ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

WEYL-WIGNER-GROENEWOLD-MOYAL KUANTİZASYONU ve SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ

Bengü DEMİRCİOĞLU

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2003

Prof. Dr. Abdullah VERÇİN danışmanlığında, Bengü DEMİRCİOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 28.10.2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı'nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Tekin DERELİ

Prof. Dr. Tacettin ALTANHAN

Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Prof. Dr. Metin ÖNDER

Doç. Dr. Mesude SAĞLAM

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

WEYL-WIGNER-GROENEWOLD-MOYAL KUANTİZASYONU
ve
SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ

Bengü DEMİRCİOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Bu tez çalışmasında, Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal (WWGM) kuantizasyonunun temel düşünceleri gözden geçirilmiş ve Landau düzeylerine karşı gelen Wigner fonksiyonlarının türetilmesinde kullanılmışlardır. Aynı amaç için bir üretici fonksiyon tanımlanmış ve bunun integre edilmiş formlarından yararlanarak iki boyutlu faz-uzayı koordinat düzlemlerindeki marjinal olasılık yoğunlukları hesaplanmıştır. Süpersimetrik kuantum mekaniğinin bağlaştırım işlemcisi düşüncesinin bir genişletilmesi olarak, iki boyutta süperintegrallenebilir ve eşspektrumlu iki potansiyel ailesinin kurulmasına imkan tanıyan bir cebirsel yöntem geliştirilmiştir. Bazı SUSY metodlarının WWGM kuantizasyonundaki realizasyonları örneklerle gösterilmiştir.

2003, 77 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal kuantizasyonu, yıldız-çarpım, Moyal parantezi, yıldız-özdeğer denklemleri, Wigner fonksiyonu, marjinal olasılık yoğunlukları, süpersimetrik kuantum mekaniği, bağlaştırım metodu, süperintegrallenebilirlik, eşspektrumlu potansiyeller.

ABSTRACT

Ph.D.Thesis

WEYL-WIGNER-GROENEWOLD-MOYAL QUANTIZATION
and
SUPERSYMMETRIC QUANTUM MECHANICS

Bengü DEMİRCİOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor : Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

In this thesis, basic ideas of the Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal (WWGM) quantization are reviewed and are used in generating Wigner functions of Landau levels. A generating function is introduced for the same purpose and by means of its integrated forms, marginal probability densities on two dimensional phase-space coordinate planes are calculated. As an extension of the intertwining operator idea of supersymmetric quantum mechanics (SUSYQM) an algebraic method which makes it possible to construct two families of two dimensional superintegrable and isospectral potentials is developed. Realizations of some SUSY methods in the WWGM quantization are presented with applications.

2003, 77 pages

Key Words: Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal quantization, star-product, Moyal bracket, star-eigenvalue equations, Wigner function, marginal probability densities, supersymmetric quantum mechanics, intertwining method, superintegrability, isospectral potentials.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmalarım boyunca hiçbir yardım ve desteğini üzerimden eksik etmeyen ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e, yakın ilgisini esirgemeyen Sayın Arş. Gör. Şengül KURU'ya ve tezin yazımı sırasındaki yardımları için Sayın Yrd. Doç. Dr. Metin KANTAR'a ve aileme teşekkür ederim.

Bengü DEMİRCİOĞLU
Ankara, Ekim 2003

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\hat{q}$	Konum işlemcisi
$\hat{p}$	Momentum işlemcisi
$\hat{I}$	Birim işlemci
$\hbar$	Planck sabiti
$\hat{D}$	Yerdeğiştirme işlemcisi
$\hat{\Delta}_{qp}$	Grossmann-Royer ötelenmiş parite işlemcisi
$\star$	Yıldız çarpım
$\{,\}_M$	Moyal parantezi
$\{,\}_P$	Poisson parantezi
$\hat{\rho}$	Yoğunluk işlemcisi
W	Wigner fonksiyonu
a	Yaratıcı fonksiyon
$\bar{a}$	Yokedici fonksiyon
N	Sayı fonksiyon
G	Wigner fonksiyonu için üretici fonksiyon
$M_{\alpha\beta}$	Marjinal olasılık dağılımları için üretici fonksiyon
P_{nl}	Marjinal olasılık dağılımları
Φ	Süperpotansiyel
$\hat{\mathcal{L}}$	Bağlaştırım işlemcisi
$\mathcal{L}$	Bağlaştırım fonksiyonu

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kuantum mekaniğinin kuruluşunun tamamlanmasından sonra bu yeni hareket teorisi sırasıyla; Weyl, Wigner, Groenewold ve Moyal tarafından faz-uzayında bir klasik istatistik teoriye benzer şekilde yeniden formüle edilmeye çalışılmıştır (Moyal 1949). Kurucularının baş harfleri kullanılarak WWGM kuantizasyonu (veya kısaca Moyal kuantizasyonu) olarak adlandırılan bu kuantizasyon, kuantum mekaniğinin Schrödinger, Heisenberg ve Feynman'ın yol integral formülasyonlarına alternatif bir yöntemdir. Bu yeni formülasyon bir Hilbert uzayındaki kuantum mekaniksel yapının belirli kurallar çerçevesinde klasik faz-uzayına taşınması şeklinde ifade edilebilir. Böylece bir faz-uzayında tanımlanmış fonksiyonlar olan klasik gözlenebilirlerle, kuantum gözlenebilirleri olan işlemciler arasında bir eşleştirme yapılır (Cahill 1969, Hillery 1984, Dereli 1997, Verçin 1998). Bu eşleştirme kurallarına göre iki işlemcinin çarpımına bunlara karşı gelen faz-uzayı fonksiyonlarının yıldız-çarpımı ve işlemcilerin Lie parantezine (komütatörüne) de fonksiyonların Moyal parantezi karşı gelir (Balazs 1984). Yıldız çarpım ($\star$-çarpım, $\star$-product, star-product) işlemci çarpımı gibi, sıradeğişmeli olmayan (non-commutative) fakat birleşmeli (associative) yeni bir çarpımdır ve kuantum bilgileri bu yeni çarpım kuralında kodlanmıştır (Bayen 1978). Yıldız çarpım aracılığı ile kurulan Moyal parantezi de yeni bir Lie parantezidir.

Yıldız çarpım ve Moyal parantezi faz-uzayı fonksiyonlarının bilinen sıradeğişmeli çarpımının ve Poisson parantezlerinin bir cebir deformasyonudur. Bu yüzden Moyal kuantizasyonu ve bunun genellemeleri matematik ve matematiksel fizik literatüründe deformasyon kuantizasyonu olarak bilinir (Bayen 1978, Sternheimer 1998). Burada amaç, fiziksel gözlenebilirler olarak faz-uzayı fonksiyonlarını ve temel birleşim kuralı olarak $\star$-çarpımı alıp, kuantumlamayı otonom bir yaklaşımla (diğer kuantumlama yöntemlerine başvurmadan) formüle etmektir.

Moyal kuantizasyonunda fiziksel gözlenebilirlerin spektrumu kuantum mekaniğindeki özdeğer denklemine karşı gelen faz-uzayındaki $\star$-özdeğer denklemi ile belirlenir (Curtright 1998). Karşı gelen özdurumlar ise daha çok Wigner (dağılım) fonksiyonları olarak bilinen ve bir tür olasılık dağılımları olan fonksiyonlardır (Fairly 1991). Bunların integralleri, Schrödinger formalizminin konum ve momentum uzayındaki marjinal olasılık dağılımlarını verir. Bu özellikleri ile Wigner fonksiyonları birleşik olasılık dağılımlarına benzemelerine karşın her zaman pozitif tanımlı değillerdir.

Süpersimetri (SUSY) 1976'da özel göreli (relativistik) olmayan kuantum mekaniğinde bozonlarla fermiyonlar arasında dönüşüm üretmek için öne sürülmüştür. 1981'de kuantum alan teorilerinde süpersimetri kırılmalarını incelemek için SUSY düşünceleri Witten tarafından kuantum mekaniğine uygulanmıştır (Witten 1981). Bugün teorik fiziğin pekçok alanında başarıyla uygulanan süpersimetrik kuantum mekaniği (SUSYQM) metodları, eşspektrumlu sistemler elde etmek için vazgeçilmez araçlardır (Infeld 1951, Adrianov 1984, Cooper 1997, Matveev 1991). Burada kullanılan süper potansiyelin asimptotik davranışları SUSY'nin kırılmış olup olmadığını söyler (Junker 1996). SUSYQM'nin önemli kavramlarından olan süper yükler, bozonik durumlar ile fermiyonik durumlar arasındaki dönüşümün üreticileridirler. Kuantum mekaniğinde ise süperyükler, eşspektrumlu Hamiltoniyen sistemlerin aynı enerjili özdurumlarını birbirlerine dönüştürmek ve bu sistemleri kompakt cebirsel bir şekilde ifade için kurulan SUSY cebirlerini üretmek için kullanılırlar (Junker 1996).

Bu tezin amacı Moyal kuantizasyonu ve süpersimetrik kuantum mekaniğinin temel düşüncelerini yeni uygulamalarla vermek ve SUSYQM metodlarının Moyal kuantizasyonunda kullanılabilirliğini araştırmaktır. Bu amaçla Landau problemi Moyal kuantizasyonunda ele alınarak Wigner fonksiyonları ve marjinal olasılık dağılımları bulunmuştur. SUSYQM metodlarından biri olan bağlaştırım işlemcisi düşüncesi genişletilerek, iki boyutta süperintegrallenebilir eşspektrumlu potansiyel aileleri üretilmiştir. Son olarak, SUSYQM metodlarının Moyal kuantizasyonundaki realizasyonları uygulamalarla gösterilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde WWGM kuantizasyonunun temel kavram ve düşünceleri ele alınmıştır.

İkinci bölümün bir uygulaması şeklinde olan üçüncü bölümde Landau problemi (Landau 1977) faz-uzayı formülasyonu çerçevesinde otonom bir yaklaşımla (dalga fonksiyonlarına ihtiyaç duymadan) irdelenmiştir. Landau düzeylerinin Wigner fonksiyonları türetilerek, bunların simetri ve diğer genel özellikleri incelenmiştir. Köşegen ve köşegen olmayan Wigner fonksiyonları için bir üretici fonksiyon tanımlandıktan sonra, bunun Landau düzeyleri için faz-uzayı koherent durumu olduğu gösterilmiştir (Hillery 1984, Perelomov 1986, Lee 1995). Bu üretici fonksiyonun integre edilmiş formları mümkün bütün iki boyutlu faz-uzayı düzlemleri üzerinde marjinal olasılık yoğunluklarının açık ifadelerini üretmekte kullanılmıştır (Demircioğlu 2003).

Dördüncü bölümde SUSYQM'de kullanılan çarpanlara ayırma metodu, Darboux dönüşümleri ve bağlaştırım işlemcisi metodundan kısaca bahsedilmiş ve bağlaştırım işlemcisi metodu genişletilerek bu yöntem sayesinde elde edilen hem süperintegrallenebilir, hem de eşspektrumlu iki boyutlu potansiyellerin sonsuz bir ailesi verilmiştir (Infeld 1951, Matveev 1991, Adrianov 1995, Cooper 1997, Demircioğlu 2002). Bu bölümde potansiyellerin açık ifadeleri, dejenere spektrumları ve karşı gelen normalize edilebilir durumların yanısıra, dinamik simetri üreticileri ve sağladıkları cebir de verilmiştir. Bu sonsuz potansiyel ailesinin herbir elemanı üçlü potansiyellerden meydana gelir ve bunlardan biri tüm aile için aynıdır, diğer ikisi ise elemandan elemana değişir. Bu nedenle, süperintegrallenebilir ve eşspektrumlu potansiyellerin iki farklı sonsuz ailesi üretilmiş olmaktadır. Ortak potansiyel iki boyutlu Winternitz potansiyellerinden biri olup her iki ailenin spektrumunu belirler, diğer ikisi ise buna Darboux tipi ayar dönüşümleri ile bağlıdır. Bu dönüşümlerin üreticileri farklı koordinat sistemlerinde Winternitz potansiyelinin ayrışımından ortaya çıkan ilişkili çözülebilir bir boyutlu iki problemin özfonksiyonlarına bağlıdır. Burada izlenen yaklaşım süperintegrallenebilirlik özelliği korunacak şekilde potansiyellere ve bunların simetri üreticilerine aynı anda Darboux dönüşümlerini uygulama imkanı sağlar.

Süpersimetrik kuantum mekaniğindeki düşüncelerin faz-uzayına uygulanması amacıyla bağlaştırım metodu fikri Moyal kuantizasyonu çerçevesinde ele alınarak eşspektrumlu sistemler elde edilmeye çalışılmıştır.

Son bölümde ise sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir.

2. WWGM KUANTİZASYONU

Kuantum mekaniğinin faz-uzayı formülasyonu olarak da bilinen WWGM kuantizasyonu, kuantum mekaniğinin işlemci formülasyonu ile faz-uzayı formülasyonu arasında iyi kurulmuş karşı gelim kurallarından meydana gelir. Bu bölümde bu kuantizasyonun temel araçları olan yerdeğiştirme işlemcisi ve bunun Fourier dönüşümünün özellikleri verildikten sonra bir klasik faz-uzayında tanımlı fonksiyonlarla işlemciler arasındaki eşleştirme kuralları ele alınmaktadır. Ayrıca $\star$-çarpım, Moyal parantezi, $\star$-çarpımın kapalılık özelliği verilmekte ve faz-uzayında $\star$-özdeğer denklemleri tanımlanmaktadır. Son iki kesimde ise yoğunluk işlemcisine karşı gelen faz-uzayı dağılım fonksiyonları ve değişmezlik cebiri verilmektedir.

2.1. Yerdeğiştirme İşlemcisi ve Temel Özellikleri

WWGM kuantizasyonunun temel araçlarından olan ve yerdeğiştirme işlemcisi olarak adlandırılan $\hat{D}(\xi,\eta)$ işlemcisi, ξ ve η gerçel parametreler ve $\hat{q}$, $\hat{p}$ bilinen Hermite-sel konum ve momentum işlemcileri olmak üzere

$$\hat{D} = \hat{D}(\xi,\eta) = e^{i(\xi\hat{q}+\eta\hat{p})}, \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tezde işlemciler üzerinde ˆ işareti bulunan semboller ile gösterilecektir. Bir serbestlik dereceli sistemler için konum ve momentum işlemcileri $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar\hat{I}$, $\quad [\hat{q},\hat{I}] = 0 = [\hat{p},\hat{I}]$ sıradeğişme bağıntılarını sağlarlar. Burada $\hat{I}$ birim işlemci ve $\hbar = h/2\pi$ Planck sabitidir. Yukarıda tanımlanan $\{\hat{q},\hat{p},\hat{I}\}$ işlemcileri Heisenberg-Weyl (HW) cebiri denilen Lie cebirinin üreticileridir. $U(1)$, $\hat{I}$ tarafından üretilen bir parametreli üniter grup olmak üzere $\hat{D}$, HW grubunun $HW/U(1)$ koset uzayının temsilcisidir. $\hat{D}$ işlemcisi aşağıdaki gibi çarpanlara ayrılmış şekilde de ifade edilebilir;

$$\hat{D}(\xi,\eta) = e^{i\hbar\xi\eta/2}e^{i\xi\hat{q}}e^{i\eta\hat{p}}, \tag{2.2a}$$

$$= e^{-i\hbar\xi\eta/2}e^{i\eta\hat{p}}e^{i\xi\hat{q}}. \tag{2.2b}$$

(2.1), (2.2a) ve (2.2b) $\hat{D}$'nin sırasıyla simetrik, standart ve anti-standart formu olarak adlandırılırlar. $\hat{D}$'nin (2.2)'de verilen ifadelerini elde etmek için, $\hat{A}$ ve $\hat{B}$,

$[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ koşulunu sağlayan herhangi iki işlemci olmak üzere

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]},$$

şeklinde ifade edilen Baker-Campbell-Haussdorf (BCH) formülü kullanılır. Burada $[,]$ komütatör işlemini gösterir. $\{|q\rangle; \hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, q\epsilon\mathbf{R}\}$ Schrödinger temsilinde $\hat{q}$ işlemcisinin sürekli bazları olmak üzere yerdeğiştirme işlemcisinin bu bazdaki matris elemanları

$$\langle q|\hat{D}|q'\rangle = \delta(q-q'+\hbar\eta)e^{i\xi(q+\frac{\hbar}{2}\eta)}, \tag{2.3}$$

şeklinde olup üniterlik, İz (Trace (Tr)), çarpım ve öteleme özellikleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

i. $\hat{D}^{\dagger}(\xi,\eta) = \hat{D}^{-1}(\xi,\eta) = \hat{D}(-\xi,-\eta)$,

ii. $Tr[\hat{D}(\xi,\eta)] = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(\xi)\delta(\eta)$,

iii. $\hat{D}(\xi_1,\eta_1)\hat{D}(\xi_2,\eta_2) = e^{-\frac{1}{2}i\hbar(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)}\hat{D}(\xi_1+\xi_2,\eta_1+\eta_2)$,

iv. $\hat{D}(\xi,\eta)\hat{f}(\hat{q},\hat{p})\hat{D}^{-1}(\xi,\eta) = \hat{F}(\hat{q}+\hbar\eta,\hat{p}-\hbar\xi)$.

Burada δ, Dirac-delta fonksiyonunu, † Hermite-sel eşlenik işlemini ve $\hat{D}^{-1}$, $\hat{D}$'nin tersini göstermektedir. Dördüncü özellikteki $\hat{F}(\hat{q},\hat{p})$, $\hat{q}$ ve $\hat{p}$'nin pozitif kuvvetleri cinsinden seriye açılabilen herhangi bir işlemci olup, bu özellik

$$[\hat{p},\hat{D}] = \hbar\xi\hat{D}, \quad [\hat{q},\hat{D}] = -\hbar\eta\hat{D}, \tag{2.4}$$

bağıntılarının bir genellemesidir.

2.2. Yerdeğiştirme İşlemcisinin Fourier Dönüşümü

WWGM kuantizasyonunda eşleştirme kuralları, yerdeğiştirme işlemcisinin Fourier dönüşümü olan aşağıdaki tam işlemci bazı yardımıyla kurulur;

$$\hat{\Delta}_{qp} = (\hbar/2\pi)\int\int e^{-i(\xi q+\eta p)}\hat{D}d\xi d\eta. \tag{2.5}$$

Burada ve bundan sonraki tüm integraller (aksi belirtilmedikçe) $(-\infty,+\infty)$ aralığı üzerinde olup, (q,p) değişkenleri bir klasik faz-uzayının kanonik konum ve momentum koordinatları olarak ele alınacaktır. Buna göre $\hat{\Delta}_{qp}$ bazı hem bir faz-uzayının

(q,p) koordinat fonksiyonlarını hem de bir Hilbert uzayında tanımlı işlemcileri içerdiği için her iki uzaya ait davranışlar sergiler. $\hat{\Delta}_{qp}$ işlemcisi aşağıda verilen özelliklerinden de görüleceği gibi Dirac-delta fonksiyonunun kuantum karşılığı olup, Grossmann-Royer ötelenmiş parite işlemcisi olarak bilinir (Kubo 1964, Grossmann 1976, Royer 1977).

(2.5)'den baz işlemcisinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu göstermek zor değildir;

$$\hat{\Delta}_{qp}^{\dagger} = \hat{\Delta}_{qp}, \tag{2.6a}$$

$$\int \hat{\Delta}_{qp} dq = \hbar \int e^{i\eta(\hat{p}-p)} d\eta, \tag{2.6b}$$

$$\int \hat{\Delta}_{qp} dp = \hbar \int e^{i\xi(\hat{q}-q)} d\xi, \tag{2.6c}$$

$$\int\int \hat{\Delta}_{qp} dq dp = h\hat{I}, \tag{2.6d}$$

$$\partial_q \hat{\Delta}_{qp} = (-i/\hbar)[\hat{p}, \hat{\Delta}_{qp}], \tag{2.6e}$$

$$\partial_p \hat{\Delta}_{qp} = (i/\hbar)[\hat{q}, \hat{\Delta}_{qp}]. \tag{2.6f}$$

(2.6e) ve (2.6f), (2.2) ve (2.4) ifadeleri kullanılarak gösterilebilir.

$\hat{\Delta}_{qp}$ bazı için aşağıdaki diğer önemli özellikler $\hat{D}$'nin karşı gelen özelliklerinden yararlanılarak gösterilebilir;

$$\begin{aligned} \langle q'|\hat{\Delta}_{qp}|q''\rangle &= \frac{\hbar}{2\pi}\int\int e^{-i(\xi q+\eta p)}\langle q'|\hat{D}|q''\rangle d\xi d\eta, \\ &= e^{-ip\frac{q''-q'}{\hbar}}\delta(q-\frac{q'}{2}-\frac{q''}{2}), \end{aligned} \tag{2.7a}$$

$$Tr[\hat{\Delta}_{qp}] = \int \langle q|\hat{\Delta}_{qp}|q\rangle dx = 1, \tag{2.7b}$$

$$Tr[\hat{\Delta}_{qp}\hat{\Delta}_{q'p'}] = h\delta(q-q')\delta(p-p'). \tag{2.7c}$$

2.3. Eşleştirme Kuralları

WWGM kuantizasyonunda amaç kuantum mekaniğini klasik mekanik çerçevesinde yeniden inşa etmektir. Bu yöntemde klasik faz-uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonlarla işlemciler arasındaki eşleştirme şu şekilde tanımlanır;

$$\hat{F}(\hat{q},\hat{p}) = h^{-1}\int\int f(q,p)\hat{\Delta}_{qp}dqdp, \quad (2.8a)$$

$$f(q,p) = Tr[\hat{F}\hat{\Delta}_{qp}]. \quad (2.8b)$$

(2.8b), (2.8a)'nın her iki tarafı $\hat{\Delta}_{q'p'}$ ile çarpılıp İz alındıktan sonra (2.7c) kullanılarak elde edilir. Bir $\hat{F}(\hat{q},\hat{p})$ işlemcisine bir $f(q,p)$ faz-uzayı fonksiyonu karşı getiren (2.8) dönüşümleri Weyl-Wigner eşleştirmesi (ya da kuantizasyonu) olarak adlandırılır. $\hat{I}$ birim işlemcisine $f = 1$'in karşı geldiği (2.7b) ve (2.8b)'den açıkça görülmektedir.

(2.8a)'nın her iki tarafının Hermitik eşleniği alınarak elde edilen ifade (2.6a) ile beraber kullanıldığında $\hat{F}^{\dagger}$ işlemcisine $\bar{f}$ fonksiyonunun karşı geldiği görülür ($\bar{f}$, f'nin sanal eşleniğini göstermektedir). Ayrıca (2.8a) ve (2.7b)'den

$$Tr(\hat{F}) = h^{-1}\int\int f dqdp, \quad (2.9a)$$

$$Tr(\hat{F}_1\hat{F}_2) = h^{-1}\int\int f_1 f_2 dqdp, \quad (2.9b)$$

elde edilir. Yani, işlemcilerin izleri karşı gelen fonksiyonların tüm faz-uzayı üzerinden alınan integralleri ile de hesaplanabilirler.

2.4. $\star$-Çarpım

Moyal kuantizasyonunda en önemli eşleştirme, f_1 ve f_2 sırasıyla $\hat{F}_1$ ve $\hat{F}_2$ işlemcilerine karşı gelen fonksiyonlar olmak üzere

$$Tr[\hat{F}_1\hat{F}_2\hat{\Delta}_{qp}] = f_2 \star f_1, \quad (2.10)$$

bağıntısı ile verilir. Buradaki $\star$-çarpım genel durumda $2N$-boyutlu bir faz-uzayının kanonik $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \equiv (q_1,\cdots,q_N,p_1,\cdots,p_N)$ koordinatları cinsinden şu şekildedir;

$$\star = \exp\frac{1}{2}i\hbar\sum_{i=1}^{N}[\overleftarrow{\partial}_{q_i}\overrightarrow{\partial}_{p_i} - \overleftarrow{\partial}_{p_i}\overrightarrow{\partial}_{q_i}]. \quad (2.11)$$

Bu ifadedeki $\overleftarrow{\partial}_x$ ($\overrightarrow{\partial}_x$) sembolleri alt indislerine göre sola (sağa) işlem yapan türev işlemcilerini ($\partial_{x_i} \equiv \partial/\partial x_i$) göstermektedir.

(2.10) ifadesinin $N = 1$ durumunda çıkarılışı EK-1'de verilecektir. $N > 1$ için (2.5)'e karşı gelen işlemci bazı (q_i, p_i) kanonik koordinatlarına karşı gelen $\hat{\Delta}_{q_i p_i}$ işlemcilerinin çarpımıdır. R^{2N} şeklinde olduğu varsayılan faz-uzayı üzerinde tanımlı kompleks değerli, düzgün (tüm mertebelere göre türevlenebilir) fonksiyonların vektör uzayı $\mathcal{N} = C^{\infty}(R^{2N})$ ile gösterilirse (2.11)'deki $\star$-çarpım, $\star : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ şeklinde bilineer ve birleşmeli bir çarpımdır.

Herhangi iki $f_1, f_2 \in \mathcal{N}$ için

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 1 \star f_1 = f_1 \star 1, \\
\overline{(f_1 \star f_2)} &= \overline{f_2} \star \overline{f_1},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

bağıntıları (2.10) veya (2.11)'den açıkça görülmektedir. Bu fonksiyonlar için (2.11)'den

$$
\begin{aligned}
f_1 \star f_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n f_1 (\overleftrightarrow{\Lambda})^n f_2 \\
&= f_1 f_2 + \frac{i\hbar}{2}\{f_1, f_2\}_P - \frac{\hbar^2}{8} C(f_1, f_2) + \ldots
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

yazılabilir. Burada

$$
\overleftrightarrow{\Lambda} = \sum_{i=1}^{N} [\overleftarrow{\partial}_{q_i} \overrightarrow{\partial}_{p_i} - \overleftarrow{\partial}_{p_i} \overrightarrow{\partial}_{q_i}],
\tag{2.14}
$$

Poisson işlemcisi olarak bilinir. (2.13)'deki ilk terim f_1 ve f_2'nin bilinen sıradeğişimli çarpımını, ikinci terim ise $i\hbar/2$ çarpanı dışında klasik mekaniğin

$$
\{f_1, f_2\}_P = f_1 \overleftrightarrow{\Lambda} f_2,
\tag{2.15}
$$

Poisson parantezi olup, üçüncü ve diğer terimlerle birlikte ilk terime gelen kuantum katkılarını göstermektedir. Görüldüğü gibi Moyal kuantizasyonunda kuantum katkıları $\star$-çarpımın içinde kodlanmıştır.

Aşağıdaki genel tartışmalarda N serbestlik derecesi 1 alınacaktır.

