47794

ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ VE TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA YAKLAŞAN BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ POZİTİF OPERATÖRLER

Mine AKTAŞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 12/11/1996 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Seksen (80) not takdir edilerek oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Mustafa BALCI	Prof.Dr. Akif HACIYEV	Doç.Dr. Cemil YILDIZ
(Danışman)		

ÖZET

Doktora Tezi

SÜREKLİ VE TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA YAKLAŞAN BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ POZİTİF OPERATÖRLER

Mine AKTAŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa BALCI
1996, Sayfa: 49
Jüri: Prof. Dr. Mustafa BALCI
Prof. Dr. Akif HACIYEV
Doç. Dr. Cemil YILDIZ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bölünmüş farklar, konveks fonksiyonlar, lineer pozitif operatörler, C(a,b) uzayında P.P. Korovkin teoremi, Bernstein polinomu ve özellikleri verilmiştir.

İkinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır.

İkinci bölümde Genelleştirilmiş Bernstein polinomları tanımlanmış ve sürekli fonksiyonlara yaklaşması verilmiştir.

Üçüncü bölümde Genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının monotonluğu verilmiştir.

Dördüncü bölümde diferensiyel denklemlerin sayısal çözüm yöntemleri verilmiştir.

Beşinci bölümde Genelleştirilmiş Sasz operatörü ile ilgili bir teorem verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein polinomu, Lineer pozitif operatörler, konveks fonksiyonlar, Bölünmüş farklar, Sasz operatörü.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON SOME GENERALIZED POSITIVE OPERATORS APPROACHING TO CONTINUOUS AND DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Mine AKTAŞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa BALCI

1996, Page: 49

Jury: Prof. Dr. Mustafa BALCI
Prof. Dr. Akif HACIYEV
Assoc. Prof. Dr. Cemil YILDIZ

This thesis consist of five chapters.

The first chapter is divided differences, convex functions, linear positive operators, P.P. Korovkin theorem on C(a,b) spaces, Bernstein polynomials and characteristics.

The second, third, fourth and fifth chapters are the original parts of the study.

In the second chapter, generalization of Bernstein polynomials are defined and approximation of continuous functions are given.

In the third chapter, monotonicity of Bernstein polynomials are given.

In the fourth chapter, some numerical methods are given for the solutions of some differential equations.

In the fifth chapter, generalization of Sasz operators are given.

KEY WORDS: Bernstein polynomials, Linear positive operators, Convex functions, Divided differences, Sasz operators.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa BALCI ve Sayın Prof. Dr. Akif HACIYEV'e teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$C(a,b)$	:	$[a,b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar
$B_n(f;x)$	:	Bernstein polinomu
$S_n(f;x)$	:	Sasz operatörü
$B_n^{\alpha,\beta}$	:	Genelleştirilmiş Bernstein polinomu
$P_n^f(x)$	:	Genelleştirilmiş Sasz operatörü
[ ]	:	Bölünmüş farklar
O	:	$f(x) = O(g(x))$ ise $\|f(x)\| \leq M\|g(x)\|$

GİRİŞ

1858 yılında K. Weiestrass ispatlamıştır ki; sonlu bir aralıkta tanımlanmış herhangi sürekli fonksiyona yakınsayan polinomlar dizisi bulunabilir. Bu teorem sadece sürekli fonksiyonlara yaklaşan polinomların varlığı hakkındadır. 1912 yılında Bernstein bu teoremin yeni bir ispatını vermiştir ve Weierstrass'ın ispatından farklı olarak sürekli fonksiyona yakınsayan polinomlar dizişinin açık şeklini de ifade etmiştir. Bernstein'in tanımladığı polinomlar

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k} \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi bu polinomların yapısı

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}$$

formülünden kaynaklanmıştır. Bu nedenle Bernstein polinomlarının tanımlanma yöntemi sürekli fonksiyonlara yaklaşan bir çok yeni polinomlar dizisinin tanımlanmasına yardımcı olmuştur. 1962 yılında Romen matematikçisi D.D. Stancu Bernstein polinomunun yeni bir genelleşmesini tanımlamış ve bu genelleştirilmiş polinomların [0,1] üzerinde sürekli fonksiyonlara yaklaştığını göstermiştir. Bernstein polinomlarının yapısında görüldüğü gibi bu polinomlar pozitif bir f fonksiyonunu yine pozitif bir $B_n(f,x)$ fonksiyonlar dizisine dönüştürmektedir. Bu nedenle, Bernstein polinomları Lineer pozitif operatörlerdir. Bundan dolayı $f(x) \ge g(x)$ olduğu durumda $B_n(f,x) \ge B_n(g,x)$ olur ve bu da Bernstein polinomlarının monoton olduğunu gösteriyor. Fakat, $B_n(f,x)$ dizisinin n-ye göre monoton olması f fonksiyonunun özelliklerine bağlıdır. Bu problem bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir (bak. Arama 1957, Butzer 1954). Bu çalışmada Bernstein polinomunun Stancu tipli genelleşmesi herhangi sonlu [a,b] aralığında incelenecek ve tanımlanan yeni genelleştirilmiş polinomların monotonluk özellikleride yer alacaktır. Ayrıca

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

genelleştirilmiş Sasz operatörünün türevi incelenecektir.

1. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER

1.1. Bölünmüş Farklar ve Konveks Fonksiyonlar

Tanım 1.1.1. f(x) fonksiyonlar (a,b) aralığında tanımlı ve $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ler (a,b) aralığının keyfi noktaları olsun. Bu durumda

$$[x_k] = f(x_k) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$[x_0, x_1] = \frac{[x_0] - [x_1]}{x_0 - x_1}$$

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

...

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - [x_1, x_2, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

ifadelerinde f(x) fonksiyonunun sırasıyla sıfırıncı, birinci, ... n.ci bölünmüş farkları denir.

Bu ifadelerin f(x) fonksiyonu ile bağımlı olduğunu göstermek için

$$[x_0 \; ; f] \; , [x_0, x_1 \; ; f] \; , \dots , [x_0, x_1, \dots , x_n \; ; f]$$

şeklinde yazarız. Şimdi bu bölünmüş farkları diğer bir şekilde ifade edelim.

$$[x_0, x_1] = \frac{[x_0] - [x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

olduğu açıktır. Bu eşitliği kullanarak $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ile ifade edilen ikinci bölünmüş farkı;

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0,x_1] - [x_1,x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}{x_0 - x_2}$$

$$= \frac{f(x_0)(x_1 - x_2) - f(x_1)(x_0 - x_2) + f(x_2)(x_0 - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_0 - x_2)}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre,

$$[x_0,x_1,x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

olur.

Tümevarım yöntemi kullanılarak n.ci bölünmüş fark için,

$$[x_0,x_1,\ldots,x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 1.1.2. (a,b) aralığında tanımlanmış f(x) fonksiyonunun bu aralıkta olan keyfi (n+1) noktadaki n.ci bölünmüş farkları pozitif ise f(x) fonksiyonuna n.ci basamaktan konveks, negatif ise f(x) fonksiyonuna n.ci basamaktan konkav, sıfır ise f(x) fonksiyonuna n.ci basamaktan sabit fonksiyon denir.

1.2. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X'den alınmış herhangi f fonksiyonuna Y'de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa o takdirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve $g(x) = L(f;x)$ ile gösterilir.

X uzayına L operatörünün tanım bölgesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f;x) = g(x)$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekilde g fonksiyonları kümesine L operatörünün değerler kümesi denir. Bu küme R(L) ile gösterilir. Görülüyorki $R(L) \subset Y$ dir.

X uzayı bir lineer uzay olduğundan lineer operatörün tanımını verebiliriz. f_1 ve f_2, reel X lineer uzayında herhangi iki fonksiyon, α_1 ve α_2'ler keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü,

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2;x) = a_1 L(f_1;x) + a_2 L(f_2;x)$$

koşulunu gerçekliyor ise o takdirde L operatörüne bir lineer operatör denir. Bu tanımdan görülüyorki L lineer operatörü için $L(0,x) = 0$ olur.

Kabul edelimki

$$X^+ = \{f \in X \ ; \ f(x) \geq 0\}$$

$$Y^+ = \{g \in Y \ ; \ g(x) \geq 0\}$$

olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ ise L operatörüne Lineer Pozitif Operatör denir. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f,x) \geq 0$ olur.

1.3. C(a,b) Uzayında P.P. Korovkin Teoremi

1952 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin [0,1] aralığında sürekli fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. H. Bohman göstermiş ki $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n})\, P_{k,n}(x) \quad , \quad P_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif operatörler dizisinin, $n \to \infty$ için [0,1] aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki üç koşuldur:

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \qquad (1)$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \qquad (2)$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \qquad (3)$$

Burada "$\rightrightarrows$" düzgün yakınsamayı göstermektedir. Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun [0,1] aralığının dışındaki değerlerinden bağımsız olduğu açıktır.

