

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**LORENTZ-MINKOWSKI UZAYLARINDA
YÜZEYLERİN ARAKESİT EĞRİLERİNİN
DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ**

Zafer ŞANLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

25.12.2014

Zafer ŞANLI

ÖZET

Doktora Tezi

LORENTZ-MINKOWSKI UZAYLARINDA YÜZEYLERİN ARAKESİT EĞRİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Zafer ŞANLI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, temel tanımlar ve gerekli önbilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lorentz Mikowski 3-uzayı L^3 de iki spacelike yüzeyin spacelike arakesit eğrisinin eğriliklerinin elde edilmesi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Lorentz Mikowski 3-uzayı L^3 de iki timelike yüzeyin arakesit eğrilerinin eğrilikleri elde edilmiş ve bu eğrilikler üzerine bazı sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölümde, Lorentz Mikowski 3-uzayı L^3 de spacelike ve null iki yüzeyin spacelike arakesit eğrilerinin eğrilikleri elde edilmiştir.

Aralık 2014, 62 sayfa

Anahtar Kelimeler : Arakesit eğrileri, Lorentz uzay eğrileri, Lorentz yüzeyleri, normal eğrilik, geodezik eğrilik, geodezik burulma, asimptotik eğri, geodezik eğri

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF INTERSECTION CURVES OF SURFACES IN LORENTZ-MINKOWSKI SPACES

Zafer ŞANLI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is allocated to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and required information are given.

In the third chapter, is examined to get curvatures of intersection curves of two spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space L^3 .

In the fourth chapter, is gotten curvatures of intersection curves of two timelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space L^3 and given some results on the curvatures.

In the fifth chapter, is gotten curvatures of spacelike intersection curves of a spacelike and a null surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space L^3 .

December 2014, 62 pages

Key Words: Intersection curves, Lorentzian space curves, Lorentzian space surfaces, normal curvature, geodesic curvature, geodesic torsion, asymptotic curve, geodesic curve

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma konusunu vererek, bana araştırma olanağı sağlayan ve araŐtırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniwersitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'ya, fikirleriyle vesorularıyla beni yönlendiren Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniwersitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı) ile Prof. Dr. Baki KARLIĐA (Gazi Üniwersitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'ya teŐekkürlerimi sunarım.

ÇalıŐmalarım süresince birçok fedekarlıklar göstererek beni destekleyen ailem ve eŐime en derin duygularla teşekkür ederim.

Zafer ŞANLI

Ankara, Aralık 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. İKİ SPACELIKE YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİ.....	21
3.1 Spacelike Arakesit Eğrisi.....	21
3.2 Spacelike Arakesit Eğrisinin Eğriliği.....	22
3.3 Spacelike Arakesit Eğrisinin Torsiyonu.....	24
4. İKİ TIMELIKE YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİ.....	27
4.1 Timelike Arakesit Eğrisi.....	28
4.1.1 Timelike arakesit eğrisinin eğriliği.....	29
4.1.2 Timelike arakesit eğrisinin torsiyonu.....	32
4.2 Spacelike Arakesit Eğrisi.....	48
4.2.1 Spacelike arakesit eğrisinin eğriliği.....	48
4.2.2 Spacelike arakesit eğrisinin torsiyonu.....	50
4.3 Null Arakesit Eğrisi.....	51
5. SPACELIKE-NULL İKİ YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİ.....	52
5.1 Spacelike Arakesit Eğrisi.....	52
5.2 Spacelike Arakesit Eğrisinin Eğriliği.....	54
5.3 Spacelike Arakesit Eğrisinin Torsiyonu.....	67
KAYNAKLAR.....	60
ÖZGEÇMİŞ.....	62

SİMGELER DİZİNİ

$\{t, n, b, \kappa, \tau\}$	Uzay Eğrisinin Frenet Elemanları
$\{T, N, P\}$	Non-Null Yüzey Üzerindeki Eğrilerin Darboux Çatısı
$\{T, Z, Y\}$	Null Yüzey Üzerindeki Spacelike Eğrinin Darboux Çatısı
k_n	Normal Eğrilik
k_g	Geodezik Eğrilik
τ_g	Geodezik Burulma
k_y	y eğriliği
k_z	z eğriliği

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 \mathbb{L}^3 de vektörlerin karakterleri.....	4
Şekil 2.2 Katenoid yüzeyi.....	16
Şekil 2.3 Helikoid yüzeyi.....	16
Şekil 2.4 Tek kanatlı hiperboloid yüzeyi.....	17
Şekil 2.5 Timelike yüzey örneği.....	17
Şekil 3.1 İki spacelike yüzeyin arakesit eğrisi.....	21
Şekil 3.2 Spacelike arakesit eğrisinin normal düzlemi.....	22
Şekil 3.3 Helikoid ve katenoid yüzeylerinin arakesit eğrisi.....	26
Şekil 4.1 İki timelike yüzeyin arakesit eğrisi.....	27
Şekil 4.2 Timelike arakesit eğrisinin normal düzlemi.....	29
Şekil 4.3.a.b İki timelike yüzeyin arakesit eğrisi.....	47
Şekil 4.4 Spacelike arakesit eğrisi.....	48
Şekil 4.5 Null arakesit eğrisinin normal düzlemi.....	51
Şekil 5.1 Null koni ve spacelike yüzeyin arakesiti.....	59

1. GİRİŞ

Bilgisayar yardımıyla geometri (Computational Geometry) bilgisayar bilimlerinin, geometriler cinsinden ifade edilen algoritmaların çalışıldığı dalıdır. Bazı salt geometrik problemler bilgisayarlı geometrinin esas alanı olan bu algoritmaların çalışılmasından ortaya çıkmıştır (Preparata ve Shomos 1993).

Bilgisayarlı geometrinin gelişmesindeki itici güç bilgisayar grafikleri ve bilgisayar destekli tasarım ve üretim olmasına karşın bilgisayarlı geometrinin bir çok problemi reel hayattan, dolayısıyla da matematiksel görselleştirmeden ortaya çıkmaktadır. Bilgisayarlı geometrinin diğer önemli uygulamaları ise robotik, jeomorfik bilgi sistemleri, mikroçip tasarımı ve bilgisayar destekli mühendislik gibi alanlarda ortaya çıkar (Preparata ve Shomos 1993).

Geometrik modelleme, şekillerin matematiksel tanımı için yöntem ve algoritmaları inceleyen bilgisayarlı geometrinin bir dalıdır. Geometrik modellemede çalışılan şekillerin çoğu 2 ve 3 boyutlu olmasına karşın, bir çok araç ve prensibi de sonlu boyutlu uzaylara da uygulanabilmektedir. 2 boyutlu modeller bilgisayar etimografisi ve teknik resimde çok önemli bir yere sahiptir. 3 boyutlu modeller ise bilgisayar destekli tasarım ve üretim için temel niteliğinde olup sivil ve mekanik mühendisliğinde, ziraat, jeoloji ve tıbbi görüntüleme gibi bir çok teknik alanda yaygın olarak kullanılmaktadır (Farin ve Hoschec 2002).

İki yüzeyin arakesit problemi, bilgisayar destekli tasarıda önemli bir problem olarak karşımıza çıkar. İki yüzeyin arakesitinin belirlenmesi, karmaşık şekillerin modellenmesinde oldukça kullanışlı bir araçtır. Geometrik modellemede en çok kullanılan yüzeyler ise ifadesi parametrik olarak ve kapalı fonksiyon ile verilen yüzeylerdir. Hartmann (1996) Öklidyen 3-uzayında tüm tipteki arakesit problemleri için eğrilik hesaplama formüllerini vermiştir. Wilmore (1959) ve Allesio (2006) kapalı fonksiyon ile verilen iki yüzeyin transversal arakesit eğrisinin birim teğet, birim asli normal, birim binormal vektörleri ile eğrilik ve torsiyon

fonksiyonlarının nasıl hesaplanacağını göstermişlerdir. Ye ve Maekawa (1999) iki yüzeyin hem transversal (boy lu boyunca kesişen) hem de teğetsel arakesit eğrilerinin diferensiyel geometrik özellikleri için bazı yöntemler vermişlerdir.

Allesio ve Guadalupe (2007) Kiehn (2004) in Falaco solitonları üzerine olan çalışmasından yola çıkarak Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki spacelike yüzeyin spacelike transversal arakesit eğrisinin eğriliklerini hesaplayarak, arakesit problemini Öklid uzaylarından Lorentz uzaylarına taşımışlardır.

Bu çalışmada ilk olarak Allesio ve Guadalupe'nin yapmış olduğu çalışmadan yola çıkılarak, Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki timelike yüzeyin arakesit eğrisinin bir karakterizasyonu elde edilmiş ve bu eğrilerin κ eğriliği ve τ torsiyonu hesaplanmıştır. Ayrıca bu fonksiyonlar yardımıyla bu arakesit eğrisinin yüzeylerden birisi üzerinde asimptotik iken diğeri üzerinde geodezik eğri olması halinde yüzeyler arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra Ye ve Maekawa'nın tekniği kullanılarak κ eğriliği ve τ torsiyonunun hesabında bulunan k_n^A, k_n^B normal eğrilikleri (Carmo 1976) ve p_n^A, p_n^B değerleri M^A ve M^B timelike yüzeylerinin birinci ve ikinci temel form katsayıları yardımıyla belirlenmiştir. Ayrıca örnek olarak Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki timelike parametrik yüzey verilmiş ve bu iki yüzeyin timelike arakesit eğrisinin eğriliği ve torsiyonu hesaplanmıştır.

Son olarak ise Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de parametrik olarak verilmiş spacelike ve null iki yüzeyin bir spacelike arakesit eğrisi boyunca kesişmesi ele alınmış ve spacelike arakesit eğrisinin κ eğriliği ve τ torsiyonu hesaplanmış ve bu eğrilikler üzerine bazı sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmaya temel teşkil eden temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 2.1: 3-boyutlu reel vektör uzayı \mathbb{R}^3 üzerinde $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$$

şeklinde tanımlı skalar çarpım ile birlikte \mathbb{R}^3 metrik uzayına **Lorentz-Minkowski 3-uzayı** denir ve \mathbb{L}^3 ile gösterilir. Buradaki \langle , \rangle metriğine de **Lorentz metriği** denir (Lopez 2008).

Tanım 2.2: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de sıfır olmayan bir v vektörü için eğer $\langle v, v \rangle > 0$, $\langle v, v \rangle < 0$ ve $v \neq 0$ iken $\langle v, v \rangle = 0$ ise v vektörüne sırasıyla **spacelike**, **timelike** ve **null(lightlike) vektör** adı verilir. Özel olarak, $v = 0$ vektörü spacelike olarak kabul edilir (Alessio ve Guadalupe 2007).

Tanım 2.3: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de $v = (v_1, v_2, v_3)$ ise v nin normu

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|} = \sqrt{|v_1^2 + v_2^2 - v_3^2|}$$

olarak tanımlanır (Alessio ve Guadalupe 2007).

Tanım 2.4: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 deki u ve v vektörleri için $\langle u, v \rangle = 0$ oluyorsa u ve v vektörleri **ortogonaldir** denir. $\langle u, u \rangle = \pm 1$ koşulunu sağlayan u vektörüne **birim vektör** denir. \mathbb{L}^3 deki $\{v_1, v_2, v_3\}$ bazının elemanları birim vektörler yani

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} -1 & , \quad i = j = 3 \\ 1 & , \quad i = j = 1, 2 \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}$$

oluyorsa ise **ortonormal baz** adını alır (Alessio ve Guadalupe 2007).

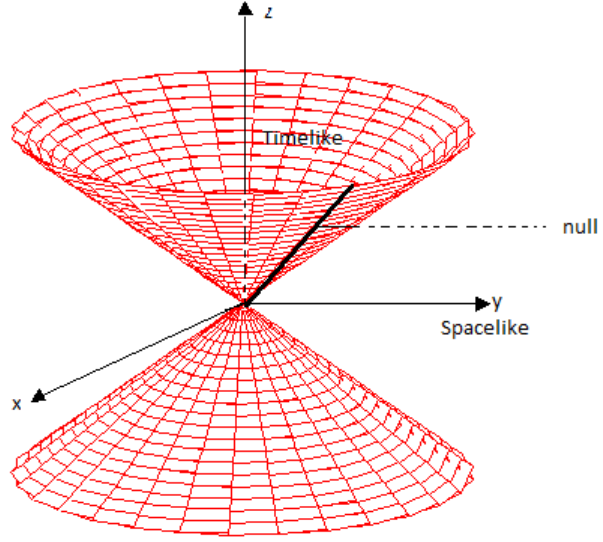
Tanım 2.5: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de tüm null vektörlerin cümlesi

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

ve tüm timelike vektörlerin cümlesi de

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

olarak tanımlanır. Bu iki cümleye sırasıyla **ışık konisi** ve **zaman konisi** adı verilir (Lopez 2008).



Şekil 2.1 \mathbb{L}^3 de vektörlerin karakterleri

Önerme 2.1:

1. $v \in \mathbb{L}^3$ olsun. Bu takdirde v nin bir timelike vektör olması için gerek ve yeter şart v^\perp uzayının spacelike olmasıdır. Dolayısıyla $\mathbb{L}^3 = v \oplus v^\perp$ olur. Spacelike vektörler için de v nin bir spacelike vektör olması için gerek ve yeter şart v^\perp uzayının timelike olmasıdır.

2. $U \subset \mathbb{L}^3$ bir altuzay olsun. Bu takdirde U nun spacelike altuzay olması için gerek ve yeter şart U^\perp uzayının timelike olmasıdır.
3. $U \subset \mathbb{L}^3$ bir altuzay olsun. Bu takdirde U nun null altuzay olması için gerek ve yeter şart U^\perp uzayının da null olmasıdır (Lopez 2008).

Önerme 2.2:

1. $u, v \in \mathbb{L}^3$ iki null vektör olsun. Bu takdirde u ile v nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart $\langle u, v \rangle = 0$ olmasıdır.
2. $U \subset \mathbb{L}^3$ bir null altuzay ise $\text{boy}(U \cap U^\perp) = 1$ dir (Lopez 2008).

Önerme 2.3: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayın 2-boyutlu bir alt uzayı U olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. U bir timelike altuzaydır.
2. U lineer bağımsız iki null vektör içerir.
3. U bir tane timelike vektör içerir (Lopez 2008).

Önerme 2.4: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayın bir alt uzayı U olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. U bir null altuzaydır.
2. U bir null vektör içerir ancak bir timelike vektör içermez.
3. $U \cap \mathcal{C} = L - \{0\}$ ve $\text{boy}L = 1$ dir (Lopez 2008).

