170030

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# ÖZEL EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLER

İsmet ÖNCÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2005

Prof. Dr. Yusuf YAYLI danışmanlığında, İsmet ÖNCÜ tarafından hazırlanan bu çalışma 22/07/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ Nejat Ekmekçi

**Yukarıdaki sonucu onaylarım.**

Ü. Mehmetoğlu

**Prof. Dr. Ülkü Mehmetoğlu**

**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

# ÖZEL EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLER

İsmet Öncü

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü temel kavramlara ayrılmıştır.

İkinci bölümde; Bertrand eğrileri ve silindirik helisler yardımıyla elde edilen Regle yüzeyler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; silindirik helislerin düzlem eğrilerinden ve Bertrand eğrilerinin küresel eğrilerden inşa edilebildiği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde; slant helisler ve konikal geodezik eğriler tanımlanmış ve açılabilir yüzeyler üzerindeki eğriler olarak çalışılmıştır.

Son bölümde; bir slant helisin teğet ve binormal gösteriminin küresel görüntüleri araştırılmıştır.

Bu çalışma Shyuichi Izumiya ve Nabuko Takeuchi'nin makalelerine dayandırılmıştır.

**2005, 76 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** silindirik helis, Bertrand eğrisi, regle yüzeyler, Darboux vektörü, slant helis, küresel helis.

ABSTRACT

Master Thesis

SPECIAL CURVES AND RULED SURFACES

İsmet Öncü

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

The thesis consists of five chapters. Basic concepts were given in the first chapter.

In the second chapter, ruled surfaces which are related to cylindrical helices and Bertrand curves were investigated.

In the third chapter, it was shown that cylindrical helices could be constructed from plane curves and Bertrand curves could be constructed from spherical curves.

In the fourth chapter, slant helices and conical geodesic curves were defined and studied as curves on developable surfaces.

In the last chapter, spherical images of the tangent indicatrix and binomial indicatrix of a slant helix were investigated.

This thesis was based on the papers of Shyuichi Izumiya and Nabuko Takeuchi.

**2005, 76 pages**

**Key Words:** cylindrical helix, Bertrand curve, ruled surfaces, Darboux vector, Slant helix, spherical indicatrix.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) 'ya, yardımlarını benden esirgemeyen Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) 'na, posta yoluyla sorduğum sorular ile ilgilenip bana yol gösteren Sayın Shyuichi IZUMIYA (Hakkaido Üniversitesi) 'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmam esnasında bana sabır ve anlayış gösteren aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İsmet ÖNCÜ
Ankara, Temmuz 2005

İÇİNDEKİLER

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\gamma$ | Birim hızlı uzay eğrisi |
| $k$ | $\gamma$ nın eğriliği |
| $\tau$ | $\gamma$ nın torsiyonu |
| $D$ | $\gamma$ nın Darboux vektör alanı |
| $\tilde{D}$ | $\gamma$ nın genelleştirilmiş Darboux vektör alanı |
| $d$ | $\gamma$ nın küresel Darboux gösterimi |
| $F(\gamma,\delta)$ | $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey |
| $F(\gamma,\tilde{D})$ | $\gamma$ nın rektifiyan açılabilir yüzeyi |
| $F(\gamma,n)$ | $\gamma$ nın asli normal yüzeyi |
| $F(\gamma,\bar{D})$ | $\gamma$ nın teğetsel Darboux açılabiliri |
| $K$ | $F(\gamma,\delta)$ nın Gauss eğriliği |
| $H$ | $F(\gamma,\delta)$ nın ortalama eğriliği |
| $S$ | $F(\gamma,\delta)$ nın şekil operatörü |

ŞEKİLLER DİZİNİ

# 1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, gerekli olan bazı temel kavramlar verilecektir.
Bu çalışmada, herhangi iki $x=(x_1,x_2,x_3)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3)$ vektörlerinin standart iç çarpımı $x.y$ ve bir $x$ vektörünün normu $\|x\|$ ile gösterilmiştir.

**Tanım 1.1.** $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$, $\|\gamma'(s)\|=1$ olacak şekilde bir eğri olsun. Bu durumda $s$ ye $\gamma$ eğrisinin yay parametresi adı verilir (Hacısalihoğlu 1993).

**Tanım 1.2.** $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $s$ yay parametresi $\gamma'(s)=\dfrac{d\gamma}{ds}$ olmak üzere, $\gamma'(s)$ yi $t(s)$ ile gösterelim. $t(s)$ ye, $\gamma(s)$ noktasında $\gamma$ nın birim teğet vektörü denir. $\gamma$ nın eğriliği $k(s)=\|\gamma''(s)\|$ ile tanımlanır. Eğer $k(s)\neq 0$ ise $\gamma(s)$ noktasında $\gamma$ eğrisinin $n(s)$ birim asli normal vektörüde $\gamma''(s)=k(s)n(s)$ ile verilir. $b(s)=t(s)\times n(s)$ birim vektörüne, $\gamma(s)$ noktasında $\gamma$ eğrisinin birim binormal vektörü denir. Böylece Frenet-Serret formülü aşağıdaki şekilde verilir:

$$
\begin{aligned}
t'(s) &= k(s)n(s) \\
n'(s) &= -k(s)t(s)+\tau(s)b(s) \\
b'(s) &= -\tau(s)n(s)
\end{aligned}
$$

Burada $\tau(s)$, $\gamma(s)$ noktasında $\gamma$ eğrisinin torsiyonudur (Izumiya ve Takeuchi 2001).

**Tanım 1.3.** $S$, $E^3$ de bir yüzey, $\gamma: I \to S$ birim hızlı bir eğri ve $\gamma''(s)=\gamma''(s)^{\mathrm{T}}+\gamma''(s)^{\perp}$ olsun. $\|\gamma''(s)^{\mathrm{T}}\|=k_g$ ve $\|\gamma''(s)^{\perp}\|=k_n$ ile gösterilen $k_g$ ve $k_n$ ye sırasıyla $\gamma$ eğrisinin geodezik ve normal eğriliği denir (Gray 1939).

**Tanım 1.4.** Birim hızlı her $\gamma: I \to E^3$ eğrisi için, $D(s)=\tau(s)t(s)+k(s)b(s)$ vektör alanına, $\gamma$ eğrisinin Darboux vektör alanı denir (Hacısalihoğlu 1993).

**Tanım 1.5.** $k(s) \neq 0$ koşulu altında $\gamma$ boyunca, $\widetilde{D}(s) = \left(\dfrac{\tau}{k}\right)(s)t(s) + b(s)$ olarak tanımlanan vektör alanına, $\gamma$ nın genelleştirilmiş Darboux vektör alanı denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

**Tanım 1.6.** $\gamma$ nın tanjant doğruları, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa $\gamma$ ya bir silindirik helis (genel helis) denir. $\gamma(s)$ nin bir silindirik helis olması için gerek ve yeter şart $\left(\dfrac{\tau}{k}\right)(s)$ nin sabit olmasıdır. Eğer, $\tau$ ve $k$ sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

**Tanım 1.7.** $M, N \subset E^3$ eğrileri sırasıyla $(I,\alpha), (I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında $M$ ve $N$ nin

$$\{t(s), n(s), b(s)\} \ , \ \{t^*(s), n^*(s), b^*(s)\}$$

Frenet 3-ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için $\{n(s), n^*(s)\}$ lineer bağımlı ise $(M,N)$ eğri ikilisine bir Bertrand çifti denir (Hacısalihoğlu 1993).

**Tanım 1.8.** Eğer bir eğrinin bütün noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye düzlemseldir denir (Karger ve Novak 1985).

**Tanım 1.9.** Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri adı verilir (Karger ve Novak 1985).

**Tanım 1.10.** $M$ bir $C^\infty$ manifold olsun. $M$ üstünde vektör alanlarının uzayı $X(M)$ ve reel değerli $C^\infty$ fonksiyonların halkası $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$<,> : X(M) \times X(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise $M$ ye bir Riemann manifoldu denir. Burada, $<,>$ işlemine $M$ üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferansiyellenebilir metrik denir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.11.** $M$ bir $C^{\infty}$ manifold olsun. $M$ üstünde vektör alanlarının cümlesi $X(M)$ ve reel değerli $C^{\infty}$ fonksiyonların halkası da $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$<,>: X(M)\times X(M)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

fonksiyonu

1. 2-lineer
2. simetrik
3. $\forall x\in X(M)$ için $<x,y>=0 \Rightarrow y=0\in X(M)$

özelliklerini sağlıyor ise $M$ ye yarı-Riemann manifoldu denir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.12.** $M$ bir $C^{\infty}$ manifold olsun. $M$ üzerinde vektör alanlarının uzayı $X(M)$ olmak üzere,

$$D: X(M)\times X(M)\to X(M)$$
$$(X,Y)\to D(X,Y)=D_XY$$

fonksiyonu için,

1. $D_{fX+gY}Z=fD_XZ+gD_YZ,\ \forall X,Y,Z\in X(M),\ \forall f,g\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$
2. $D_X(fY)=fD_XY+(Xf)Y,\ \forall X,Y\in X(M),\ \forall f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$

özellikleri sağlanıyorsa $D$ ye $M$ manifoldu üstünde bir afin konneksiyon ve $D_X$ e de $X$ e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.13.** $M$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $D, M$ üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer "

1. $D$, $C^{\infty}$ sınıfındandır.
2. $M$ nin bir $A$ bölgesi üzerinde, $C^{\infty}$ olan $\forall X,Y\in X(M)$ için,
   $D_XY-D_YX=[X,Y]$
   dir. (Sıfır torsiyon özelliği).
3. $M$ nin bir $A$ bölgesi üzerinde $C^{\infty}$ olan $\forall X,Y,Z\in X(M)$ ve $\forall P\in A$ için
   $X_P<Y,Z>=<D_X,Y,Z>|_P+<Y,D_XZ>|_P$
   dir." (Konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliği) (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.14.** $E^n$ de bir hiperyüzey $M$ ve $M$ nin birim normal vektör alanı $N$ olsun. $E^n$ de Riemann konneksiyonu $D$ olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı $S$ dönüşümüne $M$ üzerinde şekil operatörü veya $M$ nin Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.15.** $E^n$ de bir hiperyüzey $M$ olsun. $M$ nin bir $P$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} K : M &\to \mathbb{R} \\ P &\to K(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, $M$ nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de $M$ nin $P$ noktasındaki Gauss eğriliği denir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.16.** $E^n$ de bir hiperyüzey $M$ olsun. $M$ nin bir $P$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H : M &\to \mathbb{R} \\ P &\to H(P) = iz(S(P)) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, $M$ nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de $M$ nin $P$ noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.17.** $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey,

$$\begin{aligned} F(\gamma,\delta) : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (t,u) &\to F(\gamma,\delta)(t,u) = \gamma(t) + u\delta(t) \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\delta : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve $I$ bir açık aralıktır. $\gamma$ ya regle yüzeyin dayanak eğrisi ve $\delta$ ya regle yüzeyin doğrultmanı adı verilir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

**Tanım 1.18.** Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.19.** $M$, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey olmak üzere, $M$ yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 1.20.** Bir $F(\gamma,\delta)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (striksiyon) noktası adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.21.** Bir $F(\gamma,\delta)$ regle yüzeyinin ana doğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.22.** $M$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha: I \to M$ bir eğri olmak üzere $M$ yüzeyinin birim normal vektör alanı $N$ olsun. $\alpha''$ vektör alanı, $N$ vektör alanının lineer bileşimi ise $\alpha$ eğrisine, $M$ yüzeyi içinde bir geodezik eğri denir (Sabuncuoğlu 2004).

**Tanım 1.23.** $M$ yüzeyinin bir $P$ noktasında, $S_p: T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümünün karakteristik değerlerine, $P$ noktasındaki asli eğrilikler denir. $S_p: T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümünün sıfırdan farklı karakteristik vektörlerine $P$ noktasındaki asli vektörler denir. Bir eğrilik vektörünün gerdiği alt vektör uzayına, $P$ noktasındaki eğrilik doğrultusu denir (Sabuncuoğlu 2004).

**Tanım 1.24.** $M$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha: I \to M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için, $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında $M$ yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise $\alpha$ eğrisine, $M$ yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir (Sabuncuoğlu 2004).

**Tanım 1.25.** Eğer bir yüzey üzerindeki bir eğri asimptotik eğri ve yüzeyin ortalama eğriliği bu eğri boyunca sıfır ise bu eğriye minimal asimptotik eğri adı verilir (Izumiya ve Takeuchi 2001).

**Tanım 1.26.** $M \subset E^3$ eğrisinin $m \in M$ noktasındaki $M$ ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerinin merkezlerinin geometrik yeri olan

$$\overline{\alpha} = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} n(s_0) + \lambda b(s_0)$$

doğrusuna $M$ eğrisinin $m \in M$ noktasındaki eğrilik ekseni denir. Eğrilik ekseni üzerindeki $C(s_0) = \alpha(s_0) + \dfrac{1}{k_1(s_0)} n(s_0)$ noktasına $M$ nin $m = \alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik merkezi denir (Hacısalihoğlu 2000).

**Tanım 1.27.** 3-boyutlu öklid uzayı $E^3$ te, bir $\alpha$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. $\alpha$ eğrisinin birin teğet vektörü $T$ olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = T$ alındığında, $P$ noktası $\alpha$ eğrisi çizerken, $Q$ noktasının birim küre üzerinde çizdiği eğriye $\alpha$ eğrisinin teğetler göstergesi adı verilir.

**Tanım 1.28.** 3-boyutlu öklid uzayı $E^3$ te, bir $\alpha$ eğrisinin birim asli normal vektörü $\vec{N}$ olsun. $\alpha$ eğrisi çizilirken $\vec{N}$ vektörünün uç noktaları cümlesinin birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye $\alpha$ eğrisinin asli normaller göstergesi denir.

**Tanım 1.29.** 3-boyutlu öklid uzayı $E^3$ te, $\alpha$ bir eğri olsun. $\alpha$ eğrisinin bir $P$ noktasındaki binormal vektörü $B = \overrightarrow{PR}$ ve komşu iki binormal vektörü arasındaki açı $AQ$ olmak üzere $P$ noktası $\alpha$ eğrisini çizerken $R$ noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye $\alpha$ eğrisinin binormaller göstergesi denir.

## 2. ÖZEL EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLER

### 2.1. Özel Eğriler ve Regle Yüzeylerin Bazı Karakteristik Özelikleri

Bu bölümde, Bertrand eğrilerinin bazı temel özellikleri verilip Regle yüzeyler tanımlanarak Bertrand eğrilerinin ve silindirik helislerin bu Regle yüzeylerle ilişkisini ortaya koyan önermeler ifade edilecektir. Silindirik helislerin ve Bertrand eğrilerinin sırasıyla Regle yüzeylerin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği ile olan ilişkisi açıklanacaktır.

Öncelikle Bertrand eğrilerinin temel özelliklerini verelim:

**Önerme 2.1.1.** $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ bir uzay eğrisi olsun.

(1) Farz edelim ki $\tau(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\gamma$ nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için, $Ak(s) + B\tau(s) = 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı $A$, $B$ reel sayılarının var olmasıdır. Bu gerçek bize, bir dairesel helisin bir Bertrand eğrisi olduğunu söyler.

(2) Farz edelim ki $\gamma$ bir Bertrand eğrisidir. Eğer $\tau(s_0) = 0$ olacak şekilde bir $s_0 \in I$ noktası varsa $\gamma$ bir düzlemsel eğridir.

(3) $\gamma$, Bertrand çifti $\bar{\gamma}$ olan bir Bertrand eğrisi olsun. O halde $\tau(s)\bar{\tau}(s) = \text{sabit} \geq 0$ dır. Burada $\bar{\tau}(s)$, $\bar{\gamma}$ nin torsiyonudur.

**İspat.** $\bar{\gamma}(s)$ nin birim teğet vektörü, asli normal vektörü ve binormal vektörü sırasıyla $\bar{t}(s)$, $\bar{n}(s)$ ve $\bar{b}(s)$ olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisinin $\gamma$ nın Bertrand çifti olması için gerek ve yeter şart $\bar{n}(s) = \varepsilon n(s)$, $\varepsilon = \pm 1$ olmasıdır. Tanımdan, $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + A(s)n(s)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $A(s)$ fonksiyonu vardır. Frenet-Serret formülünden,

$$\frac{d\bar{\gamma}}{ds}(s) = (1 - A(s)k(s))t(s) + A'(s)n(s) + \tau(s)A(s)b(s).$$

$\bar{s}$, $\bar{\gamma}$ nin yay parametresi olsun. Bu durumda,

$$\frac{d\bar{s}}{ds}\bar{t}(s) = (1 - A(s)k(s))t(s) + A'(s)n(s) + \tau(s)A(s)b(s)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafı $\bar{n}(s)=\varepsilon\, n(s)$ ile çarpılırsa, $\varepsilon\, A'(s)\equiv 0$, böylece $A(s)\equiv A$ sabittir. $\bar{n}(s)=\varepsilon\, n(s)$ olduğundan,

$$\bar{t}(s).\bar{b}(s)=t(s).b(s).$$

O halde,

$$\bar{t}(s)=\cos\theta(s)t(s)+\sin\theta(s)b(s)$$

olacak şekilde diferensiyellenebilir bir $\theta(s)$ fonksiyonu vardır. Böylece

$$\bar{b}(s)=\bar{t}(s)\times\bar{n}(s)=-\varepsilon\sin\theta(s)t(s)+\varepsilon\cos\theta(s)b(s)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{d\bar{t}}{ds}(s)=(\cos\theta(s))'\,t(s)+(k(s)\cos\theta(s)-\tau(s)\sin\theta(s))n(s)+(\sin\theta(s))'\,b(s)$$

$t(s)\bar{n}(s)=b(s)\bar{n}(s)=0$ olduğundan, $(\cos\theta(s))'=(\sin\theta(s))'=0$ dır. O halde, $\theta(s)=\theta$ sabittir. Böylece,

$$\frac{d\bar{\gamma}}{ds}(s)=(1-Ak(s))t(s)+\tau(s)Ab(s),$$

öyle ki

$$\cos\theta\frac{d\bar{s}}{ds}t(s)+\sin\theta\frac{d\bar{s}}{ds}b(s)=(1-Ak(s))t(s)+\tau(s)Ab(s).$$

O halde,

$$\cos\theta\frac{d\bar{s}}{ds}=(1-Ak(s)) \quad \text{ve} \quad \sin\theta\frac{d\bar{s}}{ds}=\tau(s)A$$

dır. Farz edelim ki $\tau(s_0)=0$ olacak şekilde bir $s_0\in I$ noktası vardır, bu durumda $\sin\theta=0$ olur. Böylece $\tau(s)=0$ dır. O halde $\gamma$ eğrisi bir düzlemsel eğridir. Bu da iddia (2) nin ispatını tamamlar.

Şimdi farz edelim ki $\tau(s)\neq 0$ olsun. Bu durumda, $B=A\cot\theta$ elde edilir. O halde, $B\tau(s)=1-Ak(s)$ olur. Bu da iddia (1) in ispatını tamamlar. İddia (3) ün ispatı için, farz edelim ki $\tau(s)\neq 0$ olsun. Önceki bilgilerden,

$$\frac{d\bar{b}}{ds}(s)=-\varepsilon(k(s)\sin\theta+\tau(s)\cos\theta)n(s)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\bar{\gamma}(s)$ için Frenet-Serret formülünden,

$$\frac{d\bar{s}}{ds}\frac{d\bar{b}}{d\bar{s}}(s)=-\bar{\tau}(s)\frac{d\bar{s}}{ds}\bar{n}(s)=-\bar{\tau}(s)\frac{d\bar{s}}{ds}\varepsilon\, n(s).$$

Böylece

$$\frac{d\bar{s}}{ds}\bar{\tau}(s) = k(s)\sin\theta + \tau(s)\cos\theta$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\sin\theta$ ile çarpılırsa,

$$\bar{\tau}(s)\tau(s)A = \frac{\sin^2\theta}{A}(Ak(s) + A\cot\theta\tau(s)) = \frac{\sin^2\theta}{A}$$

bulunur. Böylece, $\bar{\tau}(s)\tau(s)$ negatif olmayan sabittir.

Önerme 2.1.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 2.1.1.** $k(s) \neq 0, \tau(s) \neq 0$ olmak üzere, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ bir uzay eğrisi olsun.
$\gamma$ nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $A(\tau'(s)k(s) - k'(s)\tau(s)) - \tau'(s) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $A$ reel sayısının var olmasıdır.
Burada $\gamma$ nın Bertrand çifti $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + An(s)$ ile verilir.

