

151044

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

LORENTZ UZAYINDA HARMONİK EĞRİLİKLER VE EĞİLİM
ÇİZGİLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

A. Funda YALINIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2004

Her hakkı saklıdır

151044

Prof. Dr. H.Hilmi Hacısalihoğlu danışmanlığında, Ayşe Funda Yalınız tarafından hazırlanan bu çalışma 03 / 12 / 2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalın'da Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu



Üye : Prof. Dr. Ertuğrul Özdamar



Üye : Prof. Dr. Baki Karlığa



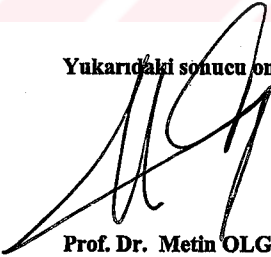
Üye : Prof. Dr. Yusuf Yaylı



Üye : Doç. Dr. Mustafa Kemal Sağel



Yukarıdaki sonucu onaylarım



Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

LORENTZ UZAYINDA HARMONİK EĞRİLİKLER VE EĞİLİM ÇİZGİLERİNİN

KARAKTERİZASYONLARI

A. Funda YALINIZ

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lorentz uzayında genel helis (eğilim çizgisi) için karakterizasyonlar $n = 3$ özel hali için verilmiştir.

Dördüncü bölümde, n -boyutlu Lorentz uzayı \mathbb{L}^n de genel helisin karakterizasyonları time-like ve space-like eğriler için bulunmuştur.

Son bölümde, light-like (null) eğriler için harmonik eğrilikler bulunmuş ve bu eğrilerin eğilim çizgisi olma karakterizasyonları elde edilmiştir.

2004, 134 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER : Lorentz uzayı, Harmonik eğrilikler, Eğilim çizgisi, Null vektör, Time-like vektör, Space-like vektör

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

HARMONIC CURVATURES IN LORENTZIAN SPACE AND CHARACTERIZATIONS
OF INCLINED CURVES

A. Funda YALINIZ

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devote to the introduction.

The second chapter deals with the preliminaries, definitions and necessary theorems that will be needed for later use.

In the third chapter, the characterizations of general helix in Lorentzian space are studied for the case of $n = 3$.

In the fourth chapter, the characterizations of inclined curves in \mathbb{L}^n are obtained for the time-like and the space-like curves.

In the last chapter, harmonic curvatures of light-like (null) curves are obtained and the characterizations of inclined curves for the light-like (null) curves are stated.

2004, 134 pages

Key Words : Lorentzian space, Harmonic curvatures, Inclined curves, Null vector, Time-like vector, Space-like vector

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve alışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALIHOğLU (Ankara Üniğersitesi Fen Fakültesi)'na, yardımlarımı benden esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniğersitesi Fen Fakültesi)'ya, Sayın Prof. Dr. Baki KARLIğA (Gazi Üniğersitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'ya, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniğersitesi Fen Fakültesi)'ye teőekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren aileme ve oğlum Asil'e sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

A. Fında YALINIZ

Ankara, Aralık 2004

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. Simetrik Bilineer Formlar.....	2
2.2. Skalar Çarpmalı Uzaylar.....	4
2.3. Minkowski Uzay-Zaman.....	7
2.4. Yarı-Riemann Manifoldları.....	9
2.5. 2-Boyutlu Lorentz Uzayı.....	11
2.6. Hiperbolik Radyan.....	15
2.7. Lorentz Uzayında Time-like ve Space-like Eğrilerin Frenet Denklemleri.....	21
2.8. E^n 'de Eğilim Çizgileri.....	24
3. LORENTZ UZAYINDA GENEL HELİSİN KARAKTERİZASYONLARI	27
3.1. Genel Helis ve L^3 te Karakterizasyonu.....	27
4. L^n DE TIME-LIKE VE SPACE-LIKE EĞRİLER	35
4.1. L^n de Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları.....	35
4.2. Yüksek Mertebeden Eğriliklerin Harmonik Eğrilikler Cinsinden İfadesi.....	49
4.3. Lorentz Uzayında Eğilim Çizgileri İçin Diğer Karakterizasyonlar.....	52
4.4. Oskülatör Hiperküre ve Eğilim Çizgileri İçin Bir Diğer Karakterizasyon.....	57
4.4.1. Time-like eğriler için oskülatör küre merkezinin koordinatlarının bulunuşu.....	58
4.4.2. Space-like eğriler için oskülatör küre merkezinin koordinatlarının bulunuşu ve eğilim çizgilerinin oskülatör küre merkezi ile ilgili karakterizasyonları.....	62
5. IŞIK BENZERİ (LIGHT-LIKE) EĞRİLER	87
5.1. Light-like Eğriler İçin Frenet Denklemleri.....	87
5.2. Light-like Eğrilerin Harmonik Eğrilikleri ve Eğilim Çizgisi Olma Karakterizasyonları.....	91
5.3. Lorentz Uzayında Light-like Eğriler İçin Yüksek Mertebeden Eğriliklerin Harmonik Eğrilikler Cinsinden İfadeleri.....	114
5.4. Lorentz Uzayında Light-like (Null) Eğilim Çizgileri İçin Diğer Karakterizasyonlar.....	117
KAYNAKLAR.....	124
ÖZGEÇMİŞ.....	127

SİMGELER DİZİNİ

V	n -boyutlu reel vektör uzayı
\mathbb{R}_ν^n	n -boyutlu ν -indeksli skalar çarpımlı uzay
\mathbb{L}^n	n -boyutlu Lorentz uzayı
M^n	n -boyutlu Riemann manifoldu
M_q^n	n -boyutlu, q -indeksli yarı-Riemann manifoldu
\langle, \rangle_L	Lorentz metriği
$\ v\ $	v nin normu
D	Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
∇	yarı-Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
α	diferensiyellenebilir ve birim hızlı eğri
$T\alpha$	α eğrisinin tanjant demeti
$T\alpha^\perp$	$T\alpha$ nın dik demeti
E^n	n -boyutlu öklid uzayı
V_i	eğrinin i -yinci Frenet vektörü
X	eğrinin teğet vektör alanı
Y	eğrinin asli normal vektör alanı
Z	eğrinin binormal vektör alanı
k_i	eğrinin i -iyinci eğrilik fonksiyonu
Γ_N	ışık konisi
Γ_S	uzay konisi

Γ_T	zaman konisi
$RadW$	W nun radikali
SW	W nun ekran uzayı
M_1^n	n -boyutlu Lorentz manifoldu
H_i	i -yinci mertebeden harmonik eğrilik fonksiyonu
m_i	eğrinin i -yinci m -eğrilik fonksiyonu
S^p	eğrinin oskülatör p -küresi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Zaman benzeri geleceğe doğru ve zaman benzeri geçmişe doğru vektörler	14
Şekil 2.2. Lorentz uzayındaki vektörlerin cinsi	15
Şekil 2.3. Uzay benzeri ve zaman benzeri eğriler	16
Şekil 2.4. Lorentz uzayında birim çember	16
Şekil 2.5. Öklid uzayında birim çember	16
Şekil 2.6. Öklid uzayında θ radyanlı açının ölçüsü	17
Şekil 2.7. Lorentz uzayında u hiperbolik radyanlı açının ölçüsü	19

1. GİRİŞ

n -boyutlu öklid uzayı E^n de genel helis (eğilim çizgileri) için bazı önemli karakterizasyonlar Hacısalihoğlu (1975, 1983 ve 2002) tarafından elde edilmiştir. Bu karakterizasyonlarda, eğrinin yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri yardımıyla, eğrinin genel helis (eğilim çizgisi) olması karakterize edilmiştir. 3-boyutlu Lorentz uzayı \mathbb{L}^3 de bir time-like ya da space-like eğrinin eğilim çizgisi olması ile ilgili karakterizasyonlar da Ekmekci ve İlarıslan (2000), İlarıslan (2002) tarafından verilmiştir.

Biz de bu çalışmamızda n -boyutlu Lorentz uzayı \mathbb{L}^n de eğilim çizgilerinin karakterizasyonlarını elde ettik. \mathbb{L}^n de time-like ve space-like eğrilerle Öklid uzayındaki eğrilerin geometrisinde birçok benzerlik olmasına rağmen light-like (null) eğrilerin geometrisi daha farklı ve daha karmaşıktır. Bu yüzden çalışmamızı time-like ve space-like (null olmayan) eğriler için bir bölümde, null eğriler için de başka bir bölümde yaptık. Null olan eğilim çizgileri için harmonik eğrilikleri elde ettik. Son olarak da null eğriler için eğilim çizgisi olma karakterizasyonlarımızı verdik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızın tabanını oluşturan simetrik bilineer formlar, skalar çarpmalı uzaylar, yarı-Riemann manifoldları, Minkowski uzay-zaman, 2–boyutlu Lorentz uzayı ve hiperbolik radyan, n –boyutlu Lorentz uzayında eğriler ve Frenet denklemleri genel olarak tanıtılacaktır. Son olarak da E^n de eğilim çizgileri ve harmonik eğrilikler verilecektir. Bu bölüm için referanslarımız; Hacısalihoğlu (1983), O’neill (1983), Birman ve Nomizu (1984), Silverman (1985), Beem vd (1996), Duggal ve Bejancu (1996), Uğurlu ve Çalışkan (1997), Ekmekçi ve İlarıslan (2000) olacaktır.

2.1. Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

$$(i) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$$

$$(ii) \langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$$

özelliklerine sahip ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer formdur denir (O’neill 1983).

Tanım 2.1.2. V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ olsun.

(i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$, $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ise, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formuna **pozitif tanımlı**,

(ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$, $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formuna **negatif tanımlı**,

(iii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formuna **yarı pozitif tanımlı**,

(iv) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formuna **yarı negatif tanımlı**,

(v) " $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ dir" şartı sağlanıyor ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formuna **non-dejenere**, non-dejenere değilse **dejenere**dir denir (O'Neill 1983).

V üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ise V 'nin herhangi bir W altuzayı için $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$ kısıtlaması da yine bir simetrik bilineer formdur.

Tanım 2.1.3. V bir vektör uzayı ve

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde V 'nin en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formunun **indeksi** denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Buna göre $1 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir. $\nu = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formunun yarı pozitif tanımlı olmasıdır.

V nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ olarak tanımlanan $[b_{ij}]_{n \times n}$ matrisine $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazına göre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nun matrisi denir. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik olduğundan $[b_{ij}]$ matrisi de simetriktir.

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_i w_j$$

olduğundan $[b_{ij}]$ matrisi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formunu belirler.

Teorem 2.1.4. *Bir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter koşul $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nun herhangi bir baza göre matrisinin tersinir olmasıdır (O'Neill 1983).*

Tanım 2.1.5. *Bir $v \in V$ vektörü için $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise bu v vektörüne space-like veya null vektör,*

$\langle v, v \rangle < 0$ ise bu v vektörüne time-like vektör,

$\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise bu v vektörüne light-like veya null vektör denir (O'Neill 1983).

2.2. Skalar Çarpmalı Uzaylar

Tanım 2.2.1. *Bir V vektör uzayı üzerindeki non-dejenere, simetrik, bilineer forma V vektör uzayı üzerinde bir **skalar çarpma** denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ise $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine **skalar çarpmalı vektör uzayı** denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).*

Tanım 2.2.2. Sıfır olmayan $v, w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ ise v ve w vektörlerine *diktirler* denir ve $v \perp w$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Teorem 2.2.3. V skalar çarpmalı uzayının bir altuzayı W olsun. Bu durumda şu özellikler vardır:

1. $\text{boy } W + \text{boy } W^\perp = n = \text{boy } V$

2. $(W^\perp)^\perp = W$

(O'Neill 1983).

Tanım 2.2.4. Bir V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ve W da V 'nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerinde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non-dejenere ise W ya non-dejenere altuzay, non-dejenere değilse dejenere altuzay denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.2.5. V bir skalar çarpmalı uzay ve W da V 'nin bir altuzayı olsun. W 'nin non-dejenere altuzay olması için gerek ve yeter koşul $V = W \oplus W^\perp$ olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.6. Bir V vektör uzayı üzerindeki bir skalar çarpma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ olsun. Bir $v \in V$ vektörünün normu

$$\|v\| = |\langle v, v \rangle|^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 birim olan vektöre **birim vektör** ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine **ortonormal sistem** denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.2.7. Bir $V \neq \{0\}$ skalar çarpmalı uzayı bir ortonormal sisteme sahiptir.

İspat. (O'neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996). □

Teorem 2.2.8. *Bir V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun.*

$\varepsilon_i = \langle e_j, e_i \rangle$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

İspat. (O'neill 1983). □

Teorem 2.2.9. *Bir V vektör uzayının bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı için*

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ işaretlerindeki negatif terimlerin ν sayısı V 'nin indeksidir.

İspat. (O'neill 1983). □

Eğer V nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $V; \nu$ indeksine sahip ise, \vec{v}_p ve \vec{w}_p vektörleri için, $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$ olmak üzere,

$$\langle \vec{v}_p, \vec{w}_p \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{j=\nu+1}^n v_j w_j$$

olur. Eğer $\nu = 0$ ise \mathbb{R}_ν^n skalar çarpmalı (yarı-Öklid) uzayı \mathbb{R}^n den ibarettir.

Bir Lorentz vektör uzayı \mathbb{L}^n , indeksi 1 ve boyutu ≥ 2 olan bir skalar çarpmalı uzaydır (O'neill 1983).

Tanım 2.2.10. V vektör uzayı üzerinde tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalar çarpımı özel olarak pozitif tanımlı ise **Öklid metriği** adını alır, V ye de **Öklid uzayı** denir. Eğer $\nu = 1$ ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalar çarpımı Lorentz (Minkowski) metriği olup V ye de Lorentz

uzayı veya Minkowski uzayı denir. V deki $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilineer formu dejenere ise, bu durumda V ye ışıkçı veya null veya light-like veya dejenere vektör uzayı denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Önerme 2.2.11. $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ reel n -boyutlu dejenere vektör uzayı ve W 'nin sıfır uzayı $\text{Rad } W$ olsun. $\dim W = r < n$ olmak üzere, $\text{Rad } W$ 'nin V 'deki tümleyeni olan altuzay non-dejeneredir. Bu uzaya ekran uzayı (screen space) veya perde uzayı denir ve SW ile gösterilir.

İspat. (Duggal ve Bejancu 1996). □

Tanım 2.2.12. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ skalar çarpım uzayı olmak üzere;

(i) $\Gamma_N = \{v \in (V - \{0\}) \mid \langle v, v \rangle = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V 'nin **ışık konisi**

(ii) $\Gamma_S = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle > 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V 'nin **uzay konisi**

(iii) $\Gamma_T = \{v \in (V - \{0\}) \mid \langle v, v \rangle < 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine V 'nin **zaman konisi** denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

2.3. Minkowski Uzay-Zaman

Tanım 2.3.1. Minkowski uzay-zaman (Lorentz uzayı)

$$ds^2 = -dx_1^2 + \sum_{i=2}^n dx_i^2$$

metriğiyle beraber $M = \mathbb{R}^n$ manifoldudur ve $\frac{\partial}{\partial x_1}$ vektör alanıyla zaman yönlüdür (Beem vd 1996).

Minkowski uzay-zamanının geodezikleri \mathbb{R}^n Öklid uzayının doğrularıdır. Bu geodeziklerin afin parametrelendirmeleri \mathbb{R}^n 'deki Öklid yay uzunluğu parametrelendirmeleriyle orantılıdır. Minkowski uzay-zamanda verilen bir P noktasından geçen null geodezikler tepe noktası P de olan eliptik koni formundadırlar (Beem vd 1996).

Minkowski uzay-zamanı bir Lorentz çarpımıdır. Eğer \mathbb{R} , negatif tanımlı $-dt^2$ metriğiyle ve \mathbb{R}^{n-1} de g_0 Öklid metriğiyle verilmiş ise o zaman

$$(\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, \quad -dt^2 \oplus g_0)$$

bir n -boyutlu Minkowski uzayıdır (Beem vd 1996).

Tanım 2.3.2. *Minkowski uzayında farklı iki nokta $p = (p_1, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, \dots, q_n)$ olsun. \mathbb{R} 'de $p_1 < q_1$ ve $(p_1 - q_1)^2 > (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2$ ise $p \ll q$ kronolojik bağıntısı vardır. Eğer $p \ll q$ ise o zaman p 'den q 'ya uzaklık*

$$d(p, q) = \left[(p_1 - q_1)^2 + \sum_{i=2}^n (p_i - q_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ile verilir (Beem vd 1996).

Minkowski uzay-zamanda p merkezli "birim küre"

$$\mathcal{K}(p, 1) = \{q \in M \mid d(p, q) = 1\}$$

dir. Bu cümle iki kanatlı hiperboloidin bir kanatıdır (Beem vd 1996).

Tanım 2.3.3. \mathbb{R}_s^n 'yi $(-, \dots, -, +, \dots, +)$ işaretli yarı-Öklid uzayı olarak tanımlayalım. burada s tane negatif eigen değer ile $n - s$ tane pozitif eigen değeri vardır.

Böylece \mathbb{R}_s^n üzerinde yarı-öklid metriği

$$ds^2 = -\sum_{i=1}^s dx_i^2 + \sum_{i=s+1}^n dx_i^2$$

ile verilir (Beem vd 1996).

Özel olarak \mathbb{R}_1^n n -boyutlu Minkowski uzay-zaman (Lorentz uzayı) dir. $r > 0$ için de \mathbb{R}_1^{n+1} uzayındaki Lorentz ve hiperbolik küreler, sırasıyla,

$$S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2\}$$

ve

$$H_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -r^2\}$$

biçiminde ifade edilirler (Beem vd 1996).

2.4 Yarı-Riemann Manifolları

Tanım 2.4.1. M düzgün, parakompakt Hausdorff manifoldu olsun. $\Pi : TM \rightarrow M$ de M 'nin tanjant demetini gösterebilir. M 'nin bir g yarı-Riemann metriği, M 'de $(0, 2)$ tipinde düzgün simetrik tensör alanıdır öyle ki $\forall p \in M$ için

$$g|_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

tensörü $(-, \dots, -, +, \dots, +)$ işaretli non-dejener bir iç çarpımdır.

M üzerinde $(u, (x^1, \dots, x^n))$ lokal koordinatlardaki g yarı-Riemann metriği

$$g|_u = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$$

olarak alınabilir, buradaki $g_{ij} = g_{ji}$ ve $\det g \neq 0$ dir. Eğer g , s tane negatif eigen değerine ve $r = n - s$ tane pozitif eigen değerine sahipse o zaman g , (s, r) tipindedir denir. Her $p \in M$ için $g|_p$ 'nin $\text{diag}\{-1, \dots, -1, +1, \dots, +1\}$ ile gösterilebilecek şekilde lokal koordinatları vardır (Beem vd 1996).

Tanım 2.4.2. M diferansiyellenebilir bir manifold ve g 'de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere; (M, g) ikilisine bir **yarı-Riemann manifoldu** denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.4.3. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g 'nin sabit indeksi q 'ya (M, g) **yarı-Riemann manifoldunun indeksi** denir, q indeksli ve n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu M_q^n ile gösterilir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.4.4. M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $q = 1$ ise, bu durumda M_1^n yarı-Riemann manifolduna **Lorentz manifoldu** denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Özel olarak $q = 0$ ise, bu durumda M^0 bir **Riemann manifoldu** ve g de bir Riemann metriğidir.

Tanım 2.4.5. M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_q^n$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

1. $g(T, T) \geq 0$ ise α eğrisine **uzay benzeri (space-like) eğri**,
2. $g(T, T) < 0$ ise α eğrisine **zaman benzeri (time-like) eğri**,

3. $T \neq 0$ için, $g(T, T) = 0$ ise α eğrisine *ışık benzeri* (*light-like veya null*) eğri denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

2.5. 2-Boyutlu Lorentz Uzayı

Tanım 2.5.1. \mathbb{L}^2 iki boyutlu Lorentz uzayı, $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{L}} = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

Lorentz iç çarpımı ile donatılmış \mathbb{R}^2 dir (Birman ve Nomizu 1984).

Bundan sonraki gösterimlerde aksi belirtilmedikçe \langle, \rangle sembolü $\langle, \rangle_{\mathbb{L}}$ anlamında kullanılacaktır.

Tanım 2.5.2. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{L}^2$ olsun. Eğer,

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise \vec{x}' e *time-like* vektör,

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise \vec{x}' e *space-like* vektör ve

$\vec{x} \neq 0$ için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ise \vec{x}' e *null* vektör (*light-like*) denir (O'Neill 1989).

Tanım 2.5.3. $\vec{x} \in \mathbb{L}^2$ için \vec{x}' in normu

$$\| \vec{x} \|_{\mathbb{L}} = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$$

olarak tanımlanır (Birman ve Nomizu 1984).

Yine aksi belirtilmedikçe $\| \|$ sembolü $\| \|_{\mathbb{L}}$ yerine kullanılacaktır. Yukarıda verilen norm tanımına göre şu teorem verilebilir.

Teorem 2.5.4. $\vec{x} \in \mathbb{L}^2$ olmak üzere,

1. $\|\vec{x}\| > 0$ dir.

2. $\vec{x} \neq 0$ için $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ bir null vektördür.

3. \vec{x} bir time-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir.

4. \vec{x} bir space-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir (Birman ve Nomizu 1984).

Tanım 2.5.5. \mathbb{L}^2 , iki boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L}^2$ olsun.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

ise \vec{x} ve \vec{y} vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Birman ve Nomizu 1984).

Aksi belirtilmedikçe iki vektörün dikliğinden "Lorentz anlamında diklik" anlaşılacaktır.

Örnek 2.5.6. $\vec{x} = (1, 1)$ ve $\vec{y} = (-1, 1)$ vektörleri, öklidiyen anlamında dik olmalarına rağmen

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

olduğundan Lorentz anlamında dik değildirler.

Örnek 2.5.7. $\vec{x} = (1, 2)$ ve $\vec{y} = (2, 1)$ vektörleri birbirlerine diktirler. Çünkü,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1.2 - 2.1 = 0$$

dir.

Genel olarak, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{L}^2$ vektörleri birbirlerine diktirler \Leftrightarrow

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 .$$

Teorem 2.5.8. Her ikisi de time-like (veya space-like) olan iki vektör birbirine dik olamaz (Uğurlu ve Çalışkan 1997).

İspat. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L}^2$ iki time-like vektör olsun. $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ için,

$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 - x_2^2 < 0 \\ y_1^2 - y_2^2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^2 < x_2^2 \\ y_1^2 < y_2^2 \end{array}$$

dir.

$$\Rightarrow x_1^2 y_1^2 < x_2^2 y_2^2$$

$$\Rightarrow |x_1 y_1| < |x_2 y_2|$$

$$\Rightarrow x_1 y_1 \neq x_2 y_2$$

$$\Rightarrow x_1 y_1 - x_2 y_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$$

dır. Yani \vec{x} ve \vec{y} vektörleri dik olamazlar. Benzer bir ispat space-like vektörler için de yapılabilir. □

Sonuç 2.5.9. İki vektörün dik olması için birinin time-like diğeriinin space-like olması gerekir.

Tanım 2.5.10. $\vec{x} \in \mathbb{L}^2$ time-like bir vektör olsun. $\vec{e} = (0, 1)$ olmak üzere,

1. $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle < 0$ ise \vec{x} vektörüne zaman benzeri geleceğie doğru vektördür,

2. $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle > 0$ ise \vec{x} vektörüne bir zaman benzeri geçmişie doğru vektördür denir (O'Neill 1983) (Şekil 2.1.).

Sonuç 2.5.11. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{L}^2$ vektörünün zaman benzeri geleceğe doğru olması için gerek ve yeter şart

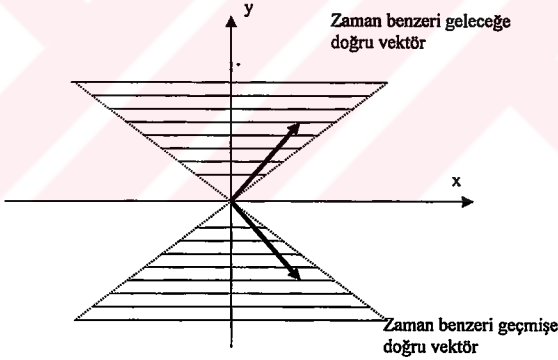
$$|x_1| < x_2$$

olmasıdır (Birman ve Nomizu 1984).

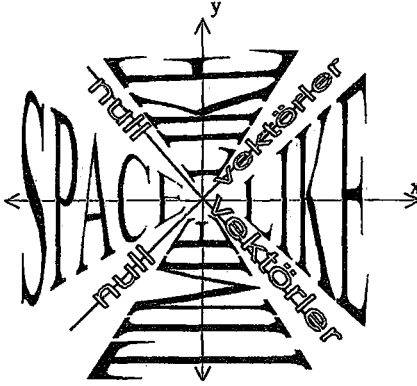
Örnek 2.5.12. $\vec{x} = (1, 2)$ vektörü için, $|1| < 2$ olduğundan \vec{x} bir zaman benzeri geleceğe doğru vektördür.