Tanım 2.6: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayın bir düzlemi D olsun. Bu takdirde D nin bir spacelike (timelike, null) düzlem olması için gerek ve yeter şart D ye normal olan vektörün timelike (spacelike, null) olmasıdır (Lopez 2008).

İç çarpım uzaylarının bazı özellikleri Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de geçerlidir. Örneğin, bir iç çarpım uzayında Shwarz eşitsizliği, v ile w vektörleri arasındaki θ açısının $v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta$ olacak şekilde tek olarak tanımlanmasını mümkün kılar. Lorentz Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 uzayındaki durum ise şu şekilde tanımlanır (Lopez 2008).

Önerme 2.5: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de u ve v vektörleri iki timelike vektör olsun. Bu takdirde

1. $|\langle v, w \rangle| \geq \|v\| \|w\|$ dir. Buradaki eşitlik v ve w nın eşlineer olması halinde gerçekleşir.
2. u ve v vektörleri \mathbb{L}^3 ün aynı zaman konisindeki vektörler ise

$$\langle v, w \rangle = -\|v\| \|w\| \cosh \theta$$

olacak şekilde tek bir $\theta \geq 0$ açısı vardır. Bu değere u ve v vektörleri arasındaki **hiperbolik açı** adı verilir.

3. u ve v vektörleri \mathbb{L}^3 ün farklı zamankonisindeki vektörler ise

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cosh \theta$$

olacak şekilde tek bir $\theta \geq 0$ açısı vardır. Bu değere u ve v vektörleri arasındaki **hiperbolik açı** adı verilir (Alessio ve Guadalupe 2007).

Tanım 2.7: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de u ve v vektörleri tarafından tek olarak belirlenen $u \times v$ **vektörel çarpımı**

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada $\{e_1, e_2, e_3\}$ sistemi \mathbb{L}^3 ün kanonik bazı ve $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ dir (Alessio ve Guadalupe 2007).

Tanım 2.8: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de u, v, w vektörlerinin karma çarpımı, $w = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$\langle w, (u \times v) \rangle = \det(w, u, v) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Dahası $u, v, x, y \in \mathbb{L}^3$ keyfi vektörler olmak üzere, vektörel çarpımın

$$\langle u \times v, x \times y \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle u, y \rangle & \langle v, y \rangle \\ \langle u, x \rangle & \langle v, x \rangle \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

ve

$$(u \times v) \times w = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v \quad (2.4)$$

özellikleri de vardır (Alessio ve Guadalupe 2007).

Önerme 2.6: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında vektörel çarpımın şu özellikleri vardır:

1. $u \times v = -v \times u$.
2. $u \times v$ vektörü hem u hem de v ile ortogonaldir.
3. $u \times v = 0$ olması için gerek ve yeter şart u ve v nin birbirinin katı olmasıdır.
4. $u \times v \neq 0$ vektörü u ile v vektörlerinin içinde kaldığı D düzleminde kalması için gerek ve yeter şart D nin null düzlem olmasıdır (Lopez 2008).

Tanım 2.9: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 deki bir $c = c(t)$ eğrisi için $c'(t)$ hız vektörleri spacelike, timelike veya null ise $c = c(t)$ eğrisi sırasıyla **spacelike**, **timelike** ve **null eğri** olarak adlandırılır. Non-null bir $c = c(s)$ eğrisi için $\langle c'(s), c'(s) \rangle = \pm 1$ oluyorsa s **yarı-yay parametresi ile parametrelendirilmiştir** denir. Bu halde $c = c(s)$ eğrisi **birim hızlı eğri** olarak adlandırılır (Alessio ve Guadalupe 2007).

Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de $c = c(s)$ eğrisi yarı-yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir spacelike eğri olsun. Bu takdirde c' birim spacelike vektör yani, $\|c'\| = 1$ olur. Bu ise

$$\langle c', c' \rangle = 1 \quad (2.4.)$$

olmasını gerektirir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa $\langle c'', c' \rangle = 0$ olur. Bu takdirde c'' ye bağlı olarak aşağıdaki üç durum oluşur (Walrave 1985):

Durum 1 $\langle c'', c'' \rangle > 0$ yani c'' spacelike olması hali

$\kappa(s) = \|c''\| = \sqrt{\langle c'', c'' \rangle}$ sayısına c nin s deki eğriliği denir. $\kappa(s) \neq 0$ olduğu noktalarda c'' doğrultusundaki $n(s)$ birim vektörü

$$c''(s) = \kappa(s) n(s) \quad (2.5)$$

eşitliği ile tanımlanır. (2.4) den $c''(s)$ in $c'(s)$ ye normal olduğu görülür. O halde $n(s)$ vektörü de $c'(s)$ ye normal olup bir spacelike vektördür ve bu vektör s deki normal vektör olarak adlandırılır. c nin s deki birim teğet spacelike vektörünü $t(s) = c'(s)$ ile gösterelim. O halde (2.5) den

$$t'(s) = \kappa(s) n(s) \quad (2.6)$$

elde edilir.

Binormal vektör

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

$\{t(s), n(s)\}$ spacelike oskulator düzlemine c nin her $c(s)$ noktasında dik tek birim timelike vektör ve $\{t(s), n(s), b(s)\}$ sistemi \mathbb{L}^3 deki aynı yönlendirmeye sahiptir.

$b(s)$ birim vektör olduğundan $\|b'(s)\|$ uzunluğu oskulator düzlemlerle s deki oskulator düzlemin yakınlığının değişim oranını ölçer. $\langle b(s), b(s) \rangle = -1$ olduğundan

$$\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$$

olup $b'(s)$ vektörü $b(s)$ ye normaldir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} b'(s) &= (t(s) \times n(s))' \\ &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \end{aligned}$$

olup $t'(s)$ ile $n(s)$ eşlineer olduğundan

$$b'(s) = t(s) \times n'(s)$$

elde edilir. Bu da $b'(s)$ nin $t(s)$ ye normal olduğunu gösterir. O halde $b'(s)$ vektörü $n(s)$ ye paralel olup

$$b'(s) = \tau(s) n(s) \quad (2.7)$$

yazılabilir.

Böylece s parantesinin herbir değeri için birim ve ortogonal $t(s), n(s), b(s)$ vektörleri elde edilmiş olur. Bu üçlü s deki Frenet üçlüsüne tekabül eder. $t(s)$ ve $b(s)$ nin $t'(s) = \kappa(s) n(s)$ ve $b'(s) = \tau(s) n(s)$ türevleri $\{t(s), n(s), b(s)\}$ bazına göre ifade edildiğinde s nin bir komşuluğunda eğrinin davranışı hakkında bilgi veren geometrik nicelikleri (κ eğriliği ve τ torsiyonu) üretir.

Diğer geometrik nicelikler için $n'(s)$ vektörünün belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için $n' \in \text{span}\{t, n, b\}$ olduğundan

$$n' = ft + gn + hb$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı sırasıyla t, n ve b ile iç çarpılırsa

$$f = \langle n', t \rangle, g = \langle n', n \rangle, h = -\langle n', b \rangle$$

olup

$$n' = \langle n', t \rangle t + \langle n', n \rangle n - \langle n', b \rangle b$$

olarak bulunur. Bu takdirde

$$n' = -\kappa t + \tau b \quad (2.8)$$

eğrilik ve torsiyon elde edilir.

Daha sonra kullanacağımız

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t + \tau b \\ b' &= \tau n \end{aligned} \tag{2.9}$$

denklemlerine **Frenet formülleri** adı verilir.

Durum 2 $\langle c'', c'' \rangle < 0$ yani c'' timelike

$n(s)$ normal vektörü birim timelike vektördür. $b(s)$ binormal vektörü ise $\{t(s), n(s)\}$ spacelike oskulator düzlemine c nin her $c(s)$ noktasında dik tek birim spacelike vektör ve $\{t(s), n(s), b(s)\}$ sistemi \mathbb{L}^3 deki aynı yönlendirmeye sahiptir. Bu halde Frenet formülleri

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \kappa t + \tau b \\ b' &= \tau n \end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklindedir.

Durum 3 $\langle c'', c'' \rangle = 0$ yani c'' null olması hali

Doğruları ve c üzerindeki bükülme noktalarını gözardı ettiğimizde $c'' \neq 0$ olarak kabul edebiliriz. Bu takdirde $n(s)$ normal vektörü c'' olur. $b(s)$ binormal vektörü ise c nin her $c(s)$ noktasında $t(s)$ ye normal ve $\langle n, b \rangle = 1$ olacak şekildeki tek null vektördür. O halde Frenet formülleri

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \tau n \\ b' &= -\kappa t + \tau b \end{aligned} \tag{2.11}$$

şeklindedir. Buradaki κ "eğriliği" sadece iki değer alabilir: Eğer c eğrisi bir doğru ise $\kappa = 0$, diğer hallerde ise $\kappa = 1$ dir. c nin doğru olması halinde $c'' = 0 = t'$ olur ki bu $\kappa = 0$ olması anlamına gelir. Eğer c bir doğru değilse $c'' \neq 0$ olacak şekilde öyle bir I aralığı vardır ki $n(s) = t'(s)$ olup $\kappa = 1$ dir. \mathbb{L}^3 de $\{t, n, b\}$ bir pseudo-ortonormal

baz olduğundan

$$n' = a_1 t + a_2 n + a_3 b$$

$$b' = b_1 t + b_2 n + b_3 b$$

olacaktır. O halde

$$a_1 = \langle n', t \rangle \quad a_2 = \langle n', b \rangle \quad a_3 = \langle n', n \rangle$$

$$b_1 = \langle b', t \rangle \quad b_2 = \langle b', b \rangle \quad b_3 = \langle b', n \rangle$$

olup

$$\langle n, n \rangle = \langle n, t \rangle = \langle b, b \rangle = 0$$

olduğundan

$$\langle n', n \rangle = 0$$

$$\langle b', b \rangle = 0$$

$$\langle n', t \rangle = 0$$

dolayısıyla

$$a_1 = a_3 = b_2 = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$\langle n, b \rangle = 1 \text{ ve } \langle t, b \rangle = 0$$

olduğundan bu eşitliklerin türevi alınırsa

$$\langle n', b \rangle + \langle n, b' \rangle = 0$$

ve

$$\langle t', b \rangle + \langle t, b' \rangle = 0$$

olup

$$a_2 = -b_3 \text{ ve } b_1 = -\kappa = -1$$

bulunur. Sonuç olarak bu halde sadece $a_2 = \tau$ eğriliğinin mevcut olduğu görülür.

Bu takdirde c nin doğru olmaması halinde Frenet Formülleri

$$\begin{aligned} t' &= n \\ n' &= \tau n \\ b' &= -t + \tau b \end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir.

Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de $c = c(s)$ eğrisi yarı-yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir timelike eğri olsun. Bu takdirde c' birim timelike vektör yani, $\|c'\| = -1$ olur. Bu ise

$$\langle c', c' \rangle = -1$$

olmasını gerektirir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır

$$\langle c'', c' \rangle = 0 \tag{2.13}$$

olup c'' bir c' timelike hız vektöründen bağımsız bir spacelike vektör olur. Bu takdirde $c(s)$ timelike eğrisinin s deki $\kappa(s)$ **eğriliği**

$$\kappa(s) = \|c''(s)\| = \sqrt{\langle c''(s), c''(s) \rangle}$$

olarak tanımlanır. $\kappa(s) \neq 0$ olduğu noktalarda c'' doğrultusundaki $n(s)$ birim vektörü

$$c''(s) = \kappa(s) n(s) \tag{2.14}$$

eşitliği ile tanımlanır. (2.13) den $c''(s)$ in $c'(s)$ ye normal olduğu görülür. O halde $n(s)$ vektörü de $c'(s)$ ye normal olup, bir spacelike vektördür ve bu vektör s deki normal vektör olarak adlandırılır. c nin s deki birim teğet timelike vektörünü $t(s) = c'(s)$ ile gösterelim. O halde (2.14) den

$$t'(s) = \kappa(s) n(s) \tag{2.15}$$

elde edilir.

Binormal vektör

$$b(s) = t(s) \times n(s) \quad (2.16)$$

$\{t(s), n(s)\}$ düzlemine c nin her $c(s)$ noktasında dik tek birim spacelike vektör olup $\{t(s), n(s), b(s)\}$ sistemi \mathbb{L}^3 deki aynı yönlendirmeye sahiptir.

$b(s)$ birim vektör olduğundan $\|b'(s)\|$ uzunluğu oskulatör düzlemlerle s deki oskulatör düzlemin yakınlığının değişim oranını ölçer. $\langle b(s), b(s) \rangle = 1$ olduğundan

$$\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$$

ve $t'(s)$ ile $n(s)$ eşlineer olduğundan

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) \quad (2.17)$$

elde edilir. Bu da $b'(s)$ nin $t(s)$ ye normal olduğunu gösterir. O halde $b'(s)$ vektörü $n(s)$ ye paralel olup

$$b'(s) = \tau(s) n(s) \quad (2.18)$$

yazılabilir. (2.17) de tanımlanan $\tau(s)$ sayısına c nin s noktasındaki **torsiyonu** denir

Böylece s parametresinin herbir değeri için birim ve ortogonal $t(s), n(s), b(s)$ vektörlerini elde etmiş olduk. Bu üçlü s deki Frenet üçlüsüne tekabül eder. $t(s)$ ve $b(s)$ nin $t'(s) = \kappa(s) n(s)$ ve $b'(s) = \tau(s) n(s)$ türevleri $\{t(s), n(s), b(s)\}$ bazına göre ifade edildiğinde s nin bir komşuluğunda eğrinin davranışı hakkında bilgi veren geometrik nicelikleri üretir.

Durum 1 de $n'(s) \in \{t, n, b\}$ olduğundan

$$n' = -\langle n', t \rangle t + \langle n', n \rangle n + \langle n', b \rangle b$$

olup

$$n' = \kappa t + \tau b \quad (2.19)$$

eğrilik ve torsiyon elde edilir.

Daha sonra kullanacağımız

$$\begin{aligned}t' &= \kappa n \\n' &= \kappa t + \tau b \\b' &= -\tau n\end{aligned}\tag{2.20}$$

denklemlerine **Frenet formülleri** adı verilir (Lopez 2008).

Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de bir spacelike eğrinin normalinin karakterine göre c''' türevini hesaplayalım:

$$c'' = t' = \kappa n$$

denkleminin türevi alınırsa

$$c''' = \kappa' n + \kappa n'$$

bulunur. Burada (2.9), (2.10) ve (2.11) Frenet denklemlerindeki 2. eşitlik yerine yazıldığında ise yukarıdaki üç durum için

$$\text{Durum 1: } c''' = -\kappa^2 t + \kappa' n + \kappa \tau b\tag{2.21}$$

$$\text{Durum 2: } c''' = \kappa^2 t + \kappa' n + \kappa \tau b\tag{2.22}$$

$$\text{Durum 3: } c''' = \tau n\tag{2.23}$$

şeklinde bulunur. O halde buradan torsiyon (2.21), (2.22) ve (2.23) den

$$\text{Durum 1: } \tau = -\frac{\langle c''', b \rangle}{\kappa}\tag{2.24}$$

$$\text{Durum 2: } \tau = \frac{\langle c''', b \rangle}{\kappa}\tag{2.25}$$

$$\text{Durum 3: } \tau = \langle c''', b \rangle\tag{2.26}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de bir timelike $c = c(s)$ eğrisinin c''' türevini hesaplayalım:

$$c'' = t' = \kappa n$$

denkleminin türevi alınırsa

$$c''' = \kappa' n + \kappa n'$$

bulunur. Burada (2.20) Frenet denklemlerindeki 2. eşitlik yerine yazıldığında ise

$$c''' = \kappa^2 t + \kappa' n + \kappa \tau b \quad (2.27)$$

şeklinde bulunur. O halde torsiyon da denklem (2.27) den

$$\tau = \frac{\langle c''', b \rangle}{\kappa} \quad (2.28)$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.9: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de bir yüzey M olsun. M nin p noktasındaki $T_p(M)$ tanjant uzayı üzerine indirgenen Lorentz metriği pozitif tanımlı (1 indeksli Lorentz metriği, dejenere) ise M yüzeyine timelike (spacelike, null) yüzey denir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında

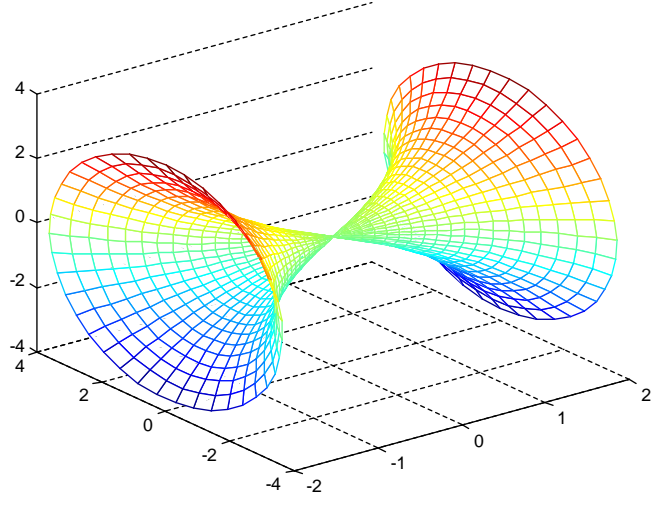
$$X(u, v) = (u, -\sinh(u) \sin(v), -\sinh(u) \cos(v))$$

parametrik denklemi ile verilen katenoid yüzeyi

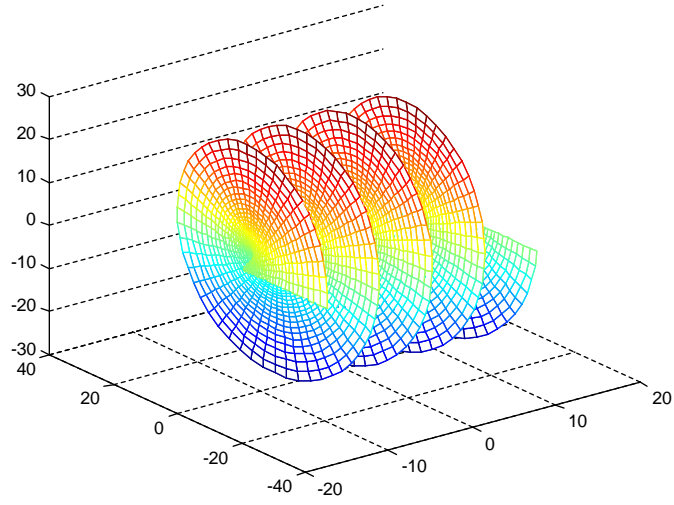
$$x(r, w) = (-w, -\cosh(r) \cos(w), -\cosh(r) \sin(w))$$

parametrik denklemi ile verilen helikoid yüzeyi spacelike yüzeylerdir

(Alessio ve Guadalupe 2007).



Şekil 2.2 Katenoid yüzeyi



Şekil 2.3 Helikoid yüzeyi

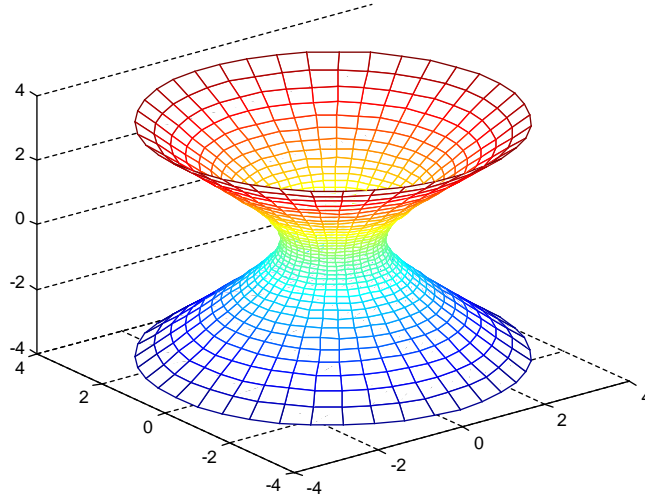
Örnek 2.2: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında

$$X(u, v) = (\cosh(u) \cos v, \cosh(u) \sin v, \sinh(u))$$

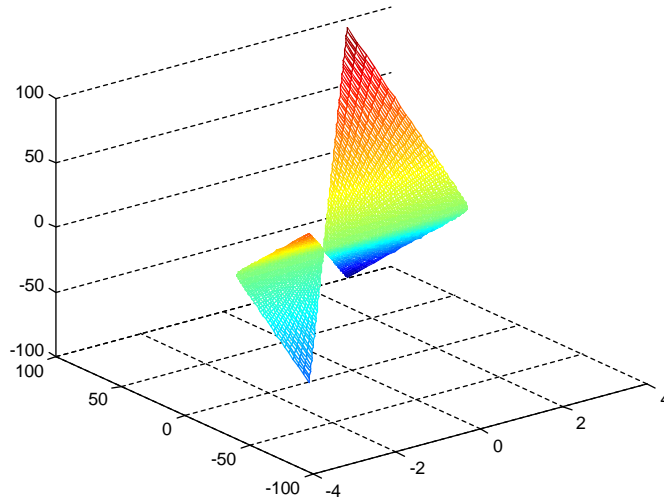
parametrik denklemi ile verilen tek kanatlı hiperboloid yüzeyi ve

$$x(r, w) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}((r+1)\cosh(w) - 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(r+1)\sinh(w) \right)$$

parametrik denklemi ile verilen yüzey timelike yüzeylerdir (Lopez 2000).



Şekil 2.4 Tek Kanatlı Hiperboloid Yüzeyi



Şekil 2.5 Timelike Yüzey Örneği

Tanım 2.10: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında M bir spacelike yüzey ve $c = c(s)$ de bu yüzey üzerinde yatan bir spacelike eğri olsun. Bu takdirde $P(s) = T(s) \times N(s)$ olmak üzere c eğrisi boyunca **Lorenzian Darboux çatısı** adı verilen bir $\{T, N, P\}$ çatısı mevcuttur. Bu çatı aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_n(s) N(s) + k_g(s) P(s) \\ N'(s) &= k_n(s) T(s) + \tau_g(s) P(s) \\ P'(s) &= -k_g(s) T(s) + \tau_g(s) N(s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Burada $k_n(s) = -\langle T'(s), N(s) \rangle$, $k_g(s) = \langle T'(s), P(s) \rangle$ ve $\tau_g(s) = -\langle P'(s), N(s) \rangle$ dir. Buna göre c eğrisinin karakterizasyonu

$$\begin{aligned} c \text{ eğrisi geodezik eğridir ancak ve ancak } \kappa_g &= 0 \\ c \text{ eğrisi asimptotik eğridir ancak ve ancak } \kappa_n &= 0 \\ c \text{ eğrisi asli eğridir ancak ve ancak } \tau_g &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

olarak verilir (Sato 2012).

Tanım 2.11: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında M bir null yüzey, bu yüzey üzerinde yatan bir spacelike eğri $c = c(s)$ ve yüzeyin normal vektör alanı Z olsun. c spacelike eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle Z, Z \rangle &= \langle Y, Y \rangle = \langle Z, T \rangle = \langle Y, T \rangle = 0 \\ \langle Z, Y \rangle &= \langle T, T \rangle = 1 \end{aligned} \quad (2.31)$$

şartlarını sağlayacak şekilde Y null vektörü vardır ve tektir. Dolayısıyla $\{T, Z, Y\}$ üçlüsü c eğrisi boyunca bir çatı alanı teşkil eder ve bu çatı alanı aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_z(s) Z(s) + k_y(s) Y(s) \\ Z'(s) &= -k_y(s) T(s) + \tau_y(s) Z(s) \\ Y'(s) &= -k_z(s) T(s) - \tau_y(s) Y(s) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Burada $\kappa_z(s) = \langle T'(s), Y(s) \rangle$, $\kappa_y(s) = \langle T'(s), Z(s) \rangle$ ve $\tau_y(s) = \langle Z'(s), Y(s) \rangle$ olup bu değerlere sırasıyla, c eğrisinin $c(s)$ noktasındaki z -eğriliği, y -eğriliği ve burulması denir (Yakıcı 2012).

Tanım 2.12: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında M bir timelike yüzey ve $c = c(s)$ bu yüzey üzerinde yatan bir timelike eğri olsun. Bu takdirde $-P(s) = T(s) \times N(s)$ olmak üzere c eğrisi boyunca bir $\{T, N, P\}$ çatısı mevcuttur. Bu çatı aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_g(s)P(s) + k_n(s)N(s) \\ P'(s) &= k_g(s)T(s) - \tau_g(s)N(s) \\ N'(s) &= k_n(s)T(s) + \tau_g(s)P(s) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Burada $k_n(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$, $k_g(s) = \langle T'(s), P(s) \rangle$ ve $\tau_g(s) = -\langle P'(s), N(s) \rangle$ dir. Ayrıca bir M timelike yüzey üzerinde yatan c timelike eğrisinin eğriliği için

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2$$

eşitliği vardır.

Tanım 2.13: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayının bir ortonormal bazı ilk iki vektör spacelike sonuncusu timelike olmak üzere $\{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. Bu takdirde

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$$

ve

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$$

şeklinde inşa edilen u_1 ve u_2 vektörleri

$$\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = 0, \langle u_1, u_2 \rangle = 1$$

eşitliklerini sağlar. Bu şekilde elde edilen $\{u_1, u_2, e_2\}$ sistemi \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski

3-uzayının diğer bir bazıdır. Bu baza **kuasi-ortonormal baz** adı verilir (Duggal ve Jin 2007)

3. İKİ SPACELIKE YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİ

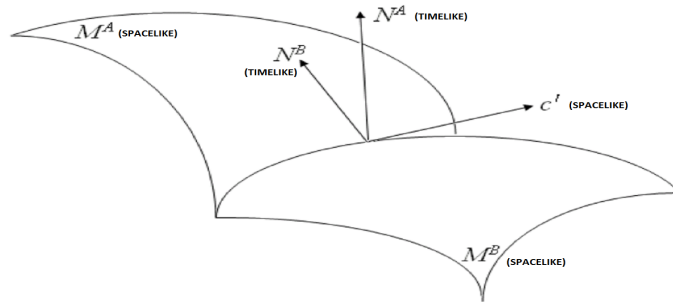
Bu kısımda, çalışmaya esas olan Alesio ve Guadalupe'nin "*Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki spacelike yüzeyin spacelike arakesit eğrisinin diferensiyel geometrisi*" isimli çalışması incelenmiştir.

3.1 Spacelike Arakesit Eğrisi

Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de M^A ve M^B iki spacelike yüzey ve sırasıyla N^A ve N^B de bu iki yüzeyin timelike birim normalleri olsun. $c = c(s)$ eğrisinin bu iki spacelike yüzeyin arakesit eğrisi olduğunu kabul edelim. Bu takdirde c arakesit eğrisinin spacelike teğet vektörü her iki yüzeyin tanjant düzleminde yattığından $p = c(s)$ noktasındaki birim hız vektörü bu noktada birim normal vektörlerin vektörel çarpımı ile

$$T = \frac{N^A \times N^B}{\|N^A \times N^B\|} \quad (3.1)$$

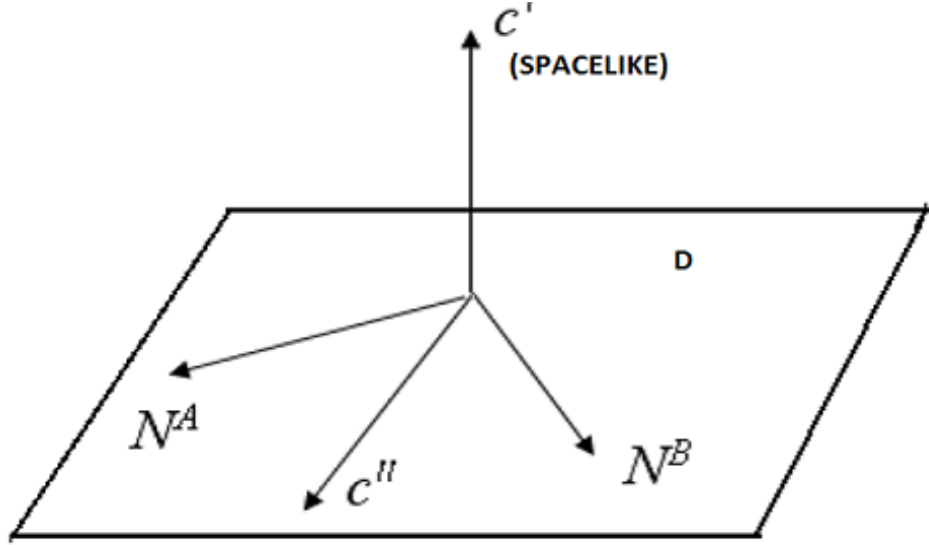
olarak bulunabilir (Alessio ve Guadalupe 2007).