**İspat.** Önerme 2.1.1 den, $\gamma$ nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $Ak(s) + B\tau(s) = 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı $A, B$ reel sayılarının var olmasıdır. Bu ifadeden $B$'yi çekelim:

O halde $B = \dfrac{1 - Ak(s)}{\tau(s)} =$ sabit olacak şekilde sıfırdan farklı bir $A$ reel sayısı vardır.

$\dfrac{1 - Ak(s)}{\tau(s)} = t$ diyelim. Her iki tarafın türevi alınırsa:

$$\frac{-Ak'(s)\tau(s) - (1 - Ak(s))\tau'(s)}{(\tau(s))^2} = 0$$

$$\Rightarrow -Ak'(s)\tau(s) - \tau'(s) + Ak(s)\tau'(s) = 0$$

$$\Rightarrow A\big(\tau'(s)k(s) - k'(s)\tau(s)\big) = \tau'(s), \quad A \in R$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Ters iddiada ayrıca doğrudur.

Şimdi $\mathbb{R}^3$ de Rektifiyan açılabilir yüzeyin ve Asli normal yüzeyin tanımlarını verip bu yüzeylerin singüler noktalarını araştıracağız.

$\mathbb{R}^3$ de bir Regle yüzey:

$$F(\gamma,\delta): I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$
$$(t,u)\to F(\gamma,\delta)(t,u)=\gamma(t)+u\delta(t)$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada, $\gamma: I\to\mathbb{R}^3$, $\delta: I\to\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve $I$ bir açık aralıktır. $\gamma$ ya dayanak eğri ve $\delta$ ya doğrultman eğri denir. $u\to\gamma(t)+u\delta(t)$ doğrularına, ana doğrular denir.

$$F(\gamma,\delta)(t,u)=\gamma(t)+u\delta(t)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial t}(t,u)\times\frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial u}(t,u)=\left[\gamma'(t)+u\delta'(t)\right]\times\delta(t)$$
$$=\gamma'(t)\times\delta(t)+u\delta'(t)\times\delta(t)\ ;\ \gamma(t)\in\mathbb{R}^3,\ \delta(t)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial t}(t,u)\times\frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial u}(t,u)=\gamma'(t)\times\delta(t)+u\delta'(t)\times\delta(t)$$

Böylece, $(t_0,u_0)$ noktasının $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin bir singüler noktası olması için gerek ve yeter şart $\gamma'(t_0)\times\delta(t_0)+u_0\delta'(t_0)\times\delta(t_0)=0$ olmasıdır.

**Tanım 2.1.1.** Eğer $\delta(t)\times\delta'(t)\equiv 0$ ise $F(\gamma,\delta)$ regle yüzeyine bir silindirik yüzey denir. O halde $\delta(t)\times\delta'(t)\neq 0$ ise $F(\gamma,\delta)$ regle yüzeyine silindirik olmayan regle yüzey denir.

$F(\gamma,\delta)$ regle yüzeyi üzerinde $\sigma'(t).\delta'(t)=0$ olacak şekilde $\sigma(t)$ eğrisini düşünelim. Bu eğriye striksiyon eğrisi adı verilir. $F(\gamma,\delta)$ silindirik olmayan bir regle yüzey ise, bu regle yüzey üzerinde striksiyon eğrisi tek olarak vardır.

**Tanım 2.1.2.** $F(\gamma,\tilde{D})(s,u)=\gamma(s)+u\tilde{D}(s)$ regle yüzeyine, $\gamma$ nın rektifiyan açılabilir yüzeyi denir.

**Tanım 2.1.3.** $F(\gamma,n)(s,u)=\gamma(s)+un(s)$ regle yüzeyine, $\gamma$ nın asli normal yüzeyi denir.

Rektifiyan açılabilir yüzeyin ve Asli normal yüzeyin singüler noktalarını incelemeye başlamadan önce bu yüzeyleri bulmaya yönelik örnekler verelim:

**Örnek 2.1.1.** Bir dairesel helisin rektifiyan açılabilir yüzeyi bir dairesel silindirdir.

Gösterelim:

$\gamma(a,b)(s)=(a\cos s, a\sin s, bs)$ dairesel helisini alalım.

$F(\gamma,\widetilde{D})(s,u)=\gamma(s)+u\widetilde{D}(s)$ olduğundan,

$$F(\gamma,\widetilde{D})(s,u)=(a\cos s, a\sin s, bs)+u\left(\left(\frac{\tau}{k}\right)(s),0,1\right)$$

dir. $\gamma$ bir dairesel helis olduğundan, $\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)=$ sabittir.

$\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)=c$ diyelim. O halde,

$$\begin{aligned}F(\gamma,\widetilde{D})(s,u)&=(a\cos s, a\sin s,0)+s(0,0,b)+u(c,0,1)\\&=(a\cos s, a\sin s,0)+s(0,0,b)+u(c,0,1)\\&=(a\cos s, a\sin s,0)+(s+u)(c,0,b+1)\end{aligned}$$

($s+u=\varphi$ diyelim.)

$$\Rightarrow F(\gamma,\widetilde{D})(s,\varphi)=(a\cos s, a\sin s,0)+\varphi\underbrace{(c,0,b+1)}_{\text{sabit}}$$

bulunur.

O halde, dairesel helisin rektifiyan açılabilir yüzeyi dairesel silindirdir.

**Örnek 2.1.2.** Bir dairesel helisin asli normal yüzeyi helikoidtir.

Gösterelim:

$$\gamma(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

birim hızlı dairesel helisini alalım:

$F(\gamma,n)(s,u)=\gamma(s)+un(s)$ olmak üzere

$n(s)=\dfrac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$ olduğundan, öncelikle $\gamma''(s)$ yi hesaplayalım:

$$\gamma'(s)=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\gamma''(s)=\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0\right)$$

$$\|\gamma''(s)\| = \left[\frac{a}{\left(a^2+b^2\right)^2}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \frac{a}{\left(a^2+b^2\right)^2}\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 0\right]^{1/2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \|\gamma''(s)\| = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow n(s) = \frac{a^2+b^2}{a}\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0\right)$$

$$\Rightarrow n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0\right)$$

elde edilir.

$F(\gamma, n)(s,u) = \gamma(s) + u n(s)$ de bulduğumuz değerler yerine yazılırsa:

$t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ olmak üzere,

$$F(\gamma,n)(t,u) = (a\cos t, a\sin t, bt) + u(-\cos t, -\sin t, 0)$$
$$= (a\cos t - u\cos t, a\sin t - u\sin t, bt)$$
$$= ((a-u)\cos t, (a-u)\sin t, bt); \quad a-u=\varphi$$

$$\Rightarrow F(\gamma,n)(t,\varphi) = (\varphi\cos t, \varphi\sin t, bt)$$

helikoidi elde edilir. O halde, dairesel helisin asli normal yüzeyi helikoidtir.

## 2.2. Rektifiyan Açılabilir Yüzeyin Singüler Noktaları

$k(s) \neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir $\gamma$ eğrisinin rektifiyan açılabilir yüzeyini düşünelim. Bir $(s_0, u_0)$ noktasının, $F(\gamma, \widetilde{D})$ yüzeyinin bir singüler noktası olması için gerek ve yeter koşulu araştıralım:

$(s_0, u_0)$ noktasının $F(\gamma, \widetilde{D})$ yüzeyinin bir singüler noktası olması için gerek ve yeter şart $\gamma'(s_0) \times \widetilde{D}(s_0) + u_0 \widetilde{D}'(s_0) \times \widetilde{D}(s_0) = 0$ olmasıdır.

$\widetilde{D}'(s)$ yi hesaplayalım:

$$\widetilde{D}(s) = \left(\frac{\tau}{k}\right)(s)t(s) + b(s) \qquad (2.2.1)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}'(s)=\frac{\tau'(s)k(s)-\tau(s)k'(s)}{k^2(s)}t(s)+\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)t'(s)+b'(s)$$

$$=\frac{\tau'(s)k(s)-\tau(s)k'(s)}{k^2(s)}t(s)+\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)k(s)n(s)-\tau(s)n(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}'(s)=\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)t(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}'(s)\times\tilde{D}(s)=\left[\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)t(s)\right]\times\left[\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)t(s)+b(s)\right]$$

$$=\begin{vmatrix} t & n & b \\ \left(\frac{\tau}{k}\right)' & 0 & 0 \\ \frac{\tau}{k} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{D}'(s)\times\tilde{D}(s)=-\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)n(s) \qquad (2.2.2)$$

$\gamma'(s_0)\times\widetilde{D}(s_0)+u_0\widetilde{D}'(s_0)\times\widetilde{D}(s_0)=0$ eşitliğinde (2.2.1) ve (2.2.2) ifadeleri yerine yazılırsa:

$$\gamma'(s_0)\times\left[\left(\frac{\tau}{k}\right)(s_0)t(s_0)+b(s_0)\right]+u_0\left[-\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)n(s_0)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \gamma'(s_0)b(s_0)-u_0\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)n(s_0)=0$$

$$\Leftrightarrow -n(s_0)-u_0\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)n(s_0)=1$$

$$\Leftrightarrow \left[1+u_0\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)\right]\underbrace{n(s_0)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow 1+u_0\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)\neq 0 \quad \text{ve} \quad u_0=-\frac{1}{\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)}$$

elde edilir.

Böylece $(s_0,u_0)$ noktasının $F(\gamma,\widetilde{D})$ yüzeyinin singüler noktası olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)\neq 0 \quad \text{ve} \quad u_0=-\frac{1}{\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0)}$$

olarak elde edilir.

Diğer yandan aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

**Önerme 2.2.1.** $\gamma:I\to\mathbb{R}^3$, $k(s)\neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir $\gamma$ eğrisi için, aşağıdakiler denktirler:

**(1)** $\gamma$ nın $F(\gamma,\widetilde{D})$ rektifiyan açılabilir yüzeyi bir singüler olmayan yüzeydir.

**(2)** $\gamma$ bir silindirik helistir.

**(3)** $\gamma$ nın $F(\gamma,\widetilde{D})$ rektifiyan açılabilir yüzeyi bir silindirik yüzeydir.

**İspat.** $(1)\Rightarrow(2)$:

$\gamma$ nın $F(\gamma,\widetilde{D})$ yüzeyi bir singüler olmayan yüzey olsun. $F(\gamma,\widetilde{D})$ yüzeyinin $I\times\mathbb{R}$ kümesindeki her noktada singüler olmayan bir yüzey olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)\equiv 0$ olmasıdır.

$\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)\equiv 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{k}\right)(s)=$ sabit.

O halde, $\gamma$ bir silindirik helistir.

$(2)\Rightarrow(3)$:

$\gamma$ bir silindirik helis olsun. Bu durumda $\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)=$ sabittir. Her iki tarafın türevi alınırsa:

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)=0 \tag{2.2.3}$$

olur. $\gamma$ nın $F(\gamma,\widetilde{D})$ yüzeyi bir silindirik yüzey midir? Yani $\widetilde{D}'(s)\times\widetilde{D}(s)=0$ mıdır?

$\tilde{D}'(s)=\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)t(s)$ idi. (2.2.3) den, $\tilde{D}'(s)=0$ olur. Buradan $\tilde{D}'(s)\times\tilde{D}(s)=0$ elde edilir. O halde $F(\gamma,\tilde{D})$ yüzeyi bir silindirik yüzeydir.

$(3)\Rightarrow(1)$:

$\gamma$ nın $F(\gamma,\tilde{D})$ yüzeyi bir silindirik yüzey olsun. Bu durumda $\tilde{D}'(s)\times\tilde{D}(s)=0$ olur.

$\gamma$ nın $F(\gamma,\tilde{D})$ yüzeyi bir singüler olmayan yüzey midir? Yani $\forall s\in I$ için, $\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)=0$ mıdır?

$\tilde{D}'(s)\times\tilde{D}(s)=0$ olduğundan $\tilde{D}'(s)$ ile $\tilde{D}(s)$ lineer bağımlıdır. O halde, $\tilde{D}'(s)=\lambda\,\tilde{D}(s)$ olacak şekilde bir $\lambda\in\mathbb{R}$ vardır.

$$\Rightarrow\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)t(s)=\lambda\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)t(s)+\lambda b(s)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)=\lambda\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)\\ \lambda=0\end{cases}$$

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)=0,\quad\forall s\in I$$

elde edilir. O halde, $\gamma$ nın $F(\gamma,\tilde{D})$ yüzeyi bir singüler olmayan yüzeydir.

Böylece, $\gamma$ nın $F(\gamma,\tilde{D})$ rektifiyan açılabilir yüzeyinin bir silindirik helis ile ilişkisi gösterilmiş oldu.

### 2.3. Asli Normal Yüzeyin Singüler Noktaları

Şimdi, $k(s)\neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir $\gamma(s)$ eğrisinin, $F(\gamma,n)(s,u)$ asli normal yüzeyini ve bu yüzey üzerinde ortaya çıkan singüleriteleri düşünelim. Daha sonra bu yüzeyin, Bertrand eğrisi ile ilişkisini veren önermeyi ifade edelim:

Öncelikle, $F(\gamma,n)(s,u)$ asli normal yüzeyinin bir singüler noktasını düşünmeye başlayalım:

$$F(\gamma,n)(s,u)=\gamma(s)+un(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(\gamma,n)}{\partial s}(s,u)\times\frac{\partial F(\gamma,n)}{\partial u}(s,u)=\gamma'(s)\times n(s)+un'(s)\times n(s)$$
$$=\underbrace{t(s)\times n(s)}+u\{[-k(s)t(s)+\tau(s)b(s)]\times n(s)\}$$

$$=\quad b(s)+u[-k(s)t(s)\times n(s)+\tau(s)b(s)\times n(s)]$$
$$=[1-uk(s)]b(s)-\tau(s)ut(s)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial s}\times\frac{\partial F}{\partial u}=(1-uk(s))b(s)-\tau(s)ut(s)$$

elde edilir.

O halde $(s_0,u_0)$ noktasının $F(\gamma,n)$ yüzeyinin bir singüler noktası olması için gerek ve yeter şart

$$\tau(s_0)=0 \text{ ve } u_0=\frac{1}{k(s_0)}$$

olmasıdır.

Şimdi "bir uzay eğrisinin asli normal yüzeyi üzerinde ne çeşit singüleriteler vardır?" sorusunun cevabını araştıralım:

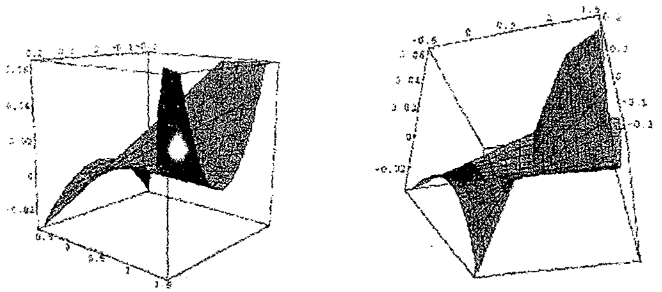
**Örnek 2.3.1.** $\gamma(t)=(t,t^2,t^4)$ ile tanımlı uzay eğrisini ele alalım. O halde $\gamma(t)$ nin asli normal doğrultusu

$$\tilde{n}(t)=(-32t^3,64t^6-2,-32t^4-12t^2)$$

dir. Böylece asli normal yüzey:

$$F(t,u)=(t-32ut^3,t^2+u(64t^6-2),t^4-u(32t^4+12t^2))$$

dir. Singüler nokta $F(0,1/2)=(0,-1,0)$ dır. Yüzeyin resmi Şekil 2.3.1. de verilmiştir.

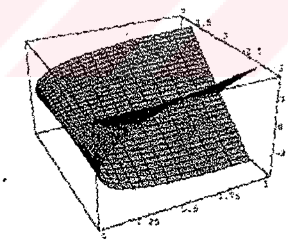


Şekil 2.3.1. Asli normal yüzey

$g:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^3,0)$ nin bir cross cap olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(0)\neq 0,\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(0)=0 \text{ ve } \det\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(0),\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(0),\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0)\right)\neq 0$$

koşullarını sağlayan, orijin etrafında bir $(x_1,x_2)$ lokal koordinat sisteminin var olmasıdır. Şekil 2.3.2. de cross cap'ın resmi verilmiştir.



Şekil 2.3.2. Cross cap

Böylece görülmektedir ki örnek 2.3.1 de elde edilen singüler nokta cross cap'a benzer. Asli normal yüzey için aşağıdaki sınıflandırma teoremine sahibiz:

**Teorem 2.3.1.** $\gamma:I\to\mathbb{R}^3$, $k(s)\neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir $\gamma$ eğrisi için, $F(\gamma,n)(s,u)$ asli normal yüzeyinin $(s_0,u_0)$ da cross cap olması için gerek ve yeter şart

$$u_0 = \frac{1}{k(s_0)},\ \tau(s_0) = 0 \quad \text{ve} \quad \tau'(s_0) \neq 0$$

olmasıdır.

**İspat.** Frenet-Serret formülünden,

$$\frac{\partial F(\gamma,n)}{\partial s}(s,u) = (1 - uk(s))t(s) + \tau(s)ub(s),$$
$$\frac{\partial F(\gamma,n)}{\partial u}(s,u) = n(s).$$

$F(\gamma,n)$ nin ikinci dereceden türevleri alınırsa

$$\frac{\partial^2 F(\gamma,n)}{\partial u \partial s}(s,u) = n'(s) = -k(s)t(s) + \tau(s)b(s)$$
$$\frac{\partial^2 F(\gamma,n)}{\partial^2 s}(s,u) = -uk'(s)t(s) + \left(1 - uk(s)^2 - u\tau(s)^2\right)n(s) + \tau'(s)b(s).$$

Göstermiştik ki $(s_0,u_0)$, $F(\gamma,n)(s,u)$ nin bir singüler noktasıdır gerek ve yeter şart

$$u_0 = \frac{1}{k(s_0)},\ \tau(s_0) = 0.$$

$F(\gamma,n)$ nin türevlerinde bu değerler yerine yazılırsa

$$\frac{\partial F(\gamma,n)}{\partial u}(s_0,u_0) = n(s_0)$$
$$\frac{\partial^2 F(\gamma,n)}{\partial u \partial s}(s_0,u_0) = -k(s_0)t(s_0)$$
$$\frac{\partial^2 F(\gamma,n)}{\partial^2 s}(s,u) = -\frac{k'(s_0)}{k(s_0)}t(s_0) + \left(1 - k(s_0)\right)n(s_0) + \tau'(s)b(s).$$

elde edilir.O halde,

$$\det\left(\frac{\partial F(\gamma,n)}{\partial u}(s_0,u_0), \frac{\partial^2 F(\gamma,n)}{\partial u \partial s}(s_0,u_0), \frac{\partial^2 F(\gamma,n)}{\partial^2 s}(s,u)\right)$$

$$= \det\left(n(s_0), -k(s_0)t(s_0), -\frac{k'(s_0)}{k(s_0)}t(s_0) + \left(1 - k(s_0)\right)n(s_0) + \tau'(s)b(s)\right)$$

$$= -k(s_0)\tau'(s_0)\det\left(n(s_0), t(s_0), b(s_0)\right) = k(s_0)\tau'(s_0) \neq 0$$

elde edilir.

Cross capın karakterizasyonu dikkate alınırsa ispat tamamlanır.

Şimdi $\gamma$ nın, $F(\gamma,n)$ asli normal yüzeyinin bir Bertrand eğrisi ile ilişkisini ortaya koyan önermeyi verebiliriz:

**Önerme 2.3.1.** $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ bir Bertrand eğrisi olsun. $F(\gamma,n)$ asli normal yüzeyinin bir singüler noktaya sahip olması için gerek ve yeter şart $\gamma$ nın bir düzlemsel eğri olmasıdır. Bu durumda $F(\gamma,n)$ nin şekli $\mathbb{R}^3$ de bir düzlemdir.

**İspat.** $(\Rightarrow)$: $(s_0,u_0)$, $F(\gamma,n)$ yüzeyinin bir singüler noktası olsun. Bu durumda, $\tau(s_0)=0$ ve $u_0=\dfrac{1}{k(s_0)}$ dır. O halde, $\tau(s_0)=0$ olacak şekilde $s_0 \in I$ noktası vardır.

Önerme 2.1.1. in ikinci iddiasından, $\gamma$ bir düzlemsel eğridir.

$(\Leftarrow)$: $\gamma$ bir düzlemsel eğri olsun.