2.5. Moyal Parantezi

Moyal kuantizasyonunda (2.11)'de verilen $\star$-çarpım ifadesinden yararlanarak Moyal parantezi $\{,\}_M$ herhangi iki $f_1, f_2 \in \mathcal{N}$ için aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\{f_1, f_2\}_M = f_1 \star f_2 - f_2 \star f_1. \tag{2.16}$$

Bu ifade

$$\{f_1, f_2\}_M = i\hbar\{f_1, f_2\}_P + \frac{1}{3!}(\frac{i\hbar}{2})^3 B(f_1, f_2) + \cdots \tag{2.17}$$

şeklinde daha açık olarak yazılabilir. Burada

$$B(f_1, f_2) = 2\{[(\partial_q^3 f_1)(\partial_p^3 f_2) - 3(\partial_p \partial_q^2 f_1)(\partial_q \partial_p^2 f_2)] - [f_1 \leftrightarrow f_2]\}, \tag{2.18}$$

şeklindedir.

$\star$-çarpım ve Moyal parantezinin en önemli özellikleri

$$\lim_{\hbar \to 0} f_1 \star f_2 = f_1 f_2, \tag{2.19a}$$

$$\lim_{\hbar \to 0}(i\hbar)^{-1}\{f_1, f_2\}_M = \{f_1, f_2\}_P, \tag{2.19b}$$

şeklindeki limit özellikleridir. (2.19a) ifadesi $\hbar \to 0$ limitinde fonksiyonların $\star$-çarpımının fonksiyonların sıradan çarpımı $f_1 f_2$'ye dönüştüğünü, (2.19b) ise aynı limitte fonksiyonların Moyal parantezlerinin Poisson parantezine dönüştüğünü ifade eder. Ayrıca Poisson parantezinin klasik fonksiyonların $\mathcal{N}$ uzayına, Lie parantezinin de işlemci uzayına bir cebir yapısı kazandırdığı gibi Moyal parantezi de $\mathcal{N}$'ye bir Lie cebiri yapısı kazandırır. Bu cebir yapısını görmek için $\star$-çarpımın özelliklerinden yararlanarak Moyal parantezinin bilineerlik, antisimetriklik, Jacobi özdeşliği ve Leibniz kuralını sağladığı doğrulanabilir.

Ayrıca (2.10)'dan aşağıdaki eşleştirme kuralı da elde edilebilir;

$$Tr\{[\hat{F}_1, \hat{F}_2]\hat{\Delta}_{qp}\} = \{f_2, f_1\}_M.$$

Bu da iki işlemcinin komütatörüne, bunlara karşı gelen fonksiyonların Moyal parantezinin karşı geldiğini gösterir.

2.6. Kapalılık Özelliği

Herhangi iki $f_1, f_2 \in \mathcal{N}$ için $f_1 \star f_2$ 'nin tüm faz-uzayı üzerinden integrali $f_2 \star f_1$ 'nin tüm faz-uzayı üzerinden integraline eşit ise $\star$-çarpıma kapalıdır denir.

(2.10) ifadesinin q ve p üzerinden integrali alındıktan sonra $Tr(\hat{A}\hat{B}) = Tr(\hat{B}\hat{A})$ özdeşliği göz önünde bulundurularak, (2.6d) kullanılırsa

$$\int\int f_2 \star f_1 dqdp = \int\int f_1 f_2 dqdp = \int\int f_1 \star f_2 dqdp, \qquad (2.20)$$

elde edilir. Bu da $\star$- çarpımın kapalılık özelliğini ispatlar. İkinci eşitlik (2.9b)'den elde edilir. Yukarıdaki ifade iki fonksiyonun Moyal parantezinin tüm faz-uzayı üzerinden integre edilmiş halinin sıfır olduğunu gösterir.

$\star$-çarpımın kapalılık özelliği $Tr(\hat{F}_1\hat{F}_2) = Tr(\hat{F}_2\hat{F}_1)$ İz özdeşliğinin faz-uzayındaki karşılığıdır.

2.7. Yıldız Özdeğer Denklemleri

$\{|i\rangle; i \in I\}$, Hermite-sel bir $\hat{F}$ işlemcisinin $\{E_i; i \in I\}$ spektrumlu ortonormal özdurumlarının kümesi olsun;

$$\hat{F}|i\rangle = E_i|i\rangle, \qquad (\hat{F}|i\rangle)^\dagger = E_i\langle i|, \qquad \langle i|j\rangle = \delta_{ij},$$

$$\hat{F}|i\rangle\langle i| = E_i|i\rangle\langle i| = |i\rangle\langle i|\hat{F}.$$

Buna göre $\hat{F}_1 = |i\rangle\langle i|$ ve $\hat{F}_2 = \hat{F} = \hat{H}$ olmak üzere (2.8b) ve (2.10) ifadesinden

$$W_i(q,p) \star H(q,p) = E_i W_i(q,p) = W_i(q,p) \star H(q,p), \qquad (2.21)$$

elde edilir. H, Hermite-sel $\hat{H}$ işlemcisine karşı gelen faz-uzayı fonksiyonu olmak üzere, bu denklemler kuantum mekaniğinin özdeğer denklemlerine karşı gelen faz-uzayındaki $\star$-özdeğer denklemleridir (Curtright 1998). Burada

$$W_i = W_i(q,p) = \langle i|\hat{\Delta}_{qp}|i\rangle = Tr[|i\rangle\langle i|\hat{\Delta}_{qp}], \qquad (2.22)$$

şeklinde tanımlanan W_i fonksiyonuna $\hat{H}$ işlemcisinin $|i\rangle$ saf durumuna ilişkin faz-uzayı dağılım fonksiyonu veya H'nin aynı E_i özdeğerine karşı gelen $\star$-özfonksiyonu (sanki olasılık dağılım fonksiyonu veya Wigner fonksiyonu) denir (Moyal 1949). (2.6a)'dan $\bar{W}_i(q,p) = W_i(q,p)$ olduğu yani, W_i'lerin gerçel olduğu açıktır.

Kuantum mekaniksel bir sistemin durumu sistem kapalı olmadığında $\hat{\rho} = \sum_i w_i|i\rangle\langle i|$ şeklindeki yoğunluk işlemcisi ile anlatılabilir (Feynman 1972). Çevrenin sistem üzerine etkisi w_i gerçel sayıları ile temsil edilir. Burada

$i.$ $|i\rangle$ kümesi tam, ortonormal bir vektörler kümesidir,

$ii.$ $w_i \geq 0$,

$iii.$ $\sum_i w_i = 1$ ve

$iv.$ $\hat{\rho}$'nun betimlediği sisteme ilişkin herhangi bir $\hat{A}$ işlemcisi için beklenen değer

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}\rangle = Tr[\hat{\rho}\hat{A}] &= \sum_{i'}\langle i'|\hat{\rho}\hat{A}|i'\rangle, \\ &= \sum_{i',i} w_i\langle i'|i\rangle\langle i|\hat{A}|i'\rangle, \\ &= \sum_{i} w_i\langle i|\hat{A}|i\rangle,\end{aligned} \tag{2.23}$$

şeklindedir. Burada $\langle i|\hat{A}|i\rangle$, $\hat{A}$'nın $|i\rangle$ durumundaki beklenen değeridir. (ii), (iii) ve Denk.(2.23)'den açıkca görüleceği gibi w_i sayısı sistemin i durumunda bulunma olasılığı olarak yorumlanabilir. Eğer bir tane w_i hariç geri kalan tüm w_i'ler sıfır ise sistem bir saf durumda (pure state), aksi takdirde karma durumdadır (mixed state) denir. Dolayısıyla saf bir durum için gerek ve yeter koşul $\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Yoğunluk işlemcisi $\hat{\rho}$'nun temel özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir;

$i.$ $Tr[\hat{\rho}] = 1$,

$ii.$ $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$.

(2.8b) ifadesinde $\hat{F}(\hat{q},\hat{p})$ yerine $\hat{\rho}$ işlemcisi alındığında elde edilen fonksiyonlar, $\hat{\rho}$'ya karşı gelen sanki-olasılık dağılım fonksiyonlarıdır;

$$W_\rho(q,p) = Tr[\hat{\rho}\hat{\Delta}_{qp}]. \tag{2.24}$$

Bu fonksiyonlar sayesinde kuantum mekaniksel hesaplar klasik faz-uzayında yapılabilir. Ters dönüşüm ise aşağıdaki gibidir;

$$\hat{\rho} = h^{-1}\int\int W_\rho(q,p)\hat{\Delta}_{qp}dqdp. \tag{2.25}$$

$\hat{\rho} = |i\rangle\langle i|$ saf durumu için (2.22) ve (2.24) özdeştir.

2.8. Faz-Uzayı Dağılım Fonksiyonlarının Özellikleri

Saf durumlarda W_i'nin özellikleri (2.6b-d) ve (2.22) kullanılarak gösterilebilir;

$$\int W_i(q,p)dq = |\phi_i(p)|^2, \tag{2.26a}$$

$$\int W_i(q,p)dp = |\psi_i(q)|^2, \tag{2.26b}$$

$$\int\int W_i(q,p)dqdp = h. \tag{2.26c}$$

Burada $|q\rangle$ ve $|p\rangle = \int e^{iqp/\hbar}|q\rangle dq$ sırasıyla $\hat{q}$ ve $\hat{p}$'nin özdurumları olmak üzere $\psi_i(q) = \langle q|i\rangle$ ve $\phi_i(p) = \langle p|i\rangle$ sırasıyla q-konum ve p-momentum uzayında $\int |\psi_i(q)|^2 dq = 1 = h^{-1}\int |\phi_i(p)|^2 dp$ şeklinde 1'e boylandırılmış dalga fonksiyonlarını göstermektedir. (2.26a) ve (2.26b) denklemleri sırasıyla q-koordinat ve p-momentum uzayındaki olasılık yoğunlukları olup Wigner fonksiyonlarının marjinallik özellikleri olarak da bilinirler.

$\hat{F}_1 = |i\rangle\langle i|$ ve $\hat{F}_2 = |j\rangle\langle j|$ olmak üzere (2.10)'dan

$$W_i \star W_j = \delta_{ij} W_i, \tag{2.27}$$

elde edilebilir. Bu ise sanki-olasılık dağılım fonksiyonlarının izdüşüm özelliği olarak bilinir. Bu ifadenin her iki tarafının q ve p üzerinden integrali alınırsa $\star$-özfonksiyonları için

$$\int\int W_i \star W_j dqdp = \int\int W_i W_j dqdp = h\delta_{ij}, \tag{2.28}$$

şeklindeki diklik bağıntısı elde edilir. Buradan da kuantum mekaniğindeki gibi faz-uzayında da farklı özdeğerlere karşı gelen $\star$-özfonksiyonlarının birbirlerine dik olduğu görülür.

W_j için Denk.(2.7a) ve (2.22)'den yararlanarak

$$\begin{aligned} W_j(q,p) &= \int\int \langle j|q\rangle\langle q|\hat{\Delta}_{qp}|q'\rangle\langle q'|j\rangle dqdq', \\ &= \int \psi_j(q+\frac{y}{2})\overline{\psi}_j(q-\frac{y}{2})e^{-ipy/\hbar}dy, \end{aligned} \tag{2.29}$$

şeklinde daha açık bir ifade elde edilebilir. Bu ise Wigner fonksiyonunun açık formu olarak bilinir (Hillery 1984). $\hat{H}$ zamana bağlı Hamilton işlemcisi olmak üzere $i\hbar\partial_t|i\rangle = \hat{H}|i\rangle$ Schrödinger denklemi $|i\rangle\langle i|$ izdüşüm işlemcisi cinsinden

$$i\hbar\partial_t(|i\rangle\langle i|) = [\hat{H}, |i\rangle\langle i|], \tag{2.30}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda W_i fonksiyonu da açıkca zamana bağlı olacaktır. Şimdi zamana bağlı Schrödinger denkleminin klasik faz-uzayındaki karşılığını elde etmek için (2.10), (2.24) ve (2.30)'dan Moyal'in evrim denklemi olarak bilinen

$$i\hbar\partial_t W_i(q,p,t) = \{H(q,p,t), W_i(q,p,t)\}_M,$$

ifadesi elde edilir. Burada $H(q,p,t)$, $\hat{H}$ işlemcisine karşı gelen klasik Hamilton fonksiyonudur (Moyal 1949). Bu son denklemin her iki tarafı $i\hbar$'a bölündükten sonra $\hbar \to 0$ limiti alınırsa $\partial_t W_i + \{H, W_i\}_P = 0$ şeklindeki klasik hareket denklemine indirgenir.

Örnek: Harmonik salınıcı .

Buraya kadar anlatılanlara bir örnek olarak kuantum mekaniğinde çözümü bilinen örneklerden biri olan (bir boyutlu) harmonik salınıcı için Wigner fonksiyonları dalga fonksiyonlarına ihtiyaç duyulmadan $\star$-özdeğer denklemleri çözülerek elde edilecektir. Harmonik salınıcı Hamiltoniyeni

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

şeklindedir. İncelemeyi basitleştirmek amacı ile $m = 1$, $\hbar = 1$ ve $k = 1$ alınırsa $H = \frac{p^2+q^2}{2}$ için (2.21)'den

$$[(q + \frac{i}{2}\partial_p)^2 + (p - \frac{i}{2}\partial_q)^2 - 2E]W(q,p) = 0 \tag{2.31}$$

elde edilir. Bu denklemin $(q\partial_p - p\partial_q)W(q,p) = 0$ şeklindeki sanal kısmından $W = W(q^2 + p^2)$ olduğu görülür. Denk.(2.31)'in gerçel kısmı ise

$$(q^2 - \frac{1}{4}\partial_p^2 + p^2 - \frac{1}{4}\partial_q^2 - 2E)W(q,p) = 0$$

şeklindedir. Burada $2(q^2 + p^2) = 4H = z$ tanımı yapılırsa

$$(\frac{z}{4} - z\partial_z^2 - \partial_z - E)W(z) = 0,$$

ve $W(z) = e^{-z/2}L(z)$ seçilirse Laguerre polinomlarının sağladığı

$$(z\partial_z^2 + (1-z)\partial_z + E - \frac{1}{2})L(z) = 0.$$

denklemi elde edilir. Böylece $n = E - 1/2 = 0, 1, 2, ...$ ve $L(z) = e^z\partial^n(e^{-z}z^n)$ olmak üzere normalize olmamış saf durum Wigner fonksiyonları

$$W_n = e^{-2H}L_n(4H), \tag{2.32}$$

şeklinde elde edilir. Bu problem yaratıcı ve yokedici fonksiyonlar tanımlanarak cebirsel olarak da çözülebilir. Bu yöntem üçüncü bölümde Landau düzeylerinin Wigner fonksiyonlarını elde etmek için kullanılacaktır.

2.9. Değişmezlik Cebiri

Tüm $f_2 \in \mathcal{N}$ için

$$\{f_1, f_2\}_M = i\hbar\{f_1, f_2\}_P,$$

denklemini sağlayan tüm f_1 faz-uzayı fonksiyonlarının $\mathcal{A}$ kümesi deformasyon kuantizasyonunda önemli rol oynar. $\mathcal{A}$ kümesi $\{,\}_P \to \{,\}_M$ deformasyonunda korunan Poisson parantezine göre bir Lie alt cebiridir. Aynı zamanda $\mathcal{A}$ kümesi Poisson parantezine göre fonksiyonların $\star$-cebiri üzerinde bir türev gibi işlem yapar. Yani tüm $f_2, f_3 \in \mathcal{N}$ ve $f_1 \in \mathcal{A}$ için

$$\{f_1, f_2 \star f_3\}_P = \{f_1, f_2\}_P \star f_3 + f_2 \star \{f_1, f_3\}_P,$$

yazılabilir. $\mathcal{A}$'nın herhangi bir elemanının kuantum mekaniksel zaman evrimi bir klasik evrimdir. Bu da Hamilton fonksiyonu $\mathcal{A}$'nın elemanı olduğunda, bir gözlenebilirin klasik ve kuantum zaman evrimlerinin çakışmasını gerektirir. $\mathcal{A}$ kümesine $\star$-çarpımın değişmezlik cebiri denir ve elemanları seçkin (distinguished)) gözlenebilirler olarak adlandırılır (Bayen 1978).

Denk.(2.11) ve (2.16)'dan görülebileceği gibi $\mathcal{A}$

$$\{1,\ q_j,\ p_j,\ q_jq_{k\geq j},\ p_jp_{k\geq j},\ q_jp_k\}. \tag{2.33}$$

tarafından gerilir. Bunlar ise $2N^2 + 3N + 1$ boyutlu afin simplektik cebir $w_N \oplus sp(2N)$'yi tanımlar. Burada w_N, $2N+1$ boyutlu Heisenberg-Weyl cebirini ve $sp(2N)$ ise $2N^2 + N$ boyutlu simplektik cebiri gösterir.

$\mathbf{c}_1$ sabit bir vektör ve $f = f(\mathbf{q})$ olmak üzere $g = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{p} + f$ için,

$$g \star g^n = g^{n+1} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} (\frac{i\hbar}{2})^j f (\sum_{k=1}^{N} \overleftarrow{\partial}_{q_k} \overrightarrow{\partial}_{p_k})^j g^n.$$

yazılabilir. Buradan f, q_k'lara göre birinci mertebeden ise herhangi bir n için $g \star g^n = g^{n+1}$ yazılabilir. Böylece (c_0 bir sabit ve $\mathbf{c}_2$ de bir sabit vektör)

$$g = c_0 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{p} + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{q} \; icin \; (g_\star)^n = g^n, \tag{2.34}$$

olduğu görülür. Burada

$$(g_\star)^n \equiv g \star g \star \cdots \star g, (n \text{ defa}),$$

tanımı kullanılmıştır. Sonuç olarak $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ olmak üzere $f = a_1 + h_1, g = a_2 + h_2$ şeklindeki iki fonksiyon için, $\{h_1, h_2\}_M = i\hbar \{h_1, h_2\}_P$ ise $\{f, g\}_M = i\hbar \{f, g\}_P$ yazılabilir. Özel bir durum olarak bu $h_j = h_j(\mathbf{p})$ veya $h_j = h_j(\mathbf{q})$ için geçerlidir.

Literatürde farklı adlarla anılan faz-uzayı kuantizasyon yöntemleri, bir $s \in C$ sıralama parametresi kullanılarak ifade edilebilir. Bu durumda kullanılan tüm farklı yerdeğiştirme işlemcilerini içerecek şekilde s-parametreli

$$\hat{D}(s) = e^{-i\hbar s \xi \eta/2} \hat{D}(\xi, \eta).$$

işlemcileri tanımlanabilir (Cahill 1969, Hillery 1984, Lee 1995). Bunların Fourier dönüşümleri kullanılarak farklı eşleştirme kuralları altında aynı işlemciye karşı gelen farklı fonksiyonlar da (s) indisi ile etiketlenir ve $s = 1, 0, -1$ için bunlar sırasıyla standart, Weyl-Wigner (simetrik) ve anti-standart eşleştirme (ya da kuantizasyon) olarak adlandırılırlar. $s \neq 0$ durumunda değişmezlik cebiri de sadece $\{1,\ q_j,\ p_j\}$ şeklindedir (Sternheimer 1998).

3. FAZ UZAYINDA LANDAU PROBLEMİ: WIGNER FONKSİYONLARI ve MARJİNAL OLASILIK YOĞUNLUKLARI

Bu bölümde Landau problemi Moyal kuantizasyonu çerçevesinde detaylı olarak ele alınmaktadır. Landau düzeylerinin Wigner fonksiyonları yaratıcı ve yokedici fonksiyonlar tanımlanarak cebirsel yolla hesabedilmekte ve bunlara karşı gelen faz-uzayı kanonik koordinat düzlemleri için marjinal olasılık yoğunlukları da elde edilmektedir. Landau düzeyleri için bağlı durum Wigner fonksiyonlarının dönüşüm ve simetri özelliklerinin yanısıra gerçellik, normalizasyon, izdüşüm ve diklik gibi özellikleri de dalga fonksiyonlarına ihtiyaç duymaksızın bu kuantizasyon çerçevesinde incelenmektedir. Köşegen olmayan Wigner fonksiyonları ve marjinal olasılık dağılım fonksiyonları ise ilişkili üretici fonksiyonlar yardımıyla elde edilmektedir.

3.1. Zamandan Bağımsız Wigner Fonksiyonu

$\hat{H}$ Hamilton işlemcisi olmak üzere $\hat{H}\psi_\lambda = E\psi_\lambda$ enerji özdeğer denklemini sağlayan ψ_λ fonksiyonuna karşılık gelen zamandan bağımsız, köşegen olmayan Wigner fonksiyonu $W_{\lambda\lambda'} \equiv W_{\lambda\lambda'}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \langle\lambda|\hat{\Delta}_{qp}|\lambda'\rangle$, tanımından ve (2.29)'dan şu şekilde bulunur;

$$W_{\lambda\lambda'} = \int_{\mathbf{R}^N} \psi_\lambda(\mathbf{q}+\frac{1}{2}\mathbf{y})\overline{\psi}_{\lambda'}(\mathbf{q}-\frac{1}{2}\mathbf{y})e^{-i\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}}dV(y). \tag{3.1}$$

Burada $dV(y)$, y_j değişkenlerine göre N-boyutlu hacim elemanı ve $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \mathbf{R}^{2N}$ faz uzayının kanonik koordinatlarıdır. $\mathbf{y}\cdot\mathbf{p}$ ise $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{p}$ vektörlerinin skaler çarpımını ve λ kuantum sayılarının çoklu indis kümesini gösterir. Denk.(3.1)'de $\psi_\lambda = \psi_{\lambda'}$ alınırsa

$$W_\lambda = \int_{\mathbf{R}^N} \psi_\lambda(\mathbf{q}+\frac{1}{2}\mathbf{y})\overline{\psi}_\lambda(\mathbf{q}-\frac{1}{2}\mathbf{y})e^{-i\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}}dV(y), \tag{3.2}$$

şeklinde köşegen (veya saf durum) Wigner fonksiyonu olarak bilinen Wigner fonksiyonu elde edilir. Her zaman pozitif değerler almayan gerçel değerli bu fonksiyonlar tam olarak olasılık dağılım fonksiyonları değildir. Ancak q ve p üzerinden alınan integraller, (2.26a) ve (2.26b) ifadelerinden de görüleceği gibi, sırasıyla konum ve momentum uzayında gerçek pozitif dağılım fonksiyonlarını verirler.

Verilen bir dalga fonksiyonu için yukarıdaki ifadelerden yararlanarak Wigner fonksiyonlarını elde etmek karmaşık integrallerle uğraşmayı gerektirdiğinden kolay değildir.

İkinci bölümde anlatıldığı gibi bu hesaplar, dalga fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan doğrudan

$$H \star W_\lambda = W_\lambda \star H = E_\lambda W_\lambda, \tag{3.3}$$

$\star$-özdeğer denklemlerini çözerek yapılabilir. Hidrojen atomu, harmonik salınıcı ve diğer bazı problemlere ait $\star$-özdeğer denklemleri için önemli kaynaklar şunlardır; (Bayen 1978, Fairly 1991, Curtright 2001, Gracia-Bondia 1984, Dodonov 1986). Bundan sonraki kesimlerde Landau düzeylerinin Wigner fonksiyonları ve temel özellikleri (3.3) $\star$-özdeğer denkleminden başlanarak ele alınacaktır.

3.2. Landau Düzeylerinin Wigner Fonksiyonları

Landau düzeyleri; düzlemde, düzgün ve dik bir magnetik alanın etkisi altında hareket eden yüklü bir parçacığın dejenere enerji düzeyleridir. Bunlar özellikle kuantum Hall olayında önemli rol oynarlar (Landau 1977, Aoki 1987).

$(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ kanonik koordinatlı $\mathbf{R}^4$ faz uzayı üzerinde, q_1q_2-düzleminde hareket eden $q > 0$ yüklü ve m kütleli bir parçacık için Landau Hamiltoniyeni H_L (Gauss birim sistemlerinde) aşağıdaki gibidir;

$$H_L = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2). \tag{3.4}$$

Burada c ışık hızı, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{q})$ ise

$$B = \partial_{q_1} A_2 - \partial_{q_2} A_1, \tag{3.5}$$

manyetik alanının vektör potansiyelidir. $\mathbf{v} = (\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})/m$ ise bileşenleri

$$\{v_1, v_2\}_M = i\frac{\hbar q}{m^2 c}B, \tag{3.6}$$

eşitliğini herhangi bir B manyetik alanı için sağlayan hız vektörüdür. Burada Moyal parantezinin (2.16)'daki tanımı kullanılmıştır.

Manyetik alan sabit olduğunda (3.5)'in genel çözümü, $\chi \equiv \chi(\mathbf{q})$ keyfi bir ayar fonksiyonu olmak üzere

$$\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}Bq_2 + \partial_{q_1}\chi, \frac{1}{2}Bq_1 + \partial_{q_2}\chi)$$

şeklindedir. Bu durumda herhangi bir χ ayarında aşağıdaki gibi iki hareket sabiti vardır;

$$\begin{aligned} X_1 &= m(v_2 + \omega q_1), \\ X_2 &= -m(v_1 - \omega q_2). \end{aligned}$$

Burada $\omega = qB/mc$ siklotron frekansıdır. $(X_1/m\omega, X_2/m\omega)$ siklotron merkezinin koordinatlarına karşı gelir ve ayardan bağımsız

$$\{X_1, X_2\}_M = -im\hbar\omega,$$
$$\{v_j, X_k\}_M = 0 = \{H_L, X_k\}_M, \quad j,k = 1,2, \tag{3.7}$$

sıradeğişim bağıntılarını sağlarlar. $\{H_L, X_k\}_M = 0$ bağıntıları H_L, X_1 ve X_2'nin hareket sabiti olmalarını gerektirir. Burada

$$dX_1 \wedge dX_2 \wedge dH_L = m^3\omega[(v_1 dq_2 - v_2 dq_1) \wedge dv_1 \wedge dv_2 + \frac{\omega}{m}\mathbf{v} \cdot \mathbf{dp} \wedge dq_1 \wedge dq_2] \tag{3.8}$$

olduğundan $\omega, \mathbf{v} \neq 0$ olması koşulu ile bu hareket sabitleri fonksiyonel olarak bağımsızdırlar. Bu da problemin süperintegrallenebilirliğini vurgular (bakınız Bölüm 4). (3.8)'de dq_j, dp_j koordinat diferensiyellerini (koordinat 1-formları) gösterir ve $\wedge$ antisimetrik dış çarpım anlamındadır (Marsden 1994). (3.6) ve (3.7)'deki Moyal parantezlerinin, bunlara karşı gelen Poisson parantezlerinin $i\hbar$ ile çarpımı olduğu görülebilir. Bu da herhangi bir ayarda $\{H_L, X_1, X_2\}$ kümesinin aynı zamanda klasik hareket sabitleri olduklarını gösterir. Böylece problem klasik olarak da süperintegrallenebilirdir denir.

Landau probleminin faz-uzayı kuantizasyonunda Moyal parantezine göre sıradeğişen tam fonksiyon kümesi için H_L ve

$$J = \frac{1}{2m\omega}(X^2 - m^2v^2), \tag{3.9}$$

fonksiyonları gözönüne alınabilir. Burada J, χ =sabit ayarında $q_1p_2 - q_2p_1$ kanonik açısal momentumuna karşı gelir.

