ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASGELE KATSAYILI LİNEER MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Ayfer ÇELİK

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2008

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RASGELE KATSAYILI LİNEER MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Ayfer ÇELİK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK

Bu çalışmada; Rasgele Katsayılı Lineer Modeller ve Rasgele Katsayılı Lineer Modellerde parametre tahmini üzerinde durulmuştur.

Genel Lineer Modeller hakkında temel kavramlar verildikten sonra çalışmanın temelini oluşturan Swamy Tipi Rasgele Katsayılı Lineer Model tanıtılmıştır. Swamy Tipi modelde parametre tahmini yapılarak, tahmin edicilerin bazı özelliklerine kısaca değinilmiştir. Çalışmanın sonunda çalışmanın konusuna uygun bir örneğe yer verilmiştir.

Ekim 2008, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer Model, Rasgele Katsayılı Model, Parametre tahmini

ABSTRACT

Master Thesis

PARAMETER ESTIMATION IN RANDOM COEFFICIENT LINEAR MODELS

Ayfer ÇELİK

Ankara University
Graduate School Institute of Natural and Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK

In this study, Random Coefficient Linear Models and parameter estimation in Random Coefficient Linear Models have been considered.

After the fundamental concepts given about General Linear Models, Swamy Type Random Coefficient Linear Model, which is the essence of the study, has been proposed. Some estimators for the parameters in the Swamy Type Model have been described and their properties have been shortly examined. At the end of the study, an example, which is proper for the issue of the study, is given.

October 2008, 66 pages

Key Words: Linear Model, Random Coefficient Linear Model, Parameter Estimation

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK' e, (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) değerli bölüm başkanımız sayın Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU'na, (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) çalışmalarım sırasında bilimsel yaklaşımı kendisinden öğrenmeye çalıştığım değerli hocam Cenker BİÇER'e, (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) Prof. Dr. Hasan BAL'a (Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümü) değerli hocam sayın Prof. Dr. Fahrettin ARSLAN'a, (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) beni destekleyen arkadaşlarım, ailem ve Bora ERKOÇ'a en derin duygularla teşekkür ederim.

Ayfer ÇELİK

Ankara , Ekim 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET……………………………………………………………………………i
ABSTRACT……………………………………………………...…………..ii
TEŞEKKÜR…………………………………………………………..………iii
ÇİZELGELER DİZİNİ………………………………………………………..v
1. GİRİŞ …………………………………………………………………………..1
2. RASGELE KATSAYILI LİNEER MODELLER İÇİN KAYNAK TARAMASI ………………………………………………………………………3
3. GENEL LİNEER MODEL... …………………………………….........…...7
3.1 Birinci Durum ($\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$)………………………………...…...7
3.1.1 Parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri …………..…………………8
3.1.2 Hipotez testi……………………………………………………………..….13
3.1.3 Güven aralıkları……………………………...…………………………14
3.2 İkinci Durum ($\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim (\underline{0}, \sigma^2 I)$)……………………………………………16
3.3 Üçüncü Durum ($\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 V)$)……….....………………………..18
4. SWAMY TİPİ RASGELE KATSAYILI LİNEER MODEL …………………..20
4.1 Modelin Tanıtılması………………………………………………………20
4.2 $\underline{\bar{\beta}}$ Parametre Vektörünün Tahmini………………………………………......24
4.3 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_m^2$ Parametrelerinin Tahmini………………………………………29
4.4 Δ Kovaryans Matrisinin Tahmini…………….…………………………..31
4.5 $\underline{\tilde{\bar{\beta}}}$ Tahmin Edicisi…………………...………………....……………………34
4.6 Öngörü Aralıkları……………………………………………………………35
4.7 Hipotez Testleri………………………………………………………………36
4.7.1 Katsayı varyansları ile ilgili test …..…...……………………………………36
4.7.2 Regresyon katsayıları ile ilgili test …………..……………………………...37
4.7.3 $\underline{\bar{\beta}}$ İçin hipotez testi……..……...……...……………………………………38
4.8 Uygulama ……………………………………………………………………39
5. SONUÇ……………………………………...………………………63
KAYNAKLAR…………………………………………..……………….……64
ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………………………...…66

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 Avusturya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……40
Çizelge 4.2 Belçika için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……41
Çizelge 4.3 Kanada için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……42
Çizelge 4.4 Danimarka için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……43
Çizelge 4.5 Fransa için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……44
Çizelge 4.6 Almanya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……45
Çizelge 4.7 Yunanistan için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……46
Çizelge 4.8 İrlanda için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……47
Çizelge 4.9 İtalya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……48
Çizelge 4.10 Japonya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……49
Çizelge 4.11 Hollanda için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……50
Çizelge 4.12 Norveç için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……51
Çizelge 4.13 İspanya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……52
Çizelge 4.14 İsveç için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……53
Çizelge 4.15 İsviçre için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……54
Çizelge 4.16 Türkiye için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……55
Çizelge 4.17 İngiltere için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……56
Çizelge 4.18 ABD için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler……57

1. GİRİŞ

Lineer modeller değişkenler arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmada ve geleceğe yönelik tahminler yapmada istatistiksel sonuç çıkarımı açısından önemli rol oynamaktadır. Bu modeller iktisat, ekonometri, sağlık, sosyoloji gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

$\underline{Y}$: bağımlı (açıklanan) değişken ile ilgili gözlemlerin nx1 boyutlu vektörü (rasgele vektör), $\boldsymbol{X}$: nxp (n≥p) boyutlu bilinen sayıların matrisi, $\underline{\beta}$: px1 boyutlu bilinmeyen parametrelerin vektörü, $\underline{\varepsilon}$: nx1 boyutlu gözlenebilir olmayan rasgele değişkenlerin bir vektörü ($E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$, $Cov(\underline{\varepsilon}) = \mathbf{\Sigma}$) olmak üzere bunlar arasında ;

$$\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

biçiminde varsayılan bağıntıya Lineer Model denir. Genel Lineer Model olarak da isimlendirilen bu model pek çok özel hallere sahiptir. Bunlar, $\underline{\varepsilon}$ ‘nun dağılımına , $\mathbf{\Sigma}$ kovaryans matrisine, $\mathbf{X}$ ‘in yapısına ve rankına bağlıdır. $\underline{\varepsilon}$ ‘nun dağılımı hakkında aşağıdaki gibi varsayımlar söz konusu olabilir.

1.Durum: $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}\ ,\ \sigma^2\mathbf{I})$

2.Durum: $\underline{\varepsilon}$ bilinmeyen bir dağılıma sahiptir ve $E(\underline{\varepsilon})=0$, $cov(\underline{\varepsilon})=\sigma^2 I$.

3.Durum: $cov(\underline{\varepsilon})=\sigma^2\mathbf{V}$, $\mathbf{V}$ bilinen pozitif tanımlı bir matris.

Bu çalışmada, rasgele katsayılı lineer modeller üzerinde durulacaktır. Çalışma için seçilen model Swamy (1970) tarafından ortaya konan Rasgele Katsayılı Lineer Model’dir. Bu modeli kısaca tanıtalım. Belli bir olgu ile ilgili *m* tane birimin (örneğin ülke) her biri üzerinden *n* tane (örneğin yıllara göre) gözlem alınsın. $\underline{Y}_i$ rasgele vektörü *i*. birim üzerinden alınan *n* tane gözlem olmak üzere, her birim için

$$\underline{Y}_i = \mathbf{X}_i\underline{\beta}_i + \underline{\varepsilon}_i \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$$

gibi bir Lineer Model söz konusu olsun. i=1,2,…,m için $\mathbf{X}_i$ matrisi açıklayıcı değişkelerin $n \times p$ boyutlu gözlem matrisi olmak üzere, $\underline{\beta}_i$ 'ler $E(\underline{\beta}_i) = \underline{\overline{\beta}}$ ortalamalı ve $Cov(\underline{\beta}_i) = \Delta$ kovaryans matrisli, aynı dağılımlı bağımsız rasgele vektörler ve $E(\underline{\varepsilon}_i) = \underline{0}$ 'ler $E(\underline{\varepsilon}_i) = \underline{0}$ ortalamalı, $Cov(\underline{\varepsilon}_i) = \sigma_i^2 I$ kovaryans matrisli hata vektörleri olup $\underline{\beta}_i$ 'ler ile $\underline{\varepsilon}_i$ 'ler bağımsız olsun. $\underline{\beta}_i$ 'ler kendi ortalamaları cinsinden,

$$\underline{\beta}_i = \underline{\overline{\beta}} + \underline{\delta}_i \qquad , \quad i=1,2,\ldots,m$$

olarak yazılıp modelde yerine konursa,

$$\underline{Y}_i = \mathbf{X}_i \underline{\overline{\beta}} + \mathbf{X}_i \underline{\delta}_i + \underline{\varepsilon}_i , \quad i=1,2,\ldots,m$$

yazılır. i=1,2,…,m için $\underline{\delta}_i$ 'ler bağımsız, $E(\underline{\delta}_i) = \underline{0}$, $Cov(\underline{\delta}_i) = \Delta$ ve $\underline{\delta}_i$ 'ler ile $\underline{\varepsilon}_i$ 'ler bağımsızdır. m tane model birlikte,

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \\ \vdots \\ \underline{Y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \underline{\overline{\beta}} + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_m \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Modelin stokastik kısmındaki gözlenemeyen rasgele vektörler ile ilgili bazı dağılım varsayımları yapılabilir. Bu modelde başlıca amaç $\underline{\beta}_i$ rasgele katsayılarının ortalaması olan $\underline{\overline{\beta}}$ parametre vektörünü, Δ kovaryans matrisini ve σ_i^2 parametrelerini tahmin etmek olacaktır.

Çalışmanın ikinci bölümünde Rasgele Katsayılı Lineer Modeller için kaynak taraması yapılacaktır.Üçüncü bölümde Genel Lineer Modellerle ilgili bazı özellikler ve kavramlar verildikten sonra, dördüncü bölümde, Swamy tipi Rasgele Katsayılı Lineer Model ele alınacaktır. Bu modelde parametre tahmini konusu işlenip, bazı hipotez testleri konusuna değinilecektir. Uygulama bölümünden sonra çalışma sonuç bölümü ile sona ermektedir.

2. RASGELE KATSAYILI LİNEER MODELLER İÇİN KAYNAK TARAMASI

Rasgele katsayılı lineer modeller ile ilgili ilk çalışmalar 50 yıl öncesine dayanmaktadır. Alışılmış lineer modellerde katsayıları oluşturan parametrelerin gözlenen birimler boyunca sabit kaldığı varsayılmaktadır. Buna uymayan olgularda söz konusudur. Böyle olguların modellenmesinde yer alan rasgele katsayılı lineer modeller; endüstri, iktisat, sağlık, sosyoloji gibi bir çok alanda kullanılmaktadır.

Parametrelerin gözlenen birimler boyunca değişebileceği ilk kez Wald (1947) ile ortaya çıkmıştır. Katsayıların tahmini için herhangi bir kestirim önermeyen Wald'ın çalışması, daha sonraki araştırmalara fırsat yaratması ve problemin ortaya çıkarılmasına yardımcı olabilmesi açısından önemlidir.

Balestra ve Nerlove bu yaklaşımı hata bileşenli modeller olarak adlandırmıştır. Bu yaklaşım ekonomik çalışmalarda ilk defa Kuh(1959) tarafından uygulamaya konuşmuştur. Kuh (1959) hata döneminin 3 bileşenden oluştuğunu varsaymıştır. Bu bileşenlerin biri zamanla,ikincisi birimlerle (ülke, kişi,…) , üçüncüsü ise her iki bileşenle de ilgilidir. Daha sonrada kurduğu modelin teorik özelliklerini incelemiştir.

Hoch (1962)'da Mundlak gibi üretim fonksiyonunu kullanmıştır. Zaman serileri verileri ve çapraz kesit verilerini kullanarak kovaryans analizi aracılığı ile Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun parametrelerinin tahmini ile ilgilenmiştir.

Hoch, kovaryans analizi aracılığı ile yıl ve firmaların her ikisinin özelliklerini de inceleyerek karışık etkili bir model kurmuştur ve "teknik etkinlik" olarak adlandırdığı modelde parametreleri yorumlamıştır.

Nerlove ve Balestra (1966) doğal gaza olan talebi belirlemek için kurdukları modelde bir dejenere durum ortaya çıkmıştır. Yazarların üzerinde çalıştığı dinamik modelde açıklayıcı değişken ve etkiler arasındaki ilişkiyi gözardı ettikleri için gerçekçi olmayan , negatif sonuçlar elde etmişlerdir. Çalıştıkları model üzerinde en küçük kareler tahmin edicisinden yararlanan Balestra ve Nerlove, bozulmanın etkilerin hesaba katılmamasından kaynaklandığını düşünüp hata (ε_{ij}) dışındaki her şeyin değişmez olduğunu varsaymıştır. Bu yaklaşımı uyguladıklarında doğalgaz için pozitif aşınma oranı elde etmişlerdir.

Hildreth ve Houch (1968) en küçük kareler yöntemini kullanarak varyansın durumuna göre bazı tahmin ediciler önermiş ve bu tahmin edicilerin asimptotik özelliklerini incelemişlerdir.

.Hildreth ve Houck (1968)'un önerdikleri modelde tepki katsayılarının tahmini en küçük kareler yöntemi ile hesaplanabilir. Hesaplanan bu tahmin edici yansız ve tutarlıdır fakat etkin değildir. Etkinliği arttırmak için genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi kullanılabilir. Bu durumda da ortaya bilinmeyen varyans-kovaryans matrisi çıkar.

Hata bileşenli bir karışık etkili regresyon modelinde bilinen varyans için Aitken tahmin edicisi küçük örneklemlerde etkilidir. Bilinmeyen varyans söz konusu olduğunda Zellner tipi iterasyon yöntemi veya kovaryans tahmin edicisi kullanılabilir. Wallace ve Hussian (1969) Zellner tipi iterasyon yöntemi ve kovaryans tahmin edicisini karşılaştırıp teorik sonuçlar elde etmişlerdir.

Henderson (1971) Wallace ve Hussian ' ın problemini genel bir lineer model kurarak yeniden formüle etmiştir.

Wallace ve Hussian modellerinde iki farklı tahmin edici kullanmışlardır. Bunlardan biri hata karışık etkili olduğunda kovaryans yöntemi, diğeri artıkların en küçük karelerini kullanarak varyans bileşenlerinin tahmin edilmesidir. Henderson tahmin edicilerin hesaplanma zorluğunu göz önüne alarak varyansın hesaplanması için (bakınız Henderson , 1971) daha pratik bir yöntem önermiştir.

Daha sonra hataların 3 bileşenden oluştuğu modeli Amemiya (1971) kullanmıştır. Amemiya hataların gözlenebilir olduğu durumda varyans analizi yönteminden yararlanmıştır. Hataların gözlenemez ve tahmin edilmesi gerektiği durumda ise regresyon katsayılarının tahmin edicilerinden yararlanmıştır.

Yazar; regresyon katsayıları ($\overline{\underline{\beta}}$)' nın tahmin edicisi için Wallace ve Hussian'ın tahmin edicisinin asimptotik olarak etkinliğine değinerek, asimptotik kovaryans matrisi ve en çok olabilirlik tahmin edicilerini karşılaştırmıştır.

Varyans bileşenleri modelleri birleştirilmiş çapraz kesit verileri ve zaman serileri modelleri içinde kullanışlıdır. Bu nedenle kovaryans teknikleri analizi ekonometrik çalışmalarda yaygın olarak kullanılır hale gelmiştir.