Yukarıdaki açıklamalara göre $<$, $>$ iç çarpımıyla donatılmış \mathbb{R}^2 için vektörlerin cinsini

Şekil 2.2. deki gibi gösterebiliriz.



Şekil 2.1. Zaman benzeri geleceğe doğru ve zaman benzeri geçmişe doğru vektörler



Şekil 2.2. Lorentz uzayındaki vektörlerin cinsi

Teorem 2.5.13. \mathbb{L}^2 de birim time-like bir vektör ℓ olsun

$$\langle \vec{\ell}, \vec{\ell}^\perp \rangle = 0$$

olacak biçimde bir tek $\vec{\ell}^\perp$ birim vektörü vardır (Birman ve Nomizu 1984).

2.6. Hiperbolik Radyan

Tanım 2.6.1. \mathbb{L}^2 Lorentz uzayında space-like birim çember

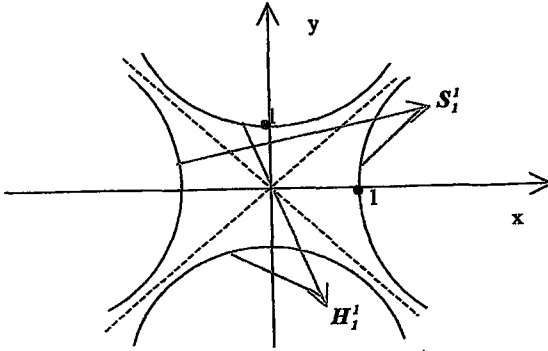
$$S_1^1 = \{X \in \mathbb{L}^2 \mid \langle X, X \rangle = 1\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu çemberin teğetleri daima $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ olup time-like vektörlerdir. Benzer olarak, time-like birim çember de

$$H_1^1 = \{X \in \mathbb{L}^2 \mid \langle X, X \rangle = -1\}$$

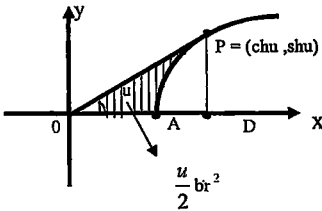
biçiminde tanımlı olup, bu eğrinin teğetleri de space-like vektörlerdir (Şekil 2.3.).

(Space-like ve Time-like Eğriler)

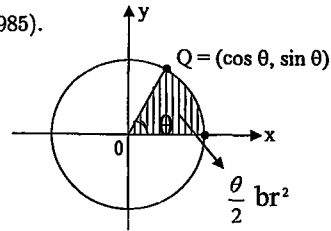


Şekil 2.3. Uzay benzeri ve zaman benzeri eğriler

L^2 de açı kavramına geçmeden önce hiperbolik radyan kavramından bahsetmek yararlı olacaktır. Sıkça kullanılan "chu", "shu" ifadelerindeki "u" hiperbolik radyan cinsinden bir açı birimidir. Şekil 2.4. deki birim space-like çember üzerindeki bir P noktasının koordinatları olarak verilen "chu", "shu" sayıları, birim çember (Şekil 2.5.) üzerinde bir $Q = (\cos \theta, \sin \theta)$ noktasının koordinatlarına oldukça benzemektedir. Birim çember üzerinde Q noktasının koordinatları için kullanılan θ radyanlık açının ölçüsü Şekil 2.5. teki taralı alanın "2 katından" ibaret bir büyüklüktür. Aynı şekilde space-like çember üzerindeki P noktasının koordinatları için kullanılan "u" hiperbolik radyanlık açının ölçüsü ise yine Şekil 2.4. deki taralı bölgenin alanının "2 katından" ibaret bir büyüklüktür (Silverman 1985).



Şekil 2.4. Lorentz uzayında birim çember

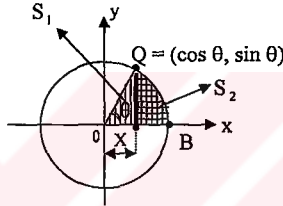


Şekil 2.5. Öklid uzayında birim çember

\mathbb{R}^2 öklid uzayında birim çember, $S^1 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \langle X, X \rangle = 1\}$ şeklinde tanımlı

olup

$X = (x, y) \in S^1$ için $x^2 + y^2 = 1$ denkleminde sahiptir. L^2 (ya da \mathbb{R}_1^2) Lorentz uzayında da birim çember $S_1^1 = \{X \in L^2 \mid \langle X, X \rangle = 1\}$ şeklinde tanımlı olduğundan $X = (x, y) \in S_1^1$ için $x^2 - y^2 = 1$ denklemiyle gösterilir. Yani Öklid uzayındaki çemberlerin Lorentz uzayındaki karşılıkları öklid anlamındaki hiperbollerdir. Öklid uzayında; parametrik gösterimi $\alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ olan birim çemberin θ açısına karşılık gelen \widehat{BP} yayının uzunluğunu bulalım (Şekil 2.6.).



Şekil 2.6. Öklid uzayında θ radyanlı açının ölçüsü

$$\begin{aligned}
 S(\theta) &= \int_0^\theta \sqrt{\langle \alpha'(\theta), \alpha'(\theta) \rangle} d\theta \\
 &= \int_0^\theta \sqrt{\langle (-\sin \theta, \cos \theta), (-\sin \theta, \cos \theta) \rangle} d\theta \\
 &= \int_0^\theta \sqrt{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta \\
 &= \int_0^\theta \sqrt{1} d\theta \\
 &= \theta
 \end{aligned}$$

dır. Şimdi S_2 alanını bulalım:

Öklid anlamında $x^2 + y^2 = 1$ olduğundan $y = \sqrt{1 - x^2}$ dir.

$$S_2 = \int_x^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

burada $x = \cos \theta$ olduğundan $dx = -\sin \theta d\theta'$ dir.

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int_{\theta}^0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} (-\sin \theta d\theta) \\
\Rightarrow S_2 &= - \int_{\theta}^0 \sqrt{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta \\
\Rightarrow S_2 &= - \int_{\theta}^0 \sin^2 \theta d\theta \\
\Rightarrow S_2 &= - \int_{\theta}^0 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
\Rightarrow S_2 &= - \frac{1}{2} \int_{\theta}^0 (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
\Rightarrow S_2 &= - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{\theta}^0 \\
\Rightarrow S_2 &= \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta
\end{aligned}$$

olur. Şekil 2.6. daki $\triangle OPC$ dik üçgeninin alanına S_1 dersek,

$$S_1 = \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta$$

dır.

Böylece Şekil 2.5. te gösterilen taralı bölgenin alanına S_A dersek

$$\begin{aligned}
S_A &= S_1 + S_2 \\
\Rightarrow S_A &= \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \\
\Rightarrow S_A &= \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} (2 \sin \theta \cos \theta) \\
\Rightarrow S_A &= \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \\
\Rightarrow S_A &= \frac{1}{2} \theta
\end{aligned}$$

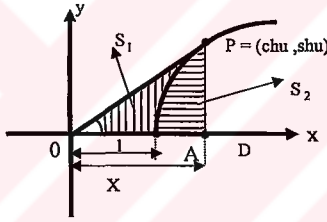
dir.

\mathbb{L}^2 Lorentz uzayında Lorentziyen birim çember;

$$S_1^1 = \{X \in \mathbb{L}^2 \mid \langle X, X \rangle = 1\}$$

şeklinde tanımlı olup $X = (x, y) \in S_1^1$ için $x^2 - y^2 = 1$ denklemine sahip olduğundan bu denklem Öklid uzayında bir hiperbol gösteriyordu.

Şimdi de parametrik gösterimi $\gamma(u) = (chu, shu)$ olan eğrinin u açısına karşılık gelen \widehat{AP} yayının uzunluğunu bulalım (Şekil 2.7.).



Şekil 2.7. Lorentz uzayında u hiperbolik radyanlı açının ölçüsü

$$l(u) = \int_0^u \sqrt{-\langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle_{\mathbb{L}}} du$$

ve $\gamma'(u) = (shu, chu)$ olduğundan

$$l(u) = \int_0^u \sqrt{-(sh^2u - ch^2u)} du$$

dur, burada $sh^2u - ch^2u = -1$ olduğundan

$$l(u) = \int_0^u du \Rightarrow l(u) = u$$

olur.

S_2 alanını bulalım:

Hiperbolün denklemi; $x^2 - y^2 = 1$ olduğundan $y = \sqrt{x^2 - 1}$ dir.

$$S_2 = \int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx$$

yazılışında $x = chu$ olduğundan $dx = shudu$ dur. O halde,

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^u \sqrt{ch^2u - 1}(shudu) \\ \Rightarrow S_2 &= \int_0^u \sqrt{sh^2u}shudu \\ \Rightarrow S_2 &= \int_0^u sh^2u du \\ \Rightarrow S_2 &= \int_0^u \frac{\cosh 2u - 1}{2} du \\ \Rightarrow S_2 &= \frac{1}{2} \int_0^u (\cosh 2u - 1) du \\ \Rightarrow S_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} sh2u - u \right) \Big|_0^u \\ \Rightarrow S_2 &= \frac{1}{4} sh2u - \frac{u}{2} \end{aligned}$$

olur.

Şekil 2.7. deki $O\hat{P}D$ dik üçgeninin alanına S_A dersek,

$$S_A = \frac{1}{2}.chu.shu$$

olur. Burada $S_A = S_1 + S_2$ olacağından Şekil 2.7. de gösterilen taralı bölgenin alanı

olan S_1 , $S_A - S_2$ ye eşittir, yani

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}chu shu - \frac{1}{4}sh2u + \frac{u}{2} \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{1}{2}chu shu - \frac{1}{4}(2chushu) + \frac{u}{2} \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{u}{2} \end{aligned}$$

dir.

2.7. Lorentz Uzayında Time-like ve Space-like Eğrilerin Frenet

Denklemleri

\mathbb{L}^n Lorentz uzayında bir eğri

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{L}^n$$

şeklinde regüler diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Burada I , \mathbb{R} 'de bir açık intervaldir. I intervali I 'nın u özdeşlik dönüşümünün oluşturduğu bir koordinat sistemine sahiptir. Bir $t_0 \in I$ noktasında γ eğrisinin hız vektörü

$$\gamma'(t_0) = \left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t_0}$$

olur. Eğer $\forall t \in I$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ eğrisi **regüler**dir denir. Eğer \mathbb{L}^n Lorentz uzayında γ' hız vektörü $\forall t \in I$ için bir space-like vektör ise γ eğrisi **space-like eğridir** denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Eğer birim hızlı γ eğrisi bir space-like ya da time-like eğriyse

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \varepsilon_0$$

dır, burada γ space-like ise $\varepsilon_0 = +1$, time-like ise $\varepsilon_0 = -1$ 'dir (O'neill 1983).

Tanım 2.7.1. L^n de bir eğri γ olsun. γ kendi yay uzunluğu ile parametrelendirilsin.

Bu eğrinin Frenet vektör alanlarını

$$V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)$$

ile gösterelim.

$$\frac{dV_i(s)}{ds} = \sum_{j=1}^r k_j V_j(s) \quad , \quad i = 1, \dots, r$$

fonksiyonları. γ eğrisinin yüksek mertebeden eğrilikleri olarak adlandırılan,

$$k_i(s) = \varepsilon_i \left\langle \frac{dV_i(s)}{ds}, V_{i+1}(s) \right\rangle$$

fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlanabilir (Ekmekçi ve İlarıslan 2002).

Teorem 2.7.2. $\gamma \subset L^n$, (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir regüler eğri ve $s \in I$ yay-parametresi için $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. O zaman,

$$(a) \quad \nabla_{V_1} V_1 = k_1 V_2$$

$$(b) \quad \nabla_{V_1} V_i = -\varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-1} k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1}$$

$$(c) \quad \nabla_{V_1} V_r = -\varepsilon_{r-2} \varepsilon_{r-1} k_{r-1} V_{r-1}$$

dir, burada ∇, M_1^n Lorentz manifoldu üzerindeki koneksiyondur.

İspat. (Ekmekçi ve İlarıslan 2002).

□

Yukarıda ifade edilen Frenet denklemlerinin matris gösterimi ise şu şekildedir.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{V_1} V_1 \\ \nabla_{V_1} V_2 \\ \nabla_{V_1} V_3 \\ \vdots \\ \nabla_{V_1} V_{r-2} \\ \nabla_{V_1} V_{r-1} \\ \nabla_{V_1} V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{r-3} \varepsilon_{r-2} k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon_{r-2} \varepsilon_{r-1} k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{bmatrix}$$

1. γ , Lorentz manifoldunda time-like eğri olsun. Buna göre, $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{n-1} = 1$ olacaktır. Bu durumda Teorem 2.7.2'deki Frenet denklemleri

$$\nabla_{V_1} V_1 = k_1 V_2$$

$$\nabla_{V_1} V_2 = k_1 V_1 + k_2 V_3$$

$$\nabla_{V_1} V_3 = -k_2 V_2 + k_3 V_4$$

\vdots

$$\nabla_{V_1} V_i = -k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1} \quad , \quad i > 2 \text{ için}$$

\vdots

$$\nabla_{V_1} V_r = -k_{r-1} V_{r-1}$$

şeklinde yazılabilir.

2. γ , Lorentz manifoldu üzerinde bir space-like eğri olsun. Buna göre, $\varepsilon_0 = +1$ ve $i = 1, 2, \dots, n-1$ için ε_i 'lerden sadece bir tanesi negatif işaretli olacaktır. Bu

durumda Teorem 2.7.2 deki Frenet denklemleri

$$\nabla_{V_1} V_1 = k_1 V_2$$

$$\nabla_{V_1} V_2 = \varepsilon_1 k_1 V_1 + k_2 V_3$$

$$\nabla_{V_1} V_3 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 V_2 + k_3 V_4$$

⋮

$$\nabla_{V_1} V_i = -\varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-1} k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1} \quad , \quad i > 2 \text{ için}$$

⋮

$$\nabla_{V_1} V_r = -\varepsilon_{r-2} \varepsilon_{r-1} k_{r-1} V_{r-1}$$

şeklinde yazılabilir.

2.8. \mathbb{E}^n 'de Eğilim Çizgileri

Tanım 2.8.1. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ 'ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında M 'nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise

$$H_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, M 'nin **1-inci harmonik eğriliği** denir (Hacısa-lıhoğlu 1983).

Tanım 2.8.2. $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda,

M bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow \forall s \in I$ için $H_1(s) = \text{sabittir.}$

İspat. (Hacısalıhoğlu 1983).

□

Tanım 2.8.3. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisinin birim teğet vektör alanı V_1 ve $X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ 'de sabit bir birim vektör alanı olsun. Eğer

$$\langle V_1, X \rangle = \cos \theta = \text{sabit}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

ise M eğrisine \mathbb{E}^n 'de bir eğilim çizgisi, θ açısına M 'nin eğilim açısı ve $Sp\{X\}$ uzayına da M 'nin eğilim eksenini denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Bu tanımda $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ şartı kaldırılacak olursa \mathbb{E}^n 'deki her eğri \mathbb{E}^{n+1} 'de bir eğilim çizgisi olarak alınabilir. Böylece her eğri bir eğilim çizgisi olur ki, Tanım 2.8.3'e gerek kalmaz. Bu nedenle $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ şartını koymak zorundayız.

\mathbb{E}^n 'deki bir eğriyi eğilim çizgisi olarak karakterize etmek için $n = 3$ halinde

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\text{birinci mertebeden eğrilik}}{\text{ikinci mertebeden eğrilik}}$$

olarak bilinen harmonik eğrilik kavramını, \mathbb{E}^n 'deki bir eğri için yüksek mertebeden harmonik eğrilik kavramı olarak genelleştireceğiz (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.8.4. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilsin. $s \in I$ yay - parametresi ve M 'nin yüksek mertebeden eğrilik fonksiyonları da, sırasıyla, k_1, k_2, \dots, k_{n-1} olsun ($k_{n-1} \neq 0$). M 'nin birim teğet vektör alanı V_1 olmak üzere,

$$H_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$H_i = \begin{cases} \frac{k_1}{k_2} & , i = 1 \\ \{D_{V_1} H_{i-1} + H_{i-2} k_i\} \cdot \frac{1}{k_{i+1}} & , 1 < i \leq n-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna, M 'nin i -yinci mertebeden harmonik eğrilik fonk-siyonu denir. $H_0 = 0$ kabul edilir (Hacısalıhoğlu 1983) (Buradaki D , \mathbb{E}^n 'deki kovaryant türev operatörüdür).

Teorem 2.8.5. $M \subset \mathbb{E}^n$ bir eğilim çizgisi ve $Sp\{X\}$ de M 'nin eğilim eksenini olsun.

M 'nin Frenet n -ayaklı alanı

$$\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

ve harmonik eğrilik fonksiyonları da H_1, H_2, \dots, H_{n-2} olmak üzere,

$$\langle V_{i+2}, X \rangle = H_i \langle V_1, X \rangle, \quad 1 \leq i \leq n-2$$

dir.

İspat. (Hacısalıhoğlu 1983). □

Teorem 2.8.6. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisinin Frenet n -ayaklı alanı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilikleri de H_1, H_2, \dots, H_{n-2} olsun. O zaman

$$M \subset \mathbb{E}^n \text{ bir eğilim çizgisidir} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-2} H_i^2 = \text{sabittir.}$$

İspat. (Hacısalıhoğlu 1983). □

3. LORENTZ UZAYINDA GENEL HELİSİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde L^3 deki bir time-like yada space-like eğrinin eğilim çizgisi olması ile ilgili karakterizasyonları vereceğiz. Bu bölüm için referanslarımız Ekmekçi ve İlarıslan (2000), İlarıslan (2002) olacaktır.

3.1. Genel Helis ve L^3 te Karakterizasyonu

$\gamma = \gamma(t)$, L^n de bir regüler eğri olsun. Bu eğrinin $\gamma'(t)$ tanjant vektör alanını X ile gösterelim. $\langle X, X \rangle = +1$ ya da $\langle X, X \rangle = -1$ ise γ birim hızlı eğridir denir.

Eğer, γ bir space-like ya da time-like eğriyse $\langle X, X \rangle = \varepsilon_0$ dir, burada γ space-like eğriyse $\varepsilon_0 = +1$, time-like eğriyse $\varepsilon_0 = -1$ dir (O'Neill 1983 ve Nakanishi 1988).

L^3 te k_1 birinci eğriliği ile k_2 ikinci eğriliği sabit olan bir eğriye bir dairesel helis denir. $k_3 = 0$ iken k_1 ve k_2 eğrilikleri sabit değil ancak $\frac{k_1}{k_2} = \text{sabit}$ ise bu eğri bir genel helis olur (Ikawa 1985 ve Nakanishi 1988).

a) Time-Like Helis Eğrileri için Karakterizasyonlar

γ , L^3 te bir time-like eğri ve bu eğrinin Frenet üç ayaklısı $\{X, Y, Z\}$ olsun. O zaman

$\gamma' = X$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \nabla_X X &= k_1 Y \\ \nabla_X Y &= k_1 X + k_2 Z \\ \nabla_X Z &= -k_2 Y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dir (Ikawa 1985 ve Nakanishi 1988).

Bu bölümde, \mathbb{L}^3 teki bir γ time-like eğrisi için aşağıdaki karakterizasyonu vereceğiz.

Teorem 3.1.1. \mathbb{L}^3 te bir time-like eğri γ olsun. γ nın bir genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\left. \begin{aligned} \nabla_X^2 Y + \lambda_1 \nabla_X Y + \lambda_2 Y &= 0 \text{ (burada } \lambda_1 = -\frac{k'_1}{k_1}, \lambda_2 = -k_1^2 + k_2^2 \text{ dir)} \\ \text{ya da} \\ \nabla_X^2 Y + \mu_1 \nabla_X Y + \mu_2 Y &= 0 \text{ (burada } \mu_1 = -\frac{k'_2}{k_2}, \mu_2 = -k_1^2 + k_2^2 \text{ dir)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

olmasıdır (Ekmekçi ve İnarşan 2000).

İspat. (\Rightarrow) γ bir genel helis olsun. O zaman (1) den

$$\nabla_X Y = k_1 X + k_2 Z$$

yazabiliriz. Türev alırsak

$$\begin{aligned} \nabla_X^2 Y &= k'_1 X + k_1 \nabla_X X + k'_2 Z + k_2 \nabla_X Z \\ &= k'_1 X + k_1(k_1 Y) + k'_2 Z + k_2(-k_2 Y) \\ &= k'_1 X + k'_2 Z + (k_1^2 - k_2^2)Y \\ &= k'_1 X + k'_2 \left[\frac{1}{k_2} \nabla_X Y - \frac{k_1}{k_2} X \right] + (k_1^2 - k_2^2)Y \\ &= \frac{k'_2}{k_2} \nabla_X Y + \left[\frac{k'_1 k_2 - k'_2 k_1}{k_2} \right] X + (k_1^2 - k_2^2)Y \end{aligned}$$

buluruz. γ bir genel helis olduğundan $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$ yani $k'_1 k_2 - k'_2 k_1 = 0$ dir. Bunu

yukarıda yerine yazarsak

$$\nabla_X^2 Y = \frac{k'_2}{k_2} \nabla_X Y + (k_1^2 - k_2^2)Y$$

buluruz, burada $\mu_1 = -\frac{k_2'}{k_2}$ ve $\mu_2 = k_2^2 - k_1^2$ alınırsa

$$\nabla_X^2 Y + \mu_1 \nabla_X Y + \mu_2 Y = 0$$

olur.

(\Leftarrow) Karşıt olarak, farzedelim ki (2) eşitlikleri var olsun. Time-like eğrinin bir genel helis eğrisi olduğunu göstereceğiz.

(1) den

$$X = \frac{1}{k_1} \nabla_X Y - \frac{k_2}{k_1} Z$$

yazabiliriz. Bu son ifadenin türevini alırsak

$$\begin{aligned} \nabla_X X &= \frac{1}{k_1} \nabla_X^2 Y - \frac{k_2'}{k_1^2} \nabla_X Y - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' Z - \frac{k_2}{k_1} \nabla_X Z \\ &= \frac{1}{k_1} \nabla_X^2 Y - \frac{k_2'}{k_1^2} \nabla_X Y - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' Z - \frac{k_2}{k_1} (-k_2 Y) \\ &= \frac{1}{k_1} \{ \nabla_X^2 Y - \frac{k_2'}{k_1} \nabla_X Y - (k_1^2 - k_2^2) Y \} + k_1 Y - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' Z \end{aligned}$$

buluruz. Hipotezden $\nabla_X^2 Y - \frac{k_2'}{k_1} \nabla_X Y - (k_1^2 - k_2^2) Y = 0$ olacağından dolayı da

$$k_1 Y = k_1 Y - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' Z$$

ve böylece

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' Z = 0$$

dır, buradan ($Z \neq 0$) $\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$ bulunur. Yani γ time-like eğrisi bir genel helistir.

Aynı ispat

$$\nabla_X^2 Y + \mu_1 \nabla_X Y + \mu_2 Y = 0$$

için de yapılabilir. □

Teorem 3.1.2. \mathbb{L}^3 te bir γ time-like eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\nabla_X^3 Z + \beta_1 \nabla_X^2 Z + \beta_2 \nabla_X Z = 0$$

olmasıdır. burada $\beta_1 = -3\frac{k_2'}{k_2}$ ve $\beta_2 = -\left\{\frac{k_2''}{k_2} - 3\frac{(k_2')^2}{k_2^2} + k_1^2 - k_2^2\right\}$ dir (Ekmekçi ve İlarıslan 2000).

