

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**MATRİS KATSAYILI FARK DENKLEMLERİ**

**Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLIOĞLU**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2013**

**Her hakkı saklıdır**

## **TEZ ONAYI**

**Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU** tarafından hazırlanan " **MATRİS KATSAYILI FARK DENKLEMLERİ** " adlı tez çalışması 18.06.2013 tarihinde aşağıdaki juri tarafından **oy birliği / oy çokluğu** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** *Prof. Dr. Elgiz BAYRAM*

**Jüri Üyeleri:**

**Başkan:** *Prof. Dr. Ogün DOĞRU*  
*Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

**Üye:** *Prof. Dr. Cihan ORHAN*  
*Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

**Üye:** *Prof. Dr. Elgiz BAYRAM*  
*Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

**Üye:** *Doç. Dr. Esra KIR ARPAT*  
*Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

**Üye:** *Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN*  
*Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

Yukarıdaki sonucu onaylarım

**Prof. Dr. İbrahim DEMİR**  
**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

Doktora Tezi

### MATRİS KATSAYILI FARK DENKLEMLERİ

Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu çalışmada,  $L$  ile  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında

$$(m_1 Y)_n = A_{n-1} Y_{n-1} + B_n Y_n + A_n Y_{n+1}, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

fark ifadesi ve  $Y_0 = 0$  sınır koşulu tarafından üretilen fark operatörü gösterilecektir. Burada  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ,  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbb{C}^m$  uzayından alınan selfadjoint matris diziler ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\det A_n \neq 0$  dır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral analizin temel tanımları ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı önemli teoremler verilmiştir.

Orjinal sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde  $L$  operatörünün polinom türden Jost çözümü verilmiş, bu çözümün analitiklik özellikleri ve asimptotik davranışları incelenmiştir. Ayrıca  $L$  operatörünün sürekli spektrumu ve özdeğerlerinin özelliklerini elde edilmiştir.

Son bölüm de iki kısımdan oluşmuştur. Bu bölümde ise matris katsayılı selfadjoint diskret Dirac operatörünün polinom türden Jost çözümü verilmiştir. Bu çözümün analitiklik özellikleri ve asimptotik davranışları incelenmiştir. Daha sonra diskret Dirac operatörünün özdeğerlerinin özelliklerini ve sürekli spektrumu elde edilmiştir.

**Haziran 2013 , 51 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Spektral analiz, özdeğer, fark operatörleri, sürekli spektrum, Jost çözümü.

## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

DIFFERENCE EQUATIONS WITH MATRIX COEFFICIENTS

Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

In this study, we denote the operator in  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  defined by difference expression

$$(m_1 Y)_n = A_{n-1} Y_{n-1} + B_n Y_n + A_n Y_{n+1}, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

and the boundary condition  $Y_0 = 0$  by  $L$ , where  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ,  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  are self-adjoint matrix sequences acting in  $\mathbb{C}^m$  and  $\det A_n \neq 0$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions of spectral analysis and some important theorems which are used in other sections are given.

Original results are contained in third and fourth chapters.

The third chapter consists of two sections. The polynomial type Jost solution of the operator  $L$  is given, its analytical properties and asymptotic behaviour are also investigated. Furthermore, the continuous spectrum and the properties of eigenvalues of the operator  $L$  are examined.

The last chapter consists of two sections, too. The polynomial type Jost solution of the selfadjoint discrete Dirac operator with matrix coefficient is given. Its asymptotic behaviour and analytical properties are investigated. Then the properties of eigenvalues and the continuous spectrum of discrete Dirac operator are examined.

**June 2013 , 51 pages**

**Key Words:** Spectral analysis, eigenvalue, difference operators, continuous spectrum, Jost solution.

## **TEŞEKKÜR**

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her aşamasında görüş ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Araştırmalarım süresince bilgilerinden ve önerilerinden yararlandığım değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve Sayın Doç. Dr. Esra KIR ARPAT (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez " TÜBİTAK -Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Doktora yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a da teşekkür ederim.

Ayrıca manevi desteği ile beni bilimsel çalışmalara yönlendiren, gösterdiği fedakarlıklarla hep yanımada olan eşime ve aileme en içten sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

**Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU**  
**Ankara, Haziran 2013**

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
SİMGELER DİZİNİ .....	v
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	6
3. İKİNCİ MERTEBEDEN MATRİS KATSAYILI FARK OPERATÖRUNÜN SPEKTRAL ANALİZİ.....	8
3.1 Jost Çözümü .....	9
3.2 $L$ Operatörünün Sürekli ve Diskre Spektrumu .....	17
4. MATRİS KATSAYILI DİSKRET DİRAC OPERATÖRUNÜN SPEKTRAL ANALİZİ .....	25
4.1 $L_3$ Dirac Operatörünün Jost Çözümü .....	26
4.2 $L_3$ Operatörünün Sürekli ve Diskre Spektrumu .....	39
KAYNAKLAR .....	48
ÖZGEÇMIŞ.....	51

## SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^m$	$m$ -boyutlu Kompleks Euclid uzayı
$l_2(\mathbb{N})$	$\left\{ y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \ y\ ^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}}  y_n ^2 < \infty \right\}$
$l_2(\mathbb{Z})$	$\left\{ y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \ y\ ^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}}  y_n ^2 < \infty \right\}$
$L_2(\mathbb{R}_+)$	$\left\{ f : f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}, \int_0^\infty  f(x) ^2 dx < \infty \right\}$
$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$	$\left\{ x_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} : \sum_{n=1}^{\infty} \ x_n\ _{\mathbb{C}^2}^2 < \infty \right\}$
$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$	$\left\{ y = \{y_n\} : y_n \in \mathbb{C}^m, n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} \ y_n\ _{\mathbb{C}^m}^2 < \infty \right\}$
$L^*$	$L$ operatörünün adjoint operatörü
$D(L)$	$L$ operatörünün tanım kümesi
$\sigma_d(L)$	$L$ operatörünün diskret (nokta) spektrumu
$\sigma_c(L)$	$L$ operatörünün sürekli spektrumu
$R_\lambda(L)$	$L$ operatörünün resolvent operatörü
$\lfloor x \rfloor$	$x$ reel sayısının tam değeri
$o(1)$	Sonsuz küçük değerler
$\det A$	$A$ matrisinin determinantı

## 1. GİRİŞ

Matematiksel fiziğin, kuantum mekaniğinin ve uygulamalı matematiğin birçok problemi çözümünde diferensiyel denklemlerin ve diferensiyel operatörlerin spektral analizi kullanılmaktadır. Bu nedenle Sturm-Liouville, Dirac, Schrödinger ve Klein-Gordon diferensiyel denklemleri yardımıyla elde edilen diferensiyel operatörlerin spektral analizi matematikçilerin araştırma konusu olmuştur. Kuantum mekaniğindeki gelişmelerle birlikte bilimadamları, önce sınırsız aralıkta tanımlı selfadjoint diferensiyel operatörlerin spektral analizi daha sonra non-selfadjoint diferensiyel operatörlerin spektral analizi ile ilgilenmişlerdir. Bu konuda dikkat çekici ilk gelişme 1951 yılında Keldys tarafından regüler non-selfadjoint diferensiyel operatörlerin spektral analizinin incelenmesiyle elde edilmiştir.

Sınırsız aralıkta tanımlı singüler non-selfadjoint diferensiyel operatörlerin spektral analizinin incelenmesine 1960 yılında ilk olarak Naimark tarafından başlanmıştır. Bu çalışmada spektrumun sürekli ve diskre spektrumlardan olduğu gösterilmiştir. Daha sonra sürekli spektrumun üzerinde spektral tekiliklerin bulunduğu ispatlanmıştır. Ayrıca spektral tekiliklerin resolvent operatörün çekirdeğinin kutupları olduğu, sürekli spektrumda bulunduğu fakat operatörün özdeğeri olmadığı da elde edilmiştir.

Krall (1965) tarafından,  $K$  ve  $q \in L^2(\mathbb{R}_+)$  kompleks değerli birer fonksiyon;  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq x < \infty$$

diferensiyel ifadesi ve

$$\alpha y'(0) - \beta y(0) + \int_0^\infty K(x)y(x)dx = 0$$

sınır koşulu ile  $L^2(\mathbb{R}_+)$  uzayında üretilen non-selfadjoint  $L_1$  operatörünün spektral analizi ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu çalışmada  $L_1$  operatörünün  $L_1^*$  adjoint

operatörü elde edilmiş,  $L_1$  ve  $L_1^*$  operatörlerinin özfonsiyonları cinsinden açılımları bulunmuştur.

Mühendislik, ekonomi ve diğer alanların problemleri için yapılan modelleme çalışmalarındaki gelişmelerle fark operatörlerinin spektral analizi önem kazanmıştır.

Guseinov (1976),  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  reel terimli diziler ve her  $n \in \mathbb{Z}$  için  $a_n > 0$  olmak üzere,  $l_2(\mathbb{Z})$  uzayında

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

fark denklemi ve

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| (|1 - a_n| + |b_n|) < \infty \quad (1.2)$$

sınır koşulu tarafından üretilen selfadjoint diskret operatörünün spektrumunun, sürekli spektrum ve özdeğerlerden oluştuğunu ispatlamış ve (1.1) fark denklemi için saçılım teorisinin ters problemini incelemiştir.

Bairamov ve Çelebi (1999) tarafından yapılan çalışmada,  $(p_n)$  ve  $(q_n)$  kompleks terimli diziler ve  $\lambda$  bir spektral parametre olmak üzere  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$  uzayında,

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ y_{n-1}^{(1)} - y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases} \quad (1.3)$$

denklem sistemi ve  $y_0^{(1)} = 0$  sınır koşulu yardımı ile üretilen Dirac operatörünün

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} [(|p_n| + |q_n|) \exp(\varepsilon \sqrt{n})] < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

koşulu altında sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekiliklere sahip olduğu gösterilerek, bu operatör için bir spektral açılım verilmiştir.

Bairamov vd. (2001),  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  kompleks terimli diziler ve  $a_0 = 1$  olmak üzere  $l_2(\mathbb{N})$

uzayında,

$$a_{n-1}y_{n-1} - b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n , n \in \mathbb{N}$$

fark denklemi ve

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} h_n y_n = 0$$

sınır koşulu yardımcı ile üretilen non-selfadjoint diskret operatörün özdeğerlerinin, spektral tekiliklerinin ve bunların katlarının sonlu olduğunu ispatlamışlardır. Bu ispatı yaparken  $2\pi$  periyotlu analitik fonksiyonlar için verdikleri, Şeritte Birebirlik Teoreminden yararlanmıştır.

Adıvar ve Bairamov (2001),  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  kompleks terimli diziler ve her  $n \in \mathbb{Z}$  için  $a_n \neq 0$  olmak üzere,  $l_2(\mathbb{Z})$  uzayında (1.1) fark denklemi ve (1.2) sınır koşulu tarafından üretilen non-selfadjoint diskret Schrödinger operatörünün spektrumunu, özdeğerlerini, spektral tekiliklerini ve spektral tekiliklere karşılık gelen esas fonksiyonlarını elde ederek bunların özelliklerini incelemiştir. Ayrıca benzer problemleri  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  kompleks terimli diziler olmak üzere, (1.3) denklem sistemi tarafından  $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$  uzayında üretilen non-selfadjoint diskret Dirac operatörü için incelemiştir.

Gestezy vd. (2002), matris değerli Schrödinger, Jacobi ve Dirac operatörlerinin spektral teorisini incelemiştir.

Bairamov ve Coskun (2005), Birinci mertebeden non-selfadjoint fark denklemler sisteminin diskre spektrumunun yapısını, analitik fonksiyonlar için verilen Teklik Teoremlerini kullanarak incelemiştir. Ayrıca diskre spektrumunun sonluluğu için gerek ve yeter koşulları elde etmişlerdir.

Bairamov ve Koprubasi (2010),  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(p_n)$  ve  $(q_n)$  kompleks terimli diziler, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$  vektör değerli dizi,  $a_n \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$  ve  $i = 0, 1$  için  $\gamma_i, \beta_i \in \mathbb{C}$

olmak üzere birinci mertebeden non-selfadjoint fark denklemleri sistemi için

$$\begin{cases} a_n y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ a_{n-1} y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1 \lambda) y_1^{(2)} + (\beta_0 + \beta_1 \lambda) y_0^{(1)} = 0, \quad \gamma_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0 \neq 0, \quad \gamma_1 \neq a_0^{-1} \beta_0$$

sınır değer problemini ele almışlar ve sınır koşulunda spektral parametre bulunduran bu problemin spektrumunun, özdeğerlerinin, spektral tekiliklerinin yapısal özelliklerini incelemiştir.

Göründüğü gibi literatürde birinci ve ikinci mertebeden hem selfadjoint hem non-selfadjoint skaler katsayılı fark denklemlerinin spektral teorisi detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Ayrıca Sturm-Liouville ve Dirac matris katsayılı diferensiyel denklemlerinin spektral teorisi de incelenmiştir. Fakat matris katsayılı fark denklemlerinin spektral teorisi hakkında yeterince çalışma bulunmamaktadır.

Bu nedenlerden dolayı bu doktora tezinde  $\mathbb{C}^m$ ,  $m$ -boyutlu kompleks Euclid uzayı ( $m < \infty$ ),  $\lambda$  kompleks parametre,  $\{A_n\}; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ve  $\{B_n\}; n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{C}^m$  uzayından alınan  $m \times m$  tipinde selfadjoint matris diziler olmak üzere ikinci mertebeden

$$A_{n-1} Y_{n-1} + B_n Y_n + A_n Y_{n+1} = \lambda Y_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

matris fark denklemi her  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $\det A_n \neq 0$  olmak üzere ele alınıp, belli koşullar altında bu denklemin polinom türden Jost çözümü elde edilecektir. Daha sonra bu çözümün analitiklik özellikleri ile asimptotik davranışları inceleneciktir.

Ayrıca  $\{Y_n\} \in \mathbb{C}^m$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Y_n\|_{\mathbb{C}^m}^2 < \infty$$

koşulunu gerçekleyen tüm  $Y = \{Y_n\}$  dizilerinin Hilbert uzayı  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  ile gösterilsin.  $Y = \{Y_n\}, Z = \{Z_n\} \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  için

$$\|Y\|_{\mathbb{C}^m} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|Y_n\|_{\mathbb{C}^m}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ ve } \langle Y, Z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n, Z_n)_{\mathbb{C}^m}$$

sırası ile bu uzayda norm ve iç çarpım olarak tanımlanır.  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında

$$(m_1 Y)_n = A_{n-1} Y_{n-1} + B_n Y_n + A_n Y_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

fark ifadesi ve  $Y_0 = 0$  sınır koşuluyla tanımlanan  $L$  operatörünün sürekli ve diskre spektrumu incelenenecektir.