Bu durumda $\tau(s_0)=0$ olacak şekilde $s_0 \in I$ vardır. (*)

$\gamma$ bir Bertrand eğrisi olduğundan, $Ak(s_0)+B\tau(s_0)=1$ olacak şekilde sıfırdan farklı $A,B$ reel sayıları vardır.

(*) dan,

$$A=\frac{1}{k(s_0)}, \quad A=\text{sabit}$$

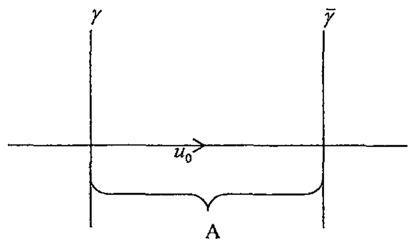
elde edilir. Bu durumda,

$$k(s_0)=\text{sabit}$$

olur.

O halde, $\gamma$ bir doğrudur.

$\gamma$ düzlemsel olduğundan, $\gamma$ nın Bertrand çifti olan $\bar{\gamma}(s)=\gamma(s)+An(s)$ de düzlemseldir.




Şekil 2.3.3. Düzlemsel Bertrand eğri çifti

Şekil 2.3.3. den, $A = u_0$ dır. $A = \dfrac{1}{k(s_0)}$ ve $A = u_0$ olduğundan,

$$u_0 = \frac{1}{k(s_0)}$$

elde edilir. O halde $\tau(s_0) = 0$ ve $u_0 = \dfrac{1}{k(s_0)}$ koşulu sağlanır.

Böylece $(s_0, u_0)$, $F(\gamma, n)$ yüzeyinin bir singüler noktasıdır.

$F(\gamma, n)$ yüzeyinin şekli nedir?

$\gamma$ bir düzlemsel eğri olsun. Bu durumda $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ olmak üzere,

$$\gamma(s) = \gamma_1(s)t(s) + \gamma_2(s)n(s) \qquad (2.3.1)$$

şeklindedir. $F(\gamma, n)(s,u) = \gamma(s) + un(s)$ de (2.3.1) yerine yazılırsa:

$$F(\gamma, n)(s,u) = (\gamma_1(s)t(s) + \gamma_2(s)n(s)) + un(s)$$
$$\Rightarrow F(\gamma, n)(s,u) = \gamma_1(s)t(s) + (\gamma_2(s) + u)n(s)$$

elde edilir.

Buradan, $F(\gamma, n)$ yüzeyinin $\mathbb{R}^3$ de bir düzlem olduğu görülür.

### 2.4. Regle Yüzeyler Üzerinde Eğriler

Şimdiye kadar, bir silindirik helisin rektifiyan açılabilir yüzeyinin bir silindirik yüzey olduğu ve bir uzay eğrisi Bertrand eğrisi ise, bu Bertrand eğrisinin asli normal yüzeyinin singüler olmayan yüzey olduğu gösterildi.

Şimdi, Regle yüzeyler üzerindeki eğriler teorisi bakış açısından Bertrand eğrilerini ve silindirik helisleri ele alalım. Bertrand eğrilerinin ve silindirik helislerin, Regle yüzeyin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği ile ilişkisini araştıralım:

$F(\gamma,\delta)$ bir regle yüzey olsun. $F(\gamma,\delta)$ nın Gauss eğriliği:

$$K(t,u) = -\frac{\left(\det(\gamma'(t),\delta(t),\delta'(t))\right)^2}{\left(EG-F^2\right)^2}$$

ve $F(\gamma,\delta)$ nın ortalama eğriliği:

$$H(t,u) = \frac{-2\left(\gamma'(t).\delta(t)\right)\det\left(\gamma'(t),\delta(t),\delta'(t)\right)+\det\left(\gamma''(t)+u\delta''(t),\gamma'(t)+u\delta'(t),\delta(t)\right)}{2\left(EG-F^2\right)^{3/2}}.$$

ile verilir. Burada,

$$\begin{aligned} E &= E(t,u) = \left\|\gamma'(t)+u\delta'(t)\right\|^2 \\ F &= F(t,u) = \gamma'(t)\delta(t) \\ G &= G(t,u) = 1 \end{aligned}$$

dir.

$\gamma$ eğrisinin bir silindirik helis olması durumunda, $\gamma$ nın rektifiyan açılabilir yüzeyinin Gauss eğriliği sıfırdır.

Bir uzay eğrisinin asli normal yüzeyinin ortalama eğriliği:

$$H(s,u) = \frac{u\left(\tau'(s)+u\left(k'(s)\tau(s)-\tau'(s)k(s)\right)\right)}{\left(EG-F^2\right)^{3/2}}$$

dir. Burada $s,\gamma$ eğrisinin yay parametresidir.

O halde, $H(s,u)=0$ olması için gerek ve yeter şart $u=0$ veya $\tau'(s)=u\left(\tau'(s)k(s)-\tau(s)k'(s)\right)$ olmasıdır. Böylece, $\gamma$ nın $F(\gamma,n)$ asli normal yüzeyinin ortalama eğriliği $\gamma$ boyunca daima sıfırdır.

Burada, $\tau'(s)=u\left(\tau'(s)k(s)-\tau(s)k'(s)\right)$ eşitliğinin ikinci çarpanını irdeleyelim:

(1) Eğer $\tau'(s_0)k(s_0)-\tau(s_0)k'(s_0)=0$ olacak şekilde bir $s_0 \in I$ noktası varsa bir $u_0 \neq 0$ için $H(s_0,u_0)=0$ olması için gerek ve yeter şart $\tau'(s_0)=0$ olmasıdır. Bu durumda

$$\underbrace{\tau'(s_0)}_{=0}k(s_0)-\underbrace{\tau(s_0)}_{\neq 0}k'(s_0)=0$$

olduğundan, $k'(s_0)=0$ olur.

Böylece, bir $u_0 \neq 0$ için $H(s_0,u_0)=0$ dır gerek ve yeter şart

$$\tau'(s_0)=k'(s_0)=0 \text{ veya } u_0=\frac{\tau'(s_0)}{\tau'(s_0)k(s_0)-\tau(s_0)k'(s_0)}$$

dır.

(2) Eğer $s_0 \in I$ için $\tau'(s_0)\neq 0$ ve $\tau'(s_0)k(s_0)-\tau(s_0)k'(s_0)=0$ ise her $u \neq 0$ için $H(s_0,u)\neq 0$ dır. Ayrıca, $\tau'(s_0)=k'(s_0)=0$ varsayımı altında her $u$ için $H(s_0,u)=0$ dır.

(3) Eğer, $\tau'(s)k(s)-\tau(s)k'(s)\neq 0$ ise ortalama eğrilik:

$$\tilde{\gamma}=\gamma(s)+\frac{\tau'(s)}{\tau'(s)k(s)-\tau(s)k'(s)}n(s)$$

ile verilen eğri boyunca sıfırdır.

$\gamma$ eğrisinin bir Bertrand eğrisi olması durumunda, $\gamma$ nın asli normal yüzeyinin ortalama eğriliği ile ilgili önermeyi vermeden önce minimal geometrik yer tanımını verelim:

**Tanım 2.4.1.** $\gamma : J \to F(\gamma,\delta)(I\times\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olsun. $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin ortalama eğriliği $\gamma(J)$ üzerinde sıfır ise $\gamma$ ya $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin minimal geometrik yeri denir.

Yukarıdaki hesaplama ve sonuç 2.1.1 den aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

**Önerme 2.4.1.** $\gamma$, Bertrand çifti $\bar{\gamma}$ olan bir Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda $\bar{\gamma}$, $\gamma$ nın asli normal yüzeyinin minimal geometrik yeridir.

**İspat.** $\gamma$, Bertrand çifti $\bar{\gamma}$ olan bir Bertrand eğrisi olsun. Sonuç 2.1.1 den,

$$A\left(\tau'(s)k(s)-\tau(s)k'(s)\right)-\tau'(s)=0 \qquad (2.4.1)$$

olacak şekilde bir $A$ reel sayısı vardır ve $\bar{\gamma}(s)=\gamma(s)+An(s)$ dir. Bu durumda,

$H(\bar{\gamma}(s))=?$

Bir $\gamma$ eğrisinin asli normal yüzeyi için ortalama eğriliğin,

$$H(s,u)=\frac{u(\tau'(s)+u(k'(s)\tau(s)-\tau'(s)k(s)))}{(EG-F^2)^{3/2}}$$

olduğunu biliyoruz. Ohalde $\bar{\gamma}(s)$ eğrisi için,

$$H(\bar{\gamma}(s))=H(s,A)=\frac{A(\tau'(s)+A(k'(s)\tau(s)-\tau'(s)k(s)))}{(EG-F^2)^{3/2}} \tag{2.4.2}$$

olur. (2.4.1) ifadesinden,

$A(\tau'(s)k(s)-\tau(s)k'(s))-\tau'(s)=0$

$\Rightarrow k'(s)\tau(s)-\tau'(s)k(s)=-\dfrac{\tau'(s)}{A}$

dir. Bu değer (2.4.2) de yerine yazılırsa:

$$H(\bar{\gamma}(s))=H(s,A)=\frac{A\left(\tau'(s)+A\left(-\dfrac{\tau'(s)}{A}\right)\right)}{(EG-F^2)^{3/2}}$$

elde edilir. Buradan $H(\bar{\gamma}(s))=0$ bulunur.

O halde $\bar{\gamma}$, $\gamma$ nın asli normal yüzeyinin minimal geometrik yeridir.

$\gamma$, rektifiyan açılabilir yüzeyinin geodeziğidir. (Teorem 2.4.1.)

$\gamma$, asli normal yüzeyinin asimptotik eğrisidir. (Teorem 2.4.2.)

Bu ifadelerin ispatlarını vermeden önce bu ispatlar için gerekli olacak önerme ve sonuçları verelim:

**Önerme 2.4.2.** $F(\gamma,\delta)(s,u)=\gamma(s)+u\delta(s)$, $\|\delta(s)\|=1$ olacak şekilde bir regle yüzey olsun. $\sigma(s)=\gamma(s)+u(s)\delta(s)$, $F(\gamma,\delta)$ üzerinde bir eğri olsun. Burada $s$, $\sigma(s)$ nin yay parametresidir. $\sigma$ üzerinde aşağıdaki üç koşulu düşünelim:

**(1)** $\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın striksiyon çizgisidir.

**(2)** $\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziğidir.

**(3)** $\sigma'(s)$ ve $\delta(s)$ arasındaki açılar sabittirler.

Eğer, üç koşulun herhangi ikisi sağlanırsa, diğer koşul sağlanır.

Aşağıdaki koşullar ayrı ayrı yukarıdaki koşullara denktirler:

**I.** $\sigma'(s) . \delta'(s) = 0$

**II.** $\sigma''(s) . \delta(s) = 0$

Niçin bu koşula denk olduğunu gösterelim:

$\sigma$, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziği ise $\sigma''(s) = \lambda N(s)|_\sigma$ olacak şekilde bir $\lambda$ reel sayısı vardır. Bu eşitlikte her iki taraf $\delta(s)$ ile çarpılırsa

$$\sigma''(s).\delta(s) = \lambda N(s).\delta(s) \tag{2.4.3}$$

elde edilir. $N(s)$ yi elde edelim:

$$N(s) = \frac{\gamma'(s) \times \delta(s) + u\delta'(s) \times \delta(s)}{\|\gamma'(s) \times \delta(s) + u\delta'(s) \times \delta(s)\|}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı $\delta(s)$ ile çarpılırsa:

$$N(s).\delta(s) = 0$$

elde edilir. Bu değer, (2.4.3) de yerine yazılırsa:

$$\sigma''(s).\delta(s) = 0$$

bulunur.

**(3)** $\sigma'(s) . \delta(s) =$ sabit.

**İspat.** $(\sigma'(s).\delta(s))' = \sigma''(s).\delta(s) + \sigma'(s).\delta'(s)$ eşitliğinde,

(1) ve (2) sağlansın. O halde $\sigma'(s) . \delta(s) =$ sabittir.

(1) ve (3) sağlansın. O halde $\sigma''(s) . \delta(s) = 0$ dır.

(2) ve (3) sağlansın. O halde $\sigma'(s) . \delta'(s) = 0$ dır.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi geodezikleri kullanarak silindirik yüzeyler hakkında bir karakterizasyon verebiliriz:

**Sonuç 2.4.1.** Farz edelim ki; $F(\gamma,\delta)(s,u) = \gamma(s) + u\delta(s)$ regle yüzeyi üzerinde $\sigma'_i(s)$ ve $\delta(s)$ arasındaki açılar sabit olacak şekilde iki ayrık $\sigma_i(s)$ $(i = 1,2)$ geodezikleri var olsun. Bu durumda $F(\gamma,\delta)(s,u)$ regle yüzeyi bir silindirik yüzeydir ve $\sigma_i(s)$ nin her ikisi de silindirik helistirler. Ayrıca $\delta(s)$ nin doğrultusu $\sigma_i(s)$ nin Darboux vektörünün doğrultusuna eşittir.

**İspat.** $\sigma'_i(s).\delta(s)=$sabit ve $\sigma_i(s)$ ler geodezikler olsun. Bu durumda Önerme 2.4.1 den, $\sigma_i(s)$ ler $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin striksiyon çizgileridir.

Kabul edelim ki $F(\gamma,\delta)$ silindirik olmayan yüzey olsun. Bu durumda striksiyon çizgisinin tekliğinden, $\sigma_1(s)=\sigma_2(s)$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $F(\gamma,\delta)$ regle yüzeyi bir silindirik yüzeydir. Böylece iddianın ilk kısmı ispatlandı. Şimdi ikinci kısmını ispatlayalım:

$\sigma_i(s)$ lerin ikisi birden silindirik helis midirler? Bunu ispatlamak için önerme 2.2.1 den yararlanacağız. O halde $F(\gamma,\delta)$, $\sigma_i(s)$ nin rektifiyan açılabiliri midir ?

Bu sorunun cevabını vermek için önce "$\delta(s)$ ile $\sigma_i(s)$ nin Darboux vektörü aynı doğrultudamıdır?" sorusuna cevap verelim:

Yani, $w(s)\times\delta(s)=0$ mıdır?

Burada $w(s)$, $\sigma_i(s)$ nin Darboux vektörüdür.

$\sigma_i$, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziği olduğundan, $\sigma_i''(s)\delta(s)=0$ dır.

O halde $\delta(s)$, $\sigma_i(s)$ nin rektifiyan düzleminde yatar. Yani,

$\delta(s)=\lambda(s)t^*(s)+\mu(s)b^*(s)$ olacak şekilde $\lambda(s)$, $\mu(s)$ vardır. Burada $t^*(s)=\sigma'_i(s)$ ve $b^*(s)$, $\sigma_i$ nin binormal vektörüdür.

$\delta(s)=\lambda(s)t^*(s)+\mu(s)b^*(s)$ ifadesinde her iki tarafın türevi alınırsa:

$\delta'(s)=\lambda'(s)t^*(s)+\mu'(s)b^*(s)+\big(\lambda(s)k^*(s)-\mu(s)\tau^*(s)\big)n^*(s)$

elde edilir. Burada $k^*(s)$ ve $\tau^*(s)$, $\sigma_i$ nin sırasıyla eğrilik ve torsiyonudur. $F(\gamma,\delta)$ yüzeyi silindirik bir yüzey olduğundan $\delta\times\delta'=0$ dır. $\delta\times\delta'=0\Rightarrow\delta'=\lambda\delta$ dır. O halde,

$$\det(\sigma_i',\delta,\delta')=0$$

dır. Buradan,

$$\big(\mu(s)\tau^*(s)-\lambda(s)k^*(s)\big)\mu(s)=0$$

elde edilir.

$\mu(s_0)=0$ olacak şekilde bir $s_0$ noktası varsa $\delta(s_0)=\lambda(s_0)t^*(s_0)$ olur. Bu durum, $\sigma_i$ nin ana doğrular için enlem olması varsayımı ile çelişir. Böylece

$$\mu(s)\tau^*(s)-\lambda(s)k^*(s)=0$$

dır. O halde,

$$\mu(s)\tau^*(s)=\lambda(s)k^*(s) \tag{2.4.4}$$

elde edilir.

$\delta(s)=\lambda(s)t^*(s)+\mu(s)b^*(s)$ ifadesinde her iki taraf $\tau^*(s)$ ile çarpılırsa:

$$\tau^*(s)\delta(s)=\tau^*(s)\lambda(s)t^*(s)+\tau^*(s)\mu(s)b^*(s)$$

olur. (2.4.4) den,

$$\begin{aligned}&=\tau^*(s)\lambda(s)t^*(s)+k^*(s)\lambda(s)b^*(s)\\&=\lambda(s)\big(\tau^*(s)t^*(s)+k^*(s)b^*(s)\big)\\ \tau^*(s)\delta(s)&=\lambda(s)w(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde, $\sigma_i(s)$ nin Darboux vektörü ile $\delta(s)$ aynı doğrultuya sahiptir.

Şimdi, "F$(\gamma,\delta)$, $\sigma_i(s)$ nin rektifiyan açılabiliri midir?" sorusunu cevaplamaya çalışalım:

$F(\gamma,\delta)$ yüzeyi açılabilir olduğundan ve $\sigma_i(s)$ nin Darboux vektörü ile $\delta(s)$ aynı doğrultuda olduğundan, $\sigma_i(s)$ nin rektifiyan düzlemi $F(\gamma,\delta)$ nın tanjant düzlemidir. O halde $F(\gamma,\delta)$, $\sigma_i(s)$ nin rektifiyan açılabilir yüzeyidir. Önerme 2.2.1. den, $\sigma_i(s)$ lerin ikisi birden silindirik helistirler. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.4.1., geodeziklerin varlığı ile silindirik yüzeylerin bir karakterizasyonunu verir. Sonuç 2.4.1. e göre; bir silindirik yüzey, bir silindirik helisin rektifiyan açılabiliridir öyle ki bu silindirik helis, $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin geodeziğidir.

Şimdi, "Ne zaman bir regle yüzey bir eğrinin rektifiyan açılabilir yüzeyidir?" sorusunun cevabını araştıralım:

**Teorem 2.4.1.** $F(\gamma,\delta)(s,u)=\gamma(s)+u\delta(s)$, $\|\delta(s)\|=1$ olacak şekilde singüler olmayan bir regle yüzey olsun.

$\sigma(s)=\gamma(s)+u(s)\delta(s)$, $k(s)\neq 0$ olacak şekilde $F(\gamma,\delta)$ yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Aşağıdaki koşullar denktirler:

**(1)** *$F(\gamma,\delta)$, $\sigma(s)$ nin rektifiyan açılabilir yüzeyidir.*

**(2)** Ana doğrular için enlem olan $\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin geodeziğidir ve $F(\gamma,\delta)$ bir açılabilir yüzeydir.

**(3)** Ana doğrular için enlem olan $\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin geodeziğidir ve $F(\gamma,\delta)$ nın Gauss eğriliği $\sigma(s)$ boyunca sıfırdır.

**İspat.** $(1)\Rightarrow(2)$:

$F(\gamma,\delta)$, $\sigma(s)$ nin rektifiyan açılabilir yüzeyi olsun. Bu durumda:

$$\det\left(\sigma',\tilde{D},\tilde{D}'\right)=0 \tag{2.4.5}$$

dır.

$F(\gamma,\delta)$ açılabilir mi? Yani $\det(\gamma',\delta,\delta')=0$ mı?

$F(\gamma,\delta)$, $\sigma(s)$ nin rektifiyan açılabilir yüzeyi olduğundan;

$$\gamma=\sigma\Rightarrow\delta=\tilde{D} \tag{2.4.6}$$

olur. (2.4.5) ve (2.4.6) dan,

$$\det(\gamma',\delta,\delta')=\det\left(\sigma',\tilde{D},\tilde{D}'\right)=0\Rightarrow\det(\gamma',\delta,\delta')=0$$

elde edilir. O halde, $F(\gamma,\delta)$ yüzeyi açılabilirdir.

$\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziği mi? Yani, $\sigma''(s)=\lambda N|_{\sigma(s)}$ olacak şekilde bir $\lambda\in\mathbb{R}$ var mı?