İspat. γ bir genel helis olsun. O zaman $\nabla_X Z = -k_2 Y$ eşitliğinin türevini alırsak

$$\nabla_X^2 Z = -k_2' Y - k_2 \nabla_X Y$$

tekrar türev alırsak da

$$\begin{aligned} \nabla_X^3 Z &= -k_2'' Y - k_2' \nabla_X Y - k_2' \nabla_X Y - k_2 \nabla_X^2 Y \\ &= -k_2'' Y - 2k_2' \nabla_X Y - k_2 \nabla_X^2 Y \\ &= -k_2'' Y - 2k_2' \nabla_X Y - k_2 \{k_1' X + k_1 \nabla_X X + k_2' Z + k_2 \nabla_X Z\} \\ &= -k_2'' Y - 2k_2' \nabla_X Y - k_2 \{k_1' X + k_1^2 Y + k_2' Z + k_2 \nabla_X Z\} \\ &= -k_2'' Y - 2k_2' \nabla_X Y - k_2 k_1' X - k_2 k_1^2 Y - k_2 k_2' Z - k_2^2 \nabla_X Z \\ &= (-k_2'' - k_2 k_1^2) Y - 2k_2' \nabla_X Y - k_2 k_1' X - k_2 k_2' Z - k_2^2 \nabla_X Z \end{aligned}$$

olur, (1) deki $Y = -\frac{1}{k_2} \nabla_X Z$, $\nabla_X Y = k_1 X + k_2 Z$ ve $Z = \frac{1}{k_2^2} \{-k_2' Y - k_1 k_2 X - \nabla_X^2 Z\}$

eşitliklerini yukarıda yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
 \nabla_X^3 Z &= (-k_2'' - k_2 k_1^2 + k_2^3) \left(-\frac{1}{k_2} \nabla_X Z \right) - 2k_2'(k_1 X + k_2 Z) - k_2 k_2' Z - k_2 k_1' X \\
 &= \left\{ \frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 - k_2^2 \right\} \nabla_X Z - (2k_1 k_2' + k_2 k_1') X + 3k_2 k_2' \left\{ \frac{\nabla_X^2 Z + k_2' Y + k_1 k_2' X}{k_2^2} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 - k_2^2 \right\} \nabla_X Z - (2k_1 k_2' + k_2 k_1') X + 3 \frac{k_2'}{k_2} \nabla_X^2 Z + 3 \frac{(k_2')^2}{k_2} Y + 3k_1 k_2' X
 \end{aligned}$$

olur, burada $Y = -\frac{1}{k_2} \nabla_X Z$ eşitliğinde kullanırsak

$$\nabla_X Z^3 = \left\{ -3 \frac{(k_2')^2}{k_2^2} + \frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 - k_2^2 \right\} \nabla_X Z + 3 \frac{k_2'}{k_2} \nabla_X^2 Z + \{k_1 k_2' - k_2 k_1'\} X$$

olur. γ bir genel helis olduğundan $k_1 k_2' - k_2 k_1' = 0$ dir.

$$\beta_1 = -3 \frac{k_2'}{k_2} \quad \text{ve} \quad \beta_2 = -\left\{ \frac{k_2''}{k_2} - 3 \frac{(k_2')^2}{k_2^2} + k_1^2 - k_2^2 \right\}$$

dersek

$$\nabla_X^3 Z + \beta_1 \nabla_X^2 Z + \beta_2 \nabla_X Z = 0$$

yazabiliriz.

(\Leftarrow) Karşıt olarak, yukarıdaki eşitliğin var olduğunu düşünelim. γ time-like eğrisinin

bir genel helis olduğunu göstereceğiz. (1) den

$$X = \frac{1}{k_1} \nabla_X Y - \frac{k_2}{k_1} Z$$

yazabiliriz. Türev alırsak da

$$\nabla_X X = \frac{1}{k_1} \nabla_X^2 Y - \frac{k_1'}{k_1^2} \nabla_X Y - \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' Z - \left(\frac{k_2}{k_1} \right) \nabla_X Z$$

olur. Hipotezi ve yukarıdaki eşitliği kullanırsak

$$\nabla_X X = -\frac{1}{k_2^2} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' \nabla_X^2 Z + \frac{k_2'}{k_2^2} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' \nabla_X Z - \frac{k_1}{k_2} \nabla_X Z - \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' Z$$

buluruz, burada

$$\left(\frac{k_2}{k_1} \right)' Z = 0$$

olacağından $(Z \neq 0) \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' = 0$ ya da $\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$ dir. Bu da γ time-like eğrisinin bir genel helis olduğunu gösterir. \square

Sonuç 3.1.3. 1. \mathbb{L}^3 te bir γ time-like eğrisi (Y asli vektör alanı ile) bir dairesel helis gösterir $\Leftrightarrow \nabla_X^2 Y - \{k_1^2 - k_2^2\} Y = 0$ dir (Ekmekçi ve İlarıslan 2000).

Sonuç 3.1.4. 2. \mathbb{L}^3 te bir γ time-like eğrisi (Z binormal vektör alanı ile) bir dairesel helis gösterir $\Leftrightarrow \nabla_X^3 Z - \{k_1^2 - k_2^2\} \nabla_X Z = 0$ dir.

Eğer k_1 ve k_2 'yi sabit alırsak Sonuç 3.1.3. ve Sonuç 3.1.4. kolayca gösterilebilir (Ekmekçi ve İlarıslan 2000).

b) Space-Like Helis Eğrileri için Karakterizasyonlar

γ, \mathbb{L}^3 te bir space-like eğri ve bu eğrinin Frenet üç ayaklısı $\{X, Y, Z\}$ olsun. O zaman

$\gamma' = X$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \nabla_X X &= k_1 Y \\ \nabla_X Y &= k_1 X + k_2 Z \\ \nabla_X Z &= k_2 Y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dir (Ikawa 1985 ve Nakanishi 1988).

Bu bölümde, \mathbb{L}^3 te bir γ space-like eğri için aşağıdaki karakterizasyonları vereceğiz.

Teorem 3.1.5. \mathbb{L}^3 te bir space-like eğri γ olsun. γ nın bir genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_X^2 Y - \frac{k'_1}{k_1} \nabla_X Y - \{k_1^2 + k_2^2\} Y = 0 \\ \text{veya} \\ \nabla_X^2 Y - \frac{k'_2}{k_2} \nabla_X Y - \{k_1^2 + k_2^2\} Y = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

denklemlerinden birisinin sağlanmasıdır.

İspat. (İlarslan 2002). □

Teorem 3.1.6. \mathbb{L}^3 te bir space-like eğri γ olsun. γ nın bir genel helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_X^3 X - 3 \frac{k'_1}{k_1} \nabla_X^2 X - \left\{ \frac{k''_1}{k_1} - 3 \frac{(k'_1)^2}{k_1^2} + k_1^2 + k_2^2 \right\} \nabla_X X = 0 \\ \text{veya} \\ \nabla_X^3 X - 3 \frac{k'_2}{k_2} \nabla_X^2 X - \left\{ \frac{k''_2}{k_2} - 3 \frac{(k'_2)^2}{k_2^2} + k_1^2 + k_2^2 \right\} \nabla_X X = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

denklemlerinden birisinin sağlanmasıdır.

İspat. (İlarslan 2002). □

Teorem 3.1.7. \mathbb{L}^3 te bir space-like eğri γ olsun. γ nın bir genel helis olması için

gerek ve yeter koşul

$$\left. \begin{aligned} \nabla_X^3 Z - 3\frac{k'_1}{k_1}\nabla_X^2 Z - \left\{ \frac{k''_2}{k_2} - 3\frac{(k'_1)^2}{k_1^2} + k_1^2 + k_2^2 \right\} \nabla_X Z = 0 \\ \text{veya} \\ \nabla_X^3 Z - 3\frac{k'_2}{k_2}\nabla_X^2 Z - \left\{ \frac{k''_1}{k_1} - 3\frac{(k'_2)^2}{k_2^2} + k_1^2 + k_2^2 \right\} \nabla_X Z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

denklemlerinden birisinin sağlanmasıdır.

İspat. (İlarslan 2002).

□

4. \mathbb{L}^n DE TIME-LIKE VE SPACE-LIKE EĞRİLER

Bu bölümde \mathbb{L}^n deki time-like ve space-like eğrilerin harmonik eğrilikleri ve yüksek mertebeden eğriliklerinin harmonik eğrilikleri cinsinden ifadesi verilip eğilim çizgisi olma karakterizasyonları elde edilecektir. Son olarak oskülatör hiperküre ve eğilim çizgileri için diğer karakterizasyonlar verilecektir. Bu bölüm için referanslarımız Özdamar ve Hacısalihoğlu (1974), Hacısalihoğlu (1983), Ekmekçi vd (2000) ve Hacısalihoğlu ve Öztürk (2003) olacaktır.

4.1. \mathbb{L}^n de Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları

Tanım 4.1.1. γ , \mathbb{L}^n de bir time-like eğri olsun. V_1, γ nın birinci Frenet vektör alanı ve $X \in \chi(\mathbb{L}^n)$ de birim sabit vektör alanı olmak üzere eğer

$$\langle V_1, X \rangle = -c\varphi = \text{sabit} \quad (7)$$

ise o zaman γ eğrisi \mathbb{L}^n de bir genel helistir denir. φ açısı eğilim açısı, $Sp\{X\}$ ekseni de eğilim ekseni olarak adlandırılır.

γ , \mathbb{L}^n de bir space-like eğri olsun. Eğer,

$$\langle V_1, X \rangle = \cos\varphi = \text{sabit} \quad (8)$$

ise o zaman γ eğrisi \mathbb{L}^n de eğilim açısı φ ve eğilim ekseni $Sp\{X\}$ olan bir genel helis gösteriyor denir (Ekmekçi vd 2000).

Tanım 4.1.2. γ , \mathbb{L}^n de yay-uzunluğuyla parametrelendirilmiş bir C^∞ eğri olsun. γ eğrisi time-like ya da space-like bir eğri olmak üzere yüksek mertebeden eğrilik

fonksiyonları, sırasıyla, k_1, k_2, \dots, k_{n-1} , ($\forall k_i \neq 0$) ile gösterilsin.

$$H_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_i = \begin{cases} \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{k_1}{k_2}, & i = 1 \text{ için} \\ \{H'_{i-1} + \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i k_i H_{i-2}\} \frac{1}{k_{i+1}}, & 1 < i \leq n-2 \text{ için} \end{cases} \quad (9)$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna γ nın i yinci mertebeden harmonik eğrilik fonksiyonu denir. $H_0 = 0$ kabul edilir (Ekmekçi vd 2000).

Bu tanımdaki H_i fonksiyonlarının V_1 yönündeki türevlerini matrisel formda yazmak gerekirse,

$$H'_{i-1} = k_{i+1} H_i - \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i k_i H_{i-2}$$

olduğundan

$$H'_1 = k_3 H_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 H_0$$

$$H'_2 = k_4 H_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 H_1$$

$$H'_3 = k_5 H_4 - \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_4 H_2$$

⋮

$$H'_{n-4} = k_{n-2} H_{n-3} - \varepsilon_{n-4} \varepsilon_{n-3} k_{n-3} H_{n-5}$$

$$H'_{n-3} = k_{n-1} H_{n-2} - \varepsilon_{n-3} \varepsilon_{n-2} k_{n-2} H_{n-4}$$

$$H'_{n-2} = -\varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} k_{n-1} H_{n-3}$$

olup matrisimiz aşağıdaki gibidir;

$$\begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \\ H_3' \\ \vdots \\ H_{n-4}' \\ H_{n-3}' \\ H_{n-2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2\varepsilon_3k_3 & 0 & k_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_3\varepsilon_4k_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{n-3}\varepsilon_{n-2}k_{n-1} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_{n-4} \\ H_{n-3} \\ H_{n-2} \end{bmatrix}$$

$n = 3$ için

$$\begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \\ H_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_3 & 0 \\ -\varepsilon_2\varepsilon_3k_3 & 0 & k_4 \\ 0 & -\varepsilon_3\varepsilon_4k_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}$$

olur (Ekmekçi vd 2000).

Teorem 4.1.3. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^n$ time-like ya da space-like eğrisi, yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş bir genel helis olsun. γ nın eğilim eksenini $Sp\{X\}$, Frenet n -ayaklısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilik fonksiyonları da H_1, H_2, \dots, H_{n-2} olmak üzere,

$$\langle V_{j+2}, X \rangle = H_j \langle V_1, X \rangle, \quad 1 \leq j \leq n-2 \quad (10)$$

dir (Ekmekçi vd 2000).

İspat. İspatı tümevarım yöntemi ile yapacağız. $j = 1$ için

$$\langle V_3, X \rangle = H_1 \langle V_1, X \rangle$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle V_1, X \rangle = \text{sabit}$$

olduğundan $\langle V_1', X \rangle = 0$ ya da $\langle V_2, X \rangle = 0 \Rightarrow \langle V_2', X \rangle = 0$ dir. Burada V_2' nin Teorem 2.7.2. deki değeri yerine yazılırsa

$$\langle -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 V_1 + k_2 V_3, X \rangle = 0$$

ya da

$$-\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 \langle V_1, X \rangle + k_2 \langle V_3, X \rangle = 0$$

ya da

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 \langle V_1, X \rangle = k_2 \langle V_3, X \rangle$$

ya da

$$\langle V_3, X \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{k_1}{k_2} \langle V_1, X \rangle$$

ya da Tanım 4.1.2. deki H_1 in tanımı kullanılırsa

$$\langle V_3, X \rangle = H_1 \langle V_1, X \rangle$$

bulunur. Böylece $j = 1$ için eşitlik doğrudur.

$j = i - 1$ için eşitlik doğru olsun. O zaman $j = i$ için de doğru olduğunu göstermeliyiz.

Teorem $j = i - 1$ için doğru olduğundan

$$\langle V_{i+1}, X \rangle = H_{i-1} \langle V_1, X \rangle$$

yazabiliriz. Eşitliğin her iki tarafının V_1 yönündeki türevini alırsak

$$\langle V_{i+1}', X \rangle = H_{i-1}' \langle V_1, X \rangle$$

ya da Teorem 2.7.2. deki V'_{i+1} değeri yerine yazılırsa

$$\langle -\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i V_i + k_{i+1} V_{i+2}, X \rangle = H_{i-1}' \langle V_1, X \rangle$$

ya da

$$-\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i \langle V_i, X \rangle + k_{i+1} \langle V_{i+2}, X \rangle = H_{i-1}' \langle V_1, X \rangle$$

ya da

$$\begin{aligned} k_{i+1} \langle V_{i+2}, X \rangle &= \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i \langle V_i, X \rangle + H_{i-1}' \langle V_1, X \rangle \\ &= \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i H_{i-2} \langle V_1, X \rangle + H_{i-1}' \langle V_1, X \rangle \\ &= \{ \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i H_{i-2} + H_{i-1}' \} \langle V_1, X \rangle \end{aligned}$$

ya da

$$\langle V_{i+2}, X \rangle = \frac{1}{k_{i+1}} \{ \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i H_{i-2} + H_{i-1}' \} \langle V_1, X \rangle$$

olur. Tanım 4.1.2. deki H_i değeri yerine yazılırsa

$$\langle V_{i+2}, X \rangle = H_i \langle V_1, X \rangle$$

olacağından Teorem $j = i$ için de doğru olmuş olur. Bu da ispatı tamamlar (Ekmekeçi vd 2000). □

Teorem 4.1.4. $\gamma \subset \mathbb{L}^n$ time-like eğrisinin Frenet n - ayaklısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilik fonksiyonları da H_1, H_2, \dots, H_{n-2} olsun. O zaman

" γ, \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 = \text{sabit 'dir.}$ "

İspat. (\Rightarrow): γ time-like eğrisi \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisi olsun. γ nın eğilim açısını φ , eğilim eksenini de $Sp\{X\}$ ile gösterelim. Tanım 4.1.1. gereğince $\langle V_1, X \rangle = -c\eta\varphi$

ve Teorem 4.1.3. gereğince de $\langle V_{i+2}, X \rangle = H_i \langle V_1, X \rangle$ dir. Ayrıca $\langle V_1, X \rangle =$
sabit olduğundan $\langle V_1', X \rangle = 0$ ya da $\langle V_2, X \rangle = 0$ yazabiliriz.

$\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ortonormal sistemi $\chi(\mathbb{L}^n)$ de bir ortonormal baz olacağından

$$X \in Sp\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

veya

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1} \langle V_i, X \rangle \cdot V_i$$

yazabiliriz. O halde

$$X = \varepsilon_0 \langle V_1, X \rangle \cdot V_1 + \varepsilon_1 \langle V_2, X \rangle \cdot V_2 + \sum_{i=3}^n \varepsilon_{i-1} \langle V_i, X \rangle \cdot V_i$$

dir. Burada $\langle V_1, X \rangle = -ch\varphi$ ve $\langle V_2, X \rangle = 0$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$X = \varepsilon_0(-ch\varphi) \cdot V_1 + \sum_{i=3}^n \varepsilon_{i-1} \langle V_i, X \rangle \cdot V_i$$

ya da

$$X = -\varepsilon_0 ch\varphi \cdot V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} \langle V_{j+2}, X \rangle \cdot V_{j+2}$$

olur. Teorem 4.1.3. gereğince $\langle V_{j+2}, X \rangle = H_j \langle V_1, X \rangle$ ve γ time-like eğrisi
eğilim çizgisi olduğundan $\langle V_1, X \rangle = -ch\varphi$ dir. Bu değerleri de yerine yazarsak

$$X = -\varepsilon_0 ch\varphi \cdot V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j (-ch\varphi) \cdot V_{j+2}$$

ya da

$$X = -ch\varphi \{ \varepsilon_0 \cdot V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j \cdot V_{j+2} \}$$

olur. X time-like olan bir birim vektör alanı olduğundan

$$1 = \|X\|^2 = -\langle X, X \rangle$$

olmalıdır. Ayrıca γ bir time-like eğri olduğundan

$$\varepsilon_0 = -1 \text{ ve } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{n-1} = +1$$

olduğunu kullanırsak X vektör alanı için

$$X = ch\varphi\left\{V_1 - \sum_{j=1}^{n-2} H_j \cdot V_{j+2}\right\}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\langle X, X \rangle = ch^2\varphi\left\{\langle V_1, V_1 \rangle + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 \cdot \langle V_{j+2}, V_{j+2} \rangle\right\}$$

dir. Burada $\langle V_1, V_1 \rangle = \varepsilon_0 = -1$ ve $\forall j = 1, \dots, n-2$ için

$\langle V_{j+2}, V_{j+2} \rangle = \varepsilon_{j+1} = +1$ olduğunu kullanırsak

$$\langle X, X \rangle = ch^2\varphi\left\{-1 + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2\right\}$$

buluruz. $\langle X, X \rangle = -1$ olduğundan da

$$\begin{aligned}
 ch^2\varphi\{-1 + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2\} &= -1 \\
 \Rightarrow 1 - \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 &= \frac{1}{ch^2\varphi} \\
 \Rightarrow -\sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 &= \frac{1}{ch^2\varphi} - 1 \\
 \Rightarrow -\sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 &= \frac{1 - ch^2\varphi}{ch^2\varphi} \\
 \Rightarrow -\sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 &= -\frac{sh^2\varphi}{ch^2\varphi} \\
 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 &= tgh^2\varphi
 \end{aligned}$$

dir.

(\Leftarrow): $\gamma \subset \mathbb{L}^n$ time-like eğrisinin harmonik eğrilikleri için

$$\sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 = tgh^2\varphi = \text{sabit}$$

olsun. Göstereceğiz ki γ bir eğilim çizgisidir. Bunun için bir

$$X = ch\varphi\{V_1 - \sum_{j=1}^{n-2} H_j \cdot V_{j+2}\}$$

vektörünü gözönüne alalım. Önce bu X vektör alanının sabit olduğunu gösterelim.

Bunun için yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının V_1 yönündeki türevini alalım;

$$\nabla_{V_1} X = ch\varphi[\nabla_{V_1} V_1 - \sum_{j=1}^{n-2} (\nabla_{V_1} H_j \cdot V_{j+2} + H_j \nabla_{V_1} V_{j+2})]$$

dir. Tanım 4.1.2. deki

$$\nabla_{V_1} H_j = k_{j+2} H_{j+1} - \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} k_{j+1} H_{j-1}$$

eşitliğini ve Teorem 2.7.2. deki

$$\nabla_{V_1} V_{j+2} = -\varepsilon_j \varepsilon_{j+1} k_{j+1} V_{j+1} + k_{j+2} V_{j+3}$$

Frenet denklemini yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1} X = & \operatorname{ch}\varphi[k_1 V_2 - \sum_{j=1}^{n-2} \{k_{j+2} H_{j+1} V_{j+2} - \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} k_{j+1} H_{j-1} V_{j+2} \\ & + H_j(-\varepsilon_j \varepsilon_{j+1} k_{j+1} V_{j+1} + k_{j+2} V_{j+3})\}] \end{aligned}$$

olur. $\forall j = 1, \dots, n-2$ için $\varepsilon_j = +1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1} X = & \operatorname{ch}\varphi[k_1 V_2 - \sum_{j=1}^{n-2} \{k_{j+2} H_{j+1} V_{j+2} - k_{j+1} H_{j-1} V_{j+2} \\ & + H_j(-k_{j+1} V_{j+1} + k_{j+2} V_{j+3})\}] \end{aligned}$$

dir. Burada sağ tarafı açarsak sıfır olduğunu görürüz. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1} X = & \operatorname{ch}\varphi[k_1 V_2 - k_3 H_2 V_3 + k_2 H_0 V_3 + H_1 k_2 V_2 - H_1 k_3 V_4 - k_4 H_3 V_4 \\ & + k_3 H_1 V_4 + H_2 k_3 V_3 - H_2 k_4 V_5 - k_5 H_4 V_5 + k_4 H_2 V_5 + H_3 k_4 V_4 \\ & - H_3 k_5 V_6 - k_6 H_5 V_6 + k_5 H_4 V_6 - H_4 k_6 V_7 + \dots + k_{n-1} H_{n-2} V_{n-1} \\ & - k_{n-2} H_{n-4} V_n - H_{n-3} k_{n-2} V_{n-2} + H_{n-3} k_{n-1} V_n \\ & + k_n H_{n-1} V_n - k_{n-1} H_{n-3} V_n - H_{n-2} k_{n-1} V_{n-1} + H_{n-2} k_n V_{n+1}] \end{aligned}$$

olup $\nabla_{V_1} X = 0$ dir. Buna göre, $X \in \chi(\mathbb{L}^n)$ vektör alanı sabit vektör alanı olarak

belirlenmiş olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \langle X, X \rangle &= ch^2\varphi\{\langle V_1, V_1 \rangle + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 \langle V_{j+2}, V_{j+2} \rangle\} \\
 &= ch^2\varphi\{\varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 \varepsilon_{j+1}\} \\
 &= ch^2\varphi\{-1 + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2\} \\
 &= ch^2\varphi\{-1 + tgh^2\varphi\} \\
 &= ch^2\varphi\{tgh^2\varphi - 1\} \\
 &= ch^2\varphi\left\{\frac{sh^2\varphi}{ch^2\varphi} - 1\right\} \\
 &= ch^2\varphi\left\{\frac{sh^2\varphi - ch^2\varphi}{ch^2\varphi}\right\} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

olduğundan X time-like vektörü birim vektördür.

Son olarak γ time-like eğrisi ve X birim sabit time-like vektörü için

$$\begin{aligned}
 \langle V_1, X \rangle &= \langle V_1, ch\varphi\{V_1 - \sum_{j=1}^{n-2} H_j V_{j+2}\} \rangle \\
 &= ch\varphi\{\langle V_1, V_1 \rangle - \sum_{j=1}^{n-2} H_j \langle V_1, V_{j+2} \rangle\} \\
 &= ch\varphi\{\varepsilon_0 - \sum_{j=1}^{n-2} H_j \cdot 0\} \\
 &= ch\varphi\{-1\} \\
 &= -ch\varphi
 \end{aligned}$$

olduğundan γ time-like eğrisi eğilim eksenine $Sp\{X\}$ ve eğilim açısı φ olan bir eğilim

çizgisi olur. □

Teorem 4.1.5. $\gamma \subset \mathbb{L}^n$ space-like eğrisinin Frenet n - ayaksız $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve harmonik eğrilikleri de H_1, H_2, \dots, H_{n-2} olsun. O zaman

" γ, \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j^2 = \text{sabit}$ 'dir."

İspat. (\Rightarrow): γ space-like eğrisi \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisi olsun. γ nın eğilim açısını φ , eğilim eksenini de $Sp\{X\}$ ile gösterelim. Tanım 4.1.1. gereğince $\langle V_1, X \rangle = \cos\varphi$ ve Teorem 4.1.3. gereğince de $\langle V_{i+2}, X \rangle = H_i \langle V_1, X \rangle$ dir. Ayrıca $\langle V_1, X \rangle = \text{sabit}$ olduğundan $\langle V_1', X \rangle = 0$ ve $\langle V_2, X \rangle = 0$ yazabiliriz.

$\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ortonormal sistemi $\chi(\mathbb{L}^n)$ de bir ortonormal baz olacağından

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1} \langle V_i, X \rangle \cdot V_i$$

yazabiliriz. O halde

$$X = \varepsilon_0 \langle V_1, X \rangle \cdot V_1 + \varepsilon_1 \langle V_2, X \rangle \cdot V_2 + \sum_{i=3}^n \varepsilon_{i-1} \langle V_i, X \rangle \cdot V_i$$

dir. Burada $\langle V_1, X \rangle = \cos\varphi$ ve $\langle V_2, X \rangle = 0$ olduğundan

$$X = \varepsilon_0 \cos\varphi \cdot V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} \langle V_{j+2}, X \rangle \cdot V_{j+2}$$

olur. Teorem 4.1.3. gereğince $\langle V_{j+2}, X \rangle = H_j \cos\varphi$ olduğundan

$$X = \cos\varphi \left\{ \varepsilon_0 \cdot V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j \cdot V_{j+2} \right\}$$

yazabiliriz.