1953 yılında P.P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve göstermiştir ki Bohman'ın koşulları genel haldede gerçeklenir.

C(a,b) fonksiyonlar uzayını hatırlayacak olursak; bu uzaydaki fonksiyonlar [a,b] aralığının tüm iç noktalarında ve uç noktalarında süreklidirler. Yani a noktasında sağdan ve b noktasında da soldan süreklidirler. Bu hatırlatmadan sonra Korovkin teoremine geçelim.

Teorem 1.3.1. (Korovkin Teoremi) [a,b] aralığında (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi (1), (2) ve (3) koşullarını gerçekliyor ise C(a,b) uzayında olan, tüm reel eksende tanımlı, sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken $a \le x \le b$ olmak üzere

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

olur.

1.4. Bernstein Polinomu ve Özellikleri

S. Bernstein 1912 yılında [0,1] aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyona yakınsayan bir polinomun

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \; x^k (1-x)^{n-k}$$

olduğunu göstermiştir. $x^k(1-x)^{n-k} \ge 0$ olduğunda $B_n(f;x)$ pozitif lineer bir operatördür.

Şimdi Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$B_n(1,x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(1,x) = (1-x+x)^n$$

$$B_n(1,x) = 1$$

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \, \frac{n!}{k! \; (n-k)!} \; x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(t,x) = x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \; (n-k)!} \; x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(t,x) = x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \; x^k (1-x)^{n-1-k}$$

$$B_n(t,x) = x$$

$$B_n\left(t^2;x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} +$$

$$+ x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$B_n\left(t^2;x\right) = x \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} +$$

$$+ \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$B_n\left(t^2;x\right) = x^2\, \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} x^{k-2}(1-x)^{n-k} +$$

$$+ \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\, x^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$B_n\left(t^2;x\right) = x^2\, \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k}\, x^k(1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n}$$

$$B_n\left(t^2;x\right) = x^2 + \frac{x - x^2}{n} \tag{4}$$

olur. Dolayısıyla $n \to \infty$ için

$$\| B_n(1;x) - 1 \|_{C(0,1)} \longrightarrow 0$$

$$\| B_n(t;x) - x \|_{C(0,1)} \longrightarrow 0$$

$$\| B_n(t^2;x) - x^2 \|_{C(0,1)} \longrightarrow 0 \tag{5}$$

sağlanır. Korovkin'in birinci teoremine göre $f \in C(0,1)$ için

$$\| B_n(f,x) - f(x) \|_{C(0,1)} \longrightarrow 0$$

gerçeklenir.

Bu polinomlar bir çok yeni pozitif lineer operatörlerin tanımlanmasına yardımcı olmuştur. Korovkin teoremlerini gerçekleyen operatör dizilerinin bulunma yöntemleri Bernstein polinomlarının bulunma yöntemi ile elde edilmiştir (Gadziev 1974).

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN POLİNOMLARININ TANIMLANMASI VE SÜREKLİ FONKSİYONLARA YAKLAŞIMI

Teorem 2.1.1. $f \in C(a,b)$ ve α, $\beta \in R^+$, $\alpha < \beta$ olmak üzere

$$B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right) C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k \tag{6}$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} \| B_n^{\alpha,\beta}(f,x) - f(x) \|_{C(a,b)} = 0$$

dır.

İspat: $B_n^{\alpha,\beta}$ lineer pozitif operatör olduğundan, P.P. Korovkin teoremini uygulayabiliriz. Bu teoremin şartlarını kontrol edelim.

$$B_n^{\alpha,\beta}(1;x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k$$

yani,

$$B_n^{\alpha,\beta}(1,x) = 1$$

dir.

$$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right] C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k$$

olsun. Toplamın içindeki parantezi açarsak

$$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) = \frac{a}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k +$$

$$+ \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a)\, C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k$$

elde edilir. Toplamı dağıtırsak

$$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) = \frac{a}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (b-x)^{n-k} \, (x-a)^k +$$

$$+ \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{n+\beta} \sum_{k=0}^{n} k \, (b-a) \, C_n^k \, (b-x)^{n-k} \, (x-a)^k +$$

$$+ \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{n+\beta} \sum_{k=0}^{n} \alpha \, (b-a) \, C_n^k \, (b-x)^{n-k} \, (x-a)^k$$

çıkar.

$$B_n^{\alpha,\beta}(1,x) = 1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) = a + \frac{n}{n+\beta} \left[\frac{1}{(b-a)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \, C_n^k \, (b-x)^{n-k} \, (x-a)^k \right] +$$

$$+ \frac{\alpha}{n+\beta} \left[\frac{1}{(b-a)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (b-x)^{n-k} \, (x-a)^k \right]$$

elde edilir. Parantez içindeki değerler yerine yazılırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) = a + \frac{n}{n+\beta} (x-a) + \frac{\alpha}{n+\beta} (b-a)$$

bulunur. Buradan

$$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) = x + \frac{\alpha(b-x) + (\alpha-\beta)(x-a)}{n+\beta}$$

çıkar.

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a) \right]^2 C_n^k \, (b-x)^{n-k} \, (x-a)^k$$

olsun. Toplamın içindeki parantezin karesini alırsak

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[a^2 + 2a \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a) + \frac{(k+\alpha)^2}{(n+\beta)^2} (b-a)^2 \right] C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k$$

çıkar. Böylece

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[a^2 + 2a \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a) + \frac{k^2+2\alpha k+\alpha^2}{(n+\beta)^2} (b-a)^2 \right] C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k$$

elde edilir. Toplamın içindeki parantezi açarsak

$$\begin{aligned} B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \Bigg[& a^2 + 2a \frac{k}{n+\beta} (b-a) + \frac{2a\alpha}{n+\beta} (b-a) + \\ & + \frac{k^2}{(n+\beta)^2} (b-a)^2 + \frac{2k\alpha}{(n+\beta)^2} (b-a)^2 + \\ & + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} (b-a)^2 \Bigg] C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k \end{aligned}$$

çıkar. Ayrı ayrı toplam alırsak

$$\begin{aligned} B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right) = & \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} a^2 C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k + \\ & + \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2ak}{n+\beta} (b-a) C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k + \\ & + \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2(b-a)^2}{(n+\beta)^2} C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k + \\ & + \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2ak}{(n+\beta)^2} (b-a)^2 C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k + \\ & + \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} (b-a)^2 C_n^k (b-x)^{n-k} (x-a)^k \end{aligned}$$

çıkar

$$B_n^{\alpha,\beta}(1,x) = 1$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = a^2 + \frac{2an}{n+\beta}\frac{1}{(b-a)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k (b-x)^{n-k}(x-a)^k$$

$$+ \frac{2a\alpha}{n+\beta}(b-a) + \frac{1}{(n+\beta)^2}\frac{n^2}{(b-a)^{n-2}}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k (b-x)^{n-k}(x-a)^k +$$

$$+ \frac{(b-a)2\alpha n}{(n+\beta)^2 (b-a)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k (b-x)^{n-k}(x-a)^k + \frac{\alpha^2(b-a)^2}{(n+\beta)^2}$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki ikinci, dördüncü ve beşinci ifadelerin değerlerini yerine yazarsak

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = a^2 + \frac{2an}{n+\beta}(x-a) + \frac{2a\alpha}{n+\beta}(b-a) +$$

$$+ \frac{n^2}{(n+\beta)^2}\left[(x-a)^2\frac{(n-1)}{n} + \frac{(x-a)(b-a)}{n}\right] +$$

$$+ \frac{(b-a)}{(n+\beta)^2}(2\alpha n)(x-a) + \frac{\alpha^2(b-a)^2}{(n+\beta)^2}$$

çıkar. Paydalarını eşitlersek

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = \frac{a^2(n+\beta)^2 + 2an(xn+x\beta-an-a\beta) + 2a\alpha(bn+b\beta-an-a\beta)}{(n+\beta)^2} +$$

$$+ \frac{(n^2-n)(x^2-2ax+a^2) + n(xb-xa-ab+a^2)}{(n+\beta)^2} +$$

$$+ \frac{2\alpha n(xb-xa-ab+a^2)}{(n+\beta)^2} + \frac{\alpha^2(b-a)^2}{(n+\beta)^2}$$

elde edilir. Sadeleştirme yapılırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = \frac{a^2(n+\beta)^2+2anx\beta-a^2n^2-2a^2n\beta+2a\alpha b\beta-2a^2\alpha\beta+n^2x^2}{(n+\beta)^2} -$$

$$- \frac{n^2x^2+anx+bnx-nab+2\alpha nxb-2\alpha nxa+\alpha^2(b-a)^2}{(n+\beta)^2} +$$

$$+ \frac{\beta^2x^2-\beta^2x^2}{(n+\beta)^2} + \frac{2n\beta x^2-2n\beta x^2}{(n+\beta)^2}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = x^2 + \frac{a^2(n+\beta)^2 + \alpha^2(b-a)^2 + 2anx(\beta-\alpha) + nx(a+b) - an(an+b)}{(n+\beta)^2} -$$

$$- \frac{2a^2\beta(n+\alpha) - x^2(n+\beta^2) + 2\alpha b(nx+a\beta) - 2n\beta x^2}{(n+\beta)^2}$$

bulunur.