(2.4.6) dan,

$$N=\frac{\left(\sigma'\times\tilde{D}\right)+u\left(\tilde{D}'\times\tilde{D}\right)}{\left\|\left(\sigma'(s)\times\tilde{D}\right)+u\left(\tilde{D}'\times\tilde{D}\right)\right\|}$$

olur.

$$\tilde{D}=\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)t(s)+b(s),\quad \left(\frac{\tau}{k}\right)(s)=\mu(s)$$

diyelim. Bu durumda:

$$N=\frac{[t\times(\mu t+b)]+u[\lambda t\times(\mu t+b)]}{\left\|\left(\sigma'\times\tilde{D}\right)+u\left(\tilde{D}'\times\tilde{D}\right)\right\|}$$

$$=\frac{-n+u\lambda(-n)}{\|-n+u\lambda(-n)\|}=-\frac{1}{(1+u\mu)^2}(1+u\mu)n$$

$$=-\frac{1}{1+u\mu}n\ ;\ -\frac{1}{1+u\mu}=\eta$$

diyelim. $N=\eta n$ olacak şekilde $\eta\in\mathbb{R}$ vardır.O halde $\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziğidir.

$(2)\Rightarrow(3)$:

$\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin geodeziği ve $F(\gamma,\delta)$ yüzeyi açılabilir olsun. Bu durumda,

$$\det(\gamma',\delta,\delta')=0 \tag{2.4.7}$$

dır. $F(\gamma,\delta)$ nın Gauss eğriliği $\sigma(s)$ boyunca sıfır mıdır? Yani,

$$K(s,u)|_{\sigma(s)}=-\frac{[\det(\sigma',\delta,\delta')]^2}{\left(EG-F^2\right)^2}=0$$

mıdır?

$$\sigma(s)=\gamma(s)+u(s)\delta(s)$$
$$\sigma'(s)=\gamma'(s)+u'(s)\delta(s)+u(s)\delta'(s)$$

O halde, (2.4.7) eşitliği dikkate alınır ve $\sigma'(s)$ yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}\det(\sigma',\delta,\delta')&=\det(\gamma'+u'\delta+u\delta',\delta,\delta')\\&=\det(\gamma',\delta,\delta')+\det(u'\delta,\delta,\delta')+\det(u\delta',\delta,\delta')\\&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow K(s,u)|_{\sigma(s)}=0$$

elde edilir.

$(3)\Rightarrow(1)$:

$\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziği ve $F(\gamma,\delta)$ nın Gauss eğriliği $\sigma(s)$ boyunca sıfır olsun. Bu durumda $F(\gamma,\delta)$, $\sigma(s)$ nin rektifiyan açılabilir yüzeyi midir?

$\sigma(s)$, ana doğrular için enlem olduğundan varsayabiliriz ki $\sigma(s)=\gamma(s)$ dir.

$F(\gamma,\delta)$ nın Gauss eğriliği:

$$K(s,u)=-\frac{[\det(\gamma',\delta,\delta')]^2}{\left(EG-F^2\right)^2}$$

ve $K(s,u)$, $\gamma(s)$ boyunca sıfır olduğundan

$$\det(\gamma',\delta,\delta')=0 \tag{2.4.8}$$

olur. Ayrıca, $\gamma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziği olduğundan $\gamma''(s)\delta(s)=0$ dır.

Yani $\delta(s)$, $\gamma(s)$ noktasında $\gamma$ eğrisinin rektifiyan düzleminde yatar.O halde, $\delta(s)=\lambda(s)t(s)+\mu(s)b(s)$ olacak şekilde $\lambda(s),\mu(s)$ vardır.

Burada $t(s)=\gamma'(s)$ ve $b(s),\gamma$ nın binormal vektörüdür. Frenet formülünden ve (2.4.8) den,

$$\begin{aligned}
&\delta'(s)=\lambda'(s)t(s)+\mu'(s)b(s)+\big(\lambda(s)k(s)-\mu(s)\tau(s)\big)n(s)\\
&\Rightarrow \det(\gamma',\delta,\delta')=\big(\mu(s)\tau(s)-\lambda(s)k(s)\big)\mu(s)=0\\
&\Rightarrow \big[\mu(s)\tau(s)-\lambda(s)k(s)\big]\mu(s)=0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $\mu(s_0)=0$ olacak şekilde bir $s_0$ noktası varsa $\delta(s_0)=\lambda(s_0)t(s_0)$ olur. Bu durum $\gamma$ nın ana doğrular için enlem olması varsayımı ile çelişir. O halde,

$$\mu(s)\tau(s)-\lambda(s)k(s)=0$$

$$\mu(s)\tau(s)=\lambda(s)k(s) \tag{2.4.9}$$

$\delta(s)=\lambda(s)t(s)+\mu(s)b(s)$ ifadesinde her iki taraf $\tau(s)$ ile çarpılırsa:

$$\tau(s)\delta(s)=\tau(s)\lambda(s)t(s)+\tau(s)\mu(s)b(s)$$

(2.4.9) dan,

$$\begin{aligned}
&=\tau(s)\lambda(s)t(s)+k(s)\lambda(s)b(s)\\
&=\lambda(s)\big(\tau(s)t(s)+k(s)b(s)\big)\\
\tau(s)\delta(s)&=\lambda(s)D(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $D(s)$, $\gamma$ boyunca Darboux vektör alanıdır.

Yani, $\sigma$ nın rektifiyan düzlemi, $F(\gamma,\delta)$ nın tanjant düzlemidir. O halde, $F(\gamma,\delta)$, $\sigma$ nın rektifiyan açılabilir yüzeyidir.

Bir silindirik helisin rektifiyan açılabiliri bir silindirik yüzey olduğundan, teorem 2.4.1 in basit bir sonucu olarak silindirik yüzeylerin diğer bir karakterizasyonuna sahibiz:

**Sonuç 2.4.2.** Varsayalım ki $F(\gamma,\delta)$ singüler olmayan bir açılabilir yüzey olsun. Eğer $F(\gamma,\delta)$ üzerinde, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziği olan sıfırdan farklı eğrilikli bir silindirik helis varsa $F(\gamma,\delta)$ bir silindirik yüzeydir.

Ayrıca, silindirik yüzeylerin diğer bir karakterizasyonunu verelim:

**Sonuç 2.4.3.** $F(\gamma,\delta)(s,u)=\gamma(s)+u\delta(s)$ singüler olmayan bir regle yüzey olsun. Eğer, $F(\gamma,\delta)$ nın her noktada ana doğrulara dik ve eğriliği sıfırdan farklı olan düzlemsel bir geodeziği varsa $F(\gamma,\delta)$ bir silindirik yüzeydir.

**İspat.** Hipotezi sağlayan eğriye $\sigma(s)$ diyelim. $\sigma(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanlarının bir bazı $\{t^*,n^*,b^*\}$ ve $\sigma(s)$ nin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla $k^*(s)$ ve $\tau^*(s)$ olsun. Bu durumda, $\sigma(s)$ düzlemsel olduğundan $\tau^*(s)=0$ dır.

$\tau^*(s)=0$ olduğunda $\left(\dfrac{\tau^*}{k^*}\right)(s)=0=\text{sabit}$, $k^*(s)\neq 0$ olur. O halde, $\sigma(s)$ bir silindirik helistir.

Eğer, $F(\gamma,\delta)$ nın bir açılabilir yüzey olduğunu gösterirsek sonuç 2.4.2 nin koşulları sağlanacağından ispat tamamlanmış olur. O halde, $F(\gamma,\delta)$ bir açılabilir yüzey midir? Hipotezden, $\sigma'(s).\delta(s)=0$ olduğundan $\delta(s)$ nin doğrultusu ile asli doğrultu aynıdır. Buda $F(\gamma,\delta)$ nın bir açılabilir yüzey olduğu anlamına gelir. O halde $F(\gamma,\delta)$ açılabilir yüzeyi üzerinde, $F(\gamma,\delta)$ nın geodeziği olan sıfırdan farklı eğrilikli bir silindirik helis vardır. Sonuç 2.4.2 den, $F(\gamma,\delta)$ bir silindirik yüzeydir.

Şimdi Regle yüzeyler üzerindeki asimptotik eğrileri düşünelim. Aşağıdaki lemmayı Öklid düzleminde verelim:

**Lemma 2.4.1.** $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminin bir bazı $\{e_1,e_2\}$ ve $\mathbb{R}^2$ de iki birim vektör $v_1,v_2$ olsun.

Farz edelim ki $\lambda>0$ ve $\alpha$, $v_1=\lambda(e_1+\alpha e_2)$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda $v_2=\lambda(e_1-\alpha e_2)$ olması için gerek ve yeter şart

$$v_2.e_1=v_1.e_1 \text{ ve } v_1.v_2=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

dir.

$F(\gamma,\delta)(s,u)=\gamma(s)+u\delta(s)$ singüler olmayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda $\gamma(s)$ ana doğrular için enlemdir. Eğer Gauss eğriliği $\gamma(s)$ boyunca negatif ise $F(\gamma,\delta)$ nın

$\gamma(s)$ boyunca asli eğrilikleri sırasıyla $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olan iki farklı $e_1(s), e_2(s)$ asli doğrultuları vardır. Varsayalım ki $\|e_i(s)\| = 1$ olsun. Aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

**Önerme 2.4.3.** Yukarıdaki koşullar altında $\gamma(s)$ nin bir asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\gamma'(s).e_1(s) = \delta(s).e_1(s) \text{ ve } \delta(s).\gamma'(s) = \frac{k_2(s) + k_1(s)}{k_2(s) - k_1(s)}$$

dır.

**İspat.** $\gamma(s)$ noktasında,

$$v_1 = e_1(s) + \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}e_2(s)$$

$$v_2 = e_1(s) - \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}e_2(s)$$

ile verilen iki teğet vektörü düşünelim. $v_1, v_2$ vektörleri asimptotik doğrultular mıdır? Yani; $S$, $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin şekil operatörü olmak üzere $S(v_1).v_1 = 0$ ve $S(v_2).v_2 = 0$ mıdır?

Bunun için önce $S(v_1)$ ve $S(v_2)$ vektörlerini hesaplayalım:

$$S(v_1) = S\left(e_1(s) + \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}e_2(s)\right)$$

$S$ şekil operatörü lineer olduğundan,

$$= S(e_1(s)) + \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}S(e_2(s))$$

$e_1(s)$ ve $e_2(s)$; asli eğrilikleri sırasıyla $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olan asli doğrultular olduğundan,

$$S(v_1) = k_1(s)e_1(s) + \sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}k_2(s)e_2(s)$$

elde edilir.

Aynı işlemler yapılarak $S(v_2)$ de kolay bir şekilde bulunabilir. O halde,

$$S(v_1)=k_1(s)e_1(s)+k_2(s)\sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}e_2(s)$$

$$S(v_2)=k_1(s)e_1(s)-k_2(s)\sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}e_2(s)$$

elde edilir.

$$\Rightarrow S(v_1).v_1=\left(k_1(s),k_2(s)\sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}\right)\left(1,\sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}\right)$$

$$=k_1(s)+k_2(s)\left|\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right|$$

$\gamma(s)$ boyunca Gauss eğriliği negatif olarak varsayıldığından,

$$S(v_1).v_1=k_1(s)-k_2(s)\frac{k_1(s)}{k_2(s)}=0$$

elde edilir.

Aynı işlemler yapılarak $S(v_2).v_2=0$ elde edilir.

O halde $v_1$ ve $v_2$ vektörleri, $\gamma(s)$ noktasındaki asimptotik doğrultuları verir. Bir regle yüzeyde, doğrultmanlar asimptotik doğrultulardır. O halde, $\delta(s)$ bir asimptotik doğrultudur ve aynı zamanda birim vektördür. Bu durumda:

$$\delta(s)=\lambda(s)\left(e_1(s)+\sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}e_2(s)\right)$$

olduğunu varsayabiliriz. Ayrıca, asimptotik eğrilerin her noktasındaki teğeti asimptotik doğrultu olduğundan, $\gamma'(s)$ teğeti de asimptotik doğrultudur ve birim vektördür. O halde $\delta(s)$ ye eşlik eden asimptotik doğrultu:

$$\gamma'(s)=\lambda(s)\left(e_1(s)-\sqrt{-\frac{k_1(s)}{k_2(s)}}e_2(s)\right)$$

olur. Burada, $\lambda(s)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}}}$ dir. Eğer $\alpha(s)=\sqrt{-\dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}}$ ise,

$$\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}=\frac{k_2(s)+k_1(s)}{k_2(s)-k_1(s)}$$

dir. Lemma 2.4.1. den,

$$\gamma'(s).e_1(s)=\delta(s).e_1(s) \text{ ve } \delta(s).\gamma'(s)=\frac{k_2(s)+k_1(s)}{k_2(s)-k_1(s)}$$

elde edilir.

**Sonuç 2.4.4.** $F(\gamma,\delta)(s,u)=\gamma(s)+u\delta(s)$ singüler olmayan bir regle yüzey ve $\gamma(s)$ bu yüzey üzerinde bir eğri olsun. Farz edelim ki $\gamma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın bir asimptotik eğrisidir. $k_i(s)(i=1,2)$, $\gamma(s)$ noktasında iki farklı asli eğrilik olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktirler:

**(1)** $\gamma'(s)$ ve $\delta(s)$ arasındaki açı sabittir.

**(2)** $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)(s)$ sabittir.

**İspat.** $(1)\Rightarrow(2)$:

$\gamma'(s)$ ve $\delta(s)$ arasındaki açı sabit olsun. O halde, $\delta(s).\gamma'(s)=t$, $t=$sabit diyelim.

Önerme 2.4.3. den,

$$\delta(s).\gamma'(s)=\frac{k_2(s)+k_1(s)}{k_2(s)-k_1(s)}$$

olduğundan,

$$\frac{k_2(s)+k_1(s)}{k_2(s)-k_1(s)}=t$$

elde edilir.

$\Rightarrow k_2(s)+k_1(s)=tk_2(s)\text{-t}k_1(s)$

$\Rightarrow (1-t)\ k_2(s)=\text{-}(1+t)\ k_1(s)$

$\Rightarrow \left(\frac{k_1}{k_2}\right)(s)=-\frac{1-t}{1+t}$=sabit

elde edilir.

$(2)\Rightarrow(1)$:

$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)(s)=t$, $t=$sabit olsun. O halde,

$$k_1(s)=tk_2(s) \tag{2.4.10}$$

$\delta(s).\gamma'(s)=\dfrac{k_2(s)+k_1(s)}{k_2(s)-k_1(s)}$ ifadesinde (2.4.10) eşitliği yerine yazılırsa:

$$\delta(s).\gamma'(s)=\frac{k_2(s)+tk_2(s)}{k_2(s)-tk_2(s)}=\frac{1+t}{1-t}=\text{sabit}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Sonuç 2.4.5.** $F(\gamma,n)$ asli normal yüzeyinin bir asimptotik eğrisi olan $\gamma$ boyunca $F(\gamma,n)$ nin ortalama eğriliği sıfırdır. Ters iddia da ayrıca doğrudur.

**İspat.** $(\Rightarrow)$ : $\gamma$ bir asimptotik eğri olsun. Bu durumda Önerme 2.4.3 den,

$$\delta(s).\gamma'(s)=\frac{k_2(s)+k_1(s)}{k_2(s)-k_1(s)}$$

dir. $\delta(s)=n(s)$ olduğundan,

$$n(s).\gamma'(s)=\frac{k_2(s)+k_1(s)}{k_2(s)-k_1(s)}=0$$

$\Rightarrow k_2(s)+k_1(s)=0$

$H=k_2(s)+k_1(s)$ olduğundan, $\gamma$ eğrisi boyunca $F(\gamma,n)$ asli normal yüzeyinin ortalama eğriliği sıfırdır.

$(\Leftarrow)$: $F(\gamma,n)$ yüzeyinin ortalama eğriliği $\gamma$ boyunca sıfır olsun. $\gamma$ bir asimptotik eğri midir?

$F(\gamma,n)(s,u)=\gamma(s)+un(s)$ yüzeyinin normali:

$$N=\frac{\gamma'(s)\times n(s)+un'(s)\times n(s)}{\|\gamma'(s)\times n(s)+un'(s)\times n(s)\|}$$

dir.

$$n.N=\frac{n.(\gamma'\times n)+u[n.(n'\times n)]}{\|\gamma'(s)\times n(s)+un'(s)\times n(s)\|}$$
$$=\frac{\det(n,\gamma',n)+u\det(n,n',n)}{\|\gamma'\times n+un'\times n\|}=0$$

$\Rightarrow n.N=0$

elde edilir. O halde, $F(\gamma,n)$ asli normal yüzeyinin dayanak eğrisi daima bir asimptotik eğridir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$F(\gamma,\delta)$ yüzeyi üzerindeki bir $\sigma(s)$ eğrisinin bir asimptotik eğri olması durumunda $\sigma(s)$ nin asli normal yüzeyinin ortalama eğriliği ile ilgili teoremi verelim:

**Teorem 2.4.2.** $F(\gamma,\delta)(s,u)=\gamma(s)+u\delta(s)$ bir regle yüzey ve $\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktirler:

**(1)** $F(\gamma,\delta)$, $\sigma(s)$ nin asli normal yüzeyidir.

**(2)** Ana doğrular için enlem olan $\sigma(s)$ eğrisi, $F(\gamma,\delta)$ nın minimal asimptotik eğrisidir.

**İspat.** $(2)\Rightarrow(1)$:

$\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın minimal asimptotik eğrisi olsun. O halde,

(a) $\sigma(s)$ bir asimptotik eğridir.

(b) $\sigma(s)$ boyunca $F(\gamma,\delta)$ nın ortalama eğriliği sıfırdır.

(b) den,

$$H=k_2(s)+k_1(s)=0 \tag{2.4.11}$$

dır. Burada $k_1(s),k_2(s)$; $F(\gamma,\delta)$ yüzeyinin $\sigma(s)$ noktasındaki asli eğrilikleridir. $\sigma(s)$ bir asimptotik eğri olduğundan, önerme 2.4.3. ve eşitlik (2.4.11) den,

$$\delta(s).\sigma'(s)=\frac{k_2(s)+k_1(s)}{k_2(s)-k_1(s)}=0$$

olur. O halde, $\sigma'(s)$, $\delta(s)$ ye diktir.

Asimptotik eğrilerin asli normal vektörü, yüzeyin normaline dik olduğundan $n^*.N=0$ dır. Burada $n^*$, $\sigma(s)$ nin asli normal vektörüdür. O halde,

$$n^*.N=0 \qquad \delta.N=0$$

$$ve$$

$$n^*.\sigma'=0 \qquad \delta.\sigma'=0$$

dır. Yani $\sigma(s)$ nin asli normal vektörü, $\delta(s)$ ye paraleldir.

O halde $F(\gamma,\delta)$, $\sigma(s)$ nin asli normal yüzeyidir.

$(1)\Rightarrow(2)$:

$F(\gamma,\delta)$, $\sigma(s)$ nin asli normal yüzeyi olsun. Ana doğrular için enlem olan $\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nın minimal asimptotik eğrisi midir?

İspata geçmeden önce $\sigma(s)$ nin asli normal yüzeyinin $F(\gamma,\delta)$ olması durumunda, $\sigma(s)$ nin minimal asimptotik eğri olması için yeni karakterizasyonlar elde edelim:

$\sigma(s)$ ana doğrular için enlem olduğundan,

$$\sigma(s) = \gamma(s) + u(s)\delta(s)$$

şeklindedir.

$$\sigma'(s) = \frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial s}(s,u(s)) + u'(s)\frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial u}(s,u(s))$$

olduğundan,

$$\sigma'(s).\delta(s) = \frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial s}\delta(s) + u'(s)\left(\frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial u}\delta(s)\right)$$

dır.

$(2) \Rightarrow (1)$ in ispatından,

$$\sigma'(s).\delta(s) = 0$$

olduğu elde edilmişti. O halde,

$$u'(s) = -\frac{\dfrac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial s}\delta(s)}{\dfrac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial u}\delta(s)}$$

dir. Ayrıca,

$$\frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial u}\delta(s) = \delta(s).\delta(s) = 1$$

olduğundan,

$$u'(s) = -\frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial s}\delta(s)$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{\partial F(\gamma,\delta)}{\partial s} = \gamma'(s)$$

olduğundan,

$$u'(s) = -\gamma'(s).\delta(s)$$

dir.

O halde, "$\sigma(s)$ minimal asimptotik eğridir gerek ve yeter şart $u'(s) = -\gamma'(s).\delta(s)$ dir."

Ayrıca, $\sigma(s)$ nin minimal asimptotik eğri olması durumunda $\sigma'(s).\delta(s)=0$ olduğundan, $\sigma'(s).\delta(s)=0$ olması için gerek ve yeter şart $u'(s)=-\gamma'(s).\delta(s)$ olmasıdır.