Bunlara ek olarak benzer problemler  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ,  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathbb{C}^m$  uzayından alınan  $m \times m$  tipinde selfadjoint matris diziler,  $\lambda$  kompleks parametre, her  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $\det A_n \neq 0$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\det B_n \neq 0$  olmak üzere

$$\begin{cases} A_n y_{n+1}^{(2)} + B_n y_n^{(2)} + P_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ A_{n-1} y_{n-1}^{(1)} + B_n y_n^{(1)} + Q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases}, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

birinci dereceden matris katsayılı fark denklemler sistemi için ele alınacaktır.

Burada  $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$  bir vektör dizisidir.  $y_n^{(i)} \in \mathbb{C}^m$ ,  $i = 1, 2$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere tüm  $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$  vektör dizilerini içeren Hilbert uzayı  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  ile gösterilsin. Bu uzaydaki norm ve iç çarpım  $y, z \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  için

$$\|y\|_{l_2}^2 : = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \|y_n^{(1)}\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \|y_n^{(2)}\|_{\mathbb{C}^m}^2 \right)$$

$$\langle y, z \rangle_{l_2} : = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (y_n^{(1)}, z_n^{(1)})_{\mathbb{C}^m} + (y_n^{(2)}, z_n^{(2)})_{\mathbb{C}^m} \right]$$

şeklinde tanımlanır.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, ileride ihtiyaç duyulacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1 (*Resolvent Operatör*)**  $X \neq \{0\}$  kompleks normlu bir uzay  $T : D(T) \subset X \rightarrow X$  lineer bir operatör olsun.  $\lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$  operatörüne  $T$  operatörünün resolvent operatörü ya da kısaca resolventi denir (Lusternik ve Sobolev 1968).

**Tanım 2.2 (*Resolvent Küme, Spektrum*)**  $R_\lambda(T)$  operatörü mevcut, sınırlı ve tanım cümlesi  $X$  uzayında yoğun ise,  $\lambda \in \mathbb{C}$  sayısına  $T$  operatörünün regüler değeri denir.  $T$  operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye  $T$  operatörünün resolvent kümesi, resolvent kümenin kompleks sayılar kümesine göre tümleyenine ise  $T$  operatörünün spektrumu adı verilir, sırasıyla  $\rho(T)$  ve  $\sigma(T)$  ile gösterilir (Lusternik ve Sobolev 1968).

**Tanım 2.3 (*Diskret Spektrum*)**  $R_\lambda(T)$  mevcut olmayacak şekildeki  $\lambda$  kompleks sayılarının kümesine  $T$  operatörünün diskret spektrumu ya da nokta spektrumu adı verilir ve  $\sigma_d(T)$  ile gösterilir (Lusternik ve Sobolev 1968).

**Tanım 2.4 (*Sürekli Spektrum*)**  $R_\lambda(T)$  mevcut, sınırsız ve  $R_\lambda(T)$  operatörünün tanım kümesi  $X$  uzayında yoğun olacak şekildeki  $\lambda$  kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye  $T$  operatörünün sürekli spektrumu denir ve  $\sigma_c(T)$  ile gösterilir (Lusternik ve Sobolev 1968).

**Tanım 2.5 (*Özdeğer, Özfonksiyon*)**  $X$  bir kompleks vektör uzay ve  $T : X \rightarrow X$  lineer bir operatör olsun.  $\lambda$  kompleks sayısı için  $Tx = \lambda x$  denkleminin aşikar olmayan bir  $x \in X$  çözümü varsa  $\lambda$  sayısına  $T$  operatörünün özdeğeri denir. Bu  $x$  çözümüne ise  $T$  operatörünün  $\lambda$  özdeğeriye karşılık gelen özfonksiyonu adı verilir (Lusternik ve Sobolev 1968).

**Teorem 2.1 ( $l_2$  uzayında Kompaklık Kriteri)**  $M \subset l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  sınırlı bir küme olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  ve her  $Y = \{Y_n\} \in M$  için  $n > N_0$  oldukça  $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|Y_i\|^2 < \varepsilon^2$  sağlanacak şekilde en az bir  $N_0(\varepsilon) > 0$  sayısı varsa  $M$  kompakttır (Lusternik ve Sobolev 1968).

**Teorem 2.2 (Wehyl Kompakt Perturbasyon Teoremi)**  $A$  selfadjoint ve  $B$  kompakt bir operatör olmak üzere  $T = A + B$  ise bu durumda  $\sigma_c(T) = \sigma_c(A)$  eşitliği sağlanır (Glazman 1965).

**Teorem 2.3** Bir selfadjoint  $A$  operatörünün spektrumunun verilen bir  $\lambda$  reel sayısının solunda sonlu küme belirtmesi için gerek ve yeter koşul

$$\forall f \in D(A) \cap F \text{ için } \langle Af - \lambda f, f \rangle > 0$$

sağlayan sonlu boyutlu bir  $F$  alt uzayının olmasıdır (Glazman 1965).

**Teorem 2.4**  $A(\lambda)$  bir  $D$  bölgesinin içinde analitik, bölgenin sınırında sürekli ve  $D$  bölgesindeki her  $\lambda$  için kompakt bir operatör olsun. Bu durumda

i)  $D$  bölgesinde sonlu veya sayılabilir noktanın dışında

$$I - A(\lambda)$$

operatörünün tersi vardır.

ii) Tersinin olmadığı noktalar sonsuz çoklukta olduğunda tek limit noktası bölgein sınırındadır.

iii) Tersinin olmadığı noktaların mertebesi sonludur.

iv) Tersinin olduğu noktalarda  $B(\lambda)$ , her bir  $\lambda$  için kompakt analitik fonksiyon olmak üzere

$$[I - A(\lambda)]^{-1} = I + B(\lambda)$$

sağlanır (Keldys 1951).

### 3. İKİNCİ MERTEBEDEN MATRİS KATSAYILI FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Bu bölümde matris katsayılı fark denklemi tanımlanacak, daha sonra denklemin çözümü, bu çözümün asimptotik davranışları ve fark denklemi yardımıyla üretilen operatörün özdeğerleri ile sürekli spektrumu incelenecaktır.

$\mathbb{C}^m$ ,  $m$ -boyutlu kompleks Euclid uzayı ( $m < \infty$ ),  $\lambda$  kompleks parametre,  $\{A_n\}$ ;  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ve  $\{B_n\}; n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{C}^m$  uzayında tanımlı  $m \times m$  tipinde selfadjoint matris diziler olmak üzere, ikinci mertebeden

$$A_{n-1}Y_{n-1} + B_nY_n + A_nY_{n+1} = \lambda Y_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

matris fark denklemini göz önüne alalım.

$\|Y\|_{\mathbb{C}^m}$ ,  $\mathbb{C}^m$  uzayındaki  $Y$  vektörünün normu olmak üzere  $Y := \{Y_n\} \in \mathbb{C}^m$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Y_n\|_{\mathbb{C}^m}^2 < \infty$$

koşulunu gerçekleyen tüm  $Y = \{Y_n\}$  dizilerinin Hilbert uzayı  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  ile gösterilsin.  $Y = \{Y_n\}$ ,  $Z = \{Z_n\} \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  için bu uzayda norm ve iç çarpım sırasıyla

$$\|Y\|_{\mathbb{C}^m}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Y_n\|_{\mathbb{C}^m}^2 \text{ ve } \langle Y, Z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n, Z_n)_{\mathbb{C}^m}$$

ile tanımlanır. Burada  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$  ve  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}^m}$  sırasıyla  $\mathbb{C}^m$  uzayındaki norm ve iç çarpımı göstermektedir.

$L$  ile,  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında

$$(m_1 Y)_n = A_{n-1}Y_{n-1} + B_nY_n + A_nY_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

diferensiyel ifadesi ve  $Y_0 = 0$  sınır koşuluyla üretilen operatörü gösterilsin.

### 3.1 Jost Çözümü

$\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , matris dizilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\|I - A_n\| + \|B_n\|) < \infty \quad (3.2)$$

koşulunu gerçeklediğini ve  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $\det A_n \neq 0$  olduğunu kabul edeceğiz.

Burada  $\|\cdot\|$ ,  $\mathbb{C}^m$  uzayındaki matris normu ve  $I$  birim matrisi göstermektedir.

$\lambda = z + z^{-1}$  için

$$A_{n-1}Y_{n-1} + B_nY_n + A_nY_{n+1} = (z + z^{-1})Y_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

denkleminin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(z) z^{-n} = I, \quad z \in D_0 := \{z : |z| = 1\} \quad (3.4)$$

koşulunu sağlayan matris çözümü  $E(z) := \{E_n(z)\}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ile gösterilsin.

$E(z) := \{E_n(z)\}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , çözümüne (3.1) fark denkleminin Jost çözümü denir.

**Teorem 3.1** (3.2) koşulu altında  $E(z)$  çözümü mevcuttur ve

$$E_n(z) = z^n I + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^{k-n} - z^{n-k}}{z - z^{-1}} [(I - A_{k-1})E_{k-1}(z) - B_k E_k(z) + (I - A_k)E_{k+1}(z)] \quad (3.5)$$

eşitliğini sağlar.

**İspat.** (3.3) denklemi

$$Y_{n-1} + Y_{n+1} - (z + z^{-1})Y_n = (I - A_{n-1})Y_{n-1} - B_nY_n + (I - A_n)Y_{n+1}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$(I - A_{n-1})Y_{n-1} - B_nY_n + (I - A_n)Y_{n+1} = F_n$$

olmak üzere

$$Y_{n-1} + Y_{n+1} - (z + z^{-1})Y_n = F_n \quad (3.6)$$

yazılır. (3.6) homogen olmayan fark denklemine parametrelerin değişim metodu uygulanabilir. (3.6) denkleminin homogen kısmı  $Y_{n-1} + Y_{n+1} - (z + z^{-1})Y_n = 0$  olup

bu denklemin bağımsız iki çözümü  $Y_n^{(1)} = z^n I$  ve  $Y_n^{(2)} = z^{-n} I$  olduğundan homogen denklemin genel çözümü  $\tilde{Y}_n = Cz^n + Dz^{-n}$  şeklinde bağımsız çözümlerin kombinasyonları olarak yazılır. Dolayısıyla (3.6) denkleminin genel çözümü

$$Y_n = C_n z^n + D_n z^{-n}$$

şeklindedir. Buradan  $Y_n - Y_{n-1} = C_n z^n + D_n z^{-n} - C_{n-1} z^{n-1} - D_{n-1} z^{-(n-1)}$  yazılır. Son eşitlige  $C_{n-1} z^n + D_{n-1} z^{-n}$  ekleyip çıkarıldığında

$$\begin{aligned} Y_n - Y_{n-1} &= (C_n - C_{n-1}) z^n + (D_n - D_{n-1}) z^{-n} + C_{n-1} z^n \\ &\quad + D_{n-1} z^{-n} - C_{n-1} z^{n-1} - D_{n-1} z^{-(n-1)} \end{aligned}$$

bulunur. Parametrelerin değişim metodu gereğince

$$(C_n - C_{n-1}) z^n + (D_n - D_{n-1}) z^{-n} = 0 \quad (3.7)$$

olmak üzere

$$Y_n - Y_{n-1} = C_{n-1} (z^n - z^{n-1}) + D_{n-1} (z^{-n} - z^{-(n-1)}) \quad (3.8)$$

yazılır. (3.8) eşitliğinden

$$Y_{n+1} - Y_n = C_n (z^{n+1} - z^n) + D_n (z^{-(n+1)} - z^{-n}) \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.8) ve (3.9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} Y_{n+1} + Y_{n-1} &= 2Y_n + C_n (z^{n+1} - z^n) - C_{n-1} (z^n - z^{n-1}) \\ &\quad + D_n (z^{-(n+1)} - z^{-n}) - D_{n-1} (z^{-n} - z^{-(n-1)}) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} Y_{n+1} + Y_{n-1} &= 2(C_n z^n + D_n z^{-n}) + C_n (z^{n+1} - z^n) - C_{n-1} (z^n - z^{n-1}) \\ &\quad + D_n (z^{-(n+1)} - z^{-n}) - D_{n-1} (z^{-n} - z^{-(n-1)}) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte (3.7) kabulü dikkate alınarak

$$Y_{n+1} + Y_{n-1} = C_{n-1} z^{n-1} + C_n z^{n+1} + D_{n-1} z^{-(n-1)} + D_n z^{-(n+1)}$$

yazılır. Bu ifade (3.6) denkleminde yerine yazıldığında

$$(C_{n-1} - C_n) z^{n-1} + (D_{n-1} - D_n) z^{-n+1} = F_n \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.10) denklemleri ortak çözüülerek

$$D_n - D_{n-1} = -\frac{F_n z^n}{z - z^{-1}} \text{ ve } C_n - C_{n-1} = \frac{F_n z^{-n}}{z - z^{-1}}$$

veya

$$D_{n+1} - D_n = -\frac{F_{n+1} z^{n+1}}{z - z^{-1}} \text{ ve } C_{n+1} - C_n = \frac{F_{n+1} z^{-(n+1)}}{z - z^{-1}}$$

olarak bulunur. Buradan her iki eşitliğe iterasyon uygulanarak

$$C_m - C_n = \sum_{k=n+1}^m \frac{F_k z^{-k}}{z - z^{-1}} \quad (3.11)$$

ve

$$D_m - D_n = - \sum_{k=n+1}^m \frac{F_k z^k}{z - z^{-1}} \quad (3.12)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.11) ve (3.12) eşitliklerinden  $m \rightarrow \infty$  için limit alındığında

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_m - C_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k z^{-k}}{z - z^{-1}} \quad (3.13)$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_m - D_n = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k z^k}{z - z^{-1}} \quad (3.14)$$

yazılır. (3.12) ve (3.13) eşitliklerinin sağ kısmındaki seriler (3.2) koşulundan dolayı yakınsak olduğundan  $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m$  ve  $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m$  limitleri de sonlu olmalıdır. Dolayısıyla  $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = \alpha$  ve  $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m = \beta$  olacak şekilde  $\mathbb{C}^m$  uzayından olan sonlu  $\alpha, \beta$  matrisleri vardır. Buradan ise

$$C_n = \alpha - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k z^{-k}}{z - z^{-1}} \text{ ve } D_n = \beta + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k z^k}{z - z^{-1}}$$

olarak bulunur.  $C_n$  ve  $D_n$  ifadeleri kullanılarak (3.6) denklemının  $Y_n(z)$  genel çözümü

$$Y_n(z) = \alpha z^n + \beta z^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^{k-n} - z^{n-k}}{z - z^{-1}} F_k \quad (3.15)$$

biçiminde elde edilir. (3.15) çözümünde  $F_k$  açık biçimde yazıldığında

$$Y_n(z) = \alpha z^n + \beta z^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^{k-n} - z^{n-k}}{z - z^{-1}} [(I - A_{k-1}) Y_{k-1} - B_n Y_k + (I - A_k) Y_{k+1}] \quad (3.16)$$

eşitliği bulunur. (3.16) eşitliği sağdan  $z^{-n}$  ile çarpılıp  $n \rightarrow \infty$  için limit alındığında  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(z) z^{-n} = I$ ,  $z \in D_0$  koşulunun sağlanması için  $\alpha = I$ ,  $\beta = 0$  olmalıdır. Dolayısıyla koşulu sağlayan  $E(z)$  matris çözümünün (3.5) eşitliğini sağladığını görür. ■

**Teorem 3.2**  $\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , matris dizilerinin gerçeklediği (3.2) koşulu altında  $E(z) = \{E_n(z)\}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , Jost çözümü

$$E_n(z) = T_n z^n \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right]; \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad z \in D_0 \quad (3.17)$$

gösterimine sahiptir. Burada  $T_n$  ve  $K_{nm}$  matrisleri  $\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$  dizileriyle ifade edilir.