$$B_n^{\alpha,\beta}(1,x) \rightrightarrows 1$$

$$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) \rightrightarrows x$$

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) \rightrightarrows x^2$$

olduğundan Korovkin teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \| B_n^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x) \|_{C(a,b)} = 0$$

elde edilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN POLİNOMLARININ MONOTONLUĞU

3.1. Giriş

$f(x) \in C[a,b]$ ve $\alpha,\ \beta \in R^+$, $\alpha \leq \beta$ olmak üzere Bernstein polinomu

$$B_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))\ C_n^k\ (b-x)^{n-k}\ (x-a)^k$$

ile tamamlansın. $(B_n^{\alpha,\beta}(f,x))$ dizisinin monotonluğunu araştırmak için ardışık Bernstein polinomlarının farkı için bir formül oluşturmalıyız. Şimdi bunun için aşağıdaki teoremi verelim.

Önce, kısalık için aşağıdaki işaretleri kabul edelim.

$$F_1(\beta,n,x) = \frac{(x-a)(b-x)}{(n+\beta)^2(n+\beta+1)}$$

$$F_2(\alpha,\beta,k,n,x) = \binom{n-1}{k}(x-a)^k\ (b-x)^{n-k-1}\ \frac{n}{(k+1)(n-k)}\ (n+\beta-k-\alpha)(k+\alpha+1)$$

$$F_3(\alpha,\beta,k,n,x) = \binom{n-1}{k}\frac{n}{(k+1)(n-k)}\ (x-a)^k\ (b-x)^{n-k-1}$$

$$C_1 = \alpha\ \frac{b-a}{n+\beta}$$

$$C_2 = \beta\ \frac{(k+1+\alpha)(b-a)}{(n+\beta)(n+\beta+1)}$$

$$C_3 = \frac{\alpha(b-a)}{(n+\beta)(n+\beta+1)}$$

$$C_4 = \frac{(b-a)(\alpha-\beta)}{(n+1+\beta)(n+\beta)}$$

Teorem 3.1.1.

$$B_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right) C_n^k\ (b-x)^{n-k}\ (x-a)^k$$

olmak üzere

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f,x) - B_{n}^{\alpha,\beta}(f,x) = -\frac{1}{(b-a)^{n-1}} F_1(\beta,n,x)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_2(\alpha,\beta,k,n,x)\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right]$$

$$-\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(x-a)(b-x)\sum_{k=0}^{n-1} F_3(\alpha,\beta,k,n,x)\left\{C_1\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right]\right.$$

$$\left.+\ C_2\left[a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right]\right\} - (b-x)^{n+1}$$

$$C_3\left[a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] - (x-a)^{n+1}$$

$$C_4\left[a + \frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ;\ f\right]$$

dir.

İspat:

$$B_{n}^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b-x)^{n-k} (x-a)^{k} f\left(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right)$$

olsun. n yerine n+1 yazarsak

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (b-x)^{n+1-k} (x-a)^{k} f\left(a + \frac{k+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\right)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafını (b-a) ile çarpıp bölersek

$$B_{n}^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{b-a}{(b-a)^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b-x)^{n-k} (x-a)^{k} f\left(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right)\right]$$

çıkar.

$$(b - a) = (x - a) + (b - x)$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-a)\,(b-x)^{n-k}\,(x-a)^{k}\,f(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(b-x)\,(b-x)^{n-k}\,(x-a)^{k}\,f(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))\right]$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafını düzenlersek

$$B_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-a)^{k+1}\,(b-x)^{n-k}\,f(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-a)^{k}\,(b-x)^{n-k+1}\,f(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))\right]$$

bulunur. Eşitliğin sağındaki birinci toplamda k yerine k-1 yazılırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}(x-a)^{k}\,(b-x)^{n-k+1}\,f(a+\frac{k-1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-a)^{k}\,(b-x)^{n-k+1}\,f(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))\right]$$

sonucu elde edilir. Birinci toplamda k = n+1 için olan değeri ve ikinci toplamda k = n+1 için olan değeri ayrı ayrı yazarsak

$$B_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}(x-a)^{k}\,(b-x)^{n-k+1}\,f(a+\frac{k-1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) + \right.$$

$$+ (x-a)^{n+1}\,f(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-a)^{k}\,(b-x)^{n-k+1}\,f(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) +$$

$$\left. + (b-x)^{n+1}\,f(a+\frac{\alpha}{n+\beta}(b-a))\right]$$

olur.

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (b-x)^{n+1-k} (x-a)^k f(a + \frac{k+\alpha}{n+1+\beta} (b-a))$$

olduğunu biliyoruz. Eşitliğin sağındaki birinci ve ikinci toplamda $k = 0$ ve $k = n+1$ için olan değerleri ayrı ayrı yazarsak

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \Bigg[\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (b-x)^{n+1-k} (x-a)^k f(a + \frac{k+\alpha}{n+1+\beta} (b-a)) +$$

$$+ (b-x)^{n+1} f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta} (b-a)) + (x-a)^{n+1} f(a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta} (b-a))$$

bulunur.

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k}$$
$$\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1} \binom{n}{k} \qquad (7)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi $B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x)$ ve $B_{n}^{\alpha,\beta}(f;x)$ genelleşmiş Bernstein polinomları arasındaki farkı bulalım

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_{n}^{\alpha,\beta}(f;x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \Bigg[\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (b-x)^{n+1-k} (x-a)^k f(a + \frac{k+\alpha}{n+1+\beta} (b-a)) +$$

$$+ (b-x)^{n+1} f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta} (b-a)) + (x-a)^{n+1} f(a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta} (b-a)) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} (x-a)^k (b-x)^{n-k+1} f(a + \frac{k-1+\alpha}{n+\beta} (b-a)) -$$

$$- (x-a)^{n+1} f(a + \frac{n+\alpha}{n+\beta} (b-a)) - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k+1} f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a)) -$$

$$- (b-x)^{n+1} f(a + \frac{\alpha}{n+\beta} (b-a)) \Bigg]$$

(7) eşitliklerini kullanırsak

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (b-x)^{n-k+1} (x-a)^k \Big[\frac{n+1}{n-k+1}$$

$$f(a + \frac{k+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) - \frac{k}{n-k+1} f(a + \frac{k-1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))\Big] +$$

$$+ (b-x)^{n+1} \Big[f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a))\Big] +$$

$$+ (x-a)^{n+1} \Big[f(a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a))\Big]$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafını düzenlersek

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = - \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (b-x)^{n-k+1} (x-a)^k \Big[\frac{k}{n-k+1}$$

$$f(a + \frac{k-1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - \frac{n+1}{n-k+1} f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) + f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))\Big] +$$

$$+ (b-x)^{n+1} \Big[-f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) + f(a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a))\Big] -$$

$$- (x-a)^{n+1} \Big[-f(a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) + f(a + \frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a))\Big]$$

Eşitliğin sağ tarafındaki birinci toplamda k yerine k+1 alırsak

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = - \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (b-x)^{n-k} (x-a)^{k+1} \Big[\frac{k+1}{n-k}$$

$$f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - \frac{n+1}{n-k} f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) + f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a))\Big] +$$

$$+ f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a))\Big] - (b-x)^{n+1} \Big[f(a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)) -$$

$$- f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a))\Big] - (x-a)^{n+1} \Big[f(a + \frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a)) -$$

$$- f(a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a))\Big]$$

elde edilir. Böylece

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = -\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(x-a)(b-x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}$$

$$(x-a)^{k+1}(b-x)^{n-k-1}\left[\frac{k+1}{n-k}f\left(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right) - \frac{n+1}{n-k}\right.$$

$$(x-a)^{k}(b-x)^{n-k-1}\left[\frac{k+1}{n-k}f\left(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right) - \right.$$

$$-\frac{n+1}{n-k}f\left(a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\right) + f\left(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right) -$$

$$-(b-x)^{n+1}\left[f\left(a+\frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)\right) - f\left(a+\frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\right)\right]$$

$$-(x-a)^{n+1}\left[f\left(a+\frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right) - f\left(a+\frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\right)\right] \qquad (8)$$

bulunur. Şimdi

$$\left[a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right]$$

bölünmüş farkını bulalım.