Wigner fonksiyonlarını cebirsel yolla elde etmek için aşağıdaki gibi boyutsuz iki çift yaratıcı ve yokedici fonksiyon tanımlanabilir;

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\gamma\omega}(v_1 + iv_2), \qquad \bar{a} = \frac{1}{\gamma\omega}(v_1 - iv_2), \\ b &= \frac{1}{m\gamma\omega}(X_2 + iX_1), \quad \bar{b} = \frac{1}{m\gamma\omega}(X_2 - iX_1). \end{aligned}$$

Burada $\gamma = (2\hbar c/qB)^{1/2} = (2\hbar/m\omega)^{1/2}$ manyetik uzunluktur ve e elemanter yük olmak üzere $q = e$ için bir fluksonluk hc/e manyetik akısının geçtiği dairenin yarıçapına karşı gelir. Bu fonksiyonlar aşağıdaki Moyal sıradeğişim bağıntılarını sağlarlar;

$$\{a, \bar{a}\}_M = 1 = \{b, \bar{b}\}_M.$$

Yukarıda verilen yaratıcı ve yokedici fonksiyonlar cinsinden

$$N_a = \bar{a} \star a, \quad N_b = \bar{b} \star b, \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanan gerçel sayı fonksiyonları kullanılarak (3.4) ve (3.9) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir;

$$H_L = \hbar\omega(N_a + \frac{1}{2}), \tag{3.11a}$$

$$J = \hbar(N_b - N_a). \tag{3.11b}$$

Taban durumu Wigner fonksiyonu, gerçel olduğu varsayılarak;

$$a \star W_0 = 0 = b \star W_0, \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu ifade

$$\{a, (\bar{a}_\star)^k\}_M = k(\bar{a}_\star)^{k-1}, \tag{3.13a}$$

$$\{b, (\bar{b}_\star)^k\}_M = k(\bar{b}_\star)^{k-1}, \tag{3.13b}$$

ile beraber kullanılarak

$$W_{nl} = \frac{1}{n!l!}(\bar{a}_\star)^n \star (\bar{b}_\star)^l \star W_0 \star (a_\star)^n \star (b_\star)^l, \tag{3.14}$$

fonksiyonunun aşağıdaki $\star$-merdiven yapısını sağladığı gösterilebilir;

$$a \star W_{nl} = W_{n-1,l} \star a,$$

$$b \star W_{nl} = W_{n,l-1} \star b, \tag{3.15a}$$

$$\bar{a} \star W_{nl} = W_{n+1,l} \star \bar{a},$$

$$\bar{b} \star W_{nl} = W_{n,l+1} \star \bar{b}. \tag{3.15b}$$

Burada n, l 'ler pozitif tamsayılar ve $W_0 \equiv W_{00}$'dır. (3.15b) ifadeleri, (3.15a) ifadelerinin sanal eşleniği alınarak ve sonra da birinci eşitlikte $n \to n+1$ ve ikinci eşitlikte $l \to l+1$ indis değiştirmesi yapılarak da elde edilebilir. Bu ifadelerden yararlanarak (3.10)'daki sayı fonksiyonları için

$$N_a \star W_{nl} = W_{nl} \star N_a = \bar{a} \star W_{n-1,l} \star a = nW_{nl}, \tag{3.16a}$$

$$N_b \star W_{nl} = W_{nl} \star N_b = \bar{b} \star W_{n,l-1} \star b = lW_{nl}. \tag{3.16b}$$

olduğu gösterilebilir. Burada $\{W_{nl} : n, l = 0, 1, ...\}$ kümesi spektrumları alttan sınırlı olan N_a ve N_b fonksiyonlarının özfonksiyon kümesi olup

$$H_L \star W_{nl} = W_{nl} \star H_L = E_n W_{nl}, \tag{3.17a}$$

$$J \star W_{nl} = W_{nl} \star J = J_{nl} W_{nl}, \tag{3.17b}$$

ifadelerini sağlar. Buradaki $\star$-özdeğerler ise aşağıdaki gibidir;

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \tag{3.18a}$$

$$J_{nl} = \hbar(l - n), \quad n, l = 0, 1, 2, ... \tag{3.18b}$$

E_n özdeğerleri l kuantum sayısından bağımsız olduğu için Landau düzeylerinin sonsuz dejenereliği (3.18a)'dan görülebilir. Karşı gelen Wigner fonksiyonları kapalı cebirsel bir yolla ve ayar-bağımsız bir şekilde (3.14) ile (veya aşağıdaki (3.20) ile) verilir.

Sonraki kesimde simetrik ayar χ =sabit, yani

$$(A_1, A_2) = \frac{B}{2}(-q_2, q_1),$$

seçilmiştir. Wigner fonksiyonlarının herhangi bir ayardaki ifadesi ise Ek-4'te verilmektedir. q_j'lerin en fazla karesel fonksiyonu olan bir ayarda $a, \bar{a}, b, \bar{b}$'ler q_j ve p_j'lerin çizgisel fonksiyonları olduğundan (bkz. Denk.(2.34))

$$(\bar{a}_\star)^k = \bar{a}^k, \quad (a_\star)^k = a^k, \tag{3.19a}$$

$$(\bar{b}_\star)^k = \bar{b}^k, \quad (b_\star)^k = b^k, \tag{3.19b}$$

yazılabilir. Bu durumda (3.14) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$W_{nl} = \frac{1}{n!l!}\bar{a}^n \star \bar{b}^l \star W_0 \star a^n \star b^l. \tag{3.20}$$

Burada a ve b'ler arasındaki $\star$-çarpım $\bar{a}\star\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$ ve $a\star b = ab$ şeklinde değiştirilebilir.

3.3. Taban Durumu Wigner Fonksiyonu

(2.11) ile verilen $\star$-çarpımı $N=2$ durumunda $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ cinsinden ifade etmek için,

$$a = \frac{1}{m\gamma\omega}[(p_1 + ip_2) - \frac{im\omega}{2}(q_1 + iq_2)], \tag{3.21a}$$

$$b = \frac{1}{m\gamma\omega}[-(p_1 - ip_2) + \frac{im\omega}{2}(q_1 - iq_2)] \tag{3.21b}$$

dönüşümleri ve bunların sanal eşlenikleri kullanılırsa

$$\star = exp[\frac{1}{2}(\overleftarrow{\partial}_a\overrightarrow{\partial}_{\bar{a}} + \overleftarrow{\partial}_b\overrightarrow{\partial}_{\bar{b}} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{a}}\overrightarrow{\partial}_a - \overleftarrow{\partial}_{\bar{b}}\overrightarrow{\partial}_b) \tag{3.22}$$

bulunur. Bu ifade (3.12)'de kullanılırsa

$$aW_0 + \frac{1}{2}\partial_{\bar{a}}W_0 = 0 = bW_0 + \frac{1}{2}\partial_{\bar{b}}W_0$$

ve bu denklemlerin çözümünden de W_0 için genel gerçel çözüm

$$W_0 = 4e^{-\frac{4}{\hbar\omega}H_0} \tag{3.23}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{8}\mathbf{q}^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega(\bar{a}a + \bar{b}b), \tag{3.24}$$

iki boyutlu izotropik harmonik salınıcı Hamiltoniyeni olup W_0'ın gerçelliğini bozmamak için $f(a,b)$ faktörü dikkate alınmamıştır. dV hacim formu

$$dV = dq_1 \wedge dq_2 \wedge dp_1 \wedge dp_2 = \hbar^2 da \wedge d\bar{a} \wedge db \wedge d\bar{b}, \tag{3.25}$$

olmak üzere W_0, $\int_{\mathbf{R}^4} W_0 dV = h^2$ şeklinde normalize edilmiştir.

3.4. Uyarılmış Durumların Wigner Fonksiyonu

(3.22) ifadesi kullanılarak Wigner fonksiyonlarının açık ifadeleri ve diğer hesaplar kolaylıkla yapılabilir. (3.23) ve (3.24), (3.20)'de kullanılırsa ve

$$w_n = \frac{1}{n!}\bar{a}^n \star e^{-2a\bar{a}} \star a^n, \tag{3.26a}$$

$$w_l = \frac{1}{l!}\bar{b}^l \star e^{-2b\bar{b}} \star b^l, \tag{3.26b}$$

tanımları yapılırsa, uyarılmış durumların Wigner fonksiyonu W_{nl} aşağıdaki gibi çarpanlara ayrılmış şekilde yazılabilir;

$$W_{nl} = 4w_n(a,\bar{a})w_l(b,\bar{b}). \tag{3.27}$$

(3.22)'den aşağıdaki ifade doğrulanabilir;

$$e^{-2a\bar{a}} \star a^n = \sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{2})^k \frac{1}{k!}(\partial_{\bar{a}}^k e^{-2a\bar{a}})(\partial_a^k a^n) = 2^n a^n e^{-2a\bar{a}}.$$

Burada $\binom{n}{k}$ binom sayısı olmak üzere $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ özdeşliği kullanılmıştır. Son denklem (3.26a)'da kullanırsa

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{2^n}{n!}\bar{a}^n \star (a^n e^{-2a\bar{a}}), \\ &= \frac{2^n}{n!}(\bar{a} - \frac{1}{2}\partial_a)^n (a^n e^{-2a\bar{a}}) = e^{-2a\bar{a}} P_n(2a\bar{a}), \end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. Burada

$$P_n(u) = \frac{1}{n!}e^u(1 - \frac{d}{du})^n (u^n e^{-u}), \tag{3.29a}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}e^{2u}(\frac{d}{du})^n (u^n e^{-2u}), \tag{3.29b}$$

şeklindedir. Bu ifade Ek-3'de ispatlanacaktır. Burada Laguerre polinomları için

$$L_n(2u) = \frac{e^{2u}}{n!}\frac{d^n}{du^n}(u^n e^{-2u}),$$

ifadesi kullanılırsa

$$P_n(u) = (-1)^n L_n(2u), \tag{3.30}$$

olduğu görülür. Böylece (3.24),(3.28) ve (3.30) kullanılarak (3.27)'deki köşegen Wigner fonksiyonları

$$W_{nl} = (-1)^{n+l} 4L_n(4a\bar{a})L_l(4b\bar{b})e^{-\frac{4H_0}{\hbar\omega}}, \tag{3.31}$$

şeklinde daha açık olarak ifade edilebilir.

3.5. Simetri Özellikleri

Landau düzeyleri için bulunan Wigner fonksiyonlarının bazı dönüşüm ve simetri özellikleri (3.31) ile verilen çarpanlara ayrılmış ifadeden ve aşağıdaki bağıntılardan elde edilir;

$$\bar{a}a = \frac{H_L}{\hbar\omega} = \frac{1}{4\hbar\kappa}[(p_1 + \kappa q_2)^2 + (p_2 - \kappa q_1)^2], \tag{3.32a}$$

$$\bar{b}b = \frac{J}{\hbar} + \frac{H_L}{\hbar\omega} = \frac{1}{4\hbar\kappa}[(p_1 - \kappa q_2)^2 + (p_2 + \kappa q_1)^2]. \tag{3.32b}$$

Burada $\kappa = m\omega/2$'dir. İlk özdeşliklerden açıkca görüldüğü gibi W_{nl}, klasik hareket sabiti olan ve $\mathbf{R}^4$'de yüzeyler tanımlayan $H_L/\hbar\omega$ ve $J/\hbar$ 'ın sabit olduğu düzey kümelerine bağlıdır. Bu ifadelerden yararlanılarak (3.31) yeniden yazılabilir;

$$W_{nl} = (-1)^{n+l} 4 L_n(4\frac{H_L}{\hbar\omega}) L_l(4\frac{J}{\hbar} + 4\frac{H_L}{\hbar\omega}) e^{-2\frac{J}{\hbar} - 4\frac{H_L}{\hbar\omega}}. \tag{3.33}$$

Buradan da $H_L = 0 = J$'ye karşı gelen faz uzayı orjininde, $L_n(0) = 1$ olduğu için

$$W_{nl}(0,0) = 4(-1)^{n+l},$$

elde edilir. Aşağıdaki simetri özellikleri ise (3.31), (3.32) ve (3.33)'den görülebilir;

$$W_{nl}(-\mathbf{q},\mathbf{p}) = W_{ln}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = W_{nl}(\mathbf{q},-\mathbf{p}), \tag{3.34a}$$

$$W_{nl}(-\mathbf{q},-\mathbf{p}) = W_{nl}(\mathbf{q},\mathbf{p}), \tag{3.34b}$$

$$W_{nl}(q_2,q_1,p_2,p_1) = W_{ln}(\mathbf{q},\mathbf{p}). \tag{3.34c}$$

(3.34b), Denk.(3.34a)'nın açık bir sonucu olup aynı anda ($\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$) uzay ve ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$) zaman terslenmesi dönüşümleri altında tüm Wigner fonksiyonlarının aynı şekilde dönüştüğünü gösterir. Özel olarak, $n = l$ olan Wigner fonksiyonları hem uzay hem de zaman tersinmesine ayrı ayrı sahiptir. (3.34b) ise tüm Wigner fonksiyonlarının $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \to (-\mathbf{q},-\mathbf{p})$ faz uzayı parite dönüşümü altında değişmez olduğunu gösterir.

W_{nl} fonksiyonları $a\bar{a}$ ve $b\bar{b}$ çarpımına bağlı olduğundan daha büyük bir simetri sınıfı elde edilebilir. ξ,η ve $u \neq 0, v \neq 0$ gerçel parametreler olmak üzere,

$$(a,b,\bar{a},\bar{b}) \to (ue^{i\xi}a, ve^{i\eta}b, u^{-1}e^{-i\xi}\bar{a}, v^{-1}e^{-i\eta}\bar{b}), \tag{3.35}$$

şeklindeki dönüşümler altında tüm W_{nl} fonksiyonlarının yanısıra H_L ve J de değişmez kalır. Bu dönüşümü $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ koordinatları cinsinden ifade etmek için $\mathbf{x}^T = (a,b,\bar{a},\bar{b})$, $\mathbf{y}^T = (q_1,q_2,p_1,p_2)$ şeklinde $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ gibi iki kolon matrisi ve

$$A = \begin{pmatrix} ue^{i\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ve^{i\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1}e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^{-1}e^{-i\eta} \end{pmatrix}, \tag{3.36a}$$

$$B = \frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix} i & -i & -i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \kappa & -\kappa & \kappa & -\kappa \\ -i\kappa & -i\kappa & i\kappa & i\kappa \end{pmatrix}, \tag{3.36b}$$

şeklinde iki tane tekil olmayan matris tanımlanabilir. Burada $\mathbf{x}^T$, $\mathbf{x}$'in transpozunu gösterir ve $detA = 1, detB = -\gamma^4\kappa^2 = -\hbar^2$'dir. Bu matrisler cinsinden (3.35)'de yapılan dönüşümler

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = B\mathbf{x},$$

şeklinde ifade edilebilir. $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$, (3.21) dönüşümlerinden elde edilir. $\mathbf{y}' = B\mathbf{x}' = BA\mathbf{x}$ olduğu için kanonik koordinatlarda aşağıdaki ifadeler doğrulanabilir;

$$\mathbf{y}' = C\mathbf{y}, \tag{3.37}$$

$$C = BAB^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} M & -\kappa^{-1}N \\ \kappa N & M \end{pmatrix}.$$

Burada $y'^T = (q'_1, q'_2, p'_1, p'_2)$ ve

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} c_+ & -s_- \\ s_- & c_+ \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} s_+ & c_- \\ -c_- & s_+ \end{pmatrix}, \\ c_\pm &= u_+\cos\xi \pm v_+\cos\eta + i(u_-\sin\xi \pm v_-\sin\eta), \\ s_\pm &= u_+\sin\xi \pm v_+\sin\eta - i(u_-\cos\xi \pm v_-\cos\eta), \\ u_\pm &= u \pm \frac{1}{u}, \quad v_\pm = v \pm \frac{1}{v}, \end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıda $detC = detA = 1$ ve

$$NN^T + MM^T = 16\mathbf{1},$$

$$NM^T - MN^T = \mathbf{0},$$

olduğundan C'nin bir simplektik matris olduğu kolaylıkla görülebilir ($\mathbf{1}$ ve $\mathbf{0}$ sırasıyla 2×2'li birim ve sıfır matrisidir). Yani,

$$J_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

standart simplektik matris olmak üzere C matrisi $CJ_0C^T = J_0$ ile verilen simplektiklik koşulunu sağladığından C, $Sp(4, \mathbf{C})$ simplektik grubuna aittir. Açıkca $W_{nl}(C_1\mathbf{y}) = W_{nl}(\mathbf{y}) = W_{nl}(C_2\mathbf{y})$ bağıntısı $W_{nl}(C_1C_2^{-1}\mathbf{y}) = W_{nl}(\mathbf{y})$ olmasını gerektirdiğinden, C_1 ve C_2 matrisleri $W_{nl}(\mathbf{y})$'yi değişmez bırakıyorsa, o zaman $C_1C_2^{-1}$'yi de değişmez bırakır. Bu da (3.37) dönüşümlerinin $Sp(4, \mathbf{C})$'nin dört parametreli bir alt grubunu oluşturduğunu gösterir.

3.6. Genel Özellikler

Bu kesimde faz-uzayında, köşegen Wigner fonksiyonlarının gerçellik, $\star$-izdüşüm, normalizasyon ve diklik özelliği gibi bazı genel özellikleri otonom bir yaklaşımla verilmektedir. (2.12), (3.14) (veya (3.20)) ve (3.23)'den köşegen Wigner fonksiyonlarınının $\overline{W}_{nl} = W_{nl}$ şeklindeki gerçellik koşulunun garantilendiği görülür. (3.17a) ve (3.17b)'nin soldan ve sonra da sağdan $W_{n'l'}$ ile $\star$-çarpımı alınarak

$$W_{nl} \star W_{n'l'} \propto \delta_{nn'}\delta_{ll'}W_{nl}$$

$\star$-izdüşüm özelliği elde edilebilir. Önce bu bağıntının tam formu çıkarılacaktır.

(3.22)'den

$$(a\bar{a})^{k+1} = (a\bar{a})^k \star a\bar{a} + \frac{k^2}{4}(a\bar{a})^{k-1}, \tag{3.38}$$

elde edilir. Bu ifadeden tümevarımla $(a\bar{a})^k \star W_0 = \frac{k!}{2^k}W_0$ ve

$$e^{-2ta\bar{a}} \star W_0 = \frac{1}{1+t}W_0, \tag{3.39}$$

olduğu görülür. Buradan da W_0'ın aşağıdaki $\star$-izdüşüm özelliği elde edilir;

$$W_0 \star W_0 = 4e^{-2a\bar{a}} \star e^{-2b\bar{b}} \star W_0 = W_0.$$

(3.13a) ve (3.13b) ifadelerinden

$$\begin{aligned} a^n \star \bar{a}^{n'} &= a^{n-1} \star \bar{a}^{n'-1} \star (N_a + n'), \\ &= a^{n-2} \star \bar{a}^{n'-2} \star (N_a + n' - 1) \star (N_a + n'), \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadeden de yine tümevarımla,

$$a^n \star \bar{a}^{n'} = \begin{cases} \bar{a}^{n'-n} \star \prod_{j=n'-n+1}^{n'}(N_a + j)_\star, & n' > n \quad icin, \\ a^{n-n'} \star \prod_{j=1}^{n'}(N_a + j)_\star, & n' < n \quad icin, \\ \prod_{j=1}^{n}(N_a + j)_\star, & n' = n \quad icin, \end{cases} \tag{3.40}$$

olduğu görülür. Burada

$$\prod_{j=i}^{n'}(N_a + j)_\star \equiv (N_a + i) \star (N_a + i + 1) \star \cdots \star (N_a + n'),$$

tanımı yapılmıştır. Benzer bağıntılar $b^l \star \bar{b}^{l'}$ için de yazılabilir. Diğer taraftan

$$W_0 \star N_a \star W_0 = 0 = W_0 \star N_b \star W_0,$$

$$W_0 \star a^k \star W_0 = 0 = W_0 \star \bar{a}^k \star W_0,$$

$$W_0 \star b^k \star W_0 = 0 = W_0 \star \bar{b}^k \star W_0,$$

ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} I_{nn',ll'} &\equiv W_0 \star a^n \star \bar{a}^{n'} \star b^l \star \bar{b}^{l'} \star W_0, \\ &= n!l!\delta_{nn'}\delta_{ll'} W_0 \star W_0 = n!l!\delta_{nn'}\delta_{ll'} W_0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. Böylece (3.20) ve (3.41)'den Landau düzeylerinin tüm köşegen Wigner fonksiyonları için aşağıdaki $\star$-izdüşüm bağıntısı bulunur;

$$\begin{aligned} W_{nl} \star W_{n'l'} &= \frac{1}{n!l!n'!l'!}\bar{a}^n \star \bar{b}^l \star I_{nn',ll'} \star a^{n'} \star b^{l'} \\ &= \delta_{nn'}\delta_{ll'} W_{nl}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Wigner fonksiyonlarının Denk.(2.20)'deki kapalılık özelliği, Denk.(3.20), (3.25) ve (3.40) ile beraber kullanılırsa aşağıdaki normalizasyon özelliği elde edilir;

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^4} W_{nl} dV &= \frac{1}{n!l!}\int_{\mathbf{R}^4} \bar{a}^n \star \bar{b}^l \star W_0 \star a^n \star b^l dV, \\ &= \frac{1}{n!l!}\int_{\mathbf{R}^4} a^n \star \bar{a}^n \star b^l \star \bar{b}^l \star W_0 dV, \\ &= \int_{\mathbf{R}^4} W_0 dV = h^2. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Yine (2.20), (3.42) ve (3.43) ile beraber kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^4} W_{nl} \star W_{n'l'} dV &= \int_{\mathbf{R}^4} W_{nl} W_{n'l'} dV, \\ &= \delta_{nn'}\delta_{ll'} \int_{\mathbf{R}^4} W_{nl} dV = h^2 \delta_{nn'}\delta_{ll'}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

şeklindeki $\star$-diklik özelliği elde edilir. Görüldüğü gibi W_{nl}'nin özellikleri W_0'ın karşı gelen özelliklerinden elde edilmektedir.

3.7. Tüm Wigner Fonksiyonları İçin Üretici Fonksiyon

Köşegen ve köşegen olmayan Wigner fonksiyonlarını elde etmek için

$$G_1(a, \bar{a}) = e^{\alpha_1 \bar{a}} \star e^{-2\bar{a}a} \star e^{\beta_1 a}, \tag{3.45a}$$

$$G_2(b,\bar{b}) = e^{\alpha_2\bar{b}} \star e^{-2\bar{b}b} \star e^{\beta_2 b}, \tag{3.45b}$$

şeklinde faz-uzayı fonksiyonları tanımlanabilir. Burada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2)$ parametrelerdir. $G_1 = G_1(a,\bar{a})$ ve $G_2 = G_2(b,\bar{b})$ kısaltmaları kullanılarak

$$\begin{aligned} w_{n_1n_2}(a,\bar{a}) &= \sqrt{1/n_1!n_2!}\partial^{n_1}_{\alpha_1}\partial^{n_2}_{\beta_1}G_1|_{\alpha_1=0=\beta_1}, \\ &= \sqrt{1/n_1!n_2!}\bar{a}^{n_1} \star e^{-2a\bar{a}} \star a^{n_2}, & (3.46a) \\ w_{l_1l_2}(b,\bar{b}) &= \sqrt{1/l_1!l_2!}\partial^{l_1}_{\alpha_2}\partial^{l_2}_{\beta_2}G_2|_{\alpha_2=0=\beta_2}, \\ &= \sqrt{1/l_1!l_2!}\bar{b}^{l_1} \star e^{-2b\bar{b}} \star b^{l_2}. & (3.46b) \end{aligned}$$

ifadeleri tanımlanabilir. (3.45)'deki fonksiyonlar kullanılarak

$$G = G_1(a,\bar{a})G_2(b,\bar{b}), \tag{3.47}$$

şeklinde tanımlanan üretici fonksiyon yardımıyla tüm (köşegen ve köşegen olmayan) Wigner fonksiyonları bu üretici fonksiyon yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir;

$$\begin{aligned} W_{n_1n_2l_1l_2} &= \frac{4}{\sqrt{n_1!n_2!l_1!l_2}}\partial^{n_1}_{\alpha_1}\partial^{n_2}_{\beta_1}\partial^{l_1}_{\alpha_2}\partial^{l_2}_{\beta_2}G|_{\alpha=0=\beta}, \\ &= 4w_{n_1n_2}(a,\bar{a})w_{l_1l_2}(b,\bar{b}). & (3.48) \end{aligned}$$

$n_1 = n_2 = n$ ve $l_1 = l_2 = l$ olması durumunda (3.46) ve (3.48)'in Denk.(3.26) ve (3.27) ile uyuşumlu olduğu görülür.

Üretici fonksiyonu daha basit şekilde ifade etmek için

$$e^{\alpha_1\bar{a}} \star e^{-2\bar{a}a} = e^{\alpha_1\bar{a}}e^{-\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial}_{\bar{a}}\overrightarrow{\partial}_a}e^{-2\bar{a}a} = e^{2\bar{a}(\alpha_1-a)}, \tag{3.49}$$

ifadesinden yararlanarak

$$G_1 = e^{-\alpha_1\beta_1}e^{2(\alpha_1\bar{a}+\beta_1 a)}e^{-2\bar{a}a} \tag{3.50}$$

yazılabilir. Benzer hesaplar G_2 için de yapıldığında, $\alpha.\beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ olmak üzere (3.24) ifadesi de kullanılarak Wigner fonksiyonları için üretici fonksiyon aşağıdaki gibi bulunur;

$$G = e^{-\alpha.\beta}e^{2(\alpha_1\bar{a}+\beta_1 a+\alpha_2\bar{b}+\beta_2 b)}e^{-\frac{4H_0}{\hbar\omega}}. \tag{3.51}$$

(3.50)'deki

$$e^{-\alpha_1\beta_1}e^{2(\alpha_1\bar{a}+\beta_1 a)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^k}{k!}(2\bar{a})^k(1-\frac{\beta_1}{2\bar{a}})^k e^{2\beta_1 a}, \tag{3.52}$$

ifadesi, genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının $|y| < 1$ için geçerli olan

$$(1+y)^k e^{-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{k-n}(x) y^n,$$

üretici fonksiyonu kullanılarak yeniden yazılabilir (Magnus 1966, Gradshteyn 1980);

$$e^{-\alpha_1\beta_1} e^{2(\alpha_1\bar{a}+\beta_1 a)} = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^k}{k!}(2\bar{a})^{k-n}(-\beta_1)^n L_n^{k-n}(4a\bar{a}). \tag{3.53}$$

$|y| < 1$ koşulu bu denklem için $2|\bar{a}| > |\beta_1|$ olduğunu gösterir. Böylece (3.50)'den aşağıdaki ifadeler elde edilebilir;

$$G_1 = e^{-2a\bar{a}} \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^k}{k!}(2\bar{a})^{k-n}(-\beta_1)^n L_n^{k-n}(4a\bar{a}),$$

$$G_2 = e^{-2b\bar{b}} \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^k}{k!}(2\bar{b})^{k-n}(-\beta_2)^n L_n^{k-n}(4b\bar{b}).$$

Bunlar (3.46)'da kullanılırsa

$$w_{n_1n_2}(a,\bar{a}) = \sqrt{\frac{n_2!}{n_1!}}(-1)^{n_2}(2\bar{a})^{n_1-n_2} L_{n_2}^{n_1-n_2}(4a\bar{a})e^{-2a\bar{a}},$$

$$w_{l_1l_2}(b,\bar{b}) = \sqrt{\frac{l_2!}{l_1!}}(-1)^{l_2}(2\bar{b})^{l_1-l_2} L_{l_2}^{l_1-l_2}(4b\bar{b})e^{-2b\bar{b}},$$

elde edilir. Bu ifadelerden yararlanarak tüm Wigner fonksiyonları şu şekilde bulunmuş olur;

$$W_{n_1n_2l_1l_2} = (-1)^{n_2+l_2} 4\sqrt{\frac{n_2!l_2!}{n_1!l_1!}}(2\bar{a})^{n_1-n_2}(2\bar{b})^{l_1-l_2} L_{n_2}^{n_1-n_2}(4a\bar{a}) L_{l_2}^{l_1-l_2}(4b\bar{b}) e^{-\frac{4H_0}{\hbar\omega}}. \tag{3.54}$$

Burada k pozitif tamsayı olmak üzere Laguerre polinomlarının üst indisi negatif tamsayı olduğunda aşağıdaki ifade kullanılır;

$$L_n^{-k}(x) = (-x)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_{n-k}^k(x).$$

(3.54)'de elde edilen ifade (3.52)'nin sol tarafının

$$e^{-\alpha_1\beta_1} e^{2(\alpha_1\bar{a}+\beta_1 a)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_1^k}{k!}(2a)^k (1-\frac{\alpha_1}{2a})^k e^{2\alpha_1\bar{a}}.$$

şeklindeki açılımıyla da elde edilebilir. Her iki durumda $n_1 = n_2 = n$ ve $l_1 = l_2 = l$ için (3.54)'deki ifade (3.31) ile aynıdır.