**İspat.** (3.17) eşitliğiyle verilen  $E_n(z)$  çözümü (3.3) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & A_{n-1} \left\{ T_{n-1} z^{n-1} \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n-1,m} z^m \right] \right\} + B_n \left\{ T_n z^n \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right] \right\} \\ & + A_n \left\{ T_{n+1} z^{n+1} \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n+1,m} z^m \right] \right\} \\ = & (z + z^{-1}) \left\{ T_n z^n \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right] \right\} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & A_{n-1} \left\{ T_{n-1} z^{n-1} \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n-1,m} z^m \right] \right\} + B_n \left\{ T_n z^n \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right] \right\} \\ & + A_n \left\{ T_{n+1} z^{n+1} \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n+1,m} z^m \right] \right\} \\ = & T_n z^{n+1} \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right] + T_n z^{n-1} \left[ I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte terimlerin katsayıları karşılaştırıldığında,  $z^{n-1}$  teriminin katsayıısından  $A_{n-1}T_{n-1} = T_n$  bulunur. Buradan

$$T_n = \prod_{p=n}^{\infty} A_p^{-1} \quad (3.18)$$

olarak elde edilir.  $z^n$  teriminin katsayıısından ise

$$A_{n-1}T_{n-1}K_{n-1,1} + B_nT_n = T_nK_{n1}$$

eşitliği yazılır.  $A_{n-1} = T_nT_{n-1}^{-1}$  olduğu kullanılarak

$$K_{n-1,1} - K_{n1} = -T_n^{-1}B_nT_n$$

bulunur. Buradan iterasyonla

$$K_{n1} = - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1}B_pT_p \quad (3.19)$$

olarak elde edilir.  $z^{n+1}$  teriminin katsayıısından

$$K_{n2} = - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1}B_pT_pK_{p1} + \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1}(I - A_p^2)T_p \quad (3.20)$$

bulunur. Son olarak  $z^{m+n+1}$  teriminin katsayıısından ise

$$\begin{aligned} K_{n,m+2} &= \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1}(I - A_p^2)T_pK_{p+1,m} + K_{n+1,m} \\ &\quad - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1}B_pT_pK_{p,m+1}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.21)$$

olarak bulunur. ■

(3.2) koşulundan dolayı  $T_n$  ve  $K_{nm}$  tanımlarındaki sonsuz çarpım ve seriler mutlak yakınsaktır.

**Teorem 3.3** Her  $n, m \in \mathbb{N}$  için  $\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$  matris dizilerinin gerçeklediği (3.2) koşulu altında

$$\|K_{nm}\| \leq C \sum_{p=n+\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada  $C > 0$  bir sabit,  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  ise  $\frac{m}{2}$  sayısının tam kismıdır.

**İspat.** (3.19)- (3.21) kullanılarak istenilen eşitsizlik aşağıdaki gibi tümevarım yöntemiyle elde edilir.  $m = 1$  için

$$\|K_{n1}\| = \left\| - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p \right\| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \|T_p^{-1} B_p T_p\| = \sum_{p=n+1}^{\infty} \|T_p^{-1}\| \|B_p\| \|T_p\|$$

yazılır.  $\|T_p\|$  ve  $\|T_p^{-1}\|$  sonlu olduğundan

$$\|K_{n1}\| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_p\| \leq C \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|) \leq C \sum_{p=n}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|)$$

elde edilir.

$m = k$  için

$$\|K_{nk}\| \leq C \sum_{p=n+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|)$$

olsun. Bundan yararlanarak ve kabul kullanılarak

$$\begin{aligned} \|K_{n,k+1}\| &= \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} (I - A_p^2) T_p K_{p+1,k-1} - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p K_{pk} + K_{n+1,k-1} \right\| \\ &\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \|T_p^{-1}\| \|I - A_p^2\| \|T_p\| \|K_{p+1,k-1}\| + \sum_{p=n+1}^{\infty} \|T_p^{-1}\| \|B_p\| \|T_p\| \|K_{pk}\| \\ &\quad + \|K_{n+1,k-1}\| \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \|K_{n,k+1}\| &\leq C \sum_{p=n+1}^{\infty} \|I - A_p^2\| \sum_{s=p+1+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) \\ &\quad + \|K_{n+1,k-1}\| + C \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) \\ &\leq \|K_{n+1,k-1}\| + C \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|I - A_p^2\| + \|B_p\|) \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $\|I - A_p^2\| + \|B_p\| = H_p$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \|K_{n,k+1}\| &\leq C \left\{ \begin{array}{l} H_{n+1} \sum_{s=n+1+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) \\ + H_{n+2} \sum_{s=n+2+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) + \dots \end{array} \right\} \\ &\quad + C \sum_{p=n+1+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|) \end{aligned}$$

yazılacağından

$$\begin{aligned} \|K_{n,k+1}\| &\leq C \left\{ \begin{array}{l} H_{n+1} \sum_{s=n+\lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) \\ + H_{n+2} \sum_{s=n+\lfloor \frac{k+4}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) + \dots \end{array} \right\} \\ &\quad + C \sum_{p=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|) \end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizlikten ise istenilen eşitsizlik olan

$$\begin{aligned} \|K_{n,k+1}\| &\leq C \sum_{p=n+1}^{\infty} H_p \sum_{s=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) + C \sum_{p=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|) \\ &= C \left\{ \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|I - A_p^2\| + \|B_p\|) \sum_{s=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) \right\} \\ &\quad + C \sum_{p=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|) \\ &\leq C_1 \sum_{s=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_s\| + \|B_s\|) \\ &\quad + C \sum_{p=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|) \\ &= D \sum_{p=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $C, C_1$  ve  $D$  pozitif sabitlerdir. ■

Şimdi (3.2) koşulunu biraz daha kuvvetlendirip  $\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  matris dizilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (\|I - A_n\| + \|B_n\|) < \infty \quad (3.22)$$

koşulunu sağladığını kabul edelim.

Teorem 3.3 ve (3.22) koşulu gereğince  $E_n(z)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , çözümü  $D_0$  kümesinden  $\{z : |z| < 1\} \setminus \{0\}$  kümesine analitik devama sahiptir.

**Teorem 3.4** *Jost çözümü (3.22) koşulu altında  $z \in D := \{z : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}$  olmak üzere*

$$E_n(z) = z^n [I + o(1)], \quad n \rightarrow \infty$$

*asimptotik eşitliğini gerçekler.*

**İspat.**  $T_n = \prod_{p=n}^{\infty} A_p^{-1} < \infty$  olduğundan ve yakınsak çarpımın kalan teriminin limiti  $I$  olacağından  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = I$  bulunur. Dolayısıyla  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - I\| = 0$  yazılır.  
Ayrıca  $\forall z \in D$  için Teorem (3.3) kullanılarak

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right\| \leq C \sum_{p=n}^{\infty} p (\|I - A_p\| + \|B_p\|)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte  $n \rightarrow \infty$  için limit alındığında (3.22) koşulundan dolayı sağ taraf sıfır gider ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m = o(1), \quad z \in D, \quad n \rightarrow \infty$$

bulunur. Dolayısıyla  $E_n(z)$  matris çözümü

$$E_n(z) = z^n [I + o(1)], \quad z \in D, \quad n \rightarrow \infty$$

asimptotигini gerçekler. ■

### 3.2 $L$ Operatörünün Sürekli ve Diskre Spektrumu

$L$  operatörünü aşağıdaki sonsuz Jacobi matrisi ile tanımlayabiliriz.

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ A_1 & B_2 & A_2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & A_2 & B_3 & A_3 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Burada  $0, \mathbb{C}^m$  uzayındaki sıfır operatördür.

$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında

$$(m_0 Y)_n = Y_{n-1} + Y_{n+1}$$

ile

$$(m_2 Y)_n = (A_{n-1} - I) Y_{n-1} + B_n Y_n + (A_n - I) Y_{n+1}$$

diferensinel ifadeleri ve

$$Y_0 = 0$$

sınır koşuluyla üretilen operatörler sırasıyla  $J_0$  ve  $J_1$  ile gösterilsin.

Bu operatörler ise sırasıyla aşağıdaki Jacobi matrisleri ile eşleştirilir.

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \dots & \dots \\ I & 0 & I & 0 & \dots & \dots \\ 0 & I & 0 & I & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 - I & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ A_1 - I & B_2 & A_2 - I & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & A_2 - I & B_3 & A_3 - I & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Buradan  $L = J_0 + J_1$  yazılabilir.

**Lemma 3.1**  $J_0$  operatörü selfadjointtir.

**İspat.**  $J_0$  operatörünün selfadjoint olduğunu göstermek için  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayından alınan herhangi  $U = \{U_n\}$  ve  $Z = \{Z_n\}$  matris dizileri için

$$\langle (J_0 U)_n, Z_n \rangle = \langle U_n, (J_0 Z)_n \rangle$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\langle (J_0 U)_n, Z_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^* (J_0 U)_n = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^* (U_{n-1} + U_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^* U_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^* U_{n+1}$$

olup  $U_0 = 0$  olduğundan son eşitlikten

$$\langle (J_0 U)_n, Z_n \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} Z_n^* U_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^* U_{n+1} \quad (3.23)$$

yazılır. (3.23) eşitliğinin sağ kısmında  $n$  için bazı ötelemeler yapılarak

$$\langle (J_0 U)_n, Z_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n+1}^* U_n + \sum_{n=2}^{\infty} Z_{n-1}^* U_n = -Z_0^* U_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{n+1} + Z_{n-1})^* U_n \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilir. (3.24) eşitliği kullanılarak

$$\langle (J_0 U)_n, Z_n \rangle = -Z_0^* U_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (J_0 Z)_n^* U_n = -Z_0^* U_1 + \langle U_n, (J_0 Z)_n \rangle$$

veya

$$\langle (J_0 U)_n, Z_n \rangle = -Z_0^* U_1 + \langle U_n, (J_0 Z)_n \rangle$$

yazılır. Son eşitlikte  $-Z_0^* U_1$  teriminin sıfır olması için gerek ve yeter koşul  $Z_0 = 0$  olmalıdır. Buradan  $J_0$  operatörünün selfadjoint olduğu bulunur. ■

**Lemma 3.2**  $\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , matris dizilerinin sağladığı (3.2) koşulu altında  $J_1$  operatörü  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında kompakttır.

**İspat.**  $J_1$  operatörünün  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında kompakt olduğunu göstermek için  $M \subset l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  sınırlı herhangibir küme olmak üzere

$$J_1(M) = M_1 = \{Y : U = (U_n) \in M; Y = (J_1 U)_n\}$$

görüntü kümelerinin  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında kompakt olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunun için ise bu uzay için bilinen kompaktlık kriteri gereğince  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall Y \in M_1$  için  $n > N_0$  oldukça

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|Y_n\|^2 < \varepsilon^2$$

olacak şekilde  $\exists N_0(\varepsilon) > 0$  sayısının bulunduğu gösterilmelidir.

$\forall Y \in M_1$  için  $Y = (J_1 U)_n$  olacak şekilde  $U = (U_n) \in M$  vardır.

$$\|Y\|^2 = \|(J_1 U)_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(J_1 U)_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(A_{n-1} - I) U_{n-1} + B_n U_n + (A_n - I) U_{n+1}\|^2 \quad (3.25)$$

olup (3.25) eşitliğinden

$$\|Y\|^2 = \|(J_1 U)_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} [\|(A_{n-1} - I) U_{n-1}\| + \|B_n U_n\| + \|(A_n - I) U_{n+1}\|]^2$$

yazılır. Son eşitlikte  $(\|a\| - \|b\|)^2 \geq 0$  eşitsizliği dikkate alınarak  $\|a\|^2 + \|b\|^2 \geq \|2ab\|$  olduğu kullanılsa

$$\|Y\|^2 \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} [\|(A_{n-1} - I) U_{n-1}\|^2 + \|B_n U_n\|^2 + \|(A_n - I) U_{n+1}\|^2] \quad (3.26)$$

eşitsizliği elde edilir.  $U = (U_n) \in M$  olduğundan  $\forall n$  için  $\|U_n\| \leq \tilde{K}$  olacak şekilde bir  $\tilde{K}$  sayısı vardır. Dolayısıyla (3.26) eşitsizliğinden

$$\|Y\|^2 \leq 3\tilde{K}^2 \sum_{n=1}^{\infty} [\|(A_{n-1} - I)\|^2 + \|B_n\|^2 + \|(A_n - I)\|^2]$$

olup (3.2) koşulundan dolayı  $\|Y\|^2 < \infty$  bulunur. Bu ise  $M_1$  kümесinin düzgün sınırlılığını verir.

İkinci adımda  $M_1$  kümесinden alınan tüm  $Y = \{Y_n\}$  dizilerini genel terim kabul eden serilerin kalan terimlerinin düzgün olarak sıfır gittiği gösterilebilir.

İlk adımda yapılan işlemlere benzer olarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} \|Y_n\|^2 &\leq 3\tilde{K}^2 \sum_{m+1}^{\infty} [\|(A_{m-1} - I)\|^2 + \|B_m\|^2 + \|(A_m - I)\|^2] \\ &\leq 3\tilde{K}^2 K_1 \sum_{m+1}^{\infty} [\|(A_m - I)\| + \|B_m\|] \end{aligned} \quad (3.27)$$

yazılır. Burada  $K_1 = \max \{\|(A_m - I)\|, \|B_m\|\}$  değeridir. (3.27) eşitsizliğinden  $m \rightarrow \infty$  için limit alınırsa (3.2) koşulundan dolayı sağ taraf sıfır gider. Dolayısıyla istenilen elde edilmiş olur. ■

Ayrıca  $\sigma(J_0) = \sigma_c(J_0) = [-2, 2]$  olduğu bilinmektedir (Serebryakov 1980).

**Teorem 3.5**  $\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , matris dizilerinin sağladığı (3.2) koşulu altında  $\sigma_c(L) = [-2, 2]$  aralığıdır.

