ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UÇ DEĞERLER VE RİSK ANALİZİ: BAZI MODELLER VE UYGULAMALAR

Emel KIZILOK

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2001

Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU danışmanlığında,

Emel KIZILOK

tarafından hazırlanan bu çalışma 15/08/2001 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından İstatistik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Fazıl ALİOĞLU (ALİYEV)	İmza :
Üye	: Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU	İmza :
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Halil AYDOĞDU	İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Esma KILIÇ

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UÇ DEĞERLER VE RİSK ANALİZİ: BAZI MODELLER VE UYGULAMALAR

Emel KIZILOK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU

Bu çalışmada, belirli bir yüksek eşik değerini aşan Pareto dağılımlı hasar miktarlarının oluşturduğu birden fazla portföy ve her portföyün bağımlı risk gruplarından oluştuğu düşünülerek, portföylerdeki belirlenecek maksimum hasar miktarlarının dağılımı için Tawn (1990)' ın geliştirmiş olduğu Genelleştirilmiş Uç Değer dağılımı ele alındı ve çözümlemeler yapıldı.

Risk analizindeki hasar miktarlarının toplamı için üç durum ele alındı: Pareto dağılımlı hasar miktarları, maksimum değer hasar miktarları ve tam gözlemleme durumundaki hasar miktarları. Her bir durum için risk yönetiminin ölçütleri olan risk primi, risk rezervi , güvenlik yüklemesi, yükümlülüğü karşılama oranı ve net retenşın arasındaki ilişkiler ortaya konuldu. Sonuç olarak her üç durum için , risk primi arttıkça risk rezervinin arttığı , güvenlik yüklemesi yüksek tutulduğunda başlangıç risk rezervinin gereksiz olduğu görüldü. Ayrıca aynı risk rezervi için, büyük riskler karşısında net retenşın sınırının düştüğü görüldü.

2001, 96 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Risk Süreci, Uç Değerler, İflas Olasılığı, Risk Yönetimi

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

EXTREME VALUES AND RISK ANALYSIS:
SOME MODELS AND APPLICATIONS

Emel KIZILOK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor : Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU

In this work, a risk analysis case of several portfolios are considered, such that claim sizes are Pareto distributed, claim sizes exceed a high threshold, and every portfolio arises from group dependent risk groups. We utilized the Generalized Extreme Value distribution proposed by Tawn (1990) for distribution of maximum claim size variables.

Three cases for aggregate claims were handled in risk analysis: Claim sizes with Pareto distrubition, maximum value claim sizes, and claim sizes in case of completed observations. For every case, the relations between the factors of risk management, namely risk premium, risk reserve, safety loading, solvency ratio and net retention were presented. Regarding each case; the following were found: If risk premium increases risk reserve increases, if safety loading is higher than initial capital, no risk reserve is necessary at all. Moreover; net retention limit was observed to be decreasing when large risks exist for the same risk reserve value.

2001, 96 pages

Key Words : Risk Processes, Extreme Values , Ruin Probability, Risk Management

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmanın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü)'na ve aileme yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Emel KIZILOK
Ankara , Ağustos 2001

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

C	$\{1,\ldots,p\}$ ile ifade edilen K kümesi üzerindeki index değişkeni
$F_S(x)$	Toplam hasar S' nin dağılım fonksiyonu
g_N	Hasar sayısı N' nin olasılık çıkaran fonksiyonu
h_C	$C \in K$ için $R_{(i)}$ portföylerindeki risk grup sayısı
K	Boş olmayan $R_{(i)}$ alt kümelerinin sınıfı
k_i	$X_{i,C}^{(j)}$ pareto rasgele değişkeninin kuyruk parametresi
$M^{(i)}$	$R_{(i)}$ portföyünün net retenşın miktarı
M_l	$\{l$=1,2,3 $\}$ durumunun uygulanması ile tüm portföyler için bulunan toplam net retenşın miktarı
m_C	$C \in R_{(i)}$ risk gruplarının büyüklüğü
N	[0,t) zaman aralığındaki toplam hasar sayısı
NP	Normal Güç (Normal Power) Yaklaştırması
N_C	τ_C parametreli Poisson dağılımına sahip hasar sayısı rasgele değişkeni
N_j	$[t_j, t_{j+1})$ zaman aralıklarında görülebilecek hasar sayısı
$P^{(i)}$	$R_{(i)}$ portföyünün risk primi
P_l	$\{l$=1,2,3 $\}$ durumunun uygulanması ile tüm portföyler için bulunan toplam risk primi
$R_{(i)}$	i. portföyde u_i yüksek eşik değerini aşan $X_{i,C}^{(j)}$ rasgele değişkenlerinin bulunduğu portföy
r_C	$C \in K$ için bağımlılığı ölçen parametre
S	[0,t) zaman aralığındaki toplam hasar miktarı
$S_{(i)}$	$R_{(i)}$ portföyündeki toplam hasar miktarı
U_0	Başlangıç risk rezervi
U_r	İflas bariyeri
$U^{(i)}$	$R_{(i)}$ portföyünün risk rezervi
U_l	$\{l$=1,2,3 $\}$ durumunun uygulanması ile tüm portföyler için bulunan toplam risk rezervi
U_l / P_l	$\{l$=1,2,3 $\}$ durumunun uygulanması ile tüm portföyler için bulunan toplam yükümlülüğü karşılama oranı
u_i	$R_{(i)}$ portföyleri için belirlenen yüksek bir eşik değeri
X_j	$[t_j, t_{j+1})$ zaman aralıklarında görülebilecek hasar miktarı
$X_{i,C}$	$C \in R_{(i)}$ risk gruplarındaki maksimum hasar miktarı
$X_{i,C}^{(j)}$	i.portföydeki $C \in R_{(i)}$ risk gruplarındaki u_i'yi aşan j. bireyin meydana getirdiği hasar miktarı rasgele değişkeni
$X_{i,C}^{*(j)}$	$\left(X_{i,C}^{(j)} < x_i \,/\, X_{i,C}^{(j)} > u_i\right)$

y_ε	Standart Normal Dağılım tablosundan bulunan ordinat değer
Z_i	$R_{(i)}$ portföyünün maksimum hasar miktarı
$\Lambda^{(i)}$	$R_{(i)}$ portföyünün güvenlik yüklemesi
$\Lambda_l = \Lambda$	$\{l$=1,2,3 $\}$ durumunun uygulanması ile tüm portföyler için bulunan ağırlıklandırılmış güvenlik yüklemesi
ε	İflas olasılığı
$\delta^{(i)}$	*i*. portföye ait Z_i' lerin görüldüğü risk grubu dışında kalan gruplardaki tahmini hasar miktarları
$\Gamma_a(b+1)$	Tam olmayan Gama fonksiyonu
φ_N	Hasar sayısı *N*' nin moment çıkaran fonksiyonu
$\varphi_S(t)$	Toplam hasar *S*' nin moment çıkaran fonksiyonu
$\varphi_X(t)$	Hasar miktarı *X*' in moment çıkaran fonksiyonu
σ_i	$X_{i,C}^{(j)}$ pareto rasgele değişkeni parametresi
σ_S	Toplam hasar *S*' nin standart sapması
σ_q	Yapısal fonksiyonun standart sapması
$\sigma_{S(i)}$	*i*. portföye ait toplam hasar miktarı *S*'nin standart sapması
α	$X_{i,C}^{*(j)}$' lerin bağımlılığını ölçen parametre
α_C	u_i' nin altında kalan hasar miktarlarını belirten kaydedilmemiş arkadaş değişkeni olup pozitif karalı dağılıma ve $0 < 1/r_C \le 1$ şeklindeki üstel karakteristiğe sahip.
τ	Beklenen toplam hasar sayısı
τ_C	$C \in K$ için her bir portföydeki beklenen hasar sayısı
γ_S	*S*' nin yatıklık katsayısı
μ_S	*S*' nin beklenen değeri
$\mu_{S(i)}$	*i*. portföye ait prim değeri

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Tezin amacı , risk analizinin temel denklemi olarak bilinen risk stratejileri denklemini uç değerler ve dağılımları bakımından ele almak ve bazı yeni dağılımları kullanarak prim hesabı gibi risk yönetimi uygulamaları için sonuçlara ulaşmaktır.

Uç değerlerin istatistiki analizi, belirli bir eşik değerinin aşılmasına duyarlı sistemlerde önemlidir. Bu çalışmada; genelleştirilmiş uç değerlerle ilgili geliştirilmiş Tawn (1990)'ın modeli temel alınarak, risk analizindeki pirim hesabı ve temel denklemler esaslarında incelemeler yapılmaktadır. Ayrıca risk rezervi, yükümlülüğü karşılama oranı ve net retenşın ölçütleri bakımından inceleme ve çözümlemeler sunulmaktadır. Bu amaçla, çeşitli dağılım ve lokal bağımlılık modelleri önerilerek bunlara ilişkin açıklamalar yapılmıştır.

Çalışmanın ikinci Bölüm'ünde risk analizi temel kavramları ve denklemleri, üçüncü Bölüm'ünde uç değer süreçleri ve uç değerler için analiz esasları, dördüncü Bölüm'ünde uç hasar değerleri söz konusu olduğunda bazı modelleme ve çözümleme önerileri sunulmaktadır. Son Bölüm'de ise ilgilenilen durumlar için, iflas olasılığını minimum düzeyde tutmayı amaçlayan risk yönetiminin önemli nicelikleri olan risk rezervi U, risk primi P, net retenşın M ve güvenlik yüklemesi Λ arasındaki ilişkilere bakılıp grafiksel sunumları verilmektedir.

Çalışmanın dayandığı literatüre ilişkin özet bilgiler şunlardır: Risk teorisi ve uygulamalarında, Beard et al. (1984), Heilmann (1988) ve Bühlmann (1970)'ın eserlerinden yararlanıldı. Uç değerler konusunda ise Tawn (1990), Balakrishnan et al.(2000) ve Galambos (1987)' un çalışmaları kullanıldı.

2. RİSK ANALİZİ

2.1. Temel Kavramlar

$[0,t)$ aralığının belirli bir zaman genişliğini, $[t_j, t_{j+1})$ eşit zaman aralıklarının kesişmeyen ve bileşimleri $[0,t)$ zaman aralığını veren alt zaman genişliklerini gösterdiğini düşünelim. Birbirini takip eden bu zaman aralıklarında görülebilecek hasar sayısı N_j, hasar miktarı X_j olursa, $[0,t)$ aralığındaki toplam hasar sayısı $N_t = N$, toplam hasar miktarı ise

$$S = X_1 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{2.1}$$

olacaktır. X_j ve N' lerin birbirinden bağımsız, X_j' lerin de kendi aralarında bağımsız olduğu ve N'nin olasılık dağılımının Poisson dağılımı olduğu varsayılarak, toplam hasar miktarı dağılım fonksiyonu

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) F^{*n}(x) \tag{2.2}$$

şeklinde ortaya çıkan Bileşik-Poisson Dağılımı fonksiyonudur. Burada $F^{*n}(x)$, bağımsız ve aynı dağılıma sahip X_j' lerin dağılımlarının n. dereceden konvolüsyonudur.

2.2. Moment Çıkaran Fonksiyonu

2.1 şeklindeki S toplam hasar miktarının dağılımını ve momentlerini tanımlamak risk teorisinin temel amacıdır.

N'nin olasılık çıkaran fonksiyonu g_N ve X'in dağılım fonksiyonu F olmak üzere φ_N ve φ_X sırasıyla N'nin ve X'in moment çıkaran fonksiyonları olsunlar.

$t \in R$ için S' nin moment çıkaran fonksiyonu

$$\varphi_S(t) = Ee^{tS} = \int e^{tS} P^S(ds)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \int P^{S/N=n}(ds) e^{ts}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \int F^{*n}(ds) e^{ts}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) (\varphi_X(t))^n$$
$$= g_N(\varphi_X(t)) = \varphi_N(\ln \varphi_X(t))$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikten t'ye göre 1. ve 2. türevleri alınarak

$$\varphi_S'(t) = g_N'(\varphi_X(t))\varphi_X'(t) = \varphi_N'(\ln \varphi_X(t)) \frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)}$$

ve

$$\varphi_S''(t) = g_N''(\varphi_X(t))\left(\varphi_X'(t)\right)^2 + g_N'(\varphi_X(t))\varphi_X''(t)$$
$$= \varphi_N''(\ln \varphi_X(t)) \left(\frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)} \right)^2 + \varphi_N'(\ln \varphi_X(t)) \frac{\varphi_X''(t)\varphi_X(t) - \left(\varphi_X'(t)\right)^2}{(\varphi_X(t))^2}$$

elde edilir. Bu durumda

$$ES = \varphi_S'(0) = (EN)(EX) \tag{2.3}$$

$$ES^2 = \varphi_S''(0) = EN^2 (EX)^2 + (EN)V(X) \tag{2.4}$$

$$V(S) = ES^2 - (ES)^2 = (EN)V(X) + (EX)^2 V(N) \tag{2.5}$$

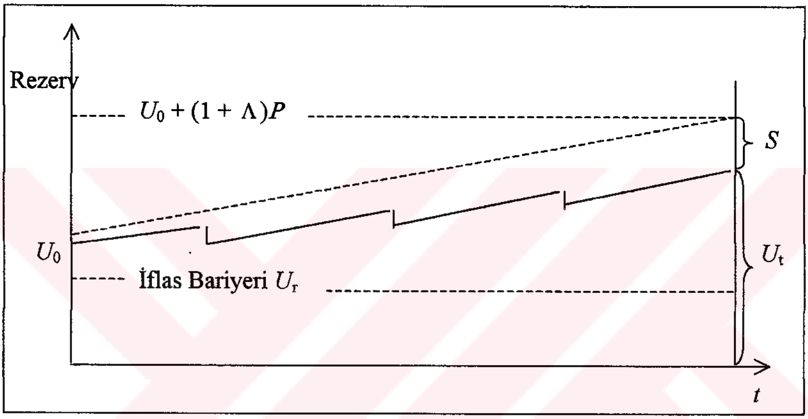
bulunur.

2.3. Temel Denklem

Risk yönetiminin stratejik unsurları , riski yönetmek durumunda olan risk alanın yaşam olasılığı denkleminde yerini bulur. $[0,t)$ zaman aralığında, başlangıç risk rezervi U_0 ve bu zaman sonundaki sonuç rezerv veya herhangi bir zamandaki rezerv olarak adlandırdığımız risk rezervi

$$U = U_0 + (1+\Lambda)P - S$$

N ve S' nin fonksiyonları olup , burada güvenlik yüklemesi Λ ve risk primi $P=ES$ karar öğeleridir. Temel problem , gözönüne alınacak diğer hususlara ilişkilendirmek için, dönem sonundaki U risk rezervinin dağılımını açıklamaktır. Gerçekte U-U_0 pozitif olursa kazancı, negatif olursa kaybı belirtir. Bu niteliğin değişim aralığı da bulunabilir. U' nun, diğer hususların da gözününde bulundurulduğu problem için tanımlanacak olan U_r iflas bariyerinin altına düşebildiği olasılık ε iflas olasılığı olarak adlandırılır. Bu problem bu iflas olasılığına bağlı olarak da formüle edilebilir.



Şekil 2.1. Gelir primlerinin ve gider hasarlarının bir farkı olarak risk süreci

S ' in dağılım fonksiyonu ile aşağıdaki gibi tanımlanan olasılık

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon = P(U \geq U_r) &= P(S \leq U_0 - U_r + (1+\Lambda)P) \\ &= F_S(U_0 - U_r + (1+\Lambda)P) \end{aligned}$$

risk alana ait "yaşama olasılığı" olarak adlandırılır. Yukarıdaki denklemden, $\overline{F_S} = 1 - F_S = \varepsilon$, risk alanın bir dönemdeki iflas olasılığıdır.

Normal güç (NP) yaklaştırması ile F_S dağılımının normal dağılıma yakın hale getirildiği bir durum için, y_ε Normal dağılım ordinat değerleri kullanılarak iflas olasılığı ifadesi

$$\varepsilon = N(-y_\varepsilon) = 1 - N(y_\varepsilon)$$

olacaktır. Normal Güç Yaklaştırması kullanılarak ve $U_r = 0$ ve $U_0 = u$ yazılarak

$$U = y_\varepsilon \sigma_S - \Lambda P + \frac{1}{6}\gamma_S \left(y_\varepsilon^{\,2} - 1\right)\sigma_S \qquad (2.6)$$

şeklinde ifade edilen temel eşitlik yazılabilir.

σ_S = S' nin standard sapma değeri
γ_S = S' nin yatıklık değeri

Risk yönetimi stratejileri bakımından önemli olan nicelikler ε, Λ, U_0 ve P' dir. En büyük retenşın M olarak bilinen ve risk alanın karşılaşabileceği toplam hasar miktarına sınır getiren karar değeri risk yönetiminin birincil kontrol değişkenleri arasındadır. Özellikle Λ, P ve M birincil kontrol değişkenleridir. Bu değişkenlerin değerleri verildiği ve $F_S(x)$ bilindiği zaman risk yönetiminin temel denklemi belirlenmiş olur (Beard et al.1984).

2.4. Risk Yönetimiyle İlgili Temel Ölçütler

Risk yönetiminde kararlı bir şekilde iflas olasılığına karşı korunmayı sağlayıcı temel stratejik ölçütler

$U = U(P, M)$: Risk Rezervi

$\frac{U}{P} = f(P, \Lambda)$: Yükümlülüğü Karşılama Oranı

$M = f(\tau, U)$: Net Retenşın (Net Alıkoyma)

ifadeleridir. Bu çalışmada, bu üç ölçüt temel alınarak dördüncü Bölüm'de konu edilen üç durum için denklemsel ifadeleri ve analizi beşinci Bölüm'de verilecektir.

2.4.1. Risk Rezervi

Bir sigorta şirketinin bir dönem sonunda olası hasarları karşılayabilmek amacıyla elinde bulundurması gerekli olan parasal miktardır ve U ile gösterilmektedir. U' nun belirlenmesi için bireylerden toplanan prim P' lerin ve net retenşın sınırı M' nin de gözönünde bulundurulması gerekir. Bölüm 5.1.' de verilen grafiklerden görüleceği gibi U, P ve M' nin her ikisine göre artan bir fonksiyondur. Net retenşın sınırı M ne kadar yüksek tutulursa, sigorta şirketinin karşılamak zorunda kalacağı hasarlar artacaktır. Bu da M'nin artmasına bağlı olarak , sigorta şirketinin risk rezervi U' yu arttırması gerekeceği anlamına gelmektedir. Aynı zamanda net retenşın sınırı M' nin artırılması primlerin de artırılmasını gerektirir ki risk rezervi U ancak bu şekilde artabilir. $P = \tau \cdot m(M)$ şeklinde ifade edilen primler de net retenşın sınırı M' ye bağlı olarak artacağından risk rezervi U prime göre de artan bir fonksiyodur.

2.4.2. Yükümlülüğü Karşılama Oranı

Minimum yükümlülüğü karşılama oranı U/P, prim P ve güvenlik yüklemesi Λ' nın bir fonksiyonu olarak hesaplanır. Buna ait şekiller Bölüm 5.2.' de gösterildiği gibi olacaktır. Bir sigorta şirketinin güvenlik yüklemesi Λ yeterince büyükse elinde başlangıç risk rezervi bulundurmasına gerek yoktur. Bu da topladığı primlerle zaman içerisinde meydana gelecek hasarları karşılayabileceği anlamına gelmektedir. Bir sigorta şirketi güvenlik yüklemesini artırırsa ,$(1+\Lambda)P$ ifadesi ile bulunan primler de artacağından başlangıç risk rezervine gerek duymaz. Risk priminin, ilgilenilen riskin standart sapması ve varyansın bileşimi kullanılarak, güvenlik yüklemesi Λ' ya bağlı olan

$$L_i = \Lambda' P_i + \Lambda'' \sigma_{S_{(i)}} + \Lambda''' \sigma^2_{S_{(i)}}$$

ifadesi yazılabilir. Burada i indisi bireysel veya grup poliçelerini göstermektedir. Λ'lar sigortanın farklı grup poliçeleri için farklı olabilir. Risk teorisinde önemli nicelik, bu güvenlik yüklemelerinden dolayı artan toplam gelir $\sum L_i$ 'dir. Ağırlıklandırılmış güvenlik yüklemesi

$$\Lambda = \sum L_i / \sum P_i$$

ile tanımlanır. Λ portföydeki farklı bölümler için ayrı ayrı hesaplanabilir. Sonra tüm şirket için, bölümler için hesaplananlar yukarıdaki ifadeye uygulanarak ortalama bölüm yüklemeleri

$$\Lambda = \frac{1}{P}\sum L_j = \sum \frac{P_j}{P}\Lambda_j = \sum \Pi_j \Lambda_j$$

şeklinde elde edilir. Burada j bölümleri göstermektedir.

2.4.3. Net Retenşın Sınırı

Bir sigorta şirketi, belirli bir sınırı aşan hasar miktarlarını ödememek için kendisine net retenşın sınırı olarak adlandırılan M değeri belirler. Bu M'nin üzerinde hasar meydana getiren bireylerin hasarlarını reasürans şirketi karşılamak zorundadır. Bölüm 5.3.' de çizilen grafiklerden de görüleceği gibi net retenşın sınırı M , beklenen hasar sayısı τ ve risk rezervi U' nun bir fonksiyonu olarak açıklanır.Beklenen hasar sayısı büyüdükçe karşılaşılabilicek risk de büyür. Eğer τ ,yani risk büyüklüğü artma eğiliminde ise artan U değerlerine karşılık net retenşın sınırı M' nin düşürülmesi gerekir. Diğer bir deyişle; sigorta şirketi büyük hasarla karşılaşmayı bekliyorsa net retenşın sınırını daha aşağılara çekerek elindeki aynı risk rezerviyle olası hasarları karşılayabilir. Böylece net retenşın sınırını düşürerek, elinde bulundurduğu risk rezervinin karşılayamayacağı hasarları reasürans şirketine aktarılmasını sağlayarak kendisinin iflas etme olasılığını minimum düzeye indirmiş olur. Bu nedenle M, beklenen hasar sayısı τ ' nun değerine bağlı olarak değişecektir. Aynı zamanda artan U değerlerine karşılık M' nin artan bir fonksiyon olduğu Bölüm 5.3. ' deki şekillerden görülmektedir.

3. UÇ DEĞERLER

3.1. Tek Değişkenli Uç Değerler Dağılımları

$X_1, X_2, \cdots, X_n$' ler birbirinden bağımsız, aynı sürekli F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. $X_{\max} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ olmak üzere, $X_{\max}$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$P\{X_{\max} \leq x\} = F^n(x), \quad -\infty < x < \infty$$

şeklindedir. $X_1, \cdots, X_n$' ler bağımsız ve aynı sürekli dağılıma sahip rasgele değişkenler olduklarından

$$X_{(n)} = a_n X_{\max} + b_n \qquad (a_n > 0)$$

şeklinde liner dönüşümünü bulmak mümkündür. $\forall n$ için $a_n > 0$, b_n sabitleri var olsun.

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = F_\infty(x)$$

olmak üzere $F_\infty(x)$, $X_{(n)}$ rasgele değişkeninin a_n ve b_n sabitleri yardımıyla elde edilmiş asimptotik dağılımını gösterir. a_n ve b_n'nin farklı seçimlerine göre $X_{(n)}$ rasgele değişkeni asimptotik olarak standartlaştırılmış üç tip dağılıma yakınsayabilir. Buna göre;

1.Tip: (Gumbel) $F_\infty(x) = \exp(e^{-x})$, $\forall x$ (3.1)

2.Tip: (Fréchet) $F_\infty(x) = \exp(-x^{-\delta})$, $x > 0, \delta > 0$ (3.2)

3.Tip: (Weibull) $F_\infty(x) = \exp(-(-x)^{\delta})$, $x < 0, \delta > 0$ (3.3)

dır (Balakrishnan et al. 1995).

