$$Lu \equiv x\Delta u + ku_x = x\, f(x, y)$$

ELİPTİK DENKLEMİ İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYON SINIFLARINDA BAZI PROBLEMLER

Mustafa YILDIZ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

1995

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$Lu \equiv x\Delta u + ku_x = x\, f(x, y)$ ELİPTİK DENKLEMİ İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYON SINIFLARINDA BAZI PROBLEMLER

Mustafa YILDIZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 14 / 06 / 1995 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90 (Doksan) not takdir edilerek Oy birliği / ~~Oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ömer AKIN (Danışman)	Prof. Dr. Abdullah ALTIN	Prof. Dr. Arif AMİROV

ÖZET

Doktora Tezi

$Lu \equiv x\Delta u + ku_x = x\, f(x, y)$

ELİPTİK DENKLEMİ İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYON SINIFLARINDA BAZI PROBLEMLER

Mustafa YILDIZ
Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ömer Akın
1995, Sayfa : 86
Jüri : Doç. Dr. Ömer AKIN
Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Prof. Dr. Arif AMİROV

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümü, diğer bölümlerde incelenen problemlerin anlaşılmasına yardımcı olacak şekilde düzenlenmiştir.

İkinci bölümde belirli bir D bölgesinin sınırının bir kısmında çözüm verildiğinde bu bölgenin içinde (1. 1) denklemi ile ilgili problemin çözümünün bulunması incelenmiştir. Problemin çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığı belirli uzaylarda incelenmiştir. Bu incelemelerde kullanılan yöntemler ön değerlendirmeler, Galerkin ve Carleman metodlarıdır.

Üçüncü bölümde (1 . 1) denklemine $\int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ integral ifadesi eklenerek meydana gelen denklem için 2. bölümde olduğu gibi problem incelenip benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde karışık problem incelenmiştir. Beşinci bölümde $Lu \equiv xf(x, y)$ denkleminde belirli şartlar verildiğinde (u, f) çiftinin bulunması ters problemi incelenmiştir.

Son bölüm olan, altıncı bölümde verilen Cauchy problemine $u\big|_{y_1=0} = u_2$ şartı eklenerek (u, f) çiftinin bulunması ile ilgili ters problem incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Potansiyel teori, eliptik tip diferensiyel denklem, ters problem, karışık problem, genelleştirilmiş fonksiyon, Galerkin metodu.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SOME PROBLEMS IN THE GENERALIZED FUNCTION CLASSES FOR THE ELLIPTIC EQUATION

$$Lu \equiv x\Delta u + ku_x = x\, f(x, y)$$

Mustafa YILDIZ

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ömer Akın

1995, Page :86

Jury : Assoc. Prof. Dr. Ömer Akın

Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Prof. Dr. Arif AMİROV

This work consists of six parts. The first part, which is the introduction part, organized to help, the other parts in the points of understanding.

In the second part we have been given domain D and a solution related with the equation (1. 1) given, on a part of the boundary of D. Under these conditions we examined the solution of the boundary value problem in domain D. We have also examined the properties of existency, unitincty and stability for the solution of the problem in some known spaces. In these examinations we used a priori, Galerkin and Carleman methods.

In the third part we add the term $\int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ to the equation (1. 1) and examined the solution of the new boundary value problem as in the second part. After this we obtained some results similar to the second part.

In part four, we examined the mixed problem related with the equation (1. 1).

In part five, we examined the inverse problem of finding the pair of (u , f) related with the equation Lu ≡ x f (x , 'y).

In the last part, which is the sixth part, we examined the solution of Cauchy problem related with the equation of Lu ≡ x f (x , 'y). After that we add the condition of $u\big|_{y_1=0} = u_2$ to the Cauchy problem examined the inverse problem of finding (u , f) pair.

Key Words : Potential theory, elliptic type equation, inverse problem, mixed problem generalized function, Galerkin method.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmam süresince, her türlü yardımlarını esirgemeyip engin tecrübelerinden yararlandığım, Sayın danışmanım Doç. Dr. Ömer AKIN ve değerli bilim adamı Prof. Dr. Arif AMİROV' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

C^{∞} : Sonsuz kez diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfı

C^{k} : k - ncı mertebeye kadar türevleri sürekli olan fonksiyonların sınıfı

K (D) ≡ Çap D ≡ diam D : $\max_{x,y \in D} d(x,y)$, burada d (x,y), x ve y noktaları arasındaki Öklid uzaklığıdır

D : Verilen bir bölge

$\Delta : \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2} \right)$

H^1 (D) : Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri L_2 (D)'den olan fonksiyonların sınıfı

H^2 (D) : Kendisi, birinci ve ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri L_2 (D)'den olan fonksiyonların sınıfı

$\overset{o}{H}{}^1$ (D) : Kompakt desteğe (supporta) sahip fonksiyonun kendisinin ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri L_2 (D)'den olan fonksiyonların sınıfı

L : Lineer operatör

M_A : $M_A = \{ Au : A$ verilen operatör $u \in M \}$

ρ_F : F uzayındaki metrik

σ_0 : Bölgenin sınır koşullarının verildiği kısım

∂D : D bölgesinin sınırı

$\nabla : \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

L_p : $\{ u : u$ ölçülebilir ve $\int_{R^n} |u(x)|^p \, dx < \infty, \ 1 \le p < \infty \}$

W_p^k : { u : kendisi ve k'ya kadar tüm genelleştirilmiş türevleri L_p (R^n)'den olan fonksiyonların uzayı }

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, potansiyel teoride kullanılan ,

$$Lu \equiv x\Delta u + ku_x = x\,f(x, y) \tag{1.1}$$

denklemi ve bunun bazı değişik halleri için farklı direkt ve ters problemler araştırılmıştır.