$\gamma \subset \mathbb{L}^n$ space-like eğrisi için $\varepsilon_0 = +1$ olduğundan

$$X = \cos\varphi \left\{ V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j \cdot V_{j+2} \right\}$$

X space-like vektörü birim uzunlukta olduğundan

$$\| X \|^2 = \langle X, X \rangle = 1$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= \cos^2\varphi \left\{ \langle V_1, V_1 \rangle + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1}^2 H_j^2 \langle V_{j+2}, V_{j+2} \rangle \right\} \\ &= \cos^2\varphi \left\{ \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 \varepsilon_{j+1} \right\} \\ &= \cos^2\varphi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 \varepsilon_{j+1} \right\} \end{aligned}$$

olup, $\langle X, X \rangle$ yerine 1 yazarsak

$$\begin{aligned} \cos^2\varphi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j^2 \right\} &= 1 \\ \Rightarrow 1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j^2 &= \frac{1}{\cos^2\varphi} \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j^2 &= \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j^2 &= \frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j^2 &= \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j^2 &= \operatorname{tg}^2\varphi = \text{sabit} \end{aligned}$$

dir.

$$(\Leftarrow): \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j^2 = tg^2\varphi = \text{sabit}$$

olsun. $\gamma \subset \mathbb{L}^n$ space-like eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu göstereceğiz. O halde öncelikle

$$X = \cos\varphi \left\{ V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} H_j \cdot V_{j+2} \right\}$$

vektörünün birim vektör ve sabit bir vektör olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= \cos^2\varphi \left\{ \langle V_1, V_1 \rangle + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1}^2 H_j^2 \langle V_{j+2}, V_{j+2} \rangle \right\} \\ &= \cos^2\varphi \left\{ \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1}^2 H_j^2 \varepsilon_{j+1} \right\} \\ &= \cos^2\varphi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-2} H_j^2 \varepsilon_{j+1} \right\} \\ &= \cos^2\varphi \{ 1 + tg^2\varphi \} \\ &= \cos^2\varphi \left\{ 1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \right\} \\ &= \cos^2\varphi \left\{ \frac{1}{\cos^2\varphi} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Böylece X space-like vektörü birim vektördür. Şimdi de X vektörünün V_1 yönündeki türevini, Teorem 2.7.2. ve Tanım 4.1.2. yi kullanarak, alalım

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1} X &= \cos\varphi \left\{ \nabla_{V_1} V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} (\nabla_{V_1} H_j \cdot V_{j+2} + H_j \nabla_{V_1} V_{j+2}) \right\} \\ &= \cos\varphi \left\{ k_1 V_2 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1} (k_{j+2} H_{j+1} V_{j+2} \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} k_{j+1} H_{j-1} V_{j+2} - \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} k_{j+1} H_j V_{j+1} + k_{j+2} H_j V_{j+3}) \right\} \\ &= \cos\varphi \left\{ k_1 V_2 + \sum_{j=1}^{n-2} [\varepsilon_{j+1} k_{j+2} H_{j+1} V_{j+2} - \varepsilon_j k_{j+1} H_{j-1} V_{j+2} \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_j k_{j+1} H_j V_{j+1} + \varepsilon_{j+1} k_{j+2} H_j V_{j+3}] \right\} \end{aligned}$$

olur. Sağ tarafı açarsak sıfır olduğunu görürüz. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
 \nabla_{V_1} X &= \cos\varphi\{k_1V_2 + \varepsilon_2k_3H_2V_3 - \varepsilon_1k_2H_1V_2 + \varepsilon_2H_1k_3V_4 + \varepsilon_3k_4H_3V_4 \\
 &- \varepsilon_2k_3H_1V_4 - \varepsilon_2k_3H_2V_3 + \varepsilon_3k_4H_2V_5 + \varepsilon_4k_5H_4V_5 - \varepsilon_3k_4H_2V_5 \\
 &- \varepsilon_3k_4H_3V_4 + \varepsilon_4k_5H_3V_6 + \varepsilon_5k_6H_5V_6 - \varepsilon_4k_5H_3V_6 + \dots \\
 &+ \varepsilon_{n-2}k_{n-1}H_{n-2}V_{n-1} - \varepsilon_{n-3}k_{n-2}H_{n-4}V_{n-1} - \varepsilon_{n-3}k_{n-2}H_{n-3}V_{n-2} \\
 &+ \varepsilon_{n-2}k_{n-1}H_{n-3}V_n + \varepsilon_{n-1}k_nH_{n-1}V_n \\
 &- \varepsilon_{n-2}k_{n-1}H_{n-3}V_n - \varepsilon_{n-2}k_{n-1}H_{n-2}V_{n-1} + \varepsilon_{n-1}k_nH_{n-2}V_{n+1}\} \\
 &= \cos\varphi(0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

dır. Son olarak γ space-like eğrisi ile birim sabit X space-like vektörü için

$$\begin{aligned}
 \langle V_1, X \rangle &= \langle V_1, \cos\varphi\{V_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1}H_jV_{j+2}\} \rangle \\
 &= \cos\varphi\{\langle V_1, V_1 \rangle + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1}H_j \langle V_1, V_{j+2} \rangle\} \\
 &= \cos\varphi\{\varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon_{j+1}H_j \cdot 0\} \\
 &= \cos\varphi \cdot 1 \\
 &= \cos\varphi
 \end{aligned}$$

olduğundan γ space-like eğrisi eğilim çizgisidir. \square

4.2. Yüksek Mertebeden Eğriliklerin Harmonik Eğrilikler Cinsinden İfadesi

Teorem 4.2.1. γ, \mathbb{L}^n de bir time-like (ya da space-like) eğri olsun. γ eğrisinin bir $\gamma(s)$ noktasındaki eğrilikleriyle harmonik eğrilikleri arasında

$$k_r = \varepsilon_{r-1} \frac{\sum_{i=1}^{r-2} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_{r-1}H_{r-2}}; \quad 2 < r \leq n-2 \quad (11)$$

bağıntısı vardır.

İspat. İspat için tünevarım yöntemini uygulayacağız. Tanım 4.1.2. deki

$$H_i = \{H'_{i-1} + \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i H_{i-2}\} \frac{1}{k_{i+1}}, \quad 1 < i \leq n-2$$

deşitliğinden

$$k_{i+1} = \frac{H'_{i-1} + \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i H_{i-2}}{H_i}, \quad 1 < i \leq n-2 \quad (12)$$

dir. Bu ifadede $i = 2$ alırsak $k_3 = \frac{H'_{i-1} + \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i k_i H_{i-2}}{H_i}$ olup $H_0 = 0$ kabulümüzden dolayı da

$$k_3 = \frac{H'_1}{H_2} \quad (13)$$

dir. Bu eşitliğin sağ tarafının pay ve paydasını $2H_1$ ile çarparsak eşitlik bozulmayacağından

$$k_3 = \frac{2H_1 H'_1}{2H_1 H_2}$$

ya da

$$k_3 = \frac{(H_1^2)'}{2H_1 H_2} \quad (14)$$

buluruz. (11) formülünde $r = 3$ aldığımızda

$$k_3 = \varepsilon_2 \frac{\sum_{i=1}^1 \varepsilon_{i+1}(H_i^2)'}{2H_1H_2}$$

ya da

$$k_3 = \frac{\varepsilon_2^2(H_1^2)'}{2H_1H_2}$$

ya da $\varepsilon_2^2 = 1$ olacağından $k_3 = \frac{(H_1^2)'}{2H_1H_2}$ buluruz ki bu da yukarıda bulduğumuz (14) eşitliği ile aynıdır. O halde formül $r = 3$ için doğrudur.

Şimdi $r = 4$ için $k_4 = \varepsilon_3 \frac{\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1}(H_i^2)'}{2H_2H_3}$ eşitliğinin ya da

$$\begin{aligned} k_4 &= \varepsilon_3 \frac{(\varepsilon_2(H_1^2)') + \varepsilon_3(H_2^2)'}{2H_2H_3} \\ &= \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3(H_1^2)' + (H_2^2)'}{2H_2H_3} \end{aligned}$$

eşitliğinin var olduğunu görelim.

(12) eşitliğinde $i = 3$ alırsak $k_4 = \frac{H_2' + \varepsilon_2\varepsilon_3k_3H_1}{H_3}$ olur, burada yukarıda bulduğumuz

$k_3 = \frac{H_1'}{H_2}$ eşitliğini yerine yazarsak

$$k_4 = \{H_2' + \varepsilon_2\varepsilon_3 \frac{H_1'}{H_2} H_1\} \frac{1}{H_3}$$

ya da

$$k_4 = \frac{H_2H_2' + \varepsilon_2\varepsilon_3H_1H_1'}{H_2H_3}$$

ya da

$$k_4 = \frac{2H_2H_2' + \varepsilon_2\varepsilon_32H_1H_1'}{2H_2H_3}$$

$$k_4 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 (H_1^2)' + (H_2^2)'}{2H_2 H_3} \quad (15)$$

olur ki bu da aradığımız eşitliktir. Böylece teoreminiz $r = 3$ için de doğru olmuştur.

Şimdi $r = p-1$ için teoremi doğru kabul edip $r = p$ için de doğru olacağını gösterelim.

Teorem $r = p - 1$ için doğru olduğundan

$$k_{p-1} = \varepsilon_{p-2} \frac{\sum_{i=1}^{p-3} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_{p-2} H_{p-3}} \quad (16)$$

eşitliği mevcuttur. Bu eşitliği Tanım 4.1.2. den bulduğumuz (12) eşitliğinde kullanırsak sonuca ulaşırız, şöyle ki; (12) eşitliğinde $i = p - 1$ alırsak

$$k_p = \frac{H'_{p-2} + \varepsilon_{p-2} \varepsilon_{p-1} k_{p-1} H_{p-3}}{H_{p-1}}$$

olur. Burada k_{p-1} yerine yukarıda bulduğumuz (16) eşitliğini yazarsak

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{1}{H_{p-1}} \left\{ H'_{p-2} + \varepsilon_{p-2} \varepsilon_{p-1} \left(\varepsilon_{p-2} \frac{\sum_{i=1}^{p-3} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_{p-2} H_{p-3}} \right) H_{p-3} \right\} \\ &= \frac{1}{H_{p-1}} \left\{ \frac{2H_{p-2} H'_{p-2} H_{p-3} + \varepsilon_{p-2}^2 \varepsilon_{p-1} H_{p-3} \sum_{i=1}^{p-3} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_{p-2} H_{p-3}} \right\} \\ &= \frac{1}{2H_{p-1} H_{p-2}} \left\{ \frac{H_{p-3}}{H_{p-3}} \left[2H_{p-2} H'_{p-2} + \varepsilon_{p-1} \sum_{i=1}^{p-3} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)' \right] \right\} \\ &= \frac{(H_{p-2}^2)' + \varepsilon_{p-1} \sum_{i=1}^{p-3} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_{p-1} H_{p-2}} \end{aligned}$$

olur ki burada $\varepsilon_{p-2}^2 = 1$ olduğunu kullanırsak

$$k_p = \varepsilon_{p-1} \frac{\sum_{i=1}^{p-2} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_{p-1}H_{p-2}}$$

yazabiliriz. Bu da teoremin $i = p$ için de doğruluğunu gösterir. \square

Sonuç 4.2.2. γ , \mathbb{L}^n de bir time-like eğri ise $\varepsilon_0 = -1$ ve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{n-1} = 1$ olacağından bu eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğrilikleri ile harmonik eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$k_r = \frac{\sum_{i=1}^{r-2} (H_i^2)'}{2H_{r-1}H_{r-2}}, \quad 2 < r \leq n-2$$

dir.

Sonuç 4.2.3. Eğer γ , \mathbb{L}^n de bir space-like eğri ise $\varepsilon_0 = +1$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ işaretlerinden sadece bir tanesi için $\varepsilon_m = -1$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$) olacağından Teorem 4.2.1.

$$k_r = \varepsilon_{r-1} \frac{1}{2H_{r-1}H_{r-2}} \left\{ \sum_{i=1}^{m-2} (H_i^2)' - (H_{m-1}^2)' + \sum_{i=m}^{r-2} (H_i^2)' \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

4.3. Lorentz Uzayında Eğilim Çizgileri İçin Diğer Karakterizasyonlar

Teorem 4.3.1. γ , $n \geq 4$ ve n çift olmak üzere \mathbb{L}^n de bir eğri (time-like ya da space-like) olsun. γ nın Frenet vektör alan sistemi $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$ olsun.

" γ eğrisi \mathbb{L}^{n-1} de bir eğilim çizgisidir. $\Leftrightarrow \det(\vec{V}_1', \vec{V}_2', \dots, \vec{V}_n') = 0$ dir."

İspat. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

\Rightarrow : γ eğrisi \mathbb{L}^{n-1} de bir eğilim çizgisi olsun. Bu durumda, $\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_n) = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için gerekliliğin ispatı: Teorem 2.7.2. gereğince

$$\vec{V}'_1 = k_1 \vec{V}_2$$

$$\vec{V}'_2 = -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 \vec{V}_1 + k_2 \vec{V}_3$$

$$\vec{V}'_3 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 \vec{V}_2 + k_3 \vec{V}_4$$

$$\vec{V}'_4 = -\varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 \vec{V}_3$$

olduğundan,

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \vec{V}'_3, \vec{V}'_4) = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \vec{V}'_3, \vec{V}'_4) = -k_1 \begin{vmatrix} -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \\ 0 & -\varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} \det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \vec{V}'_3, \vec{V}'_4) &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1^2 (\varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3^2) \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_1^2 k_3^2 \\ &= -k_1^2 k_3^2 \end{aligned}$$

dir. Burada Teorem 4.2.1. deki

$$k_3 = \frac{\sum_{i=1}^1 (H_i^2)'}{2H_1H_2}$$

değerini yerine yazarsak

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \vec{V}'_3, \vec{V}'_4) = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_1^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^1 (H_i^2)'}{2H_1H_2} \right]^2$$

bulunur. Hipotezden γ eğrisi \mathbb{L}^3 de bir eğilim çizgisi olduğundan $\sum_{i=1}^1 H_i^2 = sbt$ ve dolayısıyla $\left(\sum_{i=1}^1 H_i^2 \right)' = 0$ olur. O halde $\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \vec{V}'_3, \vec{V}'_4) = 0$ dir. Bu da teoremin $n = 4$ için doğru olduğunu gösterir.

Tümevarım yöntemine göre $n = p$ için teorem doğru olsun. Yani,

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_p) = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{p-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\varepsilon_{p-3} \varepsilon_{p-2} k_{p-2} & 0 & k_{p-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon_{p-2} \varepsilon_{p-1} k_{p-1} & 0 \end{vmatrix}$$

ya da

$$\begin{aligned} \det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_p) &= (\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1^2) (\varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3^2) \dots (\varepsilon_{p-2} \varepsilon_{p-1} k_{p-1}^2) \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-1} k_1^2 k_3^2 \dots k_{p-1}^2 \end{aligned}$$

dir.

$n = p + 2$ için teoremin doğruluğunu görelim;

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_{p+2}) = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_p & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\varepsilon_{p-1} \varepsilon_p k_p & 0 & k_{p+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_{p+1} & 0 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_{p+2}) &= \det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_p) \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_{p+1}^2 \\ &= (\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1^2) (\varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3^2) \dots (\varepsilon_{p-2} \varepsilon_{p-1} k_{p-1}^2) \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_{p+1}^2 \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_1^2 k_3^2 \dots k_{p-1}^2 k_{p+1}^2 \end{aligned}$$

olur. k_{p+1} in harmonik eğrilikler cinsinden değeri yerine yazılırsa

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_{p+2}) = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_1^2 k_3^2 \dots k_{p-1}^2 \left[\varepsilon_p \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_p H_{p-1}} \right]^2$$

olur. γ , \mathbb{L}^{p+1} de eğilim çizgisi olduğundan

$$\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_{i+1} H_i^2 = sbt$$

dolayısıyla

$$\left(\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_{i+1} H_i^2 \right)' = 0$$

ya da

$$\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)' = 0$$

olur. Bu değeri

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_{p+2}) = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_1^2 k_3^2 \dots k_{p-1}^2 \varepsilon_p^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_p H_{p-1}} \right]^2$$

eşitliğinde yerine yazarsak

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_{p+2}) = 0$$

olur. Bu da teoremin $n = p + 2$ için doğru olduğunu gösterir.

⇐: $\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_n) = 0$ olsun. $\gamma \subset \mathbb{L}^n$ time-like (ya da space-like) eğrisinin \mathbb{L}^{n-1}

de bir eğilim çizgisi olduğunu göstereceğiz. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n = 4$ için

$$\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \vec{V}'_3, \vec{V}'_4) = - \left[k_1 \frac{\left(\sum_{i=1}^1 H_i^2 \right)'}{2H_1 H_2} \right]^2$$

dir. Hipotezden dolayı $\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \vec{V}'_3, \vec{V}'_4) = 0$ ve dolayısıyla

$$k_1 \frac{\left(\sum_{i=1}^1 H_i^2 \right)'}{2H_1 H_2} = 0$$

olur. Burada $k_1 \neq 0$ olduğundan $\left(\sum_{i=1}^1 H_i^2 \right)' = 0$ ya da $\sum_{i=1}^1 H_i^2 = sbt$ tir. Bu da γ nın

\mathbb{L}^3 de bir eğilim çizgisi olması demektir.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n = p$ için teoremi doğru kabul edip $n = p + 2$ için de doğru olacağını göstereyim. Yani, $n = p$ için $\det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_p) = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_p) &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1} k_1^2 k_3^2 \cdots k_{p-1}^2 \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1} (k_1 k_3 \cdots k_{p-1})^2 \end{aligned}$$

olduğundan $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1} (k_1 k_3 \cdots k_{p-1})^2 = 0$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} \det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_{p+2}) &= \det(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2, \dots, \vec{V}'_p) \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_{p+1}^2 \\ &= [\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1} (k_1 k_3 \cdots k_{p-1})^2] \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_{p+1}^2 \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} (k_1 k_3 \cdots k_{p-1} k_{p+1})^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Burada $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0, \dots, k_{p-1} \neq 0$ olduğundan $k_{p+1} = 0$ olmalıdır. Yani,

$$k_{p+1} = \varepsilon_p \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_{p-1}H_p} = 0 \text{ ya da } \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_{i+1} (H_i^2)' = 0$$

dir. Bu da γ nın L^{p+1} de eğilim çizgisi olması demektir. Teorem $n = p + 2$ için de doğru olduğundan ispat tamamlanır. \square

4.4. Oskülatör Hiperküre ve Eğilim Çizgileri İçin Bir Diğer Karakterizasyon

Tanım 4.4.1. Bir $M \subset L^n$ time-like ya da space-like eğrisi ile $Q \in M$ noktası verilsin. M eğrisi ile $Q \in M$ nin bir komşuluğunda sonsuz yakın $p + 2$ noktası M ile ortak olan ve $(p + 1)$ - oskülatör düzlemde kalan S^p p - hiperküresine M nin

$Q \in M$ noktasındaki oskületör p - küresi denir (Özdamar ve Hacısalihoğlu 1974, Hacısalihoğlu 1983).

4.4.1. Time-like eğriler için oskületör küre merkezinin koordinatlarının bulunuşu

$M \subset \mathbb{L}^n$ time-like eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\gamma(s) \in M$ noktasında oskületör küre merkezi a ile gösterilsin. $\gamma(s) \in M$ noktasındaki Frenet n -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_n(s)\}$ olmak üzere $V_1(s)$ teğet vektör alanı için

$$\langle V_1(s), V_1(s) \rangle = \varepsilon_0 = -1$$

ve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{n-1} = +1$ dir. O halde merkezi a ve yarıçapı r olan oskületör küre için

$$a = \gamma(s) + m_1(s)V_1(s) + m_2(s)V_2(s) + \dots + m_n(s)V_n(s)$$

yazabiliriz (Özdamar ve Hacısalihoğlu 1974, Hacısalihoğlu 1983). Böylece

$$a - \gamma(s) = m_1(s)V_1(s) + m_2(s)V_2(s) + \dots + m_n(s)V_n(s)$$

olup

$$|\langle a - \gamma(s), a - \gamma(s) \rangle| = r^2$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanının türevi alınrsa

$$\langle V_1(s), a - \gamma(s) \rangle = 0 \tag{17}$$

yani $m_1(s) = 0$ bulunur. Türev alırsak

$$\begin{aligned}
 & \langle V_1'(s), a - \gamma(s) \rangle - \langle V_1(s), V_1(s) \rangle = 0 \\
 \Rightarrow & \langle k_1(s)V_2(s), a - \gamma(s) \rangle - \varepsilon_0 = 0 \\
 \Rightarrow & k_1(s) \langle V_2(s), a - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_0 \\
 \Rightarrow & k_1(s) \langle V_2(s), a - \gamma(s) \rangle = -1 \\
 \Rightarrow & \langle V_2(s), a - \gamma(s) \rangle = -\frac{1}{k_1(s)} \tag{18}
 \end{aligned}$$

buluruz. $\langle V_2(s), a - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_1 m_2(s)$ ve $\varepsilon_1 = +1$ olduğundan

$$m_2(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$$

dir. Bu değer (18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\langle V_2(s), a - \gamma(s) \rangle = m_2(s) \tag{19}$$

olur. (19) eşitliğinin her iki yanının $s \in I$ ya göre türevi alınırsa

$$\langle V_2'(s), a - \gamma(s) \rangle - \langle V_2(s), V_1(s) \rangle = m_2'(s)$$

ya da $\langle V_2(s), V_1(s) \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle V_2'(s), a - \gamma(s) \rangle = m_2'(s)$$

olur. $V_2'(s) = -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1(s) V_1(s) + k_2(s) V_3(s)$ değeri yerine yazılarak

$$\langle -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1(s) V_1(s) + k_2(s) V_3(s), a - \gamma(s) \rangle = m_2'(s)$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1(s) \langle V_1(s), a - \gamma(s) \rangle + k_2(s) \langle V_3(s), a - \gamma(s) \rangle = m_2'(s)$$

olduğu görülır. Burada $\langle V_1(s), a - \gamma(s) \rangle = m_1(s) = 0$ olduğundan

$$k_2(s) \langle V_3(s), a - \gamma(s) \rangle = m'_2(s)$$

$$\langle V_3(s), a - \gamma(s) \rangle = \frac{m'_2(s)}{k_2(s)} \quad (20)$$

dır. $\langle V_3(s), a - \gamma(s) \rangle = m_3(s)$ olduğundan

$$m_3(s) = \frac{m'_2(s)}{k_2(s)}$$

olur. Şimdi (20) eşitliğinin her iki yanının s ye gre tekrar trevini alalım.

$$\langle V'_3(s), a - \gamma(s) \rangle - \langle V_3(s), V_1(s) \rangle = m'_3(s)$$

olup $\langle V_3(s), V_1(s) \rangle = 0$ ve $V'_3(s) = -k_2(s)V_2(s) + k_3(s)V_4(s)$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\langle -k_2(s)V_2(s) + k_3(s)V_4(s), a - \gamma(s) \rangle = m'_3(s)$$

$$\Rightarrow -k_2(s) \langle V_2(s), a - \gamma(s) \rangle + k_3(s) \langle V_4(s), a - \gamma(s) \rangle = m'_3(s)$$

olur. Burada $\langle V_2(s), a - \gamma(s) \rangle = m_2(s)$ değerini yerine yazılırsa

$$-k_2(s)m_2(s) + k_3(s) \langle V_4(s), a - \gamma(s) \rangle = m'_3(s)$$

$$\Rightarrow \langle V_4(s), a - \gamma(s) \rangle = \frac{1}{k_3(s)} \{m'_3(s) + k_2(s)m_2(s)\} \quad (21)$$

olur. Burada

$$m_4(s) = \frac{1}{k_3(s)} \{m'_3(s) + k_2(s)m_2(s)\}$$

dir. Bu şekilde devam edersek $V_i = 4, \dots, n$ için

$$\langle V_{i-1}(s), a - \gamma(s) \rangle = m_{i-1}(s)$$

olduğundan

$$\langle V'_{i-1}(s), a - \gamma(s) \rangle - \langle V_{i-1}(s), V_1(s) \rangle = m'_{i-1}(s)$$

olup $V'_{i-1}(s) = -k_{i-2}(s)V_{i-2}(s) + k_{i-1}(s)V_i(s)$ değeri ile $\langle V_{i-1}(s), V_1(s) \rangle = 0$ değeri yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \langle -k_{i-2}(s)V_{i-2}(s) + k_{i-1}(s)V_i(s), a - \gamma(s) \rangle = m'_{i-1}(s) \\ \Rightarrow & -k_{i-2}(s) \langle V_{i-2}(s), a - \gamma(s) \rangle + k_{i-1}(s) \langle V_i(s), a - \gamma(s) \rangle = m'_{i-1}(s) \\ & -k_{i-2}(s)m_{i-2}(s) + k_{i-1}(s)m_i(s) = m'_{i-1}(s) \\ \Rightarrow & m_i(s) = \frac{1}{k_{i-1}(s)} \{m'_{i-1}(s) + k_{i-2}(s)m_{i-2}(s)\} \end{aligned} \quad (22)$$

olarak bulunur. O halde aşağıdaki tanımları sonuç olarak verebiliriz.