$$\left[a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] =$$

$$\frac{f\left(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right)}{\left(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a) - a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\right)\left(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a) - a - \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right)} +$$

$$+\frac{f\left(a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\right)}{\left(a+\frac{k+1}{n+1+\beta}(b-a) - a - \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right)\left(a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a) - a - \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right)} +$$

$$+\frac{f\left(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right)}{\left(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a) - a - \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\right)\left(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a) - a - \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\right)}$$

Böylece

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] =$$

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(n+\beta)^2(n+\beta+1)}{n+\beta-k-\alpha} f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - \right.$$

$$- \frac{(n+\beta)^2(n+\beta+1)^2}{(n+\beta-k-\alpha)(k+1+\alpha)} f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) +$$

$$\left. + \frac{(n+\beta)^2(n+\beta+1)}{k+1+\alpha} f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a))\right]$$

bulunur. Aynı çarpan parantezine alınırsa

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] =$$

$$\frac{(n+\beta)^2(n+\beta+1)}{(b-a)^2}\ \frac{1}{(n+\beta-k-\alpha)}\ \frac{1}{(k+\alpha+1)}\left[(k+\alpha+1)\ f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) \right.$$

$$\left. - (n+\beta+1)\ f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) + (n+\beta-k-\alpha)\ f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a))\right]$$

bulunur. Buradan

$$(k+\alpha+1)\ f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - (n+\beta+1)f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) + (n+\beta-k-\alpha).$$

$$.\ f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) = \frac{(b-a)^2(n+\beta-k-\alpha)(k+\alpha+1)}{(n+\beta)^2(n+\beta+1)}\ .$$

$$.\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] \quad (9)$$

elde edilir.

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = -\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(x-a)(b-x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}(x-a)^k$$

$$(b-x)^{n-k-1}\frac{1}{n-k}\Bigg[(k+1)\ f\Big(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) -$$

$$-(n+1)\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big) + (n-k)\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) +$$

$$+\alpha\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big)\Bigg] - \alpha\ f\Big(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) - \beta\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big)$$

$$+\beta\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) - (\beta-\alpha)\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) -$$

$$-(b-x)^{n+1}\Bigg[f\Big(a+\frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) - f\Big(a+\frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big)\Bigg] -$$

$$-(x-a)^{n+1}\Bigg[f\Big(a+\frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) - f\Big(a+\frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big)\Bigg]$$

olduğunu biliyoruz. (9) eşitliği kullanılırsa

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = -\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(x-a)(b-x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}(x-a)^k$$

$$(b-x)^{n-k-1}\frac{1}{n-k}\Bigg[(k+\alpha+1)\ f\Big(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) -$$

$$-(n+\beta+1)\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big) - (n+\beta-k-\alpha)\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big)\Bigg] -$$

$$-\alpha\ f\Big(a+\frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) + \beta\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big) -$$

$$-(\beta-\alpha)\ f\Big(a+\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) - (b-x)^{n+1}\Bigg[f\Big(a+\frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) -$$

$$-f\Big(a+\frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big)\Bigg] - (x-a)^{n+1}\Bigg[f\Big(a+\frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a)\Big) -$$

$$-f\Big(a+\frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\Big)\Bigg]$$

elde edilir. Düzenlersek

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_{n}^{\alpha,\beta}(f;x) = - \frac{1}{(b-a)^{n+1}} (x-a)(b-x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (x-a)^{k}$$

$$(b-x)^{n-k-1} \frac{1}{n-k} \frac{(b-a)^{2}(n+\beta-k-\alpha)(k+\alpha+1)}{(n+\beta)^{2}(n+\beta+1)}$$

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a) \ , \ a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta} (b-a) \ , \ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta} (b-a) \ ; \ f\right] -$$

$$- \alpha \ f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a)) + \beta \ f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta} (b-a)) -$$

$$- (\beta-\alpha) \ f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta} (b-a)) - (b-x)^{n+1} \left[f(a + \frac{\alpha}{n+\beta} (b-a)) -\right.$$

$$\left.- f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta} (b-a))\right] - (x-a)^{n+1} \left[f(a + \frac{n+\alpha}{n+\beta} (b-a)) -\right.$$

$$\left.- f(a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta} (b-a))\right]$$

çıkar. Buradan

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_{n}^{\alpha,\beta}(f;x) = - \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \frac{(x-a)(b-x)}{(n+\beta)^{2}(n+\beta+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (x-a)^{k} (b-x)^{n-k-1} \frac{1}{n-k} (n+\beta-k-\alpha)(k+\alpha+1)$$

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a) \ , \ a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta} (b-a) \ , \ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta} (b-a) \ ; \ f\right] +$$

$$+ \frac{1}{(b-a)^{n+1}} (x-a)(b-x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (x-a)^{k} (b-x)^{n-k-1} \frac{1}{n-k}$$

$$f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta} (b-a)) + \beta \ f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta} (b-a)) +$$

$$+ (\beta-\alpha) \ f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta} (b-a)) -$$

$$- (b-x)^{n+1}\left[f(a + \frac{\alpha}{n+\beta} (b-a)) - f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta} (b-a))\right] -$$

$$- (x-a)^{n+1}\left[f(a + \frac{n+\alpha}{n+\beta} (b-a)) - f(a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta} (b-a))\right]$$

elde edilir.

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right]$$

bölünmüş farkını hesaplayalım.

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] = \frac{f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))}{a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ a - \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)}$$

Düzenlersek

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] =$$

$$\frac{n+\beta}{b-a}\left[f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))\right]$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki parantez içindeki ifadeyi yalnız bırakırsak

$$f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) =$$

$$\frac{b-a}{n+\beta}\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a))\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] \qquad (10)$$

bulunur. Şimdi

$$\left[a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right]$$

bölünmüş farkını hesaplayalım.

$$\left[a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] =$$

$$\frac{f(a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a))}{a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a) - a - \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)}\ f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a))$$

İfade düzenlenirse

$$\left[a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] =$$

$$\frac{(n+\beta)(n+\beta+1)}{(b-a)\alpha}\left[f(a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\right] \qquad (11)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki parantez içindeki ifadeyi yalnız bırakırsak

$$f(a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)) =$$

$$\frac{(b-a)\alpha}{(n+\beta)(n+\beta+1)}\left[a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right]$$

bulunur, (10) ve (11) eşitlikleri kullanılırsa

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = -\frac{1}{(b-a)^{n-1}}\frac{(x-a)(b-x)}{(n+\beta)^2(n+\beta+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(x-a)^k(b-x)^{n-k-1}\frac{n}{(k+1)}\frac{1}{n-k}(n+\beta-k-\alpha)(k+\alpha+1)$$

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a)\ ,\ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)\ ;\ f\right] +$$

$$+\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(x-a)(b-x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(x-a)^k(b-x)^{n-k-1}\frac{n}{(k+1)}\frac{1}{n-k}$$

$$\alpha\left[f(a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a))\right] + \beta\left[f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a)) -\right.$$

$$\left.- f(a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a))\right] - (b-x)^{n+1}\left[f(a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a))\right] -$$

$$- (x-a)^{n+1}\left[f(a + \frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a)) - f(a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a))\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$B_{n+1}^{\alpha,\beta}(f;x) - B_{n}^{\alpha,\beta}(f;x) = - \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \frac{(x-a)(b-x)}{(n+\beta)^{2}(n+\beta+1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-a)^{k} (b-x)^{n-k-1} \frac{n}{(k+1)(n-k)} (n+\beta-k-\alpha)(k+\alpha+1)$$

$$\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a) \ , \ a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a) \ , \ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a) \ ; \ f\right] -$$

$$- \frac{1}{(b-a)^{n+1}} (x-a)(b-x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-a)^{k} (b-x)^{n-k-1} \frac{n}{(k+1)(n-k)}$$

$$\left\{\alpha \frac{b-a}{n+\beta}\left[a + \frac{k+\alpha}{n+\beta}(b-a) \ , \ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a) \ ; \ f\right] + \right.$$

$$\left. + \beta \frac{(k+1+\alpha)(b-a)}{(n+\beta)(n+\beta+1)}\left[a + \frac{k+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a) \ , \ a + \frac{k+1+\alpha}{n+\beta}(b-a) \ ; \ f\right]\right\} -$$

$$- (b-x)^{n+1} \frac{(b-a)\alpha}{(n+\beta)(n+\beta+1)}\left[a + \frac{\alpha}{n+1+\beta}(b-a) \ , \ a + \frac{\alpha}{n+\beta}(b-a) \ ; \ f\right] -$$

$$- (x-a)^{n+1} \frac{(b-a)(\alpha-\beta)}{(n+\beta)(n+\beta+1)}\left[a + \frac{n+\alpha}{n+\beta}(b-a) \ , \ a + \frac{n+1+\alpha}{n+1+\beta}(b-a) \ ; \ f\right]$$

bulunur. Buradan istenen elde edilir.