Şekil 3.1 İki spacelike yüzeyin arakesit eğrisi

3.2 Spacelike Arakesit Eğrisinin Eğriliği

M^A ve M^B spacelike yüzeylerinin spacelike arakesit eğrisinin $p = c(s)$ noktasındaki c'' eğrilik vektörü $c' = t$ hız vektörüne dik olduğundan N^A ve N^B timelike vektörlerinin içinde kaldığı spacelike D düzleminde kalır.



Şekil 3.2 Spacelike arakesit eğrisinin normal düzlemi

O halde c'' eğrilik vektörü

$$c'' = \alpha N^A + \beta N^B \quad (3.2)$$

olarak ifade edilebilir. Buradaki α ve β katsayıları hesaplamamız gereken katsayılardır. c spacelike arakesit eğrisinin p noktasında t doğrultusundaki normal eğriliğinin, $c'' = \kappa n$ eğrilik vektörünün bu noktasındaki spacelike birim yüzey normali N üzerine izdüşümüdür. Bu yüzden (3.2) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla N^A ve N^B timelike vektörleri ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} k_n^A &= \langle c'', N^A \rangle = \alpha \langle N^A, N^A \rangle + \beta \langle N^B, N^A \rangle \\ k_n^B &= \langle c'', N^B \rangle = \alpha \langle N^A, N^B \rangle + \beta \langle N^B, N^B \rangle \end{aligned}$$

olup eğer N^A ve N^B timelike vektörleri \mathbb{L}^3 ün aynı zaman konisinde ise

$$\begin{aligned} k_n^A &= -\alpha - \beta \cosh \theta \\ k_n^B &= -\alpha \cosh \theta - \beta \end{aligned} \quad (3.3)$$

eğer aynı zaman konisinde değiller ise

$$\begin{aligned} k_n^A &= -\alpha + \beta \cosh \theta \\ k_n^B &= -\alpha \cosh \theta + \beta \end{aligned} \quad (3.4)$$

olur.

Önerme 3.2.1: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki spacelike yüzey olsun. Bu iki spacelike yüzeyin bir $c = c(s)$ spacelike eğrisi boyunca kesiştiğini kabul edelim. Bu takdirde c'' eğrilik vektörü spacelike veya timelike vektör olmak üzere c eğrisinin κ eğriliği

$$\kappa^2 = \frac{\left| (k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 \pm 2 \cosh(\theta) k_n^A k_n^B \right|}{\sinh^2(\theta)} \quad (3.5)$$

dir (Alesio ve Guadalupe).

İspat: (3.1) ve (3.2) denklem sistemleri çözümlerse

$$\alpha = \frac{k_n^A \pm \cosh(\theta) k_n^B}{\sinh^2(\theta)}, \beta = \frac{k_n^B \pm \cosh(\theta) k_n^A}{\sinh^2(\theta)} \quad (3.6)$$

olup (3.6) eşitlikleri (3.2) ifadesinde yerine yazılırsa

$$c'' = \frac{k_n^A \pm \cosh(\theta) k_n^B}{\sinh^2(\theta)} N^A + \frac{k_n^B \pm \cosh(\theta) k_n^A}{\sinh^2(\theta)} N^B$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan

$$\kappa = \|c''\|$$

olduğundan

$$\kappa = \sqrt{|\alpha^2 + \beta^2 \pm 2 \cosh(\theta) \alpha \beta|}$$

olup

$$\kappa^2 = \frac{|(k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 \pm 2 \cosh(\theta) k_n^A k_n^B|}{\|N^A \times N^B\|^2}$$

bulunur.

3.3 Spacelike Arakesit Eğrisinin Torsiyonu

M^A ve M^B spacelike yüzeylerinin timelike birim normal vektörleri N^A ve N^B normal düzlemde kaldığından (2.21) ve (2.22) ifadelerindeki $\kappa'n + \kappa\tau b$ terimi ve (2.23) deki τn terimi $\gamma N^A + \delta N^B$ ile yer değiştirilebilir. O halde

$$\text{Durum 1: } c''' = ft + \gamma N^A + \delta N^B \quad (3.7)$$

$$\text{Durum 2: } c''' = gt + \gamma N^A + \delta N^B \quad (3.8)$$

$$\text{Durum 3: } c''' = \gamma N^A + \delta N^B \quad (3.9)$$

olur.

Eğer c''' vektörünün p noktasında N birim timelike yüzey normali üzerine izdüşümü p_n ile gösterilirse ve N^A ile N^B timelike vektörleri \mathbb{L}^3 ün aynı zaman konisinde ise

$$\begin{aligned} \lambda_n^A &= -\gamma - \delta \cosh(\theta) \\ \lambda_n^B &= -\gamma \cosh(\theta) - \delta \end{aligned} \quad (3.10)$$

eğer aynı zaman konisinde değiller ise

$$\begin{aligned} \lambda_n^A &= -\gamma + \delta \cosh \theta \\ \lambda_n^B &= \gamma \cosh \theta - \delta \end{aligned} \quad (3.11)$$

olur. Böylece şu sonuç verilebilir:

Önerme 3.3.1: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki spacelike yüzey olsun. Bu iki spacelike yüzeyin bir $c = c(s)$ spacelike eğrisi boyunca kesiştiğini kabul edelim. Bu takdirde c'' eğrilik vektörü spacelike, timelike veya null vektör olmak üzere c eğrisinin τ torsiyonu

Durum 1:

$$\tau = -\frac{1}{\kappa \sinh^2(\theta)} [(\lambda_n^A \pm \cosh(\theta) \lambda_n^B) \langle b, N^A \rangle + (\lambda_n^B \pm \cosh(\theta) \lambda_n^A) \langle b, N^B \rangle] \quad (3.12)$$

Durum 2:

$$\tau = \frac{1}{\kappa \sinh^2(\theta)} [(\lambda_n^A \pm \cosh(\theta) \lambda_n^B) \langle b, N^A \rangle + (\lambda_n^B \pm \cosh(\theta) \lambda_n^A) \langle b, N^B \rangle] \quad (3.13)$$

Durum 3:

$$\tau = \frac{1}{\sinh^2(\theta)} [(\lambda_n^A \pm \cosh(\theta) \lambda_n^B) \langle b, N^A \rangle + (\lambda_n^B \pm \cosh(\theta) \lambda_n^A) \langle b, N^B \rangle] \quad (3.14)$$

dir. Burada b ile c spacelike arakesit eğrisinin $\{t, n, b\}$ Frenet çatısındaki b binormali ve κ ile de (3.5) teki eğrilik gösterilmiştir.

İspat : (3.10) ve (3.11) lineer denklem sistemlerinin γ ve δ katsayıları için çözülmesiyle

$$\gamma = \frac{\lambda_n^A \pm \cosh(\theta) \lambda_n^B}{\sinh^2(\theta)}, \delta = \frac{\lambda_n^B \pm \cosh(\theta) \lambda_n^A}{\sinh^2(\theta)} \quad (3.15)$$

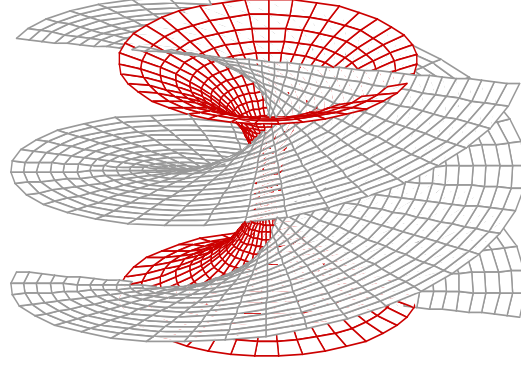
olur. (3.7), (3.8) ve (3.9) eşitliklerinde bu katsayılar yerine yazılırsa

$$\text{Durum 1: } c''' = -\kappa^2 t + \frac{\lambda_n^A \pm \cosh(\theta) \lambda_n^B}{\sinh^2(\theta)} N^A + \frac{\lambda_n^B \pm \cosh(\theta) \lambda_n^A}{\sinh^2(\theta)} N^B \quad (3.16)$$

$$\text{Durum 2: } c''' = \kappa^2 + \frac{\lambda_n^A \pm \cosh(\theta) \lambda_n^B}{\sinh^2(\theta)} N^A + \frac{\lambda_n^B \pm \cosh(\theta) \lambda_n^A}{\sinh^2(\theta)} N^B \quad (3.17)$$

$$\text{Durum 3: } c''' = \frac{\lambda_n^A \pm \cosh(\theta) \lambda_n^B}{\sinh^2(\theta)} N^A + \frac{\lambda_n^B \pm \cosh(\theta) \lambda_n^A}{\sinh^2(\theta)} N^B \quad (3.18)$$

elde edilir. c spacelike eğrisinin τ torsiyonu (2.24) , (2.25) ve (2.26) denklemlerinde c''' nün her bir durum için yerine yazılmasıyla elde edilir.

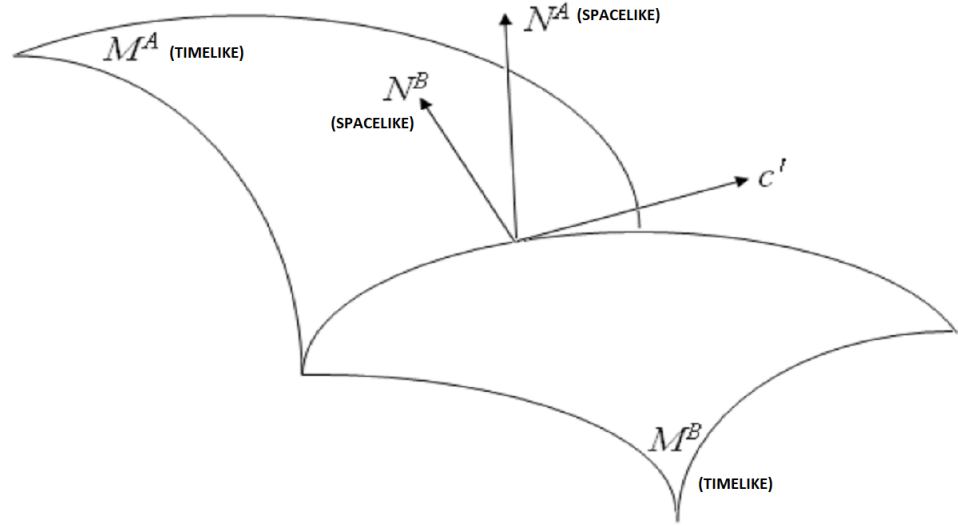


Şekil 3.3 İki spacelike yüzeyin arakesit eğrisi örneği

4. İKİ TIMELIKE YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİ

Bu kısımda, Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki timelike yüzeyin arakesit eğrisinin bir karakterizasyonu elde edilerek bu arakesit eğrilerinin κ eğriliği ile τ torsiyonunu hesaplanacaktır. Ayrıca bu eğrilikler üzerine bazı sonuçlar verilecektir.

Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de M^A ve M^B iki timelike yüzey ve sırasıyla N^A ve N^B de bu iki yüzeyin spacelike birim normalleri olsun. Bu iki yüzeyin $c = c(s)$ eğrisi boyunca kesiştiğini kabul edelim.



Şekil 4.1 İki timelike yüzeyin arakesit eğrisi

Bu takdirde 3. kısımdakine benzer şekilde $c(s)$ arakesit eğrisinin hız vektörü her iki yüzeyin tanjant düzlemi üzerinde yattığından $p = c(s)$ noktasındaki hız vektörü birim normal vektörlerin vektörel çarpımı ile

$$c' = N^A \times N^B \quad (4.1)$$

olarak bulunabilir. Ancak

$$\langle N^A \times N^B, N^A \rangle = \langle N^A \times N^B, N^B \rangle = 0$$

olduğundan $N^A \times N^B$ vektörü üç tip vektör karakterinden herhangi birisine sahip olabilir. Bu ise M^A ve M^B timelike yüzeylerinin c arakesit eğrisinin ve c'' eğrilik vektörünün içinde kaldığı normal düzlemin karakterini belirler. Bu yüzden $p = c(s)$ noktasında $\langle N^A, N^B \rangle = \lambda$ olduğunu kabul edelim. Buna göre (2.3) gereğince

$$\langle N^A \times N^B, N^A \times N^B \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle N^A, N^B \rangle & \langle N^B, N^B \rangle \\ \langle N^A, N^A \rangle & \langle N^A, N^B \rangle \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

olur. Böylece λ nın içinde bulunduğu aralığa göre şu sonuç verilebilir:

Önerme 4.1: Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de M^A ve M^B iki timelike yüzey ve sırasıyla N^A ve N^B bu iki yüzeyin spacelike birim normalleri olsun. Bu iki timelike yüzeyin bir $c = c(s)$ eğrisi boyunca kesiştiğini kabul edelim. Bu takdirde $\langle N^A, N^B \rangle = \lambda$ olmak üzere

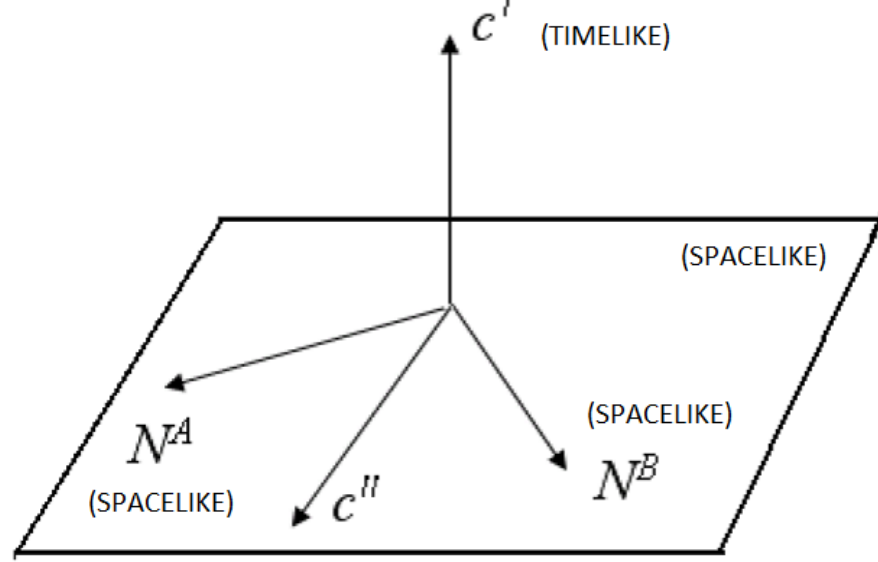
1. $\lambda \in (-1, 1)$ ise arakesit eğrisi timelike eğri
 2. $\lambda \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ ise arakesit eğrisi spacelike eğri
 3. $\lambda = \pm 1$ ise arakesit eğrisi null eğri
- dir.