Çalışma altı bölümden meydana gelmiştir. Birinci bölüm diğer bölümlerde incelenen problemlerin anlaşılmasına yardımcı olacak şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde belirli bir D bölgesinin sınırının bir kısmında çözüm verildiğinde bu bölgenin içinde (1.1) denklemi ile ilgili problemin çözümünün bulunması üzerinde durulmuştur. İlgili problemin çözümünün varlığı, tekliği ve çözümün koşullara sürekli bağımlılığı belirli uzaylarda ispatlanmıştır. Bu incelemelerde kullanılan yöntemler ön (a priori) değerlendirmeler, Galerkin ve Carleman metodlarıdır (Mikhailov 1978).

Galerkin metodu, yaklaşık çözümlerin yardımıyla kesin çözümün bulunması metodudur.

Carleman metodu ise uygun olarak seçilmiş ağırlık fonksiyonları yardımıyla ön değerlendirmeler alınması metodudur. Burada ağırlık fonksiyonu, bölgenin sınırının koşulları verilmiş kısmında maksimum değerini alan monoton bir fonksiyondur.

Üçüncü bölümde (1.1) denklemine $\int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ integral ifadesini eklemekle oluşan denklem için 2. bölümdeki gibi bir problem incelenmiş ve Bölüm 2 'deki sonuçlara benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, D bölgesinin sınırının bir kısmında çözüm verildiğinde ve sınırın geriye kalan kısmında normal doğrultusundaki türevi verildiğinde (1.1) denklemi ile ilgili problemin çözümünün bulunması karışık sınır değer problemi araştırılmıştır.

Bu bölümde yukarıda belirtilen karışık problemin çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığı ispatlanmıştır.

İlk önce Hadamard ve Tikhonov anlamında iyi konulmuş problemler ve ters problemler hakkında kısa bilgi verelim (Tikhonov et al 1974).

1.1. Hadamard Anlamında Doğru Konulmuş Problemler

20. yüzyılın başlarında Fransız matematikçisi Hadamard iyi konulmuş problem tanımını vermiştir.

Bu tanımı,

$$Au = f \tag{1.2}$$

için verelim. U ve F metrik uzaylar olmak üzere,

$$A : U \to F$$

operatörü verilsin. (1.2) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) çifti için *Hadamard anlamında iyi konulmuş (iyi şartlı) problem* denir.

1. Her $f \in F$ için problemin U uzayında çözümü vardır.

2. Problemin çözümü U 'da tektir.

3. Problemin koşulları F 'de az değiştiğinde çözüm de U 'da az değişir.

Bu şartlardan herhangi biri gerçeklenmez ise, probleme (U, F) uzay çifti için *Hadamard anlamında kötü konulmuş (iyi konulmamış) problem* adı verilir.

Değişken katsayılı eliptik denklemler için Hadamard anlamında kötü konulmuş bir karışık probleme bakalım (Bitsadze 1981).

$f(z) = x + \frac{2i}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$ karmaşık değişkenli bir fonksiyon ve D karmaşık üst yarı düzlemde,

$$|f(z) - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}$$

eğrisi ve [0, 1] reel eksen parçası ile sınırlanmış bölge olsun. σ_0 eğrisi,

$$ds^2 = dx^2 + y^m dy^2$$

metrikli Riemann düzleminin $R = \frac{1}{2}$ yarıçaplı ve merkezi $M(\frac{1}{2}, 0)$ noktasında olan çemberdir.

D bölgesinde, $m \in N$ olmak üzere,

$$y^{m+1} u_{xx} + y u_{yy} - \frac{m}{2} u_y = 0 \tag{1.3}$$

denklemini gözönüne alalım.

(1.3) denkleminin

$$u\Big|_{\sigma_0} = \varphi(x) \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.4}$$

ve

$$u_y\Big|_{y=0} = \nu(x) \qquad 0 < x < 1 \tag{1.5}$$

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini araştıralım.

(1.3)-(1.5) problemi Hadamard anlamında kötü konulmuş problemdir. Gerçekten, D bölgesinde; karmaşık değişkenli,

$$f(z) = x + \frac{2i}{m+2}\, y^{\frac{m+2}{2}}$$

fonksiyonunun gerçel ve sanal kısımları (1.3) denkleminin çözümleridir. Açık olarak ifade edilirse ,

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$u(x,y) = x$$

$$u_x = 1,\ u_{xx} = 0\ ;\ u_y = 0\ ,\ u_{yy} = 0$$

değerleri (1.3) denkleminde yerlerine yazıldığında, $y^{m+1}\,.\,0 + y\,.\,0 - \frac{m}{2}\,.\,0 = 0$ bulunur. Benzer olarak,

$$v(x,y) = \frac{2}{m+2}\, y^{\frac{m+2}{2}}$$

$$v_y = \frac{2}{m+2}\,\cdot\,\frac{m+2}{2}\, y^{\frac{m+2}{2}-1}$$

$$v_y = y^{\frac{m}{2}}$$

$$v_{yy} = \frac{m}{2}\, y^{\frac{m-2}{2}}$$

ifadeleri (1. 3) denkleminde yerine yazıldığında,

$$y^{m+1}\,.\,0 + y\,\frac{m}{2}\, y^{\frac{m-2}{2}} - \frac{m}{2}\, y^{\frac{m}{2}} = 0$$

$$\frac{m}{2}\left(y^{\frac{m}{2}} - y^{\frac{m}{2}} \right) = 0$$

elde edilir.