Diğer taraftan, bir uzay eğrisinin asli normal yüzeyinin ortalama eğriliği daha önce ifade edilmişti. $\sigma(s)$ minimal asimptotik eğri olduğundan, $F(\gamma,n)$ nin ortalama eğriliğini hesaplamamızı sağlayan ifadede

$$u'(s)=-\gamma'(s).\delta(s) \text{ ve } H(s,u)|_{\sigma(s)}=0$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\det(\gamma''(s)+u(s)\delta''(s),\gamma'(s)+u(s)\delta'(s),\delta(s))+2\det(\delta'(s),\gamma'(s),\delta(s))u'(s)=0$$

elde edilir. O halde, $\sigma(s)$ bir minimal asimptotik eğridir gerek ve yeter şart $\det(\gamma''(s)+u(s)\delta''(s),\gamma'(s)+u(s)\delta'(s),\delta(s))+2\det(\delta'(s),\gamma'(s),\delta(s))u'(s)=0$ dır.

Şimdi ispatı verebiliriz:

$F(\gamma,\delta)$, $\sigma(s)$ nin asli normal yüzeyi ise $\sigma(s)$ nin asli normal vektörü, $\delta(s)$ ye paraleldir. Bu durumda

$$\delta(s).\sigma'(s)=n(s).\sigma'(s)=0$$

elde edilir. O halde $\sigma(s)$, $F(\gamma,\delta)$ nı n minimal asimptotik eğrisidir.

**Önerme 2.4.4.** $F(\gamma,\delta)=\gamma(s)+u\delta(s)$ singüler olmayan bir regle yüzey olsun. Eğer, $F(\gamma,\delta)$ üzerinde ana doğrular için enlem olan üç ayrık minimal asimptotik eğri varsa $F(\gamma,\delta)$ bir helikoidtir. Bu durumda, ana doğrular için enlem olan minimal asimptotik eğriler, dairesel helistirler.

**İspat.** $F(\gamma,\delta)$ üzerinde ana doğrular için enlem olan üç ayrık minimal asimptotik eğri var olsun. Teorem 2.4.2 den, $F(\gamma,\delta)$ bu eğrilerin asli normal yüzeyidir. $F(\gamma,\delta)$ üzerinde ana doğrular için enlem olan üç ayrık minimal asimptotik eğri varsa ortalama eğrilik daima sıfırdır. O halde, $F(\gamma,\delta)$ yüzeyi bir minimal yüzeydir. Klasik olarak bilinir ki, bir minimal regle yüzey bir helikoidtir. Bu durumda, ana doğrular için enlem olan her minimal asimptotik eğri bir dairesel helistir.

Sonunda, regle yüzeyler üzerindeki eğriler olarak Bertrand eğrilerinin bir karakterizasyonunu veriyoruz:

**Önerme 2.4.5.** $F(\gamma,\delta)(s,u)=\gamma(s)+u\delta(s)$ singüler olmayan bir regle yüzey olsun. Eğer, $F(\gamma,\delta)$ üzerinde ana doğrular için enlem olan iki ayrık minimal asimptotik eğri varsa bu eğriler bir Bertrand eğrisidirler ve birbirinin Bertrand çiftidirler.

**İspat.** $\sigma_i(s)=\gamma(s)+u_i(s)\delta(s)$ $(i=1,2)$ ana doğrular için enlem olan iki ayrık minimal asimptotik eğri olsun. Teorem 2.4.2 den, $F(\gamma,\delta)$, $\sigma_i(s)$ nin asli normal yüzeyidir. $\sigma_i(s)$ ler minimal asimptotik eğriler olduğundan,

$$u_i'(s)=-\delta(s).\gamma'(s)$$

dir. (Teorem 2.4.2 nin ispatında elde edilmişti)

$\Rightarrow u_1'(s)-u_2'(s)=0$

$\Rightarrow (u_1-u_2)'(s)=0$

$\Rightarrow u_1(s)-u_2(s)=A$

olacak şekilde bir $A$ sabiti vardır. O halde,

$$u_1(s)=u_2(s)+A \qquad (2.4.12)$$

$\sigma_1(s)=\gamma(s)+u_1(s)\delta(s)$ ifadesinde (2.4.12) eşitliği yerine yazılırsa:

$\sigma_1(s)=\gamma(s)+(u_2(s)+A)\delta(s)$

$\Rightarrow \sigma_1(s)=\gamma(s)+u_2(s)\delta(s)+A\delta(s)$

$\Rightarrow \sigma_1(s)=\sigma_2(s)+A\delta(s)$

elde edilir. $s$ yi, $\sigma_2(s)$ nin yay parametresi olarak seçebiliriz. Bu durumda $\delta(s)$, $\sigma_2(s)$ nin birim asli normali olarak düşünülebilir.O halde, $\sigma_1(s)$ bir Bertrand eğrisidir ve $\sigma_2(s)$, $\sigma_1(s)$ nin Bertrand çiftidir.

## 3. HELİSLERİN ÖZELİKLERİ VE BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde. silindirik helislerin düzlem eğrilerinden ve Bertrand eğrilerinin küresel eğrilerden inşa edilmesi üzerinde durulacaktır. (Teorem 3.1.1, Teorem 3.2.1).

Ayrıca bir silindirik helisin düzlemsel evolütü ve bir Bertrand eğrisinin küresel Darboux gösteriminden bahsedilip Bertrand eğrileri ve silindirik helisler ile ilgili örnekler şekilleri ile verilecektir.

Şimdi,

$$\tilde{\gamma}: I \to \mathbb{R}^3, \quad \dot{\tilde{\gamma}}(t) \neq 0 \ \ni \ \dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt(t)}$$

eğrisini ele alalım.

$s$, $\tilde{\gamma}$ nın yay parametresi olsun. Yani; $s$, $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ ile ifade edilen bir parametredir. $\left(\tilde{\gamma}'(s) = \dfrac{d\tilde{\gamma}}{ds}\right)$

Bu bölümde, $s$ uzay eğrilerinin yay parametresi olarak ifade edilecektir.

$\tilde{\gamma}$ nin Frenet-Serret vektörleri : $\{T(s), N(s), B(s)\}$

$\tilde{\gamma}$ nin eğriliği ve torsiyonu sırasıyla $k(s)$ ve $\tau(s)$

olmak üzere aşağıdaki Frenet-Serret formülü elde edilir:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

$\tilde{\gamma}$ nin Darboux vektörü $D(s) = \tau(s)T(s) + k(s)B(s)$ olmak üzere, Darboux vektörünün normlanmış halini düşünelim:

$$d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}$$

$d(s)$ e, $\tilde{\gamma}$ nin Darboux gösterimi veya $\tilde{\gamma}$ nin küresel Darboux gösterimi adı verilir.

Bir uzay eğrisi olan $\tilde{\gamma}$ nin genel bir $t$ parametresi için eğrilik ve torsiyonu:

$$k(t) = \frac{\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\right\|}{\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t).\dot{\tilde{\gamma}}(t)\right)^{3/2}}, \quad \tau(t) = \frac{\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\tilde{\gamma}}(t), \tilde{\gamma}^{(3)}(t)\right)}{\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\right\|^2}$$

ile hesaplanır (Hacısalihoğlu1993).

Şimdi,

"(1) Düzlemsel bir eğriden bir silindirik helis nasıl inşa edilir?

(2) Bir silindirik helis verildiğinde, bu helis hangi düzlemsel eğriden elde edilmiştir?" sorularının cevaplarını araştıracağız.

### 3.1. Düzlemsel Eğriler ve Silindirik Helisler

Bir uzay eğrisi için, eğer torsiyon daima sıfır ise bu eğri bir düzlem tarafından içerilir. Bu durumda, $\tilde{\gamma}$ yerine $\gamma$ eğrisini ve $k$ yerine $k_p$ eğriliğini ifade ediyoruz.

Bir $\gamma(t)$ düzlem eğrisi için bir uzay eğrisi:

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \left( \cot\theta \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \right) a + c \qquad (3.1.1)$$

olarak tanımlıyoruz. Burada $\theta$ sabit bir sayı ve $a$, $c$ ; $\dot{\gamma}(t).a = 0$ ve $\|a\| = 1$ olacak şekilde sabit vektörlerdir.

**Teorem 3.1.1.** Yukarıdaki koşullar altında $\tilde{\gamma}$ bir silindirik helistir. Ayrıca, bütün silindirik helisler yukarıdaki metot ile inşa edilebilirler.

**İspat.** (1) İlk iddianın ispatı için, $\gamma(t)$ nin birim hızlı ve düzlemsel bir eğri olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin bir silindirik helis olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için, $\tilde{\gamma}$ nin sırasıyla eğrilik ve torsiyonunu hesaplayalım:

(3.1.1) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= \dot{\gamma}(t) + \cot\theta\left(\|\dot{\gamma}(t)\| 1 + \|\dot{\gamma}(t_0)\| 0\right) a \\
\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= \dot{\gamma}(t) + \cot\theta\, a \\
\ddot{\tilde{\gamma}}(t) &= \ddot{\gamma}(t) + 0 = k_p(t) n(t) \\
\tilde{\gamma}^{(3)}(t) &= \dot{k}_p(t) n(t) + k_p(t) \dot{n}(t) \\
&= \dot{k}_p(t) n(t) + k_p(t)\left(-k_p(t) t(t)\right) \\
&= \dot{k}_p(t) n(t) - \left(k_p(t)\right)^2 t(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Genel bir parametre için torsiyon ve eğrilik formülünden $k(t)$ ile $\tau(t)$ yi elde edelim:

$$\dot{\tilde{\gamma}} \times \ddot{\tilde{\gamma}} = (\dot{\tilde{\gamma}} + \cot\theta a) \times k_p n$$
$$= k_p b - \cot\theta k_p t$$
$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}} \times \ddot{\tilde{\gamma}}\right\| = \sqrt{(k_p b - \cot\theta k_p t).(k_p b - \cot\theta k_p t)}$$
$$= \sqrt{k_p^2(1+\cot^2\theta)}$$
$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}} \times \ddot{\tilde{\gamma}}\right\| = \frac{kp}{\sin\theta}$$
$$\dot{\tilde{\gamma}}.\dot{\tilde{\gamma}} = 1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow \left(\dot{\tilde{\gamma}}.\dot{\tilde{\gamma}}\right)^{3/2} = \frac{1}{\sin^3\theta}$$
$$k(t) = \frac{\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\right\|}{\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t).\dot{\tilde{\gamma}}(t)\right)^{3/2}} = \frac{\frac{k_p(t)}{\sin\theta}}{\frac{1}{\sin^3\theta}} = k_p(t)\sin^2\theta$$
$$k(t) = k_p(t)\sin^2\theta$$

elde edilir.

$$\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\tilde{\gamma}}(t), \tilde{\gamma}^{(3)}(t)\right) = \left(\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\right)\tilde{\gamma}^{(3)}(t)$$
$$= \left(k_p(t)b(t) + \cot\theta k_p(t)(a \times n)\right)\left(\dot{k}_p(t)n(t) - k_p^2(t)t(t)\right)$$
$$= \cot\theta k_p^3$$
$$\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\tilde{\gamma}}(t), \tilde{\gamma}^{(3)}(t)\right) = \cot\theta k_p^3$$

ve

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\right\|^2 = \frac{k_p^2}{\sin^2\theta}$$

olduğundan,

$$\tau(t) = \frac{\cot\theta k_p^3}{\frac{k_p^2}{\sin^2\theta}} = k_p(t)\cot\theta\sin^2\theta$$
$$\tau(t) = k_p(t)\cot\theta\sin^2\theta$$

dır. Böylece, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu elde edildi. $\tilde{\gamma}$ eğrisi için $\left(\frac{\tau}{k}\right)(s)$ hesaplanırsa:

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)(t) = \frac{k_p(t)\cot\theta\sin^2\theta}{k_p(t)\sin^2\theta} = \cot\theta = sbt$$

elde edilir. O halde, $\widetilde{\gamma}$ bir silindirik helistir.

(2) İkinci iddia için, $\widetilde{\gamma}(s)$ birim hızlı bir silindirik helis olsun. Bu silindirik helis hangi düzlemsel eğriden elde edilmiştir?

$\widetilde{\gamma}$ nin birim hızlı bir silindirik helis olması durumunda $d(s)$ küresel Darboux gösterimi sabittir. Gösterelim:

$d(s) = \text{sabit mi? Yani, } d'(s) = 0$ mı?

$$d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|} = \frac{B(s) + \left(\frac{\tau}{k}\right)(s)T(s)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2(s)}}$$

olduğundan her iki tarafın türevi alınırsa:

$$d'(s) = \frac{B'(s) + \left(\frac{\tau}{k}\right)(s)T'(s)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2(s)}} = \frac{-\tau(s)N(s) + \left(\frac{\tau}{k}\right)(s)k(s)N(s)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2(s)}} = 0$$

elde edilir. O halde, $d(s) = \text{sabittir.}$ $a = d(s)$ olarak ifade edelim. Bu durumda

$$a = d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|} \quad , \quad a.a = d(s).d(s) = \frac{1}{\|D(s)\|}\|D(s)\| = 1$$

$$a.a = 1$$

olur.

$\widetilde{\gamma}$ silindirik helis olduğundan, $\tau(s) = ck(s)$ olacak şekilde bir $c$ reel sayısı vardır öyle ki $\theta$ yı $\cot\theta = c$ olacak şekilde seçelim. Genellikten bir şey kaybetmeksizin $\sin\theta > 0$ olduğunu farz edelim.

$\gamma(s) = \widetilde{\gamma}(s) - (\widetilde{\gamma}(s).a)a$ eğrisini ele alalım. Bu durumda $\gamma'(s).a = 0$ mıdır?

$$\gamma(s).a = (\widetilde{\gamma}(s) - (\widetilde{\gamma}(s).a)a).a = \widetilde{\gamma}(s).a - (\widetilde{\gamma}(s).a)(a.a)$$
$$a.a = 1$$

olduğundan,

$$\gamma(s).a = 0$$

dır. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\gamma'(s).a = 0$$

elde edilir. O halde, $\gamma(s)$ bir düzlemsel eğridir.

$$\tilde{\gamma}'(s).a = \underbrace{\|\tilde{\gamma}'(s)\|}_{1}\underbrace{\|a\|}_{1}\cos\theta$$
$$= \cos\theta$$
$$\tilde{\gamma}'(s).a = \cos\theta = \text{sabit}$$

olur.

O halde, $\gamma(s) + \left(\cot\theta \int_0^s \|\gamma'(\tau)\| d\tau\right)a = ?$

$\|\gamma'(\tau)\| = ?$

$$\gamma'(s) = \tilde{\gamma}'(s) - (\tilde{\gamma}'(s).a)a$$

Her iki tarafın normu alınırsa:

$$\begin{aligned}\|\gamma'(s)\| &= \sqrt{(\tilde{\gamma}'(s) - (\tilde{\gamma}'(s).a)a).(\tilde{\gamma}'(s) - (\tilde{\gamma}'(s).a)a)} \\ &= \sqrt{T(s).T(s) + \cos^2\theta\, a.a - 2\tilde{\gamma}'(s).\cos\theta\, a} \\ &= \sqrt{1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta(\tilde{\gamma}'(s).a)} \\ &= \sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\|\gamma'(\tau)\| = \sin\theta \tag{3.1.2}$$

dir. (3.1.2) eşitliği dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}\gamma(s) + \left(\cot\theta\int_0^s\|\gamma'(\tau)\|d\tau\right)a &= \tilde{\gamma}(s) - (\tilde{\gamma}(s).a)a + \left(\cot\theta\int_0^s \sin\theta\, d\tau\right)a \\ &= \tilde{\gamma}(s) - s\cos\theta\, a + \cot\theta\sin\theta\, sa \\ &= \tilde{\gamma}(s)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + \left(\cot\theta\int_0^s\|\gamma'(\tau)\|d\tau\right)a$$

elde edilir.

Aşağıdaki sonucu verebiliriz:

**Sonuç 3.1.1.** Düzlemsel bir $\gamma$ eğrisi çemberdir gerek ve yeter şart karşılık gelen silindirik helisler, dairesel helislerdir.

**İspat.** Teorem 3.1.1 in ispatındaki hesaplama ile $k(t)=k_p(t)\sin^2\theta$ ve $\tau(t)=k_p(t)\cot\theta\sin^2\theta$ dır. O halde, $k_p(t)$ sabit olduğunda $k(t)$ ve $\tau(t)$ sabit olur. Tersine, $k(t)$ ve $\tau(t)$ sabit olduğunda $k_p(t)$ sabittir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\tilde{\gamma}_i : I \to \mathbb{R}^3$ $(i=1,2)$ uzay eğrilerinin eğer $\tilde{\gamma}_1^{(p)}(t_0)=\tilde{\gamma}_2^{(p)}(t_0)$, $0\le p\le k$ koşulu sağlanıyorsa, $\tilde{\gamma}_1(t_0)$ ve $\tilde{\gamma}_2(t_0)$ en az $(k+1)$ değme noktasına sahiptir denir.

Ayrıca eğer $\tilde{\gamma}_1(t_0)$ ve $\tilde{\gamma}_2(t_0)$ en az $(k+1)$ değme noktasına sahip ve $\tilde{\gamma}_1^{(k+1)}(t_0)\neq\tilde{\gamma}_2^{(k+1)}(t_0)$ koşulu sağlanırsa $\tilde{\gamma}_1(t_0)$ ve $\tilde{\gamma}_2(t_0)$ $(k+1)$ değme noktasına sahiptir denir. Bu durumda aşağıdaki temel önermeyi verebiliriz.

**Önerme 3.1.1.** $\tilde{\gamma}: I\to\mathbb{R}^3$, $k\neq 0$ olacak şekilde bir regüler eğri olsun. Bu durumda bir $t_0\in J\subset I$ açık aralığı ve bir tek $\tilde{\delta}: J\to\mathbb{R}^3$ dairesel helisi vardır öyleki $\tilde{\delta}(t_0)=\tilde{\gamma}(t_0)$ dır ve $\tilde{\delta},\tilde{\gamma}$ $t_0$ da en az 3 değme noktasına sahiptir. Burada $k(t_0)$, $\tilde{\delta}$ nın eğriliğidir.

**İspat.**

$\tilde{\delta}(t_0)=\tilde{\gamma}(t_0)$, $\dot{\tilde{\delta}}(t_0)=\dot{\tilde{\gamma}}(t_0)$ ve $\ddot{\tilde{\delta}}(t_0)=\ddot{\tilde{\gamma}}(t_0)$ başlangıç koşulları altında

$k_\delta(t)=k(t_0)$ ve $\tau_\delta(t)=\tau(t_0)$

doğal eşitliklerinin çözümü ile verilir. $\tilde{\delta}$ dairesel helisine $s_0$ da $\tilde{\gamma}$ nın askülatör dairesel helisi denir.

### 3.2. Bir Silindirik Helisin Düzlemsel Evolütü

$\tilde{\gamma}: I\to\mathbb{R}^3$, $k\neq 0$ olacak şekilde bir regüler eğri olsun. Bu durumda bir $t_0\in J\subset I$ açık aralığı ve $\tilde{\delta}(t_0)=\tilde{\gamma}(t_0)$ koşulunu sağlayan bir tek $\tilde{\delta}: J\to\mathbb{R}^3$ dairesel helisi vardır ve $\tilde{\gamma}$ ile $\tilde{\delta}$, $t_0$ da en az 3-değme noktasına sahiptir. Burada $k(t_0)$, $\tilde{\delta}$ nın eğriliğidir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Teorem 3.1.1 in ispatı ile $\tilde{\delta}$ silindirik helisi, $\delta(s)=\tilde{\delta}(s)-(\tilde{\delta}(s).a)a$ düzlemsel eğrisine karşılık gelir. $\tilde{\delta}$ bir dairesel helis olduğundan, $\delta$ bir çemberdir. Bu çember, $s_0=s(t_0)$ noktasında $\gamma(s)=\tilde{\gamma}(s)-(\tilde{\gamma}(s).a)a$ ile en az üç değme noktasına sahiptir. O halde $\delta$, $s_0$ noktasında $\gamma$ nın eğrilik çemberidir (Sabuncuoğlu 2004). $\delta$ nın merkezine, $s_0$ da $\gamma$ nın eğrilik merkezi adı verilir. Bir $\gamma$ düzlem eğrisinin eğrilik merkezinin geometrik yeri, $\gamma$ eğrisinin evolütü olarak adlandırılır. $\gamma$ nın evolütü:

$$e_\gamma(\sigma)=\gamma(\sigma)+\left(\frac{1}{k_p(\sigma)}\right)n(\sigma)$$

ile verilir.