Maddala (1971) çalışmasında m bireyin herbirinin j tane gözleme sahip olduğunu varsayarak genel formda lineer bir model üzerinde çalışmalarını sürdürmüştür.

Maddala, en küçük kareler yöntemi ve kovaryans analizi tekniklerini kullanırken normallik varsayımına gerek duyulmadığı, ancak en çok olabilirlik yönteminde gerekli olduğundan normallik varsayımı altında çalışmıştır.

Maddala'nın çalışmasında, eğer; varyans bilinmiyorsa iki uygun yöntem kullanılabilir: (i) en çok olabilirlik yöntemi , (ii) kovaryans teknikleri analizini kullanarak varyanslar için yansız tahmin ediciler elde etmek ve bu tahmin edicileri iki adımlı en küçük kareler yönteminde kullanmak Ama (ii) yönteminden yansız tahmin ediciler elde edilemeyeceğinden dolayı en çok olabilirlik yöntemine başvurulmuştur.

Daha sonra bir örnek üzerinde tahmin edicileri karşılaştırmıştır.(bak. Maddala (1971))

Wallace ve Hussian (1969) ve Amemiya (1971) tarafından kullanılan model Nerlove (1971)tarafından da kullanılmış ve etkili tahmin ediciler elde edilmiştir. Yazarlar , önerdikleri tahmin edicilerin asimptotik özelliklerini incelemişlerdir.

Hsiao (1975) bireyler ve zamanın rasgele değişmesi durumunda açıklayıcı değişkenin katsayılarını tahmin etmek için genelleştirilmiş en küçük kareler ve en küçük normlu yansız karesel tahmin edici yöntemini kullanmıştır. Bilinmeyen varyansın tahmini içinse en çok olabilirlik tahmin yönteminden yararlanmıştır. Daha sonra bu modellerin etkinliğini inceleyen tahmin edilen kovaryans matrisini kullanarak genelleştirilmiş en küçük kareler yönteminin asimptotik etkinliği için sonuçlar elde etmiştir.

Hsiao (1975) varyansın bilinmediği durumda regresyon katsayıları ve varyansın tahmini için en çok olabilirlik tahmin edicisini kullanarak önerdiği farklı tahmin edicilerin birbirine eşit olduğunu göstermiştir.

Raj (1975) çalışmasında kullanılan alternatif tahmin edici yöntemlerini karşılaştırarak, tahmin edicilerin örneklem özelliklerini incelemiştir.

Mundlak (1963)'a göre üretim fonksiyonunun parametre tahmini, idareyi gösteren değişkenin dışlanmasının bir sonucu olarak yanlılığa konu olmuştur. Yazar çapraz kesit analizlerinden idarenin dışlanmasının sebebi olarak ta ünitelerin direk ölçümlerinin eksikliğinden kaynaklandığını ileri sürmüştür.

Yazar idare değişkeninin ne olduğunu ifade etmeden önce; idarenin tüm zaman ve kısa periyodik dönemler boyunca değişmeden kaldığını varsaymıştır. Bu varsayım altında üretim fonksiyonunun rasgele katsayılarının yansız tahmin edicilerini elde etmek için kovaryans analizinin nasıl kullanıldığını gösterirken Cobb-Douglas modelini örnek almıştır.

Swamy (1970) ile başlayan Rasgele Katsayılı Lineer Modeller üzerine çalışmalar; Kara (1981), Raj ve Ulah(1981), Leeuw (1986), Newbold(1988), Beran ve Hall (1992), Beran (1995), Western (1998), Beck ve Katz (2004) , Hsiao ve Pesaran (2004) ile devam etmiştir.

3. GENEL LİNEER MODEL

Giriş bölümünde tanıtılan

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

Genel Lineer Modeli için aşağıdaki üç durum göz önüne alınsın.

1.Durum : $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$

2.Durum: $\underline{\varepsilon}$ bilinmeyen bir dağılıma sahiptir ve $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}, Cov(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 I$ dır. Bu durum $\underline{\varepsilon} \sim (\underline{0}, \sigma^2 I)$ biçiminde gösterilsin.

3. Durum: $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$, $Cov(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 V$, V bilinen pozitif tanımlı bir matris olsun.

3.1 Birinci Durum ($\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$)

Model tam ranklı, yani $rank(X : n \times p) = p$ olsun.

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \ , \ \underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I) \tag{3.1.1}$$

$$\underline{Y}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} , X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} , \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} , \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y} \sim N(X\underline{\beta}, \sigma^2 I)$$

olmak üzere önce $\underline{\beta}$ ve σ^2 ‘nin en çok olabilirlik tahmin edicilerini bulalım.

3.1.1 Parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri

Olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y})=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n(\sigma^2)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})} \tag{3.1.2}$$

ve logaritması,

$$\ln L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y})=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}'\underline{Y}-2\underline{Y}'X\underline{\beta}+\underline{\beta}'X'X\underline{\beta}) \tag{3.1.3}$$

dır. $\Theta=\left\{(\underline{\beta},\sigma^2):-\infty<\beta_i<\infty, i=1,2,...,p,\sigma^2>0\right\}$ parametre kümesi üzerinde $L(\underline{\beta},\sigma^2)$ veya $\ln L(\underline{\beta},\sigma^2)$ fonksiyonunu maksimum yapan $\underline{\beta}$ ve σ^2 yi bulmak için,

$$\frac{\partial}{\partial\underline{\beta}}(\ln L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y}))=-\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'\underline{Y}+2X'X\underline{\beta})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}(\ln L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y}))=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})$$

birinci türevlerin sıfıra eşitlenmesiyle,

$$\frac{1}{\sigma^2}(X'\underline{Y}-X'X\underline{\beta})=0$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})=0$$

veya

$$\begin{cases} X'X\underline{\beta} = X'\underline{Y} \\ \sigma^2 = \dfrac{(\underline{Y} - X\underline{\beta})'(\underline{Y} - X\underline{\beta})}{n} \end{cases}$$

denklem sisteminin normal denklemler ismini taşıyan,

$$X'X\underline{\beta} = X'\underline{Y} \tag{3.1.4}$$

denkleminden,

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y} \tag{3.1.5}$$

ve ikinci denklemden,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})}{n} = \frac{1}{n}\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y} \tag{3.1.6}$$

elde edilir.

Yansızlık: $\forall \underline{\beta} \in R^p$ için,

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = E((X'X)^{-1}X'\underline{Y}) = (X'X)^{-1}X'E(\underline{Y}) = (X'X)^{-1}X'E(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) = \underline{\beta}$$

olmak üzere $\hat{\underline{\beta}}$, $\underline{\beta}$ nın yansız tahmin edicisidir.

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}}{n}\right) = \frac{1}{n}E\left[\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left\{tr\left[(I - XX^{+})Cov(\underline{Y})\right] + (E\underline{Y})'(I - XX^{+})E\underline{Y}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{tr\left[(I - X(X'X)^{-1}X')\sigma^2 I\right] + (X\underline{\beta})'(I - X(X'X)^{-1}X')(X\underline{\beta})\right\}$$

$$= \frac{1}{n}tr(\sigma^2(I - X(X'X)^{-1}X')) + 0$$

$$= \frac{1}{n}\sigma^2(n - p) = \frac{n - p}{n}\sigma^2$$

olmak üzere $\hat{\sigma}^2$, σ^2 için yansız bir tahmin edici değildir. Yansızlık düzeltmesi yapılmış en çok olabilirlik tahmin edicisi, yine $\hat{\sigma}^2$ gösterimi ile

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})}{n-p} = \frac{1}{n-p}\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}$$

dır.

Yeterlilik:

(3.2) de verilen olabilirlik fonksiyonu, aynı zamanda $\underline{Y}$ 'nin (örneklemin) olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$$f(\underline{Y};\underline{\beta},\sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n(\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})} \tag{3.1.8}$$

olup,

$$\begin{aligned}(\underline{Y} - X\underline{\beta})'(\underline{Y} - X\underline{\beta}) &= (\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}} + X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}} + X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}) \\ &= (\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}) + (\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})'X'X(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}) \\ &= (n-p)\hat{\sigma}^2 + (\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})'X'X(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$f(\underline{Y};\underline{\beta},\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n-p)\hat{\sigma}^2 + (\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta})'X'X(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}})\right]}$$

$$= g(\hat{\underline{\beta}},\hat{\sigma}^2,\underline{\beta},\sigma^2)h(\underline{Y}) \tag{3.1.9}$$

biçiminde yazılabilir, burada $h(\underline{Y}) \equiv 1$ dır. $\hat{\underline{\beta}}$ *ve* $\hat{\sigma}^2$ yeterli istatistiklerdir. Bu istatistiklerin tam (complete) istatistikler olduğu da gösterilebilir (Graybill 1976). Lehmann-Scheffé Teoremine göre bu tahmin ediciler düzgün en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerdir (uniformly minimum variance unbiased estimator, UMVUE). Daha açık olarak, $\hat{\underline{\beta}}$ tahmin edicisi $\underline{\beta}$ için matrislerdeki Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisli tahmin edicidir.

$\underline{\hat{\beta}}$ *ve* $\hat{\sigma}^2$ **İle İlgili Dağılımlar:**

Modelimiz,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \ , \ \underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$$

olmak üzere,

$$\underline{Y} \sim N(X\underline{\beta}, \sigma^2 I)$$

dağılımlıdır.

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$$

olmak üzere, $\underline{Y}$' nin lineer bir fonksiyonudur. Buna göre, $\underline{\hat{\beta}}$ da normal dağılıma sahiptir.

$$E(\underline{\hat{\beta}}) = \underline{\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\underline{\hat{\beta}}) &= \text{cov}((X'X)^{-1} X'\underline{Y}) \\ &= ((X'X)^{-1} X')\,\text{cov}(\underline{Y})((X'X)^{-1} X')' \\ &= ((X'X)^{-1} X'\underline{Y})\sigma^2 I((X'X)^{-1} X'\underline{Y})' \\ &= \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

$$\underline{\hat{\beta}} \sim N(\underline{\beta}, \sigma^2 (X'X)^{-1}) \qquad (3.1.10)$$

$$\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, \sigma^2 c_{ii}) \ \ , \ i = 1, 2, ..., p \qquad (3.1.11)$$

dağılımlıdır. Burada c_{ii} , $(X'X)^{-1}$ matrisinin i. köşegen elemanıdır.

$\hat{\sigma}^2$ ile ilgili dağılımın araştırılmasına geçmeden önce, normal dağılıma sahip rasgele vektörlerin karesel formlarının dağılımı ile ilgili aşağıdaki hatırlatmayı yapalım.

$\underline{Y} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$, $rank(\Sigma_{n\times n}) = n$ ve A reel simetrik bir matris olmak üzere,

$$\underline{Y}'A\underline{Y} \sim \chi^2_{(r,\lambda=\frac{1}{2}\underline{\mu}'A\underline{\mu})} \Leftrightarrow A\Sigma \ idempotent \ ve \ rank(A) = r$$

dır (Graybill 1976).

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-p}\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}$ olmak üzere,

$$Q = \frac{\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}}{\sigma^2}$$

karasel formunu göz önüne alalım. Yukarıdaki hatırlatmada; $\underline{Y} \sim N(X\underline{\beta}, \sigma^2 I)$, $A = \dfrac{1}{\sigma^2}(I - X(X'X)^{-1}X')$, $\Sigma = \sigma^2 I$ ve

$$A\Sigma = \frac{1}{\sigma^2}(I - X(X'X)^{-1}X')\sigma^2 I = I - X(X'X)^{-1}X' \quad \text{(idempotent)}$$

$$rank(A) = n - p$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(X\underline{\beta})'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]X\underline{\beta}$$

$$= 0$$

olduğundan,

$$\frac{\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-p)} \qquad (3.1.12)$$

merkezi ki-kare dağılımına sahiptir. Böylece,

$$\frac{\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}}{\sigma^2} = \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-p)}$$

dır.

$\hat{\underline{\beta}}$ ile $\hat{\sigma}^2$ nin bağımsızlığı:

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y} \ , \ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \underline{Y}' \left[I - X(X'X)^{-1} X' \right] \underline{Y}$$

olmak üzere,

$$X(X'X)^{-1} X' Cov(\underline{Y})(I - X(X'X)^{-1} X') = X(X'X)^{-1} X'(\sigma^2 I)(I - X(X'X)^{-1} X') = 0$$

olduğundan $\hat{\underline{\beta}}$ ile $\hat{\sigma}^2$ bağımsızdır.

$i = 1,2,\ldots,p$ için $\hat{\underline{\beta}}$ vektörünün bileşenleri için,

$$\frac{(\hat{\beta}_i - \beta_i)/\sigma\sqrt{c_{ii}}}{\sqrt{\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}/(n-p)}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}} \sim t_{(n-p)} \tag{3.1.13}$$

dır.

3.1.2 Hipotez testi

$H: q \times p$ mertebeli, rankı q olan verilmiş bir matris, $\underline{h}: q \times 1$ boyutlu verilmiş bir vektör ve $H\underline{\beta} = \underline{h}$ denklemi tutarlı olmak üzere,

$$H_0 : H\underline{\beta} = \underline{h}$$

$$H_1 : H\underline{\beta} \neq \underline{h}$$

hipotezleri için olabilirlik oranı test fonksiyonu,

$$\Phi(\underline{Y}) = \begin{cases} 1 & , \quad U(\underline{Y}) < c \\ 0 & , \quad U(\underline{Y}) > c \end{cases}$$

ve olabilirlik oranı,

$$U(\underline{Y}) = \frac{\max\limits_{(\underline{\beta},\sigma^2)\in\Theta_0} L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y})}{\max\limits_{(\underline{\beta},\sigma^2)\in\Theta} L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{Y})} \tag{3.1.14}$$

olmak üzere, α anlam düzeyinde c $(0 < c < 1)$ sabiti,

$$P_{H_0}(U(\underline{Y}) > c) = \alpha$$

olacak şekilde belirlenir. Burada,

$$\Theta_0 = \left\{(\underline{\beta}, \sigma^2) : \underline{\beta} \in R^p, \sigma^2 \in (0,\infty), H\underline{\beta} = \underline{h}\right\}$$

$$\Theta = \left\{(\underline{\beta}, \sigma^2) : \underline{\beta} \in R^p, \sigma^2 \in (0,\infty)\right\}$$

$$L(\underline{\beta}, \sigma^2; \underline{Y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y} - X\underline{\beta})'(\underline{Y} - X\underline{\beta})}$$

dır. Problem, $U(\underline{Y})$ istatistiğinin elde edilmesi ve bununla ilgili bir olasılık dağılımının bulunmasıdır. Bu istatistiğin dağılımını bulmaktansa, genellikle olabilirlik oranı testlerinde yapıldığı gibi,

$$W(\underline{Y}) = \left(U(\underline{Y})^{-\frac{n}{2}} - 1\right) . \frac{n-p}{q}$$

dönüşümü sonucu elde edilen $W(\underline{Y})$ istatistiğinin dağılımı bulunur.

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}})}{n-p}$$

olmak üzere, H_0 hipotezi doğru olduğunda,

$$W(\underline{Y}) = \frac{(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})' H' \left[H(X'X)^{-1} H'\right]^{-1} H(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})}{\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1} X')\underline{Y}} . \frac{n-p}{q} \sim F_{(q, n-p)} \qquad (3.1.15)$$

dır.

$$Cov(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) = \sigma^2 H(X'X)^{-1} H'$$

ve $Cov(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})$ nın en çok olabilirlik tahmin edicisinin,

$$\hat{C}ov(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) = \hat{\sigma}^2 H(X'X)^{-1} H'$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$W(\underline{Y}) = \frac{1}{q}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})' \left[\hat{C}ov(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})\right]^{-1} (H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}) \qquad (3.1.16)$$

biçiminde yazılabilir.