3.8. Marjinal Olasılık Yoğunlukları İçin Faz-Uzayı Koherent Durumları ve Üretici Fonksiyonlar

G üretici fonksiyonunun iki önemli özelliği vardır; (i) G, Landau düzeylerinin faz-uzayı koherent durumu olarak yorumlanabilir, (ii) G'nin bazı faz-uzayı düzlemleri üzerindeki integre edilmiş formları bu düzlemler üzerinde marjinal olasılık yoğunlukları (dağılımları) için birer üretici fonksiyondur.

İlk özellik

$$a \star G = (a + \frac{1}{2}\partial_{\bar{a}})G = \alpha_1 G,$$

$$b \star G = (b + \frac{1}{2}\partial_{\bar{b}})G = \alpha_2 G,$$

ifadelerinden görülür. Bu ifadeler G fonksiyonunun, yokedici fonksiyonların bir sol (sanal) $\star$-özfonksiyonu olduğunu gösterir. Buna ek olarak

$$G \star \bar{a} = (\bar{a} + \frac{1}{2}\partial_{a})G = \beta_1 G,$$

$$G \star \bar{b} = (\bar{b} + \frac{1}{2}\partial_{b})G = \beta_2 G,$$

ifadeleri ise G'nin aynı zamanda yaratıcı fonksiyonların sağ $\star$-özfonksiyonu olduğunu gösterir. Bu sonuçlardan G'nin sol/ sağ koherent durum fonksiyonu olduğu söylenebilir. G'yi gerçel yapmak için $\bar{\alpha} = \beta$ almak yeterlidir. Bu durumda G Glauber-Perelomov standard koherent durumuna karşı gelir (Perelomov 1986, Lee 1995).

G'nin ikinci özelliğini göstermek için

$$M_{\alpha\beta}(q_1, q_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G dp_1 dp_2. \qquad (3.55)$$

şeklinde tanımlanan üretici fonksiyon yardımıyla q_1q_2-düzleminde $P_{nl}(q_1, q_2)$ marjinal olasılık yoğunlukları şu şekilde üretilebilir;

$$P_{nl}(q_1, q_2) = \frac{4}{n!l!}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\beta_1})^n(\partial_{\alpha_2}\partial_{\beta_2})^l M_{\alpha\beta}(q_1, q_2)|_{\alpha=0=\beta}. \qquad (3.56)$$

(3.55) burada kullanıldıktan sonra elde edilen ifade (3.48) ile karşılaştırılırsa

$$P_{nl}(q_1, q_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{nl} dp_1 dp_2, \qquad (3.57)$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde p_1p_2-düzlemindeki üretici fonksiyon

$$M_{\alpha\beta}(p_1,p_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G dq_1 dq_2, \tag{3.58}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu ifadeden marjinal olasılık yoğunluğu ise aşağıdaki gibi üretilebilir;

$$P_{nl}(p_1,p_2)=\frac{4}{n!l!}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\beta_1})^n(\partial_{\alpha_2}\partial_{\beta_2})^l M_{\alpha\beta}(p_1,p_2)|_{\alpha=0=\beta}. \tag{3.59}$$

Bu yapılanlar genellenerek q_jp_k-düzlemleri üzerinde $P_{nl}(q_j,p_k)$ marjinal olasılık yoğunluklarını üretmek için $M_{\alpha\beta}(q_j,p_k)$ $(j,k=1,2)$ üretici fonksiyonları da tanımlanabilir.

3.9. Landau Düzeylerinin Marjinal Olasılık Yoğunlukları

Bu kesimde hesapları kolaylaştırmak için,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\gamma}(q_1+iq_2), \qquad \bar{Z}=\frac{1}{\gamma}(q_1-iq_2),\\ P &= \frac{1}{m\omega\gamma}(p_1+ip_2), \quad \bar{P}=\frac{1}{m\omega\gamma}(p_1-ip_2), \end{aligned}$$

şeklinde boyutsuz koordinatlar ve

$$\begin{aligned} \rho^2 &= Z\bar{Z}=\frac{1}{\gamma^2}(q_1^2+q_2^2),\\ \zeta^2 &= P\bar{P}=\frac{\gamma^2}{4\hbar^2}(p_1^2+p_2^2),\\ I_q &= (\alpha_1+\beta_2)\bar{Z}-(\alpha_2+\beta_1)Z,\\ I_p &= (\alpha_2-\beta_1)P-(\alpha_1-\beta_2)\bar{P}, \end{aligned}$$

şeklinde boyutsuz nicelikler tanımlanabilir. Bunlar cinsinden (3.51) yeniden şu şekilde yazılabilir;

$$G=e^{-\alpha.\beta}e^{-\rho^2+iI_q}e^{-4\zeta^2-2I_p}. \tag{3.60}$$

Bu ifade (3.55)'de kullanılırsa marjinal olasılık yoğunlukları için

$$M_{\alpha\beta}(q_1,q_2)=e^{-\alpha.\beta}e^{-\rho^2+iI_q}K_1K_2=\pi(\frac{\hbar}{\gamma})^2e^{-\rho^2}Q_\alpha Q_\beta, \tag{3.61}$$

üretici fonksiyonu elde edilmiş olur. Burada

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma^2}{\hbar^2}[p_1^2 - \frac{2\hbar^2}{m\omega\gamma^3}(\alpha_1-\alpha_2+\beta_1-\beta_2)p_1]} dp_1, \\
&= \pi^{1/2}\frac{\hbar}{\gamma} e^{\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2+\beta_1-\beta_2)^2}, \\
K_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma^2}{\hbar^2}[p_2^2 + i\frac{2\hbar^2}{m\omega\gamma^3}(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)p_2]} dp_2, \\
&= \pi^{1/2}\frac{\hbar}{\gamma} e^{-\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)^2},
\end{aligned}$$

ifadeleri standart kompleks integrasyon metodları ile elde edilir ve

$$Q_\alpha = e^{-\alpha_1\alpha_2 + i(\alpha_1\bar{Z} - \alpha_2 Z)}, \quad Q_\beta = e^{-\beta_1\beta_2 - i(\beta_1 Z - \beta_2\bar{Z})},$$

şeklindedir. (3.61) ifadesi, (3.56)'da kullanılırsa

$$P_{nl}(q_1, q_2) = \frac{4\pi}{n!l!}(\frac{\hbar}{\gamma})^2 e^{-\rho^2} J_{nl}^1 J_{nl}^2 \tag{3.62}$$

bulunur. Burada

$$J_{nl}^1 = \partial_{\alpha_1}^n \partial_{\alpha_2}^l Q_\alpha|_{\alpha_1=0=\alpha_2}, \quad J_{nl}^2 = \partial_{\beta_1}^n \partial_{\beta_2}^l Q_\beta|_{\beta_1=0=\beta_2}, \tag{3.63}$$

tanımları kullanılmıştır.

(3.52) ve (3.53)'e benzer şekilde Q_α ve Q_β aşağıdaki gibi açılabilir;

$$\begin{aligned}
Q_\alpha &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\alpha_1\bar{Z})^j}{j!}(1 + i\frac{\alpha_2}{\bar{Z}})^j e^{-i\alpha_2 Z}, \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{i^{j+k}}{j!}\bar{Z}^{j-k}\alpha_1^j\alpha_2^k L_k^{j-k}(\rho^2), \\
Q_\beta &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i\beta_1 Z)^j}{j!}(1 - i\frac{\beta_1}{Z})^j e^{i\beta_2\bar{Z}}, \\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-i)^{j+k}}{j!} Z^{j-k}\beta_1^j\beta_2^k L_k^{j-k}(\rho^2).
\end{aligned}$$

Böylece (3.63)'den

$$J_{nl}^1 = i^{n+l} l! \bar{Z}^{n-l} L_l^{n-l}(\rho^2), \quad J_{nl}^2 = (-i)^{n+l} l! Z^{n-l} L_l^{n-l}(\rho^2),$$

elde edilir ve bunlar da (3.62)'de kullanılırsa $q_1 q_2$-düzlemindeki marjinal olasılık yoğunlukları elde edilmiş olur;

$$P_{nl}(q_1, q_2) = 4\pi\frac{l!}{n!}(\frac{\hbar}{\gamma})^2 \rho^{2(n-l)} e^{-\rho^2}[L_l^{n-l}(\rho^2)]^2. \tag{3.64}$$

Diğer üretici fonksiyonlar ve karşı gelen marjinal olasılık yoğunlukları da benzer şekilde elde edilir. Bu fonksiyonlar hesaplanarak Çizelge 3.1-Çizelge 3.2'de topluca verilmiştir.

Ortak bir özellik olarak, Landau düzeylerinin karşı gelen faz-uzayı düzlemi üzerindeki tüm marjinal olasılık yoğunlukları beklenildiği gibi pozitiftir ve bu düzlemler üzerindeki dalga fonksiyonlarını üniter bir faz faktörü farkıyla belirlerler. İlk dört marjinal olasılık yoğunluklarının kendi düzlemleri üzerindeki eksensel simetrisi Çizelge 3.2'de verilen açık ifadelerden görülür. Ancak $P_{nl}(q_1, p_2)$ ve $P_{nl}(q_2, p_1)$'nin fonksiyonel bağımlılığı diğerlerinden farklıdır. Burada kullanılanlara benzer yöntemler ile q_j veya p_j veya başka faz-uzayı doğrultuları boyunca marjinal olasılık yoğunlukları da hesaplanabilir.

Çizelge 3.1 Çeşitli faz-uzayı düzlemleri üzerinde Wigner fonksiyonları için marjinal olasılık yoğunluklarının üretici fonksiyonları.

$$M_{\alpha\beta}(q_1, q_2) = \pi\frac{\hbar^2}{\gamma^2}e^{-\rho^2}e^{-\alpha_1\alpha_2+i(\alpha_1\bar{Z}-\alpha_2 Z)}e^{-\beta_1\beta_2-i(\beta_1 Z-\beta_2\bar{Z})}, \quad Z = \frac{q_1+iq_2}{\gamma}$$

$$M_{\alpha\beta}(p_1, p_2) = \pi\gamma^2 e^{-4\zeta^2}e^{\alpha_1\alpha_2+2(\alpha_1\bar{P}-\alpha_2 P)}e^{\beta_1\beta_2+2(\beta_1 P-\beta_2\bar{P})}, \quad P = \frac{p_1+ip_2}{m\omega\gamma}$$

$$M_{\alpha\beta}(q_1, p_1) = \pi\hbar e^{-\tau\bar{\tau}}e^{\alpha_1\beta_2+i(\alpha_1\bar{\tau}+\beta_2\tau)}e^{\alpha_2\beta_1-i(\alpha_2\bar{\tau}+\beta_1\tau)}, \quad \tau = \frac{q_1}{\gamma}+\frac{2i\gamma p_1}{\hbar}$$

$$M_{\alpha\beta}(q_2, p_2) = \pi\hbar e^{-\eta\bar{\eta}}e^{-\alpha_1\beta_2+(\alpha_1\bar{\eta}+\beta_2\eta)}e^{-\alpha_2\beta_1+(\alpha_2\bar{\eta}+\beta_1\eta)}, \quad \eta = \frac{q_2}{\gamma}+\frac{2i\gamma p_2}{\hbar}$$

$$M_{\alpha\beta}(q_1, p_2) = \pi\hbar e^{\frac{1}{2}(\tau_+^2+\tau_-^2)}e^{\frac{1}{2}[(\alpha_1+i\tau_-)^2+(\beta_1-i\tau_-)^2+(\alpha_2-i\tau_+)^2+(\beta_2+i\tau_+)^2]}, \quad \tau_\pm = \frac{q_1}{\gamma}\pm\frac{2\gamma p_2}{\hbar}$$

$$M_{\alpha\beta}(q_2, p_1) = \pi\hbar e^{\frac{1}{2}(\tau_+'^2+\tau_-'^2)}e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1-\tau_+')^2+(\beta_1-\tau_+')^2+(\alpha_2-\tau_-')^2+(\beta_2-\tau_-')^2]}, \quad \tau_\pm' = \frac{q_2}{\gamma}\pm\frac{2\gamma p_1}{\hbar}$$

Çizelge 3.2 Çeşitli faz-uzayı düzlemleri üzerinde Wigner fonksiyonları için olasılık yoğunlukları.

$P_{nl}(q_1,q_2) = N_{nl}(\frac{\hbar}{\gamma})^2\rho^{2(n-l)}e^{-\rho^2}[L_l^{n-l}(\rho^2)]^2,$	$\rho^2 = \frac{q_1^2+q_2^2}{\gamma^2}$
$P_{nl}(p_1,p_2) = N_{nl}\gamma^2(2\zeta)^{2(n-l)}e^{-4\zeta^2}[L_l^{n-l}(4\zeta^2)]^2,$	$\zeta^2 = \frac{\gamma^2(p_1^2+p_2^2)}{4\hbar^2}$
$P_{nl}(q_1,p_1) = N_{nl}\hbar\mu_1^{2(n-l)}e^{-\mu_1^2}[L_l^{n-l}(\mu_1^2)]^2\ ,$	$\mu_1^2 = \frac{q_1^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}p_1^2$
$P_{nl}(q_2,p_2) = N_{nl}\hbar\mu_2^{2(n-l)}e^{-\mu_2^2}[L_l^{n-l}(\mu_2^2)]^2\ ,$	$\mu_2^2 = \frac{q_2^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}p_2^2$
$P_{nl}(q_1,p_2) = N'_{nl}\hbar e^{-\frac{1}{2}(\tau_+^2+\tau_-^2)}[H_n(\frac{\tau_-}{\sqrt{2}})H_l(\frac{\tau_+}{\sqrt{2}})]^2\ ,$	$\tau_\pm = \frac{q_1}{\gamma} \pm \frac{\gamma p_2}{\hbar}$
$P_{nl}(q_2,p_1) = N'_{nl}\hbar e^{-\frac{1}{2}(\tau_+'^2+\tau_-'^2)}[H_n(\frac{\tau'_+}{\sqrt{2}})H_l(\frac{\tau'_-}{\sqrt{2}})]^2\ ,$	$\tau'_\pm = \frac{q_2}{\gamma} \pm \frac{\gamma p_1}{\hbar}$

$N_{nl} = 4\pi l!/n!$ ve $N'_{nl} = 4\pi/n!l!2^{n+l}$.

4. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ ve EŞSPEKTRUMLU SÜPERİNTEGRALLENEBİLİR POTANSİYELLER

Süpersimetrik kuantum mekaniğinde amaç tam çözülebilir sistemler hiyerarşisi elde etmektir. Bu bölümde bu amaç için birbirleriyle ilişkili i) Schrödinger'in çarpanlara ayırma metodu, ii) Darboux dönüşümü ve iii) Bağlaştırım metodu kısaca incelendikten sonra Kes.4.2.1'de bu metodunun genişletmesi olan çok katlı bağlaştırım işlemcisi metodu verilecektir. Bu metodun açık realizasyonu verildikten sonra düzlem kutupsal koordinatlarda iki boyutlu integrallenebilir ve eşspektrumlu potansiyellerin en genel formu bulunmaktadır. Kes.4.2.4'te bağlaştırım işlemcilerinin inşası ele alınmakta ve ardından süperintegrallenebilir ve eşspektrumlu potansiyellerin genel formları elde edilmektedir. Bu potansiyellerle ilişkili 1-boyutlu problemlerin bağlı durumları simetri üreticileri ve bunların cebiri incelendikten sonra üretilen süperintegrallenebilir ve eşspektrumlu potansiyellerin normalize edilebilir durumları da verilmektedir.

4.1. Süpersimetrik Kuantum Mekaniği Metodları

4.1.1. Çarpanlara ayırma metodu

Çarpanlara ayırma metodu analitik olarak çözülebilir potansiyel problemlerini sınıflandırmak için kullanılan ilk metoddur. İlk olarak Schrödinger tarafından hidrojen atomu problemini cebirsel olarak çözmek için ileri sürülen bu metod Infeld ve Hull tarafından geliştirilerek geniş bir çözülebilir potansiyel sınıfı elde edilmiştir (Infeld 1951). Bu metod yardımıyla verilen bir potansiyel için bağlı durumların spektrumu ilk spektrumdan sadece sonlu sayıda seviye kadar farkeden başka potansiyellerin bir serisi elde edilebilir. Böyle potansiyellere karşı gelen Hamiltoniyenlere eş Hamiltoniyenler denir. Bu yeni potansiyellerdeki bağlı durumların dalga fonksiyonları ilk potansiyelin dalga fonksiyonları cinsinden açıkca ifade edilebilir.

$V_1(x)$ potansiyelli Schrödinger denkleminin taban durumu dalga fonksiyonu $\psi_0(x)$

için
$$\hat{H}_1\psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + V_1(x)\psi_0(x) = E_0^{(1)}\psi_0(x) \tag{4.1}$$
yazılabilir. Eğer taban durumu enerjisi $E_0^1 \neq 0$ ise Hamiltoniyene taban durumu enerjisi eklenerek veya çıkarılarak, yani enerji ölçeği değiştirilerek $E_0^1 = 0$ olacak şekilde ayarlanabilir. $E_n^{(k)}$ ifadesinde n enerji seviyesini, k ise ait olduğu Hamiltoniyeni gösterir. $E_0^{(1)} = 0$ varsayılırsa V_1 potansiyeli ψ_0 cinsinden şu şekilde ifade edilebilir;
$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}. \tag{4.2}$$
Burada $\psi_0''(x) = d^2\psi_0(x)/dx^2$'dir. Genel olarak durağan bir $\hat{H}$ Hamiltoniyeninin herhangi bir enerji seviyesinin dalga fonksiyonu biliniyorsa potansiyel bu dalga fonksiyonu ve enerji özdeğeri cinsinden yazılabilir.

$\hat{H}_1$'in
$$\hat{A}_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + \Phi_1(x), \quad \hat{A}_1^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + \Phi_1(x) \tag{4.3}$$
gibi birbirinin eşleniği olan iki işlemcinin çarpımı olarak $\hat{H}_1 = \hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1$ şeklinde olması istenirse
$$V_1(x) = \Phi_1^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi_1'(x)$$
olmalıdır. Bu ise Φ_1 aranan fonksiyonu için iyi bilinen Riccati denklemidir. $\Phi_1(x)$ niceliğine SUSYQM dilinde süperpotansiyel denir. Taban durumu dalga fonksiyonu cinsinden $\Phi_1(x)$ çözümü
$$\Phi_1(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}, \tag{4.4}$$
şeklindedir. Bu ise $\hat{A}_1\psi_0 = 0$'dan elde edilir. Şimdi $\hat{H}_1$'e ilişkin yeni bir Hamiltoniyen $\hat{H}_2 = \hat{A}_1\hat{A}_1^\dagger$ şeklinde tanımlanabilir. Bu yeni bir $V_2(x)$ potansiyeline karşı gelen Hamiltoniyen de aşağıdaki gibi yeniden çarpanlara ayrılabilir;
$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) = \hat{A}_2\hat{A}_2^\dagger + E_1^{(1)}.$$
Burada
$$V_2(x) = \Phi_1^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi_1'(x) = V_1(x) + \frac{2\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi'_1,$$
$$\hat{A}_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + \Phi_2(x), \hat{A}_2^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + \Phi_2(x),$$

$$\Phi_2(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d \ln \psi_0^{(2)}}{dx}$$

şeklindedir. $V_1(x)$ ve $V_2(x)$'e süpersimetrik eşpotansiyeller denir. Bunlar $\hat{H}_1$'in taban durumu hariç aynı spektruma sahiptirler.

$\hat{H}_1$ ve $\hat{H}_2$'nin enerji özdeğer ve özfonksiyonları arasında

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)}, \psi_n^{(2)} = (E_{n+1}^{(1)})^{-1/2} \hat{A}_1 \psi_{n+1}^{(1)},$$

ilişkisi vardır. Yeniden çarpanlara ayrılan $\hat{H}_2$ Hamiltoniyenin eşi ise bir başka $\hat{H}_3$ Hamiltoniyenidir. Şimdi taban durumu enerjisi $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ olan $\hat{H}_2$'den başlayarak bunun SUSY eşi olan $\hat{H}_3$ de benzer şekilde üretilebilir. Böylece her yeni Hamiltoniyen bir tane daha az bağlı duruma sahip olur. Bu süreç bağlı durumların sayısı tükeninceye kadar devam ettirilebilir. $\hat{H}_1$ tam olarak çözülebilir bir sistem ise, bu şekilde tekrarlanan yeniden çarpanlara ayrılmalarla yaratılan Hamiltoniyen hiyerarşisinin tüm enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları bulunabilir. Tersine bu hiyerarşideki tüm Hamiltoniyenler için taban durumu dalga fonksiyonları biliniyorsa ilk problemin çözümleri de yeniden elde edilebilir. Başlangıçtaki $\hat{H}_1$ Hamiltoniyeni $(0 \leq n \leq p-1)$ olmak üzere $E_n^{(1)}$ özdeğerli ve $\psi_n^{(1)}$ özfonksiyonlu p (≥ 1) bağlı duruma sahip ise, o zaman $\hat{H}_2, ..., \hat{H}_p$ şeklinde $(p-1)$ tane Hamiltoniyen için bir hiyerarşi üretilebilir. Ancak bu Hamiltoniyen hiyerarşisinin m'inci elemanı $\hat{H}_m$, $\hat{H}_m$'de gözükmeyen $\hat{H}_1$'in ilk $(m-1)$ özdurumu hariç $\hat{H}_1$ ile aynı spektruma sahiptir. Son olarak, $\hat{H}_1$'in tüm enerji özdeğer ve özfonksiyonları biliniyorsa, $p-1$ Hamiltoniyen hiyerarşisinin tüm enerji özdeğer ve özfonksiyonları hemen bulunur.

4.1.2. Darboux dönüşümü

Darboux dönüşümü de çözümü bilinen bir problemden başlayarak tam çözülebilir problemlerin sonsuz bir serisini elde etmek için kullanılan bir yöntemdir. Tekrarlanmış Darboux dönüşümleri için bir ifade Crum tarafından bulunmuştur (Crum 1955).

Darboux teoremi

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi, \tag{4.5}$$

şeklindeki Sturm-Liouville denkleminin Darboux değişmezliği olarak tanımlanır. Burada $\psi_{xx} = d^2\psi/dx^2$'dir. Bu denklem kuantum mekaniğindeki bir-boyutlu Schrödinger denklemidir (basitlik için $\hbar = 2m = 1$ alınmıştır). $\psi_1 = \psi_1(x, \lambda_1)$ niceliği Denk.(4.5)'in $\lambda = \lambda_1$ için belirlenmiş çözümü ve $\Phi_1 = \psi_{1x}\psi_1^{-1}$ olmak üzere $\psi \to \psi[1]$ Darboux dönüşümü (DD) aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\psi[1] = (\frac{d}{dx} - \Phi_1)\psi = \psi_x - \frac{\psi_{1x}}{\psi_1}\psi = \frac{W(\psi_1, \psi)}{\psi_1}. \tag{4.6}$$

Burada $W(\psi_1, \psi) = \psi_1\psi_x - \psi_{1x}\psi$ Wronskian determinanttır. Görüldüğü gibi DD denklemin aranan fonksiyonunda yapılan bir dönüşümdür ve her λ değeri için çizgisel bağımsız bir fonksiyon elde edilir. u potansiyeli ise DD altında

$$u[1] = u - 2\Phi_{1x} = u - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_1, \tag{4.7}$$

şeklinde dönüşür. Böylece DD yardımıyla (4.5) denklemi $\psi[1] = \varphi$ ve $u[1] = v$ olmak üzere,

$$-\varphi_{xx} + v\varphi = \lambda\varphi \tag{4.8}$$

Schrödinger denklemi ile ilişkilendirilmiş olur. Buradan da Denk.(4.8)'in spektrumunun Denk.(4.5) ile hemen hemen aynı olduğu görülür. (4.6)'da ψ değiştirilerek yeni Schrödinger denkleminin tüm çözümleri elde edilebilir.

DD çözülebilir yeni Sturm-Liouville denklemleri üretmek için keyfi sayıda uygulanabilir ve elde edilen her yeni denklemin çözümleri başlangıç denkleminin çözümleri cinsinden ifade edilebilir.

Şimdi

$$\Phi_1 = \psi_{1x}\psi_1^{-1} = \varphi_{1x}\varphi_1^{-1},$$

şeklinde tanımlanan süper potansiyel yardımıyla aşağıdaki gibi SUSY eşpotansiyeller kurulabilir;

$$u = \Phi_{1x} + \Phi_1^2 + \lambda_1, \quad v = u[1] = \Phi_{1x} - \Phi_1^2 + \lambda_1.$$

Burada

$$\hat{B}^\dagger = -\partial + \Phi_1, \quad \hat{B} = \partial + \Phi_1, \tag{4.9}$$

şeklinde süperyük işlemcileri tanımlanarak SUSY eş Hamiltoniyenler kurulabilir;

$$\hat{H}_1 = \hat{B}\hat{B}^\dagger + \lambda_1 = -\partial^2 + u, \quad \hat{H}_2 = \hat{B}^\dagger\hat{B} + \lambda_1 = -\partial^2 + v.$$

Süperyük işlemcileri $\hat{H}_1$ ve $\hat{H}_2$'yi

$$\hat{B}\hat{H}_1 = \hat{H}_2\hat{B}^\dagger \tag{4.10}$$

şeklinde birbirine bağlar. Bu işlemcilerden yararlanarak aşağıdaki gibi bir matris Hamiltoniyen tanımlanabilir;

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_+ = \hat{B}^\dagger\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{B}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_- = \hat{B}\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & \hat{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Burada σ_+ ve σ_- Pauli matrisleridir. $\hat{H}$ matris Hamiltoniyeni ve $\hat{Q}_\pm$ işlemcileri

$$\{\hat{Q}_+, \hat{Q}_-\} \equiv \hat{Q}_+\hat{Q}_- + \hat{Q}_-\hat{Q}_+ = \hat{H} - \lambda_1, \quad [\hat{H}, \hat{Q}_\pm] = 0$$

bağıntılarını sağlarlar. Bunlar da elemanları $\hat{Q}_\pm$ ve $\hat{H} - \lambda_1$ olan en basit süpercebiri oluştururlar. Buradaki matris Hamiltoniyenin köşegen elemanları SUSY eş Hamiltoniyenlerdir. Bu Hamiltoniyenler Denk.(4.10)'dan görüldüğü gibi $\hat{H}_1$'in, $\hat{H}_2$'nin spektrumunda bulunmayan, taban durumu dalga fonksiyonu hariç eşspektrumludur. Böylece Darboux değişmezliği sayesinde süpersimetrik kuantum mekaniğinin tam olarak çözülebilir denklemlerinin bir serisi elde edilebilir.