Burada $n(\sigma)$, düzlemdeki $t(\sigma)$ birim tanjant vektörünün saat yönünün tersi yönde $\frac{\pi}{2}$ dönmesi ile verilen birim normal vektördür.

Bir $\tilde{\gamma}(s)$ silindirik helisi için,

$$E_{\tilde{\gamma}}(s)=\tilde{\gamma}(s)-(\tilde{\gamma}(s).a)a+\frac{k(s)}{\tau(s)^2+k(s)^2}N(s)$$

eğrisini düşünelim.

Gösterebiliriz ki; $E'_{\tilde{\gamma}}(s).a=0$ dır. Gerçekten,

$$E_{\tilde{\gamma}}(s).a=\tilde{\gamma}(s).a-((\tilde{\gamma}(s).a)a).a+\frac{k(s)}{\tau(s)^2+k(s)^2}N(s).a$$

$N(s)\perp a$ olduğundan, $N(s).a=0$ dır. Bu durumda,

$$E_{\tilde{\gamma}}(s).a=E'_{\tilde{\gamma}}(s).a=0$$

elde edilir. O halde, $E_{\tilde{\gamma}}(s)$ bir düzlemsel eğridir. Ayrıca $E_{\tilde{\gamma}}(s)$, $\gamma(s)=\tilde{\gamma}(s)-(\tilde{\gamma}(s).a)a$ eğrisinin evolütüdür.

Gösterelim:

$$e_\gamma(\sigma)=\gamma(\sigma)+\left(\frac{1}{k_p(\sigma)}\right)n(\sigma)$$

$$E_{\tilde{\gamma}}(s)=\underbrace{\tilde{\gamma}(s)-(\tilde{\gamma}(s)a)a}_{\gamma(s)}+\frac{k(s)}{\tau(s)^2+k(s)^2}N(s)$$

Bu durumda,

$$\left(\frac{1}{k_p(s)}\right)n(s) \stackrel{?}{=} \frac{k(s)}{\tau(s)^2 + k(s)^2} N(s)$$

Hatırlayalım ki, bir helisin eksenine dik bir düzlem üzerine izdüşümünün asli normali, karşılık gelen helisin asli normaline paraleldir ve karşılık gelen eğrilik:

$$k_p = \frac{k}{\sin^2 \alpha}$$

dir (Struik 1950).

$\cot\alpha = \frac{\tau}{k}$ olduğundan, $\sin\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+\tau^2}}$ dır.

$$k_p = \frac{k}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{k_p} = \frac{\sin^2\alpha}{k} = \frac{\frac{k^2}{k^2+\tau^2}}{k} \Rightarrow \frac{1}{k_p} = \frac{k}{k^2+\tau^2}$$

olur.

$n // N$ ve $\frac{1}{k_p} = \frac{k}{k^2+\tau^2}$ olduğundan,

$$\frac{1}{k_p} n = \frac{k}{k^2+\tau^2} N$$

elde edilir.

O halde $E_{\tilde{\gamma}}(s)$, $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) - (\tilde{\gamma}(s).a)a$ eğrisinin evolütüdür. $E_{\tilde{\gamma}}(s)$ ye, $\tilde{\gamma}(s)$ silindirik helisinin düzlemsel evolütü adı verilir.

### 3.3. Küresel Eğriler ve Bertrand Eğrileri

Bu bölümde, küresel eğrilerden Bertrand eğrilerini inşa etmek için metot tanımlayacağız. Ayrıca bir Bertrand eğrisi verildiğinde, bu Bertrand eğrisi hangi küresel eğriden elde edilmiş olduğunu araştıracağız.

$\gamma : I \to S^2$ birim hızlı bir küresel eğri olsun. Bu bölümde, $\sigma$ yı $\gamma$ nın yay parametresi olarak ifade edelim. $\gamma$ nın $\sigma$ noktasındaki birim tanjant vektörü $t(\sigma) = \dot{\gamma}(\sigma)$ olsun.

Burada, $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\sigma}$ dır.

$s(\sigma)=\gamma(\sigma)\times t(\sigma)$ olsun. Tanımdan, $\gamma$ boyunca bir $\{\gamma(\sigma),t(\sigma),s(\sigma)\}$ çatısına sahip oluyoruz. Bu çatıya $\gamma$ nın Sabban çatısı adı verilir. Böylece, $\gamma$ nın küresel Frenet-Serret formülüne sahibiz:

$$\begin{aligned}
&\dot{\gamma}(\sigma)=t(\sigma)\\
&\dot{t}(\sigma)=-\gamma(\sigma)+k_g(\sigma)s(\sigma)\\
&\dot{s}(\sigma)=-k_g(\sigma)t(\sigma)
\end{aligned}$$

Burada $k_g(\sigma)$, $S^2$ üzerindeki $\gamma$ eğrisinin geodezik eğriliğidir.

$k_g(\sigma)=\det(\gamma(\sigma),t(\sigma),\dot{t}(\sigma))$ ile verilir.

Şimdi, bir uzay eğrisi tanımlayalım:

$$\tilde{\gamma}(\sigma)=a\int_{\sigma_0}^{\sigma}\gamma(\tau)d\tau+a\cot\theta\int_{\sigma_0}^{\sigma}s(\tau)d\tau+c \qquad (3.3.1)$$

Burada $a$, $\theta$ sabit sayılar ve $c$ bir sabit vektördür.

**Teorem 3.3.1.** Yukarıdaki koşul altında $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisidir. Ayrıca, tüm Bertrand eğrileri yukarıdaki metot ile inşa edilebilir.

**İspat.** (1) (3.3.1) eşitliği ile tanımlanan $\tilde{\gamma}$ eğrisi bir Bertrand eğrisi midir? Bunu göstermek için $\tilde{\gamma}(\sigma)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayalım:

$\tilde{\gamma}(\sigma)$ nın tanımından,

$$\begin{aligned}
&\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)=a(\gamma(\sigma)+\cot\theta\, s(\sigma))\\
&\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)=a(1-\cot\theta\, k_g(\sigma))t(\sigma)\\
&\tilde{\gamma}^{(3)}(\sigma)=-a\cot\theta\, k_g(\sigma)t(\sigma)+a(1-\cot\theta\, k_g(\sigma))(-\gamma(\sigma)+k_g(\sigma)s(\sigma))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece genel bir parametre için eğrilik ve torsiyon formülünden,

$$k(\sigma)=\varepsilon\frac{\sin^2\theta(1-k_g(\sigma)\cot\theta)}{a}, \quad \tau(\sigma)=\varepsilon\frac{\sin^2\theta(k_g(\sigma)+\cot\theta)}{a} \qquad (3.3.2)$$

elde edilir. Burada $\varepsilon=\pm 1$ dir.

Şimdi, $a(\varepsilon k(\sigma)+\cot\theta\tau(\sigma))$ ifadesinin eşitini elde edelim:

$$a\left(\varepsilon\, k(\sigma)+\cot\theta\tau(\sigma)\right)=a\left(\varepsilon\varepsilon\frac{\sin^2\theta\left(1-k_g(\sigma)\cot\theta\right)}{a}+\cot\theta\frac{\sin^2\theta\left(k_g(\sigma)+\cot\theta\right)}{a}\right)$$
$$=\sin^2\theta\left(1-k_g(\sigma)\cot\theta\right)+\cot\theta\sin^2\theta\left(k_g(\sigma)+\cot\theta\right)$$
$$=\sin^2\theta-\sin^2\theta k_g(\sigma)\cot\theta+\cot\theta\sin^2\theta k_g(\sigma)+\cot^2\theta\sin^2\theta$$
$$=\sin^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin^2\theta=1$$
$$\Rightarrow a\left(\varepsilon\, k(\sigma)+\cot\theta\tau(\sigma)\right)=1$$
$$\Rightarrow \underbrace{(a\varepsilon)}_{A}k(\sigma)+\underbrace{(a\cot\theta)}_{B}\tau(\sigma)=1$$

Yani, $Ak(\sigma)+B\tau(\sigma)=1$ olacak şekilde $A,B\in\mathbb{R}$ vardır. O halde $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisidir.

(2) $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ eğrisine karşılık gelen küresel eğriyi elde edelim:

$\tilde{\gamma}(s)$ bir Bertrand eğrisi olduğundan, $Ak(s)+B\tau(s)=1$ olacak şekilde sıfırdan farklı A, B reel sayıları vardır. $a=A,\ \cot\theta=\dfrac{B}{a}$ seçelim. Farz edelim ki $a>0$ ve $\varepsilon=\pm1$ öyleki $\dfrac{\varepsilon\sin\theta}{a}>0$ seçilsin.

Şimdi, $\gamma(s)=\varepsilon\left(\sin\theta\, T(s)-\cos\theta\, B(s)\right)$ küresel eğrisini tanımlayalım. Her iki tarafın türevi alınırsa:

$$\gamma'(s)=\varepsilon\left(\sin\theta\, T'(s)-\cos\theta\, B'(s)\right)=\varepsilon\left(\sin\theta\, k(s)N(s)+\cos\theta\,\tau(s)N(s)\right)$$

O halde,

$$\gamma'(s)=\varepsilon\left(k(s)+\cot\theta\,\tau(s)\right)N(s)=\frac{\varepsilon}{a}\sin\theta\, N(s)$$

dir.

$\sigma$, $\gamma$ nın yay parametresi olsun. Bu durumda, $\dfrac{d\sigma}{ds}=\left(\dfrac{\varepsilon}{a}\right)\sin\theta$ dır. Ayrıca,

$$a\gamma(s)\frac{d\sigma}{ds}=a\varepsilon\left(\sin\theta\, T(s)-\cos\theta\, B(s)\right)\frac{\varepsilon}{a}\sin\theta=\sin\theta\left(\sin\theta\, T(s)-\cos\theta\, B(s)\right)$$

ve

$$a\cot\theta\ \gamma(s)\times\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}=a\cot\theta\,\varepsilon\left(\sin\theta\, T(s)-\cos\theta\, B(s)\right)\times\frac{\varepsilon}{a}\sin\theta N(s)$$
$$=\cos\theta\left(\sin\theta B(s)+\cos\theta\, T(s)\right).$$

$s = \gamma \times \dfrac{d\gamma}{d\sigma}$ olduğundan,

$$a\int_0^{\sigma}\gamma(\tau)d\tau + a\cot\theta\int_0^{\sigma}s(\tau)d\tau = \int_{s_0}^{s}\sin\theta\big(\sin\theta\, T(t) - \cos\theta\, B(t)\big)dt + \int_{s_0}^{s}\cos\theta\big(\sin\theta\, B(t) + \cos\theta\, T(t)\big)dt$$

$$= \int_{s_0}^{s}T(t)dt = \tilde{\gamma}(s) + c$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}(s) = a\int_0^{\sigma}\gamma(\tau)d\tau + a\cot\theta\int_0^{\sigma}s(\tau)d\tau + c$$

elde edilir.

Şimdi, Bertrand eğrileri ve dairesel helisler arasındaki ilişkiyi ortaya koyan sonucu verebiliriz:

**Sonuç 3.3.1.** $\gamma$ küresel eğrisi bir çemberdir gerek ve yeter şart karşılık gelen Bertrand eğrileri, dairesel helislerdir.

**İspat.** (3.3.2) den,

$$k(\sigma) = \varepsilon\frac{\sin^2\theta(1 - k_g(\sigma)\cot\theta)}{a}, \quad \tau(\sigma) = \varepsilon\frac{\sin^2\theta(k_g(\sigma) + \cot\theta)}{a}$$

dir. Bu ifadelerin türevleri alınırsa:

$$\dot{k}(\sigma) = \frac{-\varepsilon\,\dot{k}_g(\sigma)\cos\theta}{a}, \quad \dot{\tau}(\sigma) = \varepsilon\frac{\sin^2\theta\;\dot{k}_g(\sigma)}{a}.$$

elde edilir.

O halde, $\gamma$ küresel eğrisi çemberdir gerek ve yeter şart $\dot{k}_g(\sigma) \equiv 0$ dır. Bu koşul, $\dot{k}(\sigma) = \dot{\tau}(\sigma) \equiv 0$ koşuluna denktir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

### 3.4. Bir Bertrand Eğrisinin Küresel Evolütü

$\gamma$ küresel eğrisinin eğrilik merkezinin geometrik yerini düşünelim. $\gamma$ nın eğrilik merkezinin geometrik yerine, $\gamma$ nın küresel evolütü denir ve

$$e_{\gamma}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{k_g(\sigma)^2 + 1}}\big(k_g(\sigma)\gamma(\sigma) + s(\sigma)\big)$$

ile verilir. Bu durumda aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

**Önerme 3.4.1.** $\gamma : I \to S^2$ bir küresel eğri ve $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma$ ya karşılık gelen bir Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ nın küresel Darboux gösterimi, $\gamma$ nın küresel evolütüne eşittir.

**İspat.** (3.3.2) den,

$$k(\sigma) = \varepsilon \frac{\sin^2\theta(1 - k_g(\sigma)\cot\theta)}{a}, \quad \tau(\sigma) = \varepsilon \frac{\sin^2\theta(k_g(\sigma) + \cot\theta)}{a}$$

dir. Ayrıca,

$$T(\sigma) = a(\gamma(\sigma) + \cot\theta\, s(\sigma))\frac{d\sigma}{ds}$$
$$N(\sigma) = \varepsilon\, t(\sigma)$$
$$B(\sigma) = \varepsilon\, a\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)(s(\sigma) - \cot\theta\, \gamma(\sigma)).$$

dır. Bu değerler yerine yazılırsa:

$$D(\sigma) = \tau(\sigma)T(\sigma) + k(\sigma)B(\sigma) = \frac{d\sigma}{ds}(s(\sigma) + k_g(\sigma)\gamma(\sigma))$$

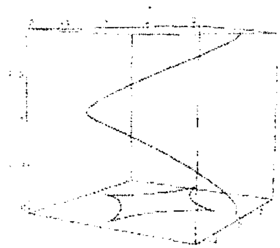
elde edilir. Böylece,

$$d(\sigma) = e_\gamma(\sigma)$$

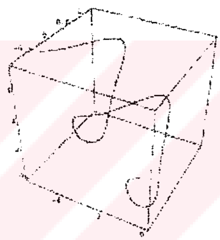
elde edilir.

### 3.5. Örnekler

Bu bölümde, teorem 3.1.1 ve teorem 3.2.1 de verilen metotlar kullanılarak Bertrand eğrileri ve silindirik helislerin örnekleri veriliyor. Ayrıca, bir Bertrand eğrisinin küresel Darboux gösteriminin ve bir silindirik helisin düzlemsel evolütünün resimleri çiziliyor.



Şekil 3.5.1. Silindirik helis ve düzlemsel evolütü



Şekil 3.5.2. Bertrand eğrisi

**Örnek 3.5.1.** $\gamma(t)$ düzlem eğrisi $\gamma(t)=\left(x_1(t),x_2(t),0\right)$ ve $a=(0,0,1)$ olsun. O halde, sabit bir $c$ sayısı için karşılık gelen silindirik helis:

$$\widetilde{\gamma}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),c\int\sqrt{\dot{x}_1(t)^2+\dot{x}_2(t)^2}\,dt\right)$$

dir.

Şimdi bir $\gamma(\theta)=(2\cos\theta,\sin\theta,0)$ düzlem eğrisini ele alalım. Bu durumda, $\widetilde{\gamma}(\theta)=(2\cos\theta,\sin\theta,E(\theta,-3))$ silindirik helisine sahip oluyoruz. Burada, $E(\tau,m)=\int_0^{\tau}\sqrt{1-m\sin^2\theta}\,d\theta$ dır. Ayrıca $\widetilde{\gamma}$ nin düzlemsel evolütü :

$$E_\gamma(\theta)=\left(\left(\frac{3}{2}\right)\cos\theta(1-3\sin^2\theta),-3\sin\theta,0\right)$$

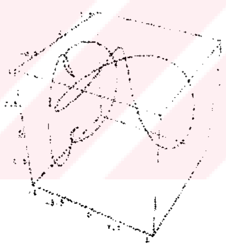
dir. Bu eğriler Şekil 3.5.1. de veriliyor.

**Örnek 3.5.2.** $\gamma(\theta)=(\sin\theta,\sin\theta\cos\theta,\cos^2\theta)$ küresel eğrisini düşünelim. Teorem 3.2.1. deki metodun kullanımı ile aşağıdaki Bertrand eğrisine sahip oluyoruz: $(a=1 \text{ ve } \cot\theta=1)$

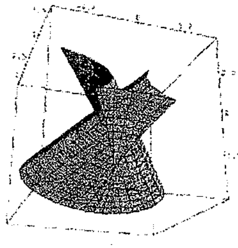
$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\theta)=\Bigg(&-\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}F\left(\theta,\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-4E\left(\theta,\frac{1}{2}\right)+3F\left(\theta,\frac{1}{2}\right)\right)\right),\\ &-2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3+\cos(2\theta)}}\right)-\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{\sqrt{3+\cos(2\theta)}\sin\theta}{2\sqrt{2}},\\ &\frac{\theta}{2}-\frac{\cos\theta\sqrt{3+\cos(2\theta)}}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2}\log\left(\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{3+\cos(2\theta)}\right)+\frac{1}{4}\sin(2\theta)\Bigg),\end{aligned}$$

Burada, $F(\tau,m)=\int_0^{\tau}\frac{d\theta}{1-m\sin^2\theta}$ dır.

Eğrinin resimleri Şekil 3.5.2. de veriliyor. Ayrıca, $\gamma$ nın ve $\gamma$ nın küresel Darboux gösteriminin resimleri Şekil 3.5.3. de veriliyor. Şekil 3.5.4., $\tilde{\gamma}$ nın Darboux açılabilirinin bir parçasıdır.



Şekil 3.5.3. Küresel eğri ve küresel Darboux gösterimi



Şekil 3.5.4. Darboux açılabilir yüzey

# 4. YENİ ÖZEL EĞRİLER VE AÇILABİLİR YÜZEYLER

Bu bölümde, $E^3$ uzayında slant helisler ve konikal geodezik eğriler olarak adlandırılan yeni özel eğriler tanımlanacaktır. Bu kavramlar, silindirik helisler kavramının genellemeleridirler. Ayrıca, bir uzay eğrisinin teğetsel Darboux açılabiliri kavramına giriş yapılacaktır. Yüzey üzerinde bir geodezik olarak bir slant helisin varlığı koşulu altında özel açılabilir yüzeylerin bir sınıflandırması verilecektir. Bölüm 4.3. te slant helisler ve konikal geodezik eğriler, açılabilir yüzeyler üzerindeki eğriler olarak ele alınacaktır.Bölüm 4.4. te slant helislerin örneği verilip resimleri çizilecektir.

## 4.1. Yeni Özel Eğrilerin Tanımı

**Tanım 4.1.1.** $\gamma : I \to E^3$, $\|\gamma'(s)\| = 1$ olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun. $k(s) \neq 0$ olacak şekilde $\gamma$ eğrisine bir slant helis eğrisi denir eğer $\gamma$ nın asli normal doğruları, sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyor ise.

Uyarıyoruz ki, bir silindirik helisin asli normal doğruları, sabit doğrultuya diktir. Yani her silindirik helis bir slant helisidir. O halde, slant helislerin notasyonu, silindirik helislerin notasyonunun bir genellemesidir.

**Tanım 4.1.2.** $\gamma : I \to E^3$, $\|\gamma'(s)\| = 1$ olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun.

$k(s) \neq 0$ olacak şekilde $\gamma$ eğrisine, konikal geodezik eğri denir eğer $\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)$ sabit bir fonksiyon ise. Burada $k(s)$ ve $\tau(s)$, $\gamma$ nın sırasıyla eğrilik ve torsiyonudur.

Slant helislerin aşağıdaki karakterizasyonunu verebiliriz.

**Önerme 4.1.1.** $\gamma$, $k(s) \neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir uzay eğrisi olsun. Bu durumda, $\gamma$ bir slant helis eğrisidir gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \left( \frac{k^2}{\left(k^2 + \tau^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{k}\right)' \right)(s)$$

sabit bir fonksiyondur.

**İspat.** $\gamma$ nın asli normal küresel gösterimi $n: I \to S^2$ olsun. $n$ nin eğriliği $k'$, geodezik eğriliği $k'_g$, normal eğriliği $k'_n$ ve teğet vektörü $t'$ olsun.