Burada,
$$R_e\left(\frac{f(z)}{1-f(z)-i\,f(z)}\right)=0\ ,\ \left|f(z)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}R_e\left(\frac{f(z)}{1-f(z)-i\,f(z)}\right)=0\ ,\ y=0$$

dır. Homogen (1.3) - (1.5) probleminin sonsuz sayıda lineer bağımsız

$$u_{2k-1}=R_e\left(\frac{f(z)}{1-f(z)-i\,f(z)}\right)^{2k-1}$$
$$u_{2k}=R_e\left[i\left(\frac{f(z)}{1-f(z)-if(z)}\right)^{2k}\right]\ ,\quad k=1,2,3,\ldots$$

çözümlerinin olduğunu biliyoruz (Bitsadze 1981). Bu durumun $k = 1$ alınarak doğruluğunu gösterelim:

$k = 1$ için,

$$u_1=R_e\left(\frac{f(z)}{1-f(z)-if(z)}\right)$$
$$u_1=R_e\left(\frac{x+\frac{2i}{m+2}\,y^{\frac{m+2}{2}}}{1-x-\frac{2i}{m+2}\,y^{\frac{m+2}{2}}-ix+\frac{2}{m+2}\,y^{\frac{m+2}{2}}}\right)=$$
$$u_1=R_e\left(\frac{x+\frac{2i}{m+2}\,y^{\frac{m+2}{2}}}{1-x+\frac{2}{m+2}\,y^{\frac{m+2}{2}}-i\left(x+\frac{2}{m+2}\,y^{\frac{m+2}{2}}\right)}\right)=$$
$$z=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

eşitliğinden yararlanarak,

$$a=x\ ,\qquad b=\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}$$
$$c=1-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}},\qquad d=-x-\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}$$

olmak üzere,

$$u_1 = R_e\left\{ \frac{\left[x\left(1-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right) - \left(\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)\right]}{\left(1-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2 + \left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{i\left[\left(\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(1-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right) + x\left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)\right]}{\left(1-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2 + \left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2} \right\}$$

$$u_1 = \frac{x - x^2 + \frac{2x}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} - \frac{2x}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} - \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}}{\left(1-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2 + \left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2}$$

$$R_e\left(\frac{f(z)}{1-f(z)-i\,f(z)}\right) = 0\ , \quad \left| f(z) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

şartı altında $u_1 = 0$ bulunur. u_1 fonksiyonunun (1.3) denklemini sağladığı kolayca görülür (Bitsadze 1981).

$k = 1$ için,

$$u_{2k} = R_e\left[i\left(\frac{f(z)}{1-f(z)-if(z)}\right)^{2k}\right] \ , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

eşitliğinden,

$$u_2 = R_e\left[i\left(\frac{f(z)}{1-f(z)-if(z)}\right)^{2}\right]$$

yazılır. u_2 çözümü için de benzer işlemler yapılırsa,

$$\left| f(z) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

şartı ile birlikte $u_2 = 0$ elde edilir. Böylece gerekli türevler alınıp (1.3) denkleminde yazıldığında u_2 'de denklemin bir çözümü olur.

Bu ise (1.3) - (1.5) probleminin çözümünün tek olmamasını gösterir. Yani, (1.3) - (1.5) problemi Hadamard anlamında kötü konulmuş problemdir.

Beşinci bölümde $Lu \equiv x\ f(x, 'y)$ denkleminde belirli şartlar verildiğinde (u, f) çiftinin bulunması ters problemi incelenmiştir.

Son bölümde, $Lu \equiv x\ f(x, 'y)$ denklemi ile ilgili Cauchy problemine $u\big|_{y_1=0} = u_2$ şartı eklenerek (u, f) çiftinin bulunması ile ilgili ters problem incelenmiştir.

Bu bölümde incelenen ters problemin, beşinci bölümde araştırılan ters problemden farkı, Hadamard anlamında kuvvetli kötü konulmuş (kötü şartlı) olmasıdır.

Singüler katsayılı diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için Hadamard anlamında iyi konulmuş bazı problemler Keldish (1951), Fikera (1963), Bitsadze (1981), Vragov (1983) tarafından araştırılmıştır.

Tezde incelenen problemlerin bu çalışmalardan farkı onların Hadamard anlamında kötü konulmuş olmasıdır. Hadamard'a göre böyle problemler reel fiziksel anlamı olan pratik olayları tanımlamaz ve bu nedenle son zamanlara kadar Hadamard anlamında kötü konulmuş problemler incelenmemiştir. Ancak bir çok pratik ve teorik problem Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlere dönüşür. İşte bu nedenle tezde Hadamard anlamında kötü konulmuş problemler üzerinde durulmuştur.