4.1.3. Bağlaştırım metodu

Bağlaştırım metodu tam çözülebilir çizgisel ve çizgisel-olmayan problemler ve bunların fizik ve matematiğin çeşitli alanlarındaki hiyerarşilerini kurmak için kullanılan bir yaklaşımdır (Bagrov 1996, Cannata 1998, Kuru 2001). Metodunun amacı $\hat{H}_0$ ve $\hat{H}_1$ gibi iki Hamiltoniyen işlemcisini $\hat{\mathcal{L}}\hat{H}_0 = \hat{H}_1\hat{\mathcal{L}}$ şeklinde bağlaştıran çizgisel diferensiyel bir $\hat{\mathcal{L}}$ işlemcisi inşa etmektir. Bu metodunun kullanışlı olmasının temelindeki iki basit ve önemli özellik şöyle ifade edilebilir:

(i). ψ^0, $\hat{H}_0$'ın E^0 özdeğerli bir özfonksiyonu ise o zaman $\psi^1 = \hat{\mathcal{L}}\psi^0$ da $\hat{H}_1$'in aynı E^0 özdeğerli (normalize edilmemiş) bir özfonksiyonudur. Bu özellik $\hat{\mathcal{L}}$'nin çözülebilir bir problemi bir başkasına dönüştürdüğünü gösterir.

(ii). $\hat{H}_0$ ve $\hat{H}_1$ kendine eşlenik (self-adjoint) olduğunda (ortak bir özfonksiyon uzayı üzerinde) $\hat{\mathcal{L}}^\dagger$ diğer yönde yani $\hat{H}_0\hat{\mathcal{L}}^\dagger = \hat{\mathcal{L}}^\dagger\hat{H}_1$ şeklinde bağlaştırım yapar ve bu da $[\hat{H}_0, \hat{\mathcal{L}}^\dagger\hat{\mathcal{L}}] = 0 = [\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{L}}^\dagger, \hat{H}_1]$ olmasını gerektirir. Bu özellik ise $\hat{H}_0$ ve $\hat{H}_1$'in iki gizli dinamik simetri işlemcisinin $\hat{\mathcal{L}}$ cinsinden inşa edilebileceğini gösterir.

Yukarıdaki özellikler bu metodun boyut ve formdan bağımsız genel özellikleridir. $\hat{\mathcal{L}}$'nin birinci mertebeden diferensiyel işlemci olarak alındığı ve Hamiltoniyenlerin potansiyel formunda olduğu 1-boyutlu sistemlerde iki ilave özellik ortaya çıkar; (i) $\hat{H}_0$'ın her özfonksiyonu (sınır koşulları ve normalize edilebilirlik gözönüne alınmaksızın) yeni bir çözülebilir probleme bir dönüşüm üretmek için kullanılabilir. Bu özellik Darboux dönüşümünün bir genellemesidir (Crum dönüşümü). (ii) Bir SUSY cebirine doğrudan bağlantı kurulabilir (Anderson 1991). Bu özellik ise, bağlaşık sistemlerin spektral eşdeğerliğini kompakt cebirsel bir formda ifade etmeye yarar.

Bu metodun daha detaylı incelemesi ve iki boyutta bir genişletmesi bundan sonraki kesimin konusudur.

4.2. Süperintegrallenebilir Potansiyeller

Fonksiyonel olarak bağımsız, global olarak tanımlı ve tek-değerli N tane hareket integraline sahip N serbestlik dereceli bir klasik mekaniksel sistemin Hamiltoniyenine, Liouville-Arnold anlamında, tam olarak integrallenebilirdir denir (Goldstein 1980, Arnold 1989). Sistem, N 'den daha fazla hareket integralini kabul ediyorsa süperintegrallenebilirdir denir. Süperintegrallenebilir bir sistemin tüm integralleri involutif (Poisson parantezleri sıfır) olmayabilir, fakat bu integraller fonksiyonel olarak bağımsız olmalıdır. Klasik mekaniğe benzer olarak, durağan bir $\hat{H}$ Hamilton işlemcisi ile N-boyutlu (ND) Öklit uzayında tanımlanan bir kuantum mekaniksel sistemin; eğer $N-1$ tane ($\hat{H}$ ile birlikte N tane), $\hat{H}$ ile ve birbirleri ile sıra değişen cebirsel olarak bağımsız, çizgisel $\hat{X}_i, i = 1, 2, ..., N-1$ işlemcisi varsa tam olarak integrallenebilirdir denir. Eğer $\hat{H}$ ile sıra değişen k tane ilave $\hat{Y}_j, j = 1, 2, ..., k$ işlemcisi varsa sisteme süperintegrallenebilir denir, burada $0 < k \leq N-1$'dir. $k = 1$ iken sisteme minimal süperintegrallenebilir, $k = N-1$ iken maksimal süperintegrallenebilirdir denir (Fris vd. 1965, Makarov vd. 1967, Wojciechowski

1983, Evans 1990, Evans 1991, Sheftel vd. 2001).

Herhangi bir sonlu N için maksimal olarak süperintegrallenebilir sistemlere klasik ve kuantum mekaniksel örnekler olarak; Kepler-Coulomb problemi, rasyonel frekanslı harmonik salınıcı, harmonik bir kuyu içindeki Calogero-Moser sistemi ve Winternitz (veya Smorodinsky-Winternitz) sistemi verilebilir. $N = 3$ için ilk iki sistemin süperintegrallenebilirliği Laplace'ın zamanından beri bilinirler, son iki sistemin süperintegrallenebilirliği ise ilk kez sırasıyla Wojciechowski ve Evans tarafından kurulmuştur (Wojciechowski 1983, Evans 1990) . Diğer mümkün süperintegrallenebilir sistemler Winternitz ve arkadaşları tarafından araştırılmış ve ilk olarak birden fazla koordinat sisteminde ayrışabilen dört tane iki boyutlu potansiyel bulunmuştur (Fris vd. 1965). Daha sonra bu yapılanlar $N = 3$ durumuna da genişletilmiştir (Makarov vd. 1967). Bu yaklaşım iki varsayıma dayanır; (1) Hamiltoniyenler potansiyel formundadır, (2) Hareket integralleri momentumlara göre (veya türevlere göre) en fazla kareseldir. Winternitz programı dört veya beş bağımsız hareket integralleri ile onüç farklı üç boyutlu potansiyeli içeren tam bir listenin verildiği (Evans 1990)'da tamamlanmıştır.

4.2.1. Çok katlı bağlaştırım metodu

$\hat{H}_0, \hat{H}_1, \hat{H}_2$ gibi üç Hermite-sel Hamiltoniyen işlemcisi

$$\hat{\mathcal{L}}_{10}\hat{H}_0 = \hat{H}_1\hat{\mathcal{L}}_{10}, \quad \hat{\mathcal{L}}_{21}\hat{H}_1 = \hat{H}_2\hat{\mathcal{L}}_{21}, \tag{4.11}$$

şeklinde bağlaştırılmış olsun. Bağlaştırım işlemcilerinin alt indisleri bunları ayırdetmek ve bağlaştırılmış Hamiltoniyenleri göstermek için kullanılmıştır. Denk.(4.11)'-den $\hat{\mathcal{L}}_{20} \equiv \hat{\mathcal{L}}_{21}\hat{\mathcal{L}}_{10}$ işlemcisinin $\hat{H}_0$ ve $\hat{H}_2$ Hamiltoniyenlerini

$$\hat{\mathcal{L}}_{20}\hat{H}_0 = \hat{H}_2\hat{\mathcal{L}}_{20}, \tag{4.12}$$

şeklinde bağlaştıracağı görülür. Böylece Denk.(4.11) and (4.12) aşağıdaki gibi bir diyagramda birleştirilebilir:

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}_0 & \longrightarrow & \hat{H}_1 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \hat{H}_2 \end{array} . \tag{4.13}$$

(4.11) ve (4.12)'nin eşlenikleri alındığında aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$\hat{\mathcal{L}}_{21}^{\dagger}\hat{H}_2 = \hat{H}_1\hat{\mathcal{L}}_{21}^{\dagger}, \quad \hat{\mathcal{L}}_{10}^{\dagger}\hat{H}_1 = \hat{H}_0\hat{\mathcal{L}}_{10}^{\dagger}, \quad \hat{\mathcal{L}}_{20}^{\dagger}\hat{H}_2 = \hat{H}_0\hat{\mathcal{L}}_{20}^{\dagger}. \tag{4.14}$$

Bu da bağlaştırım işlemcilerinin eşleniklerinin ters yönlerde bağlaştırım yaptıracağını gösterir. (4.14) ifadeleri, (4.13) diyagramında yönleri ters çevrilmiş oklar ile gösterilebilir. Denk.(4.11) ve (4.14) kullanılarak $\hat{H}_0, \hat{H}_1, \hat{H}_2$ Hamiltoniyenlerinin herbirinin sırasıyla

$$\begin{aligned} \hat{X}_0 &= \hat{\mathcal{L}}_{10}^{\dagger}\hat{\mathcal{L}}_{10}, & \hat{Y}_0 &= \hat{\mathcal{L}}_{20}^{\dagger}\hat{\mathcal{L}}_{20}, \\ \hat{X}_1 &= \hat{\mathcal{L}}_{10}\hat{\mathcal{L}}_{10}^{\dagger}, & \hat{Y}_1 &= \hat{\mathcal{L}}_{21}^{\dagger}\hat{\mathcal{L}}_{21}, \\ \hat{X}_2 &= \hat{\mathcal{L}}_{21}\hat{\mathcal{L}}_{21}^{\dagger}, & \hat{Y}_2 &= \hat{\mathcal{L}}_{20}\hat{\mathcal{L}}_{20}^{\dagger}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklinde ikişer simetri işlemcisine sahip olduğu görülür. $\hat{X}_j, \hat{Y}_j$'lerin altindisleri ait oldukları Hamiltoniyenleri gösterir. Burada tüm Hamiltoniyenlerin ve bağlaştırım işlemcilerinin tanım bölgelerinin $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ Hilbert uzayının aynı bir alt uzayı olduğu varsayılmaktadır (Richtmyer 1978, Kato 1980, Reed vd. 1980).

$N \geq 2$ için, (4.13) diyagramı ile herbiri iki dinamik simetriye sahip eşspektrumlu Hamiltoniyen üçlüsü elde edilir. Böylece baştan bu şekilde elde edilen tüm simetri üreticileri çarpanlara ayrılmıştır ve bağlaştırım işlemcilerinin mertebesine bağlı olarak çift mertebeye ve sadece $\hat{H}_1$ için aynı mertebeye sahip olacaklardır. $\hat{\mathcal{L}}_{10}$ ve $\hat{\mathcal{L}}_{21}$ işlemcileri cebirsel olarak bağımsız alınırsa $\hat{X}_i, \hat{Y}_i$ çiftlerinin bağımsızlığı başlangıçtan garantilenmiş olacaktır. Burada $N = 2$ özel durumunda (4.13) diyagramı üç Hamiltoniyenin süperintegrallenebilirliğini garanti eder. $N = 3$ durumunda ise böyle bir diyagram, simetri üreticilerinin sıradeğişmesi şartıyla integrallenebilir sistemler verir.

Burada ilk olarak iki boyutlu iki Hamiltoniyen için birinci mertebeden bağlaştırım işlemcisi ile potansiyellerin en genel formu belirlenecektir. Sonra $\hat{H}_0 \rightarrow \hat{H}_1$ ve $\hat{H}_1 \rightarrow \hat{H}_2$ bağlaştırımları inşa edilecektir. Yukarıdaki gibi çizgisel olarak bağlaştırılmış iki Hamiltoniyen, bağlaştırım işlemcisinin çekirdeğine (kerneline) karşı gelen özdeğerler hariç daima formel olarak eşspektrumludur. Daha yüksek boyutlu sistemler için aynı zamanda ortak bir özdeğerin dejenereliğinin derecesi de farklı olabilir (bakınız Kes.4.2.8).

4.2.2. İki boyutta bağlaştırım

İki boyutlu iki tane tek parçacık sistemi

$$\hat{H}_i = -\nabla^2 + V_i, \quad \hat{H}_f = -\nabla^2 + V_f, \tag{4.16}$$

şeklinde potansiyel formundaki Hamiltoniyen işlemcileriyle betimlenmiş olsun. Burada m parçacığın kütlesini göstermek üzere V_i, V_f potansiyelleri (ve $\hat{H}_i$, $\hat{H}_f$'lerin özdeğerleri) $2m/\hbar^2$'ye göre ifade edilmiştir. (4.16)'da

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2,$$

(r,θ) düzlem kutupsal koordinatlarındaki Laplace işlemcisi olup "i" ve "f" altindisleri "ilk" (initial) ve "son" (final) anlamında kısaltmalar olarak kullanılmaktadır. (4.16)'daki Hamiltoniyenler

$$\hat{\mathcal{L}}_{fi}\hat{H}_i = \hat{H}_f\hat{\mathcal{L}}_{fi}, \tag{4.17}$$

şeklinde en genel birinci mertebeden

$$\hat{\mathcal{L}}_{fi} = L_0 + \hat{L}_d = L_0 + L_1\partial_r + L_2\partial_\theta \tag{4.18}$$

bağlaştırım işlemcisi ile bağlaştırılmış olsun. Burada $\hat{L}_d = L_1\partial_r + L_2\partial_\theta$, $\hat{\mathcal{L}}_{fi}$'nin diferensiyel kısmıdır. Potansiyeller ve L_0, L_1, L_2 fonksiyonları (4.17) bağlaştırım bağıntısının tutarlılık denklemlerinden tespit edilecektir.

(4.16) ve (4.18), (4.17) bağıntısında kullanılırsa

$$[\nabla^2, \hat{L}_d] = -[\nabla^2, L_0] + [V_i, \hat{L}_d] + P\hat{\mathcal{L}}_{fi}, \tag{4.19}$$

elde edilir. Burada $P = V_f - V_i$'dir. Bu ifade de ikinci mertebeden türevler birinci mertebeden türevlerle birlikte sadece

$$[\nabla^2, \hat{L}_d] = (\nabla^2 L_1 + \frac{1}{r^2}L_1)\partial_r + (\nabla^2 L_2)\partial_\theta$$
$$+2(\frac{1}{r^2}\partial_\theta L_1 + \partial_r L_2)\partial_\theta\partial_r + 2(\partial_r L_1)\partial_r^2 + \frac{2}{r^3}(L_1 + r\partial_\theta L_2)\partial_\theta^2, \tag{4.20}$$

teriminden gelir ve ikinci mertebeden türevlerin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\partial_\theta L_1 + r^2\partial_r L_2 = 0, \quad \partial_r L_1 = 0, \qquad L_1 + r\partial_\theta L_2 = 0,$$

elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümleri, A, B ve ϕ integral sabitleri olmak üzere

$$L_1 = A\sin(\theta+\phi), \qquad L_2 = B + \frac{A}{r}\cos(\theta+\phi), \tag{4.21}$$

şeklindedir. $\nabla^2 L_1 = -L_1/r^2$ ve $\nabla^2 L_2 = 0$ olduğu için $[\nabla^2, \hat{L}_d] = 0$ olur. Böylece Denk.(4.19) aşağıdaki gibi daha basit şekilde ifade edilebilir;

$$[\nabla^2, L_0] = -L_1\partial_r V_i - L_2\partial_\theta V_i + P(L_0 + \hat{L}_d). \tag{4.22}$$

Şimdi

$$[\nabla^2, L_0] = \nabla^2 L_0 + 2(\partial_r L_0)\partial_r + \frac{2}{r^2}(\partial_\theta L_0)\partial_\theta,$$

ifadesi (4.22)'de kullanılarak sıfırıncı ve birinci mertebeden türevlerin katsayıları eşitlenirse

$$2\partial_r L_0 = PL_1, \tag{4.23}$$

$$2\partial_\theta L_0 = r^2 PL_2, \tag{4.24}$$

$$(-\nabla^2 + P)L_0 = L_1\partial_r V_i + L_2\partial_\theta V_i, \tag{4.25}$$

şeklinde tutarlılık denklem kümesi elde edilir. İlk ikisi çizgisel ve üçüncüsü çizgisel olmayan bu üç kısmi diferensiyel denklemden L_0, V_i ve V_f bilinmeyen fonksiyonları bundan sonraki kesimde bulunacaktır.

4.2.3. İki boyutlu integrallenebilir eşspektrumlu potansiyellerin genel formu

Denk.(4.21),(4.23),(4.24) ve $\partial_r\partial_\theta L_0 = \partial_\theta\partial_r L_0$ uyuşumluluk koşulu kullanılırsa

$$2\nabla^2 L_0 = \hat{L}_d P, \quad ZL_0 = 0, \quad ZP = 2BrP,$$

elde edilir. Burada $Z = L_1\partial_\theta - r^2 L_2\partial_r$ şeklindedir. Bu denklemlerin ikincisi ve üçüncüsünden (veya (4.23) ve (4.24)'den) $L_0 = f(w)$ ve $P = -2A^2 f'(w)/r^2 L_1^2$ bulunur. Burada üs işareti argümana göre türevi gösterir, f ise

$$w = B\cot(\theta+\phi) + \frac{A}{r\sin(\theta+\phi)},$$

ifadesinin bir fonksiyonudur. (4.25), $2\nabla^2 L_0 = \hat{L}_d P$ ile birleştirilir ve yukarıda bulunan L_0 ve P ifadeleri kullanılırsa elde edilecek homojen olmayan denklemin en genel çözümünden potansiyellerin genel formu aşağıdaki gibi bulunur;

$$V_i = h(\kappa) + \frac{\mathcal{V}_-(w)}{\kappa^2}, \quad V_f = h(\kappa) + \frac{\mathcal{V}_+(w)}{\kappa^2}. \tag{4.26}$$

Burada h, $\hat{L}_d h = 0$ olacak şekilde $\kappa = [A^2 + B^2r^2 + 2ABr\cos(\theta+\phi)]^{1/2}$ 'nın keyfi bir fonksiyonudur ve

$$\mathcal{V}_\pm(w) = f^2(w) \mp (w^2 + B^2)f'(w), \tag{4.27}$$

şeklindedir. Denk.(4.26) düzlem kutupsal koordinatlarda iki boyutlu integrallenebilir ve eşspektrumlu potansiyellerin en genel formunu verir.

Aşağıdaki

$$\hat{T}_1 = \cos\theta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta, \quad \hat{T}_2 = \sin\theta\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\partial_\theta, \quad \hat{J} = \partial_\theta, \tag{4.28}$$

işlemcileri iki boyutlu Öklidyen Lie cebiri $e(2)$'nin aşağıdaki tanım bağıntılarını sağlarlar;

$$[\hat{J},\hat{T}_1] = -\hat{T}_2, \quad [\hat{J},\hat{T}_2] = \hat{T}_1, \quad [\hat{T}_1,\hat{T}_2] = 0. \tag{4.29}$$

Denk.(4.18) ve (4.21)'den yararlanarak $\hat{L}_d$ diferensiyel işlemcisi de bunlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\hat{L}_d = A\sin\phi\hat{T}_1 + A\cos\phi\hat{T}_2 + B\hat{J}. \tag{4.30}$$

Bu da $\hat{\mathcal{L}}_{fi}$ işlemcisinin diferensiyel kısmının $e(2)$'nin elemanı olduğunu gösterir. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ kartezyen koordinatlarına göre $\hat{T}_1 = \partial_x, \hat{T}_2 = \partial_y, \hat{J} = x\partial_y - y\partial_x$ ve $\hat{T}_i^\dagger = -\hat{T}_i, \hat{J}^\dagger = -\hat{J}$ yazılabilir. Bu bağıntılar $(\partial_r)^\dagger = -(r^{-1} + \partial_r), (\partial_\theta)^\dagger = -\partial_\theta$ olduğu göz önünde tutularak (4.28)'den de doğrulanabilir. Denk.(4.15) ve (4.26)'dan $\hat{H}_i$ ve $\hat{H}_f$'nin simetri üreticileri elde edilir;

$$\hat{\mathcal{L}}_{fi}^\dagger\hat{\mathcal{L}}_{fi} = \mathcal{V}_- - \hat{L}_d^2, \quad \hat{\mathcal{L}}_{fi}\hat{\mathcal{L}}_{fi}^\dagger = \mathcal{V}_+ - \hat{L}_d^2.$$

Burada $\hat{L}_d^2$, $e(2)$'nin üreticilerinin en fazla karesel fonksiyonudur.

4.2.4. Bağlaştırım işlemcilerinin inşası

$\hat{\mathcal{L}}_{10}$ ve $\hat{\mathcal{L}}_{21}$ işlemcilerinin diferensiyel kısımlarını elde etmek için Denk.(4.30)'un özel durumları seçilerek (4.13) diyagramının ayakları inşa edilebilir. Bunun için boyutta Öklidyen grup $E(2)$'nin eşlenik (adjoint) etkisi altında $e(2)$'nin yörünge (orbit) yapısından yararlanılır (Miller 1977).

$E(2)$ grubunun en genel

$$\hat{U} = e^{a_0\hat{J}} e^{a_1\hat{T}_1 + a_2\hat{T}_2}, \quad \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1} = e^{-(a_1\hat{T}_1 + a_2\hat{T}_2)} e^{-a_0\hat{J}},$$

üniter işlemcisi tarafından üretilen üniter benzerlik dönüşümü altında (4.17) bağıntısı $\hat{\mathcal{L}}'_{fi} H'_i = H'_f \hat{\mathcal{L}}'_{fi}$ şeklinde dönüşür. Burada $\hat{X}' = \hat{U}\hat{X}\hat{U}^\dagger$, a_i'ler gerçel parametreler ve $\hat{U}^{-1}$, $\hat{U}$'nun tersidir. $\nabla^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2$, $e(2)$'nin Casimir değişmezi olduğundan, $E(2)$'nin eşlenik etkisi altında sadece V_i, V_f ve $\hat{\mathcal{L}}_{fi}$ değişecektir. $\hat{L}_d$ için Denk.(4.30) kullanılırsa, b bir sabit ve $\hat{K}, \hat{M}$ keyfi iki işlemci olmak üzere

$$e^{b\hat{K}} \hat{M} e^{-b\hat{K}} = \hat{M} + b[\hat{K}, \hat{M}] + \frac{b^2}{2!}[\hat{K}, [\hat{K}, \hat{M}]] + \cdots,$$

işlemci özdeşliği kullanılarak

$$\hat{L}'_d = B\hat{J} + e^{a_0\hat{J}}[\hat{T}_1(A\sin\phi - a_2 B) + \hat{T}_2(A\cos\phi + a_1 B)]e^{-a_0\hat{J}},$$

olduğu görülür. $B \neq 0$ ise, $a_1 = -A\cos\phi/B, a_2 = A\sin\phi/B$ seçildiğinde $\hat{L}_d = B\hat{J}$ elde edilir. $B = 0, A \neq 0$ ise $a_0 = \phi$ (veya, $a_0 = -\phi$) seçildiğinde de $\hat{L}_d = A\hat{T}_1$ (veya, $\hat{L}_d = A\hat{T}_2$) elde edilir. Bu nedenle, $E(2)$'nin eşlenik etkisi altında, $e(2)$ cebirinin $\hat{J}$ (öteleme yörüngesi) ve $\hat{T}_2$ (dönme yörüngesi) şeklinde iki yörünge temsilcisine sahip olduğu görülür. $c \neq 0$ için, $\hat{L}_d$ ve $c\hat{L}_d$ aynı yörüngeye ait olduğu için, $\hat{\mathcal{L}}_{10}$ için $\hat{L}_d = \hat{J}$ ve $\hat{\mathcal{L}}_{21}$ için $\hat{L}_d = \hat{T}_2$ seçilebilir. Bu durumda potansiyeller ve L_0, $E(2)$'nin bir eşlenik etkisi farkı ile belirlenmiş olur.

(4.13)'deki diyagramın ilk ayağı $\hat{H}_0 \to \hat{H}_1$ için Denk.(4.21)'de $A = 0, B = 1$ ve $\hat{H}_i = \hat{H}_0$ ve $\hat{H}_f = \hat{H}_1$ alınırsa (4.23-4.24) denklemlerinden $L_0 = f(\theta)$ ve

$$\hat{\mathcal{L}}_{10} = f(\theta) + \partial_\theta, \quad P = V_1 - V_0 = \frac{2}{r^2} f'(\theta), \tag{4.31}$$

olduğu görülür. Burada f, θ'nın keyfi türevlenebilir bir fonksiyonudur. $\nabla^2 L_0 = f''(\theta)/r^2$ olduğu gözönüne alınırsa Denk.(4.25) ve (4.31)'den

$$V_0 = h(r) + \frac{V_-(\theta)}{r^2}, \quad V_1 = h(r) + \frac{V_+(\theta)}{r^2}, \tag{4.32}$$

elde edilir. Burada h, r'nin keyfi türevlenebilir bir fonksiyonu ve

$$V_\pm(\theta) = f^2(\theta) \pm f'(\theta) \tag{4.33}$$

şeklindedir. Böylece (4.13) diyagramının ilk ayağı kurulmuş olur.