3.1.3 Güven aralıkları

Modelimiz,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \ , \ \underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I) \ , \ rank(X : n \times p) = p \ \ (n > p)$$

ve parametre kümesi,

$$\Theta = \left\{ (\underline{\beta}, \sigma^2) : \underline{\beta} \in R^p, \sigma^2 > 0 \right\}$$

olmak üzere,

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y} \sim N(\underline{\beta}, \sigma^2 (X'X)^{-1})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1} X')\underline{Y}}{n-p} \quad , \quad \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-p)}$$

olup, $\underline{\ell}'\underline{\beta}$ için $1-\alpha$ güven katsayılı alışılmış güven aralığı,

$$\left(\underline{\ell}'\underline{\beta} - t_{1-\alpha/2;n-p} \sqrt{\hat{V}ar(\underline{\ell}'\hat{\underline{\beta}})}, \underline{\ell}'\hat{\underline{\beta}} + t_{1-\alpha/2;n-p} \sqrt{\hat{V}ar(\underline{\ell}'\hat{\underline{\beta}})} \right) \tag{3.1.17}$$

veya kısaca,

$$\underline{\ell}'\hat{\underline{\beta}} \mp t_{1-\alpha/2;n-p} \sqrt{\hat{V}ar(\underline{\ell}'\hat{\underline{\beta}})}$$

dır.

σ^2 parametresi için alışılmış güven aralığı,

$$\left(\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-p}}, \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-p}} \right) \tag{3.1.18}$$

dır.

$W(\underline{Y})$ istatistiğinde $H = I$ olduğunda,

$$\frac{(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})'(X'X)(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})}{p\hat{\sigma}^2} \sim F_{(p,n-p)}$$

dır.

$$P\left(\frac{(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})'(X'X)(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})}{p\hat{\sigma}^2} \le F_{(1-\alpha,p,n-p)} \right) = 1\text{-}a \tag{3.1.19}$$

olmak üzere,

$$\left\{\underline{\beta} \ : \ (\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta})'(X'X)(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}) \leq p\hat{\sigma}^2 F_{(1-\alpha,p,n-p)}\right\} \subset R^p \tag{3.1.20}$$

kümesi R^pde bir elipsoiddir. Bu elipsoide $\underline{\beta}$ parametre vektörü için 1-a güven katsayılı güven bölgesi denir.

3.2 İkinci Durum ($\underline{Y} = X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim (\underline{0},\sigma^2 I)$)

$$\underline{Y} = X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon} \ , \ \underline{\varepsilon} \sim (\underline{0},\sigma^2 I) \ , \ rank(X_{n\times p}) = p$$

modelinde $\underline{Y}$ örnekleminin dağılımı bilinmediğinde $\underline{\beta}$ ve σ^2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri söz konusu değildir.

$$\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} = (\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})$$

karesel formunu minimum yapan $\underline{\hat{\beta}}$ vektörüne $\underline{\beta}$ nın en küçük kareler tahmin edicisi denir.

$$\min_{\underline{\beta}}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta}) = (\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}})'(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}})$$

ve

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}$$

olmak üzere, $\underline{\hat{\beta}}$ tahmin edicisine bağlı olan ve σ^2 nin yansız tahmin edicisi olan,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\underline{Y}'(I-X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}}{n-p} = \frac{(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}})'(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}})}{n-p}$$

tahmin edicisine de alışılagelmiş olarak σ^2nin en küçük kareler tahmin edicisi denir.

$\underline{\hat{\beta}}$ ve $\hat{\sigma}^2$ tahmin edicileri sırasıyla $\underline{\beta}$ ve σ^2 için yansız tahmin ediciler olmak üzere, bunların diğer istatistiksel özellikleri nedir? Bu tahmin edicilerin dağılımları hakkında küçük örneklemler için herhangi bir şey söylenemez. Büyük örneklemler için (yani $n \to \infty$ için) $\underline{\hat{\beta}}_n$ nın dağılımı yaklaşık olarak $\underline{\beta}$ ortalama vektörü ve $\hat{\sigma}^2(X'_{n\times p}X_{n\times p})^{-1}$ kovaryans matrisi ile normal dağılıma sahip olduğu söylenebilir.

$\underline{\ell} : p \times 1$ bilinen bir vektör olmak üzere, $\underline{\ell}' \underline{\beta}$ nın lineer tahmin edicilerinin,

$$\Im = \left\{ T(\underline{Y}) : \ T(\underline{Y}) = \underline{a}' \underline{Y} + a_0 \ \ , \underline{a} \in R^n \ , a_0 \in R \right\}$$

sınıfında bir $T^*(\underline{Y}) \in \Im$ tahmin edicisi her $\underline{\beta}$ için,

$$E(T^*(\underline{Y})) = \underline{\ell}' \underline{\beta}$$

ve

$$Var(T^*(\underline{Y})) \leq Var(T(\underline{Y})) \ \ , \ \forall T(\underline{Y}) \in \Im$$

özelliklerine sahip ise $T^*(\underline{Y})$ tahmin edicisine $\underline{\ell}' \underline{\beta}$ nın minimum varyans lineer yansız veya kısaca en iyi lineer yansız (best linear unbiased, BLU) tahmin edicisi denir.

Gauss-Markov Teoremine göre,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \ \ , \ \mathrm{E}(\underline{\varepsilon}) = \underline{0} \ \ , \ Cov(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 I \ \ , \ rank(X_{n \times p}) = p$$

modelinde $\underline{\beta}$ parametre vektörünün Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisli lineer yansız tahmin edicisi

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y} \tag{3.1.21}$$

dır. $\underline{\ell}' \underline{\beta}$ nın en iyi liner yansız tahmin edicisi $\underline{\ell}' \hat{\underline{\beta}}$ dır.

σ^2 parametresi için

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\underline{Y}' (I - X(X'X)^{-1} X')\underline{Y}}{n - p} \tag{3.1.22}$$

tahmin edicisi, $\underline{Y}$ nin bir karesel formu biçiminde olup yansız tahmin ediciler arasında minimum varyanslıdır. $\hat{\sigma}^2$ ye σ^2 nin en iyi karesel yansız (best quadratic unbiased) tahmin edicisi denir (Graybill 1976).

3.3 Üçüncü Durum ($\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 V)$)

Bu kısımda ilk önce, V bilinen pozitif tanımlı bir matris olmak üzere $Cov(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 V$ durumu ele alınacaktır. Daha sonra $Cov(\underline{\varepsilon}) = \Sigma$ ve Σ 'nın bir pozitif tanımlı matris olması durumu ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 V)$, V bilinen pozitif tanımlı bir matris, $\mathrm{rank}(\mathrm{X}_{\mathrm{n \times p}}) = p$ modelinde $V_{n \times n}$ matrisinin, $rank(G_{n \times n}) = n$ olan bir G matrisi cinsinden ayrışımı,

$$V = G'G$$

olmak üzere modelin her iki tarafı soldan $(G')^{-1}$ ile çarpılsın.

$$\underline{Z} = (G')^{-1}\underline{Y} \sim N((G')^{-1} X\underline{\beta}, \sigma^2 I)$$

$$\underline{\eta} = (G')^{-1}\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$$

ve $A = (G')^{-1} X$ için model,

$$\underline{Z} = A\underline{\beta} + \underline{\eta}$$

olarak yazıldığında,

$$\hat{\underline{\beta}} = (A'A)^{-1} A'\underline{Z} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}\underline{Y} \qquad (3.1.23)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{\underline{Z}'\left[I - A(A'A)^{-1}A'\right]\underline{Z}}{n-p} \\ &= \frac{\underline{Y}'\left[V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]\underline{Y}}{n-p} \end{aligned} \qquad (3.1.24)$$

tahmin edicileri sırasıyla $\underline{\beta}$ ve σ^2 için düzgün minimum varyans yansız (UMVU) tahmin edicilerdir. Bunlara Aitken tahmin edicileri denir. Ayrıca,

$$\hat{\underline{\beta}} \sim N(\underline{\beta}, \sigma^2 (X'V^{-1}X)^{-1}) \qquad (3.1.25)$$

ve

$$\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-p)} \qquad (3.1.26)$$

dağılımlıdır.

$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \Sigma)$, Σ pozitif tanımlı matris, $\mathrm{rank}(\mathrm{X}_{\mathrm{n}\times\mathrm{p}}) = p$ modelinde $\underline{\beta}$ parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicisini bulmaya kalkıştığımızda,

$$\underline{\tilde{\beta}} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\underline{Y} \tag{3.1.27}$$

biçiminde bir ifade ortaya çıkmaktadır. Σ bilinmediğinden $\underline{\tilde{\beta}}$ bir tahmin edici olarak kullanılamaz. Diğer taraftan $\underline{\beta}$ nın en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}$$

dır. Bu tahmin ediciye $\underline{\beta}$ nın alışılmış en küçük kareler (ordinary least squares, OLS) tahmin edicisi denir. Doğal olarak $\underline{\hat{\beta}} \neq \underline{\tilde{\beta}}$ olduğunda OLS tahmin edicisi UMVU tahmin edicisi olmayacaktır. Acaba hangi şartlarda OLS tahmin edicisi UMVU tahmin edicisi olmaktadır?

$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \Sigma)$ modelinde en küçük kareler tahmni edicisi olan $(X'X)^{-1}X'\underline{Y}$ nin $\underline{\beta}$ için UMVU tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart,

$$\Sigma X = XF \tag{3.1.28}$$

olacak şekilde singüler olmayan bir $F : p \times p$ matrisinin var olmasıdır. Örneğin, $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \Sigma)$, $\underline{X} = \left[\underline{1}, \underline{X}_2, \cdots, \underline{X}_p\right]$ modelinde,

$$\Sigma_{n\times n} = \sigma^2(1-\rho)I + \sigma^2\rho J = \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{-1}{n-1} < \rho < 1$$

biçiminde ise en küçük kareler tahmin edicisi UMVU tahmin edicisidir (Graybill 1976).

4. SWAMY TİPİ RASGELE KATSAYILI LİNEER MODEL

Genel Lineer Modellerde katsayıları oluşturan parametrelerin gözlenen birimler boyunca sabit kaldığı varsayılmaktadır. Buna uymayan bazı olguların modellenmesinde, rasgele katsayılı lineer modeller kullanılmaktadır.

4.1 Modelin Tanıtılması

m tane birimin (örneğin ülke) her biri üzerinden *n* tane (örneğin yıllara göre) Y_{ij} (i=1,2,…,m, j=1,2,…,n) gözlemlerinin alınması durumunda, Y bağımlı değişkenin Y_{ij} gözlenen değeri ile $X_1, X_2, ..., X_p$ açıklayıcı değişkenlerin $X_{ij1}, X_{ij2}, ..., X_{ijp}$ gözlenen değerleri arasında

$$Y_{ij} = \beta_{i1} X_{ij1} + \beta_{i2} X_{ij2} + ... + \beta_{ip} X_{ijp} + \varepsilon_{ij} \tag{4.1.1}$$

gibi bir modelin geçerli olduğu varsayılsın. i=1,2,…,m için

$$\underline{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{in} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_{i11} & X_{i12} & ... & X_{i1p} \\ X_{i21} & X_{i22} & ... & X_{i2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{in1} & X_{in2} & ... & X_{inp} \end{bmatrix}_{nxp}$$

$$\underline{\beta}_i = \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{ip} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ip} \end{bmatrix}$$

gösterimleri altında model,

$$\underline{Y}_i = \mathbf{X}_i \underline{\beta}_i + \underline{\varepsilon}_i , \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad , \tag{4.1.2}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \\ \vdots \\ \underline{Y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \underline{\beta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_m \end{bmatrix} \qquad , \tag{4.1.3}$$

biçiminde yazılabilir. i=1,2,…,m için $\underline{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, ..., \beta_{ip})'$ parametre vektörleri, $E(\underline{\beta}_i) = \underline{\overline{\beta}}$ ortalamalı ve $Cov(\underline{\beta}_i) = \Delta$ kovaryans matrisli, aynı dağılımlı bağımsız rasgele vektörler olarak düşünülsün. Bununla birlikte,

1) $E(\underline{\varepsilon}_i) = \underline{0} \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., m$

$$E(\underline{\varepsilon}_i \underline{\varepsilon}_k') = \begin{cases} \sigma_i^2 I & , \ i = k \\ 0 & , \ i \neq k \end{cases} \qquad , \quad i, k = 1, 2, ..., m \tag{4.1.4}$$

2) $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, ..., \underline{\beta}_m$ ile $\underline{\varepsilon}_1, \underline{\varepsilon}_2, ..., \underline{\varepsilon}_m$ vektörleri bağımsız

olsun.

$\underline{\beta}_i$ ‘ler kendi ortalamaları cinsinden,

$$\underline{\beta}_i = \underline{\overline{\beta}} + \underline{\delta}_i \qquad , \quad i=1,2,\ldots,m$$

olarak yazılıp (3.2) ‘de yerine konursa,

$$\underline{Y}_i = \mathbf{X}_i\underline{\overline{\beta}} + \mathbf{X}_i\underline{\delta}_i + \underline{\varepsilon}_i, \quad i=1,2,\ldots,m \qquad ,$$

yazılır. i=1,2,…,m için $\underline{\delta}_i$’ler bağımsız, $E(\underline{\delta}_i) = \underline{0}$, $Cov(\underline{\delta}_i) = \Delta$ ve $\underline{\delta}_i$’ler ile $\underline{\varepsilon}_i$’ler bağımsızdır. m tane model birlike,

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \\ \vdots \\ \underline{Y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \underline{\overline{\beta}} + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_m \end{bmatrix} \quad , \qquad (4.1.5)$$

biçiminde yazılabilir. Modelin sağ tarfındaki stokastik kısmında bulunan gözlenemeyen rasgele vektörler ile ilgili bazı dağılım varsayımları yapılabilir. Bu modelde başlıca amaç $\underline{\beta}_i$ rasgele katsayılarının ortalaması olan $\underline{\overline{\beta}}$ parametre vektörünü ile Δ kovaryans matrisini ve $\underline{\varepsilon}_i$ hata terimleri ile ilgili σ_i^2 parametrelerini tahmin etmek olacaktır.

(4.1.5) deki model,

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \\ \vdots \\ \underline{Y}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_m \end{bmatrix}$$

göstrimleri altında,

$$\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\overline{\beta}} + \underline{u} \qquad , \tag{4.1.6}$$

biçiminde yazılabilir. Bu model bir Genel Lineer Model Olarak ele alınabilir. Hata terimi için

$$E(\underline{u}) = E(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_m \end{bmatrix}) = \underline{0}$$

$$Cov(\underline{u}) = Cov(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_m \end{bmatrix})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} Cov(\begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_m \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix}' + Cov(\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_m \end{bmatrix})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1\Delta\mathbf{X}_1' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2\Delta\mathbf{X}_2' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m\Delta\mathbf{X}_m' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2 I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1\Delta\mathbf{X}_1' + \sigma_1^2 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2\Delta\mathbf{X}_2' + \sigma_2^2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m\Delta\mathbf{X}_m' + \sigma_m^2 I \end{bmatrix}$$

dır.