3.2. Genel İki Değişkenli Uç Değer Dağılımları

(X_i, Y_i) çiftlerinin her biri, aynı sürekli ortak dağılım fonksiyonu $F(x, y)$'e sahip bağımsız rasgele değişken çiftleri olsun. $X_{\max} = \max(X_1, \cdots, X_n)$ ve

$Y_{max} = \max(Y_1,\cdots,Y_n)$' nin ortak dağılım fonksiyonları ele alınsın. $X_1,\cdots,X_n$' ler bağımsız ve aynı sürekli dağılıma sahip rasgele değişkenler olduklarından

$$X_{(n)} = a_n X_{max} + b_n \qquad (a_n > 0)$$

şeklinde liner dönüşümünü bulmak genellikle mümkündür. $X_{(n)}$, $n \to \infty$ iken , uç değerler dağılımı üç dağılım tipinden birine yakınsayan bir limit dağılımına sahiptir. Aynı şekilde $Y_1,\cdots,Y_n$' ler de bağımsız ve aynı sürekli dağılıma sahip rasgele değişkenler olduklarından

$$Y_{(n)} = c_n Y_{max} + d_n \qquad (c_n > 0)$$

dönüşümü için de aynı özellikler geçerlidir. $X_{(n)}$ ve $Y_{(n)}$' nin , $n \to \infty$ iken limitteki ortak dağılımı iki değişkenli uç değer dağılımıdır.

3.2.1. Özellikler

$X_{(max)}$ ve $Y_{(max)}$'ın ortak dağılım fonksiyonu $F^n(x,y)$'dir. İki değişkenli uç değer dağılım fonksiyonu $F_\infty(x,y)$ aşağıdaki gibidir.

$$F_\infty(x,y) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n, c_n y + d_n) \tag{3.4}$$

Bu eşitlik yaygın olarak "kararlılığın postulası" olarak bilinir. X_i ve Y_i'ler karşılıklı olarak bağımsızlarsa $X_{(max)}$ ile $Y_{(max)}$ ve $X_{(n)}$ ile $Y_{(n)}$' ler de karşılıklı bağımsız olacaklardır ve limit dağılımı da iki bağımsız rasgele değişkenin dağılımı olacaktır. Bunun tersi genellikle doğru değildir. Geffory (1958,1959)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x,y)}{1 - F_{X,Y}(x,y)} = 0 \tag{3.5}$$

koşulunun, $F_{X,Y}(x,y) \neq F_X(x)F_Y(y)$ olmasına rağmen X_{max} ve Y_{max}'ın asimptotik bağımsızlığı için yeterli olduğunu göstermiştir. (3.5) koşulu aşağıda belirtilen örnekler için sağlanmaktadır.

a) $|\rho| \neq 1$ iken iki değişkenli normal dağılım

b) Gumbel ve Farlie' ye bağlı olarak genelleştirilmiş biçimdeki iki değişkenli dağılım;

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)[1+\alpha(1-F_X(x))(1-F_Y(y))]$$

c) İki değişkenli üstel biçimdeki dağılım;

$$F_{X,Y}(x,y)=1-e^{-x}-e^{-y}-\exp(-x-y-\theta xy) \qquad (x,y\geq 0; 0\leq\theta\leq 1)$$

d) İki değişkenli lojistik dağılım;

$$F_{X,Y}(x,y)=\left(1+e^{-x}+e^{-y}\right)^{-1}$$

Aslında, (3.5)' deki eşitliği sağlayan herhangi bir ortak dağılım fonksiyonu

$$\frac{1}{F_{X,Y}(x,y)}=\frac{1}{F_X(x)}+\frac{1}{F_Y(y)}-1$$

şeklindedir. İki değişkenli bir uç değer dağılımının marjinal dağılımı, üç tip uç değer dağılımdan herhangi biri olabilir.

3.2.2. Özel İki Değişkenli Uç Değer Dağılımları

Gumbel (1958,1965), marjinal (tek değişkenli uç değer) dağılımları vasıtasıyla, iki değişkenli uç değer dağılımlarının iki genel şeklini tanımlamıştır.

1. A Tipi

$$F_\infty(x,y)=F_{1(\infty)}(x)F_{2(\infty)}(y)\times\exp\left[-\theta\left\{\frac{1}{\log F_{1(\infty)}(x)}+\frac{1}{\log F_{2(\infty)}(y)}\right\}^{-1}\right] \qquad (3.6)$$

2. B Tipi

$$F_\infty(x,y)=\exp\left[-\left\{(-\log F_{1(\infty)}(x))^m+(-\log F_{2(\infty)}(y))^m\right\}^{1/m}\right] \qquad (3.7)$$

(3.6)' da θ , $0\leq\theta<1$ olan bir parametredir ve θ=0 ise X ve Y bağımsızdır. (3.7)' de m, $m\geq 1$ olan bir parametredir ve m=1 ise X ve Y bağımsızdır.

Herbir marjinal dağılımın standartlaştırılmış 1.Tip uç değer şeklinde olduğu varsayılmaktadır:

$$F_{1(\infty)}(x)=\exp\left(-e^{-x}\right) \qquad ; \qquad F_{2(\infty)}(y)=\exp\left(-e^{-y}\right).$$

Bu dağılımların herbirinin beklenen değeri $\lambda = 0.577....$ve varyansı $\pi^2 / 6$'dır. 2. ve 3.Tipler , basit dönüşümler yapılarak 1.Tip'ten elde edilebildiklerinden, analizlerin çoğu bu diğer tiplerin marjinal dağılımları ile iki değişkenli uç değerler dağılımına ilişkilendirilmektedir.

Tiago de Oliveira (1958,1961), standartlaştırılmış 1. Tip uç değer marjinal dağılımlarını kullanarak , iki değişkenli bir dağılımın

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \exp\left[-\left(e^{-x_1} + e^{-x_2}\right)g(x_2 - x_1)\right] \tag{3.8}$$

şeklindeki bir dağılım fonksiyonu ile tanımlanabildiğini göstermiştir. Burada

$$g(t) = 1 - \frac{1}{4}\theta \sec h^2 \frac{1}{2} t \tag{3.9}$$

alınarak A Tipi Dağılımı:

$$F_{X,Y}(x,y) = \exp\left[-e^{-x} - e^{-y} + \theta\left(e^{-x} + e^{-y}\right)^{-1}\right] \qquad (0 \le \theta \le 1) \tag{3.10}$$

ve

$$g(t) = \left(e^{mt} + 1\right)^{1/m}\left(e^{t} + 1\right)^{-1} \tag{3.11}$$

alınarak B Tipi Dağılımı:

$$F_{X,Y}(x,y) = \exp\left[-\left(e^{-mx} + e^{-my}\right)^{1/m}\right] \qquad (m \ge 1) \tag{3.12}$$

elde edilmektedir. C Tipi dağılım olarak adlandırılan bir üçüncü dağılım (Tiago de Oliveira 1970) ise

$$g(t) = \left(e^{t} + 1\right)^{-1}\left\{1 - \phi + \max\left(e^{t}, \phi\right)\right\}, \ (0 < \phi < 1) \tag{3.13}$$

alınarak C Tipi Dağılımı:

$$F_{X,Y}(x,y) = \exp\left[-\max\left\{e^{-x} + (1-\phi)e^{-y}, e^{-y}\right\}\right] \qquad (0 < \phi < 1) \tag{3.14}$$

şeklinde elde edildiği gösterilmiştir (Balakrishnan et al. 1995).

3.3. Çok Değişkenli ve Genelleştirilmiş Uç Değerler Dağılımı

Çok değişkenli uç değerler dağılımları birkaç bağımlı gruptaki uç değerlerle ilişkili olarak ortaya çıkar. Klasik tanım, normalleştirilmiş maksimum bileşenlerinin asimptotik ortak dağılımı ifadesiyle açıklanır. $(Y_{i,1},\cdots,Y_{i,p})$ $(i=1,\cdots,n)$, bağımsız ve aynı dağılımdan gelen rasgele vektörleri belirtsin. $j=1,\cdots,p$ için $M_{n,j}=\max(Y_{1,j},\cdots,Y_{n,j})$ denilsin. $a_n=(a_{n,1},\cdots,a_{n,p})$, $\forall a_{n,j}>0$ ve $b_n=(b_{n,1},\cdots,b_{n,p})$ sabitler dizisi vardır öyle ki,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_{n,i}-b_{n,i}}{a_{n,i}}<x_i, i=1,\cdots,p\right)=G(x_1,\cdots,x_p) \tag{3.15}$$

dır. Burada G dejenere olmayan p değişkenli bir dağılım fonksiyonu olup çok değişkenli uç değer dağılımı olarak adlandırılır. Tek değişkenli uç değerler teorisinden G' nin tek değişkenli marjinalleri

$$H(x;\mu,\sigma,k)=\exp\left\{-\left(1-k\frac{x-\mu}{\sigma}\right)_+^{1/k}\right\} \tag{3.16}$$

şeklinde uç değerler dağılımlarına genelleştirilmektedir. Burada $x_+=\max(0,x)$ dır. Bu ifade uç değerler dağılımının üç tipini içermektedir:

1) $k=0$ olduğu durumda

$$H_1(x;\mu,\sigma,0)=\exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right] \text{ , } \sigma>0 \text{ , } -\infty<x<\infty \tag{3.17}$$

şeklindedir ve Gumbel dağılımı olarak bilinir.

$k\neq 0$ olduğu durumda

2) $k>0$ için

$$H(x;\mu,\sigma,k)=\exp\left\{-\left(1-k\frac{x-\mu}{\sigma}\right)_+^{1/k}\right\} \text{ , } \sigma>0 \text{ , } x<\mu+\sigma k^{-1} \tag{3.18}$$

şeklindeki dağılım Fréchet dağılımı ve

3) $k<0$ için

$$H(x;\mu,\sigma,k)=\exp\left\{-\left(1-k\frac{x-\mu}{\sigma}\right)_+^{1/k}\right\},\sigma>0\,,x>\mu+\sigma k^{-1} \tag{3.19}$$

şeklindeki dağılım da Weibull dağılımı olarak bilinir.

De Haan and Resnick (1977) ve Pickands (1981), herhangi p değişkenli uç değerler dağılımı $G(x_1,\cdots,x_p)$'in , (p-1) boyutlu örneklemin üzerindeki ikili pozitif ölçümlerine dayandığını göstermiştir. Parametrik modellerden biri Coles ve Tawn (1991) tarafından verilmiştir. Bunlardan biri lojistik modeldir ve ortak dağılım fonksiyonu

$$G(x_1,\cdots,x_p)=\exp\left[-\left\{\sum_{j=1}^{p}\left(1-k_j\frac{x_j-\mu_j}{\sigma_j}\right)^{1/(\alpha k_j)}\right\}^{\alpha}\right] \tag{3.20}$$

şeklindedir. Burada $0\le\alpha\le1$ değişkenler arasındaki bağımlılığı ölçer ve $\alpha\to1$, $\alpha\to0$ limitleri sırasıyla stokastik bağımsızlığa ve tam stokastik bağımlılığa karşı gelir (Balakrishnan et al. 2000).

4. UÇ DEĞERLER BAKIMINDAN RİSK ANALİZİ

$(X_{i,1},\cdots,X_{i,p})$ $i=1,\cdots,n$ için bağımsız ve aynı dağılımdan gelen rasgele değişkenler vektörü olsun. Çok değişkenli uç değer dağılımları, limitte normalleştirilmiş maksimum dağılımlarından oluşan bir öğeyi ifade eder. $j=1,\cdots,p$ için $M_{n,j}=\max(X_{1,j},\cdots,X_{n,j})$ ve normalleştirici $a_{n,j}>0$, $b_{n,j}$ sabitler dizisi tanımı ile

$$P\left\{\left(\frac{M_{n,j}-b_{n,j}}{a_{n,j}}\leq y_j, j=1,\cdots,p\right)\right\}\to G(y_1,\cdots,y_p) \qquad , n\to\infty$$

olup G , her marjinde dejenere olmayan bir dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. Marjinal dağılımlar, tek değişkenli uç değer dağılımlarının üç tipinden biri olmalıdır. Bundan dolayı marjinal dağılımların her biri birim üstel dağılıma dönüştürülebilir.

$\{X_{i,j}, j=1,\cdots,p\}$ satırlar vektörü i. bireyin p adet farklı portföydeki hasar sayıları, $\{X_{i,j}, i=1,\cdots,n\}$ sütunlar vektörü ise n adet bireyin j. risk portföyündeki hasar sayılarını göstersin. Risk alan, her bir i bireyinin hangi j. sigorta tipinde maksimum hasar ortaya çıkarmasıyla ilgilenmektense , her bir j portföyündeki maksimum hasara neden olan bireyin ortaya çıkardığı maksimum hasar miktarıyla ilgilenmeyi tercih edebilir. Bu nedenle her j portföyündeki maksimum hasar miktarını $M_{n,j}$ ile gösterelim.

Risk alan, her bir portföyde meydana gelen hasarları karşılamak amacıyla $j=1,\cdots,p$ için ,$M_{n,j}$ hasar miktarlarını dikkate alarak, elinde bulundurması gereken risk rezervini belirlemek isteyecektir. Çünkü $\forall j$ için $\{X_{i,j}, i=1,\cdots,n\}$ dizisi her zaman bilinmeyebilir sadece $M_{n,j}$' ler bilinebilir. Bu bağlamda, çalışmanın sonunda bir portföydeki tüm hasar miktarları gözlemleri biliniyorken bulunacak olan risk rezervi ile sadece maksimum hasar miktarları gözlemleri biliniyorken bulunacak olan risk rezervleri arasında bir karşılaştırma yapılacaktır.

Tez çalışmasında, maksimum hasar miktarlarının dağılımını bulmak amacıyla Tawn (1990)' ın geliştirmiş olduğu model ele alınmıştır. Tawn (1990) paralelinde olmak üzere, her bir risk portföyü için u_i yüksek eşik değeri belirlenmekte, bu eşik değerini aşan hasar miktarları $X_{i,C}^{(j)}$ ile gösterilmekte ve $R_{(i)}$ $i=1,\cdots,p$ portföylerinin içinde bağımlı risk grupları ele alınmaktadır. Maksimum hasar miktarlarıyla ilgilenildiğinden, u_i'nin altında kalanlar zaten maksimum hasar miktarının da altında olacağından $R_{(i)}$ portföylerine dahil edilmemektedir. Bir başka ifadeyle, u_i' nin altında hasar meydana getiren bireylerin oluşturdukları gruplar risk alan açısından büyük önem taşımayacağından $R_{(i)}$ portföylerinin dışında tutulmaktadır. Bu ihmal edilen risk grupları α_C rasgele değişkeni ile tanımlanacaktır. α_C, kaydedilmemiş arkadaş bilgisi olup pozitip kararlı dağılıma ve $0<1/r_C \leq 1$ şeklinde belirlenen üstel karakteristiğe sahiptir. α_C' lerin bağımsız oldukları varsayılıyor. α_C' lerin bilinmesi durumunda, $R_{(i)}$, $i=1,\cdots,p$ portföylerindeki tüm bilgiye sahip olacağımızdan seçilmiş bir j için $X_{i,C}^{(j)}$' ler bağımsızdırlar. α_C' ler bilinmediği durumda ise seçilmiş bir j için $R_{(i)}$' lerdeki $X_{i,C}^{(j)}$' ler bağımlıdırlar. $X_{i,C}^{(j)}$' lerin risk açısından bağımlılığı şöyle açıklanabilir. u_i yüksek eşik değerini aşan $X_{i,C}^{(j)}$ hasar miktarı meydana getiren bireylerin aynı veya birbirlerine yakın bölgelerde bulundukları düşünülebilir. Bu bölgeler , $R_{(i)}$ portföylerindeki farklı risk grupları olarak tanımlanabilir. Böylece bir risk grubunda hasar meydana geldiğinde, o risk grubunda veya ona yakın diğer risk gruplarında da hasar meydana gelmesine neden olacaktır.Ya da, *i.* portföydeki bir birey u_i yükek eşik değerinden fazla miktarda hasar meydana getirdiğinde bireyin bulunduğu veya ona yakın bulunan risk gruplarındaki bireylerin de u_i' den fazla miktarda hasar meydana getirmesine neden olabilecektir. Bu nedenle, $X_{i,C}^{(j)}$ rasgele değişkenleri grup bağımlı hasar miktarlarını ifade eden rasgele değişkenlerdir.

Tawn (1990)' da belirtildiği gibi, K ile tüm boş olmayan $R_{(i)}$ $i=1,\cdots,p$ alt kümelerinin sınıfı gösterilsin. C, K kümesi üzerinde index değişkenidir. Bağımlı risk gruplarına ayrılan $R_{(i)}$ portföylerinde, kişilerin ortaya çıkardıkları hasar miktarları $X_{i,C}^{(j)}$ $(i=1,\cdots,p \;\; j=1,\cdots,N_C)$ ile gösterilmişti. Bir başka deyişle, $X_{i,C}^{(j)}$, *i.* portföyde yer alan $C \in K \; \{1,\cdots,p\}$ risk gruplarındaki *j.* sigortalının hasar miktarı rasgele değişkenidir. Burada N_C, τ_C parametreli Poisson dağılımına sahip hasar sayısı rasgele değişkenidir. $X_{i,C}^{(j)}$' lerin verilen N_C' lerden koşullu olarak bağımsız oldukları varsayılacaktır.

Bağımlı risk gruplarının büyüklüğü Albers (1999) ' in makalesinde belirtildiği şekilde kabul edilebilir. $R_{(i)}$' de sigortalanan kişi sayısı $C \in K$ için τ_C parametreli N_C Poisson rasgele değişkeni idi. $R_{(i)}$ portföylerindeki bağımlı risk gruplarının büyüklükleri eşit olarak kabul edilip , $C \in K$ için m_C ile gösterilirse

$R_{(i)}$' deki bağımlı risk grup sayısı $h_C = N_C / m_C$ olacaktır. Böylece her bir portföydeki bağımlı risk grup sayısı değişecektir.

Tez çalışmasında, yüksek bir u_i eşik değerini aşan hasarlar için genelleştirilmiş Pareto dağılımı kullanılacaktır. $X_{i,C}^{(j)}$' lerin u_i eşik değerini aştığı bilindiğine göre, hasar miktarlarının koşullu dağılımı

$$P\left(X_{i,C}^{(j)} < x / X_{i,C}^{(j)} > u_i\right) = \begin{cases} 1-\left(1-k_i(x-u_i)/\sigma_i\right)_+^{1/k_i}, & k_i \neq 0, \sigma_i > 0 \\ 1-\exp\left(-(x-u_i)/\sigma_i\right), & k_i = 0, \sigma_i > 0 \end{cases}$$

x' nin aralığı , $k_i \leq 0$ için $u_i < x_i < \infty$, $k_i > 0$ için $u_i < x < \frac{\sigma_i}{k_i} + u_i$' dır. Maksimum hasar miktarlarıyla ilgilenildiği için Pareto dağılımının üst kuyruk dağılımı ele alınmalıdır. Bunun anlamı; $k_i > 0$ durumunda x rasgele değişkeninin değer aralığı için $u_i < x < \frac{\sigma_i}{k_i} + u_i$ aralığının geçerli olmasıdır. Bu koşullarda ilgilenilen dağılım

$$P\left(X_{i,C}^{(j)} < x / X_{i,C}^{(j)} > u_i\right) = 1 - \left\{1 - k_i(x-u_i)/\sigma_i\right\}^{1/k_i} \quad , k_i > 0 \ , \sigma_i > 0 \tag{4.1}$$

şeklindedir.

$R_{(i)}$ portföylerindeki $C \in K$ bağımlı risk gruplarındaki maksimum hasar miktarlarını

$$X_{i,C} = \max\left\{X_{i,C}^{(1)}, \cdots, X_{i,C}^{(N_C)}\right\} \tag{4.2}$$

biçiminde gösterelim. Hasar sayıları dağılımı

$$P(N_C = n_C) = \frac{e^{-\tau_C}(\tau_C)^{n_C}}{n_C!} \ , \ n_C = 0,1,2,\cdots$$

dir. N_C ve $X_{i,C}^{(j)}$' ler bağımsız oldukları varsayıldığından $X_{i,C}$' nin dağılımı

$$\begin{aligned} P(X_{i,C} < x) &= \prod_{j=1}^{N_C} P\left\{\left(X_{i,C}^{(j)} < x \mid X_{i,C}^{(j)} > u_i\right) \mid N_C = n_C\right\} \\ &= \sum_{n_C=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n_C} P\left\{\left(X_{i,C}^{(j)} < x \mid X_{i,C}^{(j)} > u_i\right)\right\} P(N_C = n_C) \end{aligned}$$

$$= \exp\left\{-\tau_C \{1 - k_i (x - u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}\right\} \tag{4.3}$$

şeklinde olup, burada $R_{(i)}$ portföylerindeki $C \in K \{1,\cdots,p\}$ grup bağımlı risk gruplarında görülen maksimum hasar miktarlarının dağılımı (3.18) eşitliği ile tanımlanan genelleştirilmiş uç değerler dağılımını göstermiş oluyoruz.

Herbir portföydeki bağımlı risk gruplarında ortaya çıkan maksimum hasar miktarları $X_{i,C}$' ler alındıktan sonra bunların da maksimumu alınarak , $R_{(i)}$' lerdeki maksimum hasar miktarına bakılması, uygun rezerv ihtiyatlarının sağlanması bakımından önemlidir.Grup bağımlı maksimum hasar miktarlarının maksimumunu

$$Z_i = \max_{C \in R_{(i)}} \left(X_{i,C}\right) \quad i = 1,\cdots,p \tag{4.4}$$

şeklinde ifade ederek Z_i' lerin ortak ve marjinal dağılımlarının bulunmasına yönelmek gerekecektir.

Burada seçilmiş bir j için $X_{i,C}^{(j)}$, $i \in C$ hasar miktarları önceden açıklanan nedenden dolayı bağımlı genelleştirilmiş Pareto rasgele değişkenleridir ve böylece $X_{i,C}$, $i \in C$'ler de bağımlı genelleştirilmiş uç değerler rasgele değişkenleridir. $X_{i,C}$' ler arkadaş değişkenlere koşullandırıldığında $X_{i,C}/\alpha_C$' ler $i \in C$, koşullu bağımsızlık niteliği kazanmaktadır. Koşullu bağımsız dağılımı bulmak için Feller (1971)' de belirtilenler yardımıyla

$$P\left(X_{i,C} < x/\alpha_C\right) = \exp\left(-\alpha_C \left[\tau_C \{1 - k_i (x - u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}\right]^{r_C}\right) \tag{4.5}$$

ifadesine erişir ve

$$\begin{aligned}
P\left(Z_i < z_i/\alpha_C\right) &= P\left(X_{1,C} < z_i/\alpha_C,\cdots,X_{C,C} < z_i/\alpha_C\right) \\
&= P\left(X_{1,C} < z_i/\alpha_C\right)\cdots\cdot P\left(X_{C,C} < z_i/\alpha_C\right) \\
&= \prod_{C \in K} \exp\left(-\alpha_C \tau_C^{r_C} \cdot \{1 - k_i (z_i - u_i)/\sigma_i\}^{r_C/k_i}\right) \\
&= \exp\left\{-\sum_{C \in K} \alpha_C \tau_C^{r_C} \cdot \{1 - k_i (z_i - u_i)/\sigma_i\}^{r_C/k_i}\right\}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\prod_{i=1}^{p} P\left(Z_i < z_i \mid \alpha_C, C \in K\right) = \exp\left\{-\sum_{C \in K} \alpha_C \tau_C^{r_C} \cdot \sum_{i \in C} \{1 - k_i (z_i - u_i)/\sigma_i\}^{r_C/k_i}\right\}$$

elde ederiz ki, α_C' ler üzerinden integrallendiğinde her bir portföyde ortaya çıkan, grup bağımlı maksimum hasar miktarları Z_i rasgele değişkenlerinin ortak dağılımına

$$G_Z(z_1,\cdots z_p)=\exp\left(-\sum_{C\in K}\tau_C\left[\sum_{i\in C}\{1-k_i(z_i-u_i)/\sigma_i\}^{r_C/k_i}\right]^{1/r_C}\right) \tag{4.7}$$

ulaşılır. (4.7) ifadesi (3.20)' deki gibi lojistik dağılım modeli olup, $1/r_C \to 1$ olduğunda Z_i' lerin stokastik bağımsızlığı, $1/r_C \to 0$ olduğu durumda ise Z_i' lerin tam bağımlılığı ortaya çıkmaktadır.

$$z_1 \to \frac{\sigma_1}{k_1}+u_1 \ ,\ z_2 \to \frac{\sigma_2}{k_2}+u_2 \ ,\ \ldots\ ,\ z_{i-1} \to \frac{\sigma_{i-1}}{k_{i-1}}+u_{i-1} \ ,\ z_{i+1} \to \frac{\sigma_{i+1}}{k_{i+1}}+u_{i+1},\ \ldots\ ,$$

$$z_p \to \frac{\sigma_p}{k_p}+u_p$$

olduğunda Z_i' nin marjinal dağılım fonksiyonu

$$G_{Z_i}(z_i)=\exp\left(-\sum_{C\in K}\tau_C\left[\{1-k_i(z_i-u_i)/\sigma_i\}^{r_C/k_i}\right]^{1/r_C}\right)$$

$$G_Z(z_i)=\exp\left(-\sum_{C\in K}\tau_C\{1-k_i(z_i-u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}\right)\ ,u_i<z_i<\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i \tag{4.8}$$

şeklinde bulunur.

