_m'(y)=0, \\ R_{n+1}(y)=0,\end{array}, \tau(y)\in H\right\}$$

kümesi ele alınsın. $Ty=\tau(y)$, $y\in D(T)$, tanımlanarak, (4.1)-(4.5) problemi H da

$$Ty=\lambda y,\ y\in D(T),\ x\in\Lambda,$$

eşitliği ile ele alınabilir.

Sıradaki eşitlikler doğrudan bir hesaplamayla elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&[y_1, \chi_1]_x = \tfrac{1}{\gamma_1\gamma_1' \cdots \gamma_n\gamma_n'} \left\{ [y_1, z_1]_x [\overline{\chi}_1, u_1]_x - [y_1, u_1]_x [\overline{\chi}_1, z_1]_x \right\}, \ x \in \Lambda_1, \\
&[y_2, \chi_2]_x = \tfrac{1}{\gamma_2\gamma_2' \cdots \gamma_n\gamma_n'} \left\{ [y_2, z_2]_x [\overline{\chi}_2, u_2]_x - [y_2, u_2]_x [\overline{\chi}_2, z_2]_x \right\}, \ x \in \Lambda_2, \\
&\vdots \\
&[y_{n+1}, \chi_{n+1}]_x = [y_{n+1}, z_{n+1}]_x [\overline{\chi}_{n+1}, u_{n+1}]_x - [y_{n+1}, u_{n+1}]_x [\overline{\chi}_{n+1}, z_{n+1}]_x, \ x \in \Lambda_{n+1}.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Teorem 4.2.1. T operatörü H da dissipatiftir.

İspat. $y \in D(T)$ için

$$
\langle Ty, y \rangle_H - \langle y, Ty \rangle_H = [y, y]_{c_0+}^{c_1-} + \gamma_1\gamma_1'[y, y]_{c_1+}^{c_2-} + \ldots + \gamma_1\gamma_1' \ldots \gamma_n\gamma_n'[y, y]_{c_n+}^{c_{n+1}-} \tag{4.7}
$$

eşitliği mevcuttur. $R_m(y) = 0$, $R_m'(y) = 0$, $R_{n+1}(y) = 0$ koşullarından

$$
[y, y]_{c_{n+1}} = 0, [y, y]_{c_1-} = \gamma_1\gamma_1'[y, y]_{c_1+}, \ldots, [y, y]_{c_n-} = \gamma_n\gamma_n'[y, y]_{c_n+} \tag{4.8}
$$

elde edilir. Ayrıca (4.6) ve $R_0(y) = 0$ dan

$$
\begin{aligned}
[y, y]_{c_0} &= \tfrac{1}{\gamma_1\gamma_1' \cdots \gamma_n\gamma_n'} \left\{ [y_1, z_1]_{c_0} [\overline{y}_1, u_1]_{c_0} - [y_1, u_1]_{c_0} [\overline{y}_1, z_1]_{c_0} \right\} \\
&= -\tfrac{1}{\gamma_1\gamma_1' \cdots \gamma_n\gamma_n'} 2i\vartheta_2 \left| [y, u]_{c_0} \right|^2
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

eşitliğine ulaşılır. (4.8) ve (4.9), (4.7) de dikkate alınarak

$$
\Im \langle Ty, y \rangle_H = \frac{1}{\gamma_1\gamma_1' \cdots \gamma_n\gamma_n'} \vartheta_2 \left| [y, u]_{c_0} \right|^2 \tag{4.10}
$$

sonucuna ulaşılır ve bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2. T operatörünün reel özdeğeri yoktur.

İspat. $y \in D(T)$ için

$$\Im \langle Ty, y \rangle_H = \Im \left(\lambda \|y\|_H^2 \right) \tag{4.11}$$

eşitliğinin mevcutluğu biliniyor. $\lambda = \lambda_0$, T nin reel bir özdeğeri ve $\psi(x, \lambda_0)$ $(x \in \Lambda)$, λ_0 a karşılık gelen özfonksiyon olsun. (4.10) ve (4.11) den $[\psi, u]_{c_0} = 0$ elde edilir. $R_0(y) = 0$ koşulundan $[\psi, z]_{c_0} = 0$ sonucuna ulaşılır. $\varphi(x, \lambda_0)$ $(x \in \Lambda)$ seçerek ve (4.6) yı kullanarak