**İspat.**  $L = J_0 + J_1$ ,  $J_0$  selfadjoint ve  $J_1$  operatörü  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında kompakt olduğundan Weyl Kompakt Perturbasyon Teoremi gereğince

$$\sigma_c(L) = \sigma_c(J_0) = [-2, 2]$$

elde edilir. ■

[(3.22) koşulu (3.2) koşulundan daha kuvvetli olduğundan teorem 3.2, teorem 3.3, lemma 3.2 ve teorem 3.5, (3.22) koşulu altında da gerçekleşir].

$L$  operatörü selfadjoint olduğundan tüm özdeğerleri reeldir. Jost çözümünün  $n = 0$  hali olan  $E_0$  fonksiyonuna  $L$  operatörünün Jost fonksiyonu denir.  $z \in D$  olmak üzere  $a(z) := \det E_0(z)$  olsun.

Özdeğer tanımı gereğince

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \lambda = z + z^{-1}, z \in (-1, 0) \cup (0, 1), a(z) = 0\}$$

yazılır.

Özdeğerler kümesi ile diskre spektrumun ayrılığından ise

$$\sigma_d(L) \subset (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

yazılabilir.

**Tanım 3.1**  $a$  fonksiyonunun herhangibir sıfırının katı  $L$  operatörünün o sıfıra karşılık gelen özdeğerlerinin katı olarak adlandırılır.

**Teorem 3.6**  $\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , matris dizilerinin sağladığı (3.22) koşulu altında  $L$  operatörü sonlu sayıda basit reel özdeğerlere sahiptir.

**İspat.**  $J_1^{(k)}$  and  $J_2^{(k)}$  ile aşağıdaki Jacobi matrisleri gösterilsin.

$$J_1^{(k)} = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 - I & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ A_1 - I & B_2 & A_2 - I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & A_2 - I & B_3 & A_3 - I & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & A_{k-1} - I & B_k & A_k - I & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$J_2^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ I & 0 & I & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & I & 0 & I & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & A_k & B_{k+1} & A_{k+1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k+1} & B_{k+2} & A_{k+2} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Göründüğü gibi  $J = J_1^{(k)} + J_2^{(k)}$  sağlanır.  $J_1^{(k)}$  ve  $J_2^{(k)}$  matrislerine  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayında karşılık gelen selfadjoint operatörler sırasıyla  $L_1^{(k)}$  ve  $L_2^{(k)}$  ile gösterilsin. Buradan  $L = L_1^{(k)} + L_2^{(k)}$  yazılır. Yeterince büyük  $k$  sayıları için  $L_2^{(k)}$  operatörünün özdeğeri yoktur. Çünkü (3.22) koşulundan dolayı  $k \rightarrow \infty$  için  $A_k \rightarrow I$ ,  $B_k \rightarrow 0$  olduğu söylenebilir.

Ayrıca  $L_2^{(k)}$  operatörü için  $E^{(k)}(z) = \{E_n^{(k)}(z)\}$  Jost çözümü ve  $E_0^{(k)}(z)$  Jost fonksiyonu sırasıyla

$$E_n^{(k)}(z) = z^n I + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

ve

$$E_0^{(k)}(z) = I + o(1) \tag{3.28}$$

şeklinde yazılır. (3.28) eşitliğinden  $\det E_0^{(k)}(z) \neq 0$  bulunur. Dolayısıyla  $L_2^{(k)}$  operatörünün özdeğeri yoktur. Diğer yandan  $L_1^{(k)}$  operatörü sonlu boyutlu selfadjoint operatör olduğundan özdeğerleri ancak sonlu saydadır.

Lineer operatörler için verilen teorem 2.3 kullanılarak  $L = L_1^{(k)} + L_2^{(k)}$  operatörünün de sonlu sayıda reel özdeğeri olduğu söylenir.

$L$  operatörünün özdeğerlerinin basit olduğunu göstermek için  $a$  fonksiyonunun sıfırlarının basit olduğunu göstermek yeterlidir.  $z_0$ ,  $a$  fonksiyonunun herhangibir sıfırı olsun. Eğer

$$\frac{d}{dz}a(z) |_{z=z_0} \neq 0$$

olduğu gösterilirse istenilen elde edilir.  $z_0$ ,  $a$  fonksiyonunun sıfırı olduğundan

$$a(z_0) = \det E_0(z_0) = 0$$

olup  $E_0(z_0)u = 0$  olacak şekilde sıfırdan farklı  $u$  kolon vektörü vardır (Agranovich ve Marchenko 1963).

$E_n(z)$ , (3.1) denklemının Jost çözümü olduğundan  $\lambda = z + z^{-1}$  için

$$A_{n-1}E_{n-1}(z) + B_nE_n(z) + A_nE_{n+1}(z) = (z + z^{-1})E_n(z) \quad (3.29)$$

yazılır. (3.29) eşitliğinden  $z$  değişkenine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} & A_{n-1}\frac{d}{dz}E_{n-1}(z) + B_n\frac{d}{dz}E_n(z) + A_n\frac{d}{dz}E_{n+1}(z) \\ &= (z + z^{-1})\frac{d}{dz}E_n(z) + (1 - z^{-2})E_n(z) \end{aligned} \quad (3.30)$$

bulunur. (3.30) eşitliğinden eşlenik alındığında

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d}{dz}E_{n-1}(z) \right]^* A_{n-1}^* + \left[ \frac{d}{dz}E_n(z) \right]^* B_n^* + \left[ \frac{d}{dz}E_{n+1}(z) \right]^* A_n^* \\ &= \overline{(z + z^{-1})} \left[ \frac{d}{dz}E_n(z) \right]^* + \overline{\left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)} E_n^*(z) \end{aligned} \quad (3.31)$$

yazılır. (3.30) eşitliği soldan  $\left[ \frac{d}{dz}E_n(z) \right]^*$  ifadesiyle (3.31) eşitliği ise sağdan  $E_n(z)$  ile çarpıldığında sırasıyla

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d}{dz}E_n(z) \right]^* A_{n-1}E_{n-1}(z) + \left[ \frac{d}{dz}E_n(z) \right]^* B_nE_n(z) \\ &+ \left[ \frac{d}{dz}E_n(z) \right]^* A_nE_{n+1}(z) \\ &= (z + z^{-1}) \left[ \frac{d}{dz}E_n(z) \right]^* E_n(z) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d}{dz} E_{n-1}(z) \right]^* A_{n-1}^* E_n(z) + \left[ \frac{d}{dz} E_n(z) \right]^* B_n^* E_n(z) \\
& + \left[ \frac{d}{dz} E_{n+1}(z) \right]^* A_n^* E_n(z) \\
= & \overline{(z + z^{-1})} \left[ \frac{d}{dz} E_n(z) \right]^* E_n(z) + \overline{\left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)} E_n^*(z) E_n(z)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

eşitlikleri elde edilir. Her  $n$  için  $\{A_n\}$  ve  $\{B_n\}$  matris dizilerinin selfadjoint olduğu dikkate alınarak (3.32) eşitliğinden (3.33) eşitliği çıkarılarak

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d}{dz} E_n(z) \right]^* A_{n-1} E_{n-1}(z) - \left[ \frac{d}{dz} E_{n-1}(z) \right]^* A_{n-1} E_n(z) \\
& + \left[ \frac{d}{dz} E_n(z) \right]^* A_n E_{n+1}(z) - \left[ \frac{d}{dz} E_{n+1}(z) \right]^* A_n E_n(z) \\
= & (z + z^{-1}) \left[ \frac{d}{dz} E_n(z) \right]^* E_n(z) - \overline{(z + z^{-1})} \left[ \frac{d}{dz} E_n(z) \right]^* E_n(z) \\
& + \overline{\left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)} E_n^*(z) E_n(z)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik kullanılarak ise

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d}{dz} E_1(z) \right]^* A_0 E_0(z) - \left[ \frac{d}{dz} E_0(z) \right]^* A_0 E_1(z) \\
= & (z + z^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d}{dz} E_n(z) \right]^* E_n(z) \\
& - \left( \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d}{dz} E_n(z) \right]^* E_n(z) - \left( 1 - \frac{1}{\bar{z}^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(z) E_n(z)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

yazılır. (3.34) eşitliği  $z = z_0$  için

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d}{dz} E_1(z_0) \right]^* A_0 E_0(z_0) - \left[ \frac{d}{dz} E_0(z_0) \right]^* A_0 E_1(z_0) \\
= & (z_0 + z_0^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d}{dz} E_n(z_0) \right]^* E_n(z_0) \\
& - \left( \bar{z}_0 + \frac{1}{\bar{z}_0} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d}{dz} E_n(z_0) \right]^* E_n(z_0) - \left( 1 - \frac{1}{\bar{z}_0^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(z_0) E_n(z_0)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olarak elde edilir.  $z_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$  olduğundan  $\bar{z}_0 = z_0$  olup (3.35) eşitliği

$$\left[ \frac{d}{dz} E_1(z_0) \right]^* A_0 E_0(z_0) - \left[ \frac{d}{dz} E_0(z_0) \right]^* A_0 E_1(z_0) = -\left(1 - \frac{1}{z_0^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(z_0) E_n(z_0)$$

biçiminde yazılabilir. Son eşitlik sıfırdan farklı  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$  uzayından alınan  $u$  vektörü ile sağdan çarpılırsa

$$\left[ \frac{d}{dz} E_1(z_0) \right]^* A_0 E_0(z_0) u - \left[ \frac{d}{dz} E_0(z_0) \right]^* A_0 E_1(z_0) u = \left( \frac{1}{z_0^2} - 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(z_0) E_n(z_0) u \quad (3.36)$$

eşitliği elde edilir. (3.36) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[ \frac{d}{dz} E_1(z_0) \right]^* A_0 E_0(z_0) u - \left[ \frac{d}{dz} E_0(z_0) \right]^* A_0 E_1(z_0) u, u \right\rangle \\ &= \left( \frac{1}{z_0^2} - 1 \right) \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(z_0) E_n(z_0) u, u \right\rangle \end{aligned}$$

yazılır.  $E_0(z_0) u = 0$  olduğundan bu eşitlik

$$\left\langle A_0 E_1(z_0) u, \frac{d}{dz} E_0(z_0) u \right\rangle = \left(1 - \frac{1}{z_0^2}\right) [\langle E_1(z_0) u, E_1(z_0) u \rangle + \dots]$$

hatta

$$\left\langle A_0 E_1(z_0) u, \frac{d}{dz} E_0(z_0) u \right\rangle = \left(1 - \frac{1}{z_0^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \|E_n(z_0) u\|^2 \quad (3.37)$$

formunda ifade edilir. (3.37) eşitliğinden  $z_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$  ve  $\forall n$  için  $\|E_n(z_0) u\| \neq 0$  olduğundan

$$\left\langle A_0 E_1(z_0) u, \frac{d}{dz} E_0(z_0) u \right\rangle \neq 0$$

olup  $A_0 E_1(z_0) u \neq 0$  olduğundan  $\frac{d}{dz} E_0(z_0) u \neq 0$  bulunur.

Bu durumda  $\frac{d}{dz} [\det E_0(z_0)] \neq 0$  yani  $\frac{d}{dz} [a(z_0)] \neq 0$  olup  $a$  fonksiyonunun tüm sıfırlarının basit olduğu elde edilir. ■

## 4. MATRİS KATSAYILI DİSKRET DİRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Bu bölümde  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ,  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizileri  $\mathbb{C}^m$ ,  $m$ -boyutlu kompleks Euclid uzayında tanımlı  $m \times m$  tipinde selfadjoint matris diziler ve  $\lambda$  kompleks parametre olmak üzere

$$\begin{cases} A_n y_{n+1}^{(2)} + B_n y_n^{(2)} + P_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ A_{n-1} y_{n-1}^{(1)} + B_n y_n^{(1)} + Q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad (4.1)$$

birinci mertebeden matris katsayılı fark denklemleri sistemi ele alınacaktır. Burada  $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$  bir vektör dizisidir. Sistemin polinom türden Jost çözümü elde edildikten sonra Jost çözümünün asimptotik davranışını ve bu sistem yardımıyla üretilen operatörün özdeğerleri ile sürekli spektrumu incelenecektir. Ayrıca bölüm boyunca  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $\det A_n \neq 0$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\det B_n \neq 0$  olduğu kabul edilecektir.

$y_n^{(i)} \in \mathbb{C}^m$ ,  $i = 1, 2$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere tüm  $y = \{y_n\}$ ,  $y_n = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$  vektör dizilerini

İçeren Hilbert uzayı  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  ile göstereceğiz.  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  Hilbert uzayındaki norm ve iç çarpım sırasıyla  $y, z \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  olmak üzere

$$\|y\|_{l_2}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \|y_n^{(1)}\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \|y_n^{(2)}\|_{\mathbb{C}^m}^2 \right) \quad (4.2)$$

ve

$$\langle y, z \rangle_{l_2} := \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (y_n^{(1)}, z_n^{(1)})_{\mathbb{C}^m} + (y_n^{(2)}, z_n^{(2)})_{\mathbb{C}^m} \right] \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. (4.1) matris katsayılı diskre Dirac sistemi

$$Y_0^{(1)} = 0 \quad (4.4)$$

Sınır koşulu ile ele alınacaktır.  $L_3$ , ile  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayında (4.1) ve (4.4) sınır değer problemiyle üretilen operatör gösterilecektir.

#### 4.1 $L_3$ Dirac Operatörünün Jost Çözümü

$\{A_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\{B_n\}$ ,  $\{P_n\}$ , ve  $\{Q_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , matris dizilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (\|I - A_n\| + \|I + B_n\| + \|P_n\| + \|Q_n\|) < \infty \quad (4.5)$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. Burada  $\|\cdot\|$ ,  $\mathbb{C}^m$  uzayındaki matris normu ve  $I$  birim matrisi göstermektedir. (4.1) sisteminde her  $n \in \mathbb{N}$  için  $P_n \equiv Q_n \equiv 0$ ,  $B_n \equiv -I$ , ve her  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  için  $A_n \equiv I$  alınırsa  $\lambda = -iz - (iz)^{-1}$  için

$$\begin{cases} Y_{n+1}^{(2)} - Y_n^{(2)} = [-iz - (iz)^{-1}] Y_n^{(1)} \\ Y_{n-1}^{(1)} - Y_n^{(1)} = [-iz - (iz)^{-1}] Y_n^{(2)} \end{cases} \quad (4.6)$$

sistemi elde edilir.

$$e_n(z) = \begin{pmatrix} e_n^{(1)}(z) \\ e_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -i \end{pmatrix} z^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(4.6) sisteminin bir çözümüdür. Bu çözümden yararlanarak (4.1) sisteminin  $\lambda = -iz - (iz)^{-1}$  için  $\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ile göstereceğimiz çözümünü elde edelim.