İkinci ayak için $B = 0, A = 1$ ve $\hat{H}_i = \hat{H}_1$ seçilerek $\hat{H}_1$'in formu belirlenmiş olarak alınır. Daha sonra $\hat{\mathcal{L}}_{21}\hat{H}_1 = \hat{H}_2\hat{\mathcal{L}}_{21}$ ve $\hat{\mathcal{L}}_{21} = L_0 + \sin\phi\hat{T}_1 + \cos\phi\hat{T}_2$ olacak şekilde $\hat{H}_f = \hat{H}_2$ Hamiltoniyeni aranır. Bu durumda (4.23-4.24) denklemlerinden $L_0 = g(u)$ ve

$$\hat{\mathcal{L}}_{21} = g(u) + \sin(\theta+\phi)\partial_r + \frac{1}{r}\cos(\theta+\phi)\partial_\theta, \tag{4.34}$$

$$P = V_2 - V_1 = 2g'(u), \tag{4.35}$$

elde edilir. Burada g, $u = r\sin(\theta+\phi)$'nun keyfi türevlenebilir bir fonksiyonudur. Artık çözmek için sadece, Denk.(4.25)'den elde edilen

$$\begin{aligned}\partial_u[g^2(u) - g'(u)] &= \sin(\theta+\phi)h'(r)\\ &\quad + \frac{1}{r^3}[\cos(\theta+\phi)V_+'(\theta) - 2\sin(\theta+\phi)V_+(\theta)],\end{aligned} \tag{4.36}$$

denklemi kalır. Burada $\nabla^2 L_0 = g''(u)$ ve (4.32) denkleminin ikincisi kullanılmıştır. Denk.(4.36) her üç Hamiltoniyendeki f, g, h fonksiyonlarının nasıl olması gerektiğini söyleyen tek denklem olduğundan, potansiyellerin son şeklini belirleyen esas denklemdir. Burada tutarlılık koşulu olarak (4.36)'nın sağ tarafının da sadece u'nun bir fonksiyonu olması gerektiğinden bu denklemin herhangi bir çözümü için potansiyeller birbirlerine

$$V_0 = V_1 - \frac{2}{r^2}f'(\theta), \quad V_2 = V_1 + 2g'(u), \quad V_0 = V_2 - 2[g'(u) + \frac{f'(\theta)}{r^2}], \tag{4.37}$$

şeklinde bağlıdır.

4.2.5. Potansiyellerin genel formu

Denk.(4.36)'da h fonksiyonu

$$h = \frac{\lambda_1}{r^2} + \frac{1}{2}\alpha r^2 + a, \tag{4.38}$$

şeklinde seçilerek ve V_+ için

$$\cos(\theta+\phi)V_+'(\theta) - 2\sin(\theta+\phi)V_+(\theta) = 2\lambda_1\sin(\theta+\phi) - \frac{2c}{\sin^3(\theta+\phi)}, \tag{4.39}$$

denklemi postüle edilerek en genel potansiyeller bulunur. (4.38) ve (4.39), u değişkeni için (4.36)'nın sağ tarafını sağlayan en genel çözümlerdir. (4.39) denkleminin genel çözümü ise aşağıdaki gibidir;

$$V_+ = f^2(\theta) + f'(\theta) = \frac{b}{\cos^2(\theta+\phi)} + \frac{c}{\sin^2(\theta+\phi)} - \lambda_1. \tag{4.40}$$

Burada λ_1, b ve c sabitlerdir. (4.38) ve (4.39), Denk.(4.36)'da kullanılırsa $g(u)$ için aşağıdaki Riccati denklemi bulunur;

$$g^2 - g' = \frac{1}{2}\alpha u^2 + \frac{c}{u^2} - \lambda_2, \tag{4.41}$$

(4.32), (4.37), (4.38), (4.40) ve (4.41) ifadeleri kullanılarak karşı gelen potansiyeller aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{1}{r^2}[\frac{b}{\cos^2(\theta+\phi)} + \frac{c}{\sin^2(\theta+\phi)}] + \frac{2(f^2+\lambda_1)}{r^2} + a, \\
V_1 &= \frac{1}{2}\alpha r^2 + \frac{1}{r^2}[\frac{b}{\cos^2(\theta+\phi)} + \frac{c}{\sin^2(\theta+\phi)}] + a, \\
V_2 &= \frac{1}{2}\alpha r^2 \cos 2(\theta+\phi) + \frac{1}{r^2}[\frac{b}{\cos^2(\theta+\phi)} - \frac{c}{\sin^2(\theta+\phi)}] + 2(g^2 + \lambda_2 + \frac{a}{2}).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Burada V_1 potansiyeli kartezyen, düzlem kutupsal ve eliptik koordinatlarda değişkenlerine ayrılmayı kabul eden 2-boyutlu Smorodinsky-Winternitz potansiyellerinden biridir ve bu potansiyel tüm ailede sabitlendiğinden tüm potansiyellerin spektrumlarını belirler. V_0 düzlem kutupsal koordinatlarda ayrışabilir iken, V_2 sadece kartezyen koordinatlarda ayrışabilirdir. V_0 ve V_2 Denk.(4.40) ve (4.41)'i sağlayan f ve g fonksiyonlarıyla üretilen eşspektrumlu ve süperintegrallenebilir potansiyellerin iki ailesini temsil eder. Normalize edilebilir özfonksiyonlar, karşı gelen özdeğerler ve simetri üreticileri sonraki üç kesimde incelenecektir.

Potansiyellerin en genel formları belirlendiğine göre bunlar arasındaki hiyerarşiler de kurulabilir.

(4.40) ve (4.41)'deki Riccati denklemlerini çizgisel hale getirmek için,

$$f(\theta) = \frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}, \quad g(u) = -\frac{\Psi'(u)}{\Psi(u)}, \tag{4.43}$$

ifadeleri kullanılırsa aşağıdaki gibi iki tane 1-boyutlu Schrödinger denklemi elde edilir;

$$\hat{H}_{PT}\psi_k(\theta) = \lambda_{1,k}\psi_k(\theta), \quad \hat{H}_{SO}\Psi_n(u) = \lambda_{2,n}\Psi_n(u). \tag{4.44}$$

Burada k ve n mümkün kuantum sayıları, $\hat{H}_{PT}$ ve $\hat{H}_{SO}$ ise genelleştirilmiş Pöschl-Teller (PT) ve singüler salınıcı (SO) Hamiltoniyenleridir;

$$\hat{H}_{PT} = -\frac{d^2}{d\theta^2} + V_{PT}, \qquad V_{PT} = \frac{b}{\cos^2(\theta+\phi)} + \frac{c}{\sin^2(\theta+\phi)}, \tag{4.45}$$

$$\hat{H}_{SO} = -\frac{d^2}{du^2} + V_{SO}, \qquad V_{SO} = \frac{1}{2}\alpha u^2 + \frac{c}{u^2}. \tag{4.46}$$

Denk.(4.37) ve (4.43) kullanılarak potansiyeller yeniden yazılabilir;

$$V_0^{(k)} = V_1 - \frac{2}{r^2}\partial_\theta^2 \ln \psi_k(\theta), \quad V_2^{(n)} = V_1 - 2\partial_u^2 \ln \Psi_n(u). \tag{4.47}$$

Burada potansiyeller, onları üreten ilişkili bir boyutlu problemlerin kuantum sayıları ile etiketlenmiştir. Denk.(4.47)'den $V_0^{(k)}$ ve $V_2^{(n)}$ potansiyellerinin V_1 potansiyelinden Darboux tipi dönüşümlerle üretildiği görülür. Bu dönüşümleri üreten fonksiyonlar ilişkili bir boyutlu problemlerin özfonksiyonlarıdır. Bu iki boyutlu problemler için Darboux dönüşümlerinin bir genişletmesini kurar.

Yukarıdaki 1-boyutlu problemlerin herhangi bir çözümü potansiyeller üretmekte kullanılabilir. Fakat literatürden kolayca ulaşılabilir sonuçlar olarak bu problemlerin sadece normalize edilebilir çözümleri aşağıda verilmiştir. Bundan sonra $\phi = 0$ alınmış ve Kes.4.2.6 ve 4.2.8'de $2m/\hbar^2$ notasyona dahil edilmiştir.

4.2.6. İlişkili problemler ve V_1'in bağlı durumları

$c \geq -1/4$ olmak üzere, $\hat{H}_{SO}$'nun $L^2(0,\infty)$ Hilbert uzayına ait bağlı durumları aşağıdaki gibidir (Fris vd. 1965, Winternitz vd. 1967, Lathouvers 1975, Perelomov 1986);

$$\Psi_n^\varepsilon(u) = N_n^{SO} u^{\frac{1}{2}+\varepsilon\nu} e^{-\beta^2 u^2/2} L_n^{\varepsilon\nu}(\beta^2 u^2),$$
$$E_n^\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\lambda_{2,n}^\varepsilon = \hbar\omega(2n+\varepsilon\nu+1), \quad n = 0,1,2,..., \tag{4.48}$$

$$N_n^{SO} = [\frac{n!2\beta^{2(1+\varepsilon\nu)}}{\Gamma(n+\varepsilon\nu+1)}]^{1/2}, \qquad \nu = \frac{1}{2}(1+4c)^{1/2}.$$

Burada N_n^{SO} normalizasyon sabitini, $L_n^{\varepsilon\nu}(z)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomlarını ve Γ Gamma fonksiyonunu gösterir. $\beta = (m\omega/\hbar)^{1/2} = (\alpha/2)^{1/4}$ olup $(uzunluk)^{-1}$ boyutundadır ve $\varepsilon = \pm$'dir. $\Psi_n^\varepsilon(u)$'lar $\varepsilon\nu > -1$ için geçerli olan diklik bağıntılarını sağlarlar (Magnus vd. 1966);

$$\int_0^\infty \Psi_n^\varepsilon(u)\Psi_{n'}^\varepsilon(u)du = \delta_{nn'}. \tag{4.49}$$

Bu ifade $c \in I = [-1/4, 3/4)$ için (yani $-1/4 \leq c < 3/4$ için) $\varepsilon = \pm$ değerlerinin her ikisinin ve $c \geq 3/4$ için sadece $\varepsilon = +$'nın her n değeri için kullanılabilmesini gerektirir. Üretilen potansiyeller ilişkili bir boyutlu problemlerin normalizasyon sabitlerine bağlı olmamasına rağmen ifadelerin tam olması için bunlar yazılmıştır.

$\hat{H}_{SO}$'nun parite değişmez olduğu gerçeğine uygun olarak $L^2(-\infty,\infty)$ Hilbert uzayına ait $\hat{H}_{SO}$'nun belirli pariteli durumları aşağıdaki gibidir (Lathouvers 1975);

$$\Psi_n^\varepsilon(u) = \frac{1}{2^{1/2}}N_n^{SO}\begin{cases} |u|^{\frac{1}{2}+\varepsilon\nu}e^{-\beta^2u^2/2}L_n^{\varepsilon\nu}(\beta^2u^2); & u \geq 0 \ \ icin, \\ -\varepsilon|u|^{\frac{1}{2}+\varepsilon\nu}e^{-\beta^2u^2/2}L_n^{\varepsilon\nu}(\beta^2u^2); & u < 0 \ \ icin. \end{cases} \tag{4.50}$$

Bunlar aşağıdaki diklik bağıntısını sağlarlar;

$$\int_{-\infty}^\infty \Psi_n^\varepsilon(u)\Psi_{n'}^{\bar\varepsilon}(u)du = \delta_{nn'}\delta_{\varepsilon\bar\varepsilon}. \tag{4.51}$$

Burada $\varepsilon, \bar\varepsilon$'ler $\pm$ olabilir. $\varepsilon = \bar\varepsilon$ için (4.51) genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının dikliğinden ve $\varepsilon \neq \bar\varepsilon$ için (4.50)'den doğrulanabilen parite ilişkilerinden çıkar (Magnus 1966). Karşı gelen enerji özdeğerleri ise (4.48) ile verilir. $c < -1/4$ için enerji özdeğerleri alttan sınırlı değildir, bu da "parçacığın merkeze düştüğünü" ve fiziksel yorumun olmadığını ifade eder (Lathouvers 1975, Fuchs 1986). $c \to 0, \nu \to 1/2$ iken $\Psi_n^\varepsilon(u)$'ler $\varepsilon = +$ için tek, $\varepsilon = -$ için çift pariteli harmonik salınıcı dalga fonksiyonları olur. Bu da Hermite ve Laguerre polinomları arasındaki ilişkiden çıkar (Lathouvers 1975, Magnus 1966). Enerji özdeğerlerinin limitleri ise (4.48)'den görülebilir.

V_1'in normalize edilmiş özfonksiyonları ve karşı gelen özdeğerleri yeniden yazılabilir;

$$\Psi_\ell^{(1)\bar\varepsilon\varepsilon}(x,y) = \Psi_{n_1}^{\bar\varepsilon}(x)\Psi_{n_2}^{\varepsilon}(y),$$

$$E_\ell^{\bar{\varepsilon}\varepsilon} = E_{n_1}^{\bar{\varepsilon}} + E_{n_2}^{\varepsilon} = \hbar\omega(2\ell + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + \varepsilon\nu + 1), \tag{4.52}$$
$$\ell = n_1 + n_2, \qquad \ell, n_1, n_2 = 0, 1, 2, ...$$

Burada $\bar{\nu} = (1 + 4b)^{1/2}/2$'dir. $\Psi_{n_1}^{\bar{\varepsilon}}(x), \Psi_{n_2}^{\varepsilon}(y)$ ve $E_{n_1}^{\bar{\varepsilon}}, E_{n_2}^{\varepsilon}$'ler parametrelerin ve değişkenlerin uygun yerdeğiştirmesiyle (4.48) (veya (4.50)) ile verilir. Buradan $b, c \geq -1/4$ için V_1'in bağlı durumları olduğu sonucu çıkar. $b, c \in I$ için ℓ'nin herbir değeri için dört farklı durum vardır; $b \in I$ $, c \geq 3/4$ veya $c \in I, b \geq 3/4$ durumunda ℓ'nin her değeri için iki farklı durum ve $b, c \geq 3/4$ için de bir durum vardır. Herbir durumda ℓ'nin verilen bir değeri için $E_\ell^{\bar{\varepsilon}\varepsilon}$ enerjili bir durum $(\ell+1)$-kere dejeneredir. Eğer orjinde dalga fonksiyonunun sürekli olmasına ihtiyaç duyulursa $I = [-1/4, 3/4)$ aralığı ve $b, c \geq 3/4$ koşulları, $I = [-1/4, 0]$ ve $b, c \geq 0$ olarak yerdeğiştirilir.

Singüler salınıcı problemi $su(1,1) = \{\hat{J}_0, \hat{J}_\pm : [\hat{J}_0, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm, [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = -2\hat{J}_0\}$ spektrum üreten cebirine sahiptir (Perelomov 1986, Letourneau vd. 1995);

$$\hat{J}_0 = \frac{\hat{H}_{SO}}{4\beta^2}, \quad \hat{J}_\pm = -\frac{1}{4}[\beta^2(u \mp \beta^{-2}\partial_u)^2 - \frac{c}{\beta^2 u^2}]. \tag{4.53}$$

Burada Casimir değişmezi $C^2 = -\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_0^2 - \hat{J}_0 = (4c-3)/16$ şeklindedir. Bu nedenle sonraki kesimde gösterileceği gibi $\hat{H}_1$-probleminin simetri cebiri, spektrum üreten cebir olarak $su(1,1)$ cebirinin bu şekilde iki sıra değişen kopyalarıyla ilişkilidir.

Düzlem kutupsal koordinatlarda $\hat{H}_1$-probleminin çözümüyle ilişkili olarak $\hat{H}_{PT}$-problemi düşünülürse, $\Psi^{(1)}(r,\theta) = R_{k_1}(r)\psi_k(\theta)$ alınarak $\hat{H}_1$'in özdeğer denklemi (4.44) ile verilen Pöschl-Teller problemine ve aşağıdaki radyal denkleme ayrılır;

$$[-(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}) + \rho^2 + \frac{\lambda_{1,k}}{\rho^2}]R_{k_1}(\rho) = \lambda R_{k_1}(\rho). \tag{4.54}$$

Burada $\rho = \beta r$ ve $\lambda = E/\beta^2$'dir. $v = \sin^2\theta$ ve $\psi_k(\theta) = v^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\varepsilon\nu)}(1-v)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\bar{\varepsilon}\bar{\nu})}F(v)$ ifadesine göre $\hat{H}_{PT}$'nin özdeğer denklemi $F(v)$ için aşağıdaki hipergeometrik denklemi verir;

$$v(1-v)\frac{d^2F}{dv^2} + [\zeta - v(\gamma + \eta + 1)]\frac{dF}{dv} - \gamma\eta F = 0.$$

Bu denklemin genel çözümü ise

$$F(v) = A\,{}_2F_1(\gamma, \eta; \zeta; v) + Bv^{1-\zeta}{}_2F_1(\gamma - \zeta + 1, \eta - \zeta + 1; 2 - \zeta; v),$$

şeklindedir. Burada A ve B keyfi sabitler, ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyon ve

$$\gamma = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon\nu + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + \sqrt{\lambda_{1,k}}), \quad \eta = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon\nu + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} - \sqrt{\lambda_{1,k}}), \quad \zeta = 1 + \varepsilon\nu.$$

şeklindedir. Normalize edilebilir çözümler için $B = 0$ ve γ (veya η) negatif bir tamsayı, mesela $-k$ olmalıdır. Bu durumda hipergeometrik fonksiyon $P_k^{(\varepsilon\nu,\bar{\varepsilon}\bar{\nu})}(1-2v)$ Jacobi polinomlarına dönüşür ve sonuçta özdeğerler ve özfonksiyonlar aşağıdaki gibi yazılabilir (Flügge 1974, Evans 1990, Evans 1991);

$$\psi_k(\theta) = N_k^{PT} \sin^{\frac{1}{2}+\varepsilon\nu}\theta \cos^{\frac{1}{2}+\bar{\varepsilon}\bar{\nu}}\theta P_k^{(\varepsilon\nu,\bar{\varepsilon}\bar{\nu})}(\cos 2\theta),$$

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}\lambda_{1,k} = \frac{\hbar^2}{2m}(2k + \varepsilon\nu + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + 1)^2, \qquad k = 0, 1, 2, ..., \tag{4.55}$$

$$N_k^{PT} = [\frac{2(2k + \varepsilon\nu + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + 1)\Gamma(k+1)\Gamma(k + \varepsilon\nu + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + 1)}{\Gamma(k + \varepsilon\nu + 1)\Gamma(k + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + 1)}]^{1/2}.$$

$\lambda_{1,k} = (2k+\varepsilon\nu+\bar{\varepsilon}\bar{\nu}+1)^2$ ifadesi Denk.(4.54)'de kullanılarak $R_{k_1}(\rho) = \rho^{\mu}e^{-\rho^2/2}G_{k_1}(\rho)$ çözümleri denenirse $\mu = \sqrt{\lambda_{1,k}} = (2k + \varepsilon\nu + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + 1)$ için

$$z\frac{d^2G_{k_1}}{dz^2} + (\mu + 1 - z)\frac{dG_{k_1}}{dz} - \frac{1}{4}[2(\mu+1) - \lambda]G_{k_1} = 0, \tag{4.56}$$

elde edilir. Burada $z = \rho^2$'dir. $-[2(\mu + 1) - \lambda]/4$ ifadesinin tamsayı, mesela $k_1 = 0, 1, 2, ...$ olması koşuluyla Denk.(4.56)'nın çözümleri genelleştirilmiş Laguerre polinomlarıdır. Buradan da radyal çözümler;

$$R_{k_1}(\rho) = N_{k_1}\rho^{\mu}e^{-\rho^2/2}L_{k_1}^{\mu}(\rho^2), \quad N_{k_1} = [\frac{2\Gamma(k_1+1)}{\Gamma(k_1+\mu+1)}]^{1/2}, \tag{4.57}$$

şeklinde bulunur. $\psi_k(\theta)$ ve $R_{k_1}(\rho)$ fonksiyonları aşağıdaki diklik bağıntılarını sağlarlar;

$$\int_0^{\infty} R_{k_1}(\rho)R_{k_1'}(\rho)rdr = \delta_{k_1k_1'}, \qquad \int_0^{\pi/2} \psi_k(\theta)\psi_{k'}(\theta)d\theta = \delta_{kk'}. \tag{4.58}$$

Sonuç olarak $\hat{H}_1$'in özfonksiyonları düzlem kutupsal koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\Psi_{\ell}^{(1)\bar{\varepsilon}\varepsilon}(r,\theta) = N_{k_1}N_{k_2}^{PT}(\beta r)^{\mu}e^{-\beta^2r^2/2}\sin^{\frac{1}{2}+\varepsilon\nu}\theta\cos^{\frac{1}{2}+\bar{\varepsilon}\bar{\nu}}\theta L_{k_1}^{\mu}(\beta^2r^2)P_{k_2}^{(\varepsilon\nu,\bar{\varepsilon}\bar{\nu})}(\cos 2\theta). \tag{4.59}$$

Burada $\ell = k_1 + k_2; \ell, k_1, k_2 = 0,1,2,...$, ve $\mu = (2k_2 + \varepsilon\nu + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + 1)$'dir. (4.55)'de verilen $\psi_k(\theta)$ fonksiyonu $V_0^{(k)}$ potansiyellerini üretirken kullanılacağı için, (4.59) ifadesi yazılırken k kuantum sayısı k_2 olarak değiştirilmiştir. Benzer bir değişim $(n \to n_2)$ (4.52)'de kullanılmıştır. $-[2(\mu+1) - \lambda]/4 = k_1$ koşulu da V_1-problemi için $\ell = k_1 + k_2$ olmak üzere (4.52)'deki özdeğeri verir. Denk.(4.50)'deki gibi (4.59) çözümleri iki boyutlu $(r,\theta) \to (r, \theta+\pi)$ parite dönüşümü altında belirli pariteye sahip olsun diye tüm xy-düzlemine genişletilebilir.

(4.47)'de ψ_k ve Ψ_n yerine konulursa k ve n kuantum sayıları ile etiketlendirilen potansiyellerin açık ifadeleri elde edilebilir. Bundan sonraki kesimde simetri üreticileri ele alındıktan sonra $V_0^{(k)}$ ve $V_2^{(n)}$'in bağlı durumları Kes.4.2.8'de ele alınacaktır.

4.2.7. Simetri üreticileri ve cebirleri

Önceki iki kesimde görüldüğü gibi bağlaştırım işlemcileri, simetri üreticileri ve $\hat{H}_0, \hat{H}_2$ Hamiltoniyenleri ilişkili potansiyellerin (k,n) kuantum sayıları ile etiketlenir. Etiketlenmiş bağlaştırım işlemcileri $e(2)$'nin üreticileri cinsinden yazılabilir;

$$\hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)} = f_k(\theta) + \hat{J}, \qquad \hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger} = f_k(\theta) - \hat{J},$$
$$\hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)} = g_n(u) + \hat{T}_2, \quad \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)\dagger} = g_n(u) - \hat{T}_2. \tag{4.60}$$

Bu işlemciler

$$[\hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)}, \hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger}] = 2f_k'(\theta), \qquad [\hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)}, \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)\dagger}] = 2g_n'(u),$$
$$[\hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)}, \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)}] = \hat{K}_-^{(k,n)} + \hat{T}_1, \quad [\hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger}, \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)\dagger}] = -\hat{K}_-^{(k,n)} + \hat{T}_1, \tag{4.61}$$
$$[\hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)}, \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)\dagger}] = \hat{K}_+^{(k,n)} - \hat{T}_1, \quad [\hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger}, \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)}] = -\hat{K}_+^{(k,n)} - \hat{T}_1.$$

sıradeğişim bağıntılarını sağlarlar. Burada

$$\hat{K}_\pm^{(k,n)} = r\cos\theta[g_n'(u) \pm \frac{1}{r^2} f_k'(\theta)],$$

şeklinde tanımlı olup, (4.37)'den

$$\hat{K}_+^{(k,n)} = \frac{1}{2} r\cos\theta[\hat{H}_2^{(k)} - \hat{H}_0^{(n)}], \qquad \hat{K}_-^{(k,n)} = \frac{1}{2} r\cos\theta[\hat{H}_0^{(k)} + \hat{H}_2^{(n)} - 2\hat{H}_1], \tag{4.62}$$

yazılabilir. Böylece $\hat{H}_1$'in simetri üreticileri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\hat{X}_1^{(k)} = \hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)}\hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger} = \hat{H}_{PT} - \lambda_{1,k}, \tag{4.63}$$

$$\hat{Y}_1^{(n)} = \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)\dagger}\hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)} = \hat{H}_{SO} - \lambda_{2,n}. \tag{4.64}$$

Burada $\hat{T}_2 g_n(u) = g_n'(u)$ kullanılmıştır. $\hat{H}_0^{(k)}$ and $\hat{H}_2^{(n)}$'nin ikinci mertebeden simetri üreticileri ise

$$\hat{X}_0^{(k)} = \hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger}\hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)} = V_-^{(k)} - \hat{J}^2 = \hat{H}_{PT}^{(k)} - \lambda_{1,k}, \tag{4.65}$$

$$\hat{X}_2^{(n)} = \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)}\hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)\dagger} = g_n^2 + g_n' - \hat{T}_2^2 = \hat{H}_{SO}^{(n)} - \lambda_{2,n}, \tag{4.66}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\hat{H}_{PT}^{(k)} = -\frac{d^2}{d\theta^2} + V_{PT} - 2\partial_\theta^2 \ln \psi_k(\theta), \tag{4.67}$$

$$\hat{H}_{SO}^{(n)} = -\frac{d^2}{du^2} + V_{SO} - 2\partial_u^2 \ln \Psi_n(u), \tag{4.68}$$

olup bunlar $\hat{H}_{PT}$ ve $\hat{H}_{SO}$'nun süpereşleri olarak bilinirler. Sonuçta bir boyutlu ilişkili problemlerin Hamiltoniyenleri, bir sabit farkıyla, $\hat{H}_1$'in ikinci mertebeden simetri üreticileri ve bunların süpereşleri de $\hat{H}_0^{(k)}$ ve $\hat{H}_2^{(n)}$'nin ikinci mertebeden simetri üreticileridir. $\hat{X}_1^{(k)}$, $\hat{Y}_1^{(n)}$ ve $\hat{X}_0^{(k)}$, $\hat{X}_2^{(n)}$'de ilave sabitler olarak $\lambda_{1,k}$ ve $\lambda_{2,n}$'nin varlığı $\hat{H}_1$'in süperintegrallenebilirliği gözönüne alındığında gereksiz gibi görünür.

Geri kalan dördüncü mertebeden üreticilerin en basit formları ikinci mertebeden üreticilerin (4.15) ile verilen çarpanlara ayrılmış halleridir.

Burada kullanılan yaklaşımın üstünlüklerinden biri de simetri üreticileri ile bunlara karşı gelen Hamiltoniyenin sıra değişebilirliğinin, başlangıçtan itibaren garantilenmiş olmasıdır. Buna karşın sonuçları doğrulamak için

$$[\hat{H}_1, \hat{X}_1^{(k)}] = 0 = [\hat{H}_1, \hat{Y}_1^{(k)}], \qquad k = 0, 1, ..., \tag{4.69}$$

bağıntılarını doğrulamak kolaydır; çünkü $\hat{X}_1^{(k)}$ ve $\hat{Y}_1^{(k)}$, $\hat{H}_1$'in farklı koordinat sistemlerinde ayrışımından ortaya çıkarlar. Bunun yanısıra (4.63-4.68) denklemlerinden aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$\hat{X}_0^{(k)} = \hat{X}_1^{(k)} - 2\partial_\theta^2 \ln \psi_k(\theta), \qquad \hat{X}_2^{(n)} = \hat{Y}_1^{(n)} - 2\partial_u^2 \ln \Psi_n(u).$$

Buradan da $\hat{H}_0^{(k)}$ ve $\hat{H}_2^{(n)}$'nin ikinci mertebeden simetri üreticilerinin, $\hat{H}_1$'in simetri üreticilerinin Darboux dönüşümleri olduğu görülür. Bu nedenle

$$[\hat{H}_0^{(k)}, \hat{X}_0^{(k)}] = 0 = [\hat{H}_2^{(n)}, \hat{X}_2^{(n)}], \qquad n, k = 0, 1, ..., \tag{4.70}$$

bağıntıları da Denk.(4.69)'un sonucudur. Dördüncü mertebeden simetri üreticileri için

$$[\hat{H}_0^{(k)}, \hat{Y}_0^{(k,n)}] = 0 = [\hat{H}_2^{(n)}, \hat{Y}_2^{(k,n)}], \qquad n, k = 0, 1, ..., \tag{4.71}$$

ifadelerinin doğrudan kontrol edilmesi oldukça uzun zaman alır. Bu da üreticilerin sıra değişimini göstermek için büyük bir çaba gerektiren geleneksel metodla kıyaslandığında burada kullanılan metodun daha kullanışlı olduğunu gösterir.