4.2 $\underline{\bar{\beta}}$ Parametre Vektörünün Tahmini

Yukarıdaki (4.1.6) modelini göz önüne alalım.

$$\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\bar{\beta}} + \underline{u}$$

ve

$$E(\underline{u}) = \underline{0}$$

$$Cov(\underline{u}) = V = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1\Delta\mathbf{X}_1' + \sigma_1^2 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2\Delta\mathbf{X}_2' + \sigma_2^2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m\Delta\mathbf{X}_m' + \sigma_m^2 I \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\underline{\bar{\beta}}$ parametre vektörünün Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi (Ordinary Least Squares Estimtor)

$$\hat{\underline{\bar{\beta}}}_{OLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\underline{Y} \tag{4.2.1}$$

dır. Bu tahmin edici yansız, yani

$$E(\hat{\underline{\beta}}_{OLS}) = E\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\underline{Y}\right) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E\left(\underline{Y}\right) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\overline{\underline{\beta}} = \overline{\underline{\beta}}$$

olup,

$$Cov(\hat{\underline{\beta}}_{OLS}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

dır.

$\overline{\underline{\beta}}$ parametre vektörünün En İyi Lineer Yansız Tahmin Edicisi (Best Linear Unbiased Estimator)

$$\hat{\underline{\beta}}_{BLU} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\underline{Y} \qquad (4.2.2)$$

olup, bu tahmin edicinin kovaryans matrisi,

$$Cov(\hat{\underline{\beta}}_{BLU}) = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

dır.

Hata terimi normal dağılıma sahip olduğunda, yani

$$\underline{\varepsilon}_i \sim N\left(\underline{0}, \sigma_i^2 I\right) \quad , \quad i = 1, 2, ..., m$$

$$\underline{\beta}_i \sim N\left(\overline{\underline{\beta}}, \Delta\right) \quad , \quad i = 1, 2, ..., m$$

olmak üzere,

$$\underline{u} \sim N\left(\underline{0}, V = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1\Delta\mathbf{X}_1' + \sigma_1^2 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2\Delta\mathbf{X}_2' + \sigma_2^2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_m\Delta\mathbf{X}_m' + \sigma_m^2 I \end{bmatrix}\right)$$

olduğunda, En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici aynı zamanda Düzgün En Küçük Kovaryans Matrisli Yansız Tahmin edicidir.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} = \left([\mathbf{X}_1' \, \mathbf{X}_2' \dots \mathbf{X}_m'] \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1\Delta\mathbf{X}_1' + \sigma_1^2 I)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbf{X}_2\Delta\mathbf{X}_2' + \sigma_2^2 I)^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\mathbf{X}_m\Delta\mathbf{X}_m' + \sigma_m^2 I)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\Delta\mathbf{X}_i' + \sigma_i^2 I)^{-1}\mathbf{X}_i\right]^{-1}$$

ve

$$\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\underline{Y} = [\mathbf{X}_1' \, \mathbf{X}_2' \dots \mathbf{X}_m'] \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1\Delta\mathbf{X}_1' + \sigma_1^2 I)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbf{X}_2\Delta\mathbf{X}_2' + \sigma_2^2 I)^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\mathbf{X}_m\Delta\mathbf{X}_m' + \sigma_m^2 I)^{-1} \end{bmatrix} \underline{Y}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\Delta\mathbf{X}_i' + \sigma_i^2 I)^{-1}\underline{Y}_i$$

olmak üzere, (4.2.2) deki En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici açık olarak aşağıdaki biçimde de yazılabilir.

$$\hat{\underline{\beta}}_{BLU} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\underline{Y}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\Delta\mathbf{X}_i' + \sigma_i^2 I)^{-1}\mathbf{X}_i\right]^{-1} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\Delta\mathbf{X}_i' + \sigma_i^2 I)^{-1}\underline{Y}_i \quad , \qquad (4.2.3)$$

Bunun ötesinde,

$$W_i = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[\Delta + \sigma_i^2 (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1} \left[\Delta + \sigma_i^2 (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \right]^{-1} \quad , \qquad i = 1, 2, ..., m$$

$$\underline{b}_i = (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i'\underline{Y}_i \quad , \qquad i = 1, 2, ..., m$$

olmak üzere,

$$\hat{\underline{\beta}}_{BLU} = \sum_{i=1}^{m} W_i \underline{b}_i$$

biçiminde yazılabilir (Swamy 1970). W_i ağırlık matrisleri bilinmeyen $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_m^2$ parametreleri ile Δ kovaryans matrisini içermektedir. Bu sebepten dolayı, $\hat{\underline{\beta}}_{BLU}$ doğrudan kullanılamaz. $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_m^2$ parametreleri ile Δ kovaryans matrisi tahmin edilip $\hat{\underline{\beta}}_{BLU}$ kullanışlı hale getirilebilir.

Görüldüğü gibi, $\hat{\underline{\beta}}_{BLU}$ tahmin edicisi $\underline{b}_i = (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i'\underline{Y}_i$ ‘lerin W_i ‘lerle ağırlıklandırılmış bir ağırlıklı ortalamasıdır. $\underline{b}_i = (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i'\underline{Y}_i$ ‘lerin eşit ağırlıklı ortalaması olan,

$$\hat{\underline{\beta}}_{ORT} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \underline{b}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i'\underline{Y}_i \quad , \qquad (4.2.4)$$

tahmin edicisi de $\underline{\bar{\beta}}$ parametre vektörünün yansız bir tahmin edicisidir.

$$E(\hat{\underline{\beta}}_{ORT}) = E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i'\underline{Y}_i \right)$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'E(\underline{Y}_i)$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\underline{\overline{\beta}}$$

$$= \underline{\overline{\beta}}$$

ve

$$Cov(\hat{\underline{\overline{\beta}}}_{ORT}) = \frac{1}{m^2}Cov\left(\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\underline{Y}_i\right)$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}Cov\left((\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\underline{Y}_i\right)$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'Cov\left(\underline{Y}_i\right)((\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i')'$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\left(\mathbf{X}_i\Delta\mathbf{X}_i' + \sigma_i^2 I\right)((\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i')'$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\Delta + \sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(m\Delta + \sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\right)$$

4.3 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_m^2$ Parametrelerinin Tahmini

Yukarıda (3.2) ile verilen

$$\underline{Y}_i = \mathbf{X}_i \underline{\beta}_i + \underline{\varepsilon}_i \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m$$

modellerinde, $i = 1, 2, \ldots, m$ için $\underline{\beta}_i$ parametre vektörleri aynı dağılımlı,

$$E(\underline{\beta}_i) = \overline{\underline{\beta}}$$

$$Cov(\underline{\beta}_i) = \Delta$$

$$E(\underline{\varepsilon}_i) = \underline{0}$$

$$Cov(\underline{\varepsilon}_i) = \sigma_i^2 I$$

$\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_m, \underline{\varepsilon}_1, \underline{\varepsilon}_2, \ldots, \underline{\varepsilon}_m$ vektörleri bağımsız

olmak üzere, her bir modelde

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\underline{Y}_i'\left(I - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\underline{Y}_i}{n-p} \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m \tag{4.3.1}$$

tahmin edicileri σ_i^2 (i=1,2,…,m) için yansız tahmin edicidir.

$$E\left(\hat{\sigma}_i^2\right) = E\left(\frac{\underline{Y}_i'\left(I - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\underline{Y}_i}{n-p}\right)$$

$$= \frac{1}{n-p} tr\left(\left(I - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)Cov(\underline{Y}_i) + E(\underline{Y}_i')\left(I - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)E(\underline{Y}_i)\right)$$

$$= \frac{1}{n-p} tr\left(\left(I - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)Cov(\underline{Y}_i) + \underbrace{\overline{\underline{\beta}}'\mathbf{X}_i'\left(I - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\mathbf{X}_i\overline{\underline{\beta}}}_{0}\right)$$

$$=\frac{1}{n-p}tr\left(\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)Cov(\underline{Y}_i)\right)$$

$$=\frac{1}{n-p}tr\left(\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\left(\mathbf{X}_i\Delta\mathbf{X}_i'+\sigma_i^2 I\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n-p}tr\left(\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\mathbf{X}_i\Delta\mathbf{X}_i'+\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\sigma_i^2 I\right)$$

$$=\frac{1}{n-p}\left(tr\left(\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\mathbf{X}_i\Delta\mathbf{X}_i'\right)+\sigma_i^2 tr\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n-p}\left(\underbrace{tr\left(\underbrace{\mathbf{X}_i'\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)}_{0}\mathbf{X}_i\Delta\right)}_{0}+\sigma_i^2 tr\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n-p}\left(\sigma_i^2 tr\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n-p}\left(\sigma_i^2\left(n-p\right)\right)$$

$$=\sigma_i^2 \qquad (4.3.2)$$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_m^2=\sigma^2$ olması durumunda,

$$\hat{\sigma}_i^2=\frac{\underline{Y}_i'\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\underline{Y}_i}{n-p} \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m$$

tahmin edicileri σ^2 için yansız birer tahmin edici olmak üzere, σ^2 için daha küçük varyanslı yansız bir tahmin edici

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\underline{Y}_i'\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\underline{Y}_i}{n-p} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{m}\underline{Y}_i'\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\underline{Y}_i}{m(n-p)}\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

dir.

4.4 Δ Kovaryans Matrisinin Tahmini

$$\underline{Y}_i = \mathbf{X}_i\underline{\beta}_i + \underline{\varepsilon}_i \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m$$

modellerinde, i=1,2,…,m için $\underline{\beta}_i$ parametre vektörleri, $E(\underline{\beta}_i) = \overline{\underline{\beta}}$ ortalamalı ve $Cov(\underline{\beta}_i) = \Delta$ kovaryans matrisli, aynı dağılımlı bağımsız rasgele vektörler olarak ele alınmıştı. Hata vektörleri için

$$E(\underline{\varepsilon}_i) = \underline{0} \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m$$

$$Cov(\underline{\varepsilon}_i) = \sigma_i^2 I \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m$$

olmak üzere $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, ..., \underline{\beta}_m, \underline{\varepsilon}_1, \underline{\varepsilon}_2, ..., \underline{\varepsilon}_m$ vektörleri bağımsız ve gözlenemezler.

Amacımız Δ kovaryans matrisini tahmin etmektir. Gözlenemeyen $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, ..., \underline{\beta}_m$ rasgele vektörleri için birer yansız öngörücü (predictor) olarak,

$$\hat{\underline{\beta}}_i = (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\underline{Y}_i \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,m$$

alınabilir.

$$E(\hat{\underline{\beta}}_i - \underline{\beta}_i) = E\left((\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\underline{Y}_i - \underline{\beta}_i \right)$$
$$= E\left((\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\underline{\beta}_i + \underline{\varepsilon}_i) - \underline{\beta}_i \right)$$
$$= E\left((\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\underline{\varepsilon}_i \right) = \underline{0}$$

Karışıklığa yol açmadığı takdirde öngörücü yerine tahmin edici diyeceğiz. $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, ..., \underline{\beta}_m$ vektörleri için birer tahmin edici olan $\hat{\underline{\beta}}_1, \hat{\underline{\beta}}_2, ..., \hat{\underline{\beta}}_m$ vektörlerini kullanarak,

$$S = \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{\beta}}_i \hat{\underline{\beta}}_i' - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{\beta}}_i \sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{\beta}}_i' \right) \qquad (4.4.1)$$

matrisini Δ için bir tahmin edici olarak alabiliriz.

$$S = \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{\beta}}_i \hat{\underline{\beta}}_i' - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{\beta}}_i \sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{\beta}}_i' \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{\beta}}_i \hat{\underline{\beta}}_i' - m\hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT} \hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT}' \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{\underline{\beta}}_i \hat{\underline{\beta}}_i' - \hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT} \hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT}' \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left((\hat{\underline{\beta}}_i \hat{\underline{\beta}}_i' - \overline{\underline{\beta}}\overline{\underline{\beta}}') - (\hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT} \hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT}' - \overline{\underline{\beta}}\overline{\underline{\beta}}') \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{\underline{\beta}}_i \hat{\underline{\beta}}_i' - \overline{\underline{\beta}}\overline{\underline{\beta}}' \right) - \sum_{i=1}^{m}\left(\hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT} \hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT}' - \overline{\underline{\beta}}\overline{\underline{\beta}}' \right) \right)$$

ve

$$E(S) = \frac{1}{m-1}\left(E\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{\underline{\beta}}_i \hat{\underline{\beta}}_i' - \overline{\underline{\beta}}\overline{\underline{\beta}}' \right) \right) - mE\left(\hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT} \hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT}' - \overline{\underline{\beta}}\overline{\underline{\beta}}' \right) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} E\left(\hat{\underline{\beta}}_i \hat{\underline{\beta}}_i' - \overline{\underline{\beta}}\overline{\underline{\beta}}' \right) - mCov(\hat{\hat{\underline{\beta}}}_{ORT}) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} E\left(\underline{\hat{\beta}}_i \underline{\hat{\beta}}_i' - E(\underline{\hat{\beta}}_i)E(\underline{\hat{\beta}}_i') \right) - mCov(\underline{\hat{\bar{\beta}}}_{ORT}) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} Cov\left(\underline{\hat{\beta}}_i \right) - mCov(\underline{\hat{\bar{\beta}}}_{ORT}) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} Cov\left((\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\underline{Y}_i \right) - mCov(\underline{\hat{\bar{\beta}}}_{ORT}) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} (\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i' Cov\left(\underline{Y}_i\right)\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} - mCov(\underline{\hat{\bar{\beta}}}_{ORT}) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \left(\Delta + \sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \right) - m\frac{1}{m^2}\left(m\Delta + \sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left(m\Delta + \sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} - m\frac{1}{m^2}\left(m\Delta + \sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1}\left((m-1)\Delta + \frac{m-1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \right)$$

$$= \Delta + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}$$

olmak üzere, S tahmin edicisi Δ için yansız değildir. Δ için yansız bir tahmin edici,

$$\hat{\Delta} = S - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} \qquad (4.4.2)$$

dır.

$$E(\hat{\Delta}) = E(S) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}E(\hat{\sigma}_i^2)(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}$$

$$= \Delta + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}$$

$$= \Delta$$

4.5 $\underline{\tilde{\tilde{\beta}}}$ Tahmin Edicisi

$\underline{\bar{\beta}}$ parametre vektörü için (4.2.3) ile verilen $\underline{\hat{\bar{\beta}}}_{BLU}$ tahmin edicisi bilinmeyen $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_m^2$ parametreleri ile Δ kovaryans matrisini içermektedir.

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_m^2$ yerine (4.3.1) den,

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\underline{Y}_i'\left(I - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\underline{Y}_i}{n-p}$$

ve Δ yerine (4.4.2) den ,

$$\hat{\Delta} = S - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}$$

tahmin edicileri yazılarak;

$$= \left[\sum_{i=1}^{m}\mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\hat{\Delta}\mathbf{X}_i' + \widehat{\sigma}_i^2 I)^{-1}\mathbf{X}_i\right]^{-1}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\hat{\Delta}\mathbf{X}_i' + \widehat{\sigma}_i^2 I)^{-1}\underline{Y}_i \quad ,$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\hat{\Delta} + \widehat{\sigma}_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}\left[\hat{\Delta} + \widehat{\sigma}_i^2(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\right]^{-1} \quad , \qquad i = 1, 2, ..., m$$

tahmin edicisi elde edilir.