**Teorem 4.1**  $\{A_n\}$ ,  $\{B_n\}$ ,  $\{P_n\}$ , ve  $\{Q_n\}$  matris dizileri (4.5) koşulunu sağlamasındır.  $\lambda = -iz - (iz)^{-1}$  için  $z \in D_o = \{z : |z| = 1\}$  olmak üzere (4.1) denklem sistemi aşağıdaki gösterim ile verilen  $\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , çözümüne sahiptir

$$\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix} = T_n \left( I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^{2m} \right) \begin{pmatrix} z \\ -i \end{pmatrix} z^{2n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad z \in D_o. \quad (4.7)$$

Burada

$$K_{nm} = \begin{pmatrix} K_{nm}^{11} & K_{nm}^{12} \\ K_{nm}^{21} & K_{nm}^{22} \end{pmatrix}, \quad T_n = \begin{pmatrix} T_n^{11} & T_n^{12} \\ T_n^{21} & T_n^{22} \end{pmatrix}$$

olup  $T_n$  ve  $K_{nm}$  matrisleri  $\{A_n\}$ ,  $\{B_n\}$ ,  $\{P_n\}$  ve  $\{Q_n\}$  dizileriyle ifade edilir.

**İspat.**  $\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix}$  çözümünün bileşenleri açık şekilde

$$\begin{aligned} F_n(z) &= T_n^{11}z^{2n+1} + T_n^{11} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{11} z^{2m+2n+1} - iT_n^{11} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{12} z^{2m+2n} \\ &\quad - iT_n^{12} z^{2n} + T_n^{12} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{21} z^{2m+2n+1} - iT_n^{12} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{22} z^{2m+2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_n(z) &= T_n^{21}z^{2n+1} + T_n^{21} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{11} z^{2m+2n+1} - iT_n^{21} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{12} z^{2m+2n} \\ &\quad - iT_n^{22} z^{2n} + T_n^{22} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{21} z^{2m+2n+1} - iT_n^{22} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{22} z^{2m+2n} \end{aligned}$$

olarak yazılır.  $F_n, G_n$  bileşen fonksiyonları  $\lambda = -iz - (iz)^{-1}$  olmak üzere (4.1) denklem sisteminde yerine yazılıp  $z$  nin kuvvetlerine göre düzenlenirse sırasıyla

$$\begin{aligned} &-T_n^{12}z^{2n-1} - i(T_n^{11} + P_n T_n^{12} + B_n T_n^{22}) z^{2n} \\ &+ (T_n^{12} + P_n T_n^{11} + B_n T_n^{21}) z^{2n+1} + i(T_n^{11} - A_n T_{n+1}^{22}) z^{2n+2} + A_n T_{n+1}^{21} z^{2n+3} \\ &-i \sum_{m=1}^{\infty} (T_n^{11} K_{nm}^{11} + T_n^{12} K_{nm}^{21} + P_n T_n^{11} K_{nm}^{12} + B_n T_n^{21} K_{nm}^{12}) z^{2m+2n} \\ &-i \sum_{m=1}^{\infty} (B_n T_n^{22} K_{nm}^{22} + P_n T_n^{12} K_{nm}^{22}) z^{2m+2n} + \sum_{m=1}^{\infty} (T_n^{12} K_{nm}^{22}) z^{2m+2n+1} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (P_n T_n^{12} K_{nm}^{21} + P_n T_n^{11} K_{nm}^{11} + B_n T_n^{22} K_{nm}^{21} + T_n^{11} K_{nm}^{12}) z^{2m+2n+1} \quad (4.8) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (B_n T_n^{21} K_{nm}^{11}) z^{2m+2n+1} - \sum_{m=1}^{\infty} (T_n^{11} K_{nm}^{12} + T_n^{12} K_{nm}^{22}) z^{2m+2n-1} \\ &+ i \sum_{m=1}^{\infty} (T_n^{11} K_{nm}^{11} + T_n^{12} K_{nm}^{21} - A_n T_{n+1}^{22} K_{n+1,m}^{22} - A_n T_{n+1}^{21} K_{n+1,m}^{12}) z^{2m+2n+2} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (A_n T_{n+1}^{21} K_{n+1,m}^{11} + A_n T_{n+1}^{22} K_{n+1,m}^{21}) z^{2m+2n+3} = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &-i A_{n-1} T_{n-1}^{12} z^{2n-2} + (A_{n-1} T_{n-1}^{11} - T_n^{22}) z^{2n-1} - i(B_n T_n^{12} + Q_n T_n^{22} + T_n^{21}) z^{2n} \\ &+ (B_n T_n^{11} + Q_n T_n^{21} + T_n^{22}) z^{2n+1} + iT_n^{21} z^{2n+2} \\ &-i \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n-1} T_{n-1}^{11} K_{n-1,m}^{12} + A_{n-1} T_{n-1}^{12} K_{n-1,m}^{22}) z^{2m+2n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n-1} T_{n-1}^{11} K_{n-1,m}^{11} + A_{n-1} T_{n-1}^{12} K_{n-1,m}^{21} - T_n^{21} K_{nm}^{12} - T_n^{22} K_{nm}^{22}) z^{2m+2n-1} \\
& - i \sum_{m=1}^{\infty} (B_n T_n^{11} K_{nm}^{12} + B_n T_n^{12} K_{nm}^{22} + Q_n T_n^{21} K_{nm}^{12} + Q_n T_n^{22} K_{nm}^{22}) z^{2m+2n} \\
& - i \sum_{m=1}^{\infty} (T_n^{21} K_{nm}^{11} + T_n^{22} K_{nm}^{21}) z^{2m+2n} + \sum_{m=1}^{\infty} (B_n T_n^{11} K_{nm}^{11}) z^{2m+2n+1} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} (Q_n T_n^{21} K_{nm}^{11} + Q_n T_n^{22} K_{nm}^{21} + T_n^{21} K_{nm}^{12} + B_n T_n^{12} K_{nm}^{21}) z^{2m+2n+1} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} (T_n^{22} K_{nm}^{22}) z^{2m+2n+1} + i \sum_{m=1}^{\infty} (T_n^{21} K_{nm}^{11} + T_n^{22} K_{nm}^{21}) z^{2m+2n+2} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

yazılır. Son eşitliklerde terimlerin katsayıları karşılaştırıldığında (4.8) eşitliğinden

$$T_n^{12} = 0$$

$$T_n^{11} + B_n T_n^{22} = 0$$

$$P_n T_n^{11} + B_n T_n^{21} - T_n^{11} K_{n1}^{12} = 0$$

$$T_n^{11} - A_n T_{n+1}^{22} - T_n^{11} K_{n1}^{11} - P_n T_n^{11} K_{n1}^{12} - B_n T_n^{21} K_{n1}^{12} - B_n T_n^{22} K_{n1}^{22} = 0$$

$$A_n T_{n+1}^{21} - T_n^{11} K_{n2}^{12} + T_n^{11} K_{n1}^{12} + P_n T_n^{11} K_{n1}^{11} + B_n T_n^{22} K_{n1}^{21} + B_n T_n^{21} K_{n1}^{11} = 0$$

$$-T_n^{11} K_{n2}^{11} - P_n T_n^{11} K_{n2}^{12} - B_n T_n^{21} K_{n2}^{12} - B_n T_n^{22} K_{n2}^{22} + T_n^{11} K_{n1}^{11} - A_n T_{n+1}^{22} K_{n+1,1}^{22}$$

$$- A_n T_{n+1}^{21} K_{n+1,1}^{12} = 0$$

$$-T_n^{11} K_{n3}^{12} + T_n^{11} K_{n2}^{12} + P_n T_n^{11} K_{n2}^{11} + B_n T_n^{22} K_{n2}^{21} + B_n T_n^{21} K_{n2}^{11} + A_n T_{n+1}^{21} K_{n+1,1}^{11}$$

$$+ A_n T_{n+1}^{22} K_{n+1,1}^{21} = 0$$

denklemleri ve  $m \geq 3$  için çift ve tek kuvvetlerden sırasıyla

$$-T_n^{11} K_{nm}^{11} - P_n T_n^{11} K_{nm}^{12} - B_n T_n^{21} K_{nm}^{12} - B_n T_n^{22} K_{nm}^{22} - A_n T_{n+1}^{22} K_{n+1,m-1}^{22}$$

$$+ T_n^{11} K_{n,m-1}^{11} - A_n T_{n+1}^{21} K_{n+1,m-1}^{12} = 0$$

ve

$$-T_n^{11} K_{nm+1}^{12} + T_n^{11} K_{nm}^{12} + P_n T_n^{11} K_{nm}^{11} + B_n T_n^{22} K_{nm}^{21} + A_n T_{n+1}^{21} K_{n+1,m-1}^{11}$$

$$+ B_n T_n^{21} K_{nm}^{11} + A_n T_{n+1}^{22} K_{n+1,m-1}^{21} = 0$$

denklemleri elde edilir.

(4.9) eşitliğinden ise

$$T_{n-1}^{12} = 0$$

$$\begin{aligned}
& A_{n-1}T_{n-1}^{11} - T_n^{22} = 0 \\
& -Q_nT_n^{22} - T_n^{21} - A_{n-1}T_{n-1}^{11}K_{n-1,1}^{12} = 0 \\
& B_nT_n^{11} + Q_nT_n^{21} + T_n^{22} + A_{n-1}T_{n-1}^{11}K_{n-1,1}^{11} - T_n^{21}K_{n1}^{12} - T_n^{22}K_{n1}^{22} = 0 \\
& T_n^{21} - A_{n-1}T_{n-1}^{11}K_{n-1,2}^{12} - B_nT_n^{11}K_{n1}^{12} - Q_nT_n^{21}K_{n1}^{12} - Q_nT_n^{22}K_{n1}^{22} - T_n^{21}K_{n1}^{11} \\
& - T_n^{22}K_{n1}^{21} = 0 \\
& A_{n-1}T_{n-1}^{11}K_{n-1,2}^{11} - T_n^{21}K_{n2}^{12} - T_n^{22}K_{n2}^{22} + B_nT_n^{11}K_{n1}^{11} + Q_nT_n^{21}K_{n1}^{11} + Q_nT_n^{22}K_{n1}^{21} \\
& + T_n^{21}K_{n1}^{12} + T_n^{22}K_{n1}^{22} = 0 \\
& -A_{n-1}T_{n-1}^{11}K_{n-1,3}^{12} - B_nT_n^{11}K_{n2}^{12} - Q_nT_n^{21}K_{n2}^{12} - Q_nT_n^{22}K_{n2}^{22} - T_n^{21}K_{n2}^{11} - T_n^{22}K_{n2}^{21} \\
& + T_n^{21}K_{n1}^{11} + T_n^{22}K_{n1}^{21} = 0
\end{aligned}$$

denklemleri ve  $m \geq 3$  için çift ve tek kuvvetlerden sırasıyla

$$\begin{aligned}
& -A_{n-1}T_{n-1}^{11}K_{n-1,m+1}^{12} - B_nT_n^{11}K_{nm}^{12} - Q_nT_n^{21}K_{nm}^{12} - Q_nT_n^{22}K_{nm}^{22} - T_n^{21}K_{nm}^{11} - T_n^{22}K_{nm}^{21} \\
& + T_n^{21}K_{n,m-1}^{11} + T_n^{22}K_{n,m-1}^{21} = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& A_{n-1}T_{n-1}^{11}K_{n-1,m}^{11} - T_n^{21}K_{nm}^{12} - T_n^{22}K_{nm}^{22} + B_nT_n^{11}K_{n,m-1}^{11} + Q_nT_n^{21}K_{n,m-1}^{11} + Q_nT_n^{22}K_{n,m-1}^{21} \\
& + T_n^{21}K_{n,m-1}^{12} + T_n^{22}K_{n,m-1}^{22} = 0 \text{ denklemleri bulunur.}
\end{aligned}$$

Bu denklemler kullanılarak belli öteleme ve iterasyonlar sonucu  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $T_n^{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) ifadeleri

$$\begin{aligned}
T_n^{12} &= 0, \quad T_n^{22} = \left( \prod_{p=n}^{\infty} (-1)^{n-p} A_p B_p \right)^{-1} \\
T_n^{11} &= -B_n \left( \prod_{p=n}^{\infty} (-1)^{n-p} A_p B_p \right)^{-1} \\
T_n^{21} &= -Q_n T_n^{22} - A_{n-1} T_{n-1}^{11} \left( \sum_{p=n}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} B_p Q_p T_p^{22} - \sum_{p=n}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} P_p T_p^{11} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde,

$K_{n1}^{ij}$ ,  $K_{n2}^{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) ise

$$\begin{aligned}
K_{n1}^{12} &= \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} B_p Q_p T_p^{22} - \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} P_p T_p^{11}, \\
K_{n1}^{11} &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \left[ -I + (T_p^{11})^{-1} (B_p^2 T_p^{11} + A_p T_{p+1}^{22} + B_p Q_p T_p^{21} + B_p T_p^{22} + P_p T_p^{11} K_{p1}^{12}) \right] \\
K_{n1}^{22} &= (T_n^{22})^{-1} [B_n T_n^{11} + Q_n T_n^{21} + T_n^{22} + A_{n-1} T_{n-1}^{11} K_{n-1,1}^{11} - T_n^{21} K_{n1}^{12}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{n1}^{21} &= \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} T_p^{21} (K_{p1}^{11} - I) + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left[ (T_p^{22})^{-1} (B_p T_p^{11} + Q_p T_p^{21}) K_{p1}^{12} \right] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} Q_p T_p^{22} K_{p1}^{22} + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} A_{p-1} T_{p-1}^{11} K_{p-1,1}^{12} \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} A_{p-1}^2 T_p^{21} + \sum_{p=n}^{\infty} (T_{p+1}^{22})^{-1} [A_p P_p T_p^{11} + A_p B_p T_p^{21}] K_{p1}^{11}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_{n2}^{12} &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \left[ (T_p^{11})^{-1} B_p Q_p (T_p^{21} K_{p1}^{12} + T_p^{22} K_{p1}^{22}) \right] - \sum_{p=n+1}^{\infty} K_{p1}^{12} \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p^2 T_p^{11} K_{p1}^{12} - P_p T_p^{11} K_{p1}^{11} - A_p T_{p+1}^{21} - B_p T_p^{21}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{n2}^{11} &= \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p^2 T_p^{11} K_{p1}^{11} + P_p T_p^{11} K_{p2}^{12} + B_p T_p^{22} K_{p1}^{22} + B_p T_p^{21} K_{p1}^{12}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p Q_p T_p^{21} K_{p1}^{11} + B_p Q_p T_p^{22} K_{p1}^{21}] - \sum_{p=n+1}^{\infty} K_{p1}^{11} \\
&\quad + \sum_{p=n+2}^{\infty} (T_{p-1}^{11})^{-1} [A_{p-1} T_p^{22} K_{p1}^{22} + A_{p-1} T_p^{21} K_{p1}^{12}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{n2}^{22} &= - \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} [B_p T_p^{11} K_{p1}^{11} - T_p^{21} K_{p2}^{12} + Q_p T_p^{21} K_{p1}^{11} + Q_p T_p^{22} K_{p1}^{21} + T_p^{21} K_{p1}^{12}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} [A_{p-1} P_{p-1} T_{p-1}^{11} K_{p-1,2}^{12} + A_{p-1} B_{p-1} T_{p-1}^{21} K_{p-1,2}^{12}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} [-A_{p-1} T_{p-1}^{11} K_{p-1,1}^{11}] - \sum_{p=n+1}^{\infty} K_{p1}^{22} \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} [A_{p-1}^2 T_p^{22} K_{p1}^{12} + A_{p-1}^2 T_p^{21} K_{p,1}^{12}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{n2}^{21} &= \sum_{p=n}^{\infty} (T_{p+1}^{22})^{-1} [A_p T_p^{11} K_{p2}^{12} + A_p P_p T_p^{11} K_{p2}^{11} + A_p B_p T_p^{21} K_{p2}^{11}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} [A_{p-1}^2 T_p^{21} K_{p1}^{11} + A_{p-1}^2 T_p^{22} K_{p,1}^{21} + B_p T_p^{11} K_{p2}^{12}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{22})^{-1} [Q_p T_p^{21} K_{p2}^{12} + Q_p T_p^{22} K_{p2}^{22} + T_p^{21} K_{p2}^{11} - T_p^{21} K_{p1}^{11}] \\
&\quad - \sum_{p=n+1}^{\infty} K_{p1}^{21}
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.