$z_i \to \frac{\sigma_i}{k_i}+u_i$ için

$G_{Z_i}(z_i)=\exp\left(-\sum_{C\in K}\tau_C\left\{1-k_i\left(\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i-u_i\right)/\sigma_i\right\}^{1/k_i}\right)=1$ olduğundan dağılım fonksiyonu özelliğini sağlamaktadır. İlgilendiğimiz olasılık yoğunluk fonksiyonunu

$$g_{Z_i}(z_i)=\frac{\sum_{C\in K}\tau_C}{\sigma_i}\{1-k_i(z_i-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1}\exp\left(-\sum_{C\in K}\tau_C\{1-k_i(z_i-u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}\right)$$

$$,u_i<z_i<\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i$$

olarak bulmaktayız.

Bu dağılım için beklenen değer şöyle bulunur:

$$E(Z_i) = \int_{u_i}^{\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i} z.g_{Z_i}(z)dz$$

$$= \int_{u_i}^{\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i} z \cdot \frac{\sum_{C\in K}\tau_C}{\sigma_i}\{1-k_i(z-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1}\exp\left(-\sum_{C\in K}\tau_C\{1-k_i(z-u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}\right)\cdot dz \quad (4.9)$$

$\sum_{C\in K}\tau_C\{1-k_i(z-u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i} = m$ **dönüşümü uygulanırsa**

$z = \frac{\sigma_i}{k_i}\left(1-\left(\frac{m}{\sum_{C\in K}\tau_C}\right)^{k_i}\right)+u_i$ **elde edilir. Buradan**

$\frac{\sum_{C\in K}\tau_C}{\sigma_i}\{1-k_i(z-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1}dz = -dm$ ve

$z = u_i$ için $m = \sum_{C\in K}\tau_C$

$z = \frac{\sigma_i}{k_i}+u_i$ için $m = 0$

dir. Bulunanlar (4.9)' da yerine yazılırsa,

$$E(Z_i) = -\int_{\sum_{C\in K}\tau_C}^{0}\left[\frac{\sigma_i}{k_i}\left(1-\left(\frac{m}{\sum_{C\in K}\tau_C}\right)^{k_i}\right)+u_i\right]e^{-m}dm$$

$$= \int_0^{\sum_{C\in K}\tau_C}\frac{\sigma_i}{k_i}e^{-m}\cdot\left(1-\left(\frac{m}{\sum_{C\in K}\tau_C}\right)^{k_i}\right)dm + \int_0^{\sum_{C\in K}\tau_C}u_i e^{-m}dm$$

$$= \frac{\sigma_i}{k_i}\left(\int_0^{\sum_{C\in K}\tau_C}e^{-m}dm - \frac{1}{\left(\sum_{C\in K}\tau_C\right)^{k_i}}\int_0^{\sum_{C\in K}\tau_C}e^{-m}m^{k_i}dm\right)+u_i\int_0^{\sum_{C\in K}\tau_C}e^{-m}dm$$

$$E(Z_i)=\left(1-e^{-\sum_{C\in K}\tau_C}\right)\left(\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i\right)-\frac{\sigma_i}{k_i\left(\sum_{C\in K}\tau_C\right)^{k_i}}\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(k_i+1) \qquad (4.10)$$

bulunur

Varyansa gelince:

$$E(Z_i)^2=\int_{u_i}^{\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i} z^2.g_{Z_i}(z)dz$$

$$=\int_{u_i}^{\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i} z^2\frac{\sum_{C\in K}\tau_C}{\sigma_i}\{1-k_i(z-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1}\cdot\exp\left(-\sum_{C\in K}\tau_C\{1-k_i(z-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}}\right)dz \qquad (4.11)$$

$\sum_{C\in K}\tau_C\{1-k_i(z-u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}=m$ dönüşümü uygulanırsa

$z^2=\left[\frac{\sigma_i}{k_i}\left(1-\left(\frac{m}{\sum_{C\in K}\tau_C}\right)^{k_i}\right)+u_i\right]^2$ elde edilir. Buradan

$\frac{\sum_{C\in K}\tau_C}{\sigma_i}\{1-k_i(z-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1}dz=-dm$ ve sınırlar da

$z=u_i$ için $m=\sum_{C\in K}\tau_C$

$z=\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i$ için $m=0$

dir.

Bulunanlar (4.11)' de yerine yazılırsa,

$$E(Z_i)^2=\left(1-e^{-\sum_{C\in K}\tau_C}\right)\left(\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i\right)^2-2\frac{\sigma_i}{k_i\left(\sum_{C\in K}\tau_C\right)^{k_i}}\left(\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i\right)\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(k_i+1)$$

$$+\frac{1}{\left(\sum_{C\in K}\tau_C\right)^{2k_i}}\left(\frac{\sigma_i}{k_i}\right)^2\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(2k_i+1)$$

$$Var(Z_i)=e^{-\sum_{C\in K}\tau_C}\left(\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i\right)\left[\left(1-e^{-\sum_{C\in K}\tau_C}\right)\left(\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i\right)-2\frac{\sigma_i}{k_i\left(\sum_{C\in K}\tau_C\right)^{k_i}}\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(k_i+1)\right]$$
$$+\frac{\sigma_i^{\,2}}{k_i^{\,2}\left(\sum_{C\in K}\tau_C\right)^{2k_i}}\left(\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(2k_i+1)-\left(\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(k_i+1)\right)^2\right)$$

(4.12)

bulunur. Burada $\Gamma_a(b+1)=\int_0^a e^{-m}m^b dm$ şeklinde tanımlanan tam olmayan Gama fonksiyonudur.

Herbir portföydeki toplam hasar miktarlarını üç durumda ifade etmek mümkündür. Durum 1' de , sigorta şirketinin , bireylerin meydana getirdiği tüm hasar miktarlarını bildiği ve bunların dağılımının da Pareto dağılımından geldiği varsayılacaktır. Durum 2'de, bir sigorta şirketinin elinde sadece Z_i'lerin olduğu ve u_i'yi aşan bireylerin hasar miktarlarının dağılımının Pareto dağılımından geldiği varsayılacaktır. Durum 3'de ise (2.1)'deki toplam hasar miktarı ifadesi, Z_i'ler cinsinden basit bir yaklaşımla örnekleme tamamlama anlayışına göre şekillendirilmiştir. Her üç duruma göre bulunan toplam risk rezervlerine sırasıyla U_1 , U_2 ve U_3 diyecek olursak , bunlar arasında karşılaştırmalar yapılacaktır.

Karşılaştırma bakımından her üç durum için de elde iki portföy olduğu varsayılacaktır. Toplam risk rezervi bu iki portföydeki risk rezervlerinin

$$U_l=U^{(1)}+U^{(2)} \quad , \quad l=1,2,3$$

toplamı olarak düşünülecektir.

(2.6) eşitliğindeki risk rezervi denklemi daha basit olarak

$$U^{(i)}=y_\varepsilon.\sigma_{S_{(i)}}-\Lambda^{(i)}P^{(i)} \;,\; i=1,2 \qquad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\varepsilon=0.01$ için ordinat değeri $y_\varepsilon=2.326$, güvenlik yüklemesi $\Lambda^{(i)}=0.04$, $i=1,2$, değerleri düşünülecektir.

U_1 , U_2 ve U_3 toplam risk rezervlerini karşılaştırmak amacıyla 1. ve 2. portföylere ait parametre değerleri

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \quad , \; k_2 = 1 \\ u_1 &= 1 \quad , \; u_2 = 2 \\ \sigma_1 &= 0{,}1 \; , \; \sigma_2 = 0{,}2 \\ \tau_1 &= 1 \quad , \; \tau_2 = 2 \end{aligned}$$

olarak kabul edilecektir.

4.1. Durum 1 : Pareto Dağılımlı Hasar Miktarları

Toplam hasar miktarı

$$S_{(i)} = \sum_{j=1}^{N_C} X_{i,C}^{*(j)} \quad , i = 1, \cdots, p \tag{4.14}$$

bağlamında gereken moment değerleri aşağıda elde edilmiştir.

Burada bağımlı $X_{i,C}^{*(j)}$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu olarak

$$P\left(X_{i,C}^{(j)} < x / X_{i,C}^{(j)} > u_i\right) = P\left(X_{i,C}^{*(j)} < x\right) = 1 - \{1 - k_i(x - u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}$$

şeklinde tanımlanan koşullu Pareto dağılımı kullanılacaktır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f_{X_{i,C}^{*(j)}}(x) = \frac{1}{\sigma_i}\{1 - k_i(x - u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1} \quad , \quad u_i < x < \frac{\sigma_i}{k_i} + u_i$$

şeklindedir. Beklenen değer ve varyans ifadeleri ayrıntıları Ek 1' de verildiği gibi

$$E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right) = \frac{\sigma_i}{k_i + 1} + u_i$$

$$Var\left(X_{i,C}^{*(j)}\right) = \frac{\sigma_i^2}{(2k_i + 1)(k_i + 1)^2}$$

olarak bulunmuştur.

(4.14) toplamı gözönüne alınarak iki portföy için $S_{(i)}$ (i = 1,2 , p = 2)' nin beklenen değeri ve varyansı

$$
\begin{aligned}
ES_{(i)} &= E_{N_C}\left[E\left(\sum_{j=1}^{N_C} X_{i,C}^{*(j)} \mid N_C = n_C\right)\right] \\
&= \sum_{n_C=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{N_C} X_{i,C}^{*(j)} \mid N_C = n_C\right) P(N_C = n_C) \\
&= \sum_{n_C=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right) P(N_C = n_C) \\
&= \sum_{n_C=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n_C} E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right) P(N_C = n_C) \\
&= \sum_{n_C=0}^{\infty}\left(n_C . E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right) P(N_C = n_C) \\
&= E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\sum_{n_C=0}^{\infty} n_C P(N_C = n_C) \\
&= E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right) E(N_C)
\end{aligned}
$$

$$
ES_{(i)} = \left(\frac{\sigma_i}{k_i + 1} + u_i\right)\cdot \tau_C \tag{4.15}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
Var\left(S_{(i)}\right) &= E_{N_C}\left[Var\left(\sum_{j=1}^{N_C} X_{i,C}^{*(j)} \mid N_C = n_C\right)\right] + Var_{N_C}\left[E\left(\sum_{j=1}^{N_C} X_{i,C}^{*(j)} \mid N_C = n_C\right)\right] \\
&= E_{N_C}\left[Var\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\right] + Var_{N_C}\left[E\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n_C=0}^{\infty} Var\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\cdot P(N_C = n_C) + E_{N_C}\left[E\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 - \left\{E_{N_C}\left[E\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]\right\}^2 \\
&= \sum_{n_C=0}^{\infty} Var\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\cdot P(N_C = n_C) \\
&\quad + \sum_{n_C=0}^{\infty}\left[E\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 \cdot P(N_C = n_C) - \left\{\sum_{n_C=0}^{\infty}\left[E\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]\cdot P(N_C = n_C)\right\}^2 \\
&= \sum_{n_C=0}^{\infty} Var\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right)\cdot P(N_C = n_C) + \sum_{n_C=0}^{\infty}\left[n_C E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 \cdot P(N_C = n_C) \\
&\quad - \left[\sum_{n_C=0}^{\infty} n_C E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\cdot P(N_C = n_C)\right]^2
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n_C=0}^{\infty} Var\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right) \cdot P(N_C = n_C) + \left[E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 \cdot \left[(E(N_C))^2 + Var(N_C)\right] - \left[E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 \cdot (E(N_C))^2$$

$$= \sum_{n_C=0}^{\infty} Var\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right) \cdot P(N_C = n_C) + \left[E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 \cdot \left[(E(N_C))^2 + Var(N_C)\right] - \left[E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 \cdot (E(N_C))^2$$

$$= \sum_{n_C=0}^{\infty} Var\left(\sum_{j=1}^{n_C} X_{i,C}^{*(j)}\right) \cdot P(N_C = n_C) + \left[E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 \cdot Var(N_C)$$

$$Var(S_{(i)}) = Var\left(X_{i,C}^{*(j)}\right) \cdot E(N_C) + \left[E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2 \cdot Var(N_C) + 2\underset{k \neq l}{Cov}\left(X_{i,C}^{*(k)} . X_{i,C}^{*(l)}\right) \sum_{n_C=0}^{\infty} \binom{n_C}{2} P(N_C = n_C)$$

olarak bulunmuştur.

$\underset{k \neq l}{Cov}\left(X_{i,C}^{*(k)} . X_{i,C}^{*(l)}\right) = 0$ varsayımının yapılabilmesi için Ek1' de belirtildiği gibi , bağımlı iki değişkenli Pareto dağılım fonksiyonunun (5)' deki kovaryans ifadesinde bağımlılığı ölçen parametre $\alpha = 0$ olarak kabul edilmelidir. $\alpha = 0$ olduğunda

$$Var(S_{(i)}) = \frac{\sigma_i^2}{(2k_i + 1)(k_i + 1)^2} \cdot \tau_C + \left(\frac{\sigma_i}{k_i + 1} + u_i\right)^2 \cdot \tau_C \tag{4.16}$$

bulunur.

(4.15) ve (4.16) eşitliklerinin yukarıdaki (s. 22) parametre değerleri kullanıldığında bulunan şudur:

$$P^{(1)} = \mu_{S_{(1)}} = E(S_{(1)}) = 1{,}05 \qquad \sigma_{S_{(1)}} = \sqrt{Var(S_{(1)})} = 1{,}05 \tag{4.17}$$

$$P^{(2)} = \mu_{S_{(2)}} = E(S_{(2)}) = 4{,}20 \qquad \sigma_{S_{(2)}} = \sqrt{Var(S_{(2)})} = 2{,}97 \tag{4.18}$$

(4.17) ve (4.18)' deki değerleri (4.13)' de yerine yazarak, 1. ve 2. portföylere ait, bulundurulması gereken risk rezervlerini elde ederiz:

$$U^{(1)} = y_\varepsilon . \sigma_{S_{(1)}} - \Lambda P^{(1)} = 2{,}40$$

$$U^{(2)} = y_\varepsilon . \sigma_{S_{(2)}} - \Lambda P^{(2)} = 6{,}74$$

Durum 1' e ilişkin toplam risk rezervi ise

$U_1 = U^{(1)} + U^{(2)} = 9,14$

dır.

4.2. Durum 2 : Maksimum Değer Hasar Miktarları

Her iki portföyden belirlenen Z_1 ve Z_2 maksimum hasar miktarlarına göre toplam maksimum hasar miktarı (risk)

$$S = \sum_{i=1}^{2} Z_i \tag{4.19}$$

dir. Z_i ' ler grup bağımlı rasgele değişkenler olup herbirinin dağılım fonksiyonu

$$G_{Z_i}(z) = \exp\left(-\sum_{C\in K} \tau_C \{1 - k_i (z_i - u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}\right)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$g_{Z_i}(z_i) = \frac{\sum_{C\in K} \tau_C}{\sigma_i} \{1 - k_i (z_i - u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1} \cdot \exp\left(-\sum_{C\in K} \tau_C \{1 - k_i (z_i - u_i)/\sigma_i\}^{1/k_i}\right)$$

$$, u_i < z_i < \frac{\sigma_i}{k_i} + u_i$$

bulunmuştu. Z_i ' lere ait beklenen değer ve varyans ifadelerini veren (4.10) ve (4.12)' de başta verilen (s. 22) değerleri yerlerine koyarak

$$P^{(1)} = \mu_{S_{(1)}} = E(Z_1) = 1{,}02 \qquad \sigma_{S_{(1)}} = \sqrt{Var(Z_1)} = 0{,}05 \tag{4.20}$$

$$P^{(2)} = \mu_{S_{(2)}} = E(Z_2) = 2{,}04 \qquad \sigma_{S_{(2)}} = \sqrt{Var(Z_2)} = 0{,}22 \tag{4.21}$$

buluruz. (4.7) eşitliği ile belirtilen ortak dağılım fonksiyonunda $r_C = 1$ iken Z_i rasgele değişkenleri stokastik olarak bağımsız olacağından, 1. ve 2. portföye ait parametre değerleri $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1$ olarak ele alırsak

$$E(S) = E(Z_1) + E(Z_2)$$

$$Var(S) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2 \cdot Cov(Z_1 Z_2)$$

eşitliklerinden

$$P = \mu_S = E(S) = 3{,}06 \qquad \sigma_S = \sqrt{Var(S)} = 0{,}23$$

maksimum hasar miktarları üzerinden alınan toplam hasar miktarına ait ortalama ve standart sapma değerleri bulunmuş olur. Bu değerler

$$U_2 = y_\varepsilon . \sigma_S - \Lambda P$$

denkleminde yerine yazılarak Durum 2' ye ilişkin toplam risk rezervi

$U_2 = 0{,}41$ olarak bulunur.

4.3. Durum 3 : Tamamlanmış Örneklem Durumu

Burada, maksimum hasar miktarlarına dayalı sonuç çıkarımını ele alan Durum 2' de bulunan toplam risk rezervinin Durum 1' dekinden daha küçük olduğu ve öte yandan Durum 2' deki prim miktarının risk rezervine göre çok daha fazla olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Maksimum hasar miktarlarının dışında kalan diğer hasarların da basit anlamda örneklem tamamlama yoluyla toplama dahil edilmesi yöntemine gidilerek yeni bir toplam hasar ifadesi önerimiz şudur:

$$S_{(i)} = Z_i + \sum_{k \in R_{(i)}} \sum_{j=1}^{m_C - 1} X_{i,k}^{*(j)} + \sum_{D \in R_{(i)}} \sum_{j=1}^{N_C - m_C} X_{i,D}^{*(j)} \quad , \; C \in K \tag{4.22}$$

Burada

A= $\sum_{k \in R_{(i)}} \sum_{j=1}^{m_C - 1} X_{i,k}^{*(j)}$: *i*. portföydeki *k*. risk grubundan gelen maksimum hasar miktarı Z_i' nin dışında kalan , $(m_c - 1)$ tane hasar sayısı (birey) üzerinden hasar miktarlarının toplamıdır.

B= $\sum_{D \in R_{(i)}} \sum_{j=1}^{N_C - m_C} X_{i,D}^{*(j)}$: *i*. portföydeki Z_i maksimum hasar miktarının geldiği *k*. risk grubu dışında kalan ,$(h_C - 1)$ tane risk grubu üzerinden hasar miktarlarının toplamıdır. Burada $D = C / k$ ve $h_C = N_C / m_C$ dır.

Bu toplamların değerleri için önerdiğimiz nicelikler

$\hat{A} = (m_C - 1)\delta_k^{(i)}$ ve $\hat{B} = (N_C - m_C)\delta_D^{(i)}$

olup $\delta_{\cdot}^{(i)}$' lerin

$$E\left(X_{i,k}^{*(j)}\right) \le \delta_k^{(i)} < Z_i \qquad E\left(X_{i,D}^{*(j)}\right) \le \delta_D^{(i)} < Z_i \tag{4.23}$$

aralıklarında olması düşünülebilir. (4.22)' ye geri dönülürse

$$S_{(i)} = Z_i + (m_C - 1)\delta_k^{(i)} + (N_C - m_C)\delta_D^{(i)} \tag{4.24}$$

şeklinde yazılabilir.

Her bir $R_{(i)}$ portföyünün maksimum hasar miktarlarının bilindiği ve diğer toplamlar da $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ şeklinde tahmin edilebildiği durumda toplam hasar miktarı için (4.24) ile gösterilen model kullanımı ile beklenen değeri ve varyansı

$$E\left(S_{(i)}\right) = E(Z_i) + (m_C - 1)\delta_k^{(i)} + \delta_D^{(i)} E(N_C - m_C)$$
$$Var\left(S_{(i)}\right) = Var(Z_i) + \left(\delta_D^{(i)}\right)^2 Var(N_C)$$

ifadelerinden bularak çözümlemeye devam edebiliriz. Burada (4.23) ile gösterilen sınırlardan $\delta_k^{(i)} = E\left(X_{i,k}^{*(j)}\right)$ ve $\delta_D^{(i)} = E\left(X_{i,D}^{*(j)}\right)$ alınırsa, $k, D \in R_{(i)}$ olduğundan

$$E\left(X_{i,k}^{*(j)}\right) = E\left(X_{i,D}^{*(j)}\right) = \frac{\sigma_i}{k_i + 1} + u_i$$

dır ve

$$\delta_k^{(i)} = \delta_D^{(i)} = \delta^{(i)} = \frac{\sigma_i}{k_i + 1} + u_i \tag{4.25}$$

olur.

$$E\left(S_{(i)}\right) = E(Z_i) + m_C\delta_k^{(i)} - \delta_k^{(i)} + \delta_D^{(i)} E(N_C) - \delta_D^{(i)} m_C$$
$$= E(Z_i) + m_C\delta^{(i)} - \delta^{(i)} + \delta^{(i)} E(N_C) - \delta^{(i)} m_C$$

$$E\left(S_{(i)}\right) = E(Z_i) + \delta^{(i)}\left(E(N_C) - 1\right) \tag{4.26}$$

$$Var\left(S_{(i)}\right)=Var\left(Z_i\right)+\left(\delta^{(i)}\right)^2 Var\left(N_C\right) \tag{4.27}$$

Parametre değerleri (s. 22) ve hesaplananları yerine koyarak şunları elde ederiz:

$E(Z_1)=1{,}02$ $\quad E(Z_2)=2{,}04$ $\quad E(N_1)=\tau_1=1$ $\quad E(N_2)=\tau_2=2$

$Var(Z_1)=0{,}05$ $\quad Var(Z_2)=0{,}22$ $\quad Var(N_1)=\tau_1=1$ $\quad Var(N_2)=\tau_2=2$

Analiz amacıyla, başta verilen değerleri (s. 22) kullanarak, i = 1,2 için (4.25) eşitliği

$\delta^{(1)}=1{,}05$ $\qquad \delta^{(2)}=2{,}1$

bulunur. Bu sayısal değerler (4.26) ve (4.27) eşitliklerinde yerine yazılarak

$$P^{(1)}=\mu_{S_{(1)}}=E\left(S_{(1)}\right)=1{,}02 \qquad \sigma_{S_{(1)}}=\sqrt{Var\left(S_{(1)}\right)}=1{,}07 \tag{4.28}$$

$$P^{(2)}=\mu_{S_{(2)}}=E\left(S_{(2)}\right)=4{,}14 \qquad \sigma_{S_{(2)}}=\sqrt{Var\left(S_{(2)}\right)}=3{,}00 \tag{4.29}$$

değerleri bulunur. (4.28) ve (4.29) değerleri (4.13)' de yerine yazılarak, 1. ve 2. portföylere ait, bulundurulması gereken risk rezervleri

$$U^{(1)}=y_\varepsilon.\sigma_{S_{(1)}}-\Lambda P^{(1)}=2{,}45$$
$$U^{(2)}=y_\varepsilon.\sigma_{S_{(2)}}-\Lambda P^{(2)}=6{,}81$$

olarak bulunur. Durum 3' e ilişkin toplam risk rezervi ise

$U_3=U^{(1)}+U^{(2)}=9{,}26$ olarak bulunur.