Şimdi yukarıdaki önermede verilen üç durumu sırasıyla inceleyelim:

4.1 Timelike Arakesit Eğrisi

Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de M^A ve M^B iki timelike yüzey ve sırasıyla N^A ve N^B bu iki yüzeyin spacelike birim normalleri olsun. Bu iki timelike yüzeyin bir $c = c(s)$ eğrisi boyunca kesiştiğini kabul edelim. $\langle N^A, N^B \rangle = \lambda$ olmak üzere Önerme 4.1 gereğince $-1 < \lambda < 1$ iken bu arakesit eğrisi bir timelike eğri olacaktır. O halde N^A ve N^B birim spacelike normallerinin içinde kaldığı düzlemin normali

$c' = t$ timelike vektörü olduğundan bu düzlem bir spacelike düzlem olup N^A ve N^B birim spacelike vektörleri arasında Öklidyen anlamında açı tanımlıdır. Yani $\lambda = \cos \theta$ olacak şekilde bir θ reel sayısı mevcuttur.



Şekil 4.2 Timelike arakesit eğrisinin normal düzlemi

4.1.1 Timelike arakesit eğrisinin eğriliği

Timelike arakesit eğrisinin p noktasındaki c'' eğrilik vektörü N^A ve N^B tarafından gerilen normal düzlemde kaldığından bu vektör

$$c'' = \alpha N^A + \beta N^B \quad (4.3)$$

olarak ifade edilebilir. $0 < \theta < \pi$ olmak üzere

$$\langle N^A, N^B \rangle = \cos \theta$$

olduğunu kabul edelim. $c(s) = p$ noktasında T doğrultusundaki normal eğrilik, $c'' = \kappa n$ eğrilik vektörünün p noktasındaki spacelike birim yüzey normali üzerine

izdüşümü olduğundan (4.3) eşitliği sırasıyla N^A ve N^B ile iççarpılırsa

$$\begin{aligned} k_n^A &= \langle c'', N^A \rangle = \alpha + \beta \\ k_n^B &= \langle c'', N^B \rangle = \cos(\theta)\alpha + \beta \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{bmatrix} k_n^A \\ k_n^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{bmatrix} = \sin^2(\theta)$$

olup (4.4) sistemi çözümlürse

$$\alpha = \frac{1}{\sin^2(\theta)} \begin{bmatrix} k_n^A & \cos(\theta) \\ k_n^B & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\beta = \frac{1}{\sin^2(\theta)} \begin{bmatrix} 1 & k_n^A \\ \cos(\theta) & k_n^B \end{bmatrix}$$

olup

$$\alpha = \frac{k_n^A - \cos(\theta)k_n^B}{\sin^2(\theta)} \quad (4.5)$$

ve

$$\beta = \frac{k_n^B - \cos(\theta)k_n^A}{\sin^2(\theta)} \quad (4.6)$$

olarak elde edilir. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri (4.3) de yerine yazılırsa

$$c'' = \frac{k_n^A - \cos(\theta)k_n^B}{\sin^2(\theta)}N^A + \frac{k_n^B - \cos(\theta)k_n^A}{\sin^2(\theta)}N^B \quad (4.7)$$

olur. Diğer taraftan $\kappa = \|c''\|$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\kappa^2 &= \left\langle \frac{k_n^A - \cos(\theta)k_n^B}{\sin^2(\theta)}N^A + \frac{k_n^B - \cos(\theta)k_n^A}{\sin^2(\theta)}N^B, \frac{k_n^A - \cos(\theta)k_n^B}{\sin^2(\theta)}N^A + \frac{k_n^B - \cos(\theta)k_n^A}{\sin^2(\theta)}N^B \right\rangle \\
&= \left(\frac{k_n^A - \cos(\theta)k_n^B}{\sin^2(\theta)} \right)^2 \langle N^A, N^A \rangle + \left(\frac{k_n^B - \cos(\theta)k_n^A}{\sin^2(\theta)} \right)^2 \langle N^B, N^B \rangle \\
&+ 2 \left(\frac{k_n^A - \cos(\theta)k_n^B}{\sin^2(\theta)} \right) \left(\frac{k_n^B - \cos(\theta)k_n^A}{\sin^2(\theta)} \right) \langle N^A, N^B \rangle \\
&= \left(\frac{k_n^A - \cos(\theta)k_n^B}{\sin^2(\theta)} \right)^2 + \left(\frac{k_n^B - \cos(\theta)k_n^A}{\sin^2(\theta)} \right)^2 + 2 \left(\frac{k_n^A - \cos(\theta)k_n^B}{\sin^2(\theta)} \right) \left(\frac{k_n^B - \cos(\theta)k_n^A}{\sin^2(\theta)} \right) \cos(\theta) \\
&= \frac{1}{\sin^4(\theta)} [(k_n^A - \cos(\theta)k_n^B)^2 + (k_n^B - \cos(\theta)k_n^A)^2 \\
&+ 2(k_n^A - \cos(\theta)k_n^B)(k_n^B - \cos(\theta)k_n^A)\cos(\theta)] \\
&= \frac{1}{\sin^2(\theta)} [(k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 - 2\cos(\theta)k_n^A k_n^B]
\end{aligned}$$

olup

$$\kappa^2 = \frac{(k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 - 2\cos(\theta)k_n^A k_n^B}{\sin^2(\theta)}$$

olarak elde edilir.

Buna göre şu sonuç verilebilir:

Önerme 4.2: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 iki timelike yüzey olsun. Bu takdirde $\langle N^A, N^B \rangle = \lambda$ olmak üzere bu iki timelike yüzeyin timelike arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa^2 = \frac{(k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 - 2\cos(\theta)k_n^A k_n^B}{\sin^2(\theta)} \quad (4.8)$$

dir.

Bu takdirde aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 4.1: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki timelike yüzey olsun. Eğer N^A ve N^B spacelike normallerinin içinde kaldığı spacelike düzlemde bu iki vektör arasındaki açı $\frac{\pi}{2}$ ise

$$\kappa^2 = (k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 \quad (4.8)$$

dir.

4.1.2 Timelike arakesit eğrisinin torsiyonu

Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de M^A ve M^B timelike yüzeylerinin N^A ve N^B spacelike normal vektörleri $c = c(s)$ arakesit eğrisinin normal düzleminde yattığından (2.10) denklemindeki $\kappa'n + \kappa\tau b$ ifadesi yerine $\gamma N^A + \delta N^B$ alınabilir. Bu takdirde

$$c''' = ft + \gamma N^A + \delta N^B \quad (4.9)$$

olarak yazılır. (4.9) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla N^A ve N^B ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle c''', N^A \rangle &= \gamma + \delta \langle N^B, N^A \rangle \\ \langle c''', N^B \rangle &= \gamma \langle N^A, N^B \rangle + \delta \end{aligned}$$

elde edilir. c''' nün yüzeyin spacelike normali üzerine izdüşümünü p_n ile gösterirsek ve $0 < \theta < \pi$ için $\langle N^A, N^B \rangle = \cos(\theta)$ dersek

$$\begin{aligned} p_n^A &= \gamma + \cos(\theta) \delta \\ p_n^B &= \cos(\theta) \gamma + \delta \end{aligned} \quad (4.10)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. γ ve δ bilinmeyenli (4.10) denklemini çözersek

$$\gamma = \frac{1}{\sin^2(\theta)} (p_n^A - \cos(\theta) p_n^B) \quad (4.11)$$

ve

$$\delta = \frac{1}{\sin^2(\theta)} (p_n^B - \cos(\theta) p_n^A) \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Bu takdirde $\tau = \frac{\langle c''', b \rangle}{\kappa}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\tau = \frac{(p_n^A - \cos(\theta) p_n^B) \langle N^A, b \rangle + (p_n^B - \cos(\theta) p_n^A) \langle N^B, b \rangle}{\kappa \sin^2(\theta)}$$

olarak elde edilmiş olur.

Önerme 4.3: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 iki timelike yüzey olsun.

Bu takdirde $0 < \theta < \pi$ için $\langle N^A, N^B \rangle = \cos(\theta)$ olmak üzere bu iki timelike yüzeyin

timelike arakesit eğrisinin torsiyonu

$$\tau = \frac{(p_n^A - \cos(\theta) p_n^B) \langle N^A, b \rangle + (p_n^B - \cos(\theta) p_n^A) \langle N^B, b \rangle}{\kappa \sin^2(\theta)} \quad (4.13)$$

olur.

Sonuç 4.2: N^A ve N^B birim spacelike vektörlerin içinde kaldığı spacelike düzlemde N^A ile N^B arasındaki açı $\frac{\pi}{2}$ ise M^A ve M^B timelike yüzeylerinin timelike arakesit eğrisinin torsiyonu

$$\tau = \frac{p_n^A \langle N^A, b \rangle + p_n^B \langle N^B, b \rangle}{\kappa} \quad (4.14)$$

dir.

N^A ve N^B birim spacelike vektörlerin içinde kaldığı spacelike düzlemde, $\{N^A, P^A\}$ ile $\{N^B, P^B\}$ sistemleri arasında bir dönme mevcuttur:

N^A ile N^B arasındaki açı $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ise

$$\langle N^A, N^B \rangle = \langle P^A, P^B \rangle = \cos \theta \quad , \quad \langle N^A, P^B \rangle = -\sin \theta \quad , \quad \langle P^A, N^B \rangle = \sin \theta$$

eğer $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ise

$$\langle N^A, N^B \rangle = \cos \theta \quad , \quad \langle P^A, P^B \rangle = \langle N^A, P^B \rangle = \sin \theta \quad , \quad \langle P^A, N^B \rangle = -\sin \theta$$

olur. Bu takdirde

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$\langle N^A, N^B \rangle = \varepsilon \sin \theta \quad ve \quad \langle P^A, N^B \rangle = \sin \theta \quad (4.15)$$

olarak ifade edilebilir.

Önerme 4.4: \mathbb{L}^3 Lorentz- Minkowski 3- uzayı \mathbb{L}^3 de M^A ve M^B bir $c(s)$ timelike arakesit eğrisi boyunca kesişen iki timelike yüzey olsun. $Span \{N^A, N^B\}$ spacelike N^A ile N^B arasındaki açı $\theta(s)$ ise

$$\tau_g^A - \tau_g^B = \varepsilon \theta'$$

dir.

İspat: $Span \{N^A, N^B\}$ spacelike düzleminde N^A ile N^B arasındaki açı $\theta(s)$ olsun. Bu takdirde

$$\langle N^A, N^B \rangle = \cos \theta$$

dir. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınıp denklem (2.33) den $(N^A)'$ ve $(N^B)'$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle (N^A)', N^B \rangle + \langle N^A, (N^B)' \rangle &= -\sin \theta \\ \langle k_n^A \tau + \tau_g^A P^A, N^B \rangle + \langle N^A, k_n^B \tau + \tau_g^B P^B \rangle &= -\sin \theta \\ \tau_g^A \langle P^A, N^B \rangle + \tau_g^B \langle N^A, P^B \rangle &= -\sin \theta \\ -\varepsilon \sin \theta \tau_g^A + \varepsilon \sin \theta \tau_g^B &= -\sin \theta \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Sonuç 4.3: M^A ve M^B Lorentz- Minkowski 3- uzayı \mathbb{L}^3 de iki parametrik timelike yüzey ve $Span \{N^A, N^B\}$ spacelike düzlemde N^A ile N^B arasındaki açı $\frac{\pi}{2}$ ise

- i) $\tau_g^A = \tau_g^B$
- ii) $P^A = N^B$ ve $P^B = -N^A$

dır.

Önerme 4.5: Lorentz- Minkowski 3- uzayı \mathbb{L}^3 de parametrik timelike M^A ve M^B yüzeyleri bir $c(s)$ timelike eğrisi boyunca kesişsinler. $c(s)$ arakesit eğrisinin M^A (M^B) timelike yüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $Sp \{N^A, N^B\}$ spacelike düzleminde N^A ile N^B arasındaki açı θ olmak üzere $c(s)$ arakesit eğrisinin M^B (M^A) timelike yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $\theta = \frac{\pi}{2}$ olmasıdır.

İspat: $c(s)$ arakesit eğrisinin $M^B (M^A)$ timelike yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri olduğunu kabul edelim. Kabul gereğince $k_n^A = 0$ olup Tanım 2.12 den

$$\kappa^2 = \frac{(k_n^B)^2}{\sin^2 \theta}$$

olur. Diğer taraftan $k_g^B = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(k_n^B)^2 = \frac{(k_n^B)^2}{\sin^2 \theta}$$

olacağından $\theta = \frac{\pi}{2}$ elde edilir.

Tersine $k_n^A = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ olduğundan $c(s)$ timelike arakesit eğrisinin M^B timelike yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri olduğu görülür.

Sonuç 4.4: M^A ve M^B Lorentz Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki parametrik timelike yüzey ve $sp\{N^A, N^B\}$ spacelike düzlemde N^A ile N^B arasındaki açı θ olmak üzere bu iki yüzeyin eğrisinin $c(s)$ için

$$\begin{aligned} k_g^A &= |\cot \theta k_n^A - \sec \theta k_n^B| \\ k_g^B &= |\cot \theta k_n^B - \sec \theta k_n^A| \end{aligned}$$

dır.

İspat : Bir timelike yüzey ve üzerinde yatan bir timelike eğri için

$$\kappa^2 = (k_n^A)^2 + (k_g^A)^2$$

olduğundan Tanım 2.10 dan

$$\frac{(k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 - 2 \cos \theta k_n^A k_n^B}{\sin^2 \theta} = (k_g^A)^2 + (k_n^A)^2 = (k_g^B)^2 + (k_n^B)^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
(k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 - 2 \cos \theta k_n^A k_n^B &= \sin^2 \theta (k_g^A)^2 + \sin^2 \theta (k_n^A)^2 \\
(k_n^A)^2 [1 - \sin^2 \theta] + (k_n^B)^2 - 2 \cos \theta k_n^A k_n^B &= \sin^2 \theta (k_g^A)^2 \\
(\cos \theta k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 - 2 \cos \theta k_n^A k_n^B &= \sin^2 \theta (k_g^A)^2 \\
(\cos \theta k_n^A - k_n^B)^2 &= \sin^2 \theta (k_g^A)^2 \\
(k_g^A)^2 &= \frac{(\cos \theta k_n^A - k_n^B)^2}{\sin^2 \theta}, \quad 0 < \theta < \pi \\
(k_g^A)^2 &= (\cot \theta k_n^A - \sec \theta k_n^B)^2 \\
k_g^A &= |\cot \theta k_n^A - \sec \theta k_n^B|
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$k_g^B = |\cot \theta k_n^B - \sec \theta k_n^A|$$

olur.