4.6 Öngörü Aralıkları

1) $\underline{\varepsilon}_i \sim N\left(\underline{0},\sigma_i^2\right)$, $i=1,2,...,m$

2) $\underline{\beta}_i \sim N\left(\underline{\bar{\beta}},\Delta\right)$, $i=1,2,...,m$

3) 4.1.4 varsayımları altında ;

$$\frac{(n-p)\hat{\sigma}_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2_{n-p} \quad \text{dir.}$$

Tahmin hatası $\underline{\varepsilon}_i$ 'nin lineer bir fonksiyonu olan $(\underline{b}_i-\underline{\beta}_i)=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\underline{\varepsilon}_i$ biçiminde yazılabilir. $(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}'\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)=0$ olduğundan dolayı bu tahmin hatası karesel bir form olarak $\underline{Y}_i'\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\underline{Y}_i=\underline{\varepsilon}_i'\left(I-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'\right)\underline{\varepsilon}_i$ şeklinde ifade edilebilir.

Yukarıda verilen ifadeler aracılığıyla ;

$\dfrac{\underline{\ell}'(\underline{b}_i-\underline{\beta}_i)}{\left[\hat{\sigma}_i^2\underline{\ell}'(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\underline{\ell}\right]^{1/2}} \sim t_{(n-p)}$ dağılımına sahip olduğu söylenebilir. Burada $\underline{\ell}$ keyfi, isteksel olarak seçilen seçilen n-p boyutlu bir vektördür. $\underline{\ell}'\underline{\beta}_i$ için $1-\alpha$ olasılıklı bir öngörü aralığı $\underline{\ell}'\underline{b}_i \pm \left[\hat{\sigma}_i^2\underline{\ell}'(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\underline{\ell}\right]^{1/2} t_{1-\alpha/2}$ dir. Ayrıca ,

$$P\left\{\frac{(\underline{b}_i-\underline{\beta}_i)'(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)(\underline{b}_i-\underline{\beta}_i)}{p\hat{\sigma}_i^2}\le F_\alpha\right\}=1-\alpha \qquad (4.6.1)$$

olmak üzere tüm $\underline{\ell}'\underline{\beta}_i$ ' ler için eşanlı öngörü aralığı

$$P(\underline{\ell}'\underline{\beta}_i \in \underline{\ell}'\underline{b}_i \pm \left\{\hat{\sigma}_i^2 pF_\alpha\underline{\ell}'(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\underline{\ell}\right\}^{1/2}) \; bütün\ \underline{\ell}'ler\ için) = 1-\alpha$$

olup herhangi bir $\underline{\ell}'\underline{\beta}_i$ birleşimi için tahmin aralıkları ;

$$P(\ell'\underline{\beta}_i \in \ell'\underline{b}_i \pm \left\{\hat{\sigma}_i^2 pF_\alpha \ell'(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\ell\right\}^{1/2}) \geq 1-\alpha$$

dır.

4.7 Hipotez Testleri

4.7.1 Katsayı varyansları ile ilgili test

$H_0 : \Delta = 0 \quad , H_1 : \Delta \neq 0$ hipotezleri için Swamy (1970)'in önerdiği test istatistiği aşağıdaki gibidir.

H_0 : $\Delta = \Delta_0$ hipotezi altında

$$p\lim_{n\to\infty}\left|\hat{\Delta} - \frac{S}{m-1}\right| = 0 \tag{4.7.1}$$

özelliğini kullanarak ;

$$S = \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\underline{\hat{\beta}}_i\underline{\hat{\beta}}_i' - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\underline{\hat{\beta}}_i\sum_{i=1}^{m}\underline{\hat{\beta}}_i'\right) \qquad \text{olmak üzere ;}$$

$$p\lim_{n\to\infty}\left|\ell'\hat{\Delta}l - \ell'\frac{S}{m-1}\ell'\right| \to 0 \qquad \text{olduğu söylenebilir.}$$

Burada ℓ p x 1 boyutlu sabit elemanlı bir vektör dür. n→∞ ve m sabit iken S olasılıkta m-1 ve Δ parametreli Wishart dağılımına sahiptir. $\ell' S_\beta \ell$ m-1 serbestlik dereceli $\chi^2 \sigma_1^2$ dağılır.Burada σ_1^2 , $\ell'\Delta\ell$'ye eşittir. Böylece; $(m-1)\ell'\hat{\Delta}\ell$' nin asimptotik dağılımı m-1 serbestlik dereceli $\chi^2 \sigma_1^2$ dir.

$$(m-1)\frac{\ell'\hat{\Delta}\ell}{\ell'\Delta_0\ell} \tag{4.7.2}$$

istatistiği $\Delta = \Delta_0$ hipotezini test etmede kullanılabilir.

4.7.2 Regresyon katsayıları ile ilgili test

Ortalama katsayı vektörü $\underline{\hat{\beta}}$ 'nın gözlenen birimler boyunca rasgele değişmesi rasgele katsayılı modellerde incelenen özelliktir. Bu katsayılar eğer çapraz kesit birimleri boyunca değişmeden kalırsa model sabit etkili model olarak değerlendirilir.

$$H_0 : \underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 = ... = \underline{\beta}_m = \overline{\beta}$$

hipotezi eğer doğruysa ; $(\underline{b}_i - \underline{\beta})$ 'nin dağılımının $N_p(\underline{0}, \sigma_i^2 (X_i^{'} X_i)^{-1})$ olduğu varsayılır

Eğer farklı çapraz kesit birimleri aynı varyansa sahiplerse $\sigma_i^2 = \sigma^2$, i = 1,2,…,m , varyansların homojenliği için uygun kovaryans analizi teknikleri kullanılır. σ_i^2 'lerin farklı olduğu varsayılıyorsa; Swamy (1970)'nin önerdiği test istatistiği uygulanabilir.Bu test istatistiği;

$$H_\beta = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\underline{\hat{\beta}}_i - \underline{\tilde{\beta}})' \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i (\underline{\hat{\beta}}_i - \underline{\tilde{\beta}})}{\hat{\sigma}_i^2}$$

olup, burada

$$\underline{\tilde{\beta}} = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\hat{\sigma}_i^2} \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\hat{\sigma}_i^2} \mathbf{X}_i' \underline{y}_i \right]$$

dir ve $\underline{\tilde{\beta}}$ $\Delta = 0$ olduğu durum da $\underline{\beta}$ 'nın en iyi tahminidir.

H_β asimptotik olarak n→∞ ve m sabitken p(m-1) serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. H_β /p(m-1) yaklaşık olarak p(m-1), m(n-p) serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir.

Test istatistiğinin yanı sıra Δ matrisinin sıfıra eşit olması sabit (fixed) etkili modelle çalışıldığını gösterirken , $\Delta \neq 0$ olması rasgele etkili modelle çalışıldığını gösterir.

4.7.3 $\underline{\bar{\beta}}$ için hipotez testi

$\underline{\varepsilon}_i \sim N_n(\underline{0}, \sigma_{ii} I)$
$\underline{\beta}_i \sim N_p(\underline{\bar{\beta}}, \Delta)$

varsayımları altında;

Z= $\frac{m-p}{p(m-1)}\left[\underline{\hat{\bar{\beta}}} - \underline{\bar{\beta}}\right]' (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\left[\underline{\hat{\bar{\beta}}} - \underline{\bar{\beta}}\right]$ ‘nin asimptotik dağılımı ;

p, n-p serbestlik dereceli F dağılımıdır. $H_0 : \underline{\bar{\beta}} = \underline{\bar{\beta}}_0$ $H_1 : \underline{\bar{\beta}} \neq \underline{\bar{\beta}}_0$ hipotezini test etmek için Z istatistiğinden yararlanılabilir.

4.8 Uygulama

Çalışmanın bu kısmında Baltagi ve Griffin (1983) ‘in benzine olan talebi açıklamak için derlediği veri seti kullanılmıştır.Verilere Springer web sitesinden (GASOLİNE.DAT) ulaşılmıştır.

Veri setinde çapraz kesit birimi olarak ülkeler yer almaktadır. Bu ülkeler; Amerika, İngiltere, Türkiye, İsviçre, İsveç, Japonya, Norveç, Hollanda, İtalya, İrlanda, Yunanistan, Almanya, Fransa, Danimarka, Kanada, Belçika, Avusturya’dır.

Çalışmada 18 tane çapraz kesit birimi için, 19 yıllık veri kullanılmıştır.

Yazarlar benzine olan talep için aşağıdaki eşitlikten yararlanmışlardır..

$$\log \frac{benzin}{araçsayısı} = \beta_1 + \beta_2 \log \frac{Y}{N} + \beta_3 \log \frac{Pmg}{Pgdp} + \beta_4 \log \frac{araç}{N} + u$$

Burada benzin/araçsayısı araç başına benzin tüketimini göstermektedir.Y/N yüzde gerçek geliri, $\frac{Pmg}{Pgdp}$ gerçek benzin fiyatını, $\frac{araç}{N}$ ise oransal olarak araç stoğunu göstermektedir.

Baltagi ve Griffin (1983)’ün bu eşitliğinden yararlanarak her bir ülke için ayrı ayrı regresyon denklemleri oluşturulduktan sonra, Swamy (1970) test istatistiği kullanılarak oluşturulan bu denklemlerdeki katsayıların, çalışmanın amacına uygun olarak, rasgele değişip değişmediği incelenecektir.

Her bir çapraz kesit birimi sırasıyla regresyon katsayıları β' nın en küçük kareler tahmin edicisi kullanılarak Çizelge 4.1'deki veriler kullanılarak hesaplanacaktır.

Çizelge 4.1 Avusturya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
AVUSTURYA	1960	4,173244195	-6,474277179	-0,334547613	-9,766839569
AVUSTURYA	1961	4,1009891049	-6,426005835	-0,351327614	-9,608621845
AVUSTURYA	1962	4,0731765511	-6,407308295	-0,379517692	-9,457256552
AVUSTURYA	1963	4,0595091239	-6,370678539	-0,414251392	-9,343154947
AVUSTURYA	1964	4,037688787	-6,322246805	-0,445335362	-9,237739346
AVUSTURYA	1965	4,033983285	-6,294667914	-0,497060662	-9,123903477
AVUSTURYA	1966	4,0475365589	-6,252545451	-0,466837731	-9,019822048
AVUSTURYA	1967	4,0529106939	-6,234580709	-0,505883405	-8,934402537
AVUSTURYA	1968	4,045507048	-6,206894403	-0,522412545	-8,847967407
AVUSTURYA	1969	4,0463547891	-6,153139668	-0,559110514	-8,788686207
AVUSTURYA	1970	4,0808876731	-6,081712385	-0,596561219	-8,728199896
AVUSTURYA	1971	4,106720494	-6,043625854	-0,654459143	-8,635898234
AVUSTURYA	1972	4,128017777	-5,981051867	-0,596331841	-8,538337921
AVUSTURYA	1973	4,199380561	-5,895152832	-0,594446813	-8,487289099
AVUSTURYA	1974	4,018495372	-5,852381219	-0,466026934	-8,430404061
AVUSTURYA	1975	4,0290180751	-5,869363378	-0,454142205	-8,382814756
AVUSTURYA	1976	3,985411744	-5,811702699	-0,500083722	-8,322231914
AVUSTURYA	1977	3,9316759431	-5,833287895	-0,421915626	-8,249563179
AVUSTURYA	1978	3,922749583	-5,762023052	-0,469603119	-8,211040937

$\underline{\hat{\beta}}_{OLS} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\underline{Y}$ olmak üzere ;

$$(X_i\,'X_i)^{-1} = \begin{bmatrix} 90.5404 & 38.1190 & 0.8584 & -16.1846 \\ 38.1190 & 29.0825 & -10.7804 & -15.2143 \\ 0.8584 & -10.7804 & 14.6584 & 6.7483 \\ -16.1846 & -15.2143 & 6.7483 & 8.3230 \end{bmatrix}$$

ve

$$(X_i\,'Y_i) = \begin{bmatrix} 77.073 \\ -471.784 \\ -37.460 \\ -682.230 \end{bmatrix}$$

dir.

Buradan;

$$\hat{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 3.72607 \\ 0.75896 \\ -0.79298 \\ -0.51962 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Aynı yöntemle diğer ülkeler için hesaplamalar yapılırsa;

Belçika için ;

Çizelge 4.2 Belçika için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
BELÇİKA	1960	4,16401597	-6,215091247	-0,165709611	-9,405527025
BELÇİKA	1961	4,124355641	-6,176842928	-0,171730983	-9,303149327
BELÇİKA	1962	4,075961692	-6,12963802	-0,222291377	-9,218069984
BELÇİKA	1963	4,001266072	-6,094018799	-0,250462254	-9,11493234
BELÇİKA	1964	3,994375414	-6,036461168	-0,275910566	-9,00549067
BELÇİKA	1965	3,9515307039	-6,00725184	-0,344936952	-8,862580792
BELÇİKA	1966	3,8205378359	-5,994108428	-0,236397699	-8,754527
BELÇİKA	1967	3,9068782151	-5,964811815	-0,266994986	-8,748826915
BELÇİKA	1968	3,8286653779	-5,924692959	-0,311160755	-8,576512656
BELÇİKA	1969	3,8546012139	-5,857531949	-0,354808521	-8,521452717
BELÇİKA	1970	3,870391622	-5,797200597	-0,377940435	-8,453042944
BELÇİKA	1971	3,8722450341	-5,761049824	-0,399229916	-8,40945701
BELÇİKA	1972	3,905401926	-5,710230392	-0,310645837	-8,362587796
BELÇİKA	1973	3,8959956699	-5,644144501	-0,37309192	-8,314446889
BELÇİKA	1974	3,8182304581	-5,600727359	-0,362235632	-8,270595269
BELÇİKA	1975	3,877778414	-5,623002999	-0,364308483	-8,228847803
BELÇİKA	1976	3,8641455001	-5,567192753	-0,37896584	-8,184133679
BELÇİKA	1977	3,854311239	-5,556696637	-0,431641329	-8,138533812
BELÇİKA	1978	3,842741783	-5,532939803	-0,590949637	-8,104741067

$$\hat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 3.041926 \\ 0.8450474 \\ -0.0416508 \\ -0.6734642 \end{bmatrix},$$

Kanada için;

Çizelge 4.3 Kanada için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
KANADA	1960	4,8552384411	-5,889713473	-0,972106499	-8,3789165
KANADA	1961	4,8265553731	-5,884343618	-0,972290244	-8,346728936
KANADA	1962	4,8505325093	-5,844552303	-0,978607564	-8,320511684
KANADA	1963	4,8380800488	-5,792351665	-1,019047914	-8,269422279
KANADA	1964	4,8397604783	-5,760063369	-1,002856963	-8,252404394
KANADA	1965	4,850827846	-5,722821552	-1,017125486	-8,223621485
KANADA	1966	4,871024855	-5,671784027	-1,016944359	-8,20123634
KANADA	1967	4,8524989572	-5,608481132	-1,023597133	-8,156076074
KANADA	1968	4,868782423	-5,573924431	-1,019845238	-8,123188139
KANADA	1969	4,8644326333	-5,56085267	-1,036863891	-8,095113281
KANADA	1970	4,8995700246	-5,514762812	-1,067333082	-8,080028245
KANADA	1971	4,8950745608	-5,47991924	-1,058036755	-8,039263878
KANADA	1972	4,8893020193	-5,436602623	-1,099667032	-7,989530701
KANADA	1973	4,89969379	-5,414753492	-1,133161425	-7,942139759
KANADA	1974	4,8915906557	-5,418456118	-1,123799966	-7,900757973
KANADA	1975	4,888471343	-5,379097317	-1,185684272	-7,873312635
KANADA	1976	4,8373587579	-5,36128513	-1,061796589	-7,808424901
KANADA	1977	4,810991519	-5,336966742	-1,070844484	-7,76879257
KANADA	1978	4,855845841	-5,31127192	-1,074950728	-7,788061435

$$\hat{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 3.125948 \\ 0.3924306 \\ -0.3629129 \\ -0.4385383 \end{bmatrix},$$