Gauss denkleminden,

$$\overline{D}_{t'}t' = D_{t'}t' + S(t').t'N$$

dir (Hacısalihoğlu 2000).

$$D_{t'}t'.D_{t'}t' = (\overline{D}_{t'}t' - S(t').t'N).(\overline{D}_{t'}t' - S(t').t'N)$$

$$D_{t'}t'.D_{t'}t' = \overline{D}_{t'}t'.\overline{D}_{t'}t' + (S(t').t')^2$$

$$\|D_{t'}t'\|^2 = \|\overline{D}_{t'}t'\|^2 + (S(t').t')^2$$

$$k'^2 = k'^2_g + k'^2_n$$

$S^2$ için, $S(t').t' = 1$ olduğundan

$$k'^2 = k'^2_g + 1 \tag{4.1.1}$$

elde edilir.

Göstereceğiz ki, $\gamma$ nın $n: I \to S^2$ asli normal küresel gösterimi, $S^2$ deki çemberin bir parçasıdır. (4.1.1) den dolayı $k'$ sabit olduğunda $k'_g$ de sabit olacağından, $k'_g$ yi elde edelim:


Şekil 4.1.1. Asli normal gösterge eğrisinin teğeti

Bunun için öncelikle $D_{t'}t' = \dfrac{dt'}{ds'}$ değerini bulalım:

$$t' = \frac{dn}{ds}\frac{ds}{ds'} \Rightarrow t' = (-kt + \tau b)\frac{ds}{ds'}$$

Her iki tarafın normu alınırsa:

$$\sqrt{(k^2+\tau^2)(s)}\,\frac{ds}{ds'} = 1 \Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{\sqrt{(k^2+\tau^2)(s)}}$$

O halde,

$$t' = \frac{1}{(k^2+\tau^2)^{1/2}}(s)(-k(s)t(s)+\tau(s)b(s))$$

elde edilir.

$$\Rightarrow D_{t'}t' = \frac{dt'}{ds}\frac{ds}{ds'} = \frac{dt'}{ds}\frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}}$$

dir.

$$\frac{dt'}{ds} = ?$$

$$\frac{dt'}{ds} = \left[\frac{1}{(k^2+\tau^2)^{1/2}}\right]'(-kt+\tau b) + \frac{1}{\left(k^2+\tau^2\right)^{1/2}}(-k't-kt'+\tau' b+\tau b')$$

$$\Rightarrow D_{t'}t' = \left[\frac{1}{(k^2+\tau^2)^{1/2}}\right]'\frac{-kt+\tau b}{\sqrt{k^2+\tau^2}} + \frac{1}{k^2+\tau^2}(-k't-(k^2+\tau^2)n+\tau' b)$$

$$= \left(-\frac{k'k+\tau'\tau}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\frac{-kt+\tau b}{(k^2+\tau^2)^{1/2}}\right) + \frac{1}{k^2+\tau^2}(-k't-(k^2+\tau^2)n+\tau' b)$$

$$= \left[\frac{k'k+\tau'\tau}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\frac{k}{(k^2+\tau^2)^{1/2}} - \frac{k'}{k^2+\tau^2}\right]t - \frac{k^2+\tau^2}{k^2+\tau^2}n + \left[\frac{k'k+\tau'\tau}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\frac{\tau}{(k^2+\tau^2)^{1/2}} - \frac{\tau'}{k^2+\tau^2}\right]b$$

$$= \left[\frac{k(k'k+\tau'\tau)}{(k^2+\tau^2)^2} - \frac{k'}{k^2+\tau^2}\right]t - n + \left[\frac{-\tau(k'k+\tau'\tau)}{(k^2+\tau^2)^2} + \frac{\tau'}{k^2+\tau^2}\right]b$$

$$= \left[\frac{k^2k'+k\tau\tau'-k^2k'-\tau^2k'}{(k^2+\tau^2)^2}\right]t - n + \left[\frac{-\tau k'k-\tau^2\tau'+\tau'k^2+\tau^2\tau'}{(k^2+\tau^2)^2}\right]b$$

$$= \frac{\tau(k\tau'+\tau k')}{(k^2+\tau^2)^2}t - n + \frac{k(\tau'k-\tau k')}{(k^2+\tau^2)^2}b$$

$$\Rightarrow k'(s) = \frac{\tau^2(k\tau'+\tau k')^2}{(k^2+\tau^2)^4} + \frac{k^2(\tau'k-\tau k')^2}{(k^2+\tau^2)^4} + 1 \Rightarrow k'^2 = \frac{(\tau'k-\tau k')^2}{(k^2+\tau^2)^3} + 1$$

$k'^2 = k'^2_g + 1$ olduğundan, $k'^2_g = k'^2 - 1$ dir. O halde,

$$k'^2_g = \frac{(\tau'k-\tau k')^2}{(k^2+\tau^2)^3}$$

dir. Her iki tarafın karekökü alınırsa:

$$k'_g(s) = \frac{\tau'k-\tau k'}{(k^2+\tau^2)^{3/2}} = \frac{k^2}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{k}\right)' = \sigma(s)$$

elde edilir.

O halde, $S^2$ deki $n$ nin geodezik eğriliği $\sigma(s)$ ile verilir. Böylece, $n$ nin gösterimi $S^2$ deki çemberin bir parçasıdır gerek ve yeter şart $\sigma(s)$ sabit bir fonksiyondur. Böylece slant helisin karakterizasyonu elde edilmiş oldu.

### 4.2. Bir Uzay Eğrisi ile İlgili Açılabilir Yüzeyler

Bu kısımda, bir uzay eğrisi ile ilgili üç açılabilir yüzey tanımlanıp bu yüzeylerin yeni özel eğrilerle olan ilişkileri verilecektir.

$\gamma$, $k(s) \neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir uzay eğrisi olsun. Ele alacağımız yüzeylerden ilki ikinci bölümde tanımlanmış olan $\gamma$ nın rektifiyan açılabilir yüzeyidir. Hatırlatalım ki $\gamma$ nın rektifiyan açılabilir yüzeyi $F(\gamma,\widetilde{D})(s,u) = \gamma(s) + u\widetilde{D}(s)$ olarak tanımlanmıştı. Ayrıca diğer regle yüzeylerin tanımlarını verelim:

**Tanım 4.2.1.** $\gamma$ nın $F(b,t)(s,u) = b(s) + ut(s)$ yüzeyine, $\gamma$ nın Darboux açılabiliri adı verilir. Burada $t(s)$ ve $b(s)$, $\gamma$ nın sırasıyla teğet ve binormal vektörleridir.

**Tanım 4.2.2.** $\gamma$ nın $F(\overline{D},n)(s,u) = \overline{D}(s) + un(s)$ ile verilen $n(s)$ birim tanjant vektörünün Darboux açılabilirine, $\gamma$ nın teğetsel Darboux açılabiliri denir. Burada $\overline{D}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}(s)(\tau(s)t(s) + k(s)b(s))$, birim Darboux vektör alanıdır.

İlk olarak, $k(s) \neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir $\gamma(s)$ uzay eğrisinin rektifiyan açılabilirini düşünelim. Aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

**Önerme 4.2.1.** Birim hızlı bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $k(s) \neq 0$ eğrisi için aşağıdakiler denktirler.

**(1)** $\gamma$ nın $F(\gamma,\widetilde{D}) : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ rektifiyan açılabiliri bir konikal yüzeydir.

**(2)** $\gamma$ bir konikal geodezik eğridir.

**İspat.** $F(\gamma,\tilde{D})$ nın singüler geometrik yeri:

$$\phi(s)=\gamma(s)-\left(\frac{1}{\left(\frac{\tau}{k}\right)'}\right)(s)\tilde{D}(s)$$

ile verilir. Frenet-Serret formülünden,

$$\phi'(s)=\left(\frac{\tau}{k}\right)''(s)\left(\left(\frac{\tau}{k}\right)'\right)^{-2}\tilde{D}(s)$$

dir.

Böylece, $\phi'(s)\equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\tau}{k}\right)''(s)\equiv 0$ olmasıdır.

Yani, $\phi'(s)\equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s)=$ sabit olmasıdır.

O halde, $\gamma$ bir konikal geodezik eğridir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Önerme 4.2.2.** Birim hızlı $\gamma:I\to\mathbb{R}^3$, $k(s)\neq 0$ eğrisi için aşağıdakiler denktirler.

**(1)** $\gamma$ nın $F(\overline{D},n):I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ teğetsel Darboux açılabiliri bir konikal yüzeydir.

**(2)** $\gamma$ bir slant helistir.

**İspat.** Önce $F(\overline{D},n)(s,u)$ yüzeyinin singüler noktalarını araştıralım.

$(s_0,u_0)$, $F(\overline{D},n)(s,u)$ yüzeyinin singüler noktası olsun. O halde,

$$\overline{D}'(s_0)\times n(s_0)+u_0n'(s_0)\times n(s_0)=0 \qquad (4.2.1)$$

dır.

$$n'(s)=-k(s)t(s)+\tau(s)b(s)$$
$$n'(s)\times n(s)=-k(s)t(s)\times n(s)+\tau(s)b(s)\times n(s)$$
$$n'(s)\times n(s)=-k(s)b(s)-\tau(s)t(s)$$

elde edilir. $\overline{D}(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2+k^2}}\right)(s)(\tau(s)t(s)+k(s)b(s))$ olduğundan,

$$\overline{D}'(s)=\left(\frac{1}{\left(\tau^2+k^2\right)^{1/2}}\right)'(s)(\tau t+kb)+\left(\frac{1}{\left(\tau^2+k^2\right)^{1/2}}(s)(\tau' t+k' b)\right)$$

$$=-\frac{k'k+\tau'\tau}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}(\tau t+kb)+\frac{1}{(k^2+\tau^2)^{1/2}}(\tau' t+k' b)$$

$$=\left[-\frac{(k'k+\tau'\tau)\tau}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}+\frac{\tau'}{(k^2+\tau^2)^{1/2}}\right]t+\left[-\frac{(k'k+\tau'\tau)k}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}+\frac{k'}{(k^2+\tau^2)^{1/2}}\right]$$

$$=\left[\frac{-k'k\tau-\tau'\tau^2+\tau'\tau^2+k^2\tau'}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\right]t+\left[\frac{\tau(\tau'k-\tau k')}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\right]b$$

$$=\left(\frac{k^2}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{k}\right)'\right)(s)(k(s)t(s)-\tau(s)b(s))$$

$$=-\sigma(s)n'(s)$$

$$\Rightarrow \overline{D}'(s)=-\sigma(s)n'(s)$$

elde edilir. Bulduğumuz bu değerler (4.2.1) ifadesinde yerine yazılırsa:

$$\overline{D}'(s_0)\times n(s_0)+u_0 n'(s_0)\times n(s_0)=-\sigma(s_0)n'(s_0)\times n(s_0)+u_0 n'(s_0)\times n(s_0)=0$$

$$\Rightarrow (-\sigma(s_0)+u_0)n'(s_0)\times n(s_0)=0,\ n'(s_0)\times n(s_0)\neq 0$$

$$\Rightarrow u_0=\sigma(s_0)$$

elde edilir. O halde, $F(\overline{D},n)(s,u)$ teğetsel Darboux açılabilirin singüler geometrik yeri:

$$\phi(s)=\overline{D}(s)+\sigma(s)n(s)$$

ile verilir.

$F(\overline{D},n)(s,u)$ nin bir konikal yüzey olması için gerek ve yeter şart $\phi'(s)\equiv 0$ olmasıdır.

$\phi'(s)\equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma'(s)\equiv 0$ dır.

Böylece, $F(\overline{D},n)(s,u)$ nin bir konikal yüzey olması için gerek ve yeter şart $\sigma(s)=\text{sabit}$ olmasıdır.

O halde, $\gamma$ slant helis eğrisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 4.3. Açılabilir Yüzeyler Üzerinde Eğriler

Bu kısımda, slant helisler ve konikal geodezik eğriler, açılabilir yüzeyler üzerindeki eğriler teorisi bakış açısından ele alınacaktır. İkinci bölümde, bir silindirik helisin rektifiyan açılabilirinin bir silindirik yüzey olduğu ve bu silindirik helisin orijinal yüzeyin bir geodeziği olduğu ispatlanmıştı. Aşağıdaki önerme, tersinin de ayrıca doğru olduğunu göstermektedir.

**Önerme 4.3.1.** $S$ bir regle yüzey ve $\gamma(s)$, $S$ üzerinde $k(s) \neq 0$ olacak şekilde bir regüler eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktirler:

**(1)** $S$, $\gamma(s)$ nin rektifiyan açılabilir yüzeyidir.

**(2)** Ana doğrular için enlem olan $\gamma(s)$, $S$ nin geodeziğidir ve $S$ bir açılabilir yüzeydir.

**İspat.** $(2) \Rightarrow (1)$:

Farz edelim ki $S$ bir açılabilir yüzey olsun. Bu durumda $P \in S$ noktasında $S$ nin tanjant düzlemi, $P$ den geçen yörünge boyunca sabittir.

Ana doğrular için enlem olan $\gamma(s)$, $S$ nin geodeziği olsun. Bu durumda $P = \gamma(s_0)$ da $\gamma$ nın asli normali, $P$ noktasında $S$ yüzeyinin normaline paraleldir. O halde $P = \gamma(s_0)$ da, $\gamma(s)$ nin rektifiyan düzlemi, $P$ noktasında $S$ nin tanjant düzlemidir. $P$ den geçen ana doğru boyunca $P$ deki tanjant düzlem sabit olduğundan, $S$ yüzeyi $\gamma(s)$ nin rektifiyan düzlemler ailesinin bir zarfıdır. O halde $S$ yüzeyi, $\gamma(s)$ nin rektifiyan açılabilir yüzeyidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yüzey üzerinde bir geodezik olarak bir slant helisin varlığı koşulu altında özel açılabilir yüzeylerin aşağıdaki sınıflamasını verebiliriz:.

**Teorem 4.3.1.** $S$ bir açılabilir yüzey ve $\gamma(s)$, $k(s) \neq 0$ olacak şekilde $S$ üzerinde regüler bir eğri olsun. Farz edelim ki, $\gamma(s)$ $S$ nin bir slant helis eğrisidir ve ana doğrular için enlem olan bir geodeziktir. Bu durumda:

**(1)** Eğer $\gamma$ bir silindirik helis ise, $S$ silindirik yüzeyin bir parçasıdır.

**(2)** Eğer $\gamma$ bir silindirik helis değil ve $\left(\dfrac{\tau}{k}\right)''(s) \equiv 0$ ise, $S$ dairesel koninin bir parçasıdır.

**(3)** Eğer $\gamma$ bir silindirik helis değil ve $\left(\frac{\tau}{k}\right)''(s) \neq 0$ ise, $S$ bir silindirik helisin teğetsel açılabilirinin bir parçasıdır.

**İspat.** $\gamma$, $S$ nin bir geodeziği olduğundan, Önerme 4.3.1. den $S$, $\gamma$ nın rektifiyan açılabiliridir. $\gamma$, $S$ üzerinde bir slant helis eğrisi olduğundan,

$$\sigma(s) = \left(\frac{k^2}{\left(k^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{k}\right)'\right)(s) = c \qquad (4.3.1)$$

dir. Burada $c$ sabit bir sayıdır.

**(1)** Önerme 4.2.2 nin ispatından ve (4.3.1) den, $\overline{D}'(s) = -\sigma(s)n'(s) = -cn'(s)$ dir. Burada $\overline{D}(s)$ birim Darboux vektör ve $n(s)$, $\gamma(s)$ nin birim asli normalidir. Tanımdan, $n'(s).a = 0$ olacak şekilde bir $a$ sabit vektörü vardır. $\overline{D}'(s) = -cn'(s)$ olduğundan, Darboux vektörü ayrıca $a$ ile verilen sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapar.

$c = 0$ olduğunda $\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s) \equiv 0$ olur. O halde, $\gamma(s)$ bir silindirik helistir. Bu durumda, $\overline{D}'(s) \equiv 0$ olur.

$\Rightarrow \overline{D}(s) = \text{sabit}.$

$\Rightarrow D(s) = \text{sabit}.$

elde edilir. O halde, $D(s)$ Darboux vektörü sabit bir doğrultuya sahiptir. $\gamma(s)$ nin rektifiyan açılabiliri için yörüngelerin doğrultusu $D(s)$ Darboux vektörünün doğrultusu ile verildiğinden,

$$D(s) \times D'(s) = 0$$

elde edilir. O halde $S$, silindirik yüzeyin bir parçasıdır. Böylece iddia (1) ispatlanmış olur.

**(2)** $\gamma(s)$ bir silindirik helis değil ise, $c \neq 0$ dır. Önerme 4.2.1 den, eğer $\left(\frac{\tau}{k}\right)''(s) \equiv 0$ ise, $S$ konikal yüzeyin bir parçasıdır. $S$ nin yörüngelerinin doğrultusu, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan $D(s)$ · Darboux vektörü ile verilir. O halde, $S$ konikal yüzeyi bir dairesel koniktir. Böylece iddia (2) ispatlanmış olur.

**(3)** $\gamma$ nın rektifiyan açılabilirinin singüler noktalarının geometrik yeri:

$$\phi(s)=\gamma(s)-\frac{1}{\left(\dfrac{\tau}{k}\right)'(s)}\widetilde{D}(s) \tag{4.3.2}$$

dir. Burada $\widetilde{D}(s)$, $\gamma(s)$ nin genelleştirilmiş Darboux vektörüdür. (4.3.2) ifadesinde her iki tarafın türevi alınırsa:

$$\phi'(s)=-\frac{\left(\dfrac{\tau}{k}\right)''(s)}{\left(\left(\dfrac{\tau}{k}\right)'\right)^{2}(s)}\widetilde{D}(s)\neq 0$$

elde edilir. Bu durumda $\phi(s)$ bir regüler uzay eğrisidir ve $\phi'(s)$ ile $\widetilde{D}(s)$ aynı doğrultudadır. Ayrıca, $\gamma(s)$ slant helisi olduğundan, $\gamma(s)$ nin Darboux vektörü, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapar. Burada, Darboux vektörü $S$ nin yörüngelerinin doğrultusunu verir.

$\phi(s)$, $\gamma$ nın rektifiyan açılabilirinin singüler noktalarının geometrik yeri olduğundan $S$, $\phi(s)$ nin teğetsel açılabilirinin bir parçası olarak düşünülebilir. O halde, $\phi(s)$ nin tanjant doğrultusu ile $\gamma(s)$ nin Darboux vektörü aynı doğrultudadır. Bu da $\phi(s)$ nin bir silindirik helis olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.2.1. ve önerme 4.3.1. in bir sonucu olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

**Önerme 4.3.2.** $S$ bir açılabilir yüzey ve ana doğrular için enlem olan $\gamma(s)$, $k(s)\neq 0$ olacak şekilde $S$ üzerinde bir geodezik olsun. Bu durumda $S$, konikal yüzeyin bir parçasıdır gerek ve yeter şart $\gamma(s)$ bir konikal geodezik eğridir.

## 4.4. Örnekler

Bu bölümde slant helis eğrisinin örneği verilip resmi çizilecektir.

$$\gamma(\theta)=\left(-\frac{a^2-b^2}{2a}\left(\frac{\cos((a+b)\theta)}{(a+b)^2}+\frac{\cos((a-b)\theta)}{(a-b)^2}\right),\right.$$
$$-\frac{(a^2-b^2)}{2a}\left(\frac{\sin((a+b)\theta)}{(a+b)^2}+\frac{\sin((a-b)\theta)}{(a-b)^2}\right),$$
$$\left.-\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{ab}\cos(b\theta)\right)$$

ile tanımlanan uzay eğrisini ele alalım:

$\gamma(\theta)$ nın eğrilik ve torsiyonu hesaplanırsa:

$$k(\theta)=\sqrt{a^2-b^2}\cos(b\theta),\ \tau(\theta)=\sqrt{a^2-b^2}\sin(b\theta)$$

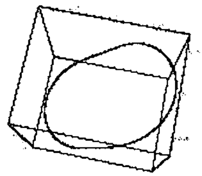
elde edilir. Böylece,

$$\sigma(\theta)=\frac{-b}{a^2-b^2},\ \left(\frac{\tau}{k}\right)(\theta)=\tan(b\theta),$$

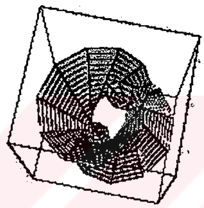
$$\left(\frac{\tau}{k}(\theta)\right)'=\frac{-b}{\cos^2(b\theta)}\neq 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\tau}{k}(\theta)\right)''=\frac{2b^2}{\cos^2(b\theta)}\neq 0$$

dir. Böylece $\gamma(\theta)$ bir slant helistir, silindirik helis değildir. Teorem 4.3.1 den, $\gamma(\theta)$ bir silindirik helisin tanjant açılabilirinin bir geodeziğidir. Aslında $\gamma(\theta)$ ya karşılık gelen tanjant açılabilir, $\gamma(\theta)$ nın rektifiyan açılabiliridir. (Önerme 4.3.1).