Sonuç 3.1.2. f fonksiyonunun ikinci ve üçüncü bölünmüş farkları negatif ise fonksiyon konkav dolayısıyla Bernstein polinomu monoton artan, pozitif ise fonksiyon konveks dolayısıyla Bernstein polinomu monoton azalandır.

4. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜLME YÖNTEMLERİ

4.1. Giriş

$$y' = f(x,y) \tag{12}$$

diferensiyel denklemini gözönüne alalım.

$$y(x_0) = y_0 \tag{13}$$

başlangıç şartı verilsin. Aşağıda verilen (y_n) fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$y(x_0) = y_0$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{a+x_0}^{x} B_n(s;f[s;y_{n-1}(s)])ds \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

$$B_n(x,\varphi) = \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^{n} C_n^i \; \varphi\left(a+ x_0 + \frac{ih}{n}\right) \left(x - (a + x_0)\right)^i \left(a + x_0 + h - x\right)^{n-i} \tag{15}$$

Burada $B_n(x,\varphi)$, φ fonksiyonuna ve $[a+x_0 \; , \; a+x_0+h]$ aralığına karşı gelen Bernstein polinomudur. Gösterelim ki bazı şartlar dahilinde (14) dizisi $[a+x_0 \; , \; a+x_0+h]$ aralığında (12) diferensiyel denkleminin y(x) çözümüne düzgün yakınsar.

ŞARTLAR: Kabul edelimki (12) diferensiyel denklemdeki f(x,y) fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

α) f(x,y), $a + x_0 \leq x \leq a + x_0 + m$, $y_0 - n \leq y \leq y_0 + n$, $m, n > 0$ eşitsizlikleriyle tanımlanmış bir D bölgesinde süreklidir ve bu bölgede y değişkenine göre L sabiti ile Lipschitz şartını sağlar, yani

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1-y_2|$$

dir.

β) Kabul edelimki

$$M = \max_{(D)} |f(x,y)| \quad , \quad h \leq \min\left\{m \, , \frac{n}{m}\right\} \quad , \quad h < \frac{2}{L}$$

eşitsizliklerini sağlayan pozitif sayı olsun.

γ) Kabul edelimki D*, $a + x_0 < x < a + x_0 + h$, $y_0 - n < x < y_0 + n$ eşitsizlikleriyle tanımlanan bir bölgedir. f(x,y) fonksiyonunun D* bölgesinde birinci ve ikinci basamaktan sürekli kısmi türevleri vardır. Aşağıda (12) diferensiyel denkleminin (13) şartını sağlayan çözümünü y(x) ile göstereceğiz.

Teorem 4.1.1. α, γ, β şartları dahilinde (14) dizisi $[a + x_0, a + x_0 + h]$ aralığında y(x) çözümüne düzgün yakınsar.

İspat:

1) $[a+x_0 \, , \, a+x_0+h]$ aralığında keyfi x için n.ci ardışık yaklaşım var ise

$$y_0 - n \leq y(x) \leq y_0 + n \quad , \quad n = 1, 2, ... \tag{16}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten de n = 1 için $\xi \in (a + x_0, a + x_0 + h)$ olmak üzere

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| y_0 + \int_{a+x_0}^{x} B_1\left(s;f\left[s;y_0(s)\right]\right) ds - y_0 \right|$$

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{a+x_0}^{x} B_1\left(s;f\left[s;y_0(s)\right]\right) ds \right| \leq \int_{a+x_0}^{x} \left|B_1\left(s;f\left[s;y_0(s)\right]\right) ds\right|$$

$$|y_{1(x)} - y_{0(x)}| \leq \left(x - (a + x_0)\right) \left|B_1 \left(\xi;f\left(s;y_0(s)\right)\right)\right|$$

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \left(x - (a + x_0)\right) |B_1 \ (s;M)|$$

$$= M\left(\left(x - (a + x_0)\right)\right) \leq Mh$$

elde edilir. Böylece

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq h$$

elde edilir. Burada belirli integraller için orlama değer teoremi kullanıldı. Kabul edelimki n.ci ardışık yaklaşma mevcut olsun ve $[a + x_0, a + x_0 + h]$ aralığında (16) eşitsizlikleri sağlansın.

Ortalama değer teoreminden

$$|y_{n+1}(x) - y_0(x)| \leq \int_{a+x_0}^{x} |B_1 \ (s;f[s;y_n(s)])| \ ds = |B_{n+1} \ (\xi;f[s;y_n])| \int_{a+x_0}^{x} ds$$

$$= |B_{n+1} \ (\xi;f[s;y_n])| \ (x - (a + x_0)) \leq M\left(x - (a + x_0)\right) \leq n$$

$$x \in \left[a + x_0 \ , \ a + x_0 + h\right]$$

bulunur. Tümevarım yöntemine göre (16) eşitsizlikleri $[a + x_0, a + x_0 + h]$ aralığında keyfi doğal n için vardır.

2) (14) dizisinin yakınsaklığı

$$y_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)] \tag{17}$$

serisinin yakınsaklığına denktir. Gösterelim ki $[a + x_0, a + x_0 + h]$ aralığında bu seri düzgün yakınsaktır. Bu serinin genel terimi aşağıdaki gibidir:

$$\in_n(x) = y_{n+1}(x) - y_n(x) \le \int_{a+x_0}^{x} |B_{n+1}(s;f[s;y_n(s)])| - |B_n(s;f[s;y_{n-1}(s)])| \, ds$$

$$\in_n(x) \le \int_{a+x_0}^{x} |B_{n+1}(s;f[s;y_n(s)]) - B_n(s;f[s;y_n(s)])| \, ds \, +$$

$$+ \int_{a+x_0}^{x} |B_n(s;f[s;y_n(s)]) \, B_n(s;f[s;y_{n-1}(s)])| \, ds \qquad (18)$$

Arama (1957)'daki (1.2) formülünü ve T. Popoviciu (1953) tarafından ispatlanmış ortalama değer teoremini kullanırsak birinci integrali aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$I_1(x) = \int_{a+x_0}^{x} |B_{n+1}(s;f[s;y_n(s)])| - |B_n(s;f[s;y_n(s)])|$$

$$I_1(x) \le \int_{a+x_0}^{x} \frac{(s - (a + x_0))\,(a + x_0 + h - s)}{2n(n+1)} \max_{D^*} \left| \frac{d^2}{dx^2} f[x,y_n(x)] \right| ds \qquad (19)$$

Aşağıdaki işaretleri kabul edelim.

$$M_1 = \max_{(D^*)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$$

$$M_2 = \max_{(D^*)} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

$$M_{11} = \max_{(D^*)} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$$

$$M_{12} = \max_{(D^*)} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|$$

$$M_{22} = \max_{(D^*)} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|$$

Lorenz (1953)'deki

$$\frac{d}{dx} B_n(x,\varphi) = \frac{1}{h^{n-1}} \sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^{i} \left[a + x_0 + \frac{ih}{n}, \; a + x_0 + \frac{(i+1)h}{n}; \varphi\right]$$

$$(x - (a + x_0))^i \, (a + x_0 + h - x)^{n-i}$$

formülünü kullanırsak [0,1] aralığındakine benzer olarak

$$y_n(x) = \int_{a+x_0}^{x} B_n(;f[s,y_{n-1}(s)])\, ds$$

$$[y_n(x)]_x \leq M$$

$$[y_n(x)]_{xx} \leq M$$

olduğundan

$$\max_{(D^*)} \left| \frac{d^2}{dx^2} f[x,y_n(x)] \right| \leq M_{11} + M_{12} + M\left(2M_{12} + M_2^2 + MM_{22}\right) = N_2$$

elde ederiz. Buradan

$$I_1(x) \leq \frac{N_2}{2n(n+1)} \int_{a+x_0}^{x} \left(s - (a + x_0)\right)\left(a + x_0 + h - s\right) ds$$

$$I_1(x) \leq \frac{hN_2}{4n(n+1)} \left[x - (a + x_0)\right]^2 \tag{21}$$

elde edilir. (21) deki ikinci integralin altında Lipschitz eşitsizliğini kullanırsak

$$I_2(x) = \int_{a+x_0}^{x} \left|B_n(s;f[s,y_n(s)])\right| - B_n(s;f[s,y_{n-1}(s)])\, ds$$

$$I_2(x) \leq \int_{a+x_0}^{x} B_n(s;L|y_n(s) - y_{n-1}(s)|)\, ds$$

$$I_2(x) \leq \int_{a+x_0}^{x} B_n(s;B_n(s;\varepsilon_{n-1}(s)))\, ds \tag{22}$$

buluruz. (18), (19), (22) den

$$\varepsilon_n(x) \leq \frac{h(x - (a + x_0))^2}{4n(n + 1)} N_2 + L \int_{a+x_0}^{x} B_n(;\varepsilon_{n-1}(s))\, ds \ , \ n = 1,2,... \qquad (23)$$

elde edilir.