Danimarka için;

Çizelge 4.4 Danimarka için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
DANİMARKA	1960	4,50198595	-6,061725596	-0,195702601	-9,326160698
DANİMARKA	1961	4,4828459381	-6,000896835	-0,253618436	-9,193135647
DANİMARKA	1962	4,385448561	-5,987476733	-0,218754003	-9,047283606
DANİMARKA	1963	4,3539971901	-5,97306003	-0,248009361	-8,952783018
DANİMARKA	1964	4,326435619	-5,894741456	-0,306549235	-8,852606667
DANİMARKA	1965	4,249453555	-5,859355859	-0,327015424	-8,761953751
DANİMARKA	1966	4,2336434839	-5,851865629	-0,396188459	-8,681540914
DANİMARKA	1967	4,2034662751	-5,82306394	-0,442573687	-8,60212141
DANİMARKA	1968	4,161687403	-5,792260435	-0,352047521	-8,533773882
DANİMARKA	1969	4,173561413	-5,72276929	-0,406879219	-8,470459448
DANİMARKA	1970	4,128807176	-5,708307301	-0,440460822	-8,427059581
DANİMARKA	1971	4,1031462929	-5,676820234	-0,454739536	-8,369399077
DANİMARKA	1972	4,082807844	-5,645990729	-0,499188634	-8,33467261
DANİMARKA	1973	4,137437795	-5,595861566	-0,432571846	-8,304602252
DANİMARKA	1974	4,000460803	-5,594865586	-0,425177196	-8,300176747
DANİMARKA	1975	4,0330145629	-5,612966605	-0,393954315	-8,274631554
DANİMARKA	1976	4,0077389471	-5,553938739	-0,353615343	-8,244086914
DANİMARKA	1977	4,005290418	-5,538730222	-0,356909167	-8,219858113
DANİMARKA	1978	4,0366010839	-5,483073522	-0,290681352	-8,195805473

$$\hat{\beta}_4 = \begin{bmatrix} 0.2368 \\ 0.0928 \\ -0.1371 \\ -0.5171 \end{bmatrix},$$

Fransa için;

Çizelge 4.5 Fransa için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
FRANSA	1960	3,9077042329	-6,264362825	-0,0195983319	-9,14570608
FRANSA	1961	3,8856225131	-6,220883071	-0,023859998	-9,044253293
FRANSA	1962	3,823666088	-6,173592484	-0,06892022	-8,930132974
FRANSA	1963	3,788996565	-6,137060236	-0,137928998	-8,818631797
FRANSA	1964	3,7670843699	-6,087236842	-0,197846462	-8,710964858
FRANSA	1965	3,760583648	-6,048527793	-0,233653249	-8,629390442
FRANSA	1966	3,7495348571	-6,000836175	-0,264271637	-8,545770986
FRANSA	1967	3,7686207529	-5,95565976	-0,294057952	-8,487369908
FRANSA	1968	3,7782304139	-5,901379697	-0,32316179	-8,425550865
FRANSA	1969	3,773460001	-5,840774005	-0,315190871	-8,369136445
FRANSA	1970	3,801582653	-5,784180922	-0,333846156	-8,327088985
FRANSA	1971	3,8259622251	-5,743143746	-0,379456667	-8,27952154
FRANSA	1972	3,8466772421	-5,699107032	-0,407816419	-8,222764105
FRANSA	1973	3,8849943329	-5,655065036	-0,475034288	-8,183904884
FRANSA	1974	3,807994935	-5,630095761	-0,216981915	-8,160327753
FRANSA	1975	3,8085488721	-5,633270593	-0,258381739	-8,145466223
FRANSA	1976	3,9081160121	-5,588335222	-0,246513092	-8,110406456
FRANSA	1977	3,812500373	-5,563417829	-0,225506808	-8,064146769
FRANSA	1978	3,7888825619	-5,530246953	-0,380759422	-8,005654903

$$\hat{\beta}_5 = \begin{bmatrix} 3.191946 \\ 1.119301 \\ -0.1943059 \\ -0.8446914 \end{bmatrix},$$

Almanya için;

Çizelge 4.6 Almanya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
ALMANYA	1960	3,916953172	-6,159837053	-0,185910784	-9,342480765
ALMANYA	1961	3,885345397	-6,120923339	-0,230953841	-9,18384062
ALMANYA	1962	3,8714840411	-6,094257521	-0,343841709	-9,037280182
ALMANYA	1963	3,848782399	-6,068360663	-0,374646721	-8,913629575
ALMANYA	1964	3,868992975	-6,013442144	-0,399652558	-8,811012892
ALMANYA	1965	3,861049164	-5,966468736	-0,43987825	-8,711887727
ALMANYA	1966	3,8807406531	-5,949067958	-0,540001969	-8,631192343
ALMANYA	1967	3,875031869	-5,960041459	-0,549981389	-8,576013446
ALMANYA	1968	3,8893615239	-5,883414266	-0,438242222	-8,515864508
ALMANYA	1969	3,8991846811	-5,829640962	-0,589231367	-8,438061231
ALMANYA	1970	3,9025204189	-5,767374066	-0,633295197	-8,361929236
ALMANYA	1971	3,932104258	-5,738019978	-0,671763109	-8,283823108
ALMANYA	1972	3,9324021681	-5,718750156	-0,717974579	-8,237161518
ALMANYA	1973	3,924155679	-5,668168999	-0,725875207	-8,19900351
ALMANYA	1974	3,8882123569	-5,663963622	-0,569828759	-8,182679819
ALMANYA	1975	3,922028648	-5,679056528	-0,564823796	-8,14734325
ALMANYA	1976	3,8964692669	-5,623840836	-0,624812978	-8,087060576
ALMANYA	1977	3,8956900509	-5,594609334	-0,597612096	-8,011101884
ALMANYA	1978	3,8838785591	-5,561733447	-0,62817279	-7,950079429

$$\hat{\beta}_6 = \begin{bmatrix} 4.263531 \\ 0.4018509 \\ -0.1670574 \\ -0.2224684 \end{bmatrix},$$

Yunanistan için;

Çizelge 4.7 Yunanistan için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
YUNANİSTAN	1960	5,0374055349	-7,164861448	-0,083547398	-12,17381369
YUNANİSTAN	1961	5,3814948731	-7,073346584	-0,104219969	-12,05168384
YUNANİSTAN	1962	5,1880716432	-7,051421689	-0,133207506	-11,90638902
YUNANİSTAN	1963	5,083411848	-6,982024528	-0,156535759	-11,7337133
YUNANİSTAN	1964	5,1786270248	-6,898712669	-0,180517723	-11,55003325
YUNANİSTAN	1965	5,0151124361	-6,822932832	-0,077939994	-11,31705094
YUNANİSTAN	1966	5,048395696	-6,775097093	-0,114918997	-11,15671499
YUNANİSTAN	1967	4,9757754289	-6,732433517	-0,137758489	-11,01085768
YUNANİSTAN	1968	4,9441602588	-6,676808657	-0,15375883	-10,84762231
YUNANİSTAN	1969	4,8947734887	-6,591103769	-0,179869974	-10,71384781
YUNANİSTAN	1970	4,8518237449	-6,510270977	-0,202524264	-10,56451649
YUNANİSTAN	1971	4,8118147383	-6,437449096	-0,067610784	-10,41771647
YUNANİSTAN	1972	4,7957087158	-6,348042089	-0,119730585	-10,28614221
YUNANİSTAN	1973	4,7685820877	-6,281170432	-0,051910292	-10,15649763
YUNANİSTAN	1974	4,6278067713	-6,324581407	0,3162535102	-10,0716746
YUNANİSTAN	1975	4,580961511	-6,271587549	0,2063157377	-9,933333816
YUNANİSTAN	1976	4,47995576	-6,224761106	0,1931931175	-9,776964511
YUNANİSTAN	1977	4,484616757	-6,20337363	0,2350296122	-9,615697774
YUNANİSTAN	1978	4,546399614	-6,151117304	0,1689603715	-9,574983486

$$\hat{\beta}_7 = \begin{bmatrix} 3.693951 \\ 0.5944343 \\ -0.3437772 \\ -0.4730193 \end{bmatrix},$$

İrlanda için;

Çizelge 4.8 İrlanda için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
İRLANDA	1960	4,270420603	-6,722465569	-0,076481181	-9,6981444
İRLANDA	1961	4,2552393669	-6,658165852	-0,120408737	-9,604868698
İRLANDA	1962	4,2084346371	-6,622812272	-0,141600394	-9,502160789
İRLANDA	1963	4,176695597	-6,591172467	-0,152329154	-9,409331937
İRLANDA	1964	4,186242773	-6,564281108	-0,244282125	-9,314420999
İRLANDA	1965	4,164895673	-6,548302555	-0,16899366	-9,219421818
İRLANDA	1966	4,1682144109	-6,551963337	-0,210719014	-9,170906303
İRLANDA	1967	4,188989564	-6,500483448	-0,173835328	-9,114685305
İRLANDA	1968	4,18111984	-6,607963138	-0,213393142	-9,017195582
İRLANDA	1969	4,208612656	-6,379742913	-0,271628419	-8,947265329
İRLANDA	1970	4,2499445181	-6,366517386	-0,32069023	-8,91892885
İRLANDA	1971	4,267117754	-6,345441139	-0,360410671	-8,871952426
İRLANDA	1972	4,270767878	-6,313570947	-0,423931306	-8,823948956
İRLANDA	1973	4,253827008	-6,29657824	-0,64567297	-8,755768002
İRLANDA	1974	4,3255853241	-6,28688463	-0,553438755	-8,745202932
İRLANDA	1975	4,248218349	-6,301955185	-0,641264161	-8,709477871
İRLANDA	1976	4,2211462271	-6,28726656	-0,661342563	-8,667224401
İRLANDA	1977	4,2415507701	-6,251130204	-0,560114826	-8,640726674
İRLANDA	1978	4,198610729	-6,193142799	-0,662778084	-8,550990571

$$\hat{\beta}_8 = \begin{bmatrix} 4.822531 \\ 0.3530967 \\ -0.993225 \\ -0.1818305 \end{bmatrix},$$

İtalya için;

Çizelge 4.9 İtalya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
ITALYA	1960	4,050728238	-6,727487472	0,1650770759	-10,14209792
ITALYA	1961	4,0452481041	-6,655348189	-0,085590383	-9,932661737
ITALYA	1962	4,0289989679	-6,599781747	-0,183512909	-9,726695236
ITALYA	1963	3,963086271	-6,552672232	-0,265414049	-9,478799766
ITALYA	1964	3,936324254	-6,629295757	-0,426096431	-9,308466224
ITALYA	1965	3,8749851811	-6,602188966	-0,327126374	-9,158017573
ITALYA	1966	3,8227352401	-6,44968253	-0,248874177	-9,0148126
ITALYA	1967	3,7858083619	-6,393500483	-0,191600476	-8,883282217
ITALYA	1968	3,7639029799	-6,334509456	-0,20616656	-8,76419692
ITALYA	1969	3,737389284	-6,282856973	-0,247566808	-8,66600403
ITALYA	1970	3,706871673	-6,240453143	-0,232715118	-8,567337642
ITALYA	1971	3,6482050719	-6,222602399	-0,148222668	-8,470968379
ITALYA	1972	3,629243426	-6,205653705	-0,215088573	-8,380175877
ITALYA	1973	3,6522633939	-6,157296732	-0,325084875	-8,316704629
ITALYA	1974	3,4994699	-6,125843883	-0,222908603	-8,262255825
ITALYA	1975	3,5156795149	-6,17010008	-0,032709131	-8,217666121
ITALYA	1976	3,4276288189	-6,119222097	0,1029279823	-8,167755915
ITALYA	1977	3,3802089569	-6,104541265	0,1641880499	-8,145660178
ITALYA	1978	3,3945044428	-6,083685256	0,0348221179	-8,112851643

$$\hat{\beta}_9 = \begin{bmatrix} 1.27393 \\ 0.117255 \\ -0.3711528 \\ -0.3561546 \end{bmatrix},$$

Japonya için;

Çizelge 4.10 Japonya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN	GELİR(X1)	BENZİN	ARAÇ

		TÜKETİMİ(Y)		FİYATI(X2)	STOĞU(X3)
JAPONYA	1960	5,9952865559	-6,986196345	-0,14532271	-12,23507894
JAPONYA	1961	5,7584836101	-6,89295143	-0,148749398	-11,87047352
JAPONYA	1962	5,6419150489	-6,80582869	-0,187314589	-11,58788475
JAPONYA	1963	5,5080817012	-6,722759798	-0,19996473	-11,27024465
JAPONYA	1964	5,275327848	-6,635915371	-0,203864326	-10,97696604
JAPONYA	1965	5,125850803	-6,585562963	-0,237865711	-10,72197991
JAPONYA	1966	5,0008214407	-6,500187963	-0,274115375	-10,46948704
JAPONYA	1967	4,8548612373	-6,37759647	-0,331672402	-10,17666187
JAPONYA	1968	4,6846663526	-6,251877284	-0,351269185	-9,881849877
JAPONYA	1969	4,518289907	-6,159308179	-0,416850189	-9,607599613
JAPONYA	1970	4,401596952	-6,058736622	-0,46203546	-9,382951726
JAPONYA	1971	4,305623621	-6,006080341	-0,43941354	-9,20939385
JAPONYA	1972	4,2229757	-5,934694172	-0,521000937	-9,054139174
JAPONYA	1973	4,0938837331	-5,835869255	-0,462707386	-8,924269532
JAPONYA	1974	4,007963901	-5,852553341	-0,190906362	-8,846519633
JAPONYA	1975	3,995984493	-5,851705841	-0,159484734	-8,77517521
JAPONYA	1976	3,9881620001	-5,800428196	-0,207265591	-8,716416559
JAPONYA	1977	3,9646719111	-5,756856304	-0,219044468	-8,65552896
JAPONYA	1978	3,9487463871	-5,708844993	-0,28707638	-8,594032393

$$\hat{\beta}_{10} = \begin{bmatrix} -1.219114 \\ -0.0480995 \\ -0.1447396 \\ -0.5607506 \end{bmatrix},$$

Hollanda için;

Çizelge 4.11 Hollanda için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)

HOLLANDA	1960	4,6462680045	-6,216364517	-0,201484804	-9,998449361
HOLLANDA	1961	4,559839938	-6,208157431	-0,215992646	-9,846711037
HOLLANDA	1962	4,471717068	-6,180613764	-0,259680081	-9,690565555
HOLLANDA	1963	4,377686978	-6,162561988	-0,297186612	-9,534029169
HOLLANDA	1964	4,31956339	-6,089914788	-0,369293894	-9,346111935
HOLLANDA	1965	4,233001576	-6,051260994	-0,341975035	-9,175164883
HOLLANDA	1966	4,168016513	-6,03886144	-0,348090075	-9,023481239
HOLLANDA	1967	4,119154995	-5,99972473	-0,312320188	-8,896225042
HOLLANDA	1968	4,0707346969	-5,946619715	-0,444504308	-8,758569511
HOLLANDA	1969	3,987689339	-5,880555673	-0,41694955	-8,634102483
HOLLANDA	1970	3,956407876	-5,838576691	-0,399545438	-8,519498225
HOLLANDA	1971	3,9478037431	-5,813040939	-0,43393029	-8,457594829
HOLLANDA	1972	3,915296331	-5,78544734	-0,319032404	-8,382630823
HOLLANDA	1973	3,8804785129	-5,747286962	-0,427281926	-8,306706615
HOLLANDA	1974	3,7113837231	-5,729251391	-0,352536847	-8,250493844
HOLLANDA	1975	3,718466264	-5,743014415	-0,434261779	-8,183298276
HOLLANDA	1976	3,7836345681	-5,703867927	-0,429083928	-8,202467904
HOLLANDA	1977	3,7766816581	-5,6867309	-0,464741953	-8,162541516
HOLLANDA	1978	3,8825941949	-5,660663408	-0,557914587	-8,156008092

$$\hat{\beta}_{11} = \begin{bmatrix} 0.6232695 \\ 0.3628209 \\ -0.4022817 \\ -0.618828 \end{bmatrix},$$