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{\gamma_1\gamma_1' \cdots \gamma_n\gamma_n'} [\varphi, \overline{\psi}]_{c_0} \\ &= \tfrac{1}{\left(\gamma_1\gamma_1' \cdots \gamma_n\gamma_n'\right)^2} \{ [\varphi, z]_{c_0} [\psi, u]_{c_0} - [\varphi, u]_{c_0} [\psi, z]_{c_0} \} = 0 \end{aligned}$$

çelişkisine ulaşılır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 den T nin tüm özdeğerlerinin açık üst yarı düzlemde bulunduğu sonucu çıkar. Özel olarak sıfır T nin bir özdeğeri değildir.

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), x \in \Lambda_1 \\ u_2(x), x \in \Lambda_2 \\ \vdots \\ u_{n+1}(x), x \in \Lambda_{n+1} \end{cases} \quad \text{ve } v(x) = \begin{cases} v_1(x), x \in \Lambda_1 \\ v_2(x), x \in \Lambda_2 \\ \vdots \\ v_{n+1}(x), x \in \Lambda_{n+1} \end{cases},$$

olmak üzere fonksiyonları ele alınsın. Burada $v(x) = z(x) + \vartheta u(x)$ şeklindedir.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in \Lambda_1 \\ f_2(x), x \in \Lambda_2 \\ \vdots \\ f_{n+1}(x), x \in \Lambda_{n+1} \end{cases}$$

ve $y \in D(T)$ olmak üzere $Ty = f(x)$ $(x \in \Lambda)$ denklemi ele alınsın. Denklemin homogen kısmının çözümü

$$y(x) = \begin{cases} s_1 u_1(x) + l_1 v_1(x), \ x \in \Lambda_1 \\ s_2 u_2(x) + l_2 v_2(x), \ x \in \Lambda_2 \\ \vdots \\ s_{n+1} u_{n+1}(x) + l_{n+1} v_{n+1}(x), \ x \in \Lambda_{n+1} \end{cases}$$

şeklinde aranabilir. Parametrelerin değişimi yöntemi kullanılır ve $\Delta_k = [u_k, v_k]_x$ $(x \in \Omega_k)$ gösterimi kabul edilirse

$$\begin{aligned} s_k'(x) &= \tfrac{v_k(x) f_k(x) w_k(x)}{\Delta_k}, \ x \in \Lambda_k, \\ l_k'(x) &= -\tfrac{u_k(x) f_k(x) w_k(x)}{\Delta_k}, \ x \in \Lambda_k, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\widetilde{s}_k$ ve $\widetilde{l}_k$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} s_k(x) &= \widetilde{s}_k + \tfrac{1}{\Delta_k} \int\limits_{c_{k-1}}^{x} v_k f_k w_k d\xi, \ x \in \Lambda_k, \\ l_k(x) &= \widetilde{l}_k + \tfrac{1}{\Delta_k} \int\limits_{x}^{c_k} u_k f_k w_k d\xi, \ x \in \Lambda_k, \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Dolayısıyla denklemin çözümü

$$y(x) = \begin{cases} \left(\widetilde{s}_1 + \frac{1}{\Delta_1} \int\limits_{c_0}^{x} v_1 f_1 w_1 d\xi \right) u_1(x) + \left(\widetilde{l}_1 + \frac{1}{\Delta_1} \int\limits_{x}^{c_1} u_1 f_1 w_1 d\xi \right) v_1(x), x \in \Lambda_1 \\ \left(\widetilde{s}_2 + \frac{1}{\Delta_2} \int\limits_{c_1}^{x} v_2 f_2 w_2 d\xi \right) u_2(x) + \left(\widetilde{l}_2 + \frac{1}{\Delta_2} \int\limits_{x}^{c_2} u_2 f_2 w_2 d\xi \right) v_2(x), x \in \Lambda_2 \\ \vdots \\ \left(\widetilde{s}_{n+1} + \frac{1}{\Delta_{n+1}} \int\limits_{c_n}^{x} v_{n+1} f_{n+1} w_{n+1} d\xi \right) u_{n+1}(x) \\ + \left(\widetilde{l}_{n+1} + \frac{1}{\Delta_{n+1}} \int\limits_{x}^{c_{n+1}} u_{n+1} f_{n+1} w_{n+1} d\xi \right) v_{n+1}(x), x \in \Lambda_{n+1} \end{cases}$$