Yüksek mertebeden türevler ve çarpımları sağ tarafta görüneceği için $[\hat{X}_j, \hat{Y}_j] \neq 0, j = 0, 1, 2$ olduğu doğrulanabilir ve bu nedenle herbir potansiyelin simetri üreticileri sonlu boyutlu bir Lie cebiri yapısında kapanmaz. Bunun yanısıra Jacobi özdeşliğinden dolayı $Z = [\hat{X}_j^{()}, \hat{Y}_2^{()}], (j = 0, 1, 2)$ de bir simetri üreticisidir, fakat $\hat{X}_j$ ve $\hat{Y}_j$'ye cebirsel olarak bağlıdır.

$\hat{H}_1$'in simetri cebirini ifade etmenin bir başka yolu da

$$\hat{X}_\pm = \frac{1}{4\beta^2}(-\partial_x^2 \pm \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{b}{x^2}), \quad \hat{D}_1 = \frac{1}{4}(1 + x\partial_x), \tag{4.72}$$

$$\hat{Y}_\pm = \frac{1}{4\beta^2}(-\partial_y^2 \pm \frac{1}{2}\alpha y^2 + \frac{c}{y^2}), \quad \hat{D}_2 = \frac{1}{4}(1 + y\partial_y), \tag{4.73}$$

şeklinde üreticiler tanımlamaktır. Bunlar aşağıdaki Lie cebiri yapısını sağlarlar;

$$[\hat{X}_\pm, \hat{D}_1] = \hat{X}_\mp, \quad [\hat{X}_+, \hat{X}_-] = \hat{D}_1, \tag{4.74}$$

$$[\hat{Y}_\pm, \hat{D}_2] = \hat{Y}_\mp, \quad [\hat{Y}_+, \hat{Y}_-] = \hat{D}_2. \tag{4.75}$$

Bu Lie cebirinin Casimir değişmezleri

$$\hat{X}_+^2 - \hat{X}_-^2 + \hat{D}_1^2 = \frac{4b-3}{16}, \quad \hat{Y}_+^2 - \hat{Y}_-^2 + \hat{D}_2^2 = \frac{4c-3}{16}, \tag{4.76}$$

şeklindedir. Denk.(4.72) ve (4.73)'den

$$\hat{H}_1 = 4\beta^2(\hat{X}_+ + \hat{Y}_+),$$

$$\hat{X}_1^{(k)} = 8(\hat{X}_+\hat{Y}_+ - \hat{X}_-\hat{Y}_- + \hat{D}_1\hat{D}_2) + K, \tag{4.77}$$
$$\hat{Y}_1^{(n)} = 4\beta^2\hat{Y}_+ - \lambda_{2,n},$$

olduğu görülür. Burada $K = b + c - \lambda_{1,k} - (1/2)$'dir. (4.74)-(4.76) denklemleri $su(1,1) \oplus su(1,1)$ şeklinde bir direkt toplam olarak yazılabilen bir $su(1,1)$ cebirinin iki tane sıra değişen kopyalarının tanım bağıntılarıdır. Denk.(4.72) ve (4.73) ile verilen bazlar Kes.4.2.6'da bahsedilen çizgisel dönüşümlerle ilişkilidir. Burada (4.53) ve (4.73) karşılaştırılırsa $\hat{Y}_+ = \hat{J}_0, \hat{Y}_- \pm \hat{D}_2 = \hat{J}_\mp$ olduğu görülür. (4.77) $\hat{H}_1$'in üreticilerinin $su(1,1) \oplus su(1,1)$ cebirinin merkezi olarak genişletilmiş üreticilerine göre karesel (K sabitinden dolayı) olduğunu gösterir.

Şimdi

$$\hat{W}^{(k,n)} \equiv \frac{1}{8}[\hat{X}_1^{(k)}, \hat{Y}_1^{(n)}] = 4\beta^2(\hat{X}_-\hat{D}_2 - \hat{Y}_-\hat{D}_1),$$

tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
[\hat{X}_1^{(k)}, \hat{W}^{(k,n)}] &= \{\hat{X}_1^{(k)}, \hat{Y}_1^{(n)}\} + \hat{X}_1^{(k)}(2\lambda_{2,n} - \hat{H}_1) \\
&+ (2\hat{Y}_1^{(n)} + 2\lambda_{2,n} - \hat{H}_1)(\lambda_{1,k} - 1) + \hat{H}_1(b - c), \\
[\hat{Y}_1^{(n)}, \hat{W}^{(k,n)}] &= (\hat{Y}_1^{(n)} + \lambda_{2,n})(\hat{H}_1 - \hat{Y}_1^{(n)} - \lambda_{2,n}) - 2\beta^4(\hat{X}_1^{(k)} - K),
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $\{,\}$ anti-komütatör anlamındadır. Bunlar da açıkca $\{\hat{H}_1, \hat{X}_1^{(k)}, \hat{Y}_1^{(n)}, \hat{W}^{(k,n)}\}$ tarafından gerilen $\hat{H}_1$'in genişletilmiş simetri cebirinin, k, n'nin tüm değerleri için bir karesel birleşmeli cebirde (quadratic associative algebra) kapandığını gösterir. Bu cebir merkezi olarak genişletilmiş $su(1,1) \oplus su(1,1)$'in zarf cebirinde bir kübik birleşmeli cebirdir. Son zamanlarda böyle sonlu olarak üretilmiş cebirler ilgi çekmektedirler.

4.2.8. $\hat{H}_0^{(k)}, \hat{H}_2^{(n)}$'nin bağlı durumları ve dejenerelikleri

(4.48) ve (4.52) ile verilen $\Psi^{\bar{\varepsilon}}_{n_1}, \Psi^{\varepsilon}_{n_2}$ve $\Psi^{(1)\bar{\varepsilon}\varepsilon}_{\ell}$, Dirac notasyonunda sırasıyla $|n_1\bar{\varepsilon}>$, $|n_2\varepsilon>$ ve $|1;\ell\bar{\varepsilon}\varepsilon>$ ketleri ile temsil edildiğinde (4.52) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$|1;\ell\bar{\varepsilon}\varepsilon> = |n_1\bar{\varepsilon}>|n_2\varepsilon>, \quad \ell = n_1 + n_2. \tag{4.78}$$

Bu notasyonda $\hat{H}_2^{(n)}$'e karşı gelen eşspektrumlu durumlar

$$|2n;\ell\bar{\varepsilon}\varepsilon> = \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)}|1;\ell\bar{\varepsilon}\varepsilon>,$$

şeklindedir. (4.49) (veya (4.51)), (4.52), (4.64) ve (4.78)'den aşağıdaki ifade kolaylıkla gösterilebilir;

$$\begin{aligned} < 2n; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon | 2n; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon > &= < 1; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon | \hat{Y}_1^{(n)} | 1; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon >, \\ &= < n_2\varepsilon | \hat{H}_{SO} | n_2\varepsilon > - \lambda_{2,n}, \\ &= 2\hbar\omega(n_2 - n). \end{aligned} \tag{4.79}$$

Burada $< \cdot | \cdot >$ ifadesi $\mathcal{H} = L^2(R^2)$'nin bilinen iç çarpımını temsil eder. Üçüncü satırda $2m/\hbar^2$ notasyona dahil edilmiştir. $\ell = n_1 + n_2$ olduğundan $\hat{H}_2^{(n)}$in spektrumunda fiziksel olarak kabul edilebilir durumlar olarak sadece $\ell > n$ durumlarının kalacağı görülür. Bunun yanısıra $n_2 \leq n$'e karşı gelen durumlar normalize edilemediği için geriye kalan durumların dejenerelikleri $\ell - n$ olur. Sonuç olarak, $\ell = n_1 + n_2$ ve $n_2 > n$ olması koşuluyla, $\hat{H}_2^{(n)}$'nin normalize edilmiş durumları aşağıdaki gibidir;

$$|2n; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon >= [2\hbar\omega(n_2 - n)]^{-1/2} \hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)} |1; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon > . \tag{4.80}$$

Benzer şekilde, (4.55) ve (4.57) ile verilen ψ_{k_2}ve R_{k_1}'ler sırasıyla $|k_2\bar{\varepsilon}\varepsilon >$ ve $|k_1\bar{\varepsilon}\varepsilon >$ ketleri ile temsil edildiğinde, (4.59) ile verilen durumlar

$$|1; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon >= |k_1\bar{\varepsilon}\varepsilon > |k_2\bar{\varepsilon}\varepsilon >, \qquad \ell = k_1 + k_2, \tag{4.81}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $\hat{H}_0^{(k)}$'ya karşı gelen eşspektrumlu durumlar $|0k; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon >= \hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger} |1; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon >$ olur. (4.58), (4.63) ve (4.81)'den

$$\begin{aligned} < 0k; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon | 0k; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon > &= < 1; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon | \hat{X}_1^{(k)} | 1; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon >, \\ &= < k_2\bar{\varepsilon}\varepsilon | \hat{H}_{PT} | k_2\bar{\varepsilon}\varepsilon > - \lambda_{1,k}, \\ &= \frac{2\hbar^2}{m}(k_2 - k)(k + k_2 + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + \varepsilon\nu + 1), \end{aligned} \tag{4.82}$$

yazılabilir. Böylece, $\ell = k_1 + k_2$ ve $k_2 > k$ olması koşuluyla $\hat{H}_0^{(k)}$'nın normalize edilmiş durumları bulunur;

$$|0k; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon >= [\frac{2\hbar^2}{m}(k_2 - k)(k + k_2 + \bar{\varepsilon}\bar{\nu} + \varepsilon\nu + 1)]^{-1/2} \hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger} |1; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon > . \tag{4.83}$$

Bu durumda $|0k; \ell\bar{\varepsilon}\varepsilon >$ durumlarının dejenereliği $\ell - k$'dır. (4.81) ve (4.83)'de verilen durumların açık fonksiyonel realizasyonu $\hat{\mathcal{L}}_{21}^{(n)}, \hat{\mathcal{L}}_{10}^{(k)\dagger}$ işlemcilerini (4.52) ve (4.59) ile verilen dalga fonksiyonlarına uygulayarak elde edilebilir.

5. FAZ-UZAYINDA BAĞLAŞTIRIM METODU

Bu bölümde bağlaştırım metodundan yararlanarak WWGM kuantizasyonu ile de tam çözülebilir sistemler hiyerarşisinin kurulabileceği gösterilecektir.

5.1. Bağlaştırım Metodu

Bir faz-uzayında tanımlı H_0 ve H_1 gibi gerçel iki Hamilton fonksiyonu arasında

$$\mathcal{L} \star H_0 = H_1 \star \mathcal{L}, \tag{5.1}$$

bağıntısı var ise bunlara bağlaştırılmışlardır denecektir. (5.1) bağlaştırım bağıntısının faz-uzayındaki formülasyonudur. Bu ifadenin eşleniği alındıktan sonra (2.12) kullanılırsa $\bar{\mathcal{L}}$ fonksiyonun diğer yönde bağlaştırım yaptığı görülür;

$$H_0 \star \bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}} \star H_1. \tag{5.2}$$

Böylece faz-uzayında, bağlaştırım metodunun kullanışlı olmasının temelindeki özellikler aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

(i) W_0, H_0'ın E_0 özdeğerli bir $\star$-özfonksiyonu ise ($\mathcal{L} \star W_0 \neq 0$ olmak şartıyla)

$$W_1 = \mathcal{L} \star W_0 \star \bar{\mathcal{L}}, \tag{5.3}$$

fonksiyonu da H_1'in aynı E_0 özdeğerine karşı gelen (normalize edilmemiş) bir $\star$-özfonksiyonudur. Tersine; W_1, H_1'in E_0 özdeğerli $\star$-özfonksiyonu ise

$$W_0 = \bar{\mathcal{L}} \star W_1 \star \mathcal{L} \tag{5.4}$$

fonksiyonu da H_0'ın E_0 özdeğerli özfonksiyonudur. Böylece bağlaştırım fonksiyonları faz-uzayında çözülebilir bir problemi bir başkasına dönüştürür.

(ii) W_0 gerçel ise W_1 de gerçeldir.

(iii) (5.1) ve (5.2) bağıntılarından kolaylıkla doğrulanabileceği gibi $\bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L}$ ve $\mathcal{L} \star \bar{\mathcal{L}}$'in sırasıyla H_0 ve H_1 ile Moyal parantezleri sıfırdır;

$$\{H_0, \bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L}\}_M = 0 = \{H_1, \mathcal{L} \star \bar{\mathcal{L}}\}_M.$$

Yani $\bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L}$ ve $\mathcal{L} \star \bar{\mathcal{L}}$ (ilişkili Hamiltoniyenlerden farklı iseler) onların birer simetri fonksiyonlarıdır.

(iv) $\bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L}$, H_0'ın simetri üreticisi olduğundan ortak özfonksiyonlara sahiptirler. Bu nedenle, dV, $\mathbf{R}^{2N}$'deki hacim elemanı olmak üzere, W_0 fonksiyonu $\int W_0 dV = 1$ şeklinde normalize edilmişse $W_1 = \mathcal{L} \star W_0 \star \bar{\mathcal{L}}$ fonksiyonu da aşağıdaki gibi normalize edilebilir;

$$\begin{aligned} \int W_1 dV &= \int (\mathcal{L} \star W_0 \star \bar{\mathcal{L}}) dV, \\ &= \int (\bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L}) \star W_0 dV, \\ &= \lambda \int W_0 dV. \end{aligned}$$

Yukarıda ikinci eşitliğe geçerken (2.20)'deki kapalılık özelliği kullanılmıştır ve λ, $\bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L}$'nin W_0'a karşı gelen bir özdeğeridir.

(v) H_0 ve H_1 (5.1)'deki gibi bağlaştırılmışlar ise H_0'ın bir Z simetri fonksiyonundan H_1'in bir simetri fonksiyonu $Z_1 = \mathcal{L} \star Z_0 \star \bar{\mathcal{L}}$ şeklinde elde edilir.

5.2. Uygulama

Potansiyel formundaki

$$H_i = \frac{p^2}{2m} + V_i, \quad i = 0, 1, \tag{5.5}$$

Hamiltoniyenleriyle karakterize edilen iki sistemi gözönüne alalım. Burada $p^2 = \sum p_j^2$ ve $V_i \equiv V_i(\mathbf{q})$ şeklindedir. (5.5), (5.1)'deki bağlaştırım bağıntısında kullanılır ve

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \star p^2 - p^2 \star \mathcal{L} &= i\hbar\{\mathcal{L}, p^2\}_P, \\ &= 2i\hbar \mathbf{p}.\nabla_q \mathcal{L}, \end{aligned}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$i\hbar \mathbf{p}.\nabla_q \mathcal{L} = V_1 \star \mathcal{L} - \mathcal{L} \star V_0, \tag{5.6}$$

şeklindeki tutarlılık denklemi bulunur. Burada ∇_q, q'ya göre gradyenti ifade eder. Şimdi 2-boyutlu bir faz-uzayında p momentumuna göre birinci ve ikinci mertebeden bağlaştırım işlemcileri ele alınacaktır.

5.2.1. Birinci mertebeden bağlaştırım

$L_0 \equiv L_0(q)$, $L_1 \equiv L_1(q)$ olmak üzere birinci mertebeden bağlaştırım fonksiyonu

$$\mathcal{L} = L_0 + L_1 p, \tag{5.7}$$

için $P = V_1 - V_0$ olmak üzere Denk.(5.6)'dan,

$$\frac{i\hbar}{m} p(L_0' + pL_1') = (L_0 + L_1 p)P + \frac{i\hbar}{2} L_1 (V_1' + V_0'),$$

elde edilir. Burada p'nin kuvvetleri eşitlenirse

$$L_1' = 0, \ \frac{i\hbar}{m} L_0' = L_1 P, \ \frac{i\hbar}{2} L_1 (V_1' + V_0') = -L_0 P, \tag{5.8}$$

şeklindeki tutarlılık denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin birincisinden $L_1 = a =$ *sabit* ve ikincisinden de

$$P = \frac{i\hbar}{ma} L_0'$$

olduğu görülür. Bu ifade (5.8)'deki son denklemde kullanıldığında, $2b$ integral sabiti olmak üzere,

$$V_1 + V_0 = 2b - \frac{L_0^2}{ma^2}$$

ve

$$V_0 = b + \frac{\hbar^2}{2m}(L_0^2 - L_0'), \tag{5.9a}$$

$$V_1 = b + \frac{\hbar^2}{2m}(L_0^2 + L_0'). \tag{5.9b}$$

bulunur. Burada potansiyellerin gerçelliğini garantilemek için $b \in R$ ve $a = i/\hbar$ seçilmiştir. Böylece bağlaştırım fonksiyonu, simetri fonksiyonları ve Hamiltoniyenler

$$\mathcal{L} = L_0 + \frac{i}{\hbar} p \tag{5.10a}$$

$$\bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L} = L_0^2 - L_0' + \frac{p^2}{\hbar^2}, \ \ \mathcal{L} \star \bar{\mathcal{L}} = L_0^2 + L_0' + \frac{p^2}{\hbar^2}, \tag{5.10b}$$

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L} + b, \ \ H_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \mathcal{L} \star \bar{\mathcal{L}} + b, \tag{5.10c}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler bir boyutlu sistemler için bağlaştırım metodunun çarpanlara ayırma metodu ile eşdeğer olduğunu gösterir.

Burada Hamiltoniyenlerin hiyerarşisini kompakt cebirsel bir formda ifade etmek için, $\star$-çarpım cinsinden SUSY cebirini kurulabilir. Bunun için aşağıdaki gibi matris Hamiltoniyeni ve nilpotent, kompleks süperyükler tanımlanabilir;

$$H = \begin{pmatrix} H_0 - b & 0 \\ 0 & H_1 - b \end{pmatrix}, Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{L} & 0 \end{pmatrix}, Q_- = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathcal{L}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_+^\dagger.$$

Bunlar aşağıdaki bağıntıları sağlarlar;

$$(Q_-)^2_\star \equiv Q_- \star Q_- = 0 = Q_+ \star Q_+ = (Q_+)^2_\star,$$

$$H = Q_+ \star Q_- + Q_- \star Q_+ = \{Q_+, Q_-\}_{+M}.$$

Bu ifadeler ise $\{H, Q_+\}_M = 0 = \{H, Q_-\}_M$ olmasını gerektirir. Böylece elemanları $\{Q_+, Q_-, H\}$ olan en basit süpercebirin bir faz-uzayındaki realizasyonu elde edilmiş olur.

5.2.2. İkinci mertebeden bağlaştırım

2-boyutlu bir faz-uzayında ikinci mertebeden bağlaştırım fonksiyonu aşağıdaki gibi alınabilir;

$$\mathcal{L} = L_0 + L_1 p + ap^2, \;\; a \neq 0. \tag{5.11}$$

Burada $a \in$ C'dir. (5.11), (5.1) bağıntısında kullanıldığında

$$\begin{aligned} V_1 \star \mathcal{L} &= V_1\mathcal{L} + \frac{i\hbar}{2}(2ap + L_1)\partial_q V_1 - \frac{a\hbar^2}{2}\partial_q^2 V_1, \\ \mathcal{L} \star V_0 &= V_0\mathcal{L} - \frac{i\hbar}{2}(2ap + L_1)\partial_q V_0 - \frac{a\hbar^2}{2}\partial_q^2 V_0, \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifadeler (5.11) ile birlikte (5.6)'da kullanıldıktan sonra p'nin kuvvetleri eşitlenirse aşağıdaki tutarlılık denklemleri elde edilir;

$$\frac{i\hbar}{m}L_1' = aP, \tag{5.12a}$$

$$\frac{i\hbar}{m}L_0' = L_1 P + i\hbar a(V_1' + V_0'), \tag{5.12b}$$

$$0 = L_0 P + \frac{i\hbar}{2}L_1(V_1' + V_0') - \frac{a\hbar^2}{2}P''. \tag{5.12c}$$

İlk denklemden elde edilen

$$P = V_1 - V_0 = \frac{i\hbar}{ma} L_1', \tag{5.13}$$

ifadesi Denk.(5.12b)'de kullanılarak integral alınırsa, $2b$ integral sabiti olmak üzere,

$$V_1 + V_0 = 2b + \frac{L_0}{ma} - \frac{L_1^2}{2ma^2}, \tag{5.14}$$

bulunur. (5.12a) ve (5.12b) ifadeleri (5.12c)'de kullanıldığında

$$L_0 L_1' + \frac{1}{2} L_1 (L_0' - \frac{L_1 L_1'}{a}) - \frac{1}{4} a\hbar^2 L_1''' = 0, \tag{5.15}$$

denklemi elde edilir.

Yukarıda elde edilen denklemlerde

$$L_0 = 2a\hbar^2 f_0, \tag{5.16a}$$

$$L_1 = -2ia\hbar f_1 \tag{5.16b}$$

ve $a = i\hbar/2$ alınırsa

$$V_0 = b + \frac{\hbar^2}{m}(f_0 + f_1^2 - f_1'), \tag{5.17a}$$

$$V_1 = b + \frac{\hbar^2}{m}(f_0 + f_1^2 + f_1'), \tag{5.17b}$$

$$\mathcal{L} = im\hbar[\frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{m} f_0] + \hbar^2 f_1 p, \tag{5.17c}$$

$$0 = f_1''' - 8 f_0 f_1' - 4 f_1 f_0' - 8 f_1^2 f_1', \tag{5.17d}$$

elde edilir. Böylece (5.17d) denklemini sağlayan iki f_0, f_1 fonksiyonu cinsinden potansiyeller ve $\mathcal{L}$ fonksiyonu elde edilmiş olur. (5.17d) denklemi $f_1 \neq 0$ için

$$f f_1''' = 2(f_1^4 + 2 f_0 f_1^2)' \tag{5.18}$$

şeklindedir. Sol tarafın

$$f f_1''' = (f_1 f_1'' - \frac{1}{2} f_1^2)'$$

şeklinde yazılabildiğini gözönüne alıp Denk.(5.18) integre edilirse B integral sabiti cinsinden

$$f_0 = \frac{1}{4}[\frac{f_1''}{f_1} - \frac{1}{2}(\frac{f_1'}{f_1})^2] - \frac{f_1^4 + 2B}{2 f_1^2} \tag{5.19}$$

elde edilir. Bazı f_0'lar için bu Painleve *iv* tipinde bir denklemdir. Doğrudan f_1 için özel fonksiyonlar seçilerek (5.19)'dan f_0'lar bulunabilir.

Simetri fonksiyonları ise Hamiltoniyenler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\mathcal{L} \star \bar{\mathcal{L}} = m^2\hbar^2(H_1 - b) \star (H_1 - b) + 2\hbar^6 B, \tag{5.20a}$$

$$\bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L} = m^2\hbar^2(H_0 - b) \star (H_0 - b) + 2\hbar^6 B. \tag{5.20b}$$

SUSY cebirini kurmak için

$$H = \begin{pmatrix} H_0 - b & 0 \\ 0 & H_1 - b \end{pmatrix}, Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{L} & 0 \end{pmatrix}, Q_- = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathcal{L}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_+^\dagger$$

şeklinde matris Hamiltoniyeni ve iki nilpotent matris tanımlanırsa H aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$H = Q_+ \star Q_- + Q_- \star Q_+ = \{Q_+, Q_-\}_{+M}.$$

Bu ifadeler de $\{H, Q_+\}_M = 0 = \{H, Q_-\}_M$ olmasını gerektirir. Ayrıca (5.20) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \{Q_+, Q_-\}_{+M} &= \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{L}} \star \mathcal{L} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \star \bar{\mathcal{L}} \end{pmatrix}, \\ &= m^2\hbar^2 H \star H + 2\hbar^6 B\mathbf{1} \end{aligned} \tag{5.21}$$

olduğu görülür. Burada $\mathbf{1}$, 2×2'li birim matristir. Böylece ikinci mertebeden bağlaştırım fonksiyonu için $\star$-çarpım cinsinden bir polinomial SUSY cebiri elde edilir (Adrianov 1995).

Burada kullanılan polinom şeklindeki bağlaştırım fonksiyonlarına ek olarak farklı bağlaştırım fonksiyonları da faz-uzayında eşspektrumlu sistemler hiyerarşisi kurmak için kullanılabilir.

6. SONUÇ ve TARTIŞMA

Fiziğin ve matamatiğin değişik alanlarında başarı ile kullanılan WWGM kuantizasyonu Hilbert uzayı formülasyonu ile faz-uzayı formülasyonu arasında iyi kurulmuş karşı gelim kurallarından meydana gelir. İkinci bölümde bu kuantizasyonun temel cebirsel yapısı incelenmiştir. Bu kuantizasyonda hesaplama aracı olarak kullanılan dağılım fonksiyonları yardımıyla kuantum mekaniksel hesaplar faz-uzayında otonom bir şekilde yapılabilir. İkinci bölümün bir uygulaması şeklinde olan üçüncü bölümde Landau problemi detaylı olarak incelenmiş ve çift taraflı $\star$-özdeğer denklemi çözülerek Landau düzeylerinin Wigner fonksiyonları ve marjinal olasılık yoğunlukları otonom bir şeklide elde edilmiştir. Son zamanlarda atom optiği, moleküler fizik ve sinyal işleme deneylerinde Wigner fonksiyonunun klasik olmayan davranışları dikkate alınarak yeni bir yolla kuantum mekaniğinin öngörüleri ve temel yapısı incelenmektedir (Kurtsiefer 1997, Leibfred 1996). Üçüncü bölümde farklı koordinat düzlemleri boyunca elde edilen Wigner fonksiyonları ve marjinal olasılık yoğunluklarına ek olarak deneysel açıdan daha ilgi çekici olan çeşitli faz-uzayı doğrultuları boyunca hesaplanacak Wigner fonksiyonları ve marjinal olasılık yoğunlukları Landau düzeyleri ile ilgi deneylerde yararlı olabilir. Ayrıca kuantum Hall olayı da Moyal kuantizasyonu çerçevesinde ele alınabilir.