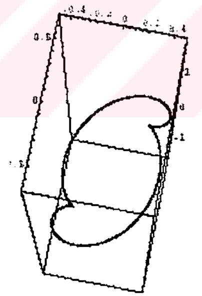
Şekil 4.4.1. de, $\gamma(\theta)$ nın $a=2, b=1$ için resmi çizilmiştir. Şekil 4.4.2. de, $\gamma(\theta)$ nın rektifiyan açılabiliri; Şekil 4.4.3. de, $\gamma(\theta)$ nın rektifiyan açılabilirinin singüler geometrik yeri; Şekil 4.4.4. te, $\gamma(\theta)$ ve onun rektifiyan açılabilirinin singüler geometrik yeri resmedilmiştir.



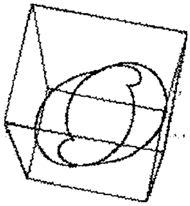
Şekil 4.4.1. Slant helis eğrisi



Şekil 4.4.2. Slant helisin rektifiyan açılabiliri



Şekil 4.4.3. Slant helisin rektifiyan açılabilirinin singüler yeri



Şekil 4.4.4. Slant helis eğrisi ve rektifiyan açılabilirinin singüler yeri

## 5. SLANT HELİS EĞRİSİ VE ONUN KÜRESEL GÖSTERİMİ

Dördüncü bölümde, slant helisler ve konikal geodezik eğriler tanımlanıp yüzey üzerinde bir geodezik olarak bir slant helisin varlığı koşulu altında özel açılabilir yüzeylerin sınıflandırması elde edilmişti. Bu bölümde, bir slant helisin teğet ve binormal gösteriminin küresel görüntüleri araştırılacaktır. Ayrıca, sabit presesyonlu eğrinin tanımı verilip sabit presesyonlu bir eğrinin bir slant helisi olduğu gösterilecektir. Bir $\gamma$ eğrisinin involütünün bir silindirik helis olması için gerek ve yeter şart ifade edilecektir.

### 5.1. Slant Helis Eğrisi ve Sabit Presesyonlu Eğrinin Tanımı

$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\|\gamma'(s)\| = 1$ olacak şekilde bir uzay eğrisi olsun.

Dördüncü bölümden hatırlayalım ki:

$k(s) \neq 0$ olacak şekilde $\gamma$ bir slant helisidir eğer $\gamma$ nın asli normal doğruları, sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyor ise. Ayrıca yine ifade edilmişti ki:

$\gamma$ bir slant helis eğrisidir gerek ve yeter şart $\gamma$ nın (n) asli normal gösteriminin küresel geodezik eğriliği olan

$$\sigma(s) = \left( \frac{k^2}{\left(k^2 + \tau^2\right)^{3/2}} \left( \frac{\tau}{k} \right)' \right)(s)$$

sabit bir fonksiyondur.

**Tanım 5.1.1.** $\beta : I \to \mathbb{R}^3$, $\|\beta'(s)\| = 1$ olacak şekilde bir uzay eğrisi olsun. $\beta$ nın Darboux vektörü olan $W = \tau_\beta t^* + k_\beta b^*$ vektörünün uzaydaki sabit bir doğru etrafında, sabit açı ve sabit hız ile dönmesi ile elde edilen eğriye sabit presesyonlu eğri adı verilir. Burada $k_\beta$ ve $\tau_\beta$, $\beta$ eğrisinin sırasıyla eğrilik ve torsiyonudur. $\{t^*, n^*, b^*\}$, $\beta$ eğrisinin Frenet vektör alanlarının bir bazıdır.

Sabit presesyonlu bir eğri

$$k_\beta(s) = w \sin(\mu s)$$
$$\tau_\beta(s) = w \cos(\mu s)$$

ile karakterize edilir. Burada $w > 0$ ve $w, \mu$ sabitlerdir. Bu eğri,

$$x^2+y^2-\frac{\mu^2}{w^2}z^2=\frac{4\mu^2}{w^4}$$

dairesel tek kanatlı hiperboloidi üzerinde yatar. Bu eğri kapalıdır gerek ve yeter şart $\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+w^2}}$ rasyoneldir (Scafield 1995).

## 5.2. Slant Helislerin Küresel Gösterimleri

Bu bölümde, bir slant helis eğrisinin teğet ve binormal gösteriminin küresel görüntüleri ele alınıp bu küresel görüntülerin küresel helisler olduğu gösterilecektir.
Ayrıca, sabit presesyonlu bir eğrinin bir slant helis eğrisi olduğu gösterilip bir $\gamma$ eğrisinin involütünün bir silindirik helis olması için gerek ve yeter şart ifade edilecektir.

**Teorem 5.2.1.** $\gamma$ bir slant helis eğrisi olsun. $\gamma$ nın $(t)$ teğet gösteriminin küresel resmi bir küresel helistir.

**İspat.** $(t)$ nin eğriliğini ve torsiyonunu sırasıyla $k_t, \tau_t$ ile ifade edelim. $k_t$ yi ve $\tau_t$ yi hesaplayalım:
$\gamma$ eğrisinin teğet gösteriminin küresel resmi $\delta$ olsun. Bu durumda

$$\delta(s)=t(s) \tag{5.2.1}$$

dır. (5.2.1) ifadesinin $s$ ye göre türevi alınırsa:

$$\begin{aligned}
\delta'(s) &= t'(s)=kn \\
\delta''(s) &= (kn)'=k'n+kn' \\
&= k'n+k(-kt+\tau b)
\end{aligned}$$

O halde,

$$\delta''=k'n-k^2t+k\tau b \tag{5.2.2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \delta'\wedge\delta'' &= (kn)\wedge(k'n-k^2t+k\tau b) \\
&= k\tau' n\wedge n-k^3 n\wedge t+k^2\tau\, n\wedge b \\
&= k^3b+k^2\tau t
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\delta'\wedge\delta''\| = \sqrt{(k^3b + k^2\tau t)(k^3b + k^2\tau t)}$$
$$= \sqrt{k^4[(kb + \tau t)(kb + \tau t)]}$$
$$= \sqrt{k^4(k^2 + \tau^2)}$$

$$\Rightarrow \|\delta'\wedge\delta''\| = k^2\sqrt{k^2 + \tau^2}$$

$$\|\delta'\|^3 = k^3$$

elde edilir.

$$k_t = \frac{\|\delta'\wedge\delta''\|}{\|\delta'\|^3} = \frac{k^2\sqrt{k^2+\tau^2}}{k^3} = \frac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{k}$$

$$\Rightarrow k_t = \frac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{k}$$

dir. (5.2.2) nin tekrar türevi alınırsa:

$$\delta^{(3)} = -3kk't + (k'' - k^3 - \tau^2 k)n + (2k'\tau + k'\tau)b$$

$$\Rightarrow \delta'\wedge\delta''.\delta^{(3)} = k^4\tau' - k^3k'\tau$$

$$\Rightarrow \tau_t = \frac{\delta'\wedge\delta''.\delta^{(3)}}{\|\delta'\wedge\delta''\|^2} = \frac{k^4\tau' - k^3k'\tau}{k^4(k^2+\tau^2)} = \frac{k\tau' - k'\tau}{k(k^2+\tau^2)}$$

$$\Rightarrow \tau_t = \frac{k\tau' - k'\tau}{k(k^2+\tau^2)}$$

dir.

O halde, $\frac{\tau_t}{k_t} = \sigma(s)$ elde edilir. $\gamma$ bir slant helis eğrisi olduğundan, $\sigma(s)$ sabit bir fonksiyondur. Yani, $\frac{\tau_t}{k_t} =$ sabittir. O halde, $\gamma$ nın $(t)$ teğet gösteriminin küresel resmi bir küresel helistir.

**Teorem 5.2.2.** $\gamma$ bir slant helis eğrisi olsun. $\gamma$ nın $(b)$ binormal gösteriminin küresel resmi bir küresel helistir.

**İspat.** $(b)$ nin eğriliğini ve torsiyonunu sırasıyla $k_b$ ve $\tau_b$ ile ifade edelim. $k_b$ ve $\tau_b$ yi hesaplayalım:

$\gamma$ eğrisinin binormal gösteriminin küresel resmi $G$ yani $G(s) = b(s)$ olsun.

$$\Rightarrow G'(s) = -\tau n$$
$$G''(s) = k\tau t - \tau' n - \tau^2 b$$
$$G' \wedge G'' = \tau^3 t + k\tau^2 b$$
$$\Rightarrow \|G' \wedge G''\| = \sqrt{\tau^4 k^2 + \tau^6}$$
$$\|G'\|^3 = \tau^3$$
$$k_b = \frac{\|G' \wedge G''\|}{\|G'\|^3} = \frac{\tau^2 \sqrt{k^2 + \tau^2}}{\tau^3}$$
$$\Rightarrow k_b = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{\tau}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\tau_b = \frac{\det\left(G', G'', G^{(3)}\right)}{\|G' \wedge G''\|^2}$$

olduğundan

$$G^{(3)}(s) = (k\tau)' t + k(k\tau) n - \tau'' n - \tau'(-kt + \tau b) - (\tau^2)' b - \tau^2(-\tau n)$$
$$\Rightarrow G^{(3)}(s) = (k'\tau + k\tau')t + (k^2\tau - \tau'' + \tau^3)n - \left[\tau'\tau + (\tau^2)'\right]b$$
$$= (k'\tau + 2k\tau')t + (k^2\tau - \tau'' + \tau^3)n - 3\tau\tau' b$$
$$\det\left(G', G'', G^{(3)}\right) = G' \wedge G''.G^{(3)}$$
$$= \tau^3(k'\tau + 2k\tau') - 3k\tau^3\tau'$$
$$= \tau^3(\tau k' - k\tau')$$

ve $\|G' \wedge G''\|^2 = \tau^4(k^2 + \tau^2)$ olduğu için

$$\tau_b = \frac{k'\tau - k\tau'}{\tau(k^2 + \tau^2)}$$

bulunur. Böylece, $\frac{\tau_b}{k_b} = -\sigma(s)$ elde edilir. $\gamma$ bir slant helis eğrisi olduğundan $\sigma(s)$ sabit bir fonksiyondur. Yani, $\frac{\tau_b}{k_b} = \text{sabit}$ olur. O halde, $\gamma$ nın $(b)$ binormal gösteriminin küresel resmi bir küresel helistir.

**Tanım 5.2.1.** $\gamma,\beta : I \to \mathbb{R}^3$ iki eğri olsun. Farz edelim ki $s$ noktasında $\gamma$ ve $\beta$ eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla, $\{t,n,b\}$ ve $\{t^*,n^*,b^*\}$ olsun. Eğer $t(s).t^*(s)=0$ ise, $\beta$ eğrisine $\gamma$ eğrisinin involütü; $\gamma$ eğrisine $\beta$ eğrisinin evolütü denir. Eğer $\beta$ eğrisi, $\gamma$ eğrisinin involütü ise, involütün denklemi:

$$\beta(s)=\gamma(s)+(c-s)t(s)$$

dir. Burada, $c$ bir sabit ve $d(\gamma(s),\beta(s))=|c-s|$ dir.

**Teorem 5.2.3.** $\beta$, bir $\gamma$ uzay eğrisinin involütü olsun. Bu durumda, $\gamma$ bir slant helis eğrisidir gerek ve yeter şart $\beta$ bir silindirik helistir.

**İspat.** $\beta$ nın eğriliğini ve torsiyonunu sırasıyla $k^*$ ve $\tau^*$ ile ifade edelim. $k^*$ ve $\tau^*$ ı hesaplayalım:

$$\beta' = (c-s)kn$$
$$\beta'' = -(c-s)k^2t + [(c-s)k'-\tau]n + (c-s)k\tau b$$
$$\Rightarrow \beta' \wedge \beta'' = (c-s)^2k^2[\tau t + kb]$$
$$\Rightarrow \|\beta' \wedge \beta''\| = (c-s)^2k^2(k^2+\tau^2)^{1/2}$$

ve

$$\|\beta'\|^3 = (c-s)^3k^3 \Rightarrow k^* = \frac{\|\beta' \wedge \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{(c-s)^2k^2(k^2+\tau^2)^{1/2}}{(c-s)^3k^3}$$

$$\Rightarrow k^* = \frac{\sqrt{(k^2+\tau^2)}}{k(c-s)}$$

elde edilir. Burada $c$ bir sabittir.

$$\beta^{(3)} = [k^2 - 3(c-s)kk' + k\tau]t - [k' + \tau' - (c-s)(k'' - k\tau^2 - k^3)]n -$$
$$-[k^2 + k\tau - (c-s)(2k'\tau + k\tau')]b$$

$$\beta' \wedge \beta'' = (c-s)^2k^2[\tau t + kb]$$
$$\|\beta' \wedge \beta''\|^2 = (c-s)^4k^4(k^2+\tau^2)$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\tau^* = \frac{\det(\beta',\beta'',\beta^{(3)})}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2} = \frac{k\tau' - k'\tau}{k(k^2+\tau^2)(c-s)} = \frac{k}{(k^2+\tau^2)(c-s)}\left(\frac{\tau}{k}\right)'$$

elde edilir. Burada $c$ bir sabittir. Böylece $\dfrac{\tau^*}{k^*}=\sigma(s)$ dir. O halde, $\gamma$ slant helisinin involütü bir silindirik helistir ve ayrıca tersi de doğrudur.

**Teorem 5.2.4.** Sabit presesyonlu bir eğri, bir slant helis eğrisidir.

**İspat.** $\gamma$ sabit presesyonlu bir eğri olsun. Sabit presesyonlu $\gamma$ eğrisi için,

$$k(s)=w\sin(\mu s)\,,\ \tau(s)=w\cos(\mu s)$$

dir. Burada $w>0$ ve $w,\mu$ sabitlerdir. Bu durumda,

$$\sigma(s)=-\frac{\mu}{w}=\text{sabit}$$

elde edilir. O halde sabit presesyonlu bir eğri, bir slant helis eğrisidir.

**Teorem 5.2.5.** $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ bir uzay eğrisi olsun. $\gamma$ nın eğriliğini ve torsiyonunu sırasıyla $k,\tau$ ile ifade edelim. Bu durumda, $\gamma$ bir slant helisidir gerek ve yeter şart $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(s)=(\alpha_1(s),\alpha_2(s))$ eğrisi bir çemberdir.
Burada, $\alpha_1(s)=\int k(s)ds$ ve $\alpha_2(s)=\int \tau(s)ds$ dir.

**İspat.** $\alpha$ eğrisinin eğriliğini hesaplayalım:

$$k_\alpha(s)=\left(\frac{\alpha_1'\alpha_2''-\alpha_1''\alpha_2'}{\left((\alpha_1')^2+(\alpha_2')^2\right)^{3/2}}\right)(s)=\left(\frac{k^2}{\left(k^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{k}\right)'\right)(s)=\sigma(s)$$

$\Rightarrow k_\alpha=\sigma(s)=\text{sabit}$

elde edilir.O halde $\alpha$ eğrisi bir çemberdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 5.3. Örnekler

### Örnek 5.3.1.

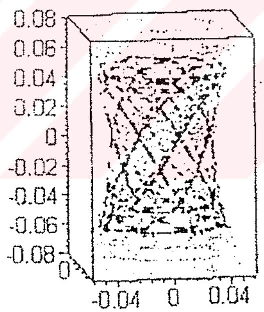
Bir $\gamma$ slant helis eğrisi,

$$\begin{aligned}
\gamma_1(s) &= \frac{25}{612}\sin(18s) - \frac{9}{1700}\sin(50s) \\
\gamma_2(s) &= -\frac{25}{612}\cos(18s) + \frac{9}{1700}\cos(50s) \\
\gamma_3(s) &= \frac{15}{272}\sin(16s)
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu eğri,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{8}{289}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{8}{289}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = 1$$

tek kanatlı hiperboloidi üzerinde yatar. $\gamma$ eğrisinin resmi Şekil 5.3.1. de veriliyor.

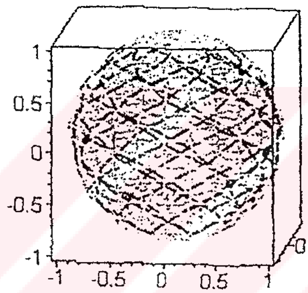



Şekil 5.3.1. Slant helisin, hiperboloidi üzerindeki gösterimi

$\gamma$ nın $(t)=(t_1,t_2,t_3)$ teğet gösteriminin parametrizasyonu:

$$t_1(s)=\frac{50}{68}\cos(18s)-\frac{18}{68}\cos(50s)$$
$$t_2(s)=\frac{50}{68}\sin(18s)-\frac{18}{68}\sin(50s)$$
$$t_3(s)=\frac{15}{17}\cos(16s)$$

dir. $(t)$ eğrisinin resmi Şekil 5.3.2. de veriliyor.

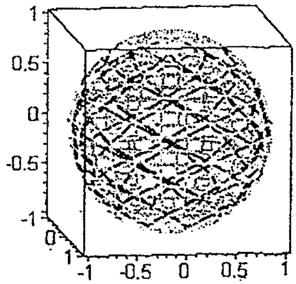



Şekil 5.3.2. Birim küre üzerinde $\gamma$ slant helisinin teğet gösterimi

$\gamma$ nın $b=(b_1,b_2,b_3)$ binormal gösteriminin parametrizasyonu:

$$b_1(s)=-\frac{9}{34}\sin(50s)-\frac{25}{34}\sin(18s)$$
$$b_2(s)=\frac{9}{34}\cos(50s)+\frac{25}{34}\cos(18s)$$
$$b_3(s)=-\frac{15}{17}\sin(16s)$$

dir. $(b)$ eğrisinin resmi Şekil 5.3.3. de veriliyor.




Şekil 5.3.3. Birim küre üzerinde $\gamma$ slant helisinin binormal gösterimi

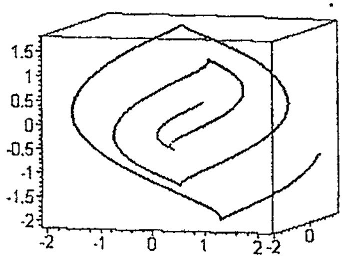
$\gamma$ nın $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ involütünün parametrizasyonu:

$$\beta_1(s) = \frac{25}{612}\sin(18s) - \frac{9}{1700}\sin(50s) - \frac{25}{34}s\cos(18s) + \frac{9}{34}s\cos(50s)$$

$$\beta_2(s) = -\frac{25}{612}\cos(18s) + \frac{9}{1700}\cos(50s) - \frac{25}{34}s\sin(18s) + \frac{9}{34}s\sin(50s)$$

$$\beta_3(s) = -\frac{15}{272}\sin(16s) - \frac{15}{17}s\cos(16s)$$

dir. $\beta$ eğrisinin resmi Şekil 5.3.4. de veriliyor.




Şekil 5.3.4. $\gamma$ slant helisinin $\beta$ involütü

KAYNAKLAR


Hacısalihoğlu, H. H. 1993. Diferensiyel Geometri. Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara.

Sabuncuoğlu, A. 2004. Diferensiyel Geometri. Nobel Basımevi, Ankara.

Bruce, J. W. and Giblin, P. J. 1992. Curves and Singularities. Cambridge University Press.

Gray, A. 1939. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA. CRC Press LLC.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2003. Special Curves and Ruled Surfaces. Contributions to Algebra and Geometry, 44; 203-212.

Carmo, M. do 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, New Jersey.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2001. Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 130; 1-11.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. Turk J. Math., 28; 153-163.

Izumiya, S., Katsumi, H. and Yamasaki, T. 1999. The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve. Geometry and topology of caustics-Caustics'98- Banach Center Publications, 50; 137-149.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves. Journal of Geometry, 74; 97-109.

Kula, L. and Yaylı, Y. 2000. On slant helix and Its spherical indicatrix. (Yayına sunuldu)

Karger, A. and Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach Science Publishers.

Struik, D. J. 1950. Lectures on Classical Differential Geometry. Dover Publications, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İzmir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir'de tamamladı. 1999 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2003 yılında mezun oldu ve aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2003-2004 öğretim yılında, aldığı yüksek lisans derslerini başarıyla tamamladı.