Norveç için;

Çizelge 4.12 Norveç için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
NORVEÇ	1960	4,43504067	-6,090356145	-0,139689574	-9,675052247

NORVEÇ	1961	4,33271925	-6,037156631	-0,157905136	-9,471597217
NORVEÇ	1962	4,2342411029	-6,012896915	-0,199088094	-9,329567153
NORVEÇ	1963	4,216189342	-5,966494664	-0,232633182	-9,217730579
NORVEÇ	1964	4,164351876	-5,927908906	-0,263747306	-9,091535179
NORVEÇ	1965	4,131633441	-5,881567111	-0,315931241	-8,988002947
NORVEÇ	1966	4,0846073869	-5,851222825	-0,250117265	-8,891959313
NORVEÇ	1967	4,0643140609	-5,805559834	-0,265557625	-8,802676011
NORVEÇ	1968	4,103864323	-5,773494532	-0,300367747	-8,801129125
NORVEÇ	1969	4,0868228049	-5,735318763	-0,33823045	-8,694593096
NORVEÇ	1970	4,0888057159	-5,74114385	-0,390725604	-8,628615986
NORVEÇ	1971	4,078931746	-5,699442896	-0,301272235	-8,568486486
NORVEÇ	1972	4,077257431	-5,658012777	-0,260239254	-8,514393851
NORVEÇ	1973	4,0613489569	-5,623170917	-0,33880765	-8,459655199
NORVEÇ	1974	3,9603309711	-5,578382667	-0,151009242	-8,406443854
NORVEÇ	1975	3,9960249669	-5,551885188	-0,327267568	-8,342889718
NORVEÇ	1976	3,978209728	-5,497635496	-0,35308752	-8,277292225
NORVEÇ	1977	3,988515537	-5,458066412	-0,382557621	-8,202841244
NORVEÇ	1978	4,0024867129	-5,423289054	-0,307659346	-8,171788414

$$\hat{\beta}_{12} = \begin{bmatrix} 2.913295 \\ 0.8019187 \\ -0.2309741 \\ -0.6555608 \end{bmatrix},$$

İspanya için;

Çizelge 4.13 İspanya için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
İSPANYA	1960	4,7494091723	-6,166085331	1,125310702	-11,58840261
İSPANYA	1961	4,589239364	-6,057794114	1,109562345	-11,38404662

İSPANYA	1962	4,429087629	-5,980475887	1,0570039371	-11,15777188
İSPANYA	1963	4,346497214	-5,90511863	0,9768353399	-10,98452492
İSPANYA	1964	4,300577007	-5,858529524	0,9153225397	-10,78792667
İSPANYA	1965	4,217208979	-5,800645137	0,8166605456	-10,58520034
İSPANYA	1966	4,113780911	-5,735098682	0,7567175094	-10,32972311
İSPANYA	1967	4,086322459	-5,705594054	0,7413081068	-10,10298289
İSPANYA	1968	4,0442530621	-5,657326595	0,7038645286	-9,911472722
İSPANYA	1969	3,9941031169	-5,60104588	0,6694895005	-9,720425351
İSPANYA	1970	3,96604596	-5,553247449	0,6121720823	-9,557359937
İSPANYA	1971	3,9073442129	-5,51554489	0,6069956324	-9,409956162
İSPANYA	1972	3,8912244911	-5,458712802	0,5371684362	-9,270404613
İSPANYA	1973	3,912811545	-5,373716199	0,4337716638	-9,126627162
İSPANYA	1974	3,768565146	-5,329604878	0,5249209589	-9,013303181
İSPANYA	1975	3,7524488659	-5,330925803	0,6295554457	-8,916020968
İSPANYA	1976	3,7108746111	-5,312854941	0,6838540857	-8,820635301
İSPANYA	1977	3,6507346971	-5,299089181	0,5262716679	-8,72721827
İSPANYA	1978	3,6204438709	-5,285959201	0,6214137398	-8,634696684

$$\hat{\beta}_{13} = \begin{bmatrix} -\ 1.561264 \\ -\ 0.8301728 \\ -0.0786364 \\ -0.1013223 \end{bmatrix},$$

İsveç için;

Çizelge 4.14 İsveç için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
İSVEÇ	1960	4,063010036	-8,07252353	-2,52041588	-8,742679056
İSVEÇ	1961	4,061869959	-8,019587968	-2,5714834	-8,659884953
İSVEÇ	1962	4,0064390159	-7,997248747	-2,534481582	-8,577421171

İSVEÇ	1963	4,00276563	-7,96674753	-2,605112238	-8,494311278
İSVEÇ	1964	4,024858515	-7,897582403	-2,658016262	-8,433472259
İSVEÇ	1965	4,015463106	-7,87480521	-2,644767904	-8,369491278
İSVEÇ	1966	4,0025573741	-7,860797369	-2,639014598	-8,32685654
İSVEÇ	1967	3,9973460479	-7,845462902	-2,656097622	-8,28948458
İSVEÇ	1968	3,997584757	-7,813986975	-2,679186625	-8,248230673
İSVEÇ	1969	3,9917150449	-7,771081145	-2,731904137	-8,197462437
İSVEÇ	1970	3,989372472	-7,73261017	-2,733592107	-8,164506289
İSVEÇ	1971	3,982061858	-7,760112712	-2,778845536	-8,142229717
İSVEÇ	1972	3,9800657581	-7,742511241	-2,774675366	-8,10314434
İSVEÇ	1973	4,0305604061	-7,725298502	-2,841428998	-8,087055447
İSVEÇ	1974	3,913159154	-7,689531278	-2,798406769	-8,03659939
İSVEÇ	1975	3,9738404359	-7,679556739	-2,767314605	-7,99421675
İSVEÇ	1976	3,983996505	-7,672043043	-2,822944797	-7,95606637
İSVEÇ	1977	4,0310109309	-7,707375799	-2,82005896	-7,968802233
İSVEÇ	1978	4,067373445	-7,67919589	-2,896496712	-7,971934628

$$\hat{\beta}_{14} = \begin{bmatrix} -\ 2.886083 \\ -\ 0.7103701 \\ -0.6160873 \\ 0.0399179 \end{bmatrix},$$

İsviçre için;

Çizelge 4.15 İsviçre için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
İSVİÇRE	1960	4,397621493	-6,156074462	-0,82321833	-9,262399581
İSVİÇRE	1961	4,441329648	-6,111639564	-0,865584726	-9,158228635
İSVİÇRE	1962	4,2871473959	-6,093006222	-0,822185099	-9,046144404
İSVİÇRE	1963	4,312484529	-6,068021156	-0,86012004	-8,950779661

İSVİÇRE	1964	4,3134274369	-6,021470946	-0,867676816	-8,839432143
İSVİÇRE	1965	4,288713915	-5,996086741	-0,905286677	-8,760374039
İSVİÇRE	1966	4,2663516041	-5,98161679	-0,859566654	-8,679116114
İSVİÇRE	1967	4,265918883	-5,974918426	-0,906566708	-8,619960152
İSVİÇRE	1968	4,2177878429	-5,95362793	-0,872325197	-8,544752347
İSVİÇRE	1969	4,211290089	-5,912171666	-0,918121616	-8,473378936
İSVİÇRE	1970	4,22529671	-5,878635613	-0,963441879	-8,406435313
İSVİÇRE	1971	4,280697003	-5,84866507	-1,037460815	-8,360065978
İSVİÇRE	1972	4,2591593359	-5,811492047	-0,940153449	-8,3036252
İSVİÇRE	1973	4,2298161621	-5,760412921	-0,867227561	-8,246635647
İSVİÇRE	1974	4,166363739	-5,751702636	-0,886923055	-8,205506991
İSVİÇRE	1975	4,120567757	-5,825775622	-0,884757903	-8,166076905
İSVİÇRE	1976	4,0795721801	-5,835963381	-0,907362054	-8,128749771
İSVİÇRE	1977	4,100533339	-5,820959543	-0,911472846	-8,093508269
İSVİÇRE	1978	4,050047696	-5,816847288	-1,032088113	-8,034371638

$$\hat{\beta}_{15} = \begin{bmatrix} 4.925944 \\ 1.067784 \\ -0.4047679 \\ -0.6176979 \end{bmatrix},$$

Türkiye için;

Çizelge 4.16 Türkiye için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
TÜRKİYE	1960	6,1295528491	-7,801144247	-0,253408214	-13,47518475
TÜRKİYE	1961	6,106212679	-7,786726647	-0,342523747	-13,38472764
TÜRKİYE	1962	6,0845870211	-7,836272043	-0,408204836	-13,24594155
TÜRKİYE	1963	6,0751291349	-7,631193283	-0,224991743	-13,25504535
TÜRKİYE	1964	6,064600869	-7,626898483	-0,252194478	-13,21030999

TÜRKİYE	1965	5,8230458949	-7,622026603	-0,293476137	-12,87933595
TÜRKİYE	1966	6,156644407	-7,510895218	-0,356404907	-12,95113793
TÜRKİYE	1967	6,044478582	-7,460809664	-0,335150217	-12,80185198
TÜRKİYE	1968	6,0765946269	-7,421201466	-0,365073857	-12,80735479
TÜRKİYE	1969	5,7207051419	-7,388646172	-0,298454169	-12,51854489
TÜRKİYE	1970	5,72210507	-7,324090899	-0,398826478	-12,44658277
TÜRKİYE	1971	5,6696463189	-7,182366137	-0,304618802	-12,39882712
TÜRKİYE	1972	5,5788213319	-7,083717164	-0,546374241	-12,19204422
TÜRKİYE	1973	5,68647036	-7,067421693	-0,69162023	-11,99021631
TÜRKİYE	1974	5,42772844	-7,01281427	-0,339653079	-11,75939998
TÜRKİYE	1975	5,4267771741	-6,95443862	-0,53794675	-11,55502914
TÜRKİYE	1976	5,312929193	-6,909696699	-0,751410272	-11,43164229
TÜRKİYE	1977	5,313462422	-6,893658898	-0,955524133	-11,23380033
TÜRKİYE	1978	5,1412554768	-6,888826236	-0,352909612	-11,18132506

$$\hat{\beta}_{16} = \begin{bmatrix} 0.4797548 \\ 0.318209 \\ -0.2601686 \\ -0.602915 \end{bmatrix},$$

İngiltere için;

Çizelge 4.17 İngiltere için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
İNGİLTERE	1960	4,1002442839	-6,186849218	-0,391085814	-9,117623416
İNGİLTERE	1961	4,0886358	-6,168858039	-0,451853076	-9,048891767
İNGİLTERE	1962	4,0480509119	-6,166715319	-0,422876898	-8,96688458
İNGİLTERE	1963	3,9852710359	-6,130673542	-0,463351473	-8,855942568
İNGİLTERE	1964	3,976781186	-6,086370076	-0,495774304	-8,749782326

İNGİLTERE	1965	3,968675694	-6,076894778	-0,426549154	-8,677608067
İNGİLTERE	1966	3,957212164	-6,069061518	-0,470681449	-8,618277586
İNGİLTERE	1967	3,9436308491	-6,049429088	-0,441187857	-8,544972756
İNGİLTERE	1968	3,9532027179	-6,030382551	-0,462450796	-8,501870674
İNGİLTERE	1969	3,948058368	-6,031952573	-0,383324569	-8,468118749
İNGİLTERE	1970	3,9797051949	-6,008259195	-0,418990297	-8,445136978
İNGİLTERE	1971	3,9836534009	-5,981732412	-0,461359776	-8,40279256
İNGİLTERE	1972	3,992756786	-5,973006043	-0,527772456	-8,356097915
İNGİLTERE	1973	3,995364122	-5,897564498	-0,565297177	-8,306677454
İNGİLTERE	1974	3,966961453	-5,912808404	-0,56641296	-8,285770594
İNGİLTERE	1975	3,9125838579	-5,923239238	-0,208674279	-8,276416117
İNGİLTERE	1976	3,962305336	-5,886808938	-0,273540097	-8,269374884
İNGİLTERE	1977	3,945553345	-5,871013779	-0,508862845	-8,266516794
İNGİLTERE	1978	4,0003742149	-5,840552208	-0,786529113	-8,262614078

$$\hat{\beta}_{17} = \begin{bmatrix} 4.487941 \\ 0.5605853 \\ -0.0610249 \\ -0.3323215 \end{bmatrix},$$

Amerika Birleşik Devletleri için;

Çizelge 4.18 ABD için regresyon denkleminin oluşturulmasında kullanılan veriler

ÜLKE	YIL	BENZİN TÜKETİMİ(Y)	GELİR(X1)	BENZİN FİYATI(X2)	ARAÇ STOĞU(X3)
ABD	1960	4,8239645123	-5,698373774	-1,121114893	-8,019457853
ABD	1961	4,7963170698	-5,695218272	-1,146240338	-7,999261682
ABD	1962	4,7989365652	-5,64880696	-1,161874485	-7,986407249
ABD	1963	4,7878951522	-5,626850797	-1,179915236	-7,959542486
ABD	1964	4,8082735727	-5,587146527	-1,200262225	-7,929898802
ABD	1965	4,8059545113	-5,536890722	-1,194287499	-7,900492516

ABD	1966	4,8075305603	-5,479012576	-1,190260542	-7,867977702
ABD	1967	4,8008834761	-5,464959769	-1,189912151	-7,841177323
ABD	1968	4,8341417653	-5,430212971	-1,207300594	-7,822427988
ABD	1969	4,841382713	-5,414374351	-1,22314272	-7,792706145
ABD	1970	4,8484842122	-5,421964732	-1,251763468	-7,765376424
ABD	1971	4,8602864749	-5,406042458	-1,281315598	-7,748920613
ABD	1972	4,8540732646	-5,353955638	-1,331169295	-7,680418486
ABD	1973	4,8463745073	-5,308156487	-1,290669666	-7,637692669
ABD	1974	4,7986259444	-5,32869387	-1,231466862	-7,617557615
ABD	1975	4,8049322352	-5,346189919	-1,200376972	-7,607010066
ABD	1976	4,8148907167	-5,297945516	-1,154681971	-7,574748181
ABD	1977	4,811032467	-5,256605805	-1,175909738	-7,553457696
ABD	1978	4,8184539683	-5,221232302	-1,212061827	-7,536176385

$$\hat{\beta}_{18} = \begin{bmatrix} 4.328719 \\ 0.1076773 \\ -0.2761572 \\ -0.0955605 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Ülkeler için sırasıyla regresyon denklemleri yazılırsa;