halini alır. (4.2) ve (4.3) koşulları uygulatılırsa

$$\widetilde{s}_1 = 0, \ \widetilde{l}_{n+1} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla çözüm

$$y(x)=\begin{cases}\frac{u_1(x)}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{x}v_1f_1w_1d\xi+\left(\widetilde{l}_1+\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{x}^{c_1}u_1f_1w_1d\xi\right)v_1(x),\ x\in\Lambda_1\\ \left(\widetilde{s}_2+\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{x}v_2f_2w_2d\xi\right)u_2(x)+\left(\widetilde{l}_2+\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{x}^{c_2}u_2f_2w_2d\xi\right)v_2(x),\ x\in\Lambda_2\\ \vdots\\ \left(\widetilde{s}_{n+1}+\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{x}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right)u_{n+1}(x)\\ +\frac{v_{n+1}(x)}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{x}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi,\ x\in\Lambda_{n+1}\end{cases}$$

halini alır. (4.4) ve (4.5) koşullarından

$$\begin{aligned}&\widetilde{s}_2=\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi,\\ &\widetilde{s}_3=\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi+\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2}v_2f_2w_2d\xi,\\ &\vdots\\ &\widetilde{s}_{n+1}=\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi+\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2}v_2f_2w_2d\xi+...+\frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}v_nf_nw_nd\xi\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\widetilde{l}_1=\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi+\frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}u_nf_nw_nd\xi+...+\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2}u_2f_2w_2d\xi,\\ &\widetilde{l}_2=\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi+\frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}u_nf_nw_nd\xi+...+\frac{1}{\Delta_3}\int\limits_{c_2}^{c_3}u_3f_3w_3d\xi,\\ &\vdots\\ &\widetilde{l}_n=\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu nedenle $y(x)$

$$y(x)=\begin{cases}\frac{u_1(x)}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{x}v_1f_1w_1d\xi+v_1(x)\left(\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{x}^{c_1}u_1f_1w_1d\xi+\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{c_2}u_2f_2w_2d\xi\right.\\ \left.+...+\frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}u_nf_nw_nd\xi+\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right),x\in\Lambda_1\\ u_2(x)\left(\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi+\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{c_1}^{x}v_2f_2w_2d\xi\right)\\ +v_2(x)\left(\frac{1}{\Delta_2}\int\limits_{x}^{c_2}u_2f_2w_2d\xi+\frac{1}{\Delta_3}\int\limits_{c_2}^{c_3}u_3f_3w_3d\xi\right.\\ \left.+...+\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right),x\in\Lambda_2\\ \vdots\\ u_{n+1}(x)\left(\frac{1}{\Delta_1}\int\limits_{c_0}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi+...+\frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}v_nf_nw_nd\xi\right.\\ \left.+\frac{1}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{c_n}^{x}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right)+\frac{v_{n+1}(x)}{\Delta_{n+1}}\int\limits_{x}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi,x\in\Lambda_{n+1}\end{cases}$$

şeklinde bulunur.

$$\Delta_1=-\gamma_1\gamma_1'...\gamma_n\gamma_n',\ \Delta_2=-\gamma_2\gamma_2'...\gamma_n\gamma_n',...,\Delta_{n+1}=-1$$