Sonuç 4.5: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı L^3 de iki parametrik timelike yüzey ve N^A ve N^B nin içinde kaldığı Öklid düzleminde N^A ile N^B arasındaki açı θ olmak üzere bu iki timelike yüzeyin arakesit eğrisi $c(s)$ eğrisi $M^A(M^B)$ üzerinde bir geodezik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_n^B}{k_n^A} = \cos \theta, \quad \left(\frac{k_n^A}{k_n^B} = \cos \theta \right)$$

İspat : Sonuç 4.4. gereğince

$$k_g^A = |\cot \theta k_n^A - \sec \theta k_n^B|$$

olduğundan $c(s)$ eğrisi M^A üzerinde bir geodezik eğri ise $k_g^A = 0$ olup

$$\cot \theta k_n^A = \sec \theta k_n^B$$

olacağından

$$\frac{k_n^B}{k_n^A} = \cos \theta$$

ve benzer şekilde M^B üzerinde geodezik ise

$$\frac{k_n^A}{k_n^B} = \cos \theta$$

olur.

Tersine, $\frac{\kappa_n^B}{\kappa_n^A} = \cos \theta$ olması

$$\langle c'', N^B - \cos \theta N^A \rangle = 0$$

olmasını gerektirir. Diğer taraftan $P_A \in Sp \{N^A, N^B\}$ olduğundan

$$P^A = \alpha N^A + \beta N^B$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı sırasıyla N^A ve N^B ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle P^A, N^A \rangle &= \alpha + \cos \theta \beta \\ \langle P^A, N^B \rangle &= \cos \theta \alpha + \beta \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \cos \theta \beta \\ \sin \theta &= \cos \theta \alpha + \beta \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi çözersek

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{-\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{-\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \beta = \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

bulunur. Buna göre

$$P_A = \frac{1}{\sin \theta} (-\cos \theta N^A + N^B)$$

olarak bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
k_g^A &= \langle c'', P^A \rangle \\
&= \langle c'', \frac{1}{\sin \theta} (-\cos \theta N^A + N^B) \rangle \\
&= \frac{1}{\sin \theta} \langle c'', N^B - \cos \theta N^A \rangle
\end{aligned}$$

olur. Kabul gereğince de $k_g^A = 0$ elde edilir.

Sonuç 4.6: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı L^3 de iki parametrik timelike yüzey ve N^A ve N^B nin içinde kaldığı spacelike düzleminde N^A ile N^B arasındaki açı θ olsun. Bu takdirde M^A ile M^B nin $c(s)$ timelike arakesit eğrisi M^A üzerinde bir geodezik eğri ise $c(s)$ nin torsiyonu

$$\tau = \frac{\det(c', c'', N^A)}{\sin \theta k_n^A}$$

dır.

İspat : M^A üzerinde $c(s)$ arakesit eğrisi geodezik eğri olduğunda $k_g^A = \langle c'', P^A \rangle = 0$ olup c'' eğrilik vektörü N^A spacelike vektörü ile çakışıktır. Bu ise P^A nın $c(s)$ eğrisinin b binormali ile çakışması anlamına gelir. O halde $\langle N^A, b \rangle = 0$ ve $\langle N^B, b \rangle = \sin \theta$ olup (4.13) ifadesi

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{\kappa \sin^2 \theta} (p_n^B - \cos \theta p_n^A) \sin \theta \\
&= \frac{1}{\kappa \sin \theta} (p_n^B - \cos \theta p_n^A)
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\tau \kappa \sin \theta = \langle c''', N^B - \cos \theta N^A \rangle$$

bulunur. Diğer taraftan Sonuç 4.5 in ispatında

$$P^A = N^B - \cos \theta N^A$$

olarak bulunmuştu. Bu eşitlik yerine yazılıp $P^A = -T \times N^A$ eşitliği göz önüne

alınırsa

$$\begin{aligned}\tau \kappa \sin \theta &= \langle c''', P^A \rangle \\ &= \langle c''', -T \times N^A \rangle \\ &= -\det(c''', c', N^A) \\ &= \det(c', c''', N^A)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\kappa^2 = (k_g^A)^2 + (k_n^A)^2$ ve $k_g^A = 0$ olduğundan $\kappa = k_n^A$ olur. Böylece

$$\tau = \frac{\det(c', c''', N^A)}{\kappa_n^A \sin \theta}$$

olur.

Sonuç 4.7: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki parametrik timelike yüzey ve N^A ve N^B normallerinin içinde kaldığı spacelike düzlemde aralarındaki açı θ olsun. Bu takdirde bu iki timelike yüzeyin $c(s)$ timelike arakesit eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_n^B}{k_g^A} = \sin \theta$$

olmasıdır.

İspat : Tanım (2.10) da $k_n^A = 0$ yazılırsa

$$\kappa^2 = \frac{(k_n^B)^2}{\sin^2 \theta}$$

olur ve $\kappa^2 = (k_g^A)^2 + (k_n^A)^2$ olduğundan

$$\frac{(k_n^B)^2}{\sin^2 \theta} = (k_g^A)^2$$

elde edilir. Buna göre

$$\frac{k_n^B}{k_g^A} = \sin \theta$$

olur.

Tersine $N^A \in Sp\{N^B, P^A\}$ olduğundan

$$N^A = \alpha N^B + \beta P^A$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı sırasıyla N^B ve P^A ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle N^A, N^B \rangle &= \alpha + \beta \langle P^A, N^B \rangle \\ \langle N^A, P^A \rangle &= \alpha \langle N^B, P^A \rangle + \beta\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \alpha + \sin \theta \beta \\ 0 &= \sin \theta + \beta\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini çözersek ,

$$\alpha = \frac{1}{\cos \theta} \quad , \quad \beta = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

olup

$$N^A = \frac{1}{\cos \theta} (N^B - \sin \theta P^A)$$

bulunur. Kabul gereğince $\frac{k_n^B}{k_n^A} = \sin \theta$ olduğundan

$$\langle c'', N^B - \sin \theta P^A \rangle = 0$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}k_n^A &= \langle c'', N^A \rangle \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \langle c'', N^B - \sin \theta P^A \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur ki istenen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 4.8: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki parametrik timelike yüzey ve N^A ile N^B nin içinde kaldığı spacelike düzlemde aralarındaki açı θ olsun. Bu takdirde M^A ile M^B nin $c(s)$ timelike arakesit eğrisi M^A üzerinde bir asimptotik

eğri ise

$$\tau = \tau_g^A$$

olur.

İspat: M^A üzerinde timelike $c(s)$ arakesit eğrisi asimptotik eğri olduğundan c'' eğrilik vektörü P^A spacelike vektörü ile çakışıktır. Bu ise N^A nın $c(s)$ eğrisinin b binormalinin bir katı olması anlamına gelir. Bu yüzden

$$\langle N^A, b \rangle = -1 \quad , \quad \langle N^B, b \rangle = -\cos \theta$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{-p_n^A + \cos \theta p_n^B - \cos \theta p_n^B + \cos^2 \theta p_n^A}{\kappa \sin^2 \theta} \\ &= \frac{-\sin^2 \theta p_n^A}{\kappa \sin^2 \theta} \\ &= \frac{-p_n^A}{\kappa} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\kappa = k_g^A$ olduğundan

$$\tau = \frac{-p_n^A}{k_g^A}$$

elde edilir. Diğer taraftan $p_n^A = (\kappa_n^A)' - \kappa_g^A \tau_g^A$ olduğundan

$$\tau = \frac{k_g^A \tau_g^A}{k_g^A} = \tau_g^A$$

olur.

Lorentz- Minkowski 3- uzayı \mathbb{L}^3 de parametrik denklemi $X = X(u, v)$ olan bir M timelike yüzeyi ve bu yüzey üzerinde timelike $c = c(s)$ eğrisi verilmiş olsun. O halde

$$c(s) = X(u(s), v(s))$$

olarak ifade edilebilir. Bu takdirde timelike $c = c(s)$ eğrisinin $c'(s), c''(s), c'''(s)$ türevleri zincir kuralı kullanılarak

$$c'(s) = X_u u' + X_v v' \tag{4.16}$$

$$c''(s) = X_{uv}(u')^2 + 2X_{uv}u'v' + X_{uv}(v')^2 + X_uu' + X_vv' \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} c'''(s) = & X_{uuu}(u')^3 + 3X_{uvu}(u')^2v' + 3X_{uvv}u'(v')^2 + X_{vvv}(v')^3 \\ & + 3[X_{uu}u'u'' + X_{uv}(u'' + u'v') + X_{vv}v'v''] + X_uu'' + X_vv'' \end{aligned} \quad (4.18)$$

olarak bulunur. (4.17) denkleminin her iki tarafı N ile çarpılırsa,

$$L = \langle X_{uv}, N \rangle, M = \langle X_{uv}, N \rangle, N = \langle X_{uv}, N \rangle \quad (4.19)$$

olmak üzere

$$k_n = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 \quad (4.20)$$

olur. Buradan (4.20) ifadesini belirleyebilmek için hala u', v' yü hesaplamak gereklidir. Bunun için de (4.16) denklemin her iki tarafını sırasıyla X_u ve X_v ile çarparsak

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle \quad (4.21)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle t, X_u \rangle &= Eu' + Fv' \\ \langle t, X_v \rangle &= Fu' + Gv' \end{aligned} \quad (4.22)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden u', v' belirlendiğinden k_n değeri bulunmuş olur.

Benzer şekilde (4.18) denkleminin her iki tarafı N ile çarpıldığında

$$\text{III} = \langle X_{uuu}, N \rangle (u')^3 + 3\langle X_{uvu}, N \rangle (u')^2v' + 3\langle X_{uvv}, N \rangle u'(v')^2 + \langle X_{vvv}, N \rangle u'(v')^3 \quad (4.23)$$

olmak üzere

$$p_n = 3[\langle X_{uu}, N \rangle u'u'' + \langle X_{uv}, N \rangle (u''v' + u'v'') + \langle X_{vv}, N \rangle v'v''] + \text{III} \quad (4.24)$$

olup (4.19) eşitlikleri kullanılarak

$$p_n = 3 [Lu'u'' + M(u''v' + u'v'') + Nv'v''] + III \quad (4.25)$$

olarak yazılabilir. Buradan (4.17) denkleminin her iki tarafı sırasıyla X_u ve X_v ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} Eu'' + Fv'' &= \langle c'', X_u \rangle - \frac{E_u}{2} (u')^2 - E_v u'v' - \left(F_v - \frac{G_u}{2} \right) (v'')^2 \\ Fu'' + Gv'' &= \langle c'', X_u \rangle - \left(F_u, \frac{E_u}{2} \right) (u')^2 - \left(G_u u'v' - \frac{G_u}{2} \right) (v')^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

şeklindeki lineer denklem sistemi elde edilir ki böylece p_n değeri bulunabilir.

Örnek 4.1: Lorentz- Minkowski uzayı \mathbb{L}^3 de M^A ve M^B timelike yüzeyleri sırasıyla

$$X^A(u_A, v_A) = (\cosh u_A \cos v_A, \cosh u_A \sin v_A, \sinh u_A) \quad (4.27)$$

ve

$$X^B(u_B, v_B) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} u_B, \frac{\sqrt{2}}{2} ((u_B + 1) \cosh v_B - 1), \frac{\sqrt{2}}{2} (u_B + 1) \sinh v_B \right) \quad (4.28)$$

olarak verilmiş olsun. Bu yüzeylerin c timelike arakesit eğrisinin

$$X^A \left(0, \frac{\pi}{4} \right) = X^B(1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \quad (4.29)$$

noktasındaki κ eğriliği ve τ burulmasını hesaplayalım: X^A nın u_A ve v_A ya göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{u_A}^A(u_A, v_A) &= (\sinh u_A \cos v_A, \sinh u_A \sin v_A, \cosh u_A) \\ X_{v_A}^A \left(0, \frac{\pi}{4} \right) &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (4.30)$$

ve

$$\begin{aligned} X_{v_A}^A(u_A, v_A) &= (-\cosh u_A \sin v_A, \cosh u_A \cos v_A, 0) \\ X_{v_A}^A \left(0, \frac{\pi}{4} \right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

olup

$$X_{u_A}^A \times X_{v_A}^A = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-\sqrt{2}}{2} (1, 1, 0)$$

olduğundan

$$N^A = \frac{X_{u_A}^A \times X_{v_A}^A}{\|X_{u_A}^A \times X_{v_A}^A\|} = -\sqrt{2} (1, 1, 0) \quad (4.32)$$

olur. Benzer şekilde X^B nin u_B ve v_B ya göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{u_B}^B(u_B, v_B) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cosh v_B, \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh v_B \right) \\ X_{u_B}^B(1, 0) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1, 0) \end{aligned} \quad (4.33)$$

ve

$$\begin{aligned} X_{v_B}^B(u_B, v_B) &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} (u_B + 1) \sinh v_B, \frac{\sqrt{2}}{2} (u_B + 1) \cosh v_B \right) \\ X_{v_B}^B(1, 0) &= \sqrt{2} (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (4.34)$$

olup

$$X_{u_B}^B \times X_{v_B}^B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$$

olduğundan

$$N^B = \frac{X_{u_B}^B \times X_{v_B}^B}{\|X_{u_B}^B \times X_{v_B}^B\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, -1, 0) \quad (4.35)$$

olur. Bu takdirde $\text{span}\{N^A, N^B\}$ spacelike düzleminde N^A ile N^B arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos(\theta) = \langle N^A, N^B \rangle = 0$$

olup $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve

$$T = \frac{N^A \times N^B}{\|N^A \times N^B\|} = (0, 0, -1) \quad (4.36)$$

olur.(4.30) ve (4.31)den

$$E^A = -1, F^A = 0, G^A = 1 \quad (4.37)$$

(4.33) ve (4.34) den

$$E^B = 1, F^B = 0, G^B = 1 \quad (4.38)$$

olur. Ayrıca X^A nın ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{u_A u_A}^A(u_A, v_A) &= (\cos u_A \cos v_A, \cosh u_A \sin v_A, \sinh u_A) \\ X_{u_A u_A}^A\left(0, \frac{\pi}{4}\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} X_{u_A v_A}^A(u_A, v_A) &= (-\sinh u_A \sin v_A, \sinh u_A \cos v_A, 0) \\ X_{u_A v_A}^A\left(0, \frac{\pi}{4}\right) &= (0, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} X_{v_A v_A}^A(u_A, v_A) &= (-\cosh u_A \cos v_A, -\cosh u_A \sin v_A, 0) \\ X_{v_A v_A}^A\left(0, \frac{\pi}{4}\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