$Y= 3.73 + 0.76\ X_1 – 0.79\ X_2 – 0.52\ X_3$

$Y= 3.04 + 0.85\ X_1 – 0.04\ X_2 – 0.67\ X_3$

$Y= 3.13 + 0.39\ X_1 – 0.36\ X_2 – 0.44\ X_3$

$Y= 0.24 + 0.09\ X_1 – 0.13\ X_2 – 0.52\ X_3$

$Y= 3.19 + 1.12\ X_1 – 0.19\ X_2 – 0.84\ X_3$

$Y= 4.26 + 0.4\ X_1 – 0.17\ X_2 – 0.22\ X_3$

$Y= 3.69 + 0.59\ X_1 – 0.34\ X_2 – 0.47\ X_3$

$Y= 4.82 + 0.35\ X_1 – 0.99\ X_2 – 0.18\ X_3$

$Y= 1.27 + 0.12\ X_1 – 0.37\ X_2 – 0.36\ X_3$

$Y= -1.22 - 0.05\ X_1 – 0.14\ X_2 – 0.56\ X_3$

$Y= 0.62 + 0.36\ X_1 – 0.4\ X_2 – 0.62\ X_3$

$Y= 2.91 + 0.8\ X_1 – 0.23\ X_2 – 0.65\ X_3$

$Y= -1.56 – 0.83\ X_1 – 0.08\ X_2 – 0.1\ X_3$

$Y= -2.89 - 0.71\ X_1 – 0.62\ X_2 + 0.04\ X_3$

$Y = 4.93 + 1.07\ X_1 - 0.4\ X_2 - 0.62\ X_3$

$Y = 0.48 + 0.32\ X_1 - 0.26\ X_2 - 0.6\ X_3$

$Y = 4.49 + 0.56\ X_1 - 0.06\ X_2 - 0.33\ X_3$

$Y = 4.33 + 0.11\ X_1 - 0.28\ X_2 - 0.09\ X_3$

Regresyon katsayılarının ortalaması;

$\underline{\hat{\hat{\beta}}} = \frac{1}{18}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + ... + \hat{\beta}_{18})$'den

$$\underline{\hat{\hat{\beta}}}_{ORT} = \begin{bmatrix} 2,1928 \\ 0,3504 \\ -0,2770 \\ -0,4318 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Modelin diğer parametreleri $\hat{\sigma}^2$ ve $\hat{\Delta}$ için hesaplamalar aşağıdaki gibi yapılmıştır.

$$\sum_{i=1}^{18} \underline{Y}_i ' \underline{Y}_i = 6415.2749$$

$$\sum_{i=1}^{18} \underline{Y}_i ' \mathbf{X}_i \underline{\hat{\beta}}_i = 6415,18$$

olarak hesaplandıktan sonra;

(4.3.3) eşitliğinden;

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{18} \frac{\underline{Y}_i ' \underline{Y}_i - \underline{Y}_i ' \mathbf{X}_i \underline{\hat{\beta}}}{m(n-p)}$$ kullanılarak; i = 1,2,…,18

j = 1,2,…,19

p = 1,2,3,4

$\hat{\sigma}^2 = 0.0296$ olarak hesaplanır.

Regresyon katsayılarının varyans –kovaryans matrisini hesaplamak için aşağıdaki işlemler yapılır.

$$\sum_{i=1}^{18} \underline{\hat{\beta}_i}\,\underline{\hat{\beta}_i}' = \begin{bmatrix} 200.307 & 33.511 & -17.390 & -20.878 \\ 33.511 & 7.530 & -2.629 & -4.675 \\ -17.390 & -2.629 & 3.533 & 2.557 \\ -20.878 & -4.675 & 2.557 & 4.314 \end{bmatrix}$$

$$18\,\underline{\hat{\bar{\beta}}_i}\,\underline{\hat{\bar{\beta}}_i}' = \begin{bmatrix} 103.680 & 16.848 & -15.552 & -18.576 \\ 16.848 & 2.738 & -2.527 & -3.019 \\ -15.552 & -2.527 & 2.333 & 2.786 \\ -18.576 & -3.019 & 2.786 & 3.328 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

$$S = \sum_{i=1}^{m} (\underline{\hat{\beta}_i}\,\underline{\hat{\beta}_i}' - \underline{\hat{\bar{\beta}}_i}\,\underline{\hat{\bar{\beta}}_i}')$$ olmak üzere;

$$\frac{S}{m-1} = \begin{bmatrix} 5.68399 & 0.98018 & -0.10812 & -0.13541 \\ 0.98018 & 0.28190 & -0.00599 & -0.09744 \\ -0.10812 & -0.00599 & 0.07060 & -0.01349 \\ -0.13541 & -0.09744 & -0.01349 & 0.05799 \end{bmatrix}$$ dir.

$$\sum_{i=1}^{18} (\mathbf{X}_i{}'\mathbf{X}_i)^{-1} = \begin{bmatrix} 602.4955 & -100.9253 & 85.3184 & 134.8475 \\ -100.9253 & 129.4633 & 39.0288 & -109.6818 \\ 85.3184 & 39.0288 & 61.9890 & -25.9845 \\ 134.8475 & -109.6818 & -25.9845 & 98.1653 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2 / 18 * \sum_{i=1}^{18} (\mathbf{X}_i{}'\mathbf{X}_i)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.4468 & -0.2423 & 0.2049 & 0.3238 \\ -0.2423 & 0.3109 & 0.0937 & -0.2634 \\ 0.2049 & 0.0937 & 0.1489 & -0.0624 \\ 0.3238 & -0.2634 & -0.0624 & 0.2357 \end{bmatrix} \text{olmak üzere;}$$

(4.4.1) eşitliğinden varyans-kovaryans matrisini;

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} 4.7365 & 0.7746 & -0.0346 & -0.0688 \\ 0.7746 & 0.1873 & -0.0008 & -0.0513 \\ -0.0346 & -0.0008 & 0.0087 & -0.0082 \\ -0.0688 & -0.0513 & -0.0082 & 0.0317 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Matris işlemleri yapılarak regresyon katsayılarının ortalaması ve varyans-kovaryans matrisi hesaplandıktan sonra bu katsayıların birimden birime rasgele değişip değişmediğinin testi Swamy (1970) ’in önerdiği test istatistiği kullanılarak sınanacaktır.

$$H_0 : \underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 = \ldots \underline{\beta}_m = \underline{\beta}$$

Swamy (1970)’ye göre eğer sıfır hipotezi kabul edilirse model sabit etkilidir. Aksi durumda çalışmanın amacına uygun olarak rasgele katsayılı modelle çalışıldığı söylenebilir.

Swamy ’nin test istatistiği:

$$Z = \sum_{i=1}^{18} (\underline{\hat{\beta}}_i - \underline{\tilde{\beta}})' \mathbf{X}_i^{'} \mathbf{X}_i (\underline{\hat{\beta}}_i - \underline{\tilde{\beta}}) / \hat{\sigma}^2 \qquad \text{dir.}$$

Burada;

$$\underset{\sim}{\tilde{\beta}} = \left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X}_i^{'} \mathbf{X}_i \right]^{-1} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{X}_i^{'} \mathbf{X}_i \underline{\hat{\beta}}_i$$

dır.

$$\sum_{i=1}^{18} (\mathbf{X}_i{'}\mathbf{X}_i)^{-1} = \begin{bmatrix} 602.4955 & -100.9253 & 85.3184 & 134.8475 \\ -100.9253 & 129.4633 & 39.0288 & -109.6818 \\ 85.3184 & 39.0288 & 61.9890 & -25.9845 \\ 134.8475 & -109.6818 & -25.9845 & 98.1653 \end{bmatrix}$$ önceki işlemlerde

hesaplanmıştı.

$$\sum_{i=1}^{18} \mathbf{X}_i^{'} \mathbf{X}_i \underline{\hat{\beta}}_i = \begin{bmatrix} 91.5624 \\ -498.8616 \\ -110.5824 \\ -712.4371 \end{bmatrix}$$ ’ de hesaplandıktan sonra:

Δ=0 olduğu durumda $\underline{\bar{\beta}}$ ’nin gerçek kestirimi olan $\underline{\tilde{\beta}}$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\underline{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} 2.9060 \\ 1.1791 \\ -1.1305 \\ -0.8903 \end{bmatrix}$$

$\sum_{i=1}^{18} (\underline{\hat{\beta}}_i - \underline{\tilde{\beta}})' \mathbf{X}_i^{'} \mathbf{X}_i (\underline{\hat{\beta}}_i - \underline{\tilde{\beta}}) = 22202$ olmak üzere ;

$\frac{Z}{p(m-1)}$ değeri p(m-1) , m(n-p) serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. Hesaplanan Z değeri eğer tablo değerinden büyükse hipotez reddedilir. Yani katsayılar birimler boyunca sabit değil, rasgele değişiyor demektir.

p = 4 , m = 18 , n = 19 olmak üzere;

Z / 4(18-1) = 82.2312

$F_{68;\,278}$ = 1.32 olmak üzere hesaplanan değer tablo değerinden büyüktür . Dolayısıyla H_o reddedilir.

Ayrıca varyans-kovaryans matrisi $\Delta \neq 0$ olması da yine katsayıların rasgele değiştiğinin göstergesidir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada Genel Lineer Modeller Hakkında temel kavramlar verildikten sonra Swamy tipi Rasgele Katsayılı Lineer Model ele alınmış ve bir uygulama yapılmıştır. Regresyon denklemlerindeki katsayıların rasgele değiştiği varsayımı altında, regresyon katsayılarının ortalama vektörü $\underline{\bar{\beta}}$ ve kovaryans matrisi Δ için bazı tahmin ediciler üzerinde durulmuştur. Çalışmada $\underline{\bar{\beta}}$ parametre vektörü için göz önüne alınan $\hat{\underline{\bar{\beta}}}_{ORT}$, $\hat{\underline{\bar{\beta}}}_{OLS}$ ve $\hat{\underline{\bar{\beta}}}_{BLU}$ tahmin edicileri yansız olup, bu tahmin ediciler arasında $\hat{\underline{\bar{\beta}}}_{BLU}$ tahmin edicisi lineer yansız tahmin ediciler arasında, matrislerdeki Löwner sıralamasına göre, En Küçük Kovaryans Matrisli Tahmin Edicidir. Hata terimi normal dağılıma sahip olduğunda, bu tahmin edici yansız tahmin ediciler arasında En Küçük Kovaryans Matrisli Tahmin Edicidir.

Regresyon katsayılarının kovaryans matrisi Δ için, S ve $\hat{\Delta}$ tahmin edicileri ele alınmıştır. S tahmin edicisi Δ için yanlıdır. $\hat{\Delta}$ tahmin edicisi yanlılığı düzeltilerek S' den elde edilmiştir. Bu tahmin edici iki matris farkından oluştuğu için bazı durumlarda negatif varyans tahmini ile karşılaşılmaktadır. Böyle bir durum ortaya çıktığında model için kabul edilen varsayımlara ve parametrelerin yapısına bakılabilir. Bu çalışmada negatif varyans tahmini durumu ile karşılaşılmamıştır.

Uygulama kısmında Springer'ın Web Sitesinden benzine olan talebi araştırmak için derlenen veri seti kullanılmıştır. Swamy (1970)'in önerdiği test istatistiği kullanıldığında, test istatistiğinin değeri Z=82.2312 olarak hesaplanmıştır.$F_{68;\,278} = 1.32$ olup, hesaplanan değer tablo değerinden büyük olmak üzere, regresyon katsayılarının sabit olduğunu öne süren H_o hipotezi reddedilmiştir.

Panel veri, çapraz kesitli zaman serisi verileri için elverişli olan Rasgele Katsayılı Lineer Modeller; iktisat, işletme, sağlık, bankacılık gibi bir çok alanda uygulanabilir.

KAYNAKLAR

Amemiya, T. 1971. The Estimation Of The Variances in a Variance-Components Model, International Economic Review, No.12, pp. 1-13.

Anonymous. 1999. Springer Web Sitesi http://www.springer.com.tr. Erişim Tarihi 01.06.2008

Balestra, P. and Nerlove, M. 1966. Pooling Cross Section and Time Series Data in The Estimation of a Dynamic Model: The Demand For Natural Gas, Econometrica 34 . pp. 585-612.

Beck, N. and Katz, N. 2004. Time Series-Cross Section İssues, Dynamics 2004

Beran, R. 1995. Prediction in Random Coefficient Regression. Journal of Statical Planning and İnference, Volume 43, Issues 1-2, pp. 205-213

Beran, R. and Hall, P. 1992. Estimating Coefficient Distributions in Random Coefficient Regression, Ann. Statist. Volume 20, No. 4 , pp.1970-1984

Graybill, F. A. 1976. An İntroduction to Linear Statistical Models, Vol. 1, New York McGraw-Hill Book Company.

Henderson, C. R . 1953. Estimation of Variance and Covariance Components in Linear Models , Biometrics, Vol. 9, No. 2., pp. 226-252.

Hıldreth, C. and Houck, J. P. 1968. Some Estimators For A Linear Model With Random Coefficients, Journal Of The American Statistical Association. No. 63 , pp. 584-595.

Hoch, I .1962. Estimation of Production Function Parameters Combining Time-Series and Cross-Section Data, Econometrica, No.30, pp. 34-53.

Hsiao, C. 1975. Some Estimation Methods For A Random Coefficient Model, Econometrica , Vol. 43, No. 2 pp.305-325

Hsiao, C. and Pesaran, M.H. 2004. Random Coefficient Panel Data Models, Cesifo Working Paper Series, No. 1233 İZA Discussion Paper, No. 1236 İEPR No. 04.2

Kara, H. 1981. Rasgele Katsayılı Lineer Regresyon Modellerinde Parametre Kestiricilerinin İncelenmesi, Doktora Çalışması, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Tatbiki Matematik Kürsüsü.

Kuh, E. 1959. The Validity Of Cross-Sectionally Estimated Behavior Equations in Time Series Applications, Econometrica, No. 27 , pp.197-214.

Leeuw, J. 1986. Random Coefficient Models for Multilevel Analysis, Journal of Educational and Behavioral Statistics. Vol. 11, No. 1, pp.57-85

Maddala, G. S.1971. The Use Of Variance Components Models in Pooling Cross Section and Time Section and Time Series Data, in Measurements in Economics, Ed. C. F. Christ Et Al. Stanford

Mundlak, Y. 1961. Emprical Production Functions Free of Management Bias, Journal of Farm Economics. No. 43 , pp. 44-56

Mundlak, Y. 1963. Estimation of Production and Behavior Functions from a Combination of Cross-Section and Time Series Data, in Measurement in Economics, Ed. C. F. Christ Et Al. Stanford:Stanford University Press,

Newbold, P. 1988. Statistics for Business and Economics, İn Allgemeines Statistics. Archive. 72

Raj , B. 1975 .Lineer Regression with Random Coefficient, The Finite Sample and Convergence Properties, Journal of the American Statistical Association, No. 70 , pp. 127-137

Rao, C. R. 1970. Estimation Of Heteroscedastic Variances in Linear Models, Journal of The American Statistical Association, No. 65 , pp. 161-172.

Swamy, P. A. V. B. 1970. Efficient Inference in a Random Coefficient Regression Model , Econometrica, No. 38 , pp. 1-323.

Wald, A. 1947. A Note on Regression Analyses , Annals of Mathematical Statistics , Vol. 18 pp. 586-589

Wallace, T. D. and Hussaın, A. 1969. The Use of Error Components Models in Combining Cross Section With Time Series Data, Econometrica, No. 37, pp. 55-72.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayfer Çelik
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Yılı : 1983
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu/ Kurum ve Yılı

Lise : Yıldırım Beyazıd Süper Lisesi (1995-1999)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (1999-2005)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (Eylül 2005- Kasım 2008)

Çalıştığı Kurum :

Ziraat Bankası Uzman Yardımcısı (2008-