eşitlikleri dikkate alınarak $Ly=f(x)$ denkleminin çözümü

$$y(x)=\begin{cases} -\frac{u_1(x)}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{c_0}^{x}v_1f_1w_1d\xi-v_1(x)\left(\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{x}^{c_1}u_1f_1w_1d\xi+\frac{1}{\gamma_2\gamma_2'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{c_1}^{c_2}u_2f_2w_2d\xi\right.\\ \left.+...+\frac{1}{\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}u_nf_nw_nd\xi+\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right),x\in\Lambda_1\\ -u_2(x)\left(\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{c_0}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi+\frac{1}{\gamma_2\gamma_2'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{c_1}^{x}v_2f_2w_2d\xi\right)\\ -v_2(x)\left(\frac{1}{\gamma_2\gamma_2'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{x}^{c_2}u_2f_2w_2d\xi+\frac{1}{\gamma_3\gamma_3'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{c_2}^{c_3}u_3f_3w_3d\xi\right.\\ \left.+...+\int\limits_{c_n}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right),x\in\Lambda_2\\ \vdots\\ -u_{n+1}(x)\left(\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{c_0}^{c_1}v_1f_1w_1d\xi+...+\frac{1}{\gamma_n\gamma_n'}\int\limits_{c_{n-1}}^{c_n}v_nf_nw_nd\xi\right.\\ \left.+\int\limits_{c_n}^{x}v_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi\right)-v_{n+1}(x)\int\limits_{x}^{c_{n+1}}u_{n+1}f_{n+1}w_{n+1}d\xi,x\in\Lambda_{n+1} \end{cases}$$

biçiminde bulunur.

$$G(x,\xi)=\begin{cases} -\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}v(x)u(\xi),\ c_0\le x\le\xi\le c_{n+1};x,\xi\ne c_k;k=\overline{1,n}\\ -\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}v(\xi)u(x),\ c_0\le\xi\le x\le c_{n+1};x,\xi\ne c_k;k=\overline{1,n} \end{cases}\tag{4.12}$$

şeklinde ele alınırsa

$$y(x)=\left\langle G(x,\xi),\overline{f}(\xi)\right\rangle_H,\ f\in L_w^2(\Lambda)$$

formunda yazılabilir. Dolayısıyla keyfi $f\in L_w^2(\Lambda)$ için

$$Af=\left\langle G(x,\xi),\overline{f}(\xi)\right\rangle_H,\tag{4.13}$$

operatörü T nin tersidir. Sonuç olarak A ve T nin kök vektörleri çakışır.

$v(x)=z(x)+(\vartheta_1+i\vartheta_2)u(x)$ olduğundan (4.12) den

$$G_1(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\left[z(x)+\vartheta_1 u(x)\right]u(\xi), \ c_0 \le x \le \xi \le c_{n+1}; x,\xi \ne c_k; k=\overline{1,n} \\ -\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\left[z(\xi)+\vartheta_1 u(\xi)\right]u(x), \ c_0 \le \xi \le x \le c_{n+1}; x,\xi \ne c_k; k=\overline{1,n} \end{cases}$$

ve

$$G_2(x,\xi) = -\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'\cdots\gamma_n\gamma_n'}\vartheta_2 u(x)u(\xi), \ \vartheta_2 > 0,$$

yazılabilir. Dolayısıyla (4.13) $A = A_1 + iA_2$ şeklinde ele alınabilir. Burada

$$A_1 f = \left\langle G_1(x,\xi), \overline{f}(\xi)\right\rangle_H, \ A_2 f = \left\langle G_2(x,\xi), \overline{f}(\xi)\right\rangle_H$$

şeklindedir. A ve A_1 Hilbert-Schmidt operatörleridir. Ayrıca A_1 ve A_2 kendine eşleniktir. A_2 operatörü bir boyutlu operatördür.

A_1 operatörü τ diferensiyel ifadesi ve

$$[y,z]_{c_0} + \vartheta_1 [y,u]_{c_{n+1}} = 0,$$

$$y(c_{n+1})\cos\beta + y'(c_{n+1})\sin\beta = 0,$$

$$y(c_m-) = \gamma_m y(c_m+),$$

$$y'(c_m-) = \gamma_m' y'(c_m+),$$

koşullarıyla üretilen T_1 operatörünün tersidir.

Sıradaki fonksiyonlar ele alınsın:

$$\eta_1(x,\lambda) = [\psi_1(x,\lambda), z_1(x)]_x, \ \eta_2(x,\lambda) = [\psi_1(x,\lambda), u_1(x)]_x.$$

Teorem 4.2.3. $\eta_1(c_0,\lambda)$ ve $\eta_2(c_0,\lambda)$ fonksiyonları λ nın tam fonksiyonları olup mertebeleri en çok birdir (≤ 1) ve cinsleri minimaldir.