Maksimum hasar miktarına ait $U_2=0{,}41$ risk rezervi, Pareto dağılımlı hasar miktarlarına ait $U_1=9{,}14$ risk rezervinden daha düşük çıkmıştır. Örneklem tamamlama yöntemiyle bulunan $U_3=9{,}26$ risk rezervi ise Durum 1' deki risk rezervine daha yakın bir değer çıktığından Durum 3 olarak önerilen (4.22) şeklindeki toplam hasar miktarı modeli daha gerçekçi görülerek risk yönetimi amacıyla kullanılabilir. Çıkarılan bu sonuçlar, maksimum hasar miktarlarına dayalı olarak yapılan risk yönetiminde, risk rezervinin yüksek tutulmasının, en azından kullandığımız veriler ve parametreler temelinde, gerekli olmadığına işaret etmektedir. Bu, maksimum hasar miktarları temelinde toplanması gereken toplam prim miktarının risk rezervine göre çok daha yüksek tutulması gerektiği anlamına gelmektedir.

5. RİSK YÖNETİMİ BAKIMINDAN İLGİLENİLEN ÖLÇÜTLERİN UYGULAMALARI

Bu bölümde, dördüncü Bölüm' de ele alınan üç durum için risk rezervi, yükümlülüğü karşılama oranı ve net retenşın ölçütleri bakımından analizler yapılacaktır. Bu analizler yapılırken parametre değerlerinin

$\sigma_1 = 0{,}1 \qquad \sigma_2 = 0{,}2$

$\tau_1 = 1 \qquad \tau_2 = 2$

$k_1 = 1 \qquad k_2 = 1$

oldukları varsayılacaktır. u_i parametre değerleri artırılarak artan prim değerleri $P^{(i)}$' ler elde edilmektedir. Bölüm 5.3.' de $u_1 = 1$ ve $u_2 = 2$ olarak alınmıştır.

Durum 1 için; $$ES_{(i)} = \left(\frac{\sigma_i}{k_i+1} + u_i\right)\cdot \tau_C \tag{5.1}$$

Durum 2 için;

$$E\left(S_{(i)}\right) = E(Z_i) = \left(1 - e^{-\sum_{C\in K}\tau_C}\right)\cdot\left(\frac{\sigma_i}{k_i} + u_i\right) - \frac{\sigma_i}{k_i\left(\sum_{C\in K}\tau_C\right)^{k_i}}\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(k_i+1) \tag{5.2}$$

$$\sum_{C\in K}\tau_C = \tau_1 + \tau_2 = 3$$

$$\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(k_i+1) = \int_0^{\sum_{C\in K}\tau_C} e^{-m}\cdot m^{k_i}\cdot dm = 0{,}80085$$

Durum 3 için; $E\left(S_{(i)}\right) = E(Z_i) + \delta^{(i)}\left(E(N_C) - 1\right)$

eşitliğinde (5.2) ve $\delta^{(i)} = \frac{\sigma_i}{k_i+1} + u_i$ ifadeleri yerine yazılarak

$$E\left(S_{(i)}\right) = \left(1 - e^{-\sum_{C\in K}\tau_C}\right)\cdot\left(\frac{\sigma_i}{k_i} + u_i\right) - \frac{\sigma_i}{k_i\left(\sum_{C\in K}\tau_C\right)^{k_i}}\Gamma_{\sum_{C\in K}\tau_C}(k_i+1) + \left(\frac{\sigma_i}{k_i+1} + u_i\right)\cdot(\tau_C - 1) \tag{5.3}$$

elde edilir.

(5.1) , (5.2) ve (5.3) eşitlikleri kullanılarak üç durum için $ES_{(i)}=P^{(i)}$' ler bulunmuştur.

5.1. Risk Rezervi : $U_l = U_l(P_l, M)$

İki portföyün toplam risk rezervi her üç durum için de risk rezervi P_l' nin ve net retenşın sınırı M' nin artan bir fonksiyonu olarak Şekil 5.1. , Şekil 5.2. ve Şekil 5.3.' de görüldüğü şekildedir. Şekil 5.1.' de Pareto dağılımlı hasar miktarları kullanılarak farklı M' ler için hesaplanan P_1 ve U_1 değerleri gösterilmiştir. Maksimum hasar miktarları kullanılarak hesaplanan P_2 ve U_2 değerleri ve bunların farklı M' ler karşısında davranışları Şekil 5.2.' de görülmektedir. Her bir portföydeki risk gruplarından seçilen maksimum hasar miktarlarının maksimumu alınan durumda küçük miktarda risk rezervi U_2 yeterli görülmektedir. Diğer hasarlar için de bulundurulması gereken risk rezervi ise örneklem tamamlama yoluyla tam örneklemenin yapıldığı Durum 3 uygulanarak hesaplandığında Şekil 5.3.' de görüldüğü gibi olmaktadır. Durum 1 ve Durum 3 için bulunan risk rezervleri karşılaştırıldığında bunların birbirine oldukça yakın değerler aldığı görülmektedir.

Üç durumun karşılaştırılması amacıyla bu Bölüm'de çizelgelerdeki değerlerin hesaplanması için aşağıdaki nicelikler kullanılmıştır.

$\varepsilon = 0{,}01$ için

$U^{(i)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(i)} \cdot M^{(i)}} - \Lambda^{(i)} \cdot P^{(i)}$, i=1,2 (Normal Güç Yaklaştırması ile)

Burada her iki portföy için $M^{(i)}$ net retenşın miktarlarının ve $\Lambda^{(i)}$ güvenlik yüklemelerinin eşit oldukları varsayılacaktır.

$M^{(1)} = M^{(2)}$, $\Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)} = 0{,}04$

$M = M^{(1)} + M^{(2)}$

5.1.1. Durum 1 İçin Çözümleme

Denklem (5.1)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(\frac{0{,}1}{1+1} + u_1\right) \cdot 1 = \left(0{,}05 + u_1\right) \quad , \quad P^{(2)} = \left(\frac{0{,}2}{1+1} + u_2\right) \cdot 2 = 2 \cdot \left(0{,}1 + u_2\right)$$

$$U^{(1)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(1)} \cdot M^{(1)}} - 0{,}04 \cdot P^{(1)} \quad , \quad U^{(2)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(2)} \cdot M^{(2)}} - 0{,}04 \cdot P^{(2)}$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 1' e ilişkin

$$P_1 = P^{(1)} + P^{(2)}$$

$$U_1 \approx U^{(1)} + U^{(2)} \approx 1{,}4\left(\sqrt{P^{(1)} \cdot M^{(1)}} + \sqrt{P^{(2)} \cdot M^{(2)}}\right) - 0{,}04 \cdot \left(P^{(1)} + P^{(2)}\right)$$

toplamları göz önüne alınarak $M = \{2,4,6,8\}$ artan değerleri için hesaplanan değerler Çizelge 5.1., Çizelge 5.2., Çizelge 5.3. ve Çizelge 5.4.' de gösterilmiş ve bunların kullanımı ile P_1, U_1 ve M ilişkileri Şekil 5.1.' de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1. $M = 2$ için toplam risk primi P_1 ve toplam risk rezervi U_1 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	U_1
2	1	1	1,05	2,2	3,25	3,38111
2	2	2	2,05	4,2	6,25	4,62364
2	3	3	3,05	6,2	9,25	5,56097
2	4	4	4,05	8,2	12,25	6,33644
2	5	5	5,05	10,2	15,25	7,00735
2	6	6	6,05	12,2	18,25	7,60353
2	7	7	7,05	14,2	21,25	8,14286
2	8	8	8,05	16,2	24,25	8,63704
2	9	9	9,05	18,2	27,25	9,09425
2	10	10	10,05	20,2	30,25	9,52046
2	11	11	11,05	22,2	33,25	9,92018
2	12	12	12,05	24,2	36,25	10,2969
2	13	13	13,05	26,2	39,25	10,6535
2	14	14	14,05	28,2	42,25	10,9922
2	15	15	15,05	30,2	45,25	11,3148
2	16	16	16,05	32,2	48,25	11,623
2	17	17	17,05	34,2	51,25	11,9181
2	18	18	18,05	36,2	54,25	12,2012
2	19	19	19,05	38,2	57,25	12,4733
2	20	20	20,05	40,2	60,25	12,7353
2	21	21	21,05	42,2	63,25	12,9879
2	22	22	22,05	44,2	66,25	13,2317
2	23	23	23,05	46,2	69,25	13,4673
2	24	24	24,05	48,2	72,25	13,6954
2	25	25	25,05	50,2	75,25	13,9163

Çizelge 5.2. $M = 4$ için toplam risk primi P_1 ve toplam risk rezervi U_1 değerleri

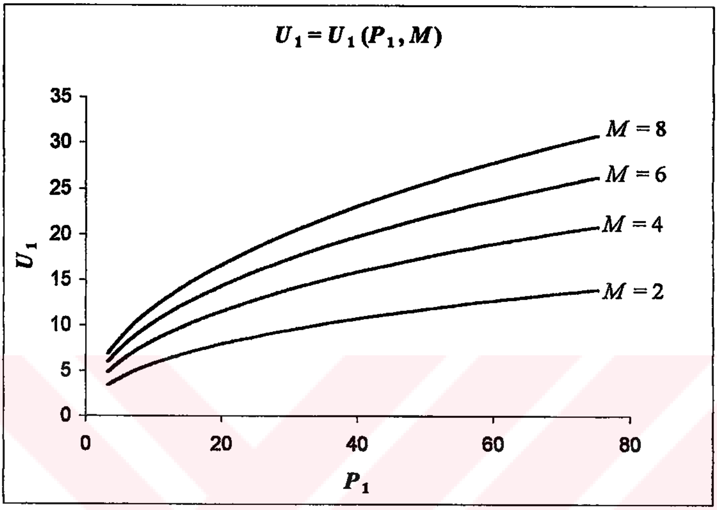
M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	U_1
4	1	1	1,05	2,2	3,25	4,83546
4	2	2	2,05	4,2	6,25	6,64237
4	3	3	3,05	6,2	9,25	8,01765
4	4	4	4,05	8,2	12,25	9,16404
4	5	5	5,05	10,2	15,25	10,1626
4	6	6	6,05	12,2	18,25	11,0554
4	7	7	7,05	14,2	21,25	11,8678
4	8	8	8,05	16,2	24,25	12,6164
4	9	9	9,05	18,2	27,25	13,3127
4	10	10	10,05	20,2	30,25	13,9652
4	11	11	11,05	22,2	33,25	14,5802
4	12	12	12,05	24,2	36,25	15,1627
4	13	13	13,05	26,2	39,25	15,7166
4	14	14	14,05	28,2	42,25	16,2453
4	15	15	15,05	30,2	45,25	16,7513
4	16	16	16,05	32,2	48,25	17,2369
4	17	17	17,05	34,2	51,25	17,7039
4	18	18	18,05	36,2	54,25	18,154
4	19	19	19,05	38,2	57,25	18,5885
4	20	20	20,05	40,2	60,25	19,0087
4	21	21	21,05	42,2	63,25	19,4156
4	22	22	22,05	44,2	66,25	19,8101
4	23	23	23,05	46,2	69,25	20,1931
4	24	24	24,05	48,2	72,25	20,5653
4	25	25	25,05	50,2	75,25	20,9274

Çizelge 5.3. $M = 6$ için toplam risk primi P_1 ve toplam risk rezervi U_1 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	U_1
6	1	1	1,05	2,2	3,25	5,95142
6	2	2	2,05	4,2	6,25	8,19139
6	3	3	3,05	6,2	9,25	9,90274
6	4	4	4,05	8,2	12,25	11,3337
6	5	5	5,05	10,2	15,25	12,5836
6	6	6	6,05	12,2	18,25	13,7041
6	7	7	7,05	14,2	21,25	14,7261
6	8	8	8,05	16,2	24,25	15,6699
6	9	9	9,05	18,2	27,25	16,5496
6	10	10	10,05	20,2	30,25	17,3757
6	11	11	11,05	22,2	33,25	18,1559
6	12	12	12,05	24,2	36,25	18,8963
6	13	13	13,05	26,2	39,25	19,6017
6	14	14	14,05	28,2	42,25	20,2762
6	15	15	15,05	30,2	45,25	20,9229
6	16	16	16,05	32,2	48,25	21,5446
6	17	17	17,05	34,2	51,25	22,1435
6	18	18	18,05	36,2	54,25	22,7217
6	19	19	19,05	38,2	57,25	23,2809
6	20	20	20,05	40,2	60,25	23,8224
6	21	21	21,05	42,2	63,25	24,3477
6	22	22	22,05	44,2	66,25	24,8579
6	23	23	23,05	46,2	69,25	25,3539
6	24	24	24,05	48,2	72,25	25,8367
6	25	25	25,05	50,2	75,25	26,3072

Çizelge 5.4. $M = 8$ için toplam risk primi P_1 ve toplam risk rezervi U_1 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	U_1
8	1	1	1,05	2,2	3,25	6,89222
8	2	2	2,05	4,2	6,25	9,49728
8	3	3	3,05	6,2	9,25	11,4919
8	4	4	4,05	8,2	12,25	13,1629
8	5	5	5,05	10,2	15,25	14,6247
8	6	6	6,05	12,2	18,25	15,9371
8	7	7	7,05	14,2	21,25	17,1357
8	8	8	8,05	16,2	24,25	18,2441
8	9	9	9,05	18,2	27,25	19,2785
8	10	10	10,05	20,2	30,25	20,2509
8	11	11	11,05	22,2	33,25	21,1704
8	12	12	12,05	24,2	36,25	22,0438
8	13	13	13,05	26,2	39,25	22,877
8	14	14	14,05	28,2	42,25	23,6744
8	15	15	15,05	30,2	45,25	24,4397
8	16	16	16,05	32,2	48,25	25,1761
8	17	17	17,05	34,2	51,25	25,8863
8	18	18	18,05	36,2	54,25	26,5725
8	19	19	19,05	38,2	57,25	27,2367
8	20	20	20,05	40,2	60,25	27,8806
8	21	21	21,05	42,2	63,25	28,5057
8	22	22	22,05	44,2	66,25	29,1133
8	23	23	23,05	46,2	69,25	29,7047
8	24	24	24,05	48,2	72,25	30,2808
8	25	25	25,05	50,2	75,25	30,8425



Şekil 5.1. Toplam risk primi P_1 ve net retenşın M ' nin bir fonksiyonu olarak toplam risk rezervi U_1 (1 birim 10^6 dır).

5.1.2. Durum 2 İçin Çözümleme

Denklem (5.2)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(1-e^{-3}\right)\cdot\left(0{,}1+u_1\right)-\frac{0{,}1}{3}\cdot 0{,}80085 \quad , \quad P^{(2)} = \left(1-e^{-3}\right)\cdot\left(0{,}2+u_2\right)-\frac{0{,}2}{3}\cdot 0{,}80085$$

$$U^{(1)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(1)}\cdot M^{(1)}}-0{,}04\cdot P^{(1)} \quad , \quad U^{(2)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(2)}\cdot M^{(2)}}-0{,}04\cdot P^{(2)}$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 2' ye ilişkin

$$P_2 = P^{(1)}+P^{(2)}$$
$$U_2 \approx U^{(1)}+U^{(2)} \approx 1{,}4\left(\sqrt{P^{(1)}\cdot M^{(1)}}+\sqrt{P^{(2)}\cdot M^{(2)}}\right)-0{,}04\cdot\left(P^{(1)}+P^{(2)}\right)$$

toplamları gözönüne alınarak $M = \{2,4,6,8\}$ için Çizelge 5.5., Çizelge 5.6., Çizelge 5.7. ve Çizelge 5.8.' de gösterilen değerler bulunmuş, P_2 ve U_2 değerleri ile çizilen toplam portföye ilişkin grafik Şekil 5.2.' de yerini almıştır.

Çizelge 5.5. $M = 2$ için toplam risk primi P_2 ve toplam risk rezervi U_2 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	U_2
2	1	1	1,01854	1,07235	2,09089	2,77928
2	2	2	1,96875	1,95922	3,92797	3,76686
2	3	3	2,91897	2,84608	5,76505	4,52324
2	4	4	3,86918	3,73295	7,60213	5,15488
2	5	5	4,81939	4,61981	9,43921	5,70533
2	6	6	5,7696	5,50668	11,2763	6,19748
2	7	7	6,71982	6,39355	13,1134	6,64515
2	8	8	7,67003	7,28041	14,9504	7,05742
2	9	9	8,62024	8,16728	16,7875	7,44066
2	10	10	9,57046	9,05414	18,6246	7,79951
2	11	11	10,5207	9,94101	20,4617	8,13752
2	12	12	11,4709	10,8279	22,2988	8,45744
2	13	13	12,4211	11,7147	24,1358	8,76146
2	14	14	13,3713	12,6016	25,9729	9,05137
2	15	15	14,3215	13,4885	27,81	9,32863
2	16	16	15,2717	14,3753	29,6471	9,59449
2	17	17	16,2219	15,2622	31,4841	9,84999
2	18	18	17,1722	16,1491	33,3212	10,096
2	19	19	18,1224	17,0359	35,1583	10,3334
2	20	20	19,0726	17,9228	36,9954	10,5627
2	21	21	20,0228	18,8097	38,8325	10,7846
2	22	22	20,973	19,6965	40,6695	10,9996
2	23	23	21,9232	20,5834	42,5066	11,2081
2	24	24	22,8734	21,4703	44,3437	11,4106
2	25	25	23,8236	22,3571	46,1808	11,6075

Çizelge 5.6. $M = 4$ için toplam risk primi P_2 ve toplam risk rezervi U_2 değerleri

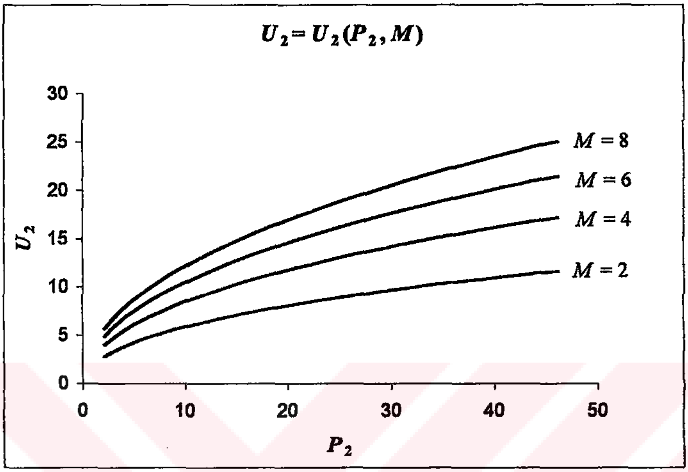
M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	U_2
4	1	1	1,01854	1,07235	2,09089	3,96514
4	2	2	1,96875	1,95922	3,92797	5,39223
4	3	3	2,91897	2,84608	5,76505	6,49234
4	4	4	3,86918	3,73295	7,60213	7,41606
4	5	5	4,81939	4,61981	9,43921	8,22495
4	6	6	5,7696	5,50668	11,2763	8,9514
4	7	7	6,71982	6,39355	13,1134	9,61493
4	8	8	7,67003	7,28041	14,9504	10,2284
4	9	9	8,62024	8,16728	16,7875	10,8008
4	10	10	9,57046	9,05414	18,6246	11,3388
4	11	11	10,5207	9,94101	20,4617	11,8472
4	12	12	11,4709	10,8279	22,2988	12,3301
4	13	13	12,4211	11,7147	24,1358	12,7905
4	14	14	13,3713	12,6016	25,9729	13,2309
4	15	15	14,3215	13,4885	27,81	13,6534
4	16	16	15,2717	14,3753	29,6471	14,0599
4	17	17	16,2219	15,2622	31,4841	14,4516
4	18	18	17,1722	16,1491	33,3212	14,83
4	19	19	18,1224	17,0359	35,1583	15,1961
4	20	20	19,0726	17,9228	36,9954	15,5509
4	21	21	20,0228	18,8097	38,8325	15,8951
4	22	22	20,973	19,6965	40,6695	16,2296
4	23	23	21,9232	20,5834	42,5066	16,5549
4	24	24	22,8734	21,4703	44,3437	16,8717
4	25	25	23,8236	22,3571	46,1808	17,1806

Çizelge 5.7. $M = 6$ için toplam risk primi P_2 ve toplam risk rezervi U_2 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	U_2
6	1	1	1,01854	1,07235	2,09089	4,87508
6	2	2	1,96875	1,95922	3,92797	6,63942
6	3	3	2,91897	2,84608	5,76505	8,00329
6	4	4	3,86918	3,73295	7,60213	9,15113
6	5	5	4,81939	4,61981	9,43921	10,1583
6	6	6	5,7696	5,50668	11,2763	11,0646
6	7	7	6,71982	6,39355	13,1134	11,8937
6	8	8	7,67003	7,28041	14,9504	12,6616
6	9	9	8,62024	8,16728	16,7875	13,3792
6	10	10	9,57046	9,05414	18,6246	14,0545
6	11	11	10,5207	9,94101	20,4617	14,6938
6	12	12	11,4709	10,8279	22,2988	15,3017
6	13	13	12,4211	11,7147	24,1358	15,882
6	14	14	13,3713	12,6016	25,9729	16,438
6	15	15	14,3215	13,4885	27,81	16,972
6	16	16	15,2717	14,3753	29,6471	17,4863
6	17	17	16,2219	15,2622	31,4841	17,9826
6	18	18	17,1722	16,1491	33,3212	18,4625
6	19	19	18,1224	17,0359	35,1583	18,9274
6	20	20	19,0726	17,9228	36,9954	19,3784
6	21	21	20,0228	18,8097	38,8325	19,8165
6	22	22	20,973	19,6965	40,6695	20,2427
6	23	23	21,9232	20,5834	42,5066	20,6577
6	24	24	22,8734	21,4703	44,3437	21,0622
6	25	25	23,8236	22,3571	46,1808	21,457

Çizelge 5.8. $M = 8$ için toplam risk primi P_2 ve toplam risk rezervi U_2 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	U_2
8	1	1	1,01854	1,07235	2,09089	5,6422
8	2	2	1,96875	1,95922	3,92797	7,69085
8	3	3	2,91897	2,84608	5,76505	9,27708
8	4	4	3,86918	3,73295	7,60213	10,6139
8	5	5	4,81939	4,61981	9,43921	11,7882
8	6	6	5,7696	5,50668	11,2763	12,846
8	7	7	6,71982	6,39355	13,1134	13,8148
8	8	8	7,67003	7,28041	14,9504	14,7129
8	9	9	8,62024	8,16728	16,7875	15,5528
8	10	10	9,57046	9,05414	18,6246	16,344
8	11	11	10,5207	9,94101	20,4617	17,0935
8	12	12	11,4709	10,8279	22,2988	17,8068
8	13	13	12,4211	11,7147	24,1358	18,4884
8	14	14	13,3713	12,6016	25,9729	19,1416
8	15	15	14,3215	13,4885	27,81	19,7697
8	16	16	15,2717	14,3753	29,6471	20,3749
8	17	17	16,2219	15,2622	31,4841	20,9594
8	18	18	17,1722	16,1491	33,3212	21,5249
8	19	19	18,1224	17,0359	35,1583	22,0731
8	20	20	19,0726	17,9228	36,9954	22,6052
8	21	21	20,0228	18,8097	38,8325	23,1225
8	22	22	20,973	19,6965	40,6695	23,6259
8	23	23	21,9232	20,5834	42,5066	24,1165
8	24	24	22,8734	21,4703	44,3437	24,595
8	25	25	23,8236	22,3571	46,1808	25,0621



Şekil 5.2. Toplam risk primi P_2 ve net retenşın M ' nin bir fonksiyonu olarak toplam risk rezervi U_2 (1 birim 10^6 dır).