$m \geq 3$  için  $K_{nm}^{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) ifadeleri ise  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
K_{nm}^{12} &= - \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [P_p T_p^{11} K_{p,m-1}^{11} - B_p^2 T_p^{11} K_{p,m-1}^{12} + B_p T_p^{21} K_{p,m-2}^{11}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (K_{p,m-2}^{21} - K_{p,m-1}^{12}) + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p Q_p^2 T_p^{21} K_{p,m-2}^{11}] \\
&\quad - \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [A_p T_{p+1}^{21} K_{p+1,m-2}^{11} + A_p T_{p+1}^{22} K_{p+1,m-2}^{21}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p Q_p A_{p-1} T_{p-1}^{11} K_{p-1,m-1}^{11} + B_p Q_p T_p^{11} K_{p,m-2}^{11}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p Q_p^2 T_p^{22} K_{p,m-2}^{21} + B_p Q_p T_p^{21} K_{p,m-2}^{12} + B_p Q_p T_p^{22} K_{p,m-2}^{22}] \\
\\
K_{nm}^{11} &= + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [P_p T_p^{11} K_{pm}^{12} + B_p^2 T_p^{11} K_{p,m-1}^{11} + B_p Q_p T_p^{21} K_{p,m-1}^{11}] \\
&\quad - \sum_{p=n+1}^{\infty} K_{p,m-1}^{11} + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p Q_p T_p^{22} K_{p,m-1}^{21}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [A_p T_{p+1}^{22} K_{p+1,m-1}^{22} + A_p T_{p+1}^{21} K_{p+1,m-1}^{12}] \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p T_p^{21} K_{p,m-1}^{12} + B_p T_p^{22} K_{p,m-1}^{22}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{nm}^{22} &= K_{n,m-1}^{22} + (T_n^{22})^{-1} [A_{n-1} T_{n-1}^{11} K_{n-1,m}^{11} - T_n^{21} K_{nm}^{21} + B_n T_n^{11} K_{n,m-1}^{11}] \\
&\quad + (T_n^{22})^{-1} [Q_n T_n^{21} K_{n,m-1}^{11} + Q_n T_n^{22} K_{n,m-1}^{21} + T_n^{21} K_{n,m-1}^{12}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{nm}^{21} &= K_{n,m-1}^{21} + (T_n^{22})^{-1} [-A_{n-1} T_{n-1}^{11} K_{n-1,m+1}^{12} - B_n T_n^{11} K_{nm}^{12}] \\ &\quad + (T_n^{22})^{-1} [-Q_n T_n^{21} K_{nm}^{12} + T_n^{21} K_{n,m-1}^{11} - Q_n T_n^{22} K_{nm}^{22} - T_n^{21} K_{nm}^{11}] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(4.5) koşulundan dolayı  $T_n^{ij}$  ve  $K_{nm}^{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) tanımlarındaki sonsuz çarpım ve seriler mutlak yakınsaktır. Bu yüzden  $T_n^{ij}$  ve  $K_{nm}^{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ),  $\{A_n\}$   $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\{B_n\}$ ,  $\{P_n\}$  ve  $\{Q_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dizileri cinsinden tek olarak bellidir. Dolayısıyla  $\lambda = -iz - (iz)^{-1}$  için (4.1) sisteminin çözümü  $\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix}$  ile (4.7) eşitliğindeki gibi verilir. Bu çözüme (4.1) sisteminin Jost çözümü denir. ■

**Teorem 4.2**  $\{A_n\}$ ,  $\{B_n\}$ ,  $\{P_n\}$ , ve  $\{Q_n\}$  matris dizileri (4.5) koşulunu sağlamak üzere ve  $C > 0$  pozitif sabit,  $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$  ise  $\frac{m}{2}$  sayısının tam kısmı olmak üzere her  $n, m \in \mathbb{N}$  için

$$\|K_{nm}^{ij}\| \leq C \sum_{p=n+\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|I + B_p\| + \|Q_p\| + \|P_p\|), \quad (4.10)$$

eşitsizliği gerçekleşenir.

**İspat.**  $K_{nm}^{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) tanımları kullanılarak  $m$  üzerinden tümevarımla istenilen eşitsizlik aşağıdaki gibi elde edilir.

$m = 1$  için

$$\begin{aligned} \|K_{n1}^{12}\| &= \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} [B_p Q_p T_p^{22} - P_p T_p^{11}] \right\| \\ &\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} \right\| \|B_p\| \|Q_p\| \|T_p^{22}\| + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} \right\| \|P_p\| \|T_p^{11}\| \end{aligned}$$

olup  $\left\| (T_p^{11})^{-1} \right\|$ ,  $\|B_p\|$  ve  $\|T_p^{22}\|$  sonlu olduğundan

$$\begin{aligned} \|K_{n1}^{12}\| &\leq C_2 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| + \sum_{p=n+1}^{\infty} \|P_p\| \leq C \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|Q_p\| + \|P_p\|) \\ &\leq C \sum_{p=n}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|I + B_p\| + \|Q_p\| + \|P_p\|) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $C = \max\{1, C_2\}$  ile verilmiştir.

$$\begin{aligned}\|K_{n1}^{11}\| &= \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} \left[ -I + (T_p^{11})^{-1} (B_p^2 T_p^{11} + A_p T_{p+1}^{22} + B_p Q_p T_p^{21} + B_p T_p^{22} + P_p T_p^{11} K_{p1}^{12}) \right] \right\| \\ &\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| -I + (T_p^{11})^{-1} B_p^2 T_p^{11} + (T_p^{11})^{-1} A_p T_{p+1}^{22} + (T_p^{11})^{-1} B_p T_p^{22} \right\| \\ &\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} B_p Q_p T_p^{21} \right\| + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} P_p T_p^{11} K_{p1}^{12} \right\|\end{aligned}$$

olup  $B_p T_p^{22} = -T_p^{11}$  ile  $T_{p+1}^{22} = A_p T_p^{11}$  olduğu ve  $(T_p^{11})^{-1}, B_p, T_p^{21}$  ile  $K_{p1}^{12}$  ifadelerinin sınırlı olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}\|K_{n1}^{11}\| &\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} (-I + B_p^2) T_p^{11} \right\| + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} (-I + A_p^2) T_p^{11} \right\| \\ &\quad + C_3 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| + C_4 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|P_p\| \\ &\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \left( \left\| (T_p^{11})^{-1} \right\| \|B_p - I\| \|B_p + I\| \|T_p^{11}\| \right) + C_3 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \\ &\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left( \left\| (T_p^{11})^{-1} \right\| \|A_p + I\| \|A_p - I\| \|T_p^{11}\| \right) + C_4 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|P_p\|\end{aligned}$$

yazılır. Buradan  $\|B_p - I\|$  ve  $\|A_p + I\|$  sonlu olduğundan

$$\|K_{n1}^{11}\| \leq C_5 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_p + I\| + C_6 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|A_p - I\| + C_3 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| + C_4 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|P_p\|$$

olup  $\max\{C_3, C_4, C_5, C_6\} = C$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\|K_{n1}^{11}\| &\leq C \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|B_p + I\| + \|I - A_p\| + \|Q_p\| + \|P_p\|) \\ &\leq C \sum_{p=n}^{\infty} (\|B_p + I\| + \|I - A_p\| + \|Q_p\| + \|P_p\|)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.10) eşitsizliği  $K_{n1}^{21}$  ve  $K_{n1}^{22}$  için de elde edilir.

$m = k$  için ( $i, j = 1, 2$ )

$$\|K_{nk}^{ij}\| \leq C \sum_{p=n+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|I + B_p\| + \|Q_p\| + \|P_p\|)$$

olsun. Bundan yararlanarak (4.10) eşitsizliğinin  $m = k + 1$  için de sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|K_{n,k+1}^{12}\| &= \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} K_{p,k-1}^{21} - \sum_{p=n+1}^{\infty} K_{pk}^{12} \right. \\
&\quad - \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} \{ P_p T_p^{11} K_{pk}^{11} - B_p^2 T_p^{11} K_{pk}^{12} + B_p T_p^{21} K_{p,k-1}^{11} \} \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} \{ -A_p T_{p+1}^{21} K_{p+1,k-1}^{11} - A_p T_{p+1}^{22} K_{p+1,k-1}^{21} \} \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} \{ B_p Q_p A_{p-1} T_{p-1}^{11} K_{p-1,k}^{11} + B_p Q_p B_p T_p^{11} K_{p,k-1}^{11} \} \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} \{ B_p Q_p^2 T_p^{21} K_{p,k-1}^{11} + B_p Q_p T_p^{22} K_{p,k-1}^{21} \} \\
&\quad \left. + \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} \{ B_p Q_p T_p^{21} K_{p,k-1}^{12} + B_p Q_p T_p^{22} K_{p,k-1}^{22} \} \right\|
\end{aligned}$$

olup (4.5) kabulü kulanılarak  $\|N_s\| = \|I - A_s\| + \|I + B_s\| + \|Q_s\| + \|P_s\|$  olmak üzere  $(T_p^{11})^{-1}$ ,  $T_p^{11}$ ,  $B_p$ ,  $A_{p-1}$ ,  $Q_p$ ,  $T_p^{21}$  ve  $T_p^{22}$  sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned}
\|K_{n,k+1}^{12}\| &\leq \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} \left( K_{p,k-1}^{21} - (T_p^{11})^{-1} A_p T_{p+1}^{22} K_{p+1,k-1}^{21} \right) \right\| + C \sum_{p=n+1}^{\infty} \|P_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&\quad + \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} (-B_p T_p^{21} K_{p,k-1}^{11} - A_p T_{p+1}^{21} K_{p+1,k-1}^{11}) \right\| \\
&\quad + \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} (B_p^2 T_p^{11} K_{pk}^{12} - T_p^{11} K_{pk}^{12}) \right\| \\
&\quad + C_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p-1+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + C'_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&\quad + C''_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + C'''_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&\quad + C_8 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + C_7''' \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\|
\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizlikte  $T_{p+1}^{22} = A_p T_p^{11}$  olduğu kullanılarak  
 $C'' = C \|B_p - I\|$  ve  $D' = (C'_7 + C''_7 + C'''_7 + C_8)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\|K_{n,k+1}^{12}\| &\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \|K_{p,k-1}^{21} - K_{p+1,k-1}^{21}\| + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} (I - A_p^2) T_p^{11} K_{p+1,k-1}^{21} \right\| \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} (-B_p - I) T_p^{21} K_{p,k-1}^{11} \right\| \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} (I - A_p) T_{p+1}^{21} K_{p+1,k-1}^{11} \right\| \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\| (T_p^{11})^{-1} (T_p^{21} K_{p,k-1}^{11} - T_{p+1}^{21} K_{p+1,k-1}^{11}) \right\| \\
&\quad + C'' \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_p + I\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + C \sum_{p=n+1}^{\infty} \|P_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&\quad + C_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + D' \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\|
\end{aligned}$$

olup  $\|I + A_p\|$ ,  $\left\| (T_p^{11})^{-1} \right\|$  ve  $\|T_p^{21}\|$  sonlu olduğundan ise

$$\begin{aligned}
\|K_{n,k+1}^{12}\| &\leq \|K_{n+1,k-1}^{21}\| + D_1 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|I - A_p\| \sum_{s=p+1+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&\quad + D_2 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_p + I\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&\quad + D_2 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|I - A_p\| \sum_{s=p+1+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + \|T_{n+1}^{21}\| \|K_{n+1,k-1}^{11}\| \\
&\quad + C'' \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_p + I\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + C \sum_{p=n+1}^{\infty} \|P_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&\quad + C_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + D' \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\|
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan ise tekrar (4.5) kabulü kullamlarak

$$\begin{aligned}
\|K_{n,k+1}^{12}\| &\leq C \sum_{p=n+1+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_p\| + C \|T_{n+1}^{21}\| \sum_{p=n+1+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_p\| \\
&+ (D_1 + D_2) \sum_{p=n+1}^{\infty} \|I - A_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&+ maks \{D', D_2\} \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|B_p + I\| + \|Q_p\|) \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&+ maks \{C'', C\} \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|B_p + I\| + \|P_p\|) \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&+ C_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\|
\end{aligned}$$

yazılır.  $C(1 + \|T_{n+1}^{21}\|) = Z$ ,  $D_1 + D_2 = Z_1$ ,  $maks \{D' + D_2\} = Z_2$ ,  $maks \{C'', C\} = Z_3$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|K_{n,k+1}^{12}\| &\leq Z \sum_{p=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_p\| + Z_1 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|I - A_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&+ Z_2 \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|B_p + I\| + \|Q_p\|) \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&+ Z_3 \sum_{p=n+1}^{\infty} (\|B_p + I\| + \|P_p\|) \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&+ C_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|Q_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&\leq Z \sum_{p=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_p\| + Z_1 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|N_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&+ Z_2 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|N_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| + Z_3 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|N_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
&+ C_7 \sum_{p=n+1}^{\infty} \|N_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\
\|K_{n,k+1}^{12}\| &\leq Z \sum_{p=n+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_p\| + (Z_1 + Z_2 + Z_3 + C_7) \sum_{p=n+1}^{\infty} \|N_p\| \sum_{s=p+\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor}^{\infty} \|N_s\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $(Z_1 + Z_2 + Z_3 + B) = Y$  denilirse

$$\begin{aligned} \|K_{n,k+1}^{12}\| &\leq Z \sum_{p=n+\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_p\| + Y \left\{ \begin{array}{l} \|N_{n+1}\| \sum_{s=n+1+\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_s\|, \\ + \|N_{n+2}\| \sum_{s=n+2+\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_s\| \\ + \|N_{n+3}\| \sum_{s=n+3+\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_s\| + \dots \end{array} \right\} \\ &\leq Z \sum_{p=n+\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_p\| + Y \left\{ \sum_{p=n+1}^{\infty} \|N_p\| \sum_{s=n+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_s\| \right\} \end{aligned}$$

bulunur. (4.5) koşulundan dolayı  $\sum_{p=n+1}^{\infty} \|N_p\| < \infty$  olduğundan  $Y \sum_{p=n+1}^{\infty} \|N_p\| = Y'$  olmak üzere

$$\|K_{n,k+1}^{12}\| \leq Z \sum_{p=n+\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_p\| + Y' \sum_{p=n+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_p\|$$

olur. Buradan ise istenilen eşitsizlik

$$\begin{aligned} \|K_{n,k+1}^{12}\| &\leq (Z + Y') \sum_{p=n+\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_p\| + Y' \sum_{p=n+\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_p\| \\ &= (Z + 2Y') \sum_{p=n+\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_p\| = G \sum_{p=n+\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}^{\infty} \|N_p\| \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.5) koşulu kullanarak (4.10) eşitsizliği  $K_{n,k+1}^{11}$ ,  $K_{n,k+1}^{21}$  ve  $K_{n,k+1}^{22}$  için de bulunabilir.