Tanım 4.4.2. (*m*-eğrilik fonksiyonları) $M \subset \mathbb{L}^n$ time-like eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin eğrilik fonksiyonları k_1, k_2, \dots, k_{n-1} ($k_{n-1} \neq 0$) ve birim teğet vektör alanı V_1 olsun. O zaman

$$m_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m_i = \begin{cases} 0 & i = 1 \text{ için} \\ -\frac{1}{k_1(s)} & i = 2 \text{ için} \\ \{m'_{i-1}(s) + k_{i-2}(s)m_{i-2}(s)\} \frac{1}{k_{i-1}(s)} & 2 < i \leq n \text{ için} \end{cases} \quad (23)$$

şeklinde tanımlı m_i fonksiyonuna M time-like eğrisinin i - yinci eğrilik fonksiyonu veya kısaca m_i eğrilik fonksiyonu denir.

4.4.2. Space-like eğriler için Oskülatör küre merkezinin koordinatlarının bulunuşu ve eğilim çizgilerinin oskülatör küre merkezi ile ilgili karakterizasyonları

$M \subset \mathbb{L}^n$ space-like eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\gamma(s) \in M$ noktasında oskülatör küre merkezi b ile gösterilsin $\gamma(s) \in M$ noktasındaki Frenet n -ayaklısı $\{V_1, \dots, V_n\}$ olmak üzere $V_1(s)$ teğet vektör alanı için $\langle V_1(s), V_1(s) \rangle = \varepsilon_0 = +1$ ve $1 < i < n$ için ε_i lardan sadece bir tanesi negatif işaretlidir. O halde b merkezli ve r yarıçaplı oskülatör küreyi

$$b = \gamma(s) + m_1(s)V_1(s) + m_2(s)V_2(s) + \dots + m_n(s)V_n(s)$$

ya da

$$b - \gamma(s) = m_1(s)V_1(s) + m_2(s)V_2(s) + \dots + m_n(s)V_n(s)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Böylece

$$|\langle b - \gamma(s), b - \gamma(s) \rangle| = r^2$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanının türevi alınırsa

$$\langle V_1(s), b - \gamma(s) \rangle = 0 \quad (24)$$

yani $m_1(s) = 0$ buluruz. (24) eşitliğinin tekrar türevi alındığında

$$\begin{aligned} & \langle V_1'(s), b - \gamma(s) \rangle - \langle V_1(s), V_1(s) \rangle = 0 \\ \Rightarrow & \langle k_1(s)V_2(s), b - \gamma(s) \rangle - \varepsilon_0 = 0 \\ \Rightarrow & k_1(s) \langle V_2(s), b - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

dir. γ space-like eğri olduğundan ε_0 yerine 1 yazabiliriz. O halde

$$\begin{aligned} k_1(s) \langle V_2(s), b - \gamma(s) \rangle &= 1 \\ \Rightarrow \langle V_2(s), b - \gamma(s) \rangle &= \frac{1}{k_1(s)} \end{aligned} \quad (25)$$

dir. Ya da $\langle V_2(s), b - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_1 m_2(s)$ olduğundan

$$m_2(s) = \frac{\varepsilon_1}{k_1(s)}$$

olur. Şimdi (25) eşitliğinin tekrar türevini alalım.

$$\begin{aligned} \langle V_2'(s), b - \gamma(s) \rangle - \langle V_2(s), V_1(s) \rangle &= \varepsilon_1 m_2'(s) \\ \Rightarrow \langle -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1(s) V_1(s) + k_2(s) V_3(s), b - \gamma(s) \rangle - 0 &= \varepsilon_1 m_2'(s) \\ \Rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1(s) \langle V_1(s), b - \gamma(s) \rangle + k_2(s) \langle V_3(s), b - \gamma(s) \rangle &= \varepsilon_1 m_2'(s) \end{aligned}$$

olur, burada $\langle V_1(s), b - \gamma(s) \rangle = m_1(s) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} k_2(s) \langle V_3(s), b - \gamma(s) \rangle &= \varepsilon_1 m_2'(s) \\ \Rightarrow \langle V_3(s), b - \gamma(s) \rangle &= \varepsilon_1 \frac{m_2'(s)}{k_2(s)} \end{aligned} \quad (26)$$

ya da $\langle V_3(s), b - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_2 m_3(s)$ olduğundan

$$m_3(s) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{m_2'(s)}{k_2(s)}$$

dir. Şimdi (26) eşitliğinin tekrar türevini alalım.

$$\langle V_3'(s), b - \gamma(s) \rangle - \langle V_3(s), V_1(s) \rangle = \varepsilon_2 m_3'(s)$$

dir, burada $\langle V_3(s), V_1(s) \rangle = 0$ ve $V_3'(s) = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2(s) V_2(s) + k_3(s) V_4(s)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2(s) \langle V_2(s), b - \gamma(s) \rangle + k_3(s) \langle V_4(s), b - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_2 m_3'(s) \\
 \Rightarrow & -\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 k_2(s) m_2(s) + k_3(s) \langle V_4(s), b - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_2 m_3'(s) \\
 \Rightarrow & \langle V_4(s), b - \gamma(s) \rangle = \frac{\varepsilon_2}{k_3(s)} \{m_3'(s) + k_2(s) m_2(s)\} \quad (27)
 \end{aligned}$$

dir. $\langle V_4(s), b - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_3 m_4(s)$ olduğundan

$$m_4(s) = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{k_3(s)} \{m_3'(s) + k_2(s) m_2(s)\}$$

olur. Bu şekilde devam edersek $3 < i \leq n$ için

$$\langle V_{i-1}(s), a - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_{i-2} m_{i-1}(s)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 & \langle V_{i-1}'(s), a - \gamma(s) \rangle - \langle V_{i-1}(s), V_1(s) \rangle = \varepsilon_{i-2} m_{i-1}'(s) \\
 \Rightarrow & \langle -\varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-2} k_{i-2}(s) V_{i-2}(s) + k_{i-1}(s) V_i(s), a - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_{i-2} m_{i-1}'(s) \\
 \Rightarrow & -\varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-2} k_{i-2}(s) \langle V_{i-2}(s), a - \gamma(s) \rangle + k_{i-1}(s) \langle V_i(s), a - \gamma(s) \rangle = \varepsilon_{i-2} m_{i-1}'(s) \\
 \Rightarrow & m_i(s) = \frac{\varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-1}}{k_{i-1}(s)} \{m_{i-1}'(s) - k_{i-2}(s) m_{i-2}(s)\} \quad (28)
 \end{aligned}$$

olur. Böylece aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 4.4.3. $M \subset \mathbb{L}^n$ space-like eğrisi (I, γ) atlası ile verilsin. M nin eğrilik fonksiyonları k_1, k_2, \dots, k_{n-1} ($k_{n-1} \neq 0$) ve birim teğet vektör alanı V_1 olsun. O zaman

$m_i : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$m_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \text{ için} \\ \frac{\varepsilon_1}{k_1(s)}, & i = 2 \text{ için} \\ \{m'_{i-1}(s) + k_{i-2}(s)m_{i-2}(s)\} \frac{\varepsilon_{i-2\varepsilon_{i-1}}}{k_{i-1}(s)}, & 2 < i \leq n \text{ için} \end{cases} \quad (29)$$

şeklinde tanımlı m_i fonksiyonuna M space-like eğrisinin i - yinci eğrilik fonksiyonu veya kısaca m_i eğrilik fonksiyonu denir.

Teorem 4.4.4. γ, \mathbb{L}^{n+1} Lorentz uzayında bir time-like eğri olsun. γ nın bir $\gamma(s)$ noktasındaki k_i eğrilik fonksiyonları ile, oskülör küresinin merkezinin m_i koordinatları arasında

$$k_p = \frac{\sum_{i=2}^p (m_i^2)'}{2m_p m_{p+1}}, \quad 2 \leq p < n+1 \quad (30)$$

bağıntısı vardır.

İspat. İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. Tanım 4.4.2. den

$$k_{i-1} = \{m'_{i-1} + k_{i-2}m_{i-2}\} \frac{1}{m_i}, \quad 2 < i < n+1$$

ya da $i-1 = j$ için

$$k_j = \{m'_j + k_{j-1}m_{j-1}\} \frac{1}{m_{j+1}}, \quad 1 < j < n \quad (31)$$

dir. Tümevarım ispat yöntemine göre $p = 2$ için teorem doğrudur. Gerçekten (31)

de $j = 2$ alırsak

$$k_2 = \{m'_2 + k_1 m_1\} \frac{1}{m_3}$$

ve $m_1 = 0$ olduğundan $k_2 = \frac{m'_2}{m_3}$ buluruz. Formülde $p = 2$ yazarsak

$$k_2 = \frac{\sum_{i=2}^2 (m_i^2)'}{2m_2m_3}$$

ya da

$$k_2 = \frac{(m_2^2)'}{2m_2m_3}$$

ya da

$$k_2 = \frac{2m_2m'_2}{2m_2m_3}$$

ya da

$$k_2 = \frac{m'_2}{m_3}$$

tür. Böylece $p = 2$ için teorem doğrudur. Şimdi $p = r$ için teoremi doğru kabul edip $p = r + 1$ için de doğru olacağını görelim. Yani

$$k_r = \frac{\sum_{i=2}^r (m_i^2)'}{2m_r m_{r+1}}$$

doğru olsun. Aradığımız

$$k_{r+1} = \frac{\sum_{i=2}^{r+1} (m_i^2)'}{2m_{r+1}m_{r+2}}$$

eşitliğini bulabilmek için (31) de $j = r + 1$ alalım.

$$k_{r+1} = \frac{m'_{r+1} + k_r m_r}{m_{r+2}}$$

olur. Buradaki k_r nin yerine yukarıda ki doğru kabul ettiğimiz formülü yazarsak

$$\begin{aligned}
 k_{r+1} &= \left\{ m'_{r+1} + \frac{\sum_{i=2}^r (m_i^2)'}{2m_r m_{r+1}} m_r \right\} \frac{1}{m_{r+2}} \\
 \Rightarrow k_{r+1} &= \left\{ 2m_{r+1} m'_{r+1} + \sum_{i=2}^r (m_i^2)' \right\} \frac{1}{2m_{r+1} m_{r+2}} \\
 \Rightarrow k_{r+1} &= \left\{ (m_{r+1}^2)' + \sum_{i=2}^r (m_i^2)' \right\} \frac{1}{2m_{r+1} m_{r+2}} \\
 \Rightarrow k_{r+1} &= \frac{\sum_{i=2}^{r+1} (m_i^2)'}{2m_{r+1} m_{r+2}}
 \end{aligned}$$

olur ki bu da aradığımız eşitliktir. O halde teoreminiz $p = r + 1$ için de doğrudur.

Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Teorem 4.4.5. γ , \mathbb{L}^{n+1} Lorentz uzayında bir space-like eğri olsun. γ nun $\gamma(s)$ noktasındaki k_i eğrilik fonksiyonları ile, oskütatör küresinin merkezinin m_i koordinatları arasında,

$$k_p = \varepsilon_p \frac{\sum_{i=2}^p \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_p m_{p+1}}, \quad 2 \leq p < n+1 \quad (32)$$

bağıntısı vardır.

İspat. İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. Tanım 4.4.3. den

$$k_{i-1} = \left\{ m'_{i-1} + k_{i-2} m_{i-2} \right\} \frac{\varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2}}{m_i}, \quad 2 < i < n+1$$

ya da $i-1 = j$ için

$$k_j = \left\{ m'_j + k_{j-1} m_{j-1} \right\} \frac{\varepsilon_{j-1} \varepsilon_j}{m_{j+1}}, \quad 1 < j < n \quad (33)$$

yazabiliriz. Tümevarım ispat yöntemine göre $p = 2$ için teoremin doğru olup olmadığını bakalım. Bunun için (33) de $j = 2$ alırsak

$$k_2 = \{m'_2 + k_1 m_1\} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m_3}$$

ve $m_1 = 0$ olduğundan

$$k_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{m'_2}{m_3} \quad (34)$$

buluruz. (32) de $p = 2$ alırsak

$$\begin{aligned} k_2 &= \varepsilon_2 \frac{\sum_{i=2}^2 \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_2 m_3} \\ \Rightarrow k_2 &= \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1 (m_2^2)'}{2m_2 m_3} \\ \Rightarrow k_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{m'_2}{m_3} \end{aligned}$$

buluruz ki bu da (34) ile aynıdır. Şimdi $p = r$ için teoremi doğru kabul edip $p = r+1$ içinde doğru olacağını görelim. Yani

$$k_r = \varepsilon_r \frac{\sum_{i=2}^r \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_r m_{r+1}} \quad (35)$$

doğru olsun. O halde

$$k_{r+1} = \varepsilon_{r+1} \frac{\sum_{i=2}^{r+1} \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_{r+1} m_{r+2}}$$

eşitliğinde doğru olacağını göstermemiz gerekir. Bunun için (33) de $j = r+1$ alırsak

$$k_{r+1} = \varepsilon_r \varepsilon_{r+1} \frac{m'_{r+1} + k_r m_r}{m_{r+2}}$$

olur. Buradaki k_r nin yerine yukarıda ki doğru kabul ettiğimiz (35) ifadesini yazarsak

$$\begin{aligned}
 k_{r+1} &= \left\{ m'_{r+1} + \left(\varepsilon_r \frac{\sum_{i=2}^r \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_r m_{r+1}} \right) m_r \right\} \frac{\varepsilon_r \varepsilon_{r+1}}{m_{r+2}} \\
 \Rightarrow k_{r+1} &= \left\{ 2m_{r+1} m'_{r+1} + \varepsilon_r \sum_{i=2}^r \varepsilon_{i-1} (m_i^2)' \right\} \frac{\varepsilon_r \varepsilon_{r+1}}{2m_{r+1} m_{r+2}} \\
 \Rightarrow k_{r+1} &= \left\{ (m_{r+1}^2)' + \varepsilon_r \sum_{i=2}^r \varepsilon_{i-1} (m_i^2)' \right\} \frac{\varepsilon_r \varepsilon_{r+1}}{2m_{r+1} m_{r+2}} \\
 \Rightarrow k_{r+1} &= \left\{ \varepsilon_r \left(\sum_{i=2}^r \varepsilon_{i-1} (m_i^2)' + \varepsilon_r (m_{r+1}^2)' \right) \right\} \frac{\varepsilon_r \varepsilon_{r+1}}{2m_{r+1} m_{r+2}} \\
 \Rightarrow k_{r+1} &= \varepsilon_{r+1} \frac{\sum_{i=2}^{r+1} \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_{r+1} m_{r+2}}
 \end{aligned}$$

olur. Bu da aradığımız eşitlik olduğundan $p = r$ için doğru iken $p = r + 1$ içinde doğru olmuş olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Teorem 4.4.6. $n \geq 4$ ve n çift olmak üzere \mathbb{L}^{n+1} Lorentz uzayında bir time-like eğri γ olsun. γ nin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet vektör alan sistemi $\{V_1, V_2, \dots, V_{n+1}\}$ ve bu sisteme göre $\gamma(s)$ noktasındaki S^n oskületör küresinin merkezinin koordinatları m_i ($1 \leq i \leq n+1$) olsun. Tanım 4.4.2. deki m_i fonksiyonlarının s yay parametresine göre türevlerinin matrisel formdaki ifadesi

$$\begin{bmatrix} m'_2 \\ m'_3 \\ m'_4 \\ \vdots \\ m'_n \\ m'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & 0 & k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_n \\ m_{n+1} \end{bmatrix}$$

olup, katsayılar matrisini A ile gösterirsek, aşağıdaki karakterizasyonları elde ederiz.

$$1. \det A = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^n m_i^2 = \text{sbt}$$

2. $\det A = 0 \Leftrightarrow \gamma : I \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ eğrisi \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisidir.

İspat. 1. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

(\Rightarrow) : $\det A = 0$ olduğunu biliyoruz. $\sum_{i=2}^n m_i^2 = sbt$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için teorem doğrudur. Tanım 4.4.2. de

$$m'_{i-1} = k_{i-1}m_i - k_{i-2}m_{i-2}$$

olduğundan $i - 1 = j$ alırsak

$$m'_j = k_j m_{j+1} - k_{j-1} m_{j-1}$$

ohur. Böylece $j = 2, 3, 4, 5$ için

$$m'_2 = k_2 m_3$$

$$m'_3 = k_3 m_4 - k_2 m_2$$

$$m'_4 = k_4 m_5 - k_3 m_3$$

$$m'_5 = -k_4 m_4$$

yazabiliriz. O halde

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ya da

$$\det A = k_2^2 k_4^2$$

buluruz. Hipotezden, $\det A = 0$ dir. Dolayısıyla $k_2^2 k_4^2 = 0$ dir. Burada $k_2 \neq 0$ olduğundan $k_4 = 0$ olmalıdır. Yani,

$$k_4 = \frac{\sum_{i=2}^4 (m_i^2)'}{2m_4 m_5}$$

olduğundan

$$\sum_{i=2}^4 (m_i^2)' = 0$$

ya da

$$\sum_{i=2}^4 m_i^2 = sbt$$

dir. Böylece teorem $n = 4$ için ispatlanmış olur. Şimdi $n = p$ için teoremi doğru kabul edip $n = p + 2$ için doğru olacağını göstereyim. Tanım 4.4.2. de

$$m'_j = k_j m_{j+1} - k_{j-1} m_{j-1}$$

olduğundan

$$m'_2 = k_2 m_3$$

$$m'_3 = k_3 m_4 - k_2 m_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$m'_{p-1} = k_{p-1} m_p - k_{p-2} m_{p-2}$$

$$m'_p = k_p m_{p+1} - k_{p-1} m_{p-1}$$

$$m'_{p+1} = -k_p m_p$$

olup

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{p-1} & 0 & k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_p & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det A = k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2$$

dir. $n = p + 2$ için

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{p-1} & 0 & k_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_p & 0 & k_{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k_{p+1} & 0 & k_{p+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -k_{p+2} & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} \det A &= k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2 k_{p+2}^2 \\ &= (k_2 k_4 \dots k_p k_{p+2})^2 \end{aligned}$$

olur. Hipotezden $\det A = 0$ olduğundan $k_2 k_4 \cdots k_p k_{p+2} = 0$ olmalıdır. Burada $k_2 \neq 0$, $k_4 \neq 0, \dots, k_p \neq 0$ olduğundan $k_{p+2} = 0$ olacaktır. Yani,

$$k_{p+2} = \frac{\sum_{i=2}^{p+2} (m_i^2)'}{2m_{p+2}m_{p+3}}$$

olduğundan

$$\sum_{i=2}^{p+2} (m_i^2)' = 0$$

olmalıdır. Bu da

$$\sum_{i=2}^{p+2} m_i^2 = sbt$$

olması demektir. Teorem $n = p+2$ için de doğru olduğundan ispat tamamlanır.

(\Leftarrow): $\sum_{i=2}^n m_i^2 = sbt$ olduğunu biliyoruz. $\det A = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için teorem doğrudur, çünkü

$$\begin{aligned} \det A &= k_2^2 k_4^2 \\ &= k_2^2 \left[\frac{\sum_{i=2}^4 (m_i^2)'}{2m_4 m_5} \right]^2 \\ &= \left[k_2 \frac{\sum_{i=2}^4 (m_i^2)'}{2m_4 m_5} \right]^2 \end{aligned}$$

dir. Hipotezden $\sum_{i=2}^4 (m_i^2)' = 0$ olup yukarıda yerine yazıldığında $\det A = 0$ olarak bulunur.

Şimdi $n = p$ için teoremi doğru kabul edip $n = p + 2$ içinde doğru olacağını gösterelim. O halde

$$\det A = k_2^2 k_4^2 \cdots k_p^2$$

için ifade doğrudur. $n = p + 2$ alırsak

$$\det A = k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2 k_{p+2}^2$$

olur.

$$k_{p+2} = \frac{\sum_{i=2}^{p+2} (m_i^2)'}{2m_{p+2}m_{p+3}}$$

olduğunu biliyoruz. Hipotezden $\sum_{i=2}^{p+2} m_i^2 = sbt$ olduğundan $\sum_{i=2}^{p+2} (m_i^2)' = 0$ olup

$k_{p+2} = 0$ dir. Bu değeri yukarıda yerine yazarsak

$$\det A = 0$$

olur. Bu da teoremin $n = p + 2$ için de doğru olduğunu gösterir. Böylece (1)

in ispatı tamamlanmış olur.

2. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

(\Leftarrow) : γ time-like eğrisi \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisi olsun.

$\det A = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için teorem doğrudur. Gerçekten de γ time-like eğrisi \mathbb{L}^4 te bir eğilim çizgisi olduğundan

$$\sum_{i=1}^2 H_i^2 = sbt$$

tir. Teorem 4.2.1. den $k_4 = \frac{\sum_{i=1}^2 (H_i^2)'}{2H_2H_3}$ olduğunu biliyoruz. $\sum_{i=1}^2 H_i^2 = sbt$

olduğundan $\sum_{i=1}^2 (H_i^2)' = 0$ ya da $k_4 = 0$ dir. Bu değeri

$$\det A = k_2^2 k_4^2$$

de yerine yazarsak $\det A = 0$ olur. Şimdi $n = p$ için teoremi doğru kabul edip $n = p + 2$ için de doğru olacağını göstereyim. $n = p$ için

$$\det A = k_2^2 k_4^2 \cdots k_p^2$$

olup, γ eğrisi \mathbb{L}^p de eğilim çizgisi iken $\det A = 0$ dir. Şimdi $n = p + 2$ alalım

$$\det A = k_2^2 k_4^2 \cdots k_p^2 k_{p+2}^2$$

dir. γ , \mathbb{L}^{p+2} de eğilim çizgisi olduğundan $\sum_{i=1}^p H_i^2 = sbt$ ya da $\sum_{i=1}^p (H_i^2)' = 0$ dir.

Teorem 4.2.1. deki

$$k_{p+2} = \frac{\sum_{i=2}^p (H_i^2)'}{2H_p H_{p+1}}$$

eşitliğinde $\sum_{i=2}^p (H_i^2)' = 0$ değerini yerine yazarsak $k_{p+2} = 0$ olur. Bu da $n = p + 2$ için

$$\det A = 0$$

olması demektir. Teorem $n = p$ için doğru iken $n = p + 2$ için de doğru olduğundan ispat tamamlanır.

(\Rightarrow) : $\det A = 0$ olduğunu biliyoruz. γ time-like eğrisinin \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisi olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için teorem doğrudur.

$$\begin{aligned} \det A &= k_2^2 k_4^2 \\ &= (k_2 k_4)^2 \end{aligned}$$

olup $\det A = 0$ ve $k_2 \neq 0$ olduğundan $k_4 = 0$ olmalıdır. Ayrıca

$$k_4 = \frac{\sum_{i=1}^2 (H_i^2)'}{2H_2H_3}$$

olduğundan $k_4 = 0$ olması $\sum_{i=1}^2 (H_i^2)' = 0$ yani $\sum_{i=1}^2 H_i^2 = sbt$ olması demektir. Bu da γ nın \mathbb{L}^4 te bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

Şimdi teoremi $n = p$ için doğru kabul edip $n = p + 2$ için de doğru olduğunu gösterelim. Yani $n = p$ için $\det A = 0$ iken γ , \mathbb{L}^p de bir eğilim çizgisi olsun. O zaman $n = p + 2$ için $\det A = 0$ iken de γ , \mathbb{L}^{p+2} de bir eğilim çizgisi olur mu bunu görelim. Bunun için $n = p + 2$ alırsak

$$\det A = k_2^2 k_4^2 \cdots k_p^2 k_{p+2}^2$$

ve dolayısıyla

$$k_2^2 k_4^2 \cdots k_p^2 k_{p+2}^2 = 0$$

olur, $k_2 \neq 0$, $k_4 \neq 0, \dots, k_p \neq 0$ olduğundan

$$k_{p+2} = \frac{\sum_{i=1}^p (H_i^2)'}{2H_p H_{p+1}}$$

değeri sıfır olmalıdır. Yani, $\sum_{i=1}^p (H_i^2)' = 0$ veya $\sum_{i=1}^p H_i^2 = sbt$ dir. Bu da γ nın, \mathbb{L}^{p+2} de bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir. Teorem $n = p$ için doğru iken $n = p + 2$ için de doğru olduğundan ispat tamamlanır.