5.1.3. Durum 3 İçin Çözümleme

Denklem (5.3)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(\left(1 - e^{-3}\right) \cdot \left(0{,}1 + u_1\right) - \frac{0{,}1}{3} \cdot 0{,}80085 \right) + \left(\frac{0{,}1}{1+1} + u_1 \right) \cdot (1-1)$$
$$P^{(2)} = \left(\left(1 - e^{-3}\right) \cdot \left(0{,}2 + u_2\right) - \frac{0{,}2}{3} \cdot 0{,}80085 \right) + \left(\frac{0{,}2}{1+1} + u_2 \right) \cdot (2-1)$$

$$U^{(1)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(1)} \cdot M^{(1)}} - 0{,}04 \cdot P^{(1)} \quad , \quad U^{(2)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(2)} \cdot M^{(2)}} - 0{,}04 \cdot P^{(2)}$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 3' e ilişkin

$$P_3 = P^{(1)} + P^{(2)}$$
$$U_3 \approx U^{(1)} + U^{(2)} \approx 1{,}4\left(\sqrt{P^{(1)} \cdot M^{(1)}} + \sqrt{P^{(2)} \cdot M^{(2)}}\right) - 0{,}04 \cdot \left(P^{(1)} + P^{(2)}\right)$$

toplamları göz önüne alınarak $M = \{2,4,6,8\}$ artan değerleri için Çizelge 5.9., Çizelge 5.10., Çizelge 5.11. ve Çizelge 5.12.' de gösterilen değerler bulunmuş, P_3 ve U_3 değerleri ile çizilen toplam portföye ilişkin grafik Şekil 5.3.' de sunulmuştur.

Çizelge 5.9. $M = 2$ için toplam risk primi P_3 ve toplam risk rezervi U_3 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	U_3
2	1	1	1,01854	2,18687	3,2054	3,35503
2	2	2	1,96875	4,13708	6,10583	4,56771
2	3	3	2,91897	6,08729	9,00626	5,48579
2	4	4	3,86918	8,0375	11,9067	6,24663
2	5	5	4,81939	9,98772	14,8071	6,90562
2	6	6	5,7696	11,9379	17,7075	7,49168
2	7	7	6,71982	13,8881	20,608	8,0222
2	8	8	7,67003	15,8384	23,5084	8,50858
2	9	9	8,62024	17,7886	26,4088	8,95879
2	10	10	9,57046	19,7388	29,3092	9,37866
2	11	11	10,5207	21,689	32,2097	9,7726
2	12	12	11,4709	23,6392	35,1101	10,144
2	13	13	12,4211	25,5894	38,0105	10,4957
2	14	14	13,3713	27,5396	40,9109	10,8299
2	15	15	14,3215	29,4898	43,8114	11,1483
2	16	16	15,2717	31,4401	46,7118	11,4526
2	17	17	16,2219	33,3903	49,6122	11,744
2	18	18	17,1722	35,3405	52,5126	12,0237
2	19	19	18,1224	37,2907	55,4131	12,2926
2	20	20	19,0726	39,2409	58,3135	12,5515
2	21	21	20,0228	41,1911	61,2139	12,8012
2	22	22	20,973	43,1413	64,1143	13,0424
2	23	23	21,9232	45,0916	67,0148	13,2756
2	24	24	22,8734	47,0418	69,9152	13,5012
2	25	25	23,8236	48,992	72,8156	13,7199

Çizelge 5.10. $M = 4$ için toplam risk primi P_3 ve toplam risk rezervi U_3 değerleri

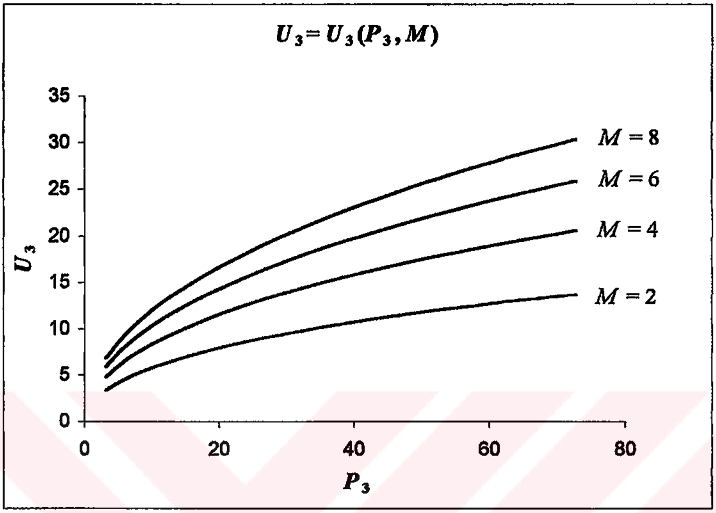
M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	U_3
4	1	1	1,01854	2,18687	3,2054	4,79784
4	2	2	1,96875	4,13708	6,10583	6,56088
4	3	3	2,91897	6,08729	9,00626	7,9073
4	4	4	3,86918	8,0375	11,9067	9,03135
4	5	5	4,81939	9,98772	14,8071	10,0114
4	6	6	5,7696	11,9379	17,7075	10,8882
4	7	7	6,71982	13,8881	20,608	11,6865
4	8	8	7,67003	15,8384	23,5084	12,4224
4	9	9	8,62024	17,7886	26,4088	13,1072
4	10	10	9,57046	19,7388	29,3092	13,749
4	11	11	10,5207	21,689	32,2097	14,3542
4	12	12	11,4709	23,6392	35,1101	14,9276
4	13	13	12,4211	25,5894	38,0105	15,473
4	14	14	13,3713	27,5396	40,9109	15,9936
4	15	15	14,3215	29,4898	43,8114	16,492
4	16	16	15,2717	31,4401	46,7118	16,9704
4	17	17	16,2219	33,3903	49,6122	17,4306
4	18	18	17,1722	35,3405	52,5126	17,8741
4	19	19	18,1224	37,2907	55,4131	18,3025
4	20	20	19,0726	39,2409	58,3135	18,7167
4	21	21	20,0228	41,1911	61,2139	19,1179
4	22	22	20,973	43,1413	64,1143	19,507
4	23	23	21,9232	45,0916	67,0148	19,8848
4	24	24	22,8734	47,0418	69,9152	20,252
4	25	25	23,8236	48,992	72,8156	20,6093

Çizelge 5.11. $M = 6$ için toplam risk primi P_3 ve toplam risk rezervi U_3 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	U_3
6	1	1	1,01854	2,18687	3,2054	5,90494
6	2	2	1,96875	4,13708	6,10583	8,0903
6	3	3	2,91897	6,08729	9,00626	9,76538
6	4	4	3,86918	8,0375	11,9067	11,1681
6	5	5	4,81939	9,98772	14,8071	12,3945
6	6	6	5,7696	11,9379	17,7075	13,4945
6	7	7	6,71982	13,8881	20,608	14,4983
6	8	8	7,67003	15,8384	23,5084	15,4257
6	9	9	8,62024	17,7886	26,4088	16,2904
6	10	10	9,57046	19,7388	29,3092	17,1026
6	11	11	10,5207	21,689	32,2097	17,8698
6	12	12	11,4709	23,6392	35,1101	18,5981
6	13	13	12,4211	25,5894	38,0105	19,2921
6	14	14	13,3713	27,5396	40,9109	19,9558
6	15	15	14,3215	29,4898	43,8114	20,5923
6	16	16	15,2717	31,4401	46,7118	21,2043
6	17	17	16,2219	33,3903	49,6122	21,794
6	18	18	17,1722	35,3405	52,5126	22,3633
6	19	19	18,1224	37,2907	55,4131	22,914
6	20	20	19,0726	39,2409	58,3135	23,4474
6	21	21	20,0228	41,1911	61,2139	23,9649
6	22	22	20,973	43,1413	64,1143	24,4675
6	23	23	21,9232	45,0916	67,0148	24,9563
6	24	24	22,8734	47,0418	69,9152	25,4321
6	25	25	23,8236	48,992	72,8156	25,8958

Çizelge 5.12. $M = 8$ için toplam risk primi P_3 ve toplam risk rezervi U_3 değerleri

M	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	U_3
8	1	1	1,01854	2,18687	3,2054	6,83827
8	2	2	1,96875	4,13708	6,10583	9,37966
8	3	3	2,91897	6,08729	9,00626	11,3318
8	4	4	3,86918	8,0375	11,9067	12,9695
8	5	5	4,81939	9,98772	14,8071	14,4035
8	6	6	5,7696	11,9379	17,7075	15,6917
8	7	7	6,71982	13,8881	20,608	16,8687
8	8	8	7,67003	15,8384	23,5084	17,9575
8	9	9	8,62024	17,7886	26,4088	18,9739
8	10	10	9,57046	19,7388	29,3092	19,9297
8	11	11	10,5207	21,689	32,2097	20,8336
8	12	12	11,4709	23,6392	35,1101	21,6925
8	13	13	12,4211	25,5894	38,0105	22,5119
8	14	14	13,3713	27,5396	40,9109	23,2962
8	15	15	14,3215	29,4898	43,8114	24,0491
8	16	16	15,2717	31,4401	46,7118	24,7737
8	17	17	16,2219	33,3903	49,6122	25,4725
8	18	18	17,1722	35,3405	52,5126	26,1479
8	19	19	18,1224	37,2907	55,4131	26,8017
8	20	20	19,0726	39,2409	58,3135	27,4356
8	21	21	20,0228	41,1911	61,2139	28,051
8	22	22	20,973	43,1413	64,1143	28,6494
8	23	23	21,9232	45,0916	67,0148	29,2317
8	24	24	22,8734	47,0418	69,9152	29,7991
8	25	25	23,8236	48,992	72,8156	30,3524



Şekil 5.3. Toplam risk primi P_3 ve net retenşın M ' nin bir fonksiyonu olarak toplam risk rezervi U_3 (1 birim 10^6 dır).

5.2. Yükümlülüğü Karşılama Oranı : $U_l / P_l = f(P_l, \Lambda)$

Üç durum için de çizilen Şekil 5.4. , Şekil 5.5. ve Şekil 5.6.' da görüldüğü gibi, yükümlülüğü karşılama oranı U_l / P_l, prim P_l ve güvenlik yüklemesi Λ' nın birer fonksiyonu olarak aynı davranışı göstermektedir. Şekillerden görüldüğü gibi bir risk alanın güvenlik yüklemesi Λ artırıldığında $(1+\Lambda)P_l$ bağıntısına bağlı olarak toplanan primler de artacaktır ve şirketin başlangıçta risk rezervi bulundurmasına gerek kalmayacaktır. Durum 2' deki maksimum hasar miktarları için çizilen Şekil 5.5.' de prim P_2 ve buna bağlı olarak başlangıç yükümlülüğü karşılama oranı U_2 / P_2 gösterilmektedir. U_2 / P_2 Durum 1 için çizilen Şekil 5.4.' deki U_1 / P_1 değerine göre daha hızlı artış göstermektedir. Sonuç olarak maksimum hasar miktarıyla çalışan bir sigorta şirketi, büyük bir güvenlik yüklemesiyle çalışırsa başlangıç risk rezervi bulundurmasına gerek kalmayacak, yükümlülüğü karşılama oranı ise sıfıra gidecektir. Durum 3 için çizilen Şekil 5.6. ise Durum 1 için çizilen Şekil 5.4.' e yakın bir davranış göstermektedir.

Üç durum için de bu Bölüm'e ait çizelgedeki değerlerin hesaplanmasında aşağıdaki nicelikler kullanılmıştır.

$\varepsilon = 0{,}01$ için

$U^{(i)} \approx 1.4\sqrt{P^{(i)} \cdot M^{(i)}} - \Lambda^{(i)} \cdot P^{(i)}$, i=1,2

Burada her iki portföy için $M^{(i)}$ net retenşın miktarlarının ve $\Lambda^{(i)}$ güvenlik yüklemelerinin eşit oldukları varsayılmıştır:

$$M^{(1)} = M^{(2)} = 1 \, , \; \Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)}$$

$$M = M^{(1)} + M^{(2)} = 2$$

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{2} \frac{P^{(i)} \cdot \Lambda^{(i)}}{P_1} \, , \; \Lambda_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{P^{(i)} \cdot \Lambda^{(i)}}{P_2} \, , \; \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$$

5.2.1. Durum 1 İçin Çözümleme

Denklem (5.1)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(\frac{0{,}1}{1+1} + u_1\right) \cdot 1 = (0{,}05 + u_1) \quad , \quad P^{(2)} = \left(\frac{0{,}2}{1+1} + u_2\right) \cdot 2 = 2 \cdot (0{,}1 + u_2)$$

$$U^{(1)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(1)}\cdot 1} - \Lambda^{(1)}\cdot P^{(1)} \quad , \quad U^{(2)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(2)}\cdot 1} - \Lambda^{(2)}\cdot P^{(2)}$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 1' e ilişkin

$$P_1 = P^{(1)} + P^{(2)}$$
$$U_1 \approx U^{(1)} + U^{(2)} \approx 1{,}4\left(\sqrt{P^{(1)}\cdot 1} + \sqrt{P^{(2)}\cdot 1}\right) - \Lambda\cdot\left(P^{(1)} + P^{(2)}\right)$$

toplamları göz önüne alınarak $\Lambda = \{0 \ , \ 0{,}05 \ , \ 0{,}1 \ , \ 0{,}2\}$ artan değerleri için hesaplanan değerler Çizelge 5.13., Çizelge 5.14., Çizelge 5.15. ve Çizelge 5.16.' da gösterilmiştir. P_1 ve U_1 / P_1 değerleri ile çizilen toplam portföye ilişkin grafik Şekil 5.4.' dedir.

Çizelge 5.13. $\Lambda = 0$ için toplam risk primi P_1 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_1/P_1 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	U_1	U_1/P_1
0	1	1	1,05	2,2	3,25	3,51111	1,08034
0	2	2	2,05	4,3	6,35	4,9076	0,77285
0	3	3	3,05	6,3	9,35	5,95897	0,63732
0	4	4	4,05	8,3	12,35	6,85081	0,55472
0	5	5	5,05	10,3	15,35	7,63921	0,49767
0	6	6	6,05	12,3	18,35	8,35353	0,45523
0	7	7	7,05	14,3	21,35	9,0114	0,42208
0	8	8	8,05	16,3	24,35	9,62441	0,39525
0	9	9	9,05	18,3	27,35	10,2006	0,37297
0	10	10	10,05	20,3	30,35	10,746	0,35407
0	11	11	11,05	22,3	33,35	11,265	0,33778
0	12	12	12,05	24,3	36,35	11,7611	0,32355
0	13	13	13,05	26,3	39,35	12,2372	0,31098
0	14	14	14,05	28,3	42,35	12,6954	0,29977
0	15	15	15,05	30,3	45,35	13,1376	0,28969
0	16	16	16,05	32,3	48,35	13,5654	0,28057
0	17	17	17,05	34,3	51,35	13,9801	0,27225
0	18	18	18,05	36,3	54,35	14,3829	0,26463
0	19	19	19,05	38,3	57,35	14,7747	0,25762
0	20	20	20,05	40,3	60,35	15,1563	0,25114
0	21	21	21,05	42,3	63,35	15,5286	0,24512
0	22	22	22,05	44,3	66,35	15,8922	0,23952
0	23	23	23,05	46,3	69,35	16,2476	0,23428
0	24	24	24,05	48,3	72,35	16,5955	0,22938
0	25	25	25,05	50,3	75,35	16,9361	0,22477

Çizelge 5.14. $\Lambda = 0{,}05$ için toplam risk primi P_1 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_1 / P_1 değerleri

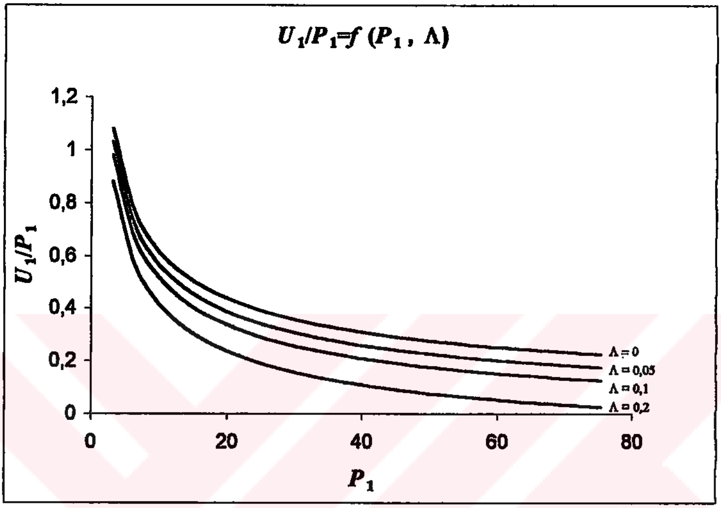
Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	U_1	U_1 / P_1
0,05	1	1	1,05	2,2	3,25	3,34861	1,03034
0,05	2	2	2,05	4,3	6,35	4,5901	0,72285
0,05	3	3	3,05	6,3	9,35	5,49147	0,58732
0,05	4	4	4,05	8,3	12,35	6,23331	0,50472
0,05	5	5	5,05	10,3	15,35	6,87171	0,44767
0,05	6	6	6,05	12,3	18,35	7,43603	0,40523
0,05	7	7	7,05	14,3	21,35	7,9439	0,37208
0,05	8	8	8,05	16,3	24,35	8,40691	0,34525
0,05	9	9	9,05	18,3	27,35	8,83314	0,32297
0,05	10	10	10,05	20,3	30,35	9,22852	0,30407
0,05	11	11	11,05	22,3	33,35	9,59752	0,28778
0,05	12	12	12,05	24,3	36,35	9,94364	0,27355
0,05	13	13	13,05	26,3	39,35	10,2697	0,26098
0,05	14	14	14,05	28,3	42,35	10,5779	0,24977
0,05	15	15	15,05	30,3	45,35	10,8701	0,23969
0,05	16	16	16,05	32,3	48,35	11,1479	0,23057
0,05	17	17	17,05	34,3	51,35	11,4126	0,22225
0,05	18	18	18,05	36,3	54,35	11,6654	0,21463
0,05	19	19	19,05	38,3	57,35	11,9072	0,20762
0,05	20	20	20,05	40,3	60,35	12,1388	0,20114
0,05	21	21	21,05	42,3	63,35	12,3611	0,19512
0,05	22	22	22,05	44,3	66,35	12,5747	0,18952
0,05	23	23	23,05	46,3	69,35	12,7801	0,18428
0,05	24	24	24,05	48,3	72,35	12,978	0,17938
0,05	25	25	25,05	50,3	75,35	13,1686	0,17477

Çizelge 5.15. $\Lambda = 0,1$ için toplam risk primi P_1 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_1 / P_1 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	U_1	U_1 / P_1
0,1	1	1	1,05	2,2	3,25	3,18611	0,98034
0,1	2	2	2,05	4,3	6,35	4,2726	0,67285
0,1	3	3	3,05	6,3	9,35	5,02397	0,53732
0,1	4	4	4,05	8,3	12,35	5,61581	0,45472
0,1	5	5	5,05	10,3	15,35	6,10421	0,39767
0,1	6	6	6,05	12,3	18,35	6,51853	0,35523
0,1	7	7	7,05	14,3	21,35	6,8764	0,32208
0,1	8	8	8,05	16,3	24,35	7,18941	0,29525
0,1	9	9	9,05	18,3	27,35	7,46564	0,27297
0,1	10	10	10,05	20,3	30,35	7,71102	0,25407
0,1	11	11	11,05	22,3	33,35	7,93002	0,23778
0,1	12	12	12,05	24,3	36,35	8,12614	0,22355
0,1	13	13	13,05	26,3	39,35	8,30216	0,21098
0,1	14	14	14,05	28,3	42,35	8,46035	0,19977
0,1	15	15	15,05	30,3	45,35	8,60257	0,18969
0,1	16	16	16,05	32,3	48,35	8,73038	0,18057
0,1	17	17	17,05	34,3	51,35	8,8451	0,17225
0,1	18	18	18,05	36,3	54,35	8,94787	0,16463
0,1	19	19	19,05	38,3	57,35	9,03966	0,15762
0,1	20	20	20,05	40,3	60,35	9,12133	0,15114
0,1	21	21	21,05	42,3	63,35	9,19362	0,14512
0,1	22	22	22,05	44,3	66,35	9,25719	0,13952
0,1	23	23	23,05	46,3	69,35	9,31263	0,13428
0,1	24	24	24,05	48,3	72,35	9,36046	0,12938
0,1	25	25	25,05	50,3	75,35	9,40115	0,12477

Çizelge 5.16. $\Lambda = 0.2$ için toplam risk primi P_1 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_1 / P_1 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	U_1	U_1 / P_1
0,2	1	1	1,05	2,2	3,25	2,86111	0,88034
0,2	2	2	2,05	4,3	6,35	3,6376	0,57285
0,2	3	3	3,05	6,3	9,35	4,08897	0,43732
0,2	4	4	4,05	8,3	12,35	4,38081	0,35472
0,2	5	5	5,05	10,3	15,35	4,56921	0,29767
0,2	6	6	6,05	12,3	18,35	4,68353	0,25523
0,2	7	7	7,05	14,3	21,35	4,7414	0,22208
0,2	8	8	8,05	16,3	24,35	4,75441	0,19525
0,2	9	9	9,05	18,3	27,35	4,73064	0,17297
0,2	10	10	10,05	20,3	30,35	4,67602	0,15407
0,2	11	11	11,05	22,3	33,35	4,59502	0,13778
0,2	12	12	12,05	24,3	36,35	4,49114	0,12355
0,2	13	13	13,05	26,3	39,35	4,36716	0,11098
0,2	14	14	14,05	28,3	42,35	4,22535	0,09977
0,2	15	15	15,05	30,3	45,35	4,06757	0,08969
0,2	16	16	16,05	32,3	48,35	3,89538	0,08057
0,2	17	17	17,05	34,3	51,35	3,7101	0,07225
0,2	18	18	18,05	36,3	54,35	3,51287	0,06463
0,2	19	19	19,05	38,3	57,35	3,30466	0,05762
0,2	20	20	20,05	40,3	60,35	3,08633	0,05114
0,2	21	21	21,05	42,3	63,35	2,85862	0,04512
0,2	22	22	22,05	44,3	66,35	2,62219	0,03952
0,2	23	23	23,05	46,3	69,35	2,37763	0,03428
0,2	24	24	24,05	48,3	72,35	2,12546	0,02938
0,2	25	25	25,05	50,3	75,35	1,86615	0,02477



Şekil 5.4. Toplam risk primi P_1 ve güvenlik yüklemesi Λ' nın bir fonksiyonu olarak yükümlülüğü karşılama oranı U_1/P_1 (1 birim 10^6 dır).

5.2.2. Durum 2 İçin Çözümleme

Denklem (5.2)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(1-e^{-3}\right)\cdot\left(0{,}1+u_1\right)-\frac{0{,}1}{3}\cdot 0{,}80085 \quad , \quad P^{(2)} = \left(1-e^{-3}\right)\cdot\left(0{,}2+u_2\right)-\frac{0{,}2}{3}\cdot 0{,}80085$$

$$U^{(1)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(1)}\cdot 1}-\Lambda^{(1)}\cdot P^{(1)} \quad , \quad U^{(2)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(2)}\cdot 1}-\Lambda^{(2)}\cdot P^{(2)}$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 2' ye ilişkin

$$P_2 = P^{(1)} + P^{(2)}$$
$$U_2 \approx U^{(1)} + U^{(2)} \approx 1{,}4\left(\sqrt{P^{(1)}\cdot 1}+\sqrt{P^{(2)}\cdot 1}\right)-\Lambda\cdot\left(P^{(1)}+P^{(2)}\right)$$

toplamları göz önüne alınarak $\Lambda = \{0 \ , \ 0{,}05 \ , \ 0{,}1 \ , \ 0{,}2\}$ artan değerleri için hesaplanan değerler Çizelge 5.14., Çizelge 5.18., Çizelge 5.19. ve Çizelge 5.20.' dedir. P_2 ve U_2 / P_2 değerleri ile çizilen toplam portföye ilişkin grafik Şekil 5.5.' de gösterilmiştir.