İspat. (1.1) in $\psi(x,\lambda) = \left\{\psi_1(x,\lambda), \psi_2(x,\lambda), ..., \psi_{n+1}(x,\lambda)\right\}$ çözümü için

$$\psi_1 = \frac{1}{\gamma_1\gamma_1' ... \gamma_n\gamma_n'} \left\{\eta_2(x,\lambda)z_1(x) - \eta_1(x,\lambda)u_1(x)\right\}, \ x \in \Lambda_1 \tag{4.14}$$

yazılabilir. Ayrıca $x \in \Lambda_1$ için

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x}\eta_1(x,\lambda) &= \lambda\psi_1(x,\lambda)z_1(x)w_1(x), \\ \tfrac{\partial}{\partial x}\eta_2(x,\lambda) &= \lambda\psi_1(x,\lambda)u_1(x)w_1(x), \end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitlikleri mevcuttur. (4.14) ü (4.15) te dikkate alarak

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{n}(x,\lambda) = \lambda N(x)\mathbf{n}(x,\lambda), \ x \in \Lambda_1 \tag{4.16}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada

$$\mathbf{n}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \eta_1(x,\lambda) \\ \eta_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

ve

$$N(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'...\gamma_n\gamma_n'} z_1(x)u_1(x)w_1(x) & \frac{1}{\gamma_1\gamma_1'...\gamma_n\gamma_n'} z_1^2(x)w_1(x) \\ -\frac{1}{\gamma_1\gamma_1'...\gamma_n\gamma_n'} u_1^2(x)w_1(x) & \frac{1}{\gamma_1\gamma_1'...\gamma_n\gamma_n'} z_1(x)u_1(x)w_1(x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $z_1, u_1 \in L^2_{w_1}(\Lambda_1)$ olduğundan $N(x)$ in elemanları $L^1(\Lambda_1)$ dendir. Ayrıca biliniyor ki (Zettl 2005) $c_0 < d \leq c_1$ için $\psi_1(d,\lambda)$ ve $\psi_1'(d,\lambda)$ λ nın tam fonksiyonlarıdır ve mertebeleri 1/2 dir. (4.16) dan

$$\mathbf{n}(x,\lambda) = \mathbf{n}(b,\lambda) - \lambda\int_x^b N(\xi)\mathbf{n}(\xi,\lambda)d\xi, \ x \in \Lambda_1, \tag{4.17}$$

yazılabilir. Gronwall eşitsizliği kullanılarak

$$\|\mathbf{n}(x,\lambda)\| \leq \|\mathbf{n}(b,\lambda)\| \exp\left(|\lambda| \int\limits_x^b \|N(\xi)\|\, d\xi\right),\ x \in \Lambda_1 \tag{4.18}$$

eşitsizliğine ulaşırız. (4.17) ve (4.18) kullanılarak

$$\|\mathbf{n}(c_0,\lambda) - \mathbf{n}(b,\lambda)\| \leq |\lambda|\, \|\mathbf{n}(b,\lambda)\| \left(\int\limits_{c_0}^b \|N(\xi)\|\, d\xi\right) \exp\left(|\lambda| \int\limits_{c_0}^{c_1} \|N(\xi)\|\, d\xi\right) \tag{4.19}$$

ve

$$\|\mathbf{n}(c_0,\lambda)\| \leq \|\mathbf{n}(b,\lambda)\| \exp\left(|\lambda| \int\limits_{c_0}^b \|N(\xi)\|\, d\xi\right) \tag{4.20}$$

eşitsizliklerine ulaşırız.

(4.19) gösterir ki $b \to c_0$ için her kompakt λ kümesinde $\mathbf{n}(b,\lambda) \to \mathbf{n}(c_0,\lambda)(düzgün)$ dür. Dolayısıyla $\eta_1(c_0,\lambda)$ ve $\eta_2(c_0,\lambda)$, λ nın tam fonksiyonlarıdır.

$b = c_1-$ alarak (4.20) den elde edilir ki $\eta_j(c_0,\lambda)$ $(j = 1;2)$ nin mertebesi 1 i geçemez. Ayrıca (4.20) den $\eta_j(c_0,\lambda)$ $(j = 1;2)$ nin minimal tipte olduğu görülür. Bu sonuçlar ise ispatı tamamlar.