□

Teorem 4.4.7. $n \geq 4$ ve n çift olmak üzere \mathbb{L}^{n+1} Lorentz uzayında bir space-like eğri γ olsun. γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet vektör alan sistemi $\{V_1, V_2, \dots, V_{n+1}\}$

ve bu sisteme göre $\gamma(s)$ noktasındaki S^n oskulator küresinin merkezinin koordinatları m_i ($1 \leq i \leq n+1$) olsun. Tanım 4.4.3. deki m_i fonksiyonlarının s yay parametresine göre türevlerinin matrisel formdaki ifadesi

$$\begin{bmatrix} m'_2 \\ m'_3 \\ m'_4 \\ \vdots \\ m'_n \\ m'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & 0 & \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_n \\ m_{n+1} \end{bmatrix}$$

olup, katsayılar matrisini B ile gösterirsek, aşağıdaki karakterizasyonları elde ederiz.

1. $\det B = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^n \varepsilon_{i-1} m_i^2 = \text{sabittir.}$
2. $\det B = 0 \Leftrightarrow \gamma : I \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ eğrisi \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisidir.

İspat. 1. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

(\Rightarrow) : $\det B = 0$ olduğunu biliyoruz. $\sum_{i=2}^n m_i^2 = \text{sabit}$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için teorem doğrudur. Tanım 4.4.3. de

$$m'_{i-1} = \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} k_{i-1} m_i - k_{i-2} m_{i-2}$$

olduğundan $i - 1 = j$ için

$$m'_j = \varepsilon_{j-1} \varepsilon_j k_j m_{j+1} - k_{j-1} m_{j-1}$$

olur. Böylece $j = 2, 3, 4, 5, \dots, p$ için de

$$m'_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 m_3$$

$$m'_3 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 m_4 - k_2 m_2$$

$$m'_4 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_4 m_5 - k_3 m_3$$

$$m'_5 = \varepsilon_4 \varepsilon_5 k_5 m_6 - k_4 m_4$$

\vdots

$$m'_{p-1} = \varepsilon_{p-2} \varepsilon_{p-1} k_{p-1} m_p - k_{p-2} m_{p-2}$$

$$m'_p = \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p k_p m_{p+1} - k_{p-1} m_{p-1}$$

yazabiliriz. O halde $n = 4$ için

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ya da

$$\det B = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 \begin{vmatrix} -k_2 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_4 \\ 0 & -k_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ya da

$$\begin{aligned} \det B &= -k_2 (-\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2) (+\varepsilon_3 \varepsilon_4 k_4^2) \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_2^2 k_4^2 \end{aligned}$$

buluruz. Hipotezden, $\det B = 0$ dir. Dolayısıyla

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_2^2 k_4^2 = 0$$

bulunur.

$$k_4 = \varepsilon_4 \frac{\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_4 m_5}$$

değeri yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_2^2 \left[\varepsilon_4 \frac{\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_4 m_5} \right]^2 &= 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \left[k_2 \frac{\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_4 m_5} \right]^2 &= 0 \\ \Rightarrow k_2 \neq 0, \quad \sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} (m_i^2)' &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\left(\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} m_i^2 \right)' = 0$$

ya da

$$\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} m_i^2 = \text{sabit}$$

dir. Böylece teorem $n = 4$ için ispatlanmış olur. Şimdi $n = p$ için teoremi doğru kabul edip $n = p + 2$ için doğru olacağını gösterelim.

$$m_j' = \varepsilon_{j-1} \varepsilon_j k_j m_{j+1} - k_{j-1} m_{j-1}, \quad 2 \leq j \leq n$$

olduğundan

$$m'_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 m_3$$

$$m'_3 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 m_4 - k_2 m_2$$

$$m'_4 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_4 m_5 - k_3 m_3$$

\vdots

$$m'_{p-1} = \varepsilon_{p-2} \varepsilon_{p-1} k_{p-1} m_p - k_{p-2} m_{p-2}$$

$$m'_p = \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p k_p m_{p+1} - k_{p-1} m_{p-1}$$

$$m'_{p+1} = -k_p m_p$$

olup

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{p-1} & 0 & \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_p & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} \det B &= (\varepsilon_1 \varepsilon_2) k_2^2 (\varepsilon_3 \varepsilon_4) k_4^2 \cdots (\varepsilon_{p-1} \varepsilon_p) k_p^2 \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \cdots \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p k_2^2 k_4^2 \cdots k_p^2 \end{aligned}$$

dir. $n = p + 2$ için

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p k_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{p+1} & 0 & \varepsilon_{p+1} \varepsilon_{p+2} k_{p+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{p+2} & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det B = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \varepsilon_{p+2} k_2^2 k_4^2 \cdots k_p^2 k_{p+2}^2$$

olur. Burada $k_2 \neq 0$, $k_4 \neq 0, \dots, k_p \neq 0$ olduğundan $k_{p+2} = 0$ olacaktır. Yani,

$$k_{p+2} = \varepsilon_{p+2} \frac{\sum_{i=2}^{p+2} \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_{p+2}m_{p+3}}$$

olduğundan

$$\left(\sum_{i=2}^{p+2} \varepsilon_{i-1} m_i^2 \right)' = 0$$

olmalıdır. Bu da

$$\sum_{i=2}^{p+2} \varepsilon_{i-1} m_i^2 = \text{sabit}$$

olması demektir. Teorem $n = p + 2$ içinde doğru olduğundan ispat tamamlanır.

(\Leftarrow): $\sum_{i=2}^n \varepsilon_{i-1} m_i^2 = \text{sabit}$ olduğunu biliyoruz. $\det B = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için teorem doğrudur, çünkü

$$\begin{aligned} \det B &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_2^2 \left[\varepsilon_4 \frac{\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_4 m_5} \right]^2 \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \left[k_2 \frac{\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_4 m_5} \right]^2 \end{aligned}$$

dir. Hipotezden $\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} m_i^2 = \text{sabit}$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} m_i^2 \right)' = 0$$

olup

$$\sum_{i=2}^4 \varepsilon_{i-1} (m_i^2)' = 0$$

dir. Öyleyse $\det B = 0$ dir. Bu da teoremin $n = 4$ için doğru olduğunu gösterir.

Şimdi $n = p$ için teoremi doğru kabul edip $n = p + 2$ içinde doğru olacağını göstereyim. $n = p$ için teorem doğru olduğundan

$$\det B = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2$$

için ifade doğrudur. $n = p + 2$ için

$$\det B = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \varepsilon_{p+2} k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2 k_{p+2}^2$$

dir.

$$k_{p+2} = \varepsilon_{p+2} \frac{\sum_{i=2}^{p+2} \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_{p+2} m_{p+3}}$$

olduğundan

$$\det B = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \varepsilon_{p+2} k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2 \left[\frac{\sum_{i=2}^{p+2} \varepsilon_{i-1} (m_i^2)'}{2m_{p+2} m_{p+3}} \right]^2$$

olur. Hipotezden $\sum_{i=2}^{p+2} \varepsilon_{i-1} m_i^2 = \text{sabit}$ ve dolayısıyla $\left(\sum_{i=2}^{p+2} \varepsilon_{i-1} m_i^2 \right)' = 0$ ya da

$$\sum_{i=2}^{p+2} \varepsilon_{i-1} (m_i^2)' = 0$$

olur. Bu değeri yukarıda yerine yazarsak

$$\det B = 0$$

olur. Bu da teoremin $n = p + 2$ için de doğru olduğunu gösterir.

2. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

(\Leftarrow) : γ eğrisi \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisi olsun. $\det B = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için teorem doğrudur. Çünkü γ eğrisi \mathbb{L}^4 te bir eğilim çizgisi olduğundan

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} H_i^2 = \text{sabit}$$

tir. Teorem 4.2.1. den

$$k_4 = \varepsilon_3 \frac{\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_2 H_3}$$

yazabiliriz. $\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} H_i^2 = \text{sabit}$ olduğundan $\left(\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} H_i^2 \right)' = 0$ veya $\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} (H_i^2)' =$

0 dir. Bu $k_4 = 0$ değerini

$$\det B = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_2^2 k_4^2$$

de yerine yazarsak $\det B = 0$ olur.

Şimdi $n = p$ için teoremi doğru kabul edip $n = p + 2$ için de doğru olacağını gösterelim. $n = p$ için teorem doğru olduğundan

$$\det B = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2$$

olup, γ eğrisi \mathbb{L}^p de eğilim çizgisi iken $\det B = 0$ dir. Şimdi $n = p + 2$ için de teoremin doğru olduğunu gösterelim. Yani,

$$\det B = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \varepsilon_{p+2} k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_p H_{p+1}} \right]^2$$

yada

$$\det B = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \varepsilon_{p+1}^3 \varepsilon_{p+2} k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2 \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} H_i^2 \right)'}{2H_p H_{p+1}} \right]^2$$

olur. Hipotezden dolayı

$$\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} H_i^2 = \text{sabit}$$

olduğundan

$$\left(\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} H_i^2 \right)' = 0$$

dir. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$\det B = 0$$

olur. Teorem $n = p$ için doğru iken $n = p + 2$ için de doğru olduğundan ispat tamamlanır.

(\Rightarrow) : $\det B = 0$ olduğunu biliyoruz. γ nın \mathbb{L}^n de bir eğilim çizgisi olduğunu göstereceğiz.

$n = 4$ için teorem doğrudur. Gerçekten

$$\det B = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_2^2 k_4^2$$

dir.

$$k_4 = \varepsilon_3 \frac{\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_2 H_3}$$

değeri yukarıda yerine yazılırsa

$$\det B = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_2^2 \varepsilon_3^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_2 H_3} \right]^2$$

dir. Hipotezden $\det B = 0$ olduğundan ve $k_2 \neq 0$ için

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} (H_i^2)' = 0$$

yada

$$\left(\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} H_i^2 \right)' = 0$$

yada

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_{i+1} H_i^2 = \text{sabit}$$

olması demektir. Bu da γ nın \mathbb{L}^4 te bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

Tümevarım ispat yöntemine göre $n = p$ için teoremi doğru kabul edip $n = p+2$

için de doğru olduğunu gösterelim. $n = p$ için

$$\begin{aligned} \det B &= \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p k_2^2 \dots k_p^2 \\ &= \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p [k_2 \dots k_p]^2 \end{aligned}$$

dir. $n = p + 2$ için de

$$\begin{aligned} \det B &= \varepsilon_{p+1} \varepsilon_{p+2} \det(m'_2, m'_3, \dots, m'_{p+1}) k_{p+2}^2 \\ &= \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \varepsilon_{p+2} [k_2 \dots k_p k_{p+2}]^2 \end{aligned}$$

dir. Hipotezden dolayı

$$\det B = 0$$

ve dolayısıyla

$$k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2 k_{p+2}^2 = 0$$

dır.

$$k_{p+2} = \varepsilon_{p+1} \frac{\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_p H_{p+1}}$$

değeri yukarıda yerine yazılırsa

$$k_2^2 k_4^2 \dots k_p^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_p H_{p+1}} \right)^2 = 0$$

dir. Buradan $k_2 \neq 0, \dots, k_p \neq 0$ ve $\frac{\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} (H_i^2)'}{2H_p H_{p+1}} = 0$ olur. O halde

$$\left(\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} H_i^2 \right)' = 0$$

veya

$$\sum_{i=1}^p \varepsilon_{i+1} H_i^2 = \text{sabit}$$

tir. Bu da γ eğrisinin \mathbb{L}^p de bir eğilim çizgisi olduğunu gösterir.

□

5. IŞIK BENZERİ (LIGHT-LIKE) EĞRİLER

Bu bölümde L^n 'de light-like eğrilerin Frenet denklemleri verilip bu eğrilerin harmonik eğrilikleri ve eğilim çizgileri olması karakterizasyonları elde edilecektir. Bu bölüm için referansımız Duggal ve Bejancu (1996) olacaktır.

5.1. Light-like Eğriler için Frenet Denklemleri

Light-like eğrilerin Frenet denklemleri, özel olarak Lorentz manifoldlarında (Duggal ve Bejancu 1996) ve indeksi 2 olan yarı-Riemann manifoldlarında elde edilmiştir (Duggal ve Jin 1999). Light-like eğrilerin Frenet denklemlerinin elde edilışinden kısaca bahsedelim.

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $m + 2$ boyutlu $q \geq 1$ indeksli bir yarı-Riemann manifoldu ve α , M üzerinde light-like bir eğri olsun. Bu durumda α 'nın teğet vektör alanı T olmak üzere; $\langle T, T \rangle = 0$ dir. α 'nın tanjant demeti;

$$T\alpha = \bigcup_{x \in \alpha} T_x\alpha$$

ve $T\alpha$ 'nın diki;

$$(T_x\alpha)^\perp = \{V_x \in (T_x\alpha)^\perp \mid \langle V_x, T_x \rangle = 0, T_x \in T_x\alpha\}$$

olmak üzere

$$(T\alpha)^\perp = \bigcup_{x \in \alpha} (T_x\alpha)^\perp$$

şeklinde tanımlıdır. $T\alpha^\perp$ rankı $m + 1$ olan bir vektör demetidir. $\langle T, T \rangle = 0$ olduğundan; $T\alpha$, $T\alpha^\perp$ 'in rankı 1 olan alt vektör demetidir. $T\alpha^\perp$ 'de $T\alpha$ 'ye tümleyen vektör demeti $S(T\alpha^\perp)$ ile gösterilirse,

$$T\alpha^\perp = T\alpha \perp S(T\alpha^\perp)$$

yazılır ve $S(T\alpha^\perp)$ 'e ekran (screen) vektör demeti denir. $S(T\alpha^\perp)$ non-dejeneredir (Bejancu 1994, Duggal ve Bejancu 1996).

M 'nin tanjant demetinin α eğrisine kısıtlanmış $TM|_\alpha$ olmak üzere;

$$TM|_\alpha = S(T\alpha^\perp) \perp S(T\alpha^\perp)^\perp$$

olarak yazılır.

Teorem 5.1.1. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $m + 2$ boyutlu $q \geq 1$ indeksli bir yarı-Riemann manifoldu ve α ; M üzerinde light-like bir eğri ve $S(T\alpha^\perp)$; α 'nın ekran vektör demeti olsun. α 'nın her bir noktasının bir U komşuluğunda,

$$\langle T, N \rangle = 1 \text{ ve } \langle N, N \rangle = \langle N, X \rangle = 0, \quad \forall X \in \Gamma(S(T\alpha^\perp))|_U$$

koşullarını sağlayan bir tek $N \in \Gamma(E|_U)$ vektörü ve rankı 1 olan bir tek E vektör demeti vardır.

İspat. (Bejancu 1994). □

Teorem 5.1.1. de geçen E vektör demetine $S(T\alpha^\perp)$ 'e göre α 'nın null transversal demeti denir ve $ntr(\alpha)$ ile gösterilir. $S(T\alpha^\perp)$ 'e göre α 'nın transversal demeti, $tr(\alpha)$

ile gösterilir ve

$$\text{tr}(\alpha) = \text{ntr}(\alpha) \perp S(T\alpha^\perp)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} TM|_\alpha &= T\alpha \oplus \text{tr}(\alpha) \\ &= (T\alpha \oplus \text{ntr}(\alpha)) \perp S(T\alpha^\perp) \end{aligned}$$

dir (Bejancu 1994, Duggal ve Bejancu 1996).

Yardımcı Teorem 5.1.2. *α eğrisi, indeksi q olan bir $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ yarı-Riemann manifoldunun bir light-like eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisinin herhangi bir ekran (perde) vektör demeti $q - 1$ indeksli bir yarı-Riemann altmanifoldudur. Özel olarak M Lorentz manifoldu ise α eğrisinin herhangi bir ekran vektör demeti bir Riemann vektör demetidir.*

İspat. (Bejancu 1994). □

Şimdi yukarıdaki bilgiler ışığında Lorentz manifoldlarında light-like eğriler için Frenet denklemlerini verelim.

α . $m + 2$ boyutlu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz manifoldunda bir light-like eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı T , M 'nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Yardımcı Teorem 5.2.1. gereğince, eğrinin ekran vektör demeti, rankı m olan Riemann vektör demetidir. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri,

$$\{T, N, W_1, W_2, \dots, W_m\}$$

dir, burada T ve N light-like vektörler, W_i , ($1 \leq i \leq m$) ler de space-like vektörlerdir.

Ayrıca $\langle T, N \rangle = 1$ dir.

Buna göre α 'nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \nabla_T T &= hT + k_1 W_1 \\
 \nabla_T N &= -hN + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
 \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\
 \nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4 \\
 \nabla_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 + k_9 W_5 \\
 \nabla_T W_4 &= -k_7 W_2 - k_8 W_3 + k_{10} W_5 + k_{11} W_6 \\
 \nabla_T W_5 &= -k_9 W_3 - k_{10} W_4 + k_{12} W_6 + k_{13} W_7 \\
 \nabla_T W_6 &= -k_{11} W_4 - k_{12} W_5 + k_{14} W_7 + k_{15} W_8 \\
 &\vdots \\
 \nabla_T W_{m-2} &= -k_{2m-5} W_{m-4} - k_{2m-4} W_{m-3} + k_{2m-2} W_{m-1} + k_{2m-1} W_m \\
 \nabla_T W_{m-1} &= -k_{2m-3} W_{m-3} - k_{2m-2} W_{m-2} + k_{2m} W_m \\
 \nabla_T W_m &= -k_{2m-1} W_{m-2} - k_{2m} W_{m-1}
 \end{aligned}$$

burada h ve $\{k_1, k_2, \dots, k_{2m}\}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ de $\Gamma(S(T\alpha^1))|_U$ 'in ortonormal bazıdır (Duggal ve Bejancu 1996).-

Bu denklemlerde uygun bir p parametre değişimiyle, $h = 0$ alınabilir ve diğer denklemler değişmeden kalır. Uygun p parametresine, eğrinin seçilmiş parametresi denir

(Duggal ve Bejancu 1996).

5.2. Light-like Eğrilerin Harmonik Eğrilikleri ve Eğilim Çizgisi Olma Karakterizasyonları

1.adım: α , 3–boyutlu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz manifoldunda bir light-like eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı T , M 'nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Eğrinin ekran vektör demeti, rankı 1 olan Riemann vektör demetidir. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri,

$$\{T, N, W_1\}$$

dir, burada T ve N light-like vektörler, W_1 de space-like vektördür ve $\langle T, N \rangle = 1$ dir.

Buna göre α 'nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= k_1 W_1, \\ \nabla_T N &= k_2 W_1, \\ \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N\end{aligned}\tag{36}$$

burada k_1 ve k_2 diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Eğer α eğrisi bir eğilim çizgisi (genel helis) ise o zaman sabit bir X vektörü için $\langle T, X \rangle \neq 0$ ve $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$ olması gerekir. Dolayısıyla $\langle \nabla_T T, X \rangle = 0$ dir. Bunu (36)'daki ilk eşitlikten bulduğumuz

$$\langle \nabla_T T, X \rangle = k_1 \langle W_1, X \rangle$$

eşitliğinde yerine yazarsak $k_1 \neq 0$ olduğundan $\langle W_1, X \rangle = 0$ buluruz. Ayrıca ikinci

eşitlikten

$$\langle \nabla_T N, X \rangle = k_2 \langle W_1, X \rangle$$

ve ($k_2 \neq 0$) $\langle W_1, X \rangle = 0$ olduğundan $\langle \nabla_T N, X \rangle = 0$ yani $\langle N, X \rangle = \text{sabit}$ tir.

(36)'daki son eşitlikten

$$\langle \nabla_T W_1, X \rangle = -k_2 \langle T, X \rangle - k_1 \langle N, X \rangle$$

yazabiliriz, burada $\langle W_1, X \rangle = 0$ olduğundan $\langle \nabla_T W_1, X \rangle = 0$ dir. Böylece

$$k_2 \langle T, X \rangle = -k_1 \langle N, X \rangle$$

ya da

$$\langle N, X \rangle = -\frac{k_2}{k_1} \langle T, X \rangle \quad (37)$$

olur, burada $\langle T, X \rangle \neq 0$, $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$ ve $\langle N, X \rangle = \text{sabit}$ olduklarından $-\frac{k_2}{k_1}$ oranı sabittir, burada $H_1 = -\frac{k_2}{k_1}$ ile gösterilen $-\frac{k_2}{k_1}$, 1.harmonik eğriliktir.

Sonuç 5.2.1. $\alpha \subset \mathbb{L}^3$ light-like eğrisi $\{T, N, W_1\}$ Frenet çatısı ve k_1, k_2 eğrilikleriyle verilmiş bir eğilim çizgisi olsun. α nın eğilim eksenini $Sp\{X\}$ olmak üzere

$$\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$$

olup, $H_1 = -\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$ tir.

$X \in Sp\{T, N, W_1\}$ bir time-like ya da space-like vektör olup $\langle X, X \rangle = \mp 1$ olacağından

$$X = \langle N, X \rangle T + \langle T, X \rangle N + \underbrace{\langle W_1, X \rangle}_0 W_1$$

iken

$$\begin{aligned}2 \langle N, X \rangle \langle T, X \rangle &= \mp 1 \\ \Rightarrow 2 H_1 \langle T, X \rangle^2 &= \mp 1 \\ \Rightarrow 2 \langle T, X \rangle^2 &= \frac{\mp 1}{H_1} \\ \Rightarrow 2 \langle T, X \rangle^2 &= \mp \frac{k_1}{k_2} = \text{sabit} \\ \Rightarrow \langle T, X \rangle &= \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left| -\frac{k_1}{k_2} \right|} = \text{sabit}\end{aligned}$$

buradan $\langle T, X \rangle = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left| -\frac{k_1}{k_2} \right|} = \text{sabit}$ ve $\langle N, X \rangle = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left| -\frac{k_2}{k_1} \right|} = \text{sabit}$ olur.

2.adım: α , 4-boyutlu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz manifoldunda bir light-like eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı T , M 'nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Eğrinin ekran vektör demeti, rank 2 olan Riemann vektör demetidir. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri,

$$\{T, N, W_1, W_2\}$$

dir, burada T ve N light-like vektörler, W_1 ve W_2 de space-like vektörlerdir.

Buna göre α 'nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= k_1 W_1 \\ \nabla_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 \\ \nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1\end{aligned}\tag{38}$$

Başlangıçta $h = 0$ aldığımızdan eğrinin t parametresi seçilmiş parametredir. Üstelik son eğrilik olan k_4 'ü de sıfır alarak $\{T, N, W_1, W_2\}$ çatısını seçilmiş Frenet çatısı

olarak belirleyebiliriz.

α eğrisi bir eğilim çizgisi olduğundan $\langle T, X \rangle \neq 0$ ve $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$ dolayısıyla $\langle W_1, X \rangle = 0$ dir. Ayrıca $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$ olduğundan (38)'deki ikinci eşitlikten

$$\begin{aligned} k_3 \langle W_2, X \rangle &= \langle \nabla_T N, X \rangle \\ \langle W_2, X \rangle &= \frac{1}{k_3} H_1' \langle T, X \rangle \end{aligned} \quad (39)$$

dir. O halde $H_2 = \frac{H_1'}{k_3}$ olarak alıp

$$\langle W_2, X \rangle = H_2 \langle T, X \rangle \quad (40)$$

diyebiliriz. Böylece $\langle \nabla_T W_2, X \rangle = H_2' \langle T, X \rangle$ olup bunu (38)'deki son eşitlikten bulduğumuz

$$\langle \nabla_T W_2, X \rangle = -k_3 \langle T, X \rangle$$

eşitliğinde yerine yazarsak

$$H_2' \langle T, X \rangle = -k_3 \langle T, X \rangle$$

yani

$$H_2' = -k_3$$

olur.

Sonuç 5.2.2. $\alpha \subset \mathbb{L}^4$ light-like eğrisi eğilim eksenini $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olsun. α 'nın eğrilikleri k_1, k_2, k_3 ve Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2\}$ olmak üzere

$$\langle W_2, X \rangle = H_2 \langle T, X \rangle$$

olup, $H_2 = \frac{H_1'}{k_3}$ dır.

$X \in Sp\{T, N, W_1, W_2\}$ bir time-like ya da space-like vektör olup $\langle X, X \rangle = \mp 1$ olacağından

$$X = \langle N, X \rangle T + \langle T, X \rangle N + \underbrace{\langle W_1, X \rangle}_0 W_1 + \langle W_2, X \rangle W_2$$

iken

$$\begin{aligned} 2 \langle N, X \rangle \langle T, X \rangle + \langle W_2, X \rangle^2 &= \mp 1 \\ \Rightarrow 2 H_1 \langle T, X \rangle^2 + H_2^2 \langle T, X \rangle^2 &= \mp 1 \\ \Rightarrow 2 H_1 + H_2^2 &= \frac{\mp 1}{\langle T, X \rangle^2} = \text{sabit} \\ \Rightarrow 2 H_1' + 2 H_2 H_2' &= 0 \\ \Rightarrow 2 H_1' + 2 \frac{H_1'}{k_3} (-k_3) &= 0 \end{aligned}$$

dir.

$k_1 = 1$ ve $k_2 = \text{st}$ olsun. $\langle T, X \rangle = \text{st}$ ve $\langle W_1, X \rangle = 0$ olduğundan (38) den $\langle N, X \rangle = -k_2 \langle T, X \rangle = \text{sabit}$ ise, $\langle \nabla_T N, X \rangle = 0$ olur. Böylece $k_3 \langle W_2, X \rangle = 0$ ve $\langle \nabla_T W_2, X \rangle = -k_3 \langle T, X \rangle$ olduğunu kolayca görebiliriz. Bu eşitliklerin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter koşul $k_3 = 0$ olmasıdır.