2, 3, 4, 5 ve 6. bölümlerde bulunan sonuçların hepsi orijinaldir. İncelenen problemlerin karakteristik özelliği onların genellikle Hadamard anlamında iyi konulmamalarıdır.

Şimdi ters problem hakkında bilgi verelim. Matematiksel fizikte genellikle kısmi türevli denklemler için Dirichlet, Neumann, Cauchy, I., II., III. sınır değer problemleri incelenir.

Hiperbolik ve parabolik denklemler için iyi konulmuş Cauchy, I. II. ve III. sınır değer problemleri, eliptik tipten denklemler için kötü konulmuştur. Tersine olarak, Dirichlet ve Neumann problemleri hiperbolik ve parabolik denklemler için kötü, eliptik tipten denklemler için iyi konulmuşlardır.

Ultrahiperbolik ve ultraparabolik denklemler için ise bu dediğimiz problemlerin hepsi Hadamard anlamında kötü konulmuştur.

Matematiksel fizikte denklem ve koşullar verilerek problemin çözümünün bulunmasına *direkt problem* denir.

Pratikte karşılaşılan öyle problemler vardır ki, bunların çözümleri için ayrıca ek bilgi verilir. Aynı ek bilgiye göre problemdeki denklemi ve koşulları yani denklemin bir veya birkaç katsayısını veya sağ tarafını, ya da sınır koşullarından bir veya birkaçını çözümle birlikte bulmak gerekir. Böyle problemlere *ters problemler* adı verilir. Bu problemlerin karakteristik özeliği Hadamard anlamda kötü konulmuş olmalarıdır.

Ters problemler dört gruba ayrılır.

1. Ters kinematik problemler
2. Spektral analizin ters problemleri
3. Potansiyel teorinin ters problemleri
4. Kısmi türevli denklemler için ters problemler

İlk ters problem 20. yüzyılın başlarında Helmholtz ve Gerver tarafından incelenmiş olan ters kinematik problemdir. 1929 yılında Sturm – Liouville problemi için ters problem Borg ve Ambartsumyan tarafından incelenmiştir.

Problemin spektrumu verildiğinde potansiyelin bulunması problemi incelenmiştir. 1940 'lı yıllarda Novikoff (1938) ve Tikhonov (1943) dış potansiyele göre bölgenin bulunması ters problemi incelemişlerdir. Daha sonra 1950 'lerde Sturm - Liouville probleminin saçılım koşulları ve bu tür başka koşullar verildiğinde potansiyelin bulunması problemini incelemişlerdir.

Böyle problemler Gelfand and Levitan (1951), Krein (1954), Marchenko (1977), Gasımov ve başkaları tarafından da incelenmiştir.

Son zamanlarda böyle problemlere ilgi yeniden artmıştır. Çünkü böyle problemlerin çözümleri yardımıyla, matematiksel fiziğin önemli birçok lineer olmayan denklemlerin çözümleri bulunmuştur. Örneğin, Korteweg de Vrize ($u_t = u_{xxx} + 6u\, u_x$) ve Sin - Gordan ($\sin u = f$) denklemleri (Lavrent'ev et al 1986).

Uhlmann and Selvester (1987), Novikov (1988), Amirov (1991) ve başkaları ise 1990'lı yıllarda Sturm-Liouville denklemi için ters problemin çok boyutlu uzaylarda benzerlerini araştırmışlardır.

Ters problemler, spektral analizin dışında bazı kısmi türevli denklemler içinde incelenebilir. Bu yönde ilk araştırmayı 1950 'li yılların sonlarında Berezanskii (1958) yapmıştır.

Lavrent'ev and Romanov (1966) böyle problemler ile sistematik olarak çalışmaya başlayarak, konu ile ilgili hiperbolik, parabolik ve eliptik denklemler için pek çok çalışma yapmışlardır.

Yukarıda bahsedilen dört tip ters problem arasında çok yakın ilişkiler vardır. Böyle problemlerin Tikhonov anlamında doğru konulmuş olduğunu analiz etmek çok önemlidir. Dolayısıyla, yukarıda belirtilen tip problemleri araştıracağız.

Bir problemin bir uzay çifti için kötü, başka bir uzay çifti için iyi konulmuş olması mümkündür. Örneğin türev bulma problemi $A \equiv \frac{d}{dx}$; ($u(0) = 0$ ve sürekli diferansiyellenebilen $u(x)$ fonksiyonlarının kümesi A 'nın tanım bölgesi olsun),

$$C[0,1] = \{u \mid u : [0,1] \to R \text{ sürekli}\}$$
$$\|u\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} \{|u(t)|\}$$

ve

$$C^1[0,1] = \{u \mid u : [0,1] \to R \text{ sürekli diferansiyellenebilir}\}$$
$$\|u\|_{C^1[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} \{|u(t)| + |u'(t)|\}$$

olmak üzere, $(C[0,1], C[0,1])$ uzay çifti için kötü konulmuş; $(C^1[0,1], C[0,1])$ uzay çifti için ise iyi konulmuştur.