4.3 Tamlık Teoremi

T dissipatif olduğundan $-A$ dissipatiftir (Wang ve Wu 2012). Dolayısıyla $-A = -A_1 - iA_2$ operatörünü dikkate alalım. A_1 in karakteristik değerleri T_1 in özdeğerleriyle ve dolayısıyla

$$\eta(\lambda) = \eta_1(c_0,\lambda) + \vartheta_1 \eta_2(c_0,\lambda),$$

fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır. Ayrıca Teorem 4.2.3 ten

$$\|\eta(\lambda)\| \leq D\exp(\epsilon\,|\lambda|),\ \ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.21}$$

$D > 0$, eşitsizliğini yazabiliriz. Dolayısıyla (4.21) den ve Krein teoreminden sıradaki sonuca ulaşırız.

Teorem 4.3.1. $-A$ nın (A nın) tüm kök vektörler sistemi H da tamdır.

Dolayısıyla Teorem 4.3.1, diğer sonuçlarla birleştirilirse sıradaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.3.2. (4.1)-(4.5) probleminin tüm özdeğerleri açık üst yarı düzlemdedir ve onlar tamamen ayrıktır. Bu özdeğerlerin olası limit noktası sonsuzluktadır. (4.1)-(4.5) probleminin tüm özvektörler ve eşleşen vektörler sistemi H da tam bir sistem oluşturur.

Uyarı 4.3.3. Teorem 4.3.2 deki sonuçlar $n = 1$ için Bairamov ve Ugurlu tarafından 2012 de elde edilmiştir (Bairamov ve Ugurlu 2012).

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Sınır-değer-iletim problemleri son yıllarda literatürde yoğun bir şekilde incelenen problemler arasındadır. Bu türlü problemlerin incelenmesinde kullanılan temel araçlardan biri operatör teorisidir. Problemle uyumlu bir operatör kurulurken, operatörün rol oynayacağı Hilbert uzayı özel bir iç çarpımla birlikte seçilir. Bu iç çarpım, iletim noktalarındaki koşullardan kaynaklanan iç değerleri yok eder. Sonuç olarak sadece sınır koşullarından kaynaklanan sınır değerleri kalır. Bu sınır değerleri ise kendine eşlenik olan ya da olmayan operatörlerin varlığını belirler. Ardından bu operatörlerin spektral özellikleri incelenir.

İletim koşullarının bir noktada verilmesiyle birden çok noktada verilmesi arasında belirgin olmayan bir fark vardır. Fakat bu fark problemin incelenmesine başlanmasıyla birlikte belirginleşir ve problemin zorluk derecesi anlaşılır. Çoklu noktada iletim koşullu problemlerin incelenmesinde uygun iç çarpımı kurmak önemlidir. Bu iç çarpım iç değerleri yok edecektir. Fakat bir başka sorun ters operatörün ya da homogen olmayan sınır-değer-iletim probleminin çözümünde ortaya çıkar. İşlemlerin karmaşık ve zor olmasına karşın Green fonksiyonundaki sadelik resolvent operatörün belirlenmesinde kolaylık sağlar. Dolayısıyla resolvent operatörün açık hali pek çok sorunun aşılmasında önemlidir.

İletim koşullarının bir tek noktada verilmesiyle (3.1)-(3.5) problemi $p(x) \equiv w(x) \equiv 1$ için

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \;\; x \in (0, c) \cup (c, \infty), \tag{5.1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{5.2}$$

$$[y, z]_\infty - h[y, u]_\infty = 0, \tag{5.3}$$

$$y(c-) = \kappa_1 y(c+), \tag{5.4}$$

$$y'(c-) = \kappa_1' y'(c+) \tag{5.5}$$

halini alır ve (5.1)-(5.5) probleminin spektral özellikleri Bairamov ve Ugurlu tarafından 2013'te incelenmiştir (Bairamov ve Ugurlu 2013).

Benzer düşünceyle (4.1)-(4.5) problemi

$$-y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y + q(x)y = \lambda w(x)y, \;\; x \in (0, c) \cup (c, 1), \tag{5.6}$$

$$[y, z]_0 + \vartheta [y, u]_0 = 0, \tag{5.7}$$

$$y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0, \tag{5.8}$$

$$y(c-) = \gamma_1 y(c+), \tag{5.9}$$

$$y'(c-) = \gamma_1' y'(c+) \tag{5.10}$$

halini alır. (5.6)-(5.10) probleminin spektral özellikleri Bairamov ve Ugurlu tarafından 2012'de incelenmiştir (Bairamov ve Ugurlu 2012).