ve X^B nın ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$X_{u_B u_B}^B(u_B, v_B) = (0, 0, 0), X_{u_B v_B}^B(1, 0) = (0, 0, 0) \quad (4.42)$$

$$X_{v_B v_B}^B(u_B, v_B) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh v_B, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos v_B\right), X_{u_B v_B}^B(1, 0) = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} X_{v_B v_B}^B(u_B, v_B) &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} (u_B + 1) \cosh v_B, \frac{\sqrt{2}}{2} (u_B + 1) \sinh v_B\right) \\ X_{v_B v_B}^B(1, 0) &= (0, \sqrt{2}, 0) \end{aligned} \quad (4.44)$$

olup (4.32), (4.39), (4.40) ve (4.41) den

$$L^A = \frac{-1}{2}, M^A = 0, N^A = \frac{1}{2} \quad (4.45)$$

ve (4.35), (4.42), (4.43) ve (4.44) den

$$L^B = 0, M^B = 0, N^B = -1 \quad (4.46)$$

bulunur. Böylece (4.22) den

$$u'_A = 1, v'_A = 0 \quad (4.47)$$

ve

$$u'_B = 0, v'_B = \sqrt{2} \quad (4.48)$$

olup (4.20) dan

$$k_n^A = \frac{-1}{2}, k_n^B = -2 \quad (4.49)$$

bulunur. Buna göre $c(s)$ arakesit eğrisinin $p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ noktasındaki eğriliği

$$\kappa^2 = \frac{17}{4} \quad (4.50)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.26) dan

$$u''_A = 0, v''_A = 4 \quad (4.51)$$

ve

$$u''_B = 1 - \sqrt{2}, v''_B = 0 \quad (4.52)$$

olup X^A ve X^B nin üçüncü mertebeden kısmi türevleri hesaplanıp (4.23) de yerine yazılırsa

$$\text{III}^A = \text{III}^B = 0 \quad (4.53)$$

bulunur. Bu takdirde (4.45), (4.46), (4.47), (4.52) ve (4.53) ten

$$p_n^A = p_n^B = 0 \quad (4.54)$$

elde edilir. $c'' = \kappa n = \kappa_n^A N_A + \kappa_n^B N_B$ olduğundan

$$n = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}, \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}, 0 \right)$$

olup

$$b = t \times n = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}, \frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}, 0 \right) \quad (4.55)$$

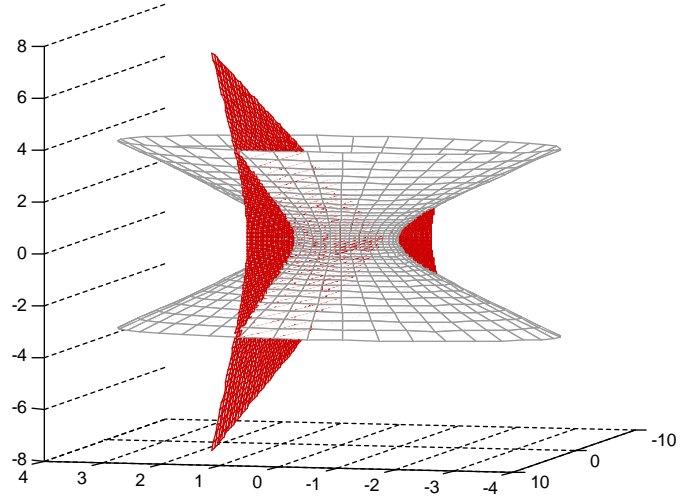
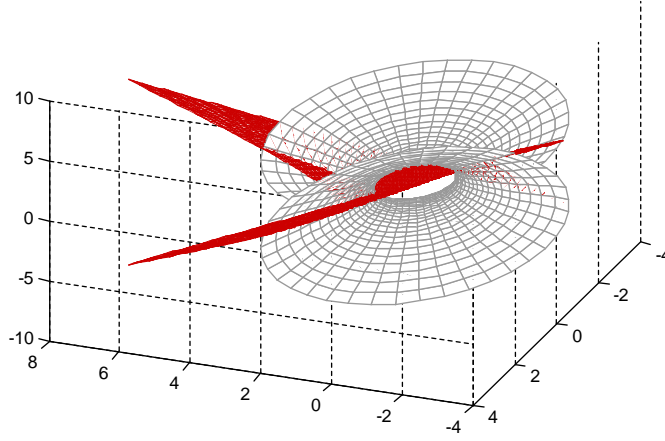
olacağından

$$\tau = \frac{-\langle N_A + N_B, b \rangle}{\kappa}$$

olup (4.32), (4.35), (4.50) yerine yazılırsa

$$\tau = \frac{-2}{\sqrt{17}}$$

olarak bulunmuş olur.

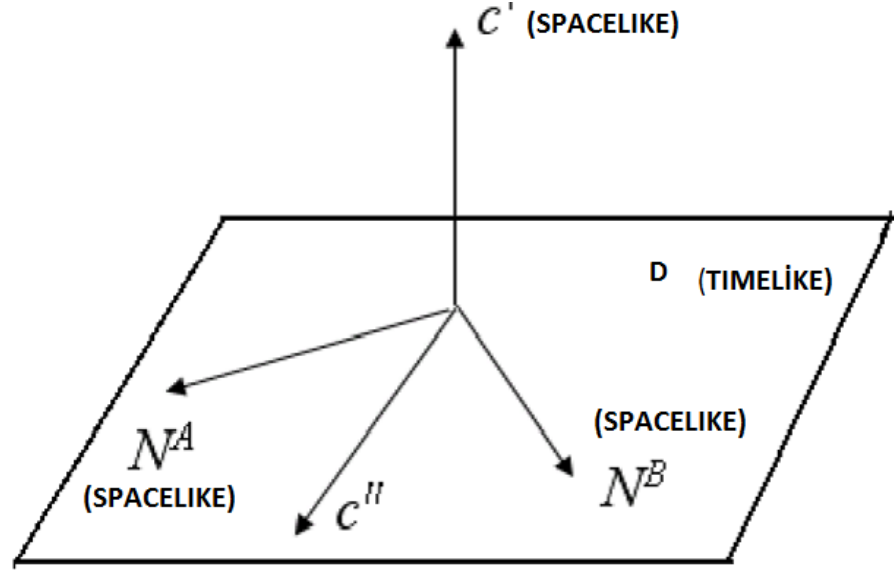


((b))

Şekil 4.3.a.b. İki timelike yüzeyin arakesit eğrisi

4.2 Spacelike Arakesit Eğrisi

M^A ve M^B timelike yüzeylerinin bir $c = c(s)$ spacelike arakesit eğrisi boyunca keştiğini kabul edelim. Bu takdirde $c(s)$ eğrisinin $p = c(s)$ noktasındaki hız vektörü 4.1. de olduğu gibi elde edilebilir.



Şekil 4.4 Spacelike arakesit eğrisi

Ancak bu durumda N^A ve N^B birim normal spacelike vektörleri bir timelike düzlemde kaldığından bu kısımda $\lambda \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ olmak üzere $\langle N^A, N^B \rangle = \lambda$ olarak alınacaktır.

4.2.1 Spacelike arakesit eğrisinin eğriliği

Spacelike arakesit eğrisinin p noktasındaki c'' eğrilik vektörü T ye dik olduğundan N^A ve N^B spacelike vektörlerinin içinde kaldığı timelike düzlemde yatar. O halde bu vektör

$$c'' = \alpha N^A + \beta N^B \quad (4.56)$$

olarak ifade edilebilir. Burada α ve β hesaplanması gereken katsayılarıdır. (4.56)

eşitliği sırasıyla N^A ve N^B ile iççarpılırsa

$$\begin{aligned} k_n^A &= \langle c'', N^A \rangle = \alpha + \lambda\beta \\ k_n^B &= \langle c'', N^B \rangle = \lambda\alpha + \beta \end{aligned} \quad (4.57)$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{bmatrix} k_n^A \\ k_n^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlerse

$$\alpha = \frac{k_n^A - \lambda k_n^B}{1 - \lambda^2} \quad (4.58)$$

ve

$$\beta = \frac{k_n^B - \lambda k_n^A}{1 - \lambda^2} \quad (4.59)$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan $c'' = \alpha N^A + \beta N^B$ olduğundan

$$\kappa = \|c''\| = \sqrt{|\alpha^2 + \beta^2 + 2\lambda\alpha\beta|}$$

olup

$$\kappa^2 = \frac{|(k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 - 2\lambda k_n^A k_n^B|}{1 - \lambda^2}$$

olarak elde edilir. Buna göre şu sonuç verilebilir:

Önerme 4.6 : Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 iki timelike yüzey M^A ve M^B olsun. Bu takdirde $\lambda \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ ve $\langle N^A, N^B \rangle = \lambda$ olmak üzere bu iki timelike yüzeyin spacelike arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa^2 = \frac{|(k_n^A)^2 + (k_n^B)^2 - 2\lambda k_n^A k_n^B|}{1 - \lambda^2} \quad (4.60)$$

dir.

4.2.2 Spacelike arakesit eğrisinin torsiyonu

N^A ve N^B spacelike normal vektörleri timelike normal düzlemde yattığından (2.21) ve (2.22) ifadelerindeki $\kappa'n + \kappa\tau b$ terimi ve (2.23) daki τn terimi $\gamma N^A + \delta N^B$ ile yer değiştirilebilir. O halde

$$\text{Durum 1: } c''' = ft + \gamma N^A + \delta N^B \quad (4.61)$$

$$\text{Durum 2: } c''' = gt + \gamma N^A + \delta N^B \quad (4.62)$$

$$\text{Durum 3: } c''' = \gamma N^A + \delta N^B \quad (4.63)$$

olur.

Eğer c''' vektörünün p noktasında N birim spacelike yüzey normali üzerine izdüşümü p_n ile gösterilirse

$$\begin{aligned} p_n^A &= \gamma + \delta\lambda \\ p_n^B &= \gamma\lambda + \delta \end{aligned} \quad (4.64)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. γ ve δ bilinmeyenli (4.64) denklemini çözersek

$$\gamma = \frac{1}{1 - \lambda^2} (p_n^A - \lambda p_n^B) \quad (4.65)$$

ve

$$\delta = \frac{1}{1 - \lambda^2} (p_n^B - \lambda p_n^A) \quad (4.66)$$

olarak bulunur. Bu takdirde (2.24), (2.25) ve (2.26) denklemlerinden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Önerme 4.7: M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki timelike yüzey olsun. Bu takdirde $\langle N^A, N^B \rangle = \lambda$ olmak üzere bu iki timelike yüzeyin spacelike arakesit eğrisinin torsiyonu

$$\tau = \frac{-(p_n^A - \lambda p_n^B) \langle N^A, b \rangle - (p_n^B - \lambda p_n^A) \langle N^B, b \rangle}{\kappa (1 - \lambda^2)}$$

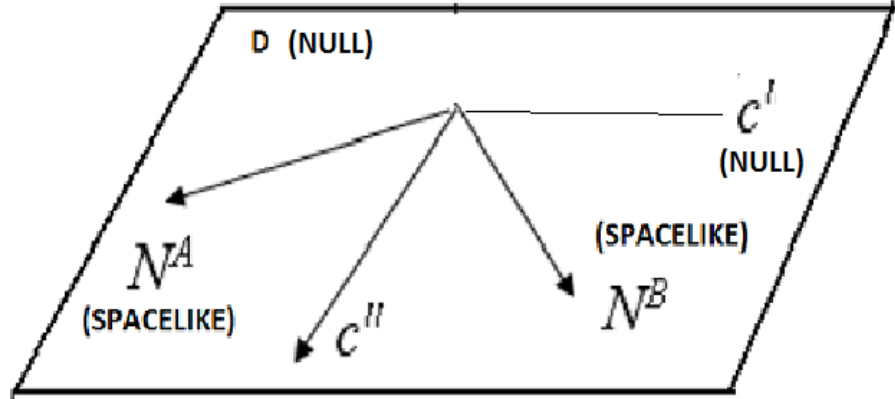
$$\tau = \frac{(p_n^A - \lambda p_n^B) \langle N^A, b \rangle + (p_n^B - \lambda p_n^A) \langle N^B, b \rangle}{\kappa (1 - \lambda^2)}$$

$$\tau = \frac{(p_n^A - \lambda p_n^B) \langle N^A, b \rangle + (p_n^B - \lambda p_n^A) \langle N^B, b \rangle}{(1 - \lambda^2)}$$

olur.

4.3. Null Arakesit Eğrisi

M^A ve M^B Lorentz-Minkowski 3-uzayı \mathbb{L}^3 de iki timelike yüzey olsun. Bu yüzeylerin bir $c = c(s)$ spacelike arakesit eğrisi boyunca kesiştiğini kabul edelim. Bu takdirde $c(s)$ eğrisinin $p = c(s)$ noktasındaki hız vektörü 4.1. de olduğu gibi elde edilebilir.



Şekil 4.5 Null arakesit eğrisi

Ancak bu durumda N^A ve N^B birim normal spacelike vektörleri $N^A \times N^B$ null hız vektörü ile bir null düzlemde kalır. $\langle N^A, N^B \rangle = \pm 1$ olması halinde arakesit eğrisi null olup $N^A \times N^B$ bir null düzlemde kalır. Diğer taraftan $\langle N^A, N^B \rangle = \pm 1$ olduğundan N^A ve N^B birim normal spacelike vektörleri lineer bağımlı olur. Bu ise yüzeylerin bir eğri boyunca teğet olması anlamına gelir ki bu durumda yukarıda kullanılan teknik burada kullanılamaz.

5. SPACELIKE- NULL İKİ YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİ

Bu bölümde \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında biri spacelike diğeri null olan iki yüzeyin arakesit eğrisinin κ eğriliği τ torsiyonunu hesaplayacağız.

5.1. Spacelike Arakesit Eğrisi

\mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-Uzayında bir M^S spacelike yüzeyi $X^S = X^S(u_s, v_s)$ parametrik denklemi ile ve bir M^L null yüzeyi $X^L = X^L(u_L, v_L)$ parametrik denklemi verilmiş olsun. $c = c(s)$ eğrisi hem M^S spacelike yüzeyi hem de M^L null yüzeyi üzerinde yatan arakesit eğrisi olsun. Böylece c arakesit eğrisinin t teğet vektörü her iki yüzeyin tanjant düzlemi üzerinde olur. O halde bu teğet vektör $p = c(s)$ noktasındaki M^S spacelike yüzeyinin birim timelike normali N ile M^L null yüzeyinin Z normal vektörünün vektörel çarpımı

$$T = \frac{N \times Z}{\|N \times Z\|}$$

olup (2.33) ifadesi gereğince bir spacelike vektör olur. Buna göre \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında bir M^S spacelike yüzeyi ile bir M^L null yüzeyi bir spacelike eğri boyunca kesişirler.