Teorem 5.2.3. $\alpha \subset \mathbb{L}^4$ light-like eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. α 'nın eğrilikleri k_1, k_2, k_3 ($k_4 = 0$) ve Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2\}$ olmak üzere α 'nın \mathbb{L}^4 de sabit eğrilikli bir eğilim çizgisi olması karakterizasyonu şudur:

$$\nabla_T^4 T - 2H_1 \nabla_T^2 T = 0$$

burada ($k_1 = 1$) k_2 ve k_3 sabittir.

İspat. $k_1 = 1$ için (38) den

$$\nabla_T^2 T = \nabla_T W_1$$

$$\nabla_T^3 T = \nabla_T^2 W_1$$

$$\nabla_T^4 T = \nabla_T^3 W_1$$

dir, burada $\nabla_T^2 W_1 = -k_2 \nabla_T T - \nabla_T N$ olduğundan

$$\nabla_T^3 W_1 = -k_2 \nabla_T^2 T - \nabla_T^2 N$$

dir. Ya da

$$\nabla_T^2 N = k_2 \nabla_T W_1 + k_3 \nabla_T W_2$$

$$\nabla_T^2 N = k_2 \nabla_T W_1 + k_3 (-k_3 T)$$

olduğundan

$$\nabla_T^3 W_1 = -k_2 \nabla_T^2 T - k_2 \nabla_T W_1 + k_3^2 T$$

olur, burada $\nabla_T W_1 = \nabla_T^2 T$ ve $\nabla_T^3 W_1 = \nabla_T^4 T$ ve $k_3 = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\nabla_T^4 T + 2k_2 \nabla_T^2 T = 0$$

ve $k_2 = -H_1$ olduğundan

$$\alpha^{(5)} - 2H_1 \alpha^{(3)} = 0$$

dır, bu da $\nabla_T^4 T - 2k_2 \nabla_T^2 T = 0$ dir. □

3.adım: α , 5-boyutlu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz manifoldunda bir light-like eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı T , M 'nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Eğrinin

ekran vektör demeti, rankı 3 olan Riemann vektör demetidir. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri,

$$\{T, N, W_1, W_2, W_3\}$$

dir, burada T ve N light-like vektörler, W_1, W_2, W_3 ler de space-like vektörlerdir.

Buna göre α 'nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= k_1 W_1 \\ \nabla_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\ \nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 \\ \nabla_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2\end{aligned}\tag{41}$$

buradaki son eğrilik olan k_6 sıfıra eşit alınarak $\{T, N, W_1, W_2, W_3\}$ çatısı eğrinin t para-metresine göre seçilmiş Frenet çatısı olarak kabul edilebilir.

$\alpha \subset L^5$ light-like eğrisi eğilim eksenini $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olduğundan $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$, $\langle W_1, X \rangle = 0$, $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$ ve $\langle W_2, X \rangle = H_2 \langle T, X \rangle$ dir. (41)'deki üçüncü eşitlikten

$$\langle \nabla_T W_1, X \rangle = -k_2 \langle T, X \rangle - k_1 \langle N, X \rangle + k_4 \langle W_2, X \rangle + k_5 \langle W_3, X \rangle$$

buluruz, burada $\langle \nabla_T W_1, X \rangle = 0$, $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$ ve $\langle W_2, X \rangle = H_2 \langle T, X \rangle$

olduğundan

$$\begin{aligned}\langle W_3, X \rangle &= \frac{1}{k_5} \{ k_2 \langle T, X \rangle + k_1 H_1 \langle T, X \rangle - k_4 H_2 \langle T, X \rangle \} \\ &= \frac{1}{k_5} \{ k_2 + k_1 H_1 - k_4 H_2 \} \langle T, X \rangle\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $H_1 = -\frac{k_2}{k_1}$ olduğundan $k_2 + k_1 H_1 = 0$ alınarak

$$\langle W_3, X \rangle = -\frac{k_4}{k_5} H_2 \langle T, X \rangle \quad (42)$$

bulunur, burada $H_3 = -\frac{k_4}{k_5} H_2$ alınarak da

$$\langle W_3, X \rangle = H_3 \langle T, X \rangle$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.4. $\alpha \subset \mathbb{L}^5$ light-like eğrisi eğilim eksenli $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olsun. α 'nın eğrilikleri k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 ve Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2, W_3\}$ olmak üzere

$$\langle W_3, X \rangle = H_3 \langle T, X \rangle$$

dir, burada $H_3 = -\frac{k_4}{k_5} H_2$ dir.

Son olarak (41) deki eşitlikten $\langle \nabla_T W_3, X \rangle = 0$ ya da $H_3' \langle T, X \rangle = 0$ ya da $H_3 = \text{sabit}$ diyebiliriz. Yani

$$-\left(\frac{k_4}{k_5}\right)' H_2 = \left(\frac{k_4}{k_5}\right) H_2'$$

olur, buradan da $k_1^2 k_3^2 k_4 k_5 = (k_4' k_5 - k_4 k_5') (k_1' k_2 - k_2' k_1)$ bulunur.

Teorem 5.2.5. $\alpha \subset \mathbb{L}^5$ light-like eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. α 'nın Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2, W_3\}$ ve eğrilikleri k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 ($k_6 = 0$) olmak üzere α 'nın \mathbb{L}^5 de sabit eğrilikli bir eğilim çizgisi olması karakterizasyonu şudur:

$$\nabla_T^5 T + \{2k_2 + k_4^2 + k_5^2\} \nabla_T^3 T = 0$$

burada ($k_1 = 1$), k_2, k_4, k_5 eğrilikleri sabit ve $k_3 = 0$ dir.

İspat. $k_1 = 1$ için (41) deki ilk eşitlikten

$$\nabla_T^2 T = \nabla_T W_1$$

$$\nabla_T^3 T = \nabla_T^2 W_1$$

$$\nabla_T^4 T = \nabla_T^3 W_1$$

$$\nabla_T^5 T = \nabla_T^4 W_1$$

dir, burada $\nabla_T^2 W_1 = -k_2 \nabla_T T - k_1 \nabla_T N + k_4 \nabla_T W_2 + k_5 \nabla_T W_3$ olduğundan

$$\nabla_T^3 W_1 = -k_2 \nabla_T^2 T - k_1 \nabla_T^2 N + k_4 \nabla_T^2 W_2 + k_5 \nabla_T^2 W_3$$

ya da

$$\nabla_T^3 W_1 = -k_2 \nabla_T^2 T - \{k_2 \nabla_T W_1 + k_3 \nabla_T W_2\} + k_4 \{-k_3 \nabla_T T - k_4 \nabla_T W_1\} + k_5 \{-k_5 \nabla_T W_1$$

$$\nabla_T^3 W_1 = -k_2 \nabla_T^2 T - \{k_2 + k_4^2 + k_5^2\} \nabla_T W_1 - k_3 \nabla_T W_2 - k_3 k_4 \nabla_T T$$

olup

$$\nabla_T^4 W_1 = -k_2 \nabla_T^3 T - \{k_2 + k_4^2 + k_5^2\} \nabla_T^2 W_1 - k_3 \nabla_T^2 W_2 - k_3 k_4 \nabla_T^2 T$$

ya da burada $\nabla_T^2 W_2 = -k_3 \nabla_T T - k_4 \nabla_T W_1$ olduğundan

$$\nabla_T^4 W_1 = -k_2 \nabla_T^3 T - \{k_2 + k_4^2 + k_5^2\} \nabla_T^2 W_1 - k_3 k_4 \nabla_T^2 T + k_3^2 \nabla_T T + k_3 k_4 \nabla_T W_1$$

dır. Burada da $k_3 = 0$ dır. Çünkü α , \mathbb{L}^5 de bir genel helistir. O halde

$$\nabla_T^5 T + \{2k_2 + k_4^2 + k_5^2\} \nabla_T^3 T = 0$$

buluruz, yani

$$\alpha^{(6)} + \{2k_2 + k_4^2 + k_5^2\} \alpha^{(4)} = 0.$$

Bu da teoremdaki iddianın kendisidir. □

4.adım: α , 6–boyutlu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz manifoldunda bir light-like eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı T , M 'nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Eğrinin ekran vektör demeti, rankı 4 olan Riemann vektör demetidir. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri,

$$\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4\}$$

dir, burada T ve N light-like vektörler, W_i ($1 \leq i \leq 4$) ler de space-like vektörlerdir.

Buna göre α 'nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \nabla_T T &= k_1 W_1 \\
 \nabla_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
 \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\
 \nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4 \\
 \nabla_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 \\
 \nabla_T W_4 &= -k_7 W_2 - k_8 W_3
 \end{aligned} \tag{43}$$

buradaki eğrinin seçilmiş t parametresine göre $k_8 = 0$ alırsak $\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4\}$ çatısı eğrinin seçilmiş parametresine göre Frenet çatısı olarak kabul edilebilir.

$\alpha \subset \mathbb{L}^6$ light-like eğrisi eğilim eksenine $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olduğundan $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$, $\langle W_1, X \rangle = 0$, $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$, $\langle W_2, X \rangle = H_2 \langle T, X \rangle$ ve $\langle W_3, X \rangle = H_3 \langle T, X \rangle$ dir.

(43)'deki dördüncü eşitlikten

$$\langle \nabla_T W_2, X \rangle = -k_3 \langle T, X \rangle - k_4 \langle W_1, X \rangle + k_6 \langle W_3, X \rangle + k_7 \langle W_4, X \rangle$$

yazabiliriz, burada $\langle W_1, X \rangle = 0$, $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$ ve $\langle \nabla_T W_2, X \rangle = H_2' \langle T, X \rangle$ olduğundan

$$\langle W_4, X \rangle = \frac{1}{k_7} \{ H_2' + k_3 - k_6 H_3 \} \langle T, X \rangle \tag{44}$$

buluruz.

Sonuç 5.2.6. $\alpha \subset \mathbb{L}^6$ light-like eğrisi eğilim eksenini $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olsun. α 'nın eğrilikleri k_i ($1 \leq i \leq 7$), ($k_8 = 0$) ve Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4\}$ olmak üzere

$$\langle W_4, X \rangle = H_4 \langle T, X \rangle$$

dir. burada $H_4 = \frac{1}{k_7} \{H_2' + k_3 - k_6 H_3\}$ dır.

5.adım: α , 7-boyutlu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz manifoldunda bir light-like eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı T , M 'nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Eğrinin ekran vektör demeti, rankı 5 olan Riemann vektör demetidir. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri,

$$\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5\}$$

dür, burada T ve N light-like vektörler, W_i ($1 \leq i \leq 5$) ler de space-like vektörlerdir.

Buna göre α 'nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= k_1 W_1 \\ \nabla_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\ \nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4 \\ \nabla_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 + k_9 W_5 \\ \nabla_T W_4 &= -k_7 W_2 - k_8 W_3 + k_{10} W_5 \\ \nabla_T W_5 &= -k_9 W_3 - k_{10} W_4 \end{aligned} \tag{45}$$

buradaki eğrinin seçilmiş t parametresine göre $h = 0$ kabul edildiğinden $k_{10} = 0$ alırsak $\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5\}$ çatısı eğrinin seçilmiş parametresine göre Frenet çatısı olur.

α eğrisi eğilim ekseni $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olduğundan $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$, $\langle W_1, X \rangle = 0$, $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$, $\langle W_2, X \rangle = H_2 \langle T, X \rangle$, $\langle W_3, X \rangle = H_3 \langle T, X \rangle$ ve $\langle W_4, X \rangle = H_4 \langle T, X \rangle$ dir.

(45)'deki beşinci eşitlikten

$$\langle \nabla_T W_3, X \rangle = -k_5 \langle W_1, X \rangle - k_6 \langle W_2, X \rangle + k_8 \langle W_4, X \rangle + k_9 \langle W_5, X \rangle$$

buluruz, buradan $\langle W_2, X \rangle = H_2 \langle T, X \rangle$, $\langle W_4, X \rangle = H_4 \langle T, X \rangle$ ve $\langle \nabla_T W_3, X \rangle = H'_3 \langle T, X \rangle$ olduğundan

$$\langle W_5, X \rangle = \frac{1}{k_9} \{ H'_3 + k_6 H_2 - k_8 H_4 \} \langle T, X \rangle$$

bulunur. Ayrıca

$$H_5 = \frac{1}{k_9} \{ H'_3 + k_6 H_2 - k_8 H_4 \} \langle T, X \rangle \quad (46)$$

alınarak da

$$\langle W_5, X \rangle = H_5 \langle T, X \rangle \quad (47)$$

olur.

Sonuç 5.2.7. $\alpha \subset \mathbb{L}^7$ light-like eğrisi eğilim ekseni $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olsun. α 'nın eğrilikleri k_i ($1 \leq i \leq 9$), ($k_{10} = 0$) ve Frenet çatısı

$\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5\}$ olmak üzere

$$\langle W_5, X \rangle = H_5 \langle T, X \rangle$$

dür, burada $H_5 = \frac{1}{k_9} \{H_3^2 + k_6 H_2 - k_8 H_4\}$ dür.

6.adım: α , 8–boyutlu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz manifoldunda bir light-like eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı T , M 'nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Eğrinin ekran vektör demeti, rankı 6 olan Riemann vektör demetidir. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri,

$$\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6\}$$

dır, burada T ve N light-like vektörler, W_i ($1 \leq i \leq 6$) lar da space-like vektörlerdir.

Buna göre α 'nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= k_1 W_1 \\ \nabla_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\ \nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4 \\ \nabla_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 + k_9 W_5 \\ \nabla_T W_4 &= -k_7 W_2 - k_8 W_3 + k_{10} W_5 + k_{11} W_6 \\ \nabla_T W_5 &= -k_9 W_3 - k_{10} W_4 + k_{12} W_6 \\ \nabla_T W_6 &= -k_{11} W_4 - k_{12} W_5 \end{aligned} \tag{48}$$

burada eğrinin seçilmiş t parametresine göre $k_{12} = 0$ alınarak

$\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6\}$ çatısı eğrinin seçilmiş parametresine göre Frenet

çatısı olarak alınabilir.

$\alpha \subset \mathbb{L}^8$ eğrisi eğilim eksenini $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olduğundan $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$,
 $\langle W_1, X \rangle = 0$, $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$, $\langle W_2, X \rangle = H_2 \langle T, X \rangle$, $\langle W_3, X \rangle = H_3 \langle T, X \rangle$,
 $\langle W_4, X \rangle = H_4 \langle T, X \rangle$ ve $\langle W_5, X \rangle = H_5 \langle T, X \rangle$ değerleri kullanılarak (48)'deki altıncı eşitlikten bulduğumuz

$$\langle \nabla_T W_4, X \rangle = -k_7 \langle W_2, X \rangle - k_8 \langle W_3, X \rangle + k_{10} \langle W_5, X \rangle + k_{11} \langle W_6, X \rangle$$

eşitliğinden

$$\langle W_6, X \rangle = \frac{1}{k_{11}} \{ H_4' + k_7 H_2 + k_8 H_3 - k_{10} H_5 \} \langle T, X \rangle \quad (49)$$

diyebiliriz, burada

$$H_6 = \frac{1}{k_{11}} \{ H_4' + k_7 H_2 + k_8 H_3 - k_{10} H_5 \} \quad (50)$$

alıp

$$\langle W_6, X \rangle = H_6 \langle T, X \rangle \quad (51)$$

yazabiliriz.

Sonuç 5.2.8. $\alpha \subset \mathbb{L}^8$ light-like eğrisi eğilim eksenini $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi olsun. α 'nın eğrilikleri k_i ($1 \leq i \leq 11$), ($k_{12} = 0$) ve Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6\}$ olmak üzere

$$\langle W_6, X \rangle = H_6 \langle T, X \rangle$$

dir, burada $H_6 = \frac{1}{k_{11}} \{ H_4' + k_7 H_2 + k_8 H_3 - k_{10} H_5 \}$ dir.

m.adım: α , $m + 2$ -boyutlu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentz manifoldunda bir light-like eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı T , M 'nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Eğrinin ekran vektör demeti, rankı m olan Riemann vektör demetidir. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri,

$$\{T, N, W_1, W_2, \dots, W_m\}$$

dir, burada T ve N light-like vektörler, W_i ($1 \leq i \leq m$) ler de space-like vektörlerdir.

Buna göre α 'nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= k_1 W_1 \\ \nabla_T N &= k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\ \nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4 \\ &\vdots \\ \nabla_T W_{m-2} &= -k_{2m-5} W_{m-4} - k_{2m-4} W_{m-3} + k_{2m-2} W_{m-1} + k_{2m-1} W_m \\ \nabla_T W_{m-1} &= -k_{2m-3} W_{m-3} - k_{2m-2} W_{m-2} + k_{2m} W_m \\ \nabla_T W_m &= -k_{2m-1} W_{m-2} - k_{2m} W_{m-1} \end{aligned} \tag{52}$$

burada $h = 0$ olacak şekilde seçilen t parametresine göre $\{T, N, W_1, W_2, \dots, W_m\}$ çatısını eğrinin Frenet çatısı olması için $k_{2m} = 0$ alıyoruz.

(52)'deki

$$\nabla_T W_{m-2} = -k_{2m-5}W_{m-4} - k_{2m-4}W_{m-3} + k_{2m-2}W_{m-1} + k_{2m-1}W_m$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T W_{m-2}, X \rangle &= -k_{2m-5} \langle W_{m-4}, X \rangle - k_{2m-4} \langle W_{m-3}, X \rangle \\ &\quad + k_{2m-2} \langle W_{m-1}, X \rangle + k_{2m-1} \langle W_m, X \rangle \end{aligned}$$

yazıp

$$\begin{aligned} \langle W_m, X \rangle &= \frac{1}{k_{2m-1}} \{ \langle \nabla_T W_{m-2}, X \rangle + k_{2m-5} \langle W_{m-4}, X \rangle \\ &\quad + k_{2m-4} \langle W_{m-3}, X \rangle - k_{2m-2} \langle W_{m-1}, X \rangle \} \end{aligned}$$

buluruz, burada

$$\langle W_{m-1}, X \rangle = H_{m-1} \langle T, X \rangle, \langle W_{m-3}, X \rangle = H_{m-3} \langle T, X \rangle, \langle W_{m-4}, X \rangle = H_{m-4} \langle T, X \rangle$$

ve $\langle \nabla_T W_{m-2}, X \rangle = H'_{m-2} \langle T, X \rangle$ değerleri yerine yazılarak da

$$\langle W_m, X \rangle = \frac{1}{k_{2m-1}} \{ H'_{m-2} + k_{2m-5} H_{m-4} + k_{2m-4} H_{m-3} - k_{2m-2} H_{m-1} \} \langle T, X \rangle \quad (53)$$

bulunur. Eğer

$$H_m = \frac{1}{k_{2m-1}} \{ H'_{m-2} + k_{2m-5} H_{m-4} + k_{2m-4} H_{m-3} - k_{2m-2} H_{m-1} \} \quad (54)$$

alırsak

$$\langle W_m, X \rangle = H_m \langle T, X \rangle, \quad (m \geq 5) \quad (55)$$

olur.

Tanım 5.2.9. α, \mathbb{L}^{m+2} de $h = 0$ olacak şekilde seçilmiş t parametresiyle parametrelendirilmiş bir light-like eğri olsun. Eğer α eğrisi \mathbb{L}^{m+2} de Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2, \dots, W_m\}$ ve yüksek mertebeden eğrilikleri $k_1, k_2, \dots, k_{2m-1}$ olan bir eğilim çizgisi ise o zaman yüksek mertebeden harmonik eğrilik fonksiyonu

$$H_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_i = \begin{cases} -\frac{k_2}{k_1} & , i = 1 \text{ için} \\ \frac{H'_1}{k_3} & , i = 2 \text{ için} \\ -\frac{k_4}{k_5} H_2 & , i = 3 \text{ için} \\ \frac{1}{k_7} \{ H'_2 + k_3 - k_6 H_3 \} & , i = 4 \text{ için} \\ \frac{1}{k_9} \{ H'_3 + k_6 H_2 - k_8 H_4 \} & , i = 5 \text{ için} \\ \vdots \\ \frac{1}{k_{2i-1}} \{ H'_{i-2} + k_{2i-5} H_{i-4} + k_{2i-4} H_{i-3} - k_{2i-2} H_{i-1} \} & , 5 < i \leq m \end{cases} \quad (56)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 5.2.10. $\alpha \subset \mathbb{L}^{m+2}$ light-like eğrisi $h = 0$ olacak şekilde seçilmiş t parametresiyle parametrelendirilmiş bir genel helis ve bu parametreye göre seçilmiş Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2, \dots, W_m\}$ olsun. Eğilim ekseni $Sp\{X\}$ olan α nın H_1, H_2, \dots, H_m harmonik eğrilik fonksiyonları için

$$\langle W_j, X \rangle = H_j \langle T, X \rangle, \quad 6 \leq j \leq m$$

dir, burada

$$\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$$

alınmıştır.

İspat. İspatı tümevarım yöntemiyle yapacağız.

$j = 6$ için teorem doğrudur, çünkü $\langle W_6, X \rangle = H_6 \langle T, X \rangle$ dir, (52) deki Frenet denklemlerinden

$$\langle \nabla_T W_4, X \rangle = -k_7 \langle W_2, X \rangle - k_8 \langle W_3, X \rangle + k_{10} \langle W_5, X \rangle + k_{11} \langle W_6, X \rangle$$

dir, burada ilk beş adımda bulduğumuz sonuçları kullanarak

$$\langle W_6, X \rangle = \frac{1}{k_{11}} \{H_4' + k_7 H_2 + k_8 H_3 - k_{10} H_5\} \langle T, X \rangle$$

buluruz. Böylece Tanım 5.2.9. daki

$$H_6 = \frac{1}{k_{11}} \{H_4' + k_7 H_2 + k_8 H_3 - k_{10} H_5\}$$

değerini kullanarak $\langle W_6, X \rangle = H_6 \langle T, X \rangle$ olduğunu görürüz. Gerçekten de

$$X = \langle N, X \rangle T + \langle T, X \rangle N + \sum_{i=2}^6 \langle W_i, X \rangle W_i$$

vektörü time-like ya da space-like bir vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \mp 1 &= 2 \langle N, X \rangle \langle T, X \rangle + \sum_{i=2}^6 \langle W_i, X \rangle^2 \\ \mp 1 &= \left\{ 2H_1 + \sum_{i=2}^6 H_i^2 \right\} \langle T, X \rangle^2 \\ \Rightarrow 2H_1 + \sum_{i=2}^6 H_i^2 &= \text{sabit yani } H_1' + \sum_{i=2}^6 H_i H_i' = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

olur.

Ayrıca (52) den bulduğumuz

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T W_2, X \rangle &= -k_3 \langle T, X \rangle - k_6 \langle W_3, X \rangle + k_7 \langle W_4, X \rangle, \\ \langle \nabla_T W_3, X \rangle &= -k_6 \langle W_2, X \rangle + k_8 \langle W_4, X \rangle + k_{10} \langle W_5, X \rangle, \\ \langle \nabla_T W_5, X \rangle &= -k_9 \langle W_3, X \rangle - k_{10} \langle W_4, X \rangle, \\ \langle \nabla_T W_6, X \rangle &= -k_{11} \langle W_4, X \rangle\end{aligned}$$

eşitliklerinin harmonik eğrilikler cinsinden yazılmasıyla bulunan

$$\begin{aligned}H'_2 &= -k_3 + k_6 H_3 + k_7 H_4 \\ H'_3 &= -k_6 H_2 + k_8 H_4 + k_9 H_5 \\ H'_5 &= -k_9 H_3 - k_{10} H_4 \\ H'_6 &= -k_{11} H_4\end{aligned}$$

eşitlikleri (57) deki yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}H'_1 + H_2 \{k_6 H_3 + k_7 H_4\} + H_3 \{-k_6 H_2 + k_8 H_4 + k_9 H_5\} \\ + H_4 H'_4 + H_5 \{-k_9 H_3 - k_{10} H_4\} + H_6 \{-k_{11} H_4\} = 0\end{aligned}$$

ya da

$$H_6 = \frac{1}{k_{11}} \{H'_4 - k_{10} H_5 + k_8 H_3 + k_7 H_2\}$$

olduğu görülür.

Şimdi teorem $j = p - 1$ için doğru olsun. Göstereceğiz ki $j = p$ için de doğru olur.