Gerçekten,

$$u_n = \frac{1}{n}\sin n^2x \ , \quad u_n' = n\cos n^2x \ ,$$

yani,

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n(x)\|_C \to 0$$

fakat

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n'(x)\|_C \to \infty$$

dır. Benzer durum,

$$(C^1[0,1], C(0,1])$$

için

$$\|u_n'(x)\|_C \le \|u_n(x)\|_{C^1}$$

olup türev bulma problemi $(C^1[0,1], C[0,1])$ uzay çifti için iyi konulmuştur.

Herhangi bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2) de *zayıf kötü konulmuş problem* denir. Burada uzayların metrikleri fonksiyonun kendisi ve sonlu sayıda türevleri yardımıyla tanımlanmıştır. Örneğin türev bulma problemi $(C[0,1], C[0,1])$ uzay çiftinde zayıf kötü konulmuş problemdir.

Normları sonlu sayıda türevlerden meydana gelmiş uzay çiftlerinden hiçbirisinde iyi konulamayan problemlere de *kuvvetli kötü konulmuş problem* denir.

Örnek 1 .1 :

Laplace denklemi için Cauchy problemi kuvvetli kötü konulmuş problemdir.

İspat :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

denklemini

$$\{0 < x < \pi , \quad 0 < y < 1\}$$

bölgesinde inceleyelim. Cauchy şartları olarak,

$$u(x, 0) = 0 , \quad u_y(x, 0) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx$$

alalım. O zaman problemin tek çözümü,

$$u(x, y) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \sin nx \cdot \text{sh}\, ny$$

dır. $n \to \infty$ için $e^{-\sqrt{n}} \sin nx$ 'in tüm normları sonlu sayıda türevlerinden oluşan uzayda sıfıra yaklaşır, fakat

$$\frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \sin nx \cdot \text{sh}\, ny$$

$y \neq 0$ için tüm böyle uzaylarda $+\infty$ 'a yaklaşır. $y = 0$ için de sıfıra yaklaşır.

Örnek 1.2 :

Teldeki ısının değişimini gözönüne alalım. Bu olayın ısı denklemi ile ifade edildiği bilinmektedir. Isı denklemi

$$u_t = \Delta u$$

dır. Cauchy şartı olarak telin $t = T$ anındaki sıcaklığını ele alalım.

Eğer teldeki ısıyı $t > T$ için bulmak istersek o zaman uygun uzaylarda iyi konulmuş Cauchy problemini elde ederiz. Bu durum, kısmi türevli denklemler teorisinden iyi bilinmektedir. Bizim için önemli olan $t < T$ için telin ısısı nedir? Bu durumda kötü konulmuş Cauchy problemi ile karşılaşırız. Gerçekten, son problemi aşağıdaki cinsten bir probleme dönüştürmek mümkündür.

$$u_t - \Delta u = 0 , \quad u\big|_{t=T} = \varphi(x) \quad \text{ve} \quad o < t < T$$

şartını sağlayan $u(x, t)$ çözümünü bulalım.

Basitlik için;

$$\{0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T\}$$

bölgesinde

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

homogen sınır şartlarını sağlayan ve

$$u(x, T) = \varphi(x)$$

olan ısı denkleminin $u(x, t)$ çözümünün $t = 0$ anındaki değerinin bulunması problemine bakalım, yani $u(x, 0) = ?$ sorusuna cevap arayalım.

Kolayca görüleceği gibi eğer $\varphi(x) = \alpha \sin nx$ ise $u(x, 0) = \alpha e^{n^2 T} \sin nx$ olur, burada $\alpha = e^{-\sqrt{n}}$ 'dir. Bu problemin kötü konulmuş problem olduğu açıktır ve ispatı da örnek 1.1'de olduğu gibidir.

Bundan böyle, kötü konulmuş problem denildiğinde kuvvetli kötü konulmuş problem anlayacağız.

Hadamard'a göre böyle problemler reel fiziksel anlamı olan pratik olayları tanımlamaz. Çünkü pratikte her zaman koşullar belirli bir hata ile verilir. Örneğin herbir aletin hatası vardır. Bu nedenle hatalı koşullara uygun çözüm kesin çözümden çok farklı olabilir ve pratik olarak yanlış sonuçlar elde etmiş olabiliriz. Birçok matematikçi önceleri sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemleri incelemiştir. Ancak, birçok pratik problem, Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlere dönüşerek ister istemez matematikçilerin karşısına çıkmıştır. Örneğin, Hadamard'ın kendisinin gösterdiği kötü konulmuş problem, Laplace denklemi için Cauchy problemidir. Bu problem elektromanyetik alanların bulunması problemi ile ilgilidir (Lavrent'ev et al 1986).

1.2. Tikhonov Anlamında İyi Konulmuş Problemler (İyi şartlı Problemler)

Tikhonov, Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerin gerekliliğini ortaya koyarak, kendisini fiziksel yönden doğrulayan şartı iyi konulmuş problem tanımını vermiştir (Tikhonov et al 1974).

(1.2) denkleminin aşağıdaki üç özelliği sağlayan çözümünün bulunması problemine (U,F) çifti için *Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem* denir:

1. U bir metrik uzay olmak üzere, problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ cümlesine aittir.

2. Problemin çözümü M 'de tektir.

3. Problemin çözümü M 'de koşullara sürekli bağımlıdır. Yani, çözümü M cümlesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de M'de sonsuz küçük değişir.