Çizelge 5.17. $\Lambda = 0$ için toplam risk primi P_2 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_2 / P_2 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	U_2	U_2 / P_2
0	1	1	1,01854	1,08687	2,1054	2,87284	1,36451
0	2	2	1,96875	2,03708	4,00583	3,96268	0,98923
0	3	3	2,91897	2,98729	5,90626	4,81171	0,81468
0	4	4	3,86918	3,9375	7,80668	5,53192	0,70861
0	5	5	4,81939	4,88772	9,70711	6,16862	0,63547
0	6	6	5,7696	5,83793	11,6075	6,74548	0,58113
0	7	7	6,71982	6,78814	13,508	7,27676	0,5387
0	8	8	7,67003	7,73836	15,4084	7,7718	0,50439
0	9	9	8,62024	8,68857	17,3088	8,23714	0,47589
0	10	10	9,57046	9,63878	19,2092	8,67757	0,45174
0	11	11	10,5207	10,589	21,1097	9,0967	0,43093
0	12	12	11,4709	11,5392	23,0101	9,49734	0,41275
0	13	13	12,4211	12,4894	24,9105	9,88176	0,39669
0	14	14	13,3713	13,4396	26,8109	10,2518	0,38237
0	15	15	14,3215	14,3898	28,7114	10,6089	0,3695
0	16	16	15,2717	15,3401	30,6118	10,9544	0,35785
0	17	17	16,2219	16,2903	32,5122	11,2893	0,34723
0	18	18	17,1722	17,2405	34,4126	11,6145	0,33751
0	19	19	18,1224	18,1907	36,3131	11,9309	0,32856
0	20	20	19,0726	19,1409	38,2135	12,2392	0,32028
0	21	21	20,0228	20,0911	40,1139	12,5398	0,3126
0	22	22	20,973	21,0413	42,0143	12,8334	0,30545
0	23	23	21,9232	21,9915	43,9148	13,1204	0,29877
0	24	24	22,8734	22,9418	45,8152	13,4013	0,29251
0	25	25	23,8236	23,892	47,7156	13,6764	0,28662

Çizelge 5.18. $\Lambda = 0{,}05$ için toplam risk primi P_2 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_2 / P_2 değerleri

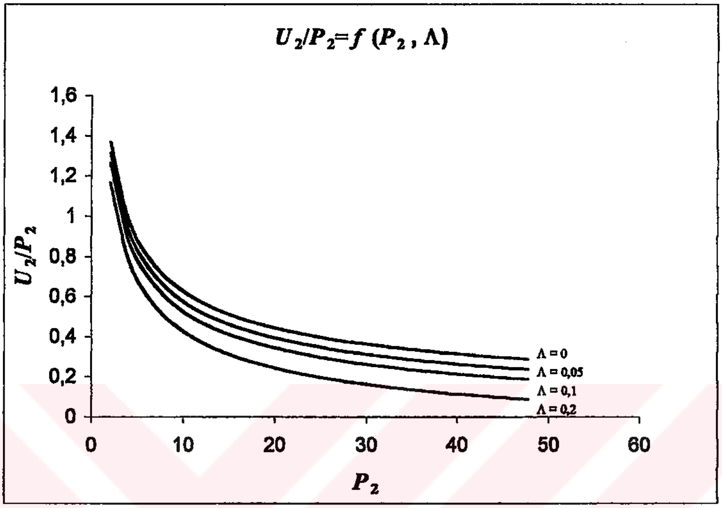
Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	U_2	U_2 / P_2
0,05	1	1	1,01854	1,08687	2,1054	2,76757	1,31451
0,05	2	2	1,96875	2,03708	4,00583	3,76239	0,93923
0,05	3	3	2,91897	2,98729	5,90626	4,51639	0,76468
0,05	4	4	3,86918	3,9375	7,80668	5,14159	0,65861
0,05	5	5	4,81939	4,88772	9,70711	5,68326	0,58547
0,05	6	6	5,7696	5,83793	11,6075	6,16511	0,53113
0,05	7	7	6,71982	6,78814	13,508	6,60136	0,4887
0,05	8	8	7,67003	7,73836	15,4084	7,00138	0,45439
0,05	9	9	8,62024	8,68857	17,3088	7,3717	0,42589
0,05	10	10	9,57046	9,63878	19,2092	7,71711	0,40174
0,05	11	11	10,5207	10,589	21,1097	8,04121	0,38093
0,05	12	12	11,4709	11,5392	23,0101	8,34684	0,36275
0,05	13	13	12,4211	12,4894	24,9105	8,63624	0,34669
0,05	14	14	13,3713	13,4396	26,8109	8,91123	0,33237
0,05	15	15	14,3215	14,3898	28,7114	9,17332	0,3195
0,05	16	16	15,2717	15,3401	30,6118	9,42378	0,30785
0,05	17	17	16,2219	16,2903	32,5122	9,66367	0,29723
0,05	18	18	17,1722	17,2405	34,4126	9,89391	0,28751
0,05	19	19	18,1224	18,1907	36,3131	10,1153	0,27856
0,05	20	20	19,0726	19,1409	38,2135	10,3285	0,27028
0,05	21	21	20,0228	20,0911	40,1139	10,5341	0,2626
0,05	22	22	20,973	21,0413	42,0143	10,7327	0,25545
0,05	23	23	21,9232	21,9915	43,9148	10,9247	0,24877
0,05	24	24	22,8734	22,9418	45,8152	11,1106	0,24251
0,05	25	25	23,8236	23,892	47,7156	11,2907	0,23662

Çizelge 5.19. $\Lambda = 0,1$ için toplam risk primi P_2 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_2 / P_2 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	U_2	U_2 / P_2
0,1	1	1	1,01854	1,08687	2,1054	2,6623	1,26451
0,1	2	2	1,96875	2,03708	4,00583	3,5621	0,88923
0,1	3	3	2,91897	2,98729	5,90626	4,22108	0,71468
0,1	4	4	3,86918	3,9375	7,80668	4,75126	0,60861
0,1	5	5	4,81939	4,88772	9,70711	5,19791	0,53547
0,1	6	6	5,7696	5,83793	11,6075	5,58473	0,48113
0,1	7	7	6,71982	6,78814	13,508	5,92596	0,4387
0,1	8	8	7,67003	7,73836	15,4084	6,23096	0,40439
0,1	9	9	8,62024	8,68857	17,3088	6,50626	0,37589
0,1	10	10	9,57046	9,63878	19,2092	6,75665	0,35174
0,1	11	11	10,5207	10,589	21,1097	6,98573	0,33093
0,1	12	12	11,4709	11,5392	23,0101	7,19634	0,31275
0,1	13	13	12,4211	12,4894	24,9105	7,39071	0,29669
0,1	14	14	13,3713	13,4396	26,8109	7,57068	0,28237
0,1	15	15	14,3215	14,3898	28,7114	7,73775	0,2695
0,1	16	16	15,2717	15,3401	30,6118	7,89319	0,25785
0,1	17	17	16,2219	16,2903	32,5122	8,03806	0,24723
0,1	18	18	17,1722	17,2405	34,4126	8,17328	0,23751
0,1	19	19	18,1224	18,1907	36,3131	8,29963	0,22856
0,1	20	20	19,0726	19,1409	38,2135	8,4178	0,22028
0,1	21	21	20,0228	20,0911	40,1139	8,52841	0,2126
0,1	22	22	20,973	21,0413	42,0143	8,63197	0,20545
0,1	23	23	21,9232	21,9915	43,9148	8,72896	0,19877
0,1	24	24	22,8734	22,9418	45,8152	8,81981	0,19251
0,1	25	25	23,8236	23,892	47,7156	8,90489	0,18662

Çizelge 5.20. $\Lambda = 0,2$ için toplam risk primi P_2 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_2 / P_2 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	U_2	U_2 / P_2
0,2	1	1	1,01854	1,08687	2,1054	2,45175	1,16451
0,2	2	2	1,96875	2,03708	4,00583	3,16152	0,78923
0,2	3	3	2,91897	2,98729	5,90626	3,63046	0,61468
0,2	4	4	3,86918	3,9375	7,80668	3,97059	0,50861
0,2	5	5	4,81939	4,88772	9,70711	4,2272	0,43547
0,2	6	6	5,7696	5,83793	11,6075	4,42398	0,38113
0,2	7	7	6,71982	6,78814	13,508	4,57517	0,3387
0,2	8	8	7,67003	7,73836	15,4084	4,69012	0,30439
0,2	9	9	8,62024	8,68857	17,3088	4,77538	0,27589
0,2	10	10	9,57046	9,63878	19,2092	4,83572	0,25174
0,2	11	11	10,5207	10,589	21,1097	4,87476	0,23093
0,2	12	12	11,4709	11,5392	23,0101	4,89533	0,21275
0,2	13	13	12,4211	12,4894	24,9105	4,89966	0,19669
0,2	14	14	13,3713	13,4396	26,8109	4,88959	0,18237
0,2	15	15	14,3215	14,3898	28,7114	4,86662	0,1695
0,2	16	16	15,2717	15,3401	30,6118	4,83201	0,15785
0,2	17	17	16,2219	16,2903	32,5122	4,78684	0,14723
0,2	18	18	17,1722	17,2405	34,4126	4,73201	0,13751
0,2	19	19	18,1224	18,1907	36,3131	4,66832	0,12856
0,2	20	20	19,0726	19,1409	38,2135	4,59646	0,12028
0,2	21	21	20,0228	20,0911	40,1139	4,51702	0,1126
0,2	22	22	20,973	21,0413	42,0143	4,43053	0,10545
0,2	23	23	21,9232	21,9915	43,9148	4,33748	0,09877
0,2	24	24	22,8734	22,9418	45,8152	4,23829	0,09251
0,2	25	25	23,8236	23,892	47,7156	4,13332	0,08662



Şekil 5.5. Toplam risk primi P_2 ve güvenlik yüklemesi Λ' nın bir fonksiyonu olarak yükümlülüğü karşılama oranı U_2/P_2 (1 birim 10^6 dır).

5.2.3. Durum 3 İçin Çözümleme

Denklem (5.3)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(\left(1-e^{-3}\right) \cdot \left(0{,}1+u_1\right) - \frac{0{,}1}{3} \cdot 0{,}80085 \right) + \left(\frac{0{,}1}{1+1} + u_1 \right) \cdot (1-1)$$

$$P^{(2)} = \left(\left(1-e^{-3}\right) \cdot \left(0{,}2+u_2\right) - \frac{0{,}2}{3} \cdot 0{,}80085 \right) + \left(\frac{0{,}2}{1+1} + u_2 \right) \cdot (2-1)$$

$$U^{(1)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(1)} \cdot 1} - \Lambda^{(1)} \cdot P^{(1)} \quad , \quad U^{(2)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(2)} \cdot 1} - \Lambda^{(2)} \cdot P^{(2)}$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 3' e ilişkin

$$P_3 = P^{(1)} + P^{(2)}$$

$$U_3 \approx U^{(1)} + U^{(2)} \approx 1{,}4\left(\sqrt{P^{(1)} \cdot 1} + \sqrt{P^{(2)} \cdot 1}\right) - \Lambda \cdot \left(P^{(1)} + P^{(2)}\right)$$

toplamları göz önüne alınarak $\Lambda = \{0 \ , \ 0{,}05 \ , \ 0{,}1 \ , \ 0{,}2\}$ artan değerleri için hesaplanan değerler Çizelge 5.21., Çizelge 5.22., Çizelge 5.23. ve Çizelge 5.24.' de gösterilmiştir. P_3 ve U_3 / P_3 değerleri ile çizilen toplam portföye ilişkin grafik Şekil 5.6.' da sunulmuştur.

Çizelge 5.21. $\Lambda = 0$ için toplam risk primi P_3 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_3 / P_3 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	U_3	U_3 / P_3
0	1	1	1,01854	2,18687	3,2054	3,48325	1,08668
0	2	2	1,96875	4,13708	6,10583	4,81194	0,78809
0	3	3	2,91897	6,08729	9,00626	5,84604	0,64911
0	4	4	3,86918	8,0375	11,9067	6,7229	0,56463
0	5	5	4,81939	9,98772	14,8071	7,4979	0,50637
0	6	6	5,7696	11,9379	17,7075	8,19998	0,46308
0	7	7	6,71982	13,8881	20,608	8,84652	0,42928
0	8	8	7,67003	15,8384	23,5084	9,44892	0,40194
0	9	9	8,62024	17,7886	26,4088	10,0151	0,37923
0	10	10	9,57046	19,7388	29,3092	10,551	0,35999
0	11	11	10,5207	21,689	32,2097	11,061	0,34341
0	12	12	11,4709	23,6392	35,1101	11,5484	0,32892
0	13	13	12,4211	25,5894	38,0105	12,0161	0,31613
0	14	14	13,3713	27,5396	40,9109	12,4663	0,30472
0	15	15	14,3215	29,4898	43,8114	12,9008	0,29446
0	16	16	15,2717	31,4401	46,7118	13,3211	0,28518
0	17	17	16,2219	33,3903	49,6122	13,7285	0,27672
0	18	18	17,1722	35,3405	52,5126	14,1242	0,26897
0	19	19	18,1224	37,2907	55,4131	14,5091	0,26184
0	20	20	19,0726	39,2409	58,3135	14,8841	0,25524
0	21	21	20,0228	41,1911	61,2139	15,2498	0,24912
0	22	22	20,973	43,1413	64,1143	15,607	0,24342
0	23	23	21,9232	45,0916	67,0148	15,9561	0,2381
0	24	24	22,8734	47,0418	69,9152	16,2978	0,23311
0	25	25	23,8236	48,992	72,8156	16,6325	0,22842

Çizelge 5.22. $\Lambda = 0{,}05$ için toplam risk primi P_3 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_3 / P_3 değerleri

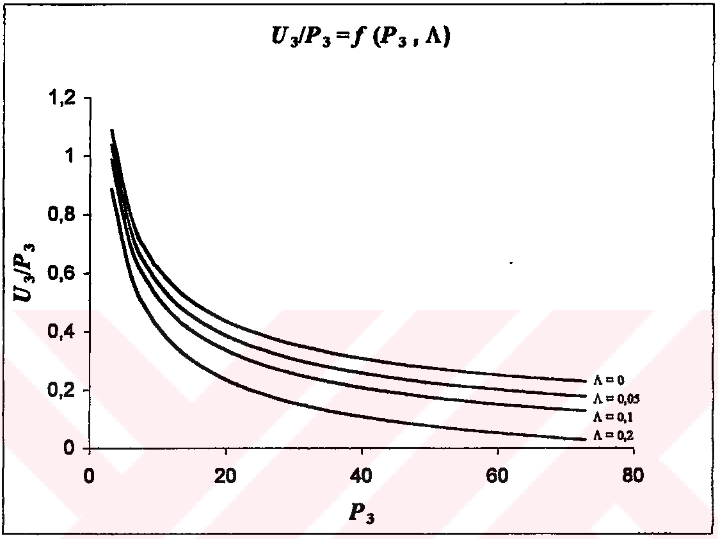
Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	U_3	U_3 / P_3
0,05	1	1	1,01854	2,18687	3,2054	3,32298	1,03668
0,05	2	2	1,96875	4,13708	6,10583	4,50665	0,73809
0,05	3	3	2,91897	6,08729	9,00626	5,39573	0,59911
0,05	4	4	3,86918	8,0375	11,9067	6,12757	0,51463
0,05	5	5	4,81939	9,98772	14,8071	6,75755	0,45637
0,05	6	6	5,7696	11,9379	17,7075	7,31461	0,41308
0,05	7	7	6,71982	13,8881	20,608	7,81612	0,37928
0,05	8	8	7,67003	15,8384	23,5084	8,2735	0,35194
0,05	9	9	8,62024	17,7886	26,4088	8,6947	0,32923
0,05	10	10	9,57046	19,7388	29,3092	9,08557	0,30999
0,05	11	11	10,5207	21,689	32,2097	9,4505	0,29341
0,05	12	12	11,4709	23,6392	35,1101	9,79294	0,27892
0,05	13	13	12,4211	25,5894	38,0105	10,1156	0,26613
0,05	14	14	13,3713	27,5396	40,9109	10,4208	0,25472
0,05	15	15	14,3215	29,4898	43,8114	10,7102	0,24446
0,05	16	16	15,2717	31,4401	46,7118	10,9855	0,23518
0,05	17	17	16,2219	33,3903	49,6122	11,2479	0,22672
0,05	18	18	17,1722	35,3405	52,5126	11,4986	0,21897
0,05	19	19	18,1224	37,2907	55,4131	11,7385	0,21184
0,05	20	20	19,0726	39,2409	58,3135	11,9684	0,20524
0,05	21	21	20,0228	41,1911	61,2139	12,1891	0,19912
0,05	22	22	20,973	43,1413	64,1143	12,4013	0,19342
0,05	23	23	21,9232	45,0916	67,0148	12,6054	0,1881
0,05	24	24	22,8734	47,0418	69,9152	12,8021	0,18311
0,05	25	25	23,8236	48,992	72,8156	12,9917	0,17842

Çizelge 5.23. $\Lambda = 0,1$ için toplam risk primi P_3 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_3 / P_3 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	U_3	U_3 / P_3
0,1	1	1	1,01854	2,18687	3,2054	3,1627	0,98668
0,1	2	2	1,96875	4,13708	6,10583	4,20136	0,68809
0,1	3	3	2,91897	6,08729	9,00626	4,94541	0,54911
0,1	4	4	3,86918	8,0375	11,9067	5,53223	0,46463
0,1	5	5	4,81939	9,98772	14,8071	6,01719	0,40637
0,1	6	6	5,7696	11,9379	17,7075	6,42923	0,36308
0,1	7	7	6,71982	13,8881	20,608	6,78572	0,32928
0,1	8	8	7,67003	15,8384	23,5084	7,09808	0,30194
0,1	9	9	8,62024	17,7886	26,4088	7,37426	0,27923
0,1	10	10	9,57046	19,7388	29,3092	7,62011	0,25999
0,1	11	11	10,5207	21,689	32,2097	7,84002	0,24341
0,1	12	12	11,4709	23,6392	35,1101	8,03743	0,22892
0,1	13	13	12,4211	25,5894	38,0105	8,21509	0,21613
0,1	14	14	13,3713	27,5396	40,9109	8,37521	0,20472
0,1	15	15	14,3215	29,4898	43,8114	8,51963	0,19446
0,1	16	16	15,2717	31,4401	46,7118	8,64989	0,18518
0,1	17	17	16,2219	33,3903	49,6122	8,76729	0,17672
0,1	18	18	17,1722	35,3405	52,5126	8,87294	0,16897
0,1	19	19	18,1224	37,2907	55,4131	8,9678	0,16184
0,1	20	20	19,0726	39,2409	58,3135	9,05271	0,15524
0,1	21	21	20,0228	41,1911	61,2139	9,12841	0,14912
0,1	22	22	20,973	43;1413	64,1143	9,19554	0,14342
0,1	23	23	21,9232	45,0916	67,0148	9,25467	0,1381
0,1	24	24	22,8734	47,0418	69,9152	9,30633	0,13311
0,1	25	25	23,8236	48,992	72,8156	9,35096	0,12842

Çizelge 5.24. $\Lambda = 0,2$ için toplam risk primi P_3 ve yükümlülüğü karşılama oranı U_3 / P_3 değerleri

Λ	u_1	u_2	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	U_3	U_3 / P_3
0,2	1	1	1,01854	2,18687	3,2054	2,84216	0,88668
0,2	2	2	1,96875	4,13708	6,10583	3,59078	0,58809
0,2	3	3	2,91897	6,08729	9,00626	4,04479	0,44911
0,2	4	4	3,86918	8,0375	11,9067	4,34156	0,36463
0,2	5	5	4,81939	9,98772	14,8071	4,53648	0,30637
0,2	6	6	5,7696	11,9379	17,7075	4,65848	0,26308
0,2	7	7	6,71982	13,8881	20,608	4,72493	0,22928
0,2	8	8	7,67003	15,8384	23,5084	4,74724	0,20194
0,2	9	9	8,62024	17,7886	26,4088	4,73338	0,17923
0,2	10	10	9,57046	19,7388	29,3092	4,68918	0,15999
0,2	11	11	10,5207	21,689	32,2097	4,61905	0,14341
0,2	12	12	11,4709	23,6392	35,1101	4,52642	0,12892
0,2	13	13	12,4211	25,5894	38,0105	4,41404	0,11613
0,2	14	14	13,3713	27,5396	40,9109	4,28411	0,10472
0,2	15	15	14,3215	29,4898	43,8114	4,13849	0,09446
0,2	16	16	15,2717	31,4401	46,7118	3,97871	0,08518
0,2	17	17	16,2219	33,3903	49,6122	3,80607	0,07672
0,2	18	18	17,1722	35,3405	52,5126	3,62167	0,06897
0,2	19	19	18,1224	37,2907	55,4131	3,42649	0,06184
0,2	20	20	19,0726	39,2409	58,3135	3,22136	0,05524
0,2	21	21	20,0228	41,1911	61,2139	3,00702	0,04912
0,2	22	22	20,973	43,1413	64,1143	2,7841	0,04342
0,2	23	23	21,9232	45,0916	67,0148	2,55319	0,0381
0,2	24	24	22,8734	47,0418	69,9152	2,31481	0,03311
0,2	25	25	23,8236	48,992	72,8156	2,0694	0,02842



Şekil 5.6. Toplam risk primi P_3 ve güvenlik yüklemesi Λ' nın bir fonksiyonu olarak yükümlülüğü karşılama oranı U_3 / P_3 (1 birim 10^6 dır).

5.3 Net Retenşın Sınırı : $M_I = f(U,\tau)$

Üç durum için gösterilen Şekil 5.7. , Şekil 5.8. ve Şekil 5.9.' da ,beklenen hasar sayısı τ arttıkça net retenşın sınırı M' nin azaldığı, risk rezervi U arttıkça net retenşın sınırı M' nin arttığı görülmektedir. Risk alan sigorta şirketi büyük risklerin ortaya çıkaracağı büyük hasarları karşılamaktan kaçınmak için net retenşın sınırını daha düşük seviyede tutacaktır. Maksimum hasar miktarlarına göre çizilen Şekil 5.8.' de τ' ya bağlı olarak hesaplanan prim P_2 değerinde azalma görülmesine rağmen Durum 1 için çizilen Şekil 5.7.' deki net retenşın sınırı M_1' in Durum 2 için çizilen Şekil 5.8.' deki net retenşın sınırı M_2' ye yükseldiği görülmektedir. Maksimum hasar miktarlarıyla risk yönetimi yapan bir şirket prim geliri yanında net retenşın sınırını da yüksek seviyede tutarak daha çok hasar karşılamak zorunda kalacaktır. Aynı zamanda Şekil 5.8.'den, beklenen hasar sayısı τ ne kadar artarsa artsın net retenşın sınırlarında önemli derecede bir artırma gereği olmayacağı bilgisi çıkmaktadır. Bu ise sigorta şirketinin zararına yol açabilecek bir durumdur. Durum 3 için çizilen Şekil 5.9. , Durum 1 için çizilen Şekil 5.7.' ye oldukça yakın değerleri gösterdiğinden maksimum hasar miktarlarını içeren tamamlanmış örnekleme yöntemiyle elde edilecek sonuçlar daha yararlı olacaktır.

Üç durum için de bu Bölüm'e ait çizelgedeki değerlerin hesaplanmasında aşağıdaki ifadeler kullanılmıştır.

$\varepsilon = 0{,}01$ için $U^{(i)} \approx 1{,}4\sqrt{P^{(i)} \cdot M^{(i)}} - \Lambda^{(i)} \cdot P^{(i)}$ yaklaştırmasından

$$M^{(i)} \approx \frac{\left(U^{(i)} + \Lambda^{(i)} P^{(i)}\right)^2}{(1{,}4)^2 P^{(i)}} \quad , \text{i} = 1{,}2$$

elde edilir. Her iki portföy için risk rezervlerinin ve güvenlik yüklemelerinin eşit oldukları varsayılacaktır:

$U^{(1)} = U^{(2)}$ $\qquad\qquad \Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)} = 0{,}04$

Toplam risk rezervi $U = U^{(1)} + U^{(2)}$,

Ağırlıklandırılmış güvenlik yüklemesi $\Lambda = 0{,}04$

Üç durum için, 1. ve 2. portföye ait beklenen hasar sayısı τ_1 ve τ_2'ye göre değişebilen $P^{(1)}$ ve $P^{(2)}$' ler hesaplandıktan sonra her iki portföyün toplamı için bulunan

$$P_l = P^{(1)} + P^{(2)} \;,\; l = 1,2,3$$

eşitlikleri kullanılarak toplam portföye ait net retenşın miktarı

$$M_l \approx \frac{(U + \Lambda P_l)^2}{(1.4)^2 P_l} \quad , \; l = 1,2,3$$

yaklaşımı ile bulunur.