KAYNAKLAR

Adamyan, V. M. and Arov, D. Z. 1966. On unitary couplings of semi-unitary operators. Matem. Issled. 1, no. 2; 3-64. English transl. 1970. Transl., II Ser., Amer. Math. Soc., 95; 75-129.

Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtarov, O. Sh. 2007. Green function of discontinuous boundary-value problem with transmission conditions. Math. Met. Appl. Sci., 30; 1719-1738.

Altınışık, N., Kadakal, M. and Mukhtarov, O. Sh. 2004. Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions. Acta Math. Hungar., 102 (1-2); 159-175.

Ao, Ji-Jun, Sun., J., and Zhang Mao-Zhu. 2011. The finite spectrum of Sturm-Liouville problems with transmission conditions. Appl. Math. Comput., 218 (4); 1166-1173.

Ao, Ji-Jun, Sun., J., and Zhang, Mao-Zhu. 2012. Matrix representations of Sturm-Liouville problems with transmission conditions. CAMWA, 63 (8); 1335-1348.

Bairamov, E. and Ugurlu, E. 2012. On the characteristic values of the real component of a disipative boundary value transmission problem. Appl. Math. Comput., 218; 9657–9663.

Bairamov, E. and Ugurlu, E. 2013. Krein's theorems for a dissipative boundary value transmission problem. Complex Anal. Oper. Theory, 7; 831-842.

Birman, M. Sh. and Solomyak, M. Z. 1977. Estimates of singular numbers of integral operators. Russian Math. Surveys, 32 (1); 15-89.

Boyd, J. P. 1981. Sturm-Liouville eigenproblems with an interior pole. J. Math. Phys., 22; 1575-1590.

Cao, X., Wang, Z. and Wu, H. 2009. On the boundary conditions in self-adjoint multi-interval Sturm-Liouville problems. Linear Algebra and its Appl., 430; 2877-2889.

Chen, D.-G., Wang, H.-Y. and Tsang, E. C. C. 2008. Generalized Mercer theorem and its application to feature space related to indefinite kernels. Proceedings of the Seventh International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Kunming. 774-777.

Cochran, J. A. 1977. Composite integral operators and nuclearity. Arkiv för Matematik, 15 ; 215-222.

Coddington, E. A. and Levinson, N. 1955. Theory of Ordinary Differential Equatons. McGraw-Hill Book Company, 429 p., New York.

Davies, E.B. 2007. Linear Operators and Their Spectra. Cambridge University Press, 451 p., Cambridge.

Devinatz, A. 1973. The deficiency index problem for ordinary selfadjoint differential operators. Bulletin Amer. Math. Soc., 79 (6); 1109-1127.

Everitt, W. N., Knowles, I.W. and Read, T. T. 1986. Limit-point and limit-circle criteria for Sturm-Liouvill equations with intermittently negative principal coefficient, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, 103; 215-228.

Everitt, W. N. and Zettl, A. 1986. Sturm-Liouville differential operators in direct sum spaces. Rocky Mountain J. of Mathematics, 497-516.

Friedman, B. 1956. Principles and Techniques of Applied Mathematics. John Wiley and Sons, 315 p., New York.

Fulton, C.T. 1977. Parametrizations of Titchmarsh's $m(\lambda)-$functions in the limit-circle case. Trans. Amer. Math. Soc., 229, 51-63.

Gohberg, I. C. and Krein, M. G. 1969. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. Amer. Math. Soc., 378 p., Providence.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. A. 1990. M. A. Classes of Linear Operators Vol. I.Deutsche Bibliothek Cataloging. Birkhauser Verlag, 468 p., Basel.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. 2000. Traces and Determinants of Linear Operators. Operator Theory Advances and Appl. Vol. 116, Birkhauser Verlag, 258 p., Basel.

Guseinov, G. 1993. Completeness theorem for the dissipative Sturm-Liouville operator. Doga-Tr. J. Math., 17; 48-54.

Guseinov, G. Sh. 2002. Completeness of the eigenvectors of a dissipative second order difference operator: Dedicated to Lynn Erbe on the occasion of his 65th birthday. J. Differ. Eq. Appl., 8; 321-331.