$$\varepsilon_0(x) \leq M(x - (a + x_0)) = \delta_0(x)$$

dir. (23)'ü kullanırsak

$$\varepsilon_1(x) \leq \frac{h(x - (a + x_0))^2}{4.1.2} N_2 + L \int_{a+x_0}^{x} B_1(;\varepsilon_0(s))\, ds$$

(15) kullanılırsa

$$B_1(s,\varepsilon_0(s)) = \frac{1}{h} [\varepsilon_0(a + x_0)\, (a + x_0 + h - s) + \varepsilon_0(a + x_0 + h)\, (s - (a + x_0))]$$

bulunur.

$$\varepsilon_0(x) \leq M(x - a + x_0)$$

idi. Buradan

$$\varepsilon_0(a + x_0) = 0$$

bulunur. O halde

$$B_1(s,\varepsilon_0(s)) = \frac{1}{h} \varepsilon_0\, (a + x_0 + h)\, (s - (a + x_0))$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa

$$\varepsilon_1(x) \leq \frac{h(x - (a + x_0))^2}{4.1.2} N_2 + \frac{L}{h} \int_{a+x_0}^{x} \varepsilon_0(a + x_0 + h)\, (s - (a + x_0))ds$$

$$\varepsilon_1(x) \leq \frac{h(x - (a + x_0))^2}{4.1.2} N_2 + \frac{L}{h} \varepsilon_0(a + x_0 + h) \frac{(x - (a + x_0))^2}{2} \qquad (24)$$

elde edilir.

$$\varepsilon_0(a + x_0 + h) = Mh$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\varepsilon_1(x) \le \frac{h\big(x - (a + x_0)\big)^2}{4.1.2} N_2 + \frac{1}{h}\frac{LMh}{2}\big(x - (a + x_0)\big)^2$$

$$\varepsilon_1(x) \le \left[\frac{hN_2}{4.1.2} + \frac{LMh}{2}\right]\big(x - (a + x_0)\big)^2 = \delta_1(x)$$

elde edilir.

$$\varepsilon_2(x) \le \frac{h\big(x - (a + x_0)\big)^2}{4.2.3} N_2 + L\int_{a+x_0}^{x} B_2\big(s;\delta_1(s)\big)\, ds$$

olduğu açıktır. $\delta_1(x)$ ifadesinin $[a+x_0\ ,\ a+x_0+h]$ aralığında birinci basamaktan konveks olduğunu ve Popoviciu (1953)'deki teorem 1'i kullanırsak

$$0 \le B_2(s;\delta_1(s)) \le B_1(s;\delta_1(s))$$

buluruz. Buna göre

$$\varepsilon_2(x) \le \frac{h\big(x - (a + x_0)\big)^2}{4.2.3} N_2 + L\int_{a+x_0}^{x} B_1\big(s;\delta_1(s)\big)\, ds$$

çıkar. (11)'den

$$B_1\big(s;\delta_1(s)\big) = \frac{1}{h}\Big[\delta_1(a+x_0)(a+x_0+h-s) + \delta_1(a+x_0+h)(s-(a+x_0))\Big]$$

dir.

$$\delta_1(s) = \left[\frac{h}{4.1.2} N_2 + \frac{LM}{2}\right](s-(a+x_0))^2$$

olduğunu biliyoruz.

$$\delta_1(a + x_0) = 0$$

dır. Buradan

$$B_1\left(s;\delta_1(s)\right) = \frac{1}{h}\ \delta_1(a+x_0+h)\ (s-(a+x_0))$$

olduğu görülür. Böylece

$$\varepsilon_2(x) \leq \frac{h\left(x - \left(a + x_0\right)\right)^2}{4.2.3}\ N_2 + \frac{L}{h}\int_{a+x_0}^{x} \delta_1(a+x_0+h)\ (s-(a+x_0))\ ds$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\varepsilon_2(x) \leq \frac{h\left(x - \left(a + x_0\right)\right)^2}{4.2.3}\ N_2 + \frac{L}{h}\ \delta_1(a+x_0+h)\ \frac{(x-(a+x_0))^2}{2}$$

$$\varepsilon_2(x) \leq \left[\frac{h}{4.2.3}\ N_2 + \frac{L}{2}\ \frac{\delta_1(a+x_0+h)}{h}\right]\ (x-(a+x_0))^2 = \delta_2(x)$$

çıkar. Benzer şekilde

$$\varepsilon_3(x) \leq \frac{h\left(x - \left(a + x_0\right)\right)^2}{4.3.4}\ N_2 + L\int_{a+x_0}^{x} B_3(s;\delta_2(s))\ ds$$

$$\varepsilon_3(x) \leq \frac{h\left(x - \left(a + x_0\right)\right)^2}{4.3.4}\ N_2 + L\int_{a+x_0}^{x} B_1(s;\delta_2(s))\ ds$$

$$\varepsilon_3(x) \leq \left[\frac{h}{4.3.4}\ N_2 + \frac{L}{2}\ \frac{\delta_2(a+x_0+h)}{h}\right]\ (x-(a+x_0))^2 = \delta_3(x)$$

bulunur. Devam edersek

$$\varepsilon_n(x) \leq \left[\frac{h}{4n(n+1)}\ N_2 + \frac{L}{2}\ \frac{\delta_{n-1}}{(a+x_0+h)h}\right]\ (x-(a+x_0))^2 = \delta_n(x) \qquad (25)$$

elde edilir. Buradan

$$\delta_n(a+x_0+h) = \frac{Lh}{2}\,\delta_{n-1}(a+x_0+h) + \frac{h^3}{4n(n+1)}\,N_2$$

$$\delta_0(a+x_0+h) = Mh$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler

$$\alpha = \frac{LH}{2} \quad , \quad \beta = \frac{h^3}{4}\,N_2$$

olmak üzere

$$\delta_n = \alpha\delta_{n-1} + \frac{\beta}{n(n+1)} \quad , \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

$$\delta_0 = Mh \tag{26}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikleri kullanırsak

$$\alpha = \frac{Lh}{2} \leq 1$$

olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(a+x_0+h)$ serisi yakınsaktır ve

$$S = \frac{\delta_0+\beta}{1-\alpha}$$

$$S = \frac{Mh + \frac{h^3}{4}\,N_2}{1 - \frac{Lh}{2}}$$

dır. Şimdi bunun doğru olduğunu gösterelim.

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(a+x_0+h)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\delta_n = \alpha\, \delta_{n-1} + \frac{\beta}{n(n+1)}$$

olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S = \frac{\delta_0+\beta}{1-\alpha}$$

bulunur. (25)'den görülür ki $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(a+x_0+h)$ serisi $[a+x_0\ ,\ a+x_0+h]$ aralığında $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(x)$ fonksiyon serisi için Majorant seridir. Dolayısıyla (14) fonksiyon dizisi bu aralıkta y(x) fonksiyonuna mutlak ve düzgün yakınsaktır $n \to \infty$ iken (14) eşitliğinden

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s,y(s)]\, ds$$

buluruz. Bu da gösteriyorki y(x) fonksiyonu (12) denkleminin (13) şartını sağlayan çözümüdür.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ SASZ OPERATÖRÜ

5.1. Giriş

Bernstein polinomlarının [0,∞] aralığında benzeri olan Sasz operatörü

$$S_n(f,x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$$

biçimindedir. $n \to \infty$ iken $a > 0$ keyfi bir sayı olmak üzere [0,a] aralığında $Sn(f;x) \rightrightarrows f(x)$ dir, burada f, [o,a] da sürekli ve [0,∞] aralığında sınırlı fonksiyondur.

Bu operatörlerin Stancu tipinde genelleşmesini

$$P_n^f(x) = e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

göz önüne alalım. $\alpha = \beta = 0$ olduğunda

$$S_n(f,x) = P_n^f(x)$$

olmaktadır.

Lemma 5.1.1. $f^r(x)$ var, $k > 0$ için $x \to \infty$ iken

$$f^r(x) = O(x^r)$$

ve $x = \xi$ noktasında $f^r(x)$ sürekli ise $P_u^r(x)$, $x = \xi$ de düzgün olarak $f^r(x)$'e yaklaşır (Butzer 1954).

Lemma 5.1.2.

$$\sum_{|\nu - u|} (\nu - u)^2 \frac{u^\nu}{\nu!} = ue^u$$

dır (Butzer 1954).

Lemma 5.1.3. $0 < \delta < 1$ için

$$\sum_{|\nu - u| > \delta u} e^u \frac{u^\nu}{\nu!} = O\left\{\exp\left(\frac{-\delta^2 u}{3}\right)\right\} \ , \ u \to \infty \tag{27}$$

dır (Butzer 1954).