■

Teorem 4.12 gereğince  $\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , çözümü  $D_0$  kümesinden  $\{z : |z| < 1\} \setminus \{0\}$  kümeye analitik devama sahiptir.

**Teorem 4.3** *Jost çözümü  $z \in D := \{z : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}$  olmak üzere (4.5) koşulu altında*

$$\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix} = [I + o(1)] \begin{pmatrix} z \\ -i \end{pmatrix} z^{2n}, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.11)$$

*asimptotik eşitliğini gerçekler.*

**Ispat.** (4.7) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_n^{11} & T_n^{12} \\ T_n^{21} & T_n^{22} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{nm}^{11} & K_{nm}^{12} \\ K_{nm}^{21} & K_{nm}^{22} \end{pmatrix} z^{2m} \right] \begin{pmatrix} z^{2n+1} \\ -iz^{2n} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

yazılır. Buradan (4.11) asimtotik eşitliğini göstermek için (4.5) koşulu altında

$$\begin{pmatrix} T_n^{11} & T_n^{12} \\ T_n^{21} & T_n^{22} \end{pmatrix} \rightarrow I, \quad n \rightarrow \infty$$

ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{nm}^{11} & K_{nm}^{12} \\ K_{nm}^{21} & K_{nm}^{22} \end{pmatrix} z^{2m} = o(1), \quad z \in D, \quad n \rightarrow \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir.  $T_n^{12} = 0$  olduğundan  $n \rightarrow \infty$  için  $T_n^{12} \rightarrow 0$  olur.

$T_n^{22} = \left( \prod_{p=n}^{\infty} (-1)^{n-p} A_p B_p \right)^{-1}$  olduğundan ve yakınsak çarpımın kalan terimin limiti

$I$  olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{22} = I$  yazılır. Benzer şekilde

$$T_n^{11} = -B_n \left( \prod_{p=n}^{\infty} (-1)^{n-p} A_p B_p \right)^{-1}$$

olduğundan (4.5) koşulu gereğince  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{11} = I$  olur.

$$T_n^{21} = -Q_n T_n^{22} - A_{n-1} T_{n-1}^{11} \left( \sum_{p=n}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} B_p Q_p T_p^{22} - \sum_{p=n}^{\infty} (T_p^{11})^{-1} P_p T_p^{11} \right)$$

olduğundan ve yakınsak serinin kalan terimin limiti sıfır olduğundan (4.5) koşulu altında  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{21} = 0$  bulunur.

Ayrıca  $z \in D$  için teorem 4.2 kullanılarak ( $i, j = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} z^{2m} \right\| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \|K_{nm}^{ij}\| |z^{2m}| \\ &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=n+\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|I + B_p\| + \|Q_p\| + \|P_p\|) \end{aligned} \quad (4.13)$$

yazılır. (4.13) eşitsizliğinden  $\|I - A_p\| + \|I + B_p\| + \|Q_p\| + \|P_p\| = N_p$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} z^{2m} \right\| &\leq C \sum_{p=n}^{\infty} N_p + 2C \sum_{p=n+1}^{\infty} N_p + 2C \sum_{p=n+2}^{\infty} N_p + \dots \\ &\leq 2C \left\{ \sum_{p=n}^{\infty} N_p + \sum_{p=n+1}^{\infty} N_p + \sum_{p=n+2}^{\infty} N_p + \dots \right\} \\ &= 2C \left\{ \begin{array}{c} N_n + N_{n+1} + N_{n+2} + N_{n+3} + \dots \\ + N_{n+1} + N_{n+2} + N_{n+3} + \dots \\ + N_{n+2} + N_{n+3} + \dots \\ \dots \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} z^{2m} \right\| &\leq 2C \{N_n + 2N_{n+1} + 3N_{n+2} + 4N_{n+3} + \dots\} \\ &= 2C \sum_{p=1}^{\infty} p N_{n+p-1} = 2C \sum_{p=n}^{\infty} [p - (n-1)] N_p \\ &\leq 2C \sum_{p=n}^{\infty} p N_p = 2C \sum_{p=n}^{\infty} p (\|I - A_p\| + \|I + B_p\| + \|Q_p\| + \|P_p\|) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $z \in D := \{z : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}$  olmak üzere  $n \rightarrow \infty$  için (4.5) koşulundan  $\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^{ij} z^{2m} = o(1)$  elde edilir. Dolayısıyla  $\begin{pmatrix} F_n(z) \\ G_n(z) \end{pmatrix}$  Jost çözümü (4.5) koşulu altında (4.11) ile verilen asimptotik eşitliği gerçekler. ■

## 4.2 $L_3$ Operatörünün Sürekli ve Diskre Spektrumu

$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayında

$$(\gamma Y)_n := \begin{cases} Y_{n+1}^{(2)} - Y_n^{(2)} \\ Y_{n-1}^{(1)} - Y_n^{(1)} \end{cases}$$

diferensiyel ifadesi ve  $Y_0^{(1)} = 0$  sınır koşuluyla üretilen operatör  $L_0$  olsun.

Ayrıca  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayında  $J_3$  operatörü

$$\begin{aligned}
J_3 \begin{pmatrix} Y_n^{(1)} \\ Y_n^{(2)} \end{pmatrix} : &= \begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & Q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_n^{(1)} \\ Y_n^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I + B_n & 0 \\ 0 & I + B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_n^{(1)} \\ Y_n^{(2)} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} A_n - I & 0 \\ 0 & A_{n-1} - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{n+1}^{(2)} \\ Y_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A_n - I) Y_{n+1}^{(2)} + (I + B_n) Y_n^{(2)} + P_n Y_n^{(1)} \\ (A_{n-1} - I) Y_n^{(1)} + (I + B_n) Y_n^{(1)} + Q_n Y_n^{(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan  $L_3 = L_0 + J_3$  olduğu açıklar.

**Lemma 4.1**  $L_0$  operatörü selfadjointtir.

**İspat.**  $L_0$  operatörünün selfadjoint olduğunu göstermek için  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayından alınan herhangi  $U = \{U_n\}$  ve  $Z = \{Z_n\}$  matris dizileri için

$$\langle (L_0 U)_n, Z_n \rangle = \langle U_n, (L_0 Z)_n \rangle$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\langle (L_0 U)_n, Z_n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (Z_n^{(1)})^* (U_{n+1}^{(2)} - U_n^{(2)}) + (Z_n^{(2)})^* (U_{n-1}^{(1)} - U_n^{(1)}) \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n^{(1)})^* U_{n+1}^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n^{(1)})^* U_n^{(2)} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n^{(2)})^* U_{n-1}^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n^{(2)})^* U_n^{(1)}
\end{aligned}$$

olup

$$U_0^{(1)} = 0$$

olduğu dikkate alınarak ve  $n$  üzerinden bazı ötelemeler yaparak son eşitlik

$$\langle (L_0 U)_n, Z_n \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} (Z_{n-1}^{(1)})^* U_n^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n^{(1)})^* U_n^{(2)} + \sum_{n=2}^{\infty} (Z_n^{(2)})^* U_{n-1}^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n^{(2)})^* U_n^{(1)} \tag{4.14}$$

formunda yazılabilir. (4.14) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\langle (L_0 U)_n, Z_n \rangle &= -\left(Z_0^{(1)}\right)^* U_1^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_{n-1}^{(1)}\right)^* U_n^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_n^{(1)}\right)^* U_n^{(2)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_{n+1}^{(2)}\right)^* U_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(Z_n^{(2)}\right)^* U_n^{(1)}\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\langle (L_0 U)_n, Z_n \rangle &= -\left(Z_0^{(1)}\right)^* U_1^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(Z_{n-1}^{(1)}\right)^* - \left(Z_n^{(1)}\right)^*\right] U_n^{(2)} \quad (4.15) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(Z_{n+1}^{(2)}\right)^* - \left(Z_n^{(2)}\right)^*\right] U_n^{(1)}\end{aligned}$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinden ise

$$\langle (L_0 U)_n, Z_n \rangle = -\left(Z_0^{(1)}\right)^* U_1^{(2)} + \langle U_n, (L_0 Z)_n \rangle$$

bulunur. Son eşitlikte  $-\left(Z_0^{(1)}\right)^* U_1^{(2)} = 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $Z_0^{(1)} = 0$  olmalıdır. Buradan  $L_0$  operatörünün selfadjoint olduğu elde edilir. ■

**Lemma 4.2**  $\{A_n\}, \{B_n\}, \{P_n\}$  ve  $\{Q_n\}$  matris dizilerinin (4.5) koşulunu sağlama durumunda  $J_3$  operatörü  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayında kompakttır.

**İspat.**  $J_3$  operatörünün  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayında kompakt olduğunu göstermek için  $M_2 \subset l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  sınırlı herhangibir küme olmak üzere

$$J_3(M_2) = M_3 = \left\{ Y : U = U_n = \begin{pmatrix} U_n^{(1)} \\ U_n^{(2)} \end{pmatrix} \in M; Y = (J_3 U)_n \right\}$$

görüntü kümesinin  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayında kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için ise bu uzay için bilinen kompaktlık kriteri gereğince  $\forall \varepsilon > 0, \forall Y \in M_3$  için  $m > N_0$  oldukça

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \left( \left\| (J_3 U)_n^{(1)} \right\|^2 + \left\| (J_3 U)_n^{(2)} \right\|^2 \right) < \varepsilon^2$$

olacak şekilde  $\exists N_0(\varepsilon) > 0$  sayısının bulunduğu gösterilmelidir.

$\forall Y \in M_3$  için  $Y = (J_3 U)_n$  olacak şekilde bir  $U = (U_n) \in M_2$  vardır.

$$\begin{aligned}\|Y\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\| (A_n - I) U_{n+1}^{(2)} + (I + B_n) U_n^{(2)} + P_n U_n^{(1)} \right\|^2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| (A_{n-1} - I) U_{n-1}^{(1)} + (I + B_n) U_n^{(1)} + Q_n U_n^{(2)} \right\|^2\end{aligned}\quad (4.16)$$

olup (4.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\|Y\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left\| (A_{n-1} - I) U_{n+1}^{(2)} \right\| + \left\| (I + B_n) U_n^{(2)} \right\| + \left\| P_n U_n^{(1)} \right\| \right]^2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left\| (A_{n-1} - I) U_{n-1}^{(1)} \right\| + \left\| (I + B_n) U_n^{(1)} \right\| + \left\| Q_n U_n^{(2)} \right\| \right]^2\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizlikte  $\|a\|^2 + \|b\|^2 \geq \|2ab\|$  olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}\|Y\|^2 &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left\| (A_n - I) U_{n+1}^{(2)} \right\|^2 + \left\| (I + B_n) U_n^{(2)} \right\|^2 + \left\| P_n U_n^{(1)} \right\|^2 \right] \\ &\quad + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left\| (A_{n-1} - I) U_{n-1}^{(1)} \right\|^2 + \left\| (I + B_n) U_n^{(1)} \right\|^2 + \left\| Q_n U_n^{(2)} \right\|^2 \right]\end{aligned}\quad (4.17)$$

eşitsizliği elde edilir.  $U = (U_n) \in M_2$  olduğundan  $\forall n$  için  $\|U_n\| \leq K$  olacak şekilde  $K$  sayısı vardır. Dolayısıyla (4.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|Y\|^2 &\leq 3K^2 \sum_{n=1}^{\infty} [\|A_n - I\|^2 + \|I + B_n\|^2 + \|P_n\|^2] \\ &\quad + 3K^2 \sum_{n=1}^{\infty} [\|A_{n-1} - I\|^2 + \|(I + B_n)\|^2 + \|Q_n\|^2]\end{aligned}$$

olur. (4.5) koşulundan dolayı  $\|(A_n - I)\|, \|I + B_n\|, \|P_n\|$  ve  $\|Q_n\|$  sınırlı olacağından  $N_1 = \max \{\|(A_n - I)\|, \|I + B_n\|, \|P_n\|\}$  ve  $N_2 = \max \{\|(A_{n-1} - I)\|, \|I + B_n\|, \|Q_n\|\}$  denilirse bu durumda

$$\begin{aligned}\|Y\|^2 &\leq 3K^2 N_1 \sum_{n=1}^{\infty} [\|A_n - I\| + \|I + B_n\| + \|P_n\|] \\ &\quad + 3K^2 N_2 \sum_{n=1}^{\infty} [\|A_{n-1} - I\| + \|(I + B_n)\| + \|Q_n\|]\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizlikte (4.5) koşulu dikkate alınırsa  $\|Y\|^2 < \infty$  bulunur. Bu ise  $M_2$  kümesinin düzgün sınırlılığını verir.

İkinci adımda  $M_2$  kümesinden alınan tüm  $Y = \{Y_n\}$  dizilerini genel terim kabul eden serilerin kalan terimlerinin düzgün olarak sıfır gittiği gösterilebilir.

İlk adımda yapılan işlemlere benzer olarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} \|Y_n\|^2 &\leq 3K^2 N_1 \sum_{n=m+1}^{\infty} [\|A_n - I\| + \|I + B_n\| + \|P_n\|] \\ &\quad + 3K^2 N_2 \sum_{n=m+1}^{\infty} [\|A_{n-1} - I\| + \|(I + B_n)\| + \|Q_n\|] \end{aligned} \quad (4.18)$$

yazılabilir. (4.18) eşitsizliğinden  $m \rightarrow \infty$  için limit alınırsa (4.5) koşulundan dolayı sağ taraf sıfır gider. Dolayısıyla istenilen elde edilmiş olur.

■

Ayrıca  $\sigma(L_0) = \sigma_c(L_0) = [-2, 2]$  olduğu bilinmektedir [Serebryakov 1980].