Darboux dönüşümü ve Schrödinger'in çarpanlara ayırma metodu gibi SUYQM metodlarla yakından ilişkili olan bağlaştırım işlemcisi metodu fiziğin ve matematiğin çeşitli alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metod sayesinde yüksek boyutlarda Darboux dönüşümü yapılabilir (Adrianov 1995). Bu dönüşüm ise integrallenebilirlik ve süperintegrallenebilirlik özelliğini koruyan bir dönüşümdür. İki boyutlu eşspektrumlu ve süperintegrallenebilir potansiyel aileleri elde etmek için dördüncü bölümde geliştirilen çoklu bağlaştırım metodu ile üç boyutlu sistemler de incelenebilir. Ayrıca bu metod iki boyutlu sistemlerden başlanarak daha genel bağlaştırım fonksiyonları da ele alınabilir ve ortaya çıkan simetriler detaylı olarak incelenebilir.

Bugüne kadar standart kuantum mekaniği çerçevesinde eşspektrumlu sistemler elde etmek için kullanılan bağlaştırım metodunun faz-uzayında uygulanabilirliği beşinci bölümde irdelenmiştir. Moyal kuantizasyonu çerçevesinde polinom şeklindeki bağlaştırım fonksiyonu kullanılarak iki örnek incelenmiştir. SUYQM'nin diğer yöntemleri de bu kuantizasyon çeçevesinde ele alınarak faz-uzayında eşspektrumlu sistemler hiyerarşisi araştırılabilir. Dördüncü bölümde geliştirilen çoklu bağlaştırım metoduna ek olarak zamana bağlı sistemler ve Landau problemi gibi hıza bağlı potansiyel problemleri de SUSYQM metodlarından yaralanarak Moyal kuantizasyonu ile incelenebilir.

KAYNAKLAR

Adrianov, A. A., Borisov, N. V., Ioffe, M. V. 1984. Theor. Math. Fiz. 61(1), 183.

Adrianov, A. A., Ioffe, M. V., Borisov, N. V., Nishnianidze, D. N. 1995. Theor. Math. Phys.104(3),1129; Phys. Lett. A 201, 103.

Anderson, A. 1991. Phys. Rev. A 43, 4602.

Arnold, V. I. 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* Second Edition (Springer, Berlin).

Aoki, H. 1987. Rep. Prog. Phys. 50, 655.

Bagrov, V. G. and Samsonov, B. F. 1996. Phys. Lett. A 210,60.

Balazs, N.L. and Jennings, B.K. 1984. Phys. Rep. 104, 347.

Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A. and Sternheimer, D. 1978. Ann. Phys. (N. Y.), 111, 61 and 111.

Cahill, K. E. and Glauber, R. J. 1969. Phys. Rev. 177, 1857.

Cannata, F. Ioffe, M., Junker, G. and Nishnianidze, J. 1998. J.Phys. A 32,3583.

Cooper, F., Khare, A. and Sukhatme, U. 1995. Phys. Rep 251, 267.

Crum, M. 1955. Quat. J. Math. 6, 121.

Curtright, T., Fairlie, D. and Zachos, C. 1998. Phys. Rev. D 58, 025002.

Curtright, T., Uematsu T., and Zachos, C. 2001. J. Math. Phys. 42, 2396.

Demircioğlu, B., Kuru, Ş., Önder, M. and Verçin, A. 2002. J. Math. Phys. 42, 2133.

Demircioğlu, B. and Verçin, A. 2003. Ann. Phys. 305, 1.

Dereli, T. and Verçin, A. 1997. J. Math. Phys. 38, 5515.

Dodonov, V. V. and Man'ko, V. I. 1986. Physica A 137, 306.

Evans, N. W. 1990. Phys. Lett. A 147, 483.

Evans, N. W. 1991. Phys. Rev. A 41, 5666; 1991. J. Math. Phys. 32, 3369.

Fairly, D. 1991. Proc. Roy. Soc. Edinburg. A 119, 213.

Feynman, R. P. 1972. Statistical Mechanics: A Set of Lectures, (W. A. Benjamin Inc.).

Flügge, S. 1974. Practical Quantum Mechanics, (Springer, Berlin).

Friš, J., Mandrosov, V., Smorodinsky, Ya. A., Uhlíř, M. and Winternitz. 1965. Phys. Lett. 16, 354.

Gendenshtein, L. 1983. JETP Lett. 38, 356.

Goldstein, H. 1980. *Classical Mechanics* Second Edition (Addison-Wesley, Massachusetts).

Gracia-Bondia, J. M. 1984. Phys. Rev. A 30, 691.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. 1980. *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New-York).

Grossman, A. 1976. Commun. Math. Pyhs. 48, 191.

Hillery, M. R., O'Connell R. F., Scully M. O., and Wigner, E. P. 1984. Phys. Rep. 106,121.

Infeld, L. and Hull, T. E. 1951. Rev. Mod. Pyhs. 23.

Junker, G. 1996. *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics,* (Springer, Berlin).

Kato, T. 1980. *Perturbation Theory for Linear Operators,* Second Edition (Springer, Berlin).

Kubo, R. 1964. J. Phys. Soc. Japan 19, 2127.

Kurtsiefer, Ch. Pfan T., Mlynek J. 1997. Nature 386, 150.

Kuru, Ş., Teğmen, A. and Verçin, A. 2001. J. Math. Phys. 42, 3344, quant-ph/ 0111034.

Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. 1977. *Quantum Mechanics.* 3rd ed. (Pergamon, Oxford).

Lathouvers, L. 1975. J. Math. Phys. 16, 1393.

Lee, H. W. 1995. Phy. Rep. 259, 147.

Leibfred, D. Meekhof D. M., King, B. E., Monroe C., Itano, W. M., Wineland, D. J. 1996. Phys. Rev. Lett. 77, 4281.

Matveev, V. B. and Salle, M. A. 1991. Darboux Transformations and Solitons (Springer, Berlin).

Makarov, A., Smorodinsky, Ya. A., Valiev, Kh. and Winternitz, P. 1967. Nuova Cim. A, 52 1061.

Marsden, J. E. and Ratiu, T. S. 1994. *Introduction to Mechanics and Symmetry* (Springer-Verlag, New-York).

Moyal, J. E. 1949. Proc. Camb. Phil. Soc. 45,99.

Miller, Jr, W. 1977. *Symmetry and Separation of Variables* (Addison Wesley, Reading, MA).

Perelomov, A. 1986. *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer, Berlin).

Reed, M. and Simon, B. 1980. *Method of The Modern Math. Physics*, Volume I, II (Springer, Berlin).

Richtmyer, R. 1978. *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Volume I, (Springer, Berlin). Pursey, D. L. 1986. Phys. Rev. D 33, 2267.

Royer, A. 1977. Phys. Rev. A15, 449.

Sheftel, M. B., Tempesta, P. and Winternitz, P. 2001. J. Math. Phys. 42, 659.

Sternheimer, D. "Deformation Quantization: Twenty Years After", in *Particles, Fields, and Gravitation*, ed. J. Rembieliński, Proceeding of the Lódź meeting 1998, (AIP Press, N.Y., 1998),math-QA/9809056.

Verçin, A. 1998. Ann. Phys. (N. Y.) 266, 503.

Winternitz, P., Smorodinsky, Ya. A., Uhliř, M. and Friš, J. 1967. Sov. Journ. Nucl. Phys. 4, 444.

Witten, E. 1981. Nucl. Phys. B188, 513.

Wojciechowski, S. 1983. Phys. Lett. A 95, 279.

EKLER

EK 1-a Weyl Bazı

(2.1)'de verilen $\hat{D}$ bazı (veya Weyl bazı) için çarpım kuralı

$$\hat{D}(\xi,\eta)\hat{D}(\xi',\eta') = \exp\{-\frac{1}{2}i\hbar(\xi\eta' - \xi'\eta)\}\hat{D}(\xi+\xi',\eta+\eta'), \qquad (E.1)$$

şeklindedir.

Herhangi bir $\hat{F}$ işlemcisi farklı bazlar kullanılarak farklı fonksiyonlarla eşleştirilebilir. Bu nedenle bir $\hat{F}$ işlemcisi hem $\hat{D}$ bazı hem de $\hat{\Delta}_{qp}$ bazı cinsinden yazılabilir;

$$\hat{F} = \hat{F}(\hat{q},\hat{p}) = \int\int \tilde{f}(\xi,\eta)\hat{D}(\xi,\eta)d\xi d\eta, \qquad (E.2a)$$

$$= h^{-1}\int\int f(q,p)\hat{\Delta}_{qp}dqdp. \qquad (E.2b)$$

$\tilde{f}(\xi,\eta)$ fonksiyonu $\hat{D}$ bazında (Weyl eşleştirmesi), $f(q,p)$ ise $\hat{\Delta}_{qp}$ bazında (Weyl-Wigner eşleştirmesi) aynı bir $\hat{F}$ işlemcisi ile eşleştirilen fonksiyonlardır. Parametrelerinden de görüldüğü gibi farklı faz-uzaylarında yaşayan bu fonksiyonlar birbirlerine Fourier dönüşümü ile bağlıdırlar. $\hat{D}$ bazında (E.1)'de verilen çarpım kuralı kullanılarak $\hat{F}_1\hat{F}_2$ işlemcisiyle eşleştirilen $\tilde{f}_{12}(\xi,\eta)$ fonksiyonu, sırasıyla $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ işlemcileriyle eşleştirilen $\tilde{f}_1(\xi,\eta), \tilde{f}_2(\xi,\eta)$ fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir. Bunun için (E.1) ve (E.2a)'dan yararlanarak

$$\hat{F}_1\hat{F}_2 = \int\int\int\int d\xi d\eta d\xi' d\eta' \tilde{f}_1(\xi,\eta)\tilde{f}_2(\xi',\eta')e^{-\frac{1}{2}i\hbar(\xi\eta'-\xi'\eta)}\hat{D}(\xi+\xi',\eta+\eta'), \qquad (E.3)$$

yazılabilir. Bu aynı zamanda

$$\hat{F}_1\hat{F}_2 = \int\int d\xi'' d\eta'' \tilde{f}_{12}(\xi'',\eta'')\hat{D}(\xi'',\eta''), \qquad (E.4)$$

demektir. (E.3)'de $\xi+\xi' = \xi'', \eta+\eta' = \eta''$ değişken değiştirmesi yapıldıktan sonra elde edilen ifade düzenlenerek (E.4) ile karşılaştırılırsa

$$\tilde{f}_{12}(\xi,\eta) = \int\int d\xi' d\eta' \tilde{f}_1(\xi',\eta')\tilde{f}_2(\xi-\xi',\eta-\eta')e^{-\frac{1}{2}i\hbar(\xi'\eta-\xi\eta')}, \qquad (E.5)$$

elde edilir.

EK 1-b $\hat{\Delta}_{qp}$ Bazı İçin Çarpım Kuralı ve $\star$-Çarpım

$\hat{\Delta}_{qp}$ bazı için çarpım kuralı (2.5) 'de verilen ifadeden ve (E.1)'deki çarpım kuralından yararlanarak aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\hat{\Delta}_{q_1p_1}\hat{\Delta}_{q_2p_2} = (\frac{\hbar}{2\pi})^2 \int\int\int\int d\xi d\eta d\xi' d\eta' e^{-i(\xi q_1+\eta p_1)} e^{-i(\xi' q_2+\eta' p_2)} e^{-\frac{1}{2}i\hbar(\xi\eta'-\xi'\eta)}$$
$$\hat{D}(\xi+\xi',\eta+\eta'). \qquad (E.6)$$

Burada $\xi+\xi' = u, \eta+\eta' = v, \xi-\xi' = u'$ ve $\eta-\eta' = v'$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\hat{\Delta}_{q_1p_1}\hat{\Delta}_{q_2p_2} = \frac{1}{4}(\frac{\hbar}{2\pi})\int\int du' dv' \hat{\Delta}_{(\frac{q_1+q_2}{2}-\frac{\hbar}{4}v'),(\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{\hbar}{4}u')} e^{\frac{-i}{2}[u'(q_1-q_2)+v'(p_1+p_2)]}, \qquad (E.7)$$

olduğu görülür. Şimdi de $\frac{q_1+q_2}{2}-\frac{\hbar}{4}v' = q$ ve $\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{\hbar}{4}u' = p$ değişken değiştirmesi

yapılırsa

$$\hat{\Delta}_{q_1p_1}\hat{\Delta}_{q_2p_2} = (\frac{4}{2\pi\hbar})\int\int dqdp \exp(-\frac{2i}{\hbar}K)\hat{\Delta}_{qp}, \qquad (E.8)$$

elde edilir. Burada

$$K = \det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p & q & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (E.8) ifadesi $\hat{D}$ işlemcileri için elde edilen çarpım kuralına karşı gelir. $\hat{\Delta}_{qp}$ bazında (E.2b) ve (E.8)'den yararlanarak

$$\hat{F}_3 = \hat{F}_1\hat{F}_2 = h^{-1}\int\int f_{12}\hat{\Delta}_{qp}dqdp.$$

işlemci çarpımına karşı gelen $f_{12}(q,p)$ fonksiyonunun

$$f_{12}(q,p) = \frac{4}{2\pi\hbar h}\int\int\int\int f_1 f_2 \exp(-\frac{2i}{\hbar}K)dq_1dp_1dq_2dp_2. \qquad (E.9)$$

şeklinde yazılabildiği görülür.

(E.5) ve (E.9) ifadeleri Weyl ve Wigner-Wigner eşleştirme kurallarına göre iki $\hat{F}_1$ ve $\hat{F}_2$ işlemcisine karşı gelen faz-uzayı fonksiyonları ile $\hat{F}_1\hat{F}_2$ çarpımına karşı gelen fonksiyon arasındaki bağıntıların integral formudurlar. (E.9)'un sağ tarafının $f_1(q,p)$ ve $f_2(q,p)$ fonksiyonlarının yıldız çarpımına eşit olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$\hat{\Delta}_{qp}$ bazı $\hat{D}$ bazının Fourier dönüşümünden elde edildiği için $f_{12}(q,p)$ fonksiyonu da $\tilde{f}_{12}(\xi,\eta)$'nın Fourier dönüşümünden elde edilebilir;

$$f_{12}(q,p) = \int\int d\xi d\eta \exp\{i(\xi q + \eta p)\}\tilde{f}_{12}(\xi,\eta). \qquad (E.10)$$

(E.5) ifadesi burada kullanılırsa

$$f_{12}(q,p) = \int\int\int\int d\xi d\eta d\xi' d\eta' \tilde{f}_1(\xi',\eta')\tilde{f}_2(\xi-\xi',\eta-\eta')e^{\frac{1}{2}i\hbar(\xi\eta'-\xi'\eta)}\exp\{i(\xi q+\eta p)\}$$

olduğu görülür. Burada $\xi - \xi' = \xi''$ ve $\eta - \eta' = \eta''$ değişken değiştirmesi yapıldıktan sonra

$$f_{12}(q,p) = \int\int\int\int d\xi' d\eta' d\xi'' d\eta'' \tilde{f}_1(\xi',\eta')e^{i(\xi' q+\eta' p)}\tilde{f}_2(\xi'',\eta'')e^{i(\xi'' q+\eta'' p)}e^{\frac{1}{2}i\hbar(\xi'\eta''-\xi''\eta')} \qquad (E.11)$$

elde edilir. Şimdi

$$f(q_1p_1,q_2p_2) = \int\int\int\int d\xi' d\eta' d\xi'' d\eta'' \tilde{f}_1(\xi',\eta')e^{i(\xi' q_1+\eta' p_1)}\tilde{f}_2(\xi'',\eta'')e^{i(\xi'' q_2+\eta'' p_2)} e^{-\frac{1}{2}i\hbar(\xi'\eta''-\xi''\eta')} \qquad (E.12)$$

şeklinde bir yardımcı nicelik tanımlanabilir. Burada

$$f(q_1 = q, p_1 = p; q_2 = q, p_2 = p) = f_{12}(q,p)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. (E.12)'deki son üstel terim

$$\exp\{-\frac{i\hbar}{2}(\xi'\eta''-\xi''\eta')\} = 1 - \frac{i\hbar}{2}(\xi'\eta''-\xi''\eta') + ...$$

şeklinde $\hbar$'ın kuvvet serisine açılırsa $f(q_1p_1,q_2p_2)$ ifadesi integrallerin bir toplamı şeklinde olacaktır; 1 terimini içeren integralin $f_1(q_1,p_1)f_2(q_2,p_2)$ olduğu açıktır, $\frac{i\hbar}{2}(\xi'\eta''-\xi''\eta')$ terimini içeren sonraki integral $e^{i(\xi' q_1+\eta' p_1)}e^{i(\xi'' q_2+\eta'' p_2)}$ ifadesine $\frac{i\hbar}{2}(\partial_{q_1}\partial_{p_2} - \partial_{q_2}\partial_{p_1})$ işlemcisinin uygulanmasıyla elde edilir. Benzer şekilde diğer integraller de bu işlemcinin kuvvetlerinin etkisi ile oluşturulabilir. Böylece (E.12)'den

$$f(q_1p_1,q_2p_2) = \exp\{\frac{i\hbar}{2}(\partial_{q_1}\partial_{p_2} - \partial_{q_2}\partial_{p_1})\}f_1(q_1,p_1)f_2(q_2,p_2)$$

ve bu ifadede $q_1 = q = q_2, p_1 = p = p_2$ alınırsa

$$f_{12}(q,p) = f_1(q,p)e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_q)}\ f_2(q,p) = f_1(q,p)\star f_2(q,p)$$

şeklinde $\star$-çarpımın tanım bağıntısı elde edilir.

Burada Wigner fonksiyonlarının tanım bağıntısından elde edilen ifadelerle (3.23) ve (3.64) karşılaştırılacaktır. Simetrik ayarda, (r, θ) düzlem kutupsal koordinatlar cinsinden normalize edilmiş dalga fonksiyonları ve Landau düzeylerinin karşı gelen enerji özdeğerleri

$$\psi_{n_r j}(r,\theta) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{n_r!}{\pi(n_r+|j|)!}}\rho^{|j|}e^{ij\theta}e^{-\rho^2/2}L_{n_r}^{|j|}(\rho^2),$$

$$E_{n_r j} = \hbar\omega(n_r + \frac{1}{2} + \frac{|j|-j}{2}), \qquad (E.13)$$

$$n_r = 0,1,2,..., \quad j = 0,\pm1,\pm2,...$$

ile verilir. Burada $r = \gamma\rho = (q_1^2+q_2^2)^{1/2}$'dır, n_r, j ise radyal ve açısal kuantum sayılarını gösterir. (3.64)'da $n \geq l$ varsayıldığı için, $|j| = n - l$ ve $n_r + |j| = n$ yapılabilir. Bu ise $n_r = l$ olmasını gerektirir. Böylece (3.64) ve (E.13)'den

$$P_{nl}(q_1,q_2) = h^2|\psi_{n_r j}(r,\theta)|^2, \qquad (E.14)$$

yazılabilir. Bu ise beklenen bir sonuçtur ve (3.64) ve Kes.3.8'deki marjinal olasılık yoğunlukları tanımını doğrular.

Normalize edilmiş taban durumu dalga fonksiyonu $\psi_0(\mathbf{q}) = \psi_{00}(r,\theta) = \gamma\pi^{-1/2}e^{-\rho^2/2}$

$$W_0 = \int_{\mathbf{R}^2}\psi_0(\mathbf{q}+\frac{1}{2}\mathbf{y})\bar{\psi}_0(\mathbf{q}-\frac{1}{2}\mathbf{y})e^{-i\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}}dy_1dy_2, \qquad (E.15)$$

tanımında kullanılırsa

$$W_0 = \frac{e^{-\frac{4H_0}{\hbar\omega}}}{\gamma^2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4\gamma^2}(y_1+i\frac{2\gamma^2}{\hbar}p_1)^2}dy_1\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4\gamma^2}(y_2+i\frac{2\gamma^2}{\hbar}p_2)^2}dy_2. \qquad (E.16)$$

elde edilir. (E.16)'daki herbir integral $2\gamma\pi^{1/2}$'ye eşit olduğundan (3.23)'de olduğu gibi $W_0 = 4\exp(-4H_0/\hbar\omega)$ bulunur.

EK 3 (3.29b) Özdeşliğinin İspatı

Burada (3.29a)'dan (3.29b)'nin nasıl elde edildiği gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki özdeşlik tümevarım yöntemiyle ispatlanacaktır;

$$(1-T)^n(x^n e^{-x}) = (-1)^n e^x T^n(x^n e^{-2x}). \qquad (E.17)$$

Burada $T = d/dx$ ve n pozitif bir tamsayıdır. (E.17) $n = 1$ için doğrudur ($n = 0$ için de doğruluğu açıktır). Bu ifadenin $n-1$ için sağlandığı varsayılarak n için ispatlanmaya çalışılacaktır. Şimdi $I_k = (1-T)^k(x^k e^{-x})$ tanımlanırsa,

$$I_{n-1} = (-1)^{n-1} e^x T^{n-1}(x^{n-1} e^{-2x}), \qquad (E.18)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned} I_n &= (1-T)^n[x(x^{n-1}e^{-x})] = [x(1-T) - n]I_{n-1}, \\ &= (-1)^n e^x [xT^n + nT^{n-1}](x^{n-1}e^{-2x}), \qquad (E.19) \\ &= (-1)^n e^x T^n(x^n e^{-2x}) \end{aligned}$$

bulunur. (E.19)'da ikinci eşitliğe geçerken $[(1-T)^n, x] = -n(1-T)^{n-1}$ ifadesi kullanılmıştır. (E.19)'un ikinci satırı (E.18) kullanılarak elde edilir. Üçüncü eşitliğe geçerken ise

$$(xT^n + nT^{n-1})f = T^n(xf), \qquad (E.20)$$

ifadesi kullanılmıştır. Burada f, x'in keyfi türevlenebilir bir fonksiyonudur. (E.20) $[T^k, x] = kT^{k-1}$ sıradeğişim bağıntısı veya $T^n(xf) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(T^k x)T^{n-k}f$ Leibniz kuralı kullanılarak elde edilir. (E.17) eşitliği daha genel olarak

$$(1-T)^n(fe^x) = (-1)^n e^x T^n f, \qquad (E.21)$$

eşitliğinin bir özel halidir. Bu ifade yine tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir. Bu son ifadede $f = x^n e^{-2x}$ seçilirse (E.17) elde edilir.

Şimdi

$$(1-T)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}T^{n-j}, \qquad (E.22)$$

binom açılımı ve genelleştirilmiş Laguerre polinomları için

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x}{n!}x^{-\alpha}T^n(x^{n+\alpha}e^{-x}), \qquad (E.23)$$

Rodrigues formülü (Magnus 1966) kullanılırsa (E.17) ve (E.23)'den Laguerre polinomları için aşağıdaki sonlu toplam formülü elde edilir;

$$L_n(2x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-x)^j}{j!} L_{n-j}^{j}(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j^{-j}(x) L_{n-j}^{j}(x). \qquad (E.24)$$

Burada $L_j^{-j}(x) = (-x)^j/j!$ 'dir. $L_n = L_n^0$ olduğu için, (E.23)'den $\alpha = 0$ ve $x = 2u$ için

$$L_n(2u) = \frac{e^{2u}}{n!} \frac{d^n}{du^n}(u^n e^{-2u}),$$

elde edilir. (E.24)'de elde edilen ifadeye klasik referanslarda rastlanmamıştır (Magnus 1966, Gradshteyn 1980).

EK 4 Faz-Uzayında Üniter Dönüşümler ve Ayar Dönüşümleri

Faz uzayı üzerinde tanımlı $U \equiv U(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ fonksiyonunun $\star$-tersi $U^{-1} = \overline{U}$ aşağıdaki gibi tanımlanacaktır;

$$U \star U^{-1} = U^{-1} \star U = 1. \tag{E.25}$$

U tarafından üretilen üniter benzerlik dönüşümü Denk.(3.3)'e uygulanırsa aşağıdaki $\star$-özdeğer denklemleri elde edilir;

$$H' \star W'_\lambda = W'_\lambda \star H' = E_\lambda W'_\lambda. \tag{E.26}$$

Burada dönüşmüş fonksiyonlar

$$H' \equiv U \star H \star U^{-1}, \quad W'_\lambda \equiv U \star W_\lambda \star U^{-1},$$

şeklindedir. k bir sabit olmak üzere, Denk.(2.12), (3.42) ve (E.25)'den

$$\begin{aligned} \overline{W}'_\lambda &= U \star \overline{W}_\lambda \star U^{-1}, \\ W'_\lambda \star W'_{\lambda'} - kW'_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} &= U \star (W_\lambda \star W_{\lambda'} - kW_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}) \star U^{-1}, \end{aligned}$$

olduğu doğrulanabilir. Yani W_λ 'nın gerçellik ve $\star$-izdüşüm özellikleri üniter benzerlik dönüşümleri altında korunur. Buna ilave olarak

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{2D}} W'_\lambda dV &= \int_{\mathbf{R}^{2D}} U \star W_\lambda \star U^{-1} dV \\ &= \int_{\mathbf{R}^{2D}} W_\lambda \star (U^{-1} \star U) dV = \int_{\mathbf{R}^{2D}} W_\lambda dV, \end{aligned}$$

ifadesinden de açıkca görüldüğü gibi W_λ 'nın normalizasyon özellikleri de korunur. Bu son denklem elde edilirken (2.20) ve (E.25) kullanılmıştır.

$U_q \equiv U(\mathbf{q})$ ve $\chi \equiv \chi(\mathbf{q})$ gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$U_q = e^{i\frac{q}{c\hbar}\chi}, \quad U_q^{-1} = \overline{U}_q = e^{-i\frac{q}{c\hbar}\chi},$$

fonksiyonu için

$$U_q \star U_q^{-1} = U_q U_q^{-1} = 1,$$

yazılabilir. $N=2$ için (2.11)'den

$$U_q \star \mathbf{p} \star U_q^{-1} = \mathbf{p} - \frac{q}{c}\nabla_q \chi,$$

elde edilir. Bu dönüşümler üçüncü bölümdeki Landau Hamiltoniyenine ve Wigner fonksiyonlarına uygulanabilir. Böylece (3.4)'deki Landau Hamiltoniyeni, U_q tarafından üretilen $H'_L = U_q \star H_L \star U_q^{-1}$ benzerlik dönüşümü altında aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} H'_L &= \frac{1}{2m}[U_q \star (\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}) \star U_q^{-1}] \cdot [U_q \star (\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}) \star U_q^{-1}] \\ &= \frac{1}{2m}[\mathbf{p} - \frac{q}{c}(\mathbf{A} + \nabla\chi)]^2. \end{aligned}$$

Burada ∇_q, q_1 ve q_2 değişkenlerine göre iki boyutlu gradyent işlemcisidir. Landau düzeylerinin (3.54) ile verilen Wigner fonksiyonları için de

$$W'_{n_1 n_2 l_1 l_2} = U_q \star W_{n_1 n_2 l_1 l_2} \star U_q^{-1}, \tag{E.27}$$

yazılabilir. Bu bağıntı ile üçüncü bölümde simetrik ayardaki ifadeleri elde edilmiş olan Wigner fonksiyonları herhangi bir ayarda da hesaplanabilir.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Kahramanmaraş'ta doğdu. 1990 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nden 1994 yılında mezun oldu. Aynı yıl girdiği Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'ndan 1997 yılında mezun oldu. 1996-2001 yılları arasında Ankara üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı. Halen Türkiye Atom Enerjisi Kurumu'na bağlı Ankara Nükleer Araştırma ve Eğitim Merkezi'nde fizikçi olarak çalışmaktadır.