Teorem 5.1.4. $f(x)$, $\forall R > 0$ için $0 \leq x \leq R$ aralığında sınırlı, $x \to \infty$ iken $f(x) = O(x^k)$ ve $f'(\xi)$ nin var olduğu herhangi bir ξ noktasında

$$P_n^f(x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(nx)^\nu}{\nu!} \tag{28}$$

ise

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = \frac{d}{d\xi} f(\xi) \tag{29}$$

dir.

İspat: (28)'den

$$P_n^f(\xi) = e^{-n\xi} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(n\xi)^\nu}{\nu!}$$

dir. Her iki tarafın ξ'e göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = - ne^{-n\xi} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(n\xi)^\nu}{\nu!} + e^{-n\xi} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{n(n\xi)^{\nu-1}\nu}{\nu!}$$

elde edilir. Sadeleşme yapılırsa

$$\frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = - ne^{-n\xi}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(n\xi)^\nu}{\nu!} + e^{-n\xi}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{n(n\xi)^{\nu-1}}{(\nu - 1)!}$$

çıkar. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamda ν yerine $\nu+1$ alınırsa

$$\frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = - ne^{-n\xi}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(n\xi)^\nu}{\nu!} + ne^{-n\xi}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu + \alpha + 1}{n + \beta}\right) \frac{(n\xi)^\nu}{(\nu)!}$$

bulunur. Aynı toplam altında toplarsak

$$\frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = ne^{-n\xi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{\nu + \alpha + 1}{n + \beta}\right) - f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right)\right] \frac{(n\xi)^\nu}{(\nu)!}$$

elde edilir.

$$n\left[f\left(x + \frac{1}{n + \beta}\right) - f(x)\right] \to f'(x)$$

olduğundan türev var ve $f'(0)$ var ise $\xi = 0$ da (29) bağıntısı vardır. $\xi > 0$ olsun.

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)\, f'(\xi) + \epsilon\,(x)\,(x - \xi)$$

dır.$|x - \xi| < \delta$ için $|\epsilon(x)| \leq \eta(\delta)$ ve $\delta \to 0$ için $\eta(\delta) \to 0$ olmak üzere

$$p(x) = f(\xi) + (x - \xi)\, f'(\xi)$$

$$g(x) = (x - \xi)\, \epsilon\,(x) \qquad (30)$$

olsun.

$$g(\xi) = g'(\xi) = 0$$

dır.

$$\frac{d}{dx} P_n^f(x) = \frac{d}{dx} P_n^p(x) = \frac{d}{dx} P_n^g(x)$$

olduğunu gösterelim.

$$P_n^p(x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} p\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(nx)^{\nu}}{(\nu)!}$$

olsun. $P_n^p(x)$'in x'e göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx} P_n^p(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} p\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(nx)^{\nu}}{(\nu)!}\right]$$

$$\frac{d}{dx} P_n^p(x) = - ne^{-n\xi} \sum_{\nu=0}^{\infty} p\left(\frac{\nu + 1 + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(nx)^{\nu}}{(\nu)!}$$

$$e^{-nx} \sum_{\nu=1}^{\infty} p\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(nx)^{\nu}}{(\nu)!}$$

olduğu gösterilmişti. $p(x) = f(\xi) + (x - \xi) f'(\xi)$ değeri yerine konursa

$$\frac{d}{dx} P_n^p(x) = ne^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[f(\xi)\left(\frac{\nu + 1 + \alpha}{n + \beta} - \xi\right) f'(\xi) - \left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta} - \xi\right) f'\right] \frac{(n\xi)^{\nu}}{(\nu)!}$$

elde edilir. Böylece.

$$\frac{d}{dx} P_n^p(x) = \frac{n}{n + \beta}\, e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} f'(\xi) \frac{(nx)^{\nu}}{\nu!}$$

bulunur.

$$\frac{d}{dx} P_n^g(x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} g\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) \frac{(nx)^{\nu}}{\nu!}$$

idi. $g(x) = (x - \xi) \in (x)$ yazılır ve $p_g^n(x)$ in x'e göre türevi alınırsa eşitliğin sağındaki ikinci toplamda ν yerine $\nu+1$ alınırsa

$$\frac{d}{dx} P_n^g(x) = -ne^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta} - \xi\right) \in_{\nu}(n) \frac{(nx)^{\nu}}{\nu!} + ne^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu+\alpha+1}{n+\beta} - \xi\right) \in_{\nu}(n) \frac{(nx)^{\nu}}{\nu!}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d}{dx}P_n^g(x) = \frac{n}{n+\beta} e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \in_\nu (n) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

çıkar.

$$\frac{d}{dx}P_n^p(x) + \frac{d}{dx}P_n^g(x) = \frac{n}{n+\beta} e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[f'(\xi) + \in_\nu (n)\right] \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

dir.

$$\frac{d}{dx}P_n^f(x) = ne^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[f(\frac{\nu+1+\alpha}{n+\beta})\ f(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta})\right] \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

idi. Şimdi $f(\frac{\nu+1+\alpha}{n+\beta})$ ve $f(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta})$ değerlerini bulalım.

$$f(\frac{\nu+1+\alpha}{n+\beta}) = f(\xi) + (\frac{\nu+1+\alpha}{n+\beta} - \xi)\ f'(\xi) + \in_\nu (n)\ (\frac{\nu+1+\alpha}{n+\beta} - \xi)$$

$$f(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta}) = f(\xi) + (\frac{\nu+\alpha}{n+\beta} - \xi)\ f'(\xi) + \in_\nu (n)\ (\frac{\nu+\alpha}{n+\beta} - \xi) \qquad (31)$$

dir. Buradan

$$\frac{d}{dx}\ P_n^f(x) = \frac{n}{n+\beta} e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} [f'(\xi) \in_\nu (n)] \frac{nx^\nu}{\nu!}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{d}{dx}\ P_n^f(x) = \frac{d}{dx}\ P_n^p(x) + \frac{d}{dx}\ P_n^g(x)$$

olduğu gösterilmiş oldu. Lemma 4.1.1. den teoremimizi ispatlamak için sadece $x \to \infty$ için sağ taraftaki ikinci terimin sıfıra yaklaşdığını göstermemiz yeterlidir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{d\xi}\ P_n^p(\xi) = \frac{d}{d\xi}\ f(x)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{d\xi} P_n^{\xi}(\xi) = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$P_n^{\xi}(x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta} - \xi\right) \epsilon_\nu(n) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

idi. Her iki taraftan x'e göre türev alınırsa

$$\frac{d}{dx}P_n^{\xi}(x) = -ne^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta} - \xi\right) \epsilon_\nu(n) \frac{(nx)^\nu}{\nu!} + \frac{ne^{-nx}}{nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu\left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta} - \xi\right) \epsilon_\nu(n) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

bulunur. Aynı toplam altında toplarsak

$$P_n^{\xi}(x) = \frac{e^{-nx}}{x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\nu\left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta} - \xi\right) - \left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta} - \xi\right) nx\right] \epsilon_\nu(n) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamın içindeki parantezi açık bir şekilde yazarsak

$$\frac{d}{dx}P_n^{\xi}(x) = \frac{e^{nx}}{x(n+\beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\nu(\nu+\alpha)-\xi\nu(n+\beta)-nx(\nu+\alpha)+\xi nx(n+\beta)\right] \epsilon_\nu(n) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

$$\frac{d}{dx}P_n^{\xi}(x) = \frac{e^{nx}}{x(n+\beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\nu^2+\nu\alpha-\xi\nu n-\xi\nu\beta-nx\nu+nx\alpha+\xi n^2x+\xi xn\beta\right] \epsilon_\nu(n) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

elde edilir. x yerine ξ alınırsa

$$\frac{d}{d\xi}P_n^{\xi}(\xi) = \frac{e^{n\xi}}{\xi(n+\beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\nu^2+\nu\alpha-\xi\nu n-\xi\nu\beta-n\xi\nu+n\xi\alpha+\xi^2 n^2+\xi^2 n\beta\right] \epsilon_\nu(n) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\frac{d}{d\xi}P_n^{\xi}(\xi) = \frac{e^{n\xi}}{\xi(n+\beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_\nu(n) \left[(\nu-\xi n)^2 + (\nu-\xi n)(\alpha-\xi\beta)\right] \frac{(n\xi)^\nu}{\nu!}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki toplamı üç ayrı toplam şeklinde yazılırsa

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \in_{\nu}(n) \left[(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)(\alpha - \xi\beta)\right] \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!}$$

$$= \sum_{|h-t\xi| \le t\delta} \left[\in_{\nu}(n)(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)(\alpha - \xi\beta)\right] \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!} +$$

$$+ \sum_{|t\xi-h| \ge t\delta} \left[\in_{\nu}(n)(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)(\alpha - \xi\beta)\right] \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!} +$$

$$+ \sum_{|h-t\xi| \ge t\delta} \left[\in_{\nu}(n)(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)(\alpha - \xi\beta)\right] \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!} +$$

$$= T_1 + T_2 + T_3$$

elde edilir. Burada $h = \nu + \alpha$, $t = n + \beta$ dır. Şimdi

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} |T_1|$$

değerini bulalım.