M cümlesine problemin doğruluk cümlesi denir ve genellikle M kompakt olarak seçilir. İleride kullanacağımız için aşağıdaki teoremi ispat etmek yararlı olacaktır:

Teorem 1.1 : (A.N. Tikhonov 1974)

X, F Banach uzayları ve

$$A : X \to F$$

lineer kompakt operatör olsun. $M \subset X$ kompakt cümle, $x \in X$ ve $f \in F$ olmak üzere,

$$Ax = f \tag{1.6}$$

denkleminin çözümü tek ise bu çözüm M cümlesinde f 'ye düzgün sürekli olarak bağımlıdır. Başka bir ifadeyle her $\varepsilon > 0$ ve $\forall\, x_1, x_2 \in M$ için

$$||x_1 - x_2|| \leq \varepsilon$$

iken,

$$||Ax_1 - Ax_2|| \leq \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır.

İspat:

Olmayana ergi yöntemini uygulayalım, her $\delta > 0$ için $x_{1\delta}, x_{2\delta} \in M$ olmak üzere,

$$||x_{1\delta} - x_{2\delta}|| > \varepsilon$$

iken,

$$||Ax_{1\delta} - Ax_{2\delta}|| \le \delta$$

sağlanacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ var olsun. $\lim\limits_{k \to \infty} \delta_k = 0$ olacak şekilde bir $\{\delta_k\}$ dizisini gözönüne alalım ve

$$||x_{1k} - x_{2k}|| > \varepsilon \quad \text{iken}$$

$$||Ax_{1k} - Ax_{2k}|| < \delta_k , \quad x_{jk} \in M , \quad j = 1, 2 \tag{1.7}$$

olsun. M cümlesi kompakt olduğundan $\{x_{jk}\}$ dizisinden yakınsak bir $\{x_{jk_p}\}$ alt dizisi seçebiliriz.

Öyleki,

$$\lim_{p \to \infty} x_{jk_p} = \tilde{x}_j$$

dir. Diğer taraftan, (1.7) 'den

$$||\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|| \ge \varepsilon , \quad ||A\tilde{x}_1 - A\tilde{x}_2|| = 0$$

dır. Yani, $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$ iken $A\tilde{x}_1 - A\tilde{x}_2 = 0$ olur ki bu ise (1.6) denkleminin çözümünün tekliği ile çelişir. O halde bizi bu çelişkiye götüren kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur.

Genellikle tüm matematiksel fizik problemlerini 1. tür integral denklemlere dönüştürmek mümkündür. Eğer, verilmiş problem Hadamard anlamında iyi konulmuş ise uygun 1. tür integral denklemi belirli işlemlerle 2. tür integral denkleme dönüştürülebilir. Eğer verilmiş problem Hadamard anlamında kötü konulmuş ise onu 2. tür integral denkleme dönüştürmek mümkün değildir ve o türden olan problemler 1. tür integral denklemlere denk olurlar.

Buna göre şartı iyi konulmuş problemlerin genel özeliklerini,

$$A : X \to F$$

X Banach uzayından F Banach uzayına giden kompakt bir operatör olmak üzere,

$$Ax = f$$

operatör denklemi üzerinde inceleyeceğiz.

$$x, \xi \in R \quad \text{ve} \quad u : R \to R,$$

$$K : R \times R \to R$$

için

$$\int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x) \tag{1.8}$$

denklemi 1. tür bir integral denklemdir. Bu ilişkileri aşağıdaki örneklerle açıklayalım:

Örnek1.3:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < y < 1 \quad \text{(Laplace denklemi)} \\ u\big|_{y=0} = 0\,, \quad u_y\big|_{y=0} = e^{-\sqrt{n}} \sin nx \quad \text{(Cauchy şartları)} \end{cases}$$

olarak verilen Laplace denklemi için Cauchy problemine uygun (1.8) integral denkleminde

$$K_y(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} sh(-ky) \cdot \sin kx \cdot \sin k\xi$$

fonksiyonu (1.8) integral denkleminin çekirdeği olur. Burada $y \in (0, 1)$ olup bir parametredir (Lavrent'ev 1973, 1986).

Örnek 1. 4 :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t < T \\ u(x, T) = \varphi(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Isı denklemi için ters zamanlı başlangıç sınır değer probleminin (1.8) integral denkleminde uygun $K(x, \xi)$ çekirdeği,

$$K_t(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} \sin kx \cdot \sin k\xi$$

biçimindedir. Burada $t \in (0, T)$ olup bir parametredir (Lavrent'ev 1973).

Yukarıda verilen örneklerin hepsi,

$$Au = f$$

operatör denkleminin özel halleridir, burada U ve F metrik uzaylar olmak üzere

$$A : U \rightarrow F$$

bir lineer kompakt operatördür.