**Teorem 4.4**  $\{A_n\}, \{B_n\}, \{P_n\}$  ve  $\{Q_n\}$  matris dizilerinin (4.5) koşulunu sağlaması durumunda  $\sigma_c(L_3) = [-2, 2]$  aralığıdır.

**İspat.**  $L_3 = L_0 + J_3$ ,  $L_0$  selfadjoint ve  $J_3$  operatörü  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayında kompakt olduğundan Weyl Kompakt Perturbasyon Teoremi gereğince

$$\sigma_c(L_3) = \sigma_c(L_0) = [-2, 2]$$

elde edilir.

■

$L_3$  operatörü selfadjoint olduğundan tüm özdeğerleri reeldir.  $F_0$  fonksiyonuna  $L_3$  operatörünün Jost fonksiyonu denir.

Özdeğer tanımı gereğince

$$\sigma_d(L_3) = \{\lambda : \lambda = -iz - (iz)^{-1}, iz \in (-1, 0) \cup (0, 1), \det F_0(z) = 0\} \quad (4.19)$$

yazılır.

**Tanım 4.1**  $\det F_0(z)$  fonksiyonunun herhangibir sıfırının katı  $L_3$  operatörünün o sıfır karşılık gelen özdeğerlerinin katı olarak adlandırılır.

**Theorem 4.5**  $\{A_n\}, \{B_n\}, \{P_n\}$  ve  $\{Q_n\}$  matris dizilerinin (4.5) koşulunu sağlaması halinde  $L_3$  operatörü sonlu sayıda basit reel özdeğerlere sahiptir.

**İspat.** Teoremi ispatlamak için  $\det F_0(z)$  fonksiyonunun sonlu sayıda basit sıfırlara sahip olduğunu göstermek yeterlidir.  $z_0$ ,  $\det F_0(z)$  fonksiyonunun herhangibir sıfırı olsun. Eğer

$$\frac{d}{dz} \det F_0(z) |_{z=z_0} \neq 0$$

olduğu gösterilirse  $\det F_0(z)$  fonksiyonunun sıfırlarının basit olduğu elde edilir.  $z_0$ ,  $\det F_0(z)$  fonksiyonunun sıfırı olduğundan

$$\det F_0(z_0) = 0$$

olup  $F_0(z_0)u = 0$  olacak şekilde sıfırdan farklı  $u$  kolon vektörü vardır (Agranovich ve Marchenko 1963).

$\left( \begin{array}{c} F_n(z) \\ G_n(z) \end{array} \right)$ , (4.1) sisteminin Jost çözümü olduğundan  $\lambda = -iz - (iz)^{-1}$  için

$$\begin{cases} A_n G_{n+1}(z) + B_n G_n(z) + P_n F_n(z) = [-iz - (iz)^{-1}] F_n(z) \\ A_{n-1} F_{n-1}(z) + B_n F_n(z) + Q_n G_n(z) = [-iz - (iz)^{-1}] G_n(z) \end{cases} \quad (4.20)$$

yazılır. (4.20) eşitliğinden  $z$  değişkenine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} & A_n \frac{d}{dz} G_{n+1}(z) + B_n \frac{d}{dz} G_n(z) + P_n \frac{d}{dz} F_n(z) \\ &= [-iz - (iz)^{-1}] \frac{d}{dz} F_n(z) - i(1 - z^{-2}) F_n(z) \\ & A_{n-1} \frac{d}{dz} F_{n-1}(z) + B_n \frac{d}{dz} F_n(z) + Q_n \frac{d}{dz} G_n(z) \\ &= [-iz - (iz)^{-1}] \frac{d}{dz} G_n(z) - i(1 - z^{-2}) G_n(z) \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. (4.20) ve (4.21) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* A_n G_{n+1}(z) + \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* B_n G_n(z) \\ & - \left( \frac{d}{dz} G_{n+1}(z) \right)^* A_n F_n(z) - \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* B_n F_n(z) \\ &= [-iz - (iz)^{-1}] \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* F_n(z) \\ & - \overline{[-iz - (iz)^{-1}]} \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* F_n(z) + i \overline{(1 - z^{-2})} F_n^*(z) F_n(z) \end{aligned} \quad (4.22)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* A_{n-1} F_{n-1}(z) + \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* B_n F_n(z) \\
& - \left( \frac{d}{dz} F_{n-1}(z) \right)^* A_{n-1} G_n(z) - \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* B_n G_n(z) \quad (4.23) \\
= & \left[ -iz - (iz)^{-1} \right] \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* G_n(z) \\
& - \overline{\left[ -iz - (iz)^{-1} \right]} \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* G_n(z) + \overline{i(1-z^{-2})} G_n^*(z) G_n(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.22) ile (4.23) eşitlikleri taraf tarafa toplanarak

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* A_n G_{n+1}(z) - \left( \frac{d}{dz} G_{n+1}(z) \right)^* A_n F_n(z) \\
& + \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* A_{n-1} F_{n-1}(z) - \left( \frac{d}{dz} F_{n-1}(z) \right)^* A_{n-1} G_n(z) \quad (4.24) \\
= & \left[ -iz - (iz)^{-1} \right] \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* F_n(z) + \left[ -iz - (iz)^{-1} \right] \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* G_n(z) \\
& - \overline{\left[ -iz - (iz)^{-1} \right]} \left[ \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* F_n(z) + \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* G_n(z) \right] \\
& + \overline{i(1-z^{-2})} [F_n^*(z) F_n(z) + G_n^*(z) G_n(z)]
\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{dz} G_1(z) \right)^* A_0 F_0(z) - \left( \frac{d}{dz} F_0(z) \right)^* A_0 G_1(z) \\
= & \left[ -iz - (iz)^{-1} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* F_n(z) + \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* G_n(z) \right] \quad (4.25) \\
& - \overline{(iz - (iz)^{-1})} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{d}{dz} F_n(z) \right)^* F_n(z) + \left( \frac{d}{dz} G_n(z) \right)^* G_n(z) \right] \\
& + i \overline{(1-z^{-2})} \sum_{n=1}^{\infty} [F_n^*(z) F_n(z) + G_n^*(z) G_n(z)]
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (4.25) eşitliği  $z = z_0$  için

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{dz} G_1(z_0) \right)^* A_0 F_0(z_0) - \left( \frac{d}{dz} F_0(z_0) \right)^* A_0 G_1(z_0) \\
= & [-iz_0 - (iz_0)^{-1}] \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{d}{dz} F_n(z_0) \right)^* F_n(z_0) + \left( \frac{d}{dz} G_n(z_0) \right)^* G_n(z_0) \right] \quad (4.26) \\
& - \left( \overline{iz_0} - \overline{(iz_0)^{-1}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{d}{dz} F_n(z_0) \right)^* F_n(z_0) + \left( \frac{d}{dz} G_n(z_0) \right)^* G_n(z_0) \right] \\
& + \bar{i} \left( 1 - \overline{z_0^{-2}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} [F_n^*(z_0) F_n(z_0) + G_n^*(z_0) G_n(z_0)]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.  $iz_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$  olduğundan  $\overline{iz_0} = iz_0$  olup (4.26) eşitliği

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{dz} G_1(z_0) \right)^* A_0 F_0(z_0) - \left( \frac{d}{dz} F_0(z_0) \right)^* A_0 G_1(z_0) \\
= & -i \left( 1 - \overline{z_0^{-2}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} [F_n^*(z_0) F_n(z_0) + G_n^*(z_0) G_n(z_0)]
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Son eşitlik sıfırdan farklı  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2m})$  uzayından alınan  $u$  vektörü ile sağdan çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{dz} G_1(z_0) \right)^* A_0 F_0(z_0) u - \left( \frac{d}{dz} F_0(z_0) \right)^* A_0 G_1(z_0) u \quad (4.27) \\
= & -i \left( 1 - \overline{z_0^{-2}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} [F_n^*(z_0) F_n(z_0) u + G_n^*(z_0) G_n(z_0) u]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (4.27) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left( \frac{d}{dz} G_1(z_0) \right)^* A_0 F_0(z_0) u - \left( \frac{d}{dz} F_0(z_0) \right)^* A_0 G_1(z_0) u, u \right\rangle \\
= & -i \left( 1 - \overline{z_0^{-2}} \right) \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(z_0) F_n(z_0) u + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(z_0) G_n(z_0) u, u \right\rangle
\end{aligned}$$

yazılır.  $F_0(z_0) u = 0$  olduğundan bu eşitlik

$$\begin{aligned}
& \left\langle -A_0 G_1(z_0) u, \frac{d}{dz} F_0(z_0) u \right\rangle \\
= & -i \left( 1 - \overline{z_0^{-2}} \right) \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(z_0) F_n(z_0) u + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(z_0) G_n(z_0) u, u \right\rangle
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \left\langle A_0 G_1(z_0) u, \frac{d}{dz} F_0(z_0) u \right\rangle \\
&= i \left( 1 - \overline{z_0^{-2}} \right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|F_n(z_0) u\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|G_n(z_0) u\|^2 \right\} \\
&= \left( i - \frac{i}{(iz_0)^2} \right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|F_n(z_0) u\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|G_n(z_0) u\|^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

formunda ifade edilir.  $iz_0 \neq 0$ ,  $iz_0 \neq 1$  ve  $\forall n$  için  $\|F_n(z_0) u\|$  ile  $\|G_n(z_0) u\|$  aynı anda sıfır olamayacağından (4.28) eşitliğinden

$$\left\langle A_0 G_1(z_0) u, \frac{d}{dz} F_0(z_0) u \right\rangle \neq 0$$

yazılır.  $A_0 G_1(z_0) u \neq 0$  olduğundan  $\frac{d}{dz} F_0(z_0) u \neq 0$  bulunur. Bu durumda

$$\frac{d}{dz} [\det F_0(z)] \neq 0$$

olup  $\det F_0(z)$  fonksiyonunun tüm sıfırlarının basit olduğu elde edilir.

Teoremin ispatını tamamlamak için  $\det F_0(z)$  fonksiyonunun  $D$  bölgesinde sonlu sayıda sıfıra sahip olduğunu göstermek yeterlidir.

$$M(z) = z^{-1} (T_0^{11})^{-1} F_0(z) = I + A(z)$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada  $A$  fonksiyonu

$$A(z) = \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{11} z^{2m} - i \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{12} z^{2m-1}$$

birimde  $D$  bölgesinin içinde analitik sınırlarda sürekli olan matris değerli bir fonksiyondur. Bu durumda  $M$  fonksiyonunun  $D$  bölgesinin sınırında tersi vardır (Teorem 2.4). Yani  $\det F_0(z) = 0$  denkleminin sıfırları kümesinin limit noktaları kümesi boş kümedir. Bu yüzden  $\det F_0(z)$  fonksiyonunun  $D$  içindeki sıfırları kümesi sonludur. Dolayısıyla  $L_3$  operatörü sonlu sayıda özdeğere sahiptir. ■

## KAYNAKLAR

- Adivar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 261; pp. 461-478.
- Agranovich, Z.S. and Marchenko, V.A. 1963. The inverse Problemford Ser., Vol. 50 (2); no. 200; pp. 371-384.
- Bairamov, E., Krall, A.M. and Cakar, O. 1999. An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities. *J. Differential Equations*, Vol. 151 (2); pp. 268-289.
- Bairamov, E., Krall, A.M. and Cakar, O. 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities. *Math. Nachr.*, Vol. 229; pp. 5-14.
- Bairamov, E. and Coskun, C. 2004. Jost solutions and the spectrum of the system of difference equations. *Appl. Math. Lett.*, Vol. 17; pp. 1039-1045.
- Bairamov, E. and Karaman, O. 2002. Spectral singularities of Klein-Gordon s-wave equations with an integral boundary condition. *Acta Math. Hungar.*, Vol. 97, no. 1-2; pp. 121-131.
- Bairamov, E., Aygar, Y. and Olgun, M. 2010. Jost solution and the spectrum of the discrete Dirac systems. *Boundary value problems*, article ID 306571, 11 pages.
- Bairamov, E. and Koprubasi, T. 2010. Eigenparameter dependent discrete Dirac equations with spectral singularities. *Appl. Math. and Comp.* Vol. 215; pp. 4216-4220.
- Chadon, K. and Sabatier, P.C. 1997. Inverse Problems in Quantum scattering Theory Springer-Verlag, Berlin, New York, 120p.

- Gasymov, M.G. and Levitan, B.M. 1966. Determination of the Dirac system from scattering phase. Sov. Math., Dokl., Vol. 167; pp. 1219-1222.
- Gesztesy, F., Kiselev A. and Makarov, K.A. 2002. Uniqueness results for matrix valued Schrödinger, Jacobi and Dirac-type operators, Math. Nachr. Vol. 239 pp. 103-145.
- Glazman, I.M. 1965. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators, Jerusalem, 234p.
- Gohberg, I.C. and Krein, M.G. 1969. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. American Math. Society, 378p.
- Guseinov, G.S. 1976. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation. Sov. Math., Dokl., Vol. 230; pp. 1045-1048.
- Jaulent, M. and Jean, C. 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy. Comm. Math. Phys., Vol. 28 (3); pp. 177-220.
- Keldys, M.V. 1951. On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of nonselfadjoint equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 77; pp. 11-14. MR 12, 835.
- Krall, A. M., Cakar, O. and Bairamov, E. 1999. Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition, J. Differential Equations, no. 2, Vol. 151; pp. 252-267.
- Levitan, B.M. 1987. Inverse Sturm-Liouville Problems, VSP, Zeist, 240p.
- Lusternik, L.A. and Sobolev, V.I. 1974. Elements of Functional Analysis, Halsted Press, New York, 360p.
- Marchenko, V.A. 1986. Sturm-Liouville Operators and Applications, Birkhauser Verlag, Basel, 367p.

- Naimark, M.A. 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. AMS Transl. Vol.2 (16); pp. 103-193.
- Naimark, M.A. 1968. Linear Differential Operators II, Ungar, New York. 352p.
- Serebryakov, V.P. 1980. An inverse problem of scattering theory for difference equations with matrix coefficients, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, Vol. 250; pp. 562-565.
- Zakharov, V.E., Manakov, S.V., Novikov, S.P. and Pitaevskii, L.P. 1984. Theory of Solutions, Plenum Press, New York, 276p.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU  
**Doğum Yeri** : Sungurlu  
**Doğum Tarihi** : 28.01.1983  
**Medeni Hali** : Evli  
**Yabancı Dili** : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

**Lise** : Haydar Öztaş Anadolu Lisesi (2001)  
**Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi  
Matematik Bölümü (2006)  
**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı (2008)

### Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı, Araştırma Görevlisi (2007-...)

### Yayınları:

**Aygar Y.**, Bairamov E. 2012. Jost Solution and the Spectral Properties of the Matrix-Valued difference operators. Applied Mathematics and Computation, 218, 9676-9681 (SCI Exp.)

**Aygar Y.**, BairamovE., Yardımcı S. Jost Solution and the Spectral Properties of the Matrix-Valued discrete Dirac systems, (inceleme aşamasında).