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} |T_1| \le \frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} \sum_{|h-t\xi| \le t\delta} |\in_{\nu}(n)| \left|(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)(\alpha - \xi\beta)\right| \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!} \tag{32}$$

Buradan

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} |T_1| \le \frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} \sum_{|h-t\xi| \le t\delta} |\in_{\nu}(n)| \left|(\nu - \xi n)^2 + (1 + \alpha - \xi\beta)\right| \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!}$$

çıkar. $|\in_{\nu}(x)| \le \eta(\delta)$ olduğundan

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} |T_1| \le \frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} (1 + \alpha - \xi\beta)\, \eta(\delta) \sum_{|h-t\xi| \le t\delta} (\nu - \xi n)^2 \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!}$$

Lemma 4.1.2. den

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} |T_1| \le \frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)} \eta(\delta)\, (1 + \alpha - \xi\beta)\, \xi n e^{n\xi}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n+\beta)} |T_1| = O(\eta(\delta))$$

bulunur.

$$\sup_{x \leq \xi} |f(x)| = M(\xi)$$

olsun

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi) f(\xi) + \in_{\nu}(n)(x - \xi)$$

idi.

$$x = \frac{\nu + \alpha}{n + \beta}$$

yazılırsa

$$f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) = f(\xi) + \left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta} - \xi\right) f'(\xi) + \in_{\nu}(n) \left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta} - \xi\right)$$

çıkar.

$$\in_{\nu}(n)\left[\nu+\alpha-\xi(n+\beta)\right](\nu-\xi n) = -\left(\nu+\alpha-\xi(n+\beta)\right)(\nu-\xi n)f' f(\xi) +$$

$$+ (n+\beta)(\nu-\xi n)\left[f\left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta}\right) - f(\xi)\right] \tag{33}$$

eşitliğini gözönüne alalım.

$$\sup_{x} |f(x)| = M(\xi)$$

idi.

$$|T_2| \leq \sum_{(t\xi-h) \geq t\delta} \left|\in_{\nu}(n)(\nu - \xi n)\left[\nu + \alpha - \xi(n + \beta)\right]\right| \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!}$$

olduğu biliniyor. (32) eşitliği gözönüne alınırsa

$$|T_2| \leq \sum_{(t\xi-h) \geq t\delta} \left|(\nu-\xi n)\,(n+\beta)\left[f\left(\frac{\nu+\alpha}{n+\beta}\right) - f(\xi) - (\nu+\alpha-\xi(n-\beta))\,(\nu-\xi n)\,f^{n}\right]\right| \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!}$$

elde edilir (33) eşitliğinden

$$|T_2| \leq \sum_{(t\xi-h) \geq t\delta} \left[(n+\beta)\,(\xi\beta-\alpha)\,M(\xi) + (\xi\beta-\alpha)\,(\xi(n+\beta) - (\nu-\alpha)\right]|f'(\xi)|\,\frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!}$$

çıkar. Düzenlenirse

$$|T_2| \leq (n + \beta)\,(\xi\beta - \alpha)\left[M(\xi) + \delta\,|f'(\xi)|\right] \sum_{(t\xi-h) \geq t\delta} \frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!}$$

bulunur. Lemma 4.1.2. den

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n+\beta)}|T_2| \leq \frac{\xi\beta - \alpha}{\xi}\,\xi\left[M(\xi) + \delta\,|f'(\xi)|\,(n+\beta)\,\xi\right] \sum_{(t\xi-h) \geq t\delta} e^{-n\xi}\,\frac{(n\xi)^{\nu}}{\nu!} \tag{34}$$

bulunur. Lemma 4.1.3. den

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n + \beta)}|T_2| \leq O\left((n + \beta)\,\exp\left(-\frac{\delta^2(n + \beta)}{3\xi}\right)\right)$$

çıkar. Şimdi

$$\epsilon_{\nu}(n)\left[(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)\,(\alpha - \xi\beta)\right](\nu - \xi n)$$

ifadesini hesaplayalım.

$$\epsilon_{\nu}(n)\left[(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)\,(\alpha - \xi\beta)\right](\nu - \xi n) =$$

$$(n + \beta)\,(\nu - \xi n)\left[f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right) - f(\xi)\right] - (\nu - \xi n)\,(\nu + \alpha - \xi(n + \beta))\,f \tag{35}$$

Buradan

$$\epsilon_{\nu}(n)\left[(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)\,(\alpha - \xi\beta)\right](\nu - \xi n) \leq (n + \beta)\,(\nu - \alpha)\,f\left(\frac{\nu + \alpha}{n + \beta}\right)$$

olduğu kolayca gösterilir. $f(x) = O(x^k)$ olduğundan

$$\in_\nu(n)\left[(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)(\alpha - \xi\beta)\right](\nu - \xi n) \leq M(n + \beta)(\nu + \alpha)\frac{(\nu + \alpha)^k}{(n + \beta)^k}$$

dır. Böylece

$$\in_\nu(n)\left[(\nu - \xi n)^2 + (\nu - \xi n)(\alpha - \xi\beta)\right](\nu - \xi n) = O\left\{n^2\left[\frac{(\nu + \alpha)^{k+1}}{(n + \beta)^{k+1}}\right]\right\}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$T_3 = O\left\{\sum_{(h-t\xi)\geq t\delta-k-1} n^2 \frac{(n\xi)^\nu}{\nu!}\right\}$$

bulunur. Lemma 4.1.3. den

$$T_3 = O\left\{(n + \beta)^2 \exp\left(n\xi - \frac{\delta^2(n + \beta)}{3\xi}\right)\right\}$$

çıkar. Böylece

$$\frac{e^{n\xi}}{\xi(n + \beta)} T_3 = O\left\{(n + \beta) \exp\left(- \frac{\delta^2(n + \beta)}{3\xi}\right)\right\}$$

Bulduğumuz T_1, T_2, T_3 değerlerini yerine yazarsak

$$\left|\frac{d}{d\xi} P_n^g(\xi)\right| \leq O\left(\eta(\delta)\delta^2\right) + O\left\{(n + \beta) \exp\left(- \frac{\delta^2(n + \beta)}{3\xi}\right)\right\}$$

elde edilir. Bu da teoremimizin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

ARAMA, O. 1957. Proprietati Privind Monotonia Sirului Polinoamelor de Interpolare ale lui S.N. Bernstein si Aplicarea lor la Studiul Approximarii Functiilor. Acad. R.P. Rom. Fil. Cluj. Studii Cerc. Mat. 8, 195-210.

BUTZER, P.L. 1954. On the Extensions of Bernstein Polynomials to the Infinite Interval, Proc. Amer. Math. Soc. 5, p. 547-553.

GADZIEV, A.D. 1974. The Convergence Problem for a Sequence of Pozitive Linear Operators on Unbounded Sets and Theorems Analogous to that of P.P. Korovkin, Engl. Trans. Soviet Math. Dokl. Vol. 15, 1-5.

KIROV, G.H. 1992. A Generalization of the Bernstein Polynomials, Math. Balkanica, New Series, vol. 6, Fasc. 2.

KOROVKIN, P.P. 1980. Linear Operators and Approximation Theory, Delhi.

LORENZ, G.G. 1953. Bernstein Polynomials, Toronto.

MEYER, W-KONIG and ZELLER, K. 1980. Bernsteinsche Potenzreiheni Studia Math. 19, 89-94.

POPOVICIU, T. 1953. Sur L'approximation des Fonctions Convexes D'ordre Superieur. Mathematica Cluj. 10, 49-54.

POPOVICIU, T. Folytonos Függvenyele Közepertekteteleiröl. Magyar Tud. Akad. III (Mat es Fiz) Osztalyanak közlemenyeiböl IV, no: 3, 353-356.

STANCU, D.D. 1967. On the Monotonicity of the Sequence Formed by the First Order Derivatives of the Berstein Polynomials, Math. Zeitschr. 98, 46-51.

STANCU, D.D. 1969. Asupra unei Generalizano a Polinomelorlui Bernstein, Studida Univ. Bases-Bolyai, vol. 2, 31-45.

ÖZGEÇMİŞ

1964 yılında Karabük'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini İskenderun Demir Çelik'te, lise öğrenimini Halide Edip Lisesi'nde tamamladı. 1982 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1986 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 1986-1990 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

1986'dan beri Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.