Örnek 1. 5 :

Türev bulma problemi

$$\int_a^x u(\xi)\, d\xi = f(x)$$

için çekirdek,

$$K(x, \xi) = \begin{cases} 1\,, & a < \xi \leq x \\ 0\,, & b > \xi > x \end{cases}$$

biçimindedir.

$$D = (a, b) \times (a, b)$$

olmak üzere $K(x, \xi) \in C\,(\overline{D})$ ve zayıf şingüler ise,

$$\int_a^b K\,(x, \xi)\, u\,(\xi)\, d\xi$$

operatörü $C[a, b]$ uzayında kompakt operatördür (Liusternik 1966). Eğer $K(x, \xi) \in L_2(D)$ ise uygun integral operatörü $L_2(a, b)$ de kompaktır.

Tikhonov teoremine göre eğer A operatörü teoremin şartlarını sağlıyor ise (1.6) denkleminin 1.2 deki şartları sağlayan çözümünün bulunması problemi, $M \subset U$ kompakt cümlesinde şartı iyi konulmuş problemdir.

1.3. Tikhonov Teoreminin Eşdeğer Bir İfadesi

Eğer

$A : M \subset U \to F$

operatörü Tikhonov teoreminin şartlarını sağlıyor ise,

$\rho_F (Au_1, Au_2)_F \leq \tau , \quad u_1 , u_2 \in M$

iken

$\rho_U (u_1, u_2)_U \leq w(\tau)$

sağlanacak şekilde

$$\lim_{\tau \to 0} w(\tau) = 0$$

özelliğine sahip bir $w(\tau)$ fonksiyonu vardır.

M cümlesinin A operatörüne ait değerler bölgesini M_A ile göstermek üzere, yani

$$M_A = \{Au \mid A \text{ verilen operatör ve } u \in M\}$$

olmak üzere M_A 'daki $w(\tau)$ fonksiyonlarının en küçüğüne A^{-1} *operatörünün* M_A *cümlesindeki süreklilik modülü* denir.

1.4. Yaklaşık Koşullara Göre Yaklaşık Çözümün Bulunması

Pratik problemler matematiksel olarak ifade edildiğinde koşullar her zaman yaklaşık verilir. Bu koşulları hesaplayan aletlerin belirli hatası olduğundan aşağıda belirtilen problem ortaya çıkar:

Yaklaşık koşullara göre önceden verilmiş kesinlikte, problemin yaklaşık çözümünü bulmak. Burada koşulların kesinliği veriliyorsa, verilmiş yaklaşık koşulların kesin koşullardan farkı önceden bilinmelidir.

Kötü konulmuş problemleri araştırmanın pratik yönden anlamsız olduğunu ileri süren görüşe Hadamard'ın temel itirazı; genellikle, böyle problemlerde yaklaşık koşullara göre önceden bilinen kesinlikte problemin yaklaşık çözümünün bulunamamasına dayanmaktadır.

Eğer problem Tikhonov anlamında iyi konulmuş ise sonucun böyle olmadığını aşağıda göstereceğiz. Bunun için önce Banach uzaylarıyla ilgili bir kaç tanımı hatırlatalım (Liusternik et al 1966).

Tanım 1.1.

Eğer $X \supset M$ nin keyfi elemanlar dizisinden X uzayında yakınsak bir alt dizi seçilebiliyor ise o zaman M 'ye X 'de *kompakt cümle* denir.

Tanım 1.2.

Her $u \in M$ için $\|u\|_X \leq k$ olacak biçimde u 'dan bağımsız $k > 0$ sabiti varsa o takdirde M 'ye $(M \subset X)$ X uzayında *sınırlı cümle* denir.

Tanım 1.3.

Eğer $A : U \to F$ lineer operatörü U 'nun keyfi sınırlı alt cümlesini F 'de kompakt bir cümleye dönüştürüyorsa A 'ya *kompakt operatör* denir.

1.5. Regülerleştirici Operatörler Ailesi

Hadamard anlamında kötü konulmuş bir matematiksel fizik probleminin verilmiş olduğunu kabul edelim.

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, α parametresine bağlı olan operatörler ailesine, verilmiş problem için *regülerleştirici operatör ailesi* denir.

1. Herbir $\alpha > 0$ için ailenin uygun problemi Hadamard (klasik) anlamda iyi konulmuştur.

2. Verilmiş problemin çözümü mevcud olan koşullar için çözümlerin (ailenin problemleri), limiti $\alpha \to 0$ durumunda problemin çözümüne yaklaşır (Lavrent'ev 1973).

α - ya regülerleştirme parametresi denir. Bazen n tamsayılı parametreye bağlı regülerleştirici operatörler ailesine bakılır, bu durumda parametre $n \to \infty$ alınır.

Regülerleştirici operatör ailesinin amacı, kötü konulmuş olarak verilen bir problemin çözümüne iyi konulmuş problemlerin çözümleriyle yaklaşmaktır.

Başka deyişle regülerleştirici operatör ailesinin amacı iyi konulmuş problem için α parametresine göre ön değerlendirmeler alınarak çözümün varlığını göstermek ve $\alpha \to 0$ durumunda bu çözümün kötü konulmuş problemin çözümüne yaklaştığını ispat etmektir.

Regülerleştirici operatörler ailesi tanımını 1. tür operatör denklemi örneğinde verelim.

$$Ax = f, \quad x \in X, \quad f \in F \tag{1.9}$$

B_α lineer operatörler ailesi

$$B_\alpha : F \to X$$

olsun. Eğer, aşağıdaki iki şart sağlanıyor ise B_α operatörler ailesine (1.9) denklemi için regülerleştirici aile denir.