Bölüm 5.3.2.' de gerekli olan, $\sum_{C \in K} \tau_C = \tau = \{2,4,6,8\}$ için tam olmayan Gama fonksiyonu değerleri şunlardır:

$\tau = 2$ için $\Gamma_2(2) = 0{,}59399$
$\tau = 4$ için $\Gamma_4(2) = 0{,}90842$
$\tau = 6$ için $\Gamma_6(2) = 0{,}98265$
$\tau = 8$ için $\Gamma_8(2) = 0{,}99698$

5.3.1. Durum 1 için Çözümleme

Denklem (5.1)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(\frac{0{,}1}{1+1} + 1\right) \cdot \tau_1 = (1{,}05) \cdot \tau_1 \quad , \quad P^{(2)} = \left(\frac{0{,}2}{1+1} + 2\right) \cdot \tau_2 = (2{,}1) \cdot \tau_2$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 1' e ilişkin $P_1 = P^{(1)} + P^{(2)}$ ve U değerleri için bulunan $M_1 \approx \frac{(U + 0{,}04 P_1)^2}{(1{,}4)^2 P_1}$ dikkate alınarak $\tau = \{2,4,6,8\}$ artan değerleri için hesaplananlar Çizelge 5.25., Çizelge 5.26., Çizelge 5.27. ve Çizelge 5.28.' dedir. U ve M_1 değerleri ile çizilen toplam portföye ilişkin grafik Şekil 5.7.' de sunulmuştur.

Çizelge 5.25. $\tau = 2$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_1 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	M_1
2	1	1	2	1,05	2,1	3,15	0,73208
2	2	2	4	1,05	2,1	3,15	2,75735
2	3	3	6	1,05	2,1	3,15	6,07837
2	4	4	8	1,05	2,1	3,15	10,6952
2	5	5	10	1,05	2,1	3,15	16,6077
2	6	6	12	1,05	2,1	3,15	23,816
2	7	7	14	1,05	2,1	3,15	32,32
2	8	8	16	1,05	2,1	3,15	42,1198
2	9	9	18	1,05	2,1	3,15	53,2154
2	10	10	20	1,05	2,1	3,15	65,6067
2	11	11	22	1,05	2,1	3,15	79,2938
2	12	12	24	1,05	2,1	3,15	94,2766
2	13	13	26	1,05	2,1	3,15	110,555
2	14	14	28	1,05	2,1	3,15	128,13
2	15	15	30	1,05	2,1	3,15	147
2	16	16	32	1,05	2,1	3,15	167,166
2	17	17	34	1,05	2,1	3,15	188,627
2	18	18	36	1,05	2,1	3,15	211,384
2	19	19	38	1,05	2,1	3,15	235,438
2	20	20	40	1,05	2,1	3,15	260,787
2	21	21	42	1,05	2,1	3,15	287,431
2	22	22	44	1,05	2,1	3,15	315,372
2	23	23	46	1,05	2,1	3,15	344,608
2	24	24	48	1,05	2,1	3,15	375,14
2	25	25	50	1,05	2,1	3,15	406,967

Çizelge 5.26. $\tau = 4$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_1 değerleri

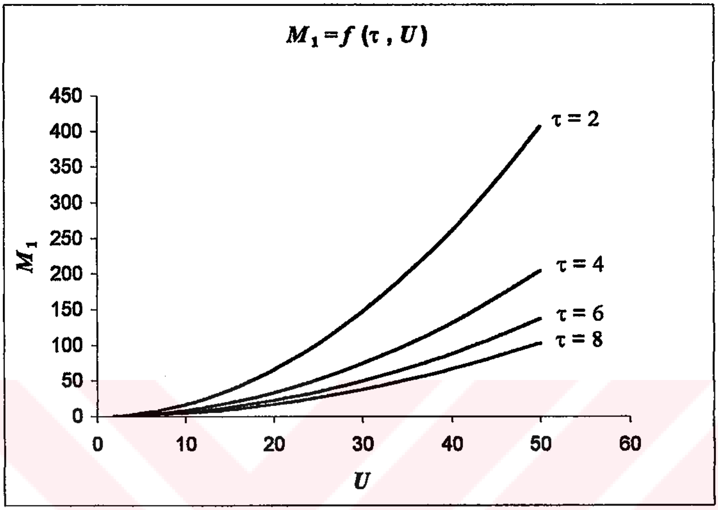
τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	M_1
4	1	1	2	2,1	4,2	6,3	0,41071
4	2	2	4	2,1	4,2	6,3	1,46416
4	3	3	6	2,1	4,2	6,3	3,16549
4	4	4	8	2,1	4,2	6,3	5,5147
4	5	5	10	2,1	4,2	6,3	8,51178
4	6	6	12	2,1	4,2	6,3	12,1567
4	7	7	14	2,1	4,2	6,3	16,4496
4	8	8	16	2,1	4,2	6,3	21,3903
4	9	9	18	2,1	4,2	6,3	26,9789
4	10	10	20	2,1	4,2	6,3	33,2154
4	11	11	22	2,1	4,2	6,3	40,0997
4	12	12	24	2,1	4,2	6,3	47,632
4	13	13	26	2,1	4,2	6,3	55,8121
4	14	14	28	2,1	4,2	6,3	64,6401
4	15	15	30	2,1	4,2	6,3	74,1159
4	16	16	32	2,1	4,2	6,3	84,2397
4	17	17	34	2,1	4,2	6,3	95,0113
4	18	18	36	2,1	4,2	6,3	106,431
4	19	19	38	2,1	4,2	6,3	118,498
4	20	20	40	2,1	4,2	6,3	131,213
4	21	21	42	2,1	4,2	6,3	144,577
4	22	22	44	2,1	4,2	6,3	158,588
4	23	23	46	2,1	4,2	6,3	173,246
4	24	24	48	2,1	4,2	6,3	188,553
4	25	25	50	2,1	4,2	6,3	204,508

Çizelge 5.27. $\tau = 6$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_1 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	M_1
6	1	1	2	3,15	6,3	9,45	0,30531
6	2	2	4	3,15	6,3	9,45	1,03482
6	3	3	6	3,15	6,3	9,45	2,19625
6	4	4	8	3,15	6,3	9,45	3,7896
6	5	5	10	3,15	6,3	9,45	5,81486
6	6	6	12	3,15	6,3	9,45	8,27205
6	7	7	14	3,15	6,3	9,45	11,1612
6	8	8	16	3,15	6,3	9,45	14,4822
6	9	9	18	3,15	6,3	9,45	18,2351
6	10	10	20	3,15	6,3	9,45	22,42
6	11	11	22	3,15	6,3	9,45	27,0368
6	12	12	24	3,15	6,3	9,45	32,0855
6	13	13	26	3,15	6,3	9,45	37,5661
6	14	14	28	3,15	6,3	9,45	43,4786
6	15	15	30	3,15	6,3	9,45	49,8231
6	16	16	32	3,15	6,3	9,45	56,5994
6	17	17	34	3,15	6,3	9,45	63,8077
6	18	18	36	3,15	6,3	9,45	71,4479
6	19	19	38	3,15	6,3	9,45	79,5201
6	20	20	40	3,15	6,3	9,45	88,0241
6	21	21	42	3,15	6,3	9,45	96,9601
6	22	22	44	3,15	6,3	9,45	106,328
6	23	23	46	3,15	6,3	9,45	116,128
6	24	24	48	3,15	6,3	9,45	126,36
6	25	25	50	3,15	6,3	9,45	137,023

Çizelge 5.28. $\tau = 8$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_1 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_1	M_1
8	1	1	2	4,2	8,4	12,6	0,25389
8	2	2	4	4,2	8,4	12,6	0,82143
8	3	3	6	4,2	8,4	12,6	1,71291
8	4	4	8	4,2	8,4	12,6	2,92833
8	5	5	10	4,2	8,4	12,6	4,46769
8	6	6	12	4,2	8,4	12,6	6,33099
8	7	7	14	4,2	8,4	12,6	8,51822
8	8	8	16	4,2	8,4	12,6	11,0294
8	9	9	18	4,2	8,4	12,6	13,8645
8	10	10	20	4,2	8,4	12,6	17,0236
8	11	11	22	4,2	8,4	12,6	20,5066
8	12	12	24	4,2	8,4	12,6	24,3135
8	13	13	26	4,2	8,4	12,6	28,4444
8	14	14	28	4,2	8,4	12,6	32,8992
8	15	15	30	4,2	8,4	12,6	37,6779
8	16	16	32	4,2	8,4	12,6	42,7806
8	17	17	34	4,2	8,4	12,6	48,2072
8	18	18	36	4,2	8,4	12,6	53,9578
8	19	19	38	4,2	8,4	12,6	60,0323
8	20	20	40	4,2	8,4	12,6	66,4308
8	21	21	42	4,2	8,4	12,6	73,1531
8	22	22	44	4,2	8,4	12,6	80,1995
8	23	23	46	4,2	8,4	12,6	87,5697
8	24	24	48	4,2	8,4	12,6	95,2639
8	25	25	50	4,2	8,4	12,6	103,282



Şekil 5.7. Toplam risk rezervi U ve beklenen toplam hasar sayısı τ değerlerinin bir fonksiyonu olarak net retenşın M_1 (1 birim 10^6 dır).

5.3.2. Durum 2 için Çözümleme

Denklem (5.2)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(1-e^{-\tau}\right)\cdot\left(0{,}1+1\right) - \frac{\left(0{,}1\right)\cdot\Gamma_{\tau}\left(2\right)}{\tau} \qquad P^{(2)} = \left(1-e^{-\tau}\right)\cdot\left(0{,}2+2\right) - \frac{\left(0{,}2\right)\cdot\Gamma_{\tau}\left(2\right)}{\tau}$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 2' ye ilişkin $P_2 = P^{(1)} + P^{(2)}$ ve U değerleri için bulunan

$$M_2 \approx \frac{\left(U + 0{,}04\cdot P_2\right)^2}{\left(1{,}4\right)^2\cdot P_2}$$

yaklaşımı dikkate alınarak $\tau = \{2,4,6,8\}$ artan değerleri için hesaplananlar Çizelge 5.29., Çizelge 5.30., Çizelge 5.31. ve Çizelge 5.32.' dedir. U ve M_2 değerleri ile çizilen toplam portföye ilişkin grafik Şekil 5.8.' de sunulmuştur.

Çizelge 5.29. $\tau = 2$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_2 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	M_2
2	1	1	2	0,92143	1,84286	2,764294	0,82217
2	2	2	4	0,92143	1,84286	2,764294	3,11863
2	3	3	6	0,92143	1,84286	2,764294	6,89165
2	4	4	8	0,92143	1,84286	2,764294	12,1412
2	5	5	10	0,92143	1,84286	2,764294	18,8674
2	6	6	12	0,92143	1,84286	2,764294	27,07
2	7	7	14	0,92143	1,84286	2,764294	36,7493
2	8	8	16	0,92143	1,84286	2,764294	47,9051
2	9	9	18	0,92143	1,84286	2,764294	60,5374
2	10	10	20	0,92143	1,84286	2,764294	74,6463
2	11	11	22	0,92143	1,84286	2,764294	90,2318
2	12	12	24	0,92143	1,84286	2,764294	107,294
2	13	13	26	0,92143	1,84286	2,764294	125,832
2	14	14	28	0,92143	1,84286	2,764294	145,847
2	15	15	30	0,92143	1,84286	2,764294	167,339
2	16	16	32	0,92143	1,84286	2,764294	190,307
2	17	17	34	0,92143	1,84286	2,764294	214,752
2	18	18	36	0,92143	1,84286	2,764294	240,674
2	19	19	38	0,92143	1,84286	2,764294	268,071
2	20	20	40	0,92143	1,84286	2,764294	296,946
2	21	21	42	0,92143	1,84286	2,764294	327,297
2	22	22	44	0,92143	1,84286	2,764294	359,124
2	23	23	46	0,92143	1,84286	2,764294	392,429
2	24	24	48	0,92143	1,84286	2,764294	427,209
2	25	25	50	0,92143	1,84286	2,764294	463,466

Çizelge 5.30 $\tau = 4$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_2 değerleri

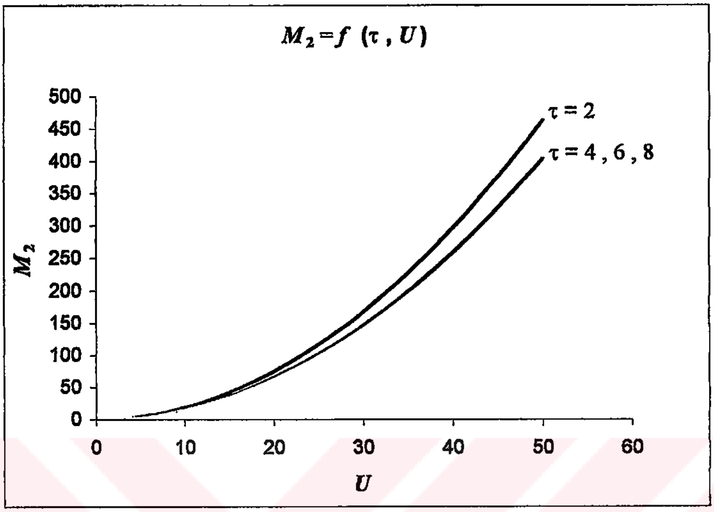
τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	M_2
4	1	1	2	1,05714	2,11428	3,171427	0,72772
4	2	2	4	1,05714	2,11428	3,171427	2,73986
4	3	3	6	1,05714	2,11428	3,171427	6,039
4	4	4	8	1,05714	2,11428	3,171427	10,6251
4	5	5	10	1,05714	2,11428	3,171427	16,4983
4	6	6	12	1,05714	2,11428	3,171427	23,6584
4	7	7	14	1,05714	2,11428	3,171427	32,1056
4	8	8	16	1,05714	2,11428	3,171427	41,8397
4	9	9	18	1,05714	2,11428	3,171427	52,8609
4	10	10	20	1,05714	2,11428	3,171427	65,169
4	11	11	22	1,05714	2,11428	3,171427	78,7642
4	12	12	24	1,05714	2,11428	3,171427	93,6463
4	13	13	26	1,05714	2,11428	3,171427	109,815
4	14	14	28	1,05714	2,11428	3,171427	127,272
4	15	15	30	1,05714	2,11428	3,171427	146,015
4	16	16	32	1,05714	2,11428	3,171427	166,045
4	17	17	34	1,05714	2,11428	3,171427	187,362
4	18	18	36	1,05714	2,11428	3,171427	209,966
4	19	19	38	1,05714	2,11428	3,171427	233,857
4	20	20	40	1,05714	2,11428	3,171427	259,036
4	21	21	42	1,05714	2,11428	3,171427	285,501
4	22	22	44	1,05714	2,11428	3,171427	313,253
4	23	23	46	1,05714	2,11428	3,171427	342,292
4	24	24	48	1,05714	2,11428	3,171427	372,618
4	25	25	50	1,05714	2,11428	3,171427	404,232

Çizelge 5.31. $\tau = 6$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_2 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	M_2
6	1	1	2	1,0809	2,16179	3,242688	0,71364
6	2	2	4	1,0809	2,16179	3,242688	2,68335
6	3	3	6	1,0809	2,16179	3,242688	5,91178
6	4	4	8	1,0809	2,16179	3,242688	10,3989
6	5	5	10	1,0809	2,16179	3,242688	16,1448
6	6	6	12	1,0809	2,16179	3,242688	23,1494
6	7	7	14	1,0809	2,16179	3,242688	31,4127
6	8	8	16	1,0809	2,16179	3,242688	40,9347
6	9	9	18	1,0809	2,16179	3,242688	51,7155
6	10	10	20	1,0809	2,16179	3,242688	63,7549
6	11	11	22	1,0809	2,16179	3,242688	77,0531
6	12	12	24	1,0809	2,16179	3,242688	91,61
6	13	13	26	1,0809	2,16179	3,242688	107,426
6	14	14	28	1,0809	2,16179	3,242688	124,5
6	15	15	30	1,0809	2,16179	3,242688	142,833
6	16	16	32	1,0809	2,16179	3,242688	162,425
6	17	17	34	1,0809	2,16179	3,242688	183,275
6	18	18	36	1,0809	2,16179	3,242688	205,385
6	19	19	38	1,0809	2,16179	3,242688	228,752
6	20	20	40	1,0809	2,16179	3,242688	253,379
6	21	21	42	1,0809	2,16179	3,242688	279,264
6	22	22	44	1,0809	2,16179	3,242688	306,409
6	23	23	46	1,0809	2,16179	3,242688	334,811
6	24	24	48	1,0809	2,16179	3,242688	364,473
6	25	25	50	1,0809	2,16179	3,242688	395,393

Çizelge 5.32. $\tau = 8$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_2 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_2	M_2
8	1	1	2	1,08717	2,17434	3,261506	0,71002
8	2	2	4	1,08717	2,17434	3,261506	2,66884
8	3	3	6	1,08717	2,17434	3,261506	5,87911
8	4	4	8	1,08717	2,17434	3,261506	10,3408
8	5	5	10	1,08717	2,17434	3,261506	16,054
8	6	6	12	1,08717	2,17434	3,261506	23,0187
8	7	7	14	1,08717	2,17434	3,261506	31,2348
8	8	8	16	1,08717	2,17434	3,261506	40,7023
8	9	9	18	1,08717	2,17434	3,261506	51,4213
8	10	10	20	1,08717	2,17434	3,261506	63,3918
8	11	11	22	1,08717	2,17434	3,261506	76,6137
8	12	12	24	1,08717	2,17434	3,261506	91,0871
8	13	13	26	1,08717	2,17434	3,261506	106,812
8	14	14	28	1,08717	2,17434	3,261506	123,788
8	15	15	30	1,08717	2,17434	3,261506	142,016
8	16	16	32	1,08717	2,17434	3,261506	161,495
8	17	17	34	1,08717	2,17434	3,261506	182,226
8	18	18	36	1,08717	2,17434	3,261506	204,208
8	19	19	38	1,08717	2,17434	3,261506	227,442
8	20	20	40	1,08717	2,17434	3,261506	251,927
8	21	21	42	1,08717	2,17434	3,261506	277,663
8	22	22	44	1,08717	2,17434	3,261506	304,651
8	23	23	46	1,08717	2,17434	3,261506	332,89
8	24	24	48	1,08717	2,17434	3,261506	362,381
8	25	25	50	1,08717	2,17434	3,261506	393,124



Şekil 5.8. Toplam risk rezervi U ve beklenen toplam hasar sayısı τ değerlerinin bir fonksiyonu olarak net retenşın M_2 (1 birim 10^6 dır).

5.3.3. Durum 3 için Çözümleme

Denklem (5.3)' de parametre değerlerini yerine koyarak

$$P^{(1)} = \left(\left(1-e^{-\tau}\right)\cdot\left(0{,}1+1\right) - \frac{0{,}1}{\tau}\cdot\Gamma_{\tau}(2) \right) + \left(\frac{0{,}1}{1+1}+1 \right)\cdot\left(\tau_1 - 1\right)$$

$$P^{(2)} = \left(\left(1-e^{-\tau}\right)\cdot\left(0{,}2+2\right) - \frac{0{,}2}{\tau}\cdot\Gamma_{\tau}(2) \right) + \left(\frac{0{,}2}{1+1}+2 \right)\cdot\left(\tau_2 - 1\right)$$

elde edilir. İki portföyün toplamı için Durum 3' e ilişkin $P_3 = P^{(1)} + P^{(2)}$ ve U değerleri için bulunan

$$M_3 \approx \frac{\left(U + 0{,}04\cdot P_3\right)^2}{(1{,}4)^2\cdot P_3}$$

yaklaşımı dikkate alınarak $\tau = \{2,4,6,8\}$ artan değerleri için hesaplananlar Çizelge 5.33., Çizelge 5.34., Çizelge 5.35. ve Çizelge 5.36.' dadır. U ve M_3 değerleri ile çizilen toplam portföye ilişkin grafik Şekil 5.9.' da sunulmuştur.

Çizelge 5.33. $\tau = 2$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_3 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	M_3
2	1	1	2	0,92143	1,84286	2,764294	0,82217
2	2	2	4	0,92143	1,84286	2,764294	3,11863
2	3	3	6	0,92143	1,84286	2,764294	6,89165
2	4	4	8	0,92143	1,84286	2,764294	12,1412
2	5	5	10	0,92143	1,84286	2,764294	18,8674
2	6	6	12	0,92143	1,84286	2,764294	27,07
2	7	7	14	0,92143	1,84286	2,764294	36,7493
2	8	8	16	0,92143	1,84286	2,764294	47,9051
2	9	9	18	0,92143	1,84286	2,764294	60,5374
2	10	10	20	0,92143	1,84286	2,764294	74,6463
2	11	11	22	0,92143	1,84286	2,764294	90,2318
2	12	12	24	0,92143	1,84286	2,764294	107,294
2	13	13	26	0,92143	1,84286	2,764294	125,832
2	14	14	28	0,92143	1,84286	2,764294	145,847
2	15	15	30	0,92143	1,84286	2,764294	167,339
2	16	16	32	0,92143	1,84286	2,764294	190,307
2	17	17	34	0,92143	1,84286	2,764294	214,752
2	18	18	36	0,92143	1,84286	2,764294	240,674
2	19	19	38	0,92143	1,84286	2,764294	268,071
2	20	20	40	0,92143	1,84286	2,764294	296,946
2	21	21	42	0,92143	1,84286	2,764294	327,297
2	22	22	44	0,92143	1,84286	2,764294	359,124
2	23	23	46	0,92143	1,84286	2,764294	392,429
2	24	24	48	0,92143	1,84286	2,764294	427,209
2	25	25	50	0,92143	1,84286	2,764294	463,466

Çizelge 5.34. $\tau = 4$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_3 değerleri

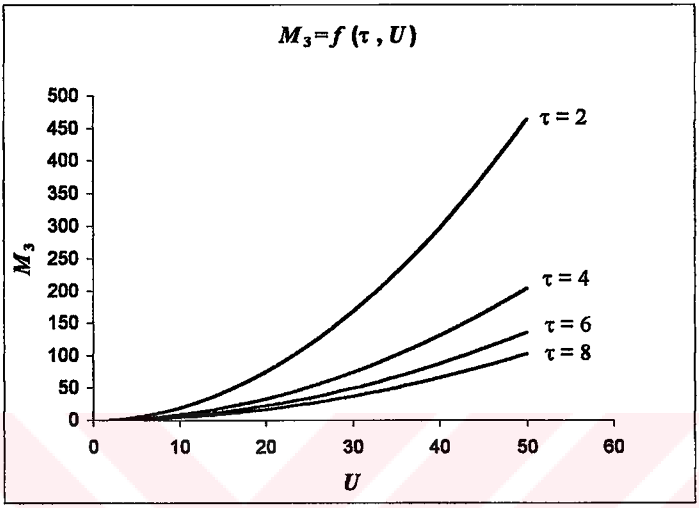
τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	M_3
4	1	1	2	2,10714	4,21428	6,321427	0,40963
4	2	2	4	2,10714	4,21428	6,321427	1,45979
4	3	3	6	2,10714	4,21428	6,321427	3,15563
4	4	4	8	2,10714	4,21428	6,321427	5,49715
4	5	5	10	2,10714	4,21428	6,321427	8,48435
4	6	6	12	2,10714	4,21428	6,321427	12,1172
4	7	7	14	2,10714	4,21428	6,321427	16,3958
4	8	8	16	2,10714	4,21428	6,321427	21,3201
4	9	9	18	2,10714	4,21428	6,321427	26,89
4	10	10	20	2,10714	4,21428	6,321427	33,1056
4	11	11	22	2,10714	4,21428	6,321427	39,9669
4	12	12	24	2,10714	4,21428	6,321427	47,4739
4	13	13	26	2,10714	4,21428	6,321427	55,6265
4	14	14	28	2,10714	4,21428	6,321427	64,4249
4	15	15	30	2,10714	4,21428	6,321427	73,8689
4	16	16	32	2,10714	4,21428	6,321427	83,9586
4	17	17	34	2,10714	4,21428	6,321427	94,694
4	18	18	36	2,10714	4,21428	6,321427	106,075
4	19	19	38	2,10714	4,21428	6,321427	118,102
4	20	20	40	2,10714	4,21428	6,321427	130,774
4	21	21	42	2,10714	4,21428	6,321427	144,092
4	22	22	44	2,10714	4,21428	6,321427	158,056
4	23	23	46	2,10714	4,21428	6,321427	172,666
4	24	24	48	2,10714	4,21428	6,321427	187,921
4	25	25	50	2,10714	4,21428	6,321427	203,822