Harris, B. J. 1984. Limit-circle criteria for second order differential expression. Quart. J. Math. Oxford 2. Ser., 35; 415-427.

Kadakal, M. and Mukhtarov, O. Sh. 2006. Discontinuous Sturm-Liouville problems containing eigenparameter in the boundary conditions. Acta Math. Sinica. Engl. Ser., 22 (5); 1519-1528.

Kadakal, M. and Mukhtarov, O. Sh. 2007. Sturm-Liouville problems with discontinuities at two points, CAMWA, 54, 11-12; 1367-1379.

Krein, M. G. 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary problem in the interval $(0, \infty)$. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 16, No 4; 293-324 (in Russian).

Kotljar, B. D. 1976. On the singular numbers of integral operators. Soviet Math. Dokl., 17 (4); 1095-1097.

Lax, P. D. 2002. Functional Analysis. John Wiley and Sons, 580 p., Canada.

Lax, P. D. and Phillips, R. S. 1967. Scattering Theory. Academic Press, 276 p., New York and London.

Levin, B. Ja. 1972. Distribution of Zeros of Entire Functions. American Mathematical Society, 523 p., USA.

Mukhtarov, O. Sh. and Tunç, E. 2004. Eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with transmission conditions. Israel J. Math., 144; 367-380.

Mukhtarov, O. Sh., Kadakal, M. and Muhtarov, F. Ş. 2004. Eigenvalues and normalized eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problem with transmission conditions. Report on Math. Phys., 54; 41-56.

Mukhtarov, O. Sh. and Kadakal, M. 2005. Some spectral properties of one Sturm-Liouville type problem with discontinous weight, Siberian Math. J., 46, No. 4; 681-694.

Naimark, M. A. 1968. Linear Differential Operators, 2nd edn, Nauka, Moscow; English transl. of 1st edn, Parts 1, 2, 1967, 1968. Ungar, 352 p., New York.

Pietsch, A. 1987. Eigenvalues and $s-$Numbers. Cambridge University Press, 360 p., Cambridge.

Riesz, F. and Sz-Nagy, B. 1955. Functional Analysis. Frederick Ungar Publishing Co., 468 p., New York.

Simon, B. 2005. Trace Ideals and Their Applications. Amer. Math. Soc. (second edition), 150 p., USA.

Smithies, F. 1958. Integral Equations. Cambridge University Press, 172 p., London.

Stinespring, W. F. 1958. A sufficient condition for an integral operator to have a trace. J. Reine Angew. Math., 200; 200-207.

Sun, J., Wang, A. and Zettl, A. 2007. Two-interval Sturm-Liouville operators in direct sum spaces with inner product multiples. Result. Math., 50; 155-168.

Sz.-Nagy, B. and Foiaş, C. 1970. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. North-Holland Publ. Comp., 387 p., Amsterdam, London.

Titchmarsh, E. C. 1962. Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, Part 1. Clarendon Press, 2nd edn., 203 p., London.

Tunç, E. and Muhtarov, O.Sh. 2004. Fundamental solutions and eigenvalues of one boundary-value problem with transmission conditions, Appl. Math. Comp., 157; 347-355.

Wang, Z. and Wu, H. 2012. Dissipative non-self-adjoint Sturm-Liouville operators and completeness of their eigenfunctions. J. Math. Anal. Appl., 394; 1-12.

Weyl, H. 1910. Über gewöhnliche differentialgleichungen mit singularitaten und die zugehörigen entwicklungen willkürlicher funktionen. Math. Ann., 68; 220-269.

Zettl, A. 2005. Sturm-Liouville Theory, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 121, American Mathematical Society, Providence, 328 p., USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ekin UĞURLU

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 28.10.1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Ankara Atatürk Anadolu Lisesi (2003)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2010)
Doktora	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2010 – Eylül 2014)

SCI Yayınları

Bairamov, E. and Ugurlu, E. 2012. On the characteristic values of the real component of a disipative boundary value transmission problem. Appl. Math. Comput., 218; 9657–9663.

Bairamov, E. and Ugurlu, E. 2013. Krein's theorems for a dissipative boundary value transmission problem. Complex Anal. Oper. Theory, 7; 831-842.