Spacelike arakesit eğrisinin p noktasındaki c'' eğrilik vektörü T ye dik olduğundan

$$c'' \in \text{Span}\{N, P\} \text{ ve } c'' \in \text{Span}\{Z, Y\}$$

olup N timelike, P spacelike, Z ve Y null vektörleri c' ye dik olan bir timelike düzlemde yatarlar.

Bu timelike düzlemde yatan N timelike, P spacelike vektörleri yardımıyla

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P + N) \text{ ve } \frac{1}{\sqrt{2}}(P - N)$$

olacak şekilde null vektörler inşa edebiliriz. Ancak Önerme 2.8. gereğince bir timelike düzlemde iki tane lineer bağımsız null vektör mevcut olup bu yeni vektörler Z ve Y null vektörleri ile lineer bağımlı olabilirler. O halde

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(P + N) \text{ ve } Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - N) \quad (5.1)$$

veya

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(P + N) \text{ ve } Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - N)$$

olarak alabiliriz. Şimdi bu yüzeylerin normallerinin

$$\langle N, Z \rangle = \lambda$$

olduğunu kabul edelim. Buna göre (5.1) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\langle N, \frac{1}{\sqrt{2}}(P + N) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle N, P \rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \langle N, N \rangle \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

olup $c(s)$ eğrisi boyunca $\langle N, Z \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ dir. Benzer şekilde $\langle P, Z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olur. Böylece şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.1: \mathbb{L}^3 Lorentz-Minkowski 3-uzayında bir M^S spacelike yüzeyi ile bir M^L null yüzeyi bir $c(s)$ spacelike arakesit eğrisi boyunca kesişiyorsa

$$\tau_g = \pm \tau_y$$

dir.

İspat:

$$\langle N, Z \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğundan s ye göre türev alınırsa

$$\langle N', Z \rangle + \langle N, Z' \rangle = 0$$

olup (2.29) ve (2.32) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \kappa_n(s)T(s) + \tau_g(s)P(s), Z(s) \rangle + \langle N(s), -\kappa_y(s)T(s) + T_y(s)Z(s) \rangle \\ &= \kappa_n(s) \langle T(s), Z(s) \rangle + \tau_g(s) \langle P(s), Z(s) \rangle - \kappa_y(s) \langle N(s), T(s) \rangle \\ &\quad + \tau_y(s) \langle N(s), Z(s) \rangle \\ &= \tau_g(s) \frac{1}{\sqrt{2}} - \tau_y(s) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

olacağından

$$\tau_g = \pm \tau_y$$

elde edilir.

Buna göre (2.26) ve (2.29) denklemleri yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_n N + \kappa_g P \\ N' &= \kappa_n T + \tau_g P \\ P' &= -\kappa_g T + \tau_g N \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_z Z + \kappa_y Y \\ Z' &= -\kappa_y T + \tau_y Z \\ Y' &= -\kappa_z T - \tau_y Y \end{aligned}$$

olur.

5.2. Spacelike Arakesit Eğrisinin Eğriliği

Spacelike arakesit eğrisinin p noktasındaki c'' eğrilik vektörü T ye dik olduğundan

$$c'' = \alpha N + \beta Z \tag{5.2}$$

olarak ifade edilebilir. Buradaki α ve β katsayıları hesaplanması gereken katsayılardır. Yukarıdan

$$\langle N, Z \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğunu biliyoruz. P noktasında c eğrisinin T doğrultusundaki k_n normal eğriliğinin $c'' = k_n$ eğrilik vektörünün P noktasındaki timelike birim yüzeyi normali üzerine izdüşümü, k_y y -eğriliğinin de $c'' = k_n$ eğrilik vektörünün P noktasındaki Z normal vektörüne paralel izdüşümünü ölçtüğünü biliyoruz. Buradan (5.2) eşitliği N ve Z ile iççarpılırsa

$$\begin{aligned} k_n &= \langle c'', N \rangle = -\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \\ k_y &= \langle c'', Z \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\alpha = -\sqrt{2}k_y$$

ve

$$\beta = -\sqrt{2} \left(k_n - \sqrt{2}k_y \right) = 2k_y - \sqrt{2}k_n$$

olup c'' eğrilik vektörü

$$c'' = -\sqrt{2}k_y N - \sqrt{2} \left(k_n - \sqrt{2}k_y \right) Z \quad (5.3)$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan

$$\kappa = \|c''\|$$

olduğundan

$$\kappa^2 = -k_y^2 - 2\sqrt{2}k_y \left(2k_y - \sqrt{2}k_n \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

olup

$$\kappa^2 = 2k_y^2 - 2\sqrt{2}k_y k_n$$

olarak elde edilir. Eğer (5.3) denklemleri sırasıyla P ve Y ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}k_g &= \langle c'', P \rangle = \beta \langle P, Z \rangle \\k_z &= \langle c'', Y \rangle = \alpha \langle N, Y \rangle + \beta\end{aligned}$$

olup

$$\langle P, Z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle P, P \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\langle N, Y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{2}k_g \\ \alpha &= \sqrt{2} \left(k_z - \sqrt{2}k_g = -2k_g + \sqrt{2}k_z \right)\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$c'' = \left(-2k_g + \sqrt{2}k_z \right) N + \sqrt{2}k_g Z$$

olarak ifade edilebilir. Bu takdirde $c(s)$ spacelike arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa^2 = 2\sqrt{2}k_g k_z - 2k_z^2$$

olarak elde edilir. Böylece şu önerme elde edilir:

Önerme 5.1: Lorentz- Minkowski 3- uzayı \mathbb{L}^3 de M^S ve M^L sırasıyla bir spacelike ve bir null yüzey olsun. Bu takdirde bu iki yüzeyin spacelike arakesit eğrisinin eğriliği

$$\kappa^2 = 2k_y^2 - 2\sqrt{2}k_y k_n$$

veya

$$\kappa^2 = 2\sqrt{2}k_g k_z - 2k_z^2$$

dir.

Bu takdirde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 5.2: Lorentz- Minkowski 3- uzayı \mathbb{L}^3 de M^S spacelike ve M^L null yüzeyleri bir $c(s)$ spacelike eğrisi boyunca kesişsin. Bu takdirde

i) Eğer M^S üzerinde $c(s)$ eğrisi asimptotik ise

$$k_y = k_z$$

ii) Eğer M^S üzerinde $c(s)$ eğrisi geodezik ise

$$k_y = -k_z$$

dir.

5.3 Spacelike Arakesit Eğrisinin Torsiyonu

M^S spacelike ve M^L null yüzeylerinin sırasıyla N timelike birim normal ve Z lightlike normal vektörleri c spacelike arakesit eğrisinin normal düzleminde yattığından Frenet denklemindeki $k'n = k\tau b$ ifadesi yerine τn terimleri yerine $\alpha N + \beta Z$ alınabilir. Bu takdirde c''' vektörü

$$c''' = \kappa^2 t + \alpha N + \beta Z$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı sırasıyla N ve Z ile iççarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle c''', N \rangle &= -\alpha + \beta \langle N, Z \rangle = -\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta \\ \langle c''', Z \rangle &= \alpha \langle N, Z \rangle = -\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

elde edilir. c''' nün sırasıyla M^S spacelike yüzeyi üzerinde N timelike normal üzerine izdüşümünü λ_N , M^L lightlike yüzeyi üzerinde Z ye paralel izdüşümünü λ_Z

ile gösterilirse (5.4) denklemlerinde α ve β bilinmeyenleri

$$\begin{aligned}\alpha &= -\sqrt{2}\lambda_Z \\ \beta &= 2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde c''' vektörü de

$$c''' = -k^2T - \sqrt{2}\lambda_Z N + (2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N) Z$$

olarak elde edilir. Bu takdirde c'' vektörünün spacelike olması halinde (2.24) yardımıyla

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{-\langle c''', b \rangle}{k} \\ &= \frac{-\langle -k^2T - \sqrt{2}\lambda_Z N + (2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N) Z, b \rangle}{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}\lambda_Z \langle N, b \rangle - (2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N) \langle Z, b \rangle}{k}\end{aligned}$$

olup

$$\tau = \frac{\sqrt{2}\lambda_Z \langle N, b \rangle - (2\lambda_N - \sqrt{2}\lambda_N) \langle Z, b \rangle}{k}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde c'' vektörünün timelike ve null olmasına göre (2.25)

ve (2.26) eşitlikleri yardımıyla c eğrisinin τ burulması, sırasıyla

$$\tau = \frac{-\sqrt{2}\lambda_Z \langle N, b \rangle + (2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N) \langle Z, b \rangle}{k}$$

ve

$$\tau = -\sqrt{2}\lambda_Z \langle N, b \rangle + (2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N) \langle Z, b \rangle$$

olarak elde edilmiş olur.

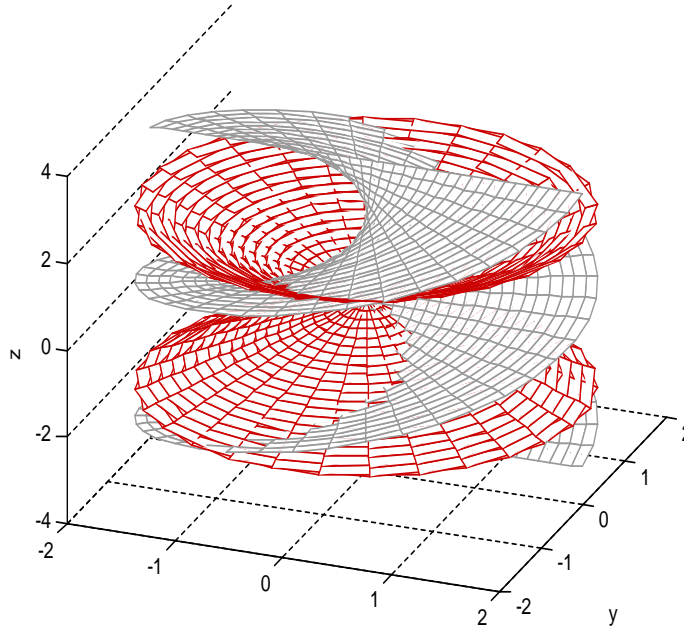
Önerme 5.2: Lorentz- Minkowski 3- uzayı \mathbb{L}^3 de M^S ve M^L sırasıyla bir spacelike ve bir null yüzey olsun. Bu takdirde bu iki yüzeyin spacelike arakesit eğrisinin

burulması, c'' ivme vektörünün sırasıyla spacelike, timelike ve null olmasına göre

1. Durum $\tau = \frac{\sqrt{2}\lambda_Z \langle N, b \rangle - (2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N) \langle Z, b \rangle}{k}$
2. Durum $\tau = \frac{-\sqrt{2}\lambda_Z \langle N, b \rangle + (2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N) \langle Z, b \rangle}{k}$
3. Durum $\tau = -\sqrt{2}\lambda_Z \langle N, b \rangle + (2\lambda_Z - \sqrt{2}\lambda_N) \langle Z, b \rangle$

dir.

Örnek 5.1: Bir null yüzey olan null koni ve bir spacelike yüzey olan helikoidin arakesit eğrisi aşağıdaki şekildedir.



Şekil 5.1 Null koni ve helikoid yüzeyinin arakesit eğrisi

KAYNAKLAR

- Allesio, O. and Guadalope, V.I. 2007. Differential Geometry of intersection curve of two spacelike surfaces in Lorentz_Minkowski Space \mathbb{L}^3 . http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/626.pdf.
- Carmo, M. P. 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall. NJ.
- Duggal, K.L. and Jin, D.H. 2007. Null curves and surfaces of Semi-Riemannian Manifolds. World Scientific. Singapore.
- Farin, G., Hoschec, J. and Kim, M.S. 2002. Handbook Computer Aided Geometric Design. Elsevier. Netherlands.
- Hartmann, E. 1996. G^2 interpolation and blending on surfaces. The Visual Comp. 12, 181-192.
- Kiehn, M.R. Falaco solitons Black holes in a swimming pool. <Http://www22.pair.com/csdc/pdf/zeromean.pdf>.
- Lopez, R. 2000. Timelike surface with constant mean curvature in Lorentz three space. Tohoku Math.J. 52,515-532.
- Lopez, R. 2008. Differential Geometry of Curves and surfaces in Lorentz-Minkowski Space. Mini Course at the IME-USP. University of Sao Paulo. Brasil
- O'Neill, B. 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity. Academic Press. London.

- Preparata, F.P. and Shomos, M.I. 1993. Computational Geometry. Springer. USA
- Sato, T. 2012. Curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowsk, space. <http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/2179/1/Kl-sub.pdf>
- Walrave, J. 1985. Curves and Surfaces in Minkowski spaces. Doctoral Thesis. KU Leuven, Fac. Science, Leuven.
- Wilmore, I., J. 1959. An introduction to Differential Geometry, Cledeon Press. Oxford.
- Yakıcı , S. 2012. Lightlike Koni Üzerindeki Eğrilerin Karakterizasyonları Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ye, X. and Maekawa, T. 1999. Differential Geometry of Intersection Curves of Two Surfaces. Computer Aided Geometric Design. 16 (8), 767-788.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zafer ŞANLI

Doğum Yeri : Antalya

Doğum Tarihi : 10.09.1980

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Antalya Lisesi - 1998

Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü - 2006

Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı - (2006 - 2009)

Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi - Burdur (Araştırma Görevlisi) 2007 -

Yayınlar

Hakemli Dergiler

ŞANLI, Z., YAYLI, Y. 2013. On Indicatrices of Null Cartan Curves in \mathbb{R}_1^4 .
International Journal of Engineering Research & Technology. Vol.2
- Issue 10(October - 2013).

Ulusal Sempozyumlar

Şanlı, Z., Yaylı, Y. 2011. Null Eğrilerin Gösterge Eğrileri. IX. Geometri
Sempozyumu. 7-10 Haziran 2011. SAMSUN/TÜRKİYE

Şanlı, Z., Yaylı, Y. 2012. Indicatrices of Null Cartan Curves in Minkowski 4-Space.
X. Geometri Sempozyumu.13-16 Haziran 2012. BALIKESİR/TÜRKİYE