Çizelge 5.35. $\tau = 6$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_3 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	M_3
6	1	1	2	3,1809	6,36179	9,542688	0,30328
6	2	2	4	3,1809	6,36179	9,542688	1,0265
6	3	3	6	3,1809	6,36179	9,542688	2,17744
6	4	4	8	3,1809	6,36179	9,542688	3,75611
6	5	5	10	3,1809	6,36179	9,542688	5,7625
6	6	6	12	3,1809	6,36179	9,542688	8,19661
6	7	7	14	3,1809	6,36179	9,542688	11,0584
6	8	8	16	3,1809	6,36179	9,542688	14,348
6	9	9	18	3,1809	6,36179	9,542688	18,0653
6	10	10	20	3,1809	6,36179	9,542688	22,2103
6	11	11	22	3,1809	6,36179	9,542688	26,783
6	12	12	24	3,1809	6,36179	9,542688	31,7835
6	13	13	26	3,1809	6,36179	9,542688	37,2117
6	14	14	28	3,1809	6,36179	9,542688	43,0676
6	15	15	30	3,1809	6,36179	9,542688	49,3512
6	16	16	32	3,1809	6,36179	9,542688	56,0625
6	17	17	34	3,1809	6,36179	9,542688	63,2016
6	18	18	36	3,1809	6,36179	9,542688	70,7684
6	19	19	38	3,1809	6,36179	9,542688	78,7629
6	20	20	40	3,1809	6,36179	9,542688	87,1852
6	21	21	42	3,1809	6,36179	9,542688	96,0351
6	22	22	44	3,1809	6,36179	9,542688	105,313
6	23	23	46	3,1809	6,36179	9,542688	115,018
6	24	24	48	3,1809	6,36179	9,542688	125,151
6	25	25	50	3,1809	6,36179	9,542688	135,712

Çizelge 5.36. $\tau = 8$ için toplam risk rezervi U ve net retenşın M_3 değerleri

τ	$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	U	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	P_3	M_3
8	1	1	2	4,23717	8,47434	12,71151	0,25256
8	2	2	4	4,23717	8,47434	12,71151	0,81584
8	3	3	6	4,23717	8,47434	12,71151	1,70021
8	4	4	8	4,23717	8,47434	12,71151	2,90569
8	5	5	10	4,23717	8,47434	12,71151	4,43226
8	6	6	12	4,23717	8,47434	12,71151	6,27993
8	7	7	14	4,23717	8,47434	12,71151	8,44869
8	8	8	16	4,23717	8,47434	12,71151	10,9386
8	9	9	18	4,23717	8,47434	12,71151	13,7495
8	10	10	20	4,23717	8,47434	12,71151	16,8816
8	11	11	22	4,23717	8,47434	12,71151	20,3347
8	12	12	24	4,23717	8,47434	12,71151	24,109
8	13	13	26	4,23717	8,47434	12,71151	28,2043
8	14	14	28	4,23717	8,47434	12,71151	32,6208
8	15	15	30	4,23717	8,47434	12,71151	37,3583
8	16	16	32	4,23717	8,47434	12,71151	42,417
8	17	17	34	4,23717	8,47434	12,71151	47,7967
8	18	18	36	4,23717	8,47434	12,71151	53,4976
8	19	19	38	4,23717	8,47434	12,71151	59,5195
8	20	20	40	4,23717	8,47434	12,71151	65,8625
8	21	21	42	4,23717	8,47434	12,71151	72,5267
8	22	22	44	4,23717	8,47434	12,71151	79,5119
8	23	23	46	4,23717	8,47434	12,71151	86,8182
8	24	24	48	4,23717	8,47434	12,71151	94,4456
8	25	25	50	4,23717	8,47434	12,71151	102,394



Şekil 5.9. Toplam risk rezervi U ve beklenen toplam hasar sayısı τ değerlerinin bir fonksiyonu olarak net retenşın M_3 (1 birim 10^6 dır).

6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Çalışmanın özgün kısmını sunan dördüncü Bölümde maksimum hasar miktarlarıyla ilgili Tawn (1990)' ın geliştirmiş olduğu genelleştirilmiş uç değerler dağılımı temel alınarak risk analizindeki toplam hasar miktarı ifadesi üç durumda incelenmiştir. Beşinci Bölümde risk rezervi, yükümlülüğü karşılama oranı ve net retenşın ölçütleri bakımından bu üç durum için çözümlemeler verilmiştir. Risk analizi konusu olan her portföydeki doğrudan maksimum değerler yerine, portföydeki alt grupların maksimum değerleri dikkate alınarak incelemeler yapılmıştır.

Analizde, her bir portföydeki maksimum hasar miktarı doğrudan ele alınıp bunun dağılımı kullanılsaydı maksimum hasar miktarı dağılımının beklenen değeri daha yüksek olacaktı. Ancak çalışmamızda portföylerdeki maksimum hasar miktarları belirlenirken ilk olarak her bir portföyün içerisindeki, eşit büyüklükteki bağımlı risk gruplarından maksimum hasar miktarları belirlenmiştir. Belirlenen bu maksimum hasar miktarlarının da maksimum dağılımı bulunarak her bir portföy için maksimum hasar miktarı dağılımı bulunmuştur. Bu yöntem uygulandığında ve çalışmada kullanılan parametre değerleri ele alındığında beklenen hasar miktarının daha küçük çıktığı görülmüştür.

Beşinci Bölümde, maksimum hasar miktarlarıyla risk yönetimine yönelen bir sigorta şirketinin elinde bulunduracağı risk rezervinin, tüm hasar miktarları ele alındığında olması gerekenden daha az olacağı ve bu durumda risk rezervine göreli olarak daha çok prim geliri sağlaması gerektiği ortaya çıkmaktadır. İflas etme olasılığını minimum düzeyde tutmayı amaçlayan şirket bireylerden daha fazla miktarda prim toplayarak iflas olasılığını kararlı tutabilir ki bu da sigortalananlar için yüksek prim ödemesi anlamına gelir.

Yine, maksimum hasar miktarıyla risk analizi yapan bir şirketin yükümlülüğü karşılama oranını azaltması için primleri artırıcı etkisi olan güvenlik yüklemesini daha yüksek tutması gerektiği görülmektedir. Bu durumda, sigorta şirketinin sadece primlerden elde edeceği kazançla hasarları karşılayabilecek duruma gelmesi nedeniyle başlangıç risk rezervi bulundurmasına gerek kalmayacaktır.

Son olarak, aynı risk rezervleri düzeyinde maksimum hasar miktarları için, net retenşın sınırlarının arttığı görülmektedir. Bu durum sigorta şirketinin daha çok sayı ve miktarda hasarı karşılama durumunu işaret etmektedir. Ayrıca, farklı büyüklükteki riskler için belirlenecek net retenşın sınırındaki azalışın belirli bir büyüklükten sonra farkedilebilir ölçüde azalmadığı görülmektedir. Bu durum , beklenen hasar sayısı ne kadar artarsa artsın net retenşın sınırının yaklaşık aynı seviyede tutularak çok büyük miktarlarda hasarların karşılanması zorunluluğunu ortaya çıkaracaktır. Sigorta şirketi kendisine büyük risk veren bireyleri veya grupları poliçesine dahil etmeyerek , iflas etme olasığını belirlenen bir minumum düzeyde tutmayı sağlayabilir.

Risk rezervi, yükümlülüğü karşılama oranı ve net retenşın ölçütleri bakımından maksimum hasar miktarları ve Pareto dağılımından geldiği bilinen hasar miktarları ele alınarak yapılan tamamlanan örneklem yöntemine göre bulunan sonuçlar ile sadece Pareto dağılımlı olağan biçimde gözlenebilecek hasar miktarları söz konusu olduğunda bulunan sonuçlar birbirine yakındır.

KAYNAKLAR

Balakrishnan, N. (1990). Order Statistics and Inference Estimation Methods Academic Press; Harcourt Brace San Diego , CA.

Balakrishnan, N., Johnson, N.L. and Kotz, S. (1995). Continuous Univariate Distributions, Vol. 2, 2. Baskı, New York: John Wiley & Sons.

Balakrishnan, N., Johnson, N.L. and Kotz, S. (2000). Continuous Multivariate Distributions, Vol. 1, 2. Baskı, New York: John Wiley & Sons.

Beard, R.E., Pentikainen,T. , Pesonen, E.(1984). Risk Theory , Chapman and Hall.

Beirlant, J., Vynckier, P., Teugeles, J.L.(1996b). Excess Functions and Estimation of the Extreme-Value Index , Bernoilli 2, 293-318.

Bühlmann, H.(1970). Mathematical Methods in Risk Theory , Springer Verlang.

Coles, S.G., and Tawn, J.A.(1991). Modelling Extreme Multivariate Events, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 52; 377-392.

Daykin, C.D., Pentikainen, T., Pesonen, E.(1994). Practical Risk Theory for Actuaries , Chapman and Hall.

De Haan, L., and Resnick, S.I.(1977). Limit Theory for Multivariate Sample Extremes at Work, Extremes,1; 7-45.

Feller, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2, 2nd ed. New York: Wiley.

Galambos, J.(1987). The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics , Malabar, Sla.: R.E. Krieger Pub. Co.

Geffory, J.(1958,1959). Contribution à la théorie des Valeurs Extrêmes, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 7; 37-121, 8; 123-184.

Heilmann, W-R.(1988). Fundementals of Risk Theory , VVW Karlsruhe.

Pickands, J.(1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics , Ann Statist. 3; 119-131.

Rao, C.R.(1973). Linear Statistical Inference and Its Applications, 2. Baskı, New York: John Wiley & Sons.

Resnick, S.I.(1987). Extreme Values Regular Variation , and Point Processes , Springer Verlag.

Smith, R.L.(1987). Estimating Tails of Probability Distributions , Ann Statist. 15; 1174-1207.

Smith, R.L.(1989). Extreme Value Analysis of Environmental Time Series: An Application to Trend Detection in Ground-Level Ozone , Statist. Sci. 4; 367-393.

Tawn, J.A.(1990). Modelling Multivariate Extreme Value Distrubitions, Biometrika, 77; 397-415.

Tiaogo de Oliveira, J.(1958). Extremal Distributions, Revista da Faculdade de Ciencias, Lisboa, Series A, 7; 215-227.

Tiaogo de Oliveira, J.(1961). La Représentation des Distributions Extrêmales Bivariées, Bulletin of the International Statistical Institute, 33; 477-480.

Tiaogo de Oliveira, J.(1970). Biextremal Distributions: Statistical Decision, Trabajos de Estadística, 21; 107-117.

EKLER

EK 1. : Pareto Dağılımının Beklenen Değer ,Varyans ve Kovaryans İfadeleri

Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{i,C}^{*(j)}}(x)=\frac{1}{\sigma_i}\{1-k_i(x-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1} \quad , \quad u_i < x < \frac{\sigma_i}{k_i}+u_i$$

şeklindedir.

Beklenen Değer:

$$E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)=\int_{u_i}^{\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i} x.f_{X_{i,C}^{*(j)}}(x)dx$$

$$=\int_{u_i}^{\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i} x\frac{1}{\sigma_i}\{1-k_i(x-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1}dx \qquad (1)$$

$1-k_i(x-u_i)/\sigma_i=m$ dönüşümü uygulanırsa

$x=\frac{\sigma_i}{k_i}(1-m)+u_i$ elde edilir. Buradan

$-\frac{\sigma_i}{k_i}dm=dx$ ve

$x=u_i$ için $m=1$

$x=\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i$ için $m=0$

dir. Bulunanlar (1) de yerine yazılırsa,

$$E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)=\frac{1}{\sigma_i}\int_1^0\left[\frac{\sigma_i}{k_i}(1-m)+u_i\right]m^{\frac{1}{k_i}-1}\left(-\frac{\sigma_i}{k_i}\right)dm$$

$$=\frac{1}{k_i}\left[\int_0^1\frac{\sigma_i}{k_i}(1-m)m^{\frac{1}{k_i}-1}dm+\int_0^1 u_i m^{\frac{1}{k_i}-1}dm\right]$$

$$=\frac{\sigma_i}{k_i^2}\int_0^1\left(m^{\frac{1}{k_i}-1}-m^{\frac{1}{k_i}}\right)dm+\frac{u_i}{k_i}\int_0^1 m^{\frac{1}{k_i}-1}dm$$

$$E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)=\frac{\sigma_i}{k_i+1}+u_i \qquad (2)$$

bulunur.

Varyans:

$$E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)^2 = \int_{u_i}^{\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i} x^2 . f_{X_{i,C}^{*(j)}}(x)dx$$

$$E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)^2 = \int_{u_i}^{\frac{\sigma_i}{k_i}+u_i} x^2 \frac{1}{\sigma_i}\{1-k_i(x-u_i)/\sigma_i\}^{\frac{1}{k_i}-1}dx$$

$1-k_i(x-u_i)/\sigma_i = m$ **dönüşümü uygulanırsa**

$x^2 = \left[\frac{\sigma_i}{k_i}(1-m)+u_i\right]^2$ elde edilir.Buradan

$-\frac{\sigma_i}{k_i}dm = dx$ ve

$x = u_i$ için $m=1$

$x = \frac{\sigma_i}{k_i}+u_i$ için $m=0$

$$E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_i}\int_1^0\left[\frac{\sigma_i}{k_i}(1-m)+u_i\right]^2 m^{\frac{1}{k_i}-1}\left(-\frac{\sigma_i}{k_i}\right)dm$$

$$=\frac{1}{k_i}\int_0^1\left[\frac{\sigma_i^{\,2}}{k_i^{\,2}}(1-m)^2+2(1-m)\frac{\sigma_i}{k_i}u_i+u_i^{\,2}\right]m^{\frac{1}{k_i}-1}dm$$

$$=\frac{1}{k_i}\left[\frac{\sigma_i^{\,2}}{k_i^{\,2}}\int_0^1 m^{\frac{1}{k_i}-1}(1-m)^2dm+2\frac{\sigma_i}{k_i}u_i\int_0^1 m^{\frac{1}{k_i}-1}(1-m)dm+u_i^{\,2}\int_0^1 m^{\frac{1}{k_i}-1}dm\right]$$

$$=\frac{1}{k_i}\left[\frac{\sigma_i^{\,2}}{k_i^{\,2}}\int_0^1 m^{\frac{1}{k_i}-1}\left(1-2m+m^2\right)dm+2\frac{\sigma_i}{k_i}u_i\int_0^1 m^{\frac{1}{k_i}-1}(1-m)dm+u_i^{\,2}\int_0^1 m^{\frac{1}{k_i}-1}dm\right]$$

$$=\frac{1}{k_i}\left[\frac{\sigma_i^{\,2}}{k_i^{\,2}}\int_0^1\left(m^{\frac{1}{k_i}-1}-2m^{\frac{1}{k_i}}+m^{\frac{1}{k_i}+1}\right)dm+2\frac{\sigma_i}{k_i}u_i\int_0^1\left(m^{\frac{1}{k_i}-1}-m^{\frac{1}{k_i}}\right)dm+u_i^{\,2}\int_0^1 m^{\frac{1}{k_i}-1}dm\right]$$

$$=\frac{2\sigma_i^2}{(k_i+1)(2k_i+1)}+\frac{2\sigma_i u_i}{(k_i+1)}+u_i^2$$

$$Var\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)=E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)^2-\left[E\left(X_{i,C}^{*(j)}\right)\right]^2$$

$$=\frac{2\sigma_i^2}{(k_i+1)(2k_i+1)}+\frac{2\sigma_i u_i}{(k_i+1)}+u_i^2-\left(\frac{\sigma_i}{k_i+1}+u_i\right)^2$$

$$=\frac{2\sigma_i^2}{(k_i+1)(2k_i+1)}+\frac{2\sigma_i u_i}{(k_i+1)}+u_i^2-\left(\frac{\sigma_i}{k_i+1}\right)^2-2\frac{\sigma_i}{k_i+1}u_i-u_i^2$$

$$=\frac{2\sigma_i^2}{(k_i+1)(2k_i+1)}-\left(\frac{\sigma_i}{k_i+1}\right)^2$$

$$=\frac{\sigma_i^2}{(k_i+1)}\left[\frac{2}{2k_i+1}-\frac{1}{k_i+1}\right]$$

$$=\frac{\sigma_i^2}{(2k_i+1)(k_i+1)^2} \tag{3}$$

Bağımlı İki Değişkenli Pareto Dağılım Fonksiyonu

İki değişkenli pareto dağılımının fonksiyonu FGM dağılımına uygun olarak ele alınabilir. Gösterim kolaylığı açısından $X_1=X_{i,C}^{*(k)}$ $\quad X_2=X_{i,C}^{*(l)}$ yazılacaktır:

$$F_{X_1}(x_1)=1-\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{1/k_1} \qquad f_{X_1}(x_1)=\frac{1}{\sigma_1}\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{\frac{1}{k_1}-1}$$

$$F_{X_2}(x_2)=1-\{1-k_2(x_2-u_2)/\sigma_2\}^{1/k_2}$$

$$f_{X_2}(x_2)=\frac{1}{\sigma_2}\{1-k_2(x_2-u_2)/\sigma_2\}^{\frac{1}{k_2}-1}$$

İki değişkenli FGM dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot\left[1+\alpha\left(1-F_{X_1}(x_1)\right)\cdot\left(1-F_{X_2}(x_2)\right)\right]$$

$$=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)+\alpha\cdot F_{X_1}(x_1)\cdot\left(1-F_{X_1}(x_1)\right)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot\left(1-F_{X_2}(x_2)\right)$$

şeklindedir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1}=F_{X_2}(x_2)\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}+\alpha\cdot F_{X_2}(x_2)(1-F_{X_2}(x_2))\left[\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}-2F_{X_1}(x_1)\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}\right]$$

$$\frac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}\frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2}+\alpha\cdot\left[\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}-2F_{X_1}(x_1)\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}\right]\cdot\left[\frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2}-2F_{X_2}(x_2)\frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}\frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2}+\alpha\cdot\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}[1-2F_{X_1}(x_1)]\frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2}[1-2F_{X_2}(x_2)]$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)+\alpha\cdot f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)[1-2F_{X_1}(x_1)][1-2F_{X_2}(x_2)]$$

olarak bulunur. Burada α, $-1\le\alpha\le 1$ de değerler alabilen bağımlılığı ölçen parametredir ve α=0 olduğunda X_1 ve X_2 rasgele değişkenleri bağımsızdır.

Kovaryans:

$$E(X_1.X_2)=\iint x_1x_2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=\iint x_1x_2\left[f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)+\alpha\cdot f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)[1-2F_{X_1}(x_1)][1-2F_{X_2}(x_2)]\right]dx_1dx_2$$

$$=\iint x_1x_2 f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)dx_1dx_2+\alpha\cdot\iint x_1x_2 f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)[1-2F_{X_1}(x_1)][1-2F_{X_2}(x_2)]dx_1dx_2$$

$$=\int x_1 f_{X_1}(x_1)dx_1\cdot\int x_2 f_{X_2}(x_2)dx_2+\alpha\underbrace{\int x_1 f_{X_1}(x_1)[1-2F_{X_1}(x_1)]dx_1}_{I_1}\cdot\underbrace{\int x_2 f_{X_2}(x_2)[1-2F_{X_2}(x_2)]dx_2}_{I_2}$$

$$=E(X_1)E(X_2)+\alpha I_1 I_2 \qquad (4)$$

$$I_1 = \int_{u_1}^{\frac{\sigma_1}{k_1}+u_1} x_1 \frac{1}{\sigma_1}\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{\frac{1}{k_1}-1}\left(1-2\left[1-\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{\frac{1}{k_1}}\right]\right)dx_1$$

$$= \int_{u_1}^{\frac{\sigma_1}{k_1}+u_1} x_1 \frac{1}{\sigma_1}\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{\frac{1}{k_1}-1}\left(2\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{\frac{1}{k_1}}-1\right)dx_1$$

$$= \int_{u_1}^{\frac{\sigma_1}{k_1}+u_1} 2x_1 \frac{1}{\sigma_1}\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{\frac{2}{k_1}-1}dx_1 - \int_{u_1}^{\frac{\sigma_1}{k_1}+u_1} x_1 \frac{1}{\sigma_1}\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{\frac{1}{k_1}-1}dx_1$$

$\{1-k_1(x_1-u_1)/\sigma_1\}^{\frac{2}{k_1}-1} = m$ **dönüşümü yapılırsa**

$$x_1 = \frac{\sigma_1}{k_1}\left(1-m^{\frac{k_1}{2-k_1}}\right)+u_1$$

$$dx_1 = \left(-\frac{\sigma_1}{2-k_1}\right)m^{2k_1-2}dm$$

Sınırlar

$x_1 = u_1$ **için** $m = 1$

$x_1 = \frac{\sigma_1}{k_1}+u_1$ **için** $m = 0$

bulunur. Bulunanlar yerine yazılırsa;

$$= \frac{2}{2-k_1}\left[\int_0^1\left(\left(1-m^{\frac{k_1}{2-k_1}}\right)\frac{\sigma_1}{k_1}+u_1\right)m^{2k_1-1}dm\right]-E(X_1)$$

$$= \frac{2}{2-k_1}\left[\frac{\sigma_1}{k_1}\int_0^1\left(1-m^{\frac{k_1}{2-k_1}}\right)m^{2k_1-1}dm+u_1\int_0^1 m^{2k_1-1}dm\right]-E(X_1)$$

$$= \frac{2}{2-k_1}\left[\frac{\sigma_1}{k_1}\int_0^1\left(1-m^{\frac{k_1}{2-k_1}}\right)m^{2k_1-1}dm+u_1\int_0^1 m^{2k_1-1}dm\right]-E(X_1)$$

$$=\frac{2}{2-k_1}\left[\frac{\sigma_1}{k_1}\int_0^1\left(m^{2k_1-1}-m^{\frac{(-2k_1^2+6k_1-2)}{2-k_1}}\right)dm+u_1\int_0^1 m^{2k_1-1}dm\right]-E(X_1)$$

$$=\frac{2}{2-k_1}\left[\frac{\sigma_1}{k_1}\left(\frac{1}{2k_1}-\frac{2-k_1}{k_1(5-2k_1)}\right)+u_1\frac{1}{2k_1}\right]-\left(\frac{\sigma_1}{k_1+1}+u_1\right)$$

$$I_1=\frac{1}{k_1(2-k_1)}\left[\frac{\sigma_1}{k_1(5-2k_1)}+u_1\right]-\left(\frac{\sigma_1}{k_1+1}+u_1\right)$$

I_2 de benzer şekilde

$$I_2=\frac{1}{k_2(2-k_2)}\left[\frac{\sigma_2}{k_2(5-2k_2)}+u_2\right]-\left(\frac{\sigma_2}{k_2+1}+u_2\right)$$

bulunur.

$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1.X_2)-E(X_1)E(X_2)$$

(4) eşitliği burda yerine yazılırsa

$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1).E(X_2)+\alpha.I_1.I_2-E(X_1)E(X_2)$$
$$Cov(X_1,X_2)=\alpha.I_1.I_2$$

bulunur. I_1 ve I_2 de yerlerine yazılırsa

$$Cov(X_1,X_2)=\alpha\left[\frac{1}{k_1(2-k_1)}\left[\frac{\sigma_1}{k_1(5-2k_1)}+u_1\right]-\left(\frac{\sigma_1}{k_1+1}+u_1\right)\right]$$
$$\cdot\left[\frac{1}{k_2(2-k_2)}\left[\frac{\sigma_2}{k_2(5-2k_2)}+u_2\right]-\left(\frac{\sigma_2}{k_2+1}+u_2\right)\right] \qquad (5)$$

bulunur.

ÖZGEÇMİŞ

Ankara' da 1978 yılında doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara' da tamamladı. 1995 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü' nden 1999 yılında İstatistikçi ünvanıyla mezun oldu. Ekim 1999' da, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.