Teorem $j = p - 1$ için doğru olduğundan

$$\langle W_{p-1}, X \rangle = H_{p-1} \langle T, X \rangle$$

diyebiliriz. Hatta $j = p - 2$ için de doğru olduğundan

$$\langle W_{p-2}, X \rangle = H_{p-2} \langle T, X \rangle$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanının T yönündeki türevlerini alırsak

$$\langle \nabla_T W_{p-2}, X \rangle = H'_{p-2} \langle T, X \rangle$$

olur. Frenet denklemlerinden

$$\nabla_T W_{p-2} = -k_{2p-5} W_{p-4} - k_{2p-4} W_{p-3} + k_{2p-2} W_{p-1} + k_{2p-1} W_p$$

olup buradan

$$\langle \nabla_T W_{p-2}, X \rangle = -k_{2p-5} \langle W_{p-4}, X \rangle - k_{2p-4} \langle W_{p-3}, X \rangle + k_{2p-2} \langle W_{p-1}, X \rangle + k_{2p-1} \langle W_p, X \rangle$$

veya bunu yukarıda yerine yazarsak

$$-k_{2p-5} \langle W_{p-4}, X \rangle - k_{2p-4} \langle W_{p-3}, X \rangle + k_{2p-2} \langle W_{p-1}, X \rangle + k_{2p-1} \langle W_p, X \rangle = H'_{p-2} \langle T, X \rangle$$

olur, burada $\langle W_{p-4}, X \rangle = H_{p-4} \langle T, X \rangle$, $\langle W_{p-3}, X \rangle = H_{p-3} \langle T, X \rangle$, $\langle W_{p-1}, X \rangle = H_{p-1} \langle T, X \rangle$ olduğundan da

$$\{k_{2p-5} H_{p-4} + k_{2p-4} H_{p-3} - k_{2p-2} H_{p-1} + H'_{p-2}\} \langle T, X \rangle = k_{2p-1} \langle W_p, X \rangle$$

ya da

$$\langle W_p, X \rangle = \frac{1}{k_{2p-1}} \{H'_{p-2} + k_{2p-5} H_{p-4} + k_{2p-4} H_{p-3} - k_{2p-2} H_{p-1}\} \langle T, X \rangle$$

dir. Harmonik eğrilik tanımından da $i = p$ için

$$H_p = \frac{1}{k_{2p-1}} \{H'_{p-2} + k_{2p-5} H_{p-4} + k_{2p-4} H_{p-3} - k_{2p-2} H_{p-1}\}$$

olduğundan

$$\langle W_p, X \rangle = H_p \langle T, X \rangle$$

olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar. \square

Teorem 5.2.11. $\alpha \subset \mathbb{L}^{m+2}$ light-like eğrisi eğilim eksenini $Sp\{X\}$ olan bir eğilim çizgisi (null helis) olsun. $h = 0$ olacak şekilde seçilmiş t parametresine göre α nun seçilmiş Frenet çatısı $\{T, N, W_1, W_2, \dots, W_m\}$ ve $k_1, k_2, \dots, k_{2m-1}$ eğrilikleri için harmonik eğrilikler H_1, H_2, \dots, H_m olsun.

" $\alpha \subset \mathbb{L}^{m+2}$ de bir eğilim çizgisi (null helis) tir $\Leftrightarrow 2H_1 + \sum_{i=2}^m H_i^2 = \text{sabittir.}$ "

İspat. (\Rightarrow) $\alpha \subset \mathbb{L}^{m+2}$ light-like eğrisi \mathbb{L}^{m+2} de bir eğilim çizgisi olsun. α 'nın eğilim eksenini $Sp\{X\}$ ve teğet vektör alanı T olmak üzere $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$, $\langle W_1, X \rangle = 0$ ve $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$ olmak üzere

$$\langle W_j, X \rangle = H_j \langle T, X \rangle, \quad 2 \leq j \leq m$$

dir. $X \in Sp\{T, N, W_1, W_2, \dots, W_m\}$ olduğundan da

$$X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 W_1 + \lambda_4 W_2 + \dots + \lambda_{m+2} W_m$$

dir. burada $\lambda_1 = \langle N, X \rangle$, $\lambda_2 = \langle T, X \rangle$, $\lambda_{i+2} = \langle W_i, X \rangle$ ($1 \leq i \leq m$) dir. X time-like ya da space-like olduğunda $\langle X, X \rangle = \mp 1$ olacağından

$$\langle X, X \rangle = 2 \langle T, X \rangle \langle N, X \rangle + \langle W_1, X \rangle^2 + \sum_{i=2}^m \langle W_i, X \rangle^2$$

dir. burada $\langle W_1, X \rangle = 0$ ve $\langle N, X \rangle = H_1 \langle T, X \rangle$ olduklarından

$$\langle X, X \rangle = 2 H_1 \langle T, X \rangle^2 + \sum_{i=2}^m \langle W_i, X \rangle^2$$

olur. Ayrıca $\langle W_i, X \rangle = H_i \langle T, X \rangle$ ($2 < i \leq m$) bulduğumuzdan

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= 2H_1 \langle T, X \rangle^2 + \sum_{i=2}^m H_i^2 \langle T, X \rangle^2 \\ \mp 1 &= \left\{ 2H_1 + \sum_{i=2}^m H_i^2 \right\} \langle T, X \rangle \end{aligned}$$

dir. Yani

$$2H_1 + \sum_{i=2}^m H_i^2 = \frac{\mp 1}{\langle T, X \rangle}$$

ya da $\langle T, X \rangle = \text{sabit}$ olduğundan

$$2H_1 + \sum_{i=2}^m H_i^2 = \text{sabit}$$

olur.

(\Leftrightarrow) $2H_1 + \sum_{i=2}^m H_i^2 = \text{sabit}$ olsun.

$$X = \langle N, X \rangle T + \langle T, X \rangle N + \sum_{i=2}^m \langle W_i, X \rangle W_i$$

vektörünün sabit olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için de X vektörünün T yönündeki türevinin sıfır olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \nabla_T X &= \langle \nabla_T N, X \rangle T + \langle N, X \rangle \nabla_T T + \langle T, X \rangle \nabla_T N \\ &\quad + \sum_{i=2}^m H_i' \langle T, X \rangle W_i + H_i \langle T, X \rangle \nabla_T W_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_T X = & \{k_3 H_2 T + k_1 H_1 W_1 + k_2 W_1 + k_3 W_2 + H_2' W_2 \\
& + H_2 (-k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4) \\
& + H_3' W_3 + H_3 (-k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 + k_9 W_5) + H_4' W_4 \\
& + H_4 (-k_7 W_2 - k_8 W_3 + k_{10} W_5 + k_{11} W_6) + \dots + H_{m-1}' W_{m-1} \\
& + H_{m-1} (-k_{2m-3} W_{m-3} - k_{2m-2} W_{m-2} + k_{2m} W_m) + H_m' W_m \\
& + H_m (-k_{2m-1} W_{m-2} - k_{2m} W_{m-1})\} \langle T, X \rangle
\end{aligned}$$

Tanım 5.2.9. kullanılarak yukarıdaki işlemler yapıldığında

$$\nabla_T X = 0$$

olduğunu görürüz. □

5.3. Lorentz Uzayında Light-like Eğriler için Yüksek Mertebeden Eğriliklerin Harmonik Eğrilikler Cinsinden İfadeleri

Teorem 5.3.1. α, \mathbb{L}^{m+2} de $(m \geq 6)$ $h = 0$ olacak şekilde seçilmiş bir light-like (null) eğri olsun. α eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleriyle harmonik eğrilikleri arasında

$$k_{2r-1} = \frac{2H_1' + \sum_{i=2}^{r-1} (H_i^2)'}{2H_r H_{r-2}}, \quad 6 \leq r \leq m \quad (58)$$

bağıntısı vardır.

İspat. İspat için tümevarım yöntemini uygulayacağız. Tanım 5.2.10. dan

$$k_{2r-1} = \frac{1}{H_r} \{H'_{r-2} + k_{2r-5}H_{r-4} + k_{2r-4}H'_{r-3} - k_{2r-2}H_{r-1}\} \quad (59)$$

dir. Bu ifadede $r = 6$ alırsak,

$$k_{11} = \frac{1}{H_6} \{H'_4 + k_7H_2 + k_8H_3 - k_{10}H_5\} \quad (60)$$

olur. Tanım 5.2.10. ve (48) deki eşitliklerinden bulunan

$$k_7 = \frac{1}{H_4} \{H'_2 + k_3 - k_6H_3\},$$

$$k_8 = \frac{1}{H_4} \{-k_9H_5 + H'_3 + k_6H_2\}$$

ve

$$k_{10} = \frac{1}{H_4} \{-H'_5 - k_9H_3\}$$

değerleri (60) da yerlerine yazılırsa,

$$k_{11} = \frac{1}{H_4H_6} \{H_4H'_4 + (H'_2 + k_3 - k_6H_3)H_2$$

$$+ (-k_9H_5 + H'_3 + k_6H_2)H_3 + (H'_5 + k_9H_3)H_5\}$$

ya da

$$k_{11} = \frac{1}{H_4H_6} \{H_4H'_4 + H_2H'_2 + k_3H_2 + H_3H'_3 + H_5H'_5\}$$

olur, burada $H_2 = \frac{H'_1}{k_3}$ değeri de yerine yazılarak

$$k_{11} = \frac{1}{H_4H_6} \{H'_1 + H_2H'_2 + H_3H'_3 + H_4H'_4 + H_5H'_5\}$$

bulunur. Pay ve paydayı 2 ile çarptığımızda da

$$k_{11} = \frac{2H'_1 + \sum_{i=2}^5 (H'_i)^2}{2H_4H_6}$$

buluruz. O halde formül $r = 6$ için doğrudur.

Şimdi, teoremi $r = p - 1$ için doğru kabul edip, $r = p$ için de doğru olacağını gösterelim.

Teorem $r = p - 1$ için doğru olduğundan

$$k_{2p-3} = \frac{2H'_1 + \sum_{i=2}^{p-2} (H_i^2)'}{2H_{p-1}H_{p-3}} \quad (61)$$

eşitliği mevcuttur. Tanım 5.2.10. dan

$$k_{2p-1} = \frac{1}{H_p} \{H'_{p-2} + k_{2p-5}H_{p-4} + k_{2p-4}H_{p-3} - k_{2p-2}H_{p-1}\}$$

olup, buradaki

$$k_{2p-4} = \frac{1}{H_{p-3}} \{-H'_{p-2} - k_{2p-5}H_{p-4}\}$$

ve

$$k_{2p-2} = -\frac{1}{H'_{p-2}} \{H'_{p-1} + k_{2p-3}H_{p-3}\}$$

değerleri yerlerine yazılarak

$$k_{2p-1} = \frac{1}{H_p H_{p-2}} \{H_{p-1}H'_{p-1} + k_{2p-3}H_{p-3}\}$$

bulunur. Burada k_{2p-3} ün (61) deki değeri yerine yazılırsa,

$$k_{2p-1} = \frac{2H'_1 + \sum_{i=2}^{p-1} (H_i^2)'}{2H_p H_{p-1}}$$

bulunur. Bu da teoremin $r = p$ için de doğru olması demektir. \square

5.4. Lorentz Uzayında Light-like (Null) Eğilim Çizgileri için

Diğer Karakterizasyonlar

Teorem 5.4.1. α , $m \geq 6$ ve m çift olmak üzere, \mathbb{L}^{m+2} de bir light-like (null) eğri olsun. $\alpha \subset \mathbb{L}^{m+2}$ nin Frenet çatısı $\{T, N, W_1, \dots, W_m\}$ olmak üzere

" α eğrisi, \mathbb{L}^{m+1} de bir eğilim çizgisidir $\iff \det(T', N', W'_1, \dots, W'_m) = 0$ dir."

İspat. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

(\Leftarrow) $\det(T', N', W'_1, \dots, W'_m) = 0$ olsun. α light-like eğrisinin \mathbb{L}^{m+1} de bir eğilim çizgisi (genel helis) olduğunu göstereceğiz.

$m = 6$ olsun. Frenet denklemlerinden

$$T' = k_1 W_1$$

$$N' = k_2 W_1 + k_3 W_2$$

$$W'_1 = -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3$$

$$W'_2 = -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4$$

$$W'_3 = -k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 + k_9 W_5$$

$$W'_4 = -k_7 W_2 - k_8 W_3 + k_{10} W_4 + k_{11} W_6$$

$$W'_5 = -k_9 W_3 - k_{10} W_4 + k_{12} W_6$$

$$W'_6 = -k_{11} W_4 - k_{12} W_5$$

ve $k_{12} = 0$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\det(T', N', W'_1, W'_2, W'_3, W'_4, W'_5, W'_6) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 & k_4 & k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & -k_4 & 0 & k_6 & k_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_5 & -k_6 & 0 & k_8 & k_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_7 & -k_8 & 0 & k_{10} & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & -k_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{11} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

veya

$$\det(T', N', W'_1, W'_2, W'_3, W'_4, W'_5, W'_6) = -k_1^2 k_3^2 k_9^2 k_{11}^2$$

dir. Hipotezden $\det(T', N', W'_1, W'_2, W'_3, W'_4, W'_5, W'_6) = 0$ dir. O zaman $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, $k_9 \neq 0$ olduğundan $k_{11} = 0$ olması gerekir. Teorem 5.3.1. gereğince

$$k_{11} = \frac{2H'_1 + \sum_{i=2}^5 (H_i^2)'}{2H_4 H_6}$$

dir. $k_{11} = 0$ olacağından $2H'_1 + \sum_{i=2}^5 (H_i^2)' = 0$ ya da $2H_1 + \sum_{i=2}^5 H_i^2 = \text{sabit}$ olur. Bu da α nın \mathbb{L}^7 de eğilim çizgisi olması demektir.

$m = 8$ için Frenet denklemlerinden

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_8) = -k_1^2 k_3^2 k_9^2 k_{13}^2 k_{15}^2$$

olup, hipotezden $k_1^2 k_3^2 k_9^2 k_{13}^2 k_{15}^2 = 0$ dir. Burada $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, $k_9 \neq 0$, $k_{13} \neq 0$

olduğundan $k_{15} = 0$ olması gerekir. Teorem 5.3.1. gereğince

$$k_{15} = \frac{2H'_1 + \sum_{i=2}^7 (H_i^2)'}{2H_6 H_8}$$

dır. $k_{15} = 0$ olacağından $2H'_1 + \sum_{i=2}^7 (H_i^2)' = 0$ ya da $2H_1 + \sum_{i=2}^7 H_i^2 = \text{sabit}$ olması gerekir. Bu da α nın \mathbb{L}^9 da eğilim çizgisi olması demektir.

$m = 10$ için Frenet denklemlerinden

$$\begin{aligned} \det(T', N', W'_1, \dots, W'_{10}) &= -k_1^2 k_3^2 (k_8 k_{12} - k_9 k_{11})^2 k_{17}^2 k_{19}^2 \\ &= -k_1^2 k_3^2 k_{17}^2 k_{19}^2 (k_8^2 k_{12}^2 - 2k_8 k_9 k_{11} k_{12} + k_9^2 k_{11}^2) \end{aligned}$$

olur. $m = 6$ için $k_{12} = 0$ olduğundan

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{10}) = \det(T', N', W'_1, \dots, W'_6) k_{17}^2 k_{19}^2$$

yazabiliriz. Teoremin $m = 6$ için doğru olduğunu biliyoruz. Yani

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_6) = 0 \implies \alpha, \mathbb{L}^7 \text{ de eğilim çizgisidir.}$$

Öyleyse

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{10}) = -k_1^2 k_3^2 k_9^2 k_{11}^2 k_{17}^2 k_{19}^2 = 0$$

olup, $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, $k_9 \neq 0$, $k_{11} \neq 0$, $k_{17} \neq 0$ için $k_{19} = 0$ olmalıdır. Teorem 5.3.1.

den

$$k_{19} = \frac{2H'_1 + \sum_{i=2}^9 (H_i^2)'}{2H_8 H_{10}}$$

dır. Böylece, $2H_1 + \sum_{i=2}^9 (H_i^2)' = 0$ ya da $2H_1 + \sum_{i=2}^9 H_i^2 = \text{sabit}$ tir. Bu da α nın \mathbb{L}^{11} de eğilim çizgisi olması demektir.

Teorem $m = p$ için doğru olsun. $m = p + 4$ için de doğru olduğunu gösterelim.

$m = p$ için doğru olduğundan

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) = 0 \implies \alpha, \mathbb{L}^{p+1} \text{ de eğilim çizgisidir.}$$

Burada $p = 2k$ ve k nın tek olması halinde

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) = k_1^2 k_3^2 k_9^2 k_{11}^2 \dots k_{2p-3}^2 k_{2p-1}^2$$

dir. Eğer $p = 2k$ ve k çift ise,

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) = k_1^2 k_3^2 k_8^2 k_{13}^2 k_{15}^2 \dots k_{2p-3}^2 k_{2p-1}^2$$

olur.

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{p+4}) = \det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) k_{2p+5}^2 k_{2p+7}^2$$

yazabiliriz. Eğer k tek ise,

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{p+4}) = k_1^2 k_3^2 k_9^2 \dots k_{2p-3}^2 k_{2p-1}^2 k_{2p+5}^2 k_{2p+7}^2$$

dir. $\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{p+4}) = 0$ ise, $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0, \dots$, $k_{2p-3} \neq 0$, $k_{2p-1} \neq 0$,

$k_{2p+5} \neq 0$ olduğundan $k_{2p+7} = 0$ olmalıdır. Terem 5.3.1. den

$$k_{2p+7} = \frac{2H_1 + \sum_{i=2}^{p+3} (H_i^2)'}{2H_{p+2}H_{p+4}}$$

olup, $k_{2p+7} = 0$ olduğundan $2H'_1 + \sum_{i=2}^{p+3} (H_i^2)' = 0$ yani $2H_1 + \sum_{i=2}^{p+3} H_i^2 = \text{sabit}$ olması gerekir. Bu da α nın L^{p+5} de bir eğilim çizgisi olması demektir.

Benzer şekilde k çift olduğunda da

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{p+4}) = k_1^2 k_3^2 k_5^2 k_7^2 k_9^2 k_{11}^2 \dots k_{2p-3}^2 k_{2p-1}^2 k_{2p+5}^2 k_{2p+7}^2$$

olup, $k_1 \neq 0, k_3 \neq 0, \dots, k_{2p-3} \neq 0, k_{2p-1} \neq 0, k_{2p+5} \neq 0$ olacağından $k_{2p+7} = 0$ olur ki, yine α, L^{p+5} de bir eğilim çizgisi olur.

$\implies \alpha \subset L^{m+2}$ light-like eğrisi, L^{m+1} de bir eğilim çizgisi olsun.

$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_m) = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$m = 6$ için $\det(T', N', W'_1, \dots, W'_6) = k_1^2 k_3^2 k_5^2 k_7^2 k_9^2 k_{11}^2$ dir. Teorem 5.3.1. deki k_{11} değerini yerine yazarsak,

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_6) = k_1^2 k_3^2 k_5^2 k_7^2 k_9^2 k_{11}^2 \left[\frac{2H'_1 + \sum_{i=2}^5 (H_i^2)'}{2H_4 H_6} \right]^2$$

olur. Hipotezden α nın L^7 de bir eğilim çizgisi olduğunu biliyoruz. α nın L^7 de bir eğilim çizgisi olması karakterizasyonu

$$2H_1 + \sum_{i=2}^5 H_i^2 = \text{sabit}$$

olması idi. Bu eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak

$$2H'_1 + \sum_{i=2}^5 (H_i^2)' = 0$$

buluruz. O halde eşitliğin sağ tarafı sıfır olduğundan

$$\det(T', N', W'_1, W'_2, W'_3, W'_4, W'_5, W'_6) = 0$$

olmalıdır. Böylece teorem $m = 6$ için doğrudur.

Şimdi $m = p$ için teoremi doğru kabul edip, $m = p + 4$ için de doğru olacağını gösterelim. $m = p$ için doğru olduğundan α , \mathbb{L}^{p+1} de eğilim çizgisi ise,

$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) = 0$ dır. Burada $p = 2k$ ve k nın tek olması halinde

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) = k_1^2 k_3^2 k_5^2 k_{11}^2 \dots k_{2p-3}^2 k_{2p-1}^2$$

veya k nın çift olması halinde

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) = k_1^2 k_3^2 k_5^2 k_{11}^2 k_{13}^2 \dots k_{2p-3}^2 k_{2p-1}^2$$

dir. Her iki durumda da

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{p+4}) = \det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) k_{2p+5}^2 k_{2p+7}^2$$

yazabiliriz. Teorem 5.3.1. deki k_{2p+7} eğrilüğünün harmonik eğrilikler cinsinden ifadesini yukarıda yerine yazarsak,

$$\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{p+4}) = \det(T', N', W'_1, \dots, W'_p) k_{2p+5}^2 \left[\frac{2H'_1 + \sum_{i=2}^{p+3} (H'_i)^2}{2H_{p+2} H_{p+4}} \right]^2$$

olur. Hipotezden α nın \mathbb{L}^{p+5} de bir eğilim çizgisi olduğunu biliyoruz. α nın \mathbb{L}^{p+5} de eğilim çizgisi olması karakterizasyonu

$$2H_1 + \sum_{i=2}^{p+3} H_i^2 = \text{sabit}$$

olması idi. Bu eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak

$$2H'_1 + \sum_{i=2}^{p+3} (H_i^2)' = 0$$

buluruz. Böylece eşitliğin sağ tarafı sıfır olacağından $\det(T', N', W'_1, \dots, W'_{p+4}) = 0$ olur. Bu da teoremin $m = p$ için doğru iken $m = p + 4$ için de doğru olduğunu gösterir ki bu da ispatı tamamlar. \square

KAYNAKLAR

- Beem, J. K., Ehrlich P. E. and Easley, K.L. 1996. Global Lorentzian Geometry. Marcel Dekker Inc. New York, Second Edition.
- Bejancu, A. 1994. Lightlike curves in Lorentzian manifolds. Publ. Math. Debrecen, 44 (1-2); 145-155.
- Bejancu, A. 1996. Null Hypersurfaces of Semi-Riemannian Spaces. Saitama Math. J. Vol. 14; 25-40.
- Bejancu, A. and Duggal, K.L. 1995. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds. Acta Appl. Math. Vol. 38; 197-215.
- Birman, G. S. and Nomizu, K. 1984-A. Trigonometry in Lorentzian geometry. Am. Math. Mont. 91(9); 543-549.
- Birman, G. S. and Nomizu, K. 1984-B. The Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional space-times. Michigan. Math. J. 31; 77-81.
- Cartan, E. 1951. La theorie des groupes finis et continus et la geometrie differentielle. Paris.
- Duggal, K.L. and Bejancu, A. 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publisher.
- Ekmakci, N. and Hacısalihoğlu, H. H. 1996. On Helices of Lorentzian Manifold. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1. V.45; pp. 45-50.
- Ekmakci, N., Hacısalihoğlu, H. H. and İlarıslan, K. 2000. Harmonic Curvatures in Lorentzian Space. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. Vol. 23, No.2; 173-179.

- Ekmekci, N. and İlarıslan, K. 1998. Higher curvatures of a regular curve in Lorentzian space. Jour. of Inst. of Math. & Sci. (Math. Ser.) Vol. 11, No.2; 97-102.
- Ekmekci, N. and İlarıslan, K. 2000. On Characterization of General Helices in Lorentz Space. Hadronic J. Vol. 23, No.6; 677-682.
- Hacısalihoglu, H.H. 1983. Diferensiyel Geometri. Ankara.
- Hacısalihoglu, H. H. and Öztürk, R. 2003. On the characterization of Inclined curves in \mathbb{E}^n , I. Tensor, N.S. Vol.64, pp. 157-162.
- Hacısalihoglu, H. H. and Öztürk, R. 2003. On the characterization of Inclined curves in \mathbb{E}^n , II. Tensor, N.S. Vol.64, pp. 163-170.
- Ikawa, T. 1985. On Curves and Submanifolds in an Indefinite-Riemannian Manifold. Tsukaba J. Math. 9; 353-371.
- İlarıslan, K. 2002. Öklid Olmayan Manifoldlar Üzerindeki Bazı Özel Eğriler. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.
- Nakanishi, Y. 1988. On Helices and Pseudo-Riemannian Submanifolds. Tsukaba J. Math. Vol. 12, No.2; 496-476.
- O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry. Academic press, New York, London.
- Özdamar, E. and Hacısalihoglu, H. H. 1974. Characterizations of Spherical curves in Euclidean n-space. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara Series A1, TOME 23; pp.109-125.
- Özdamar, E. and Hacısalihoglu, H. H. 1975. A characterization of Inclined curves in Euclidean n-space. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara Series A1, TOME 24; pp.15-23.

Struik, D.J. 1951. Lectures on Classical Differential Geometry. New York.

Uğurlu, H.H. ve Çalışkan, A. 1997. Space-like Yüzeyler Geometrisi.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Eskişehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da, lise öğrenimini Eskişehir'de tamamladı. 1989 yılında girdiği Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1993 yılında Matematikçi ünvanıyla mezun oldu ve aynı yıl Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi'nin Araştırma görevliliği kadrosuna atandı. 1995 yılında Yüksek Lisansı tamamlayıp 1996 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimine başladı.