1. Her $\alpha > 0$ için B_α - süreklidir.
2. Her $x \in X$ için

$$\lim_{\alpha \to 0} B_\alpha Ax = x$$

dir.

Şimdi regülerleştirici operatörler ailesinin yardımıyla yaklaşık verilere göre yaklaşık çözümün bulunması problemine bakalım.

(1.9) denklemi için B_α 'nın regülerleştirici aile olduğunu kabul edelim. (1.9) - in sağ tarafı ε - kesinliği ile verilir yani,

$$f_\varepsilon \ \text{verilir ve} \ \|f - f_\varepsilon\| \le \varepsilon$$

sağlanır.

Yaklaşık çözüm olarak $x_{\alpha\varepsilon} = B_\alpha f_\varepsilon$ alalım. $x_{\alpha\varepsilon}$ ile x kesin çözümünün farkına bakarsak,

$$\|x - x_{\alpha\varepsilon}\| = \|B_\alpha f_\varepsilon - x\| \le \|B_\alpha(f - f_\varepsilon)\| + \|B_\alpha Ax - x\| \le \|B_\alpha\| \cdot \varepsilon + \gamma(x, \alpha)$$

elde edilir.

Burada,

$\lim\limits_{\alpha \to 0} B_\alpha Ax = x$ olduğunda, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \gamma(x, \alpha) = 0$ dır.

Araştırdığımız problem Hadamard anlamında kötü konulmuş olduğundan,

$$\lim_{\alpha \to 0} B_\alpha = A^{-1}$$

uyarınca, $\sup_\alpha \|B_\alpha\| = \infty$ olur. α - nın $(\varepsilon \geq 0)$ $\alpha \to 0$ için $\|B_\alpha\|\varepsilon + \gamma(x, \alpha) \to 0$ olacak şekilde bir değişme özelliğinin var olduğunu ispat etmek gerekir.

Gerçekten,

$$w(x, \varepsilon) = \inf_\alpha \{ \|B_\alpha\| \varepsilon + \gamma(x, \alpha)\}$$

olsun. Bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} w(x, \varepsilon) = 0 \tag{1.10}$$

olduğunu gösterelim.

$\delta > 0$ keyfi küçük bir sayı olsun. Bu taktirde,

$$\lim_{\alpha \to 0} \gamma(x, \alpha) = 0$$

olduğundan $\exists\, \alpha(\delta) > 0$ vardır ve

$$\forall \alpha \leq \alpha(\delta) \text{ için } \gamma(x, \alpha) \leq \frac{\delta}{2};$$

$$\mu(\delta) = \inf_{\alpha \leq \alpha(\delta)} \|B_\alpha\|$$

dır. Eğer, $\varepsilon < \dfrac{\delta}{2\mu(\delta)}$ alınırsa

$$w(x, \varepsilon) < \delta$$

olur. Dolayısıyla (1.10) eşitliği ispatlanmış olur.

Böylece, eğer (1.9) denklemi için regülerleştirici operatörler ailesi varsa, o zaman önceden verilmiş kesinlikte yaklaşık çözüm bulunur.

Regülerleştirmenin etkinliği parametrenin seçimine bağlıdır. Parametrenin seçilmesinde $\|B_\alpha\|$ ifadesinin önemli rolü vardır.

Genellikle $\|B_\alpha\|$ nın hesaplanması zor değildir. $\gamma(x, \alpha)$' nın hesaplanması ise zordur. $\gamma(x, \alpha)$' nın hesaplanması için problemin iyi şartlı olması gerekir.

1.6. Birinci Cins Lineer Operatör Denkleminin Regülerleştirilmesi

$A : X \to F$

bir kompakt operatör $x \in X$ ve $f \in F$ olmak üzere,

$$Ax = f \tag{1.11}$$

denklemini gözönüne alalım.

$A = A^*$, $A > 0$ olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\forall x \in X\ , \quad (x \neq 0) \quad \text{için} \quad (Ax, x) > 0\ , \quad (F = X)$$

$$B_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}\ , \quad \alpha > 0$$

olsun.

Bu durumda B_α, (1.11) denklemi için regülerleştirici operatörler ailesidir. Gerçekten, $\{\varphi_k\}$, A' nın tam öz fonksiyonlar ve $\{\lambda_k\}$ uygun özdeğerler sistemi olmak üzere,

$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k\ , \qquad x_k = (x, \varphi_k)$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \varphi_k$$

ve

$$B_\alpha Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \lambda_k)^{-1} \lambda_k x_k \varphi_k$$

yazılabilir.

$A > 0$ ve kompakt olduğundan,

$$\lambda_k > 0\ , \quad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0\ , \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

$$\Rightarrow \quad B_\alpha \text{ - sürekli ve } \quad \|B_\alpha\| = \frac{1}{\alpha}$$

dir.

Aşağıdaki farkı göz önüne alalım:

$$x - B_\alpha Ax = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - \lambda_k(\alpha + \lambda_k)^{-1}]\, x_k\varphi_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \lambda_k)^{-1}\, x_k\, \varphi_k$$

$\alpha \to 0$ için,

$$\|x - B_\alpha Ax\| = \alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \lambda_k)^{-2}\, x_k^2 \right\}^{1/2} \to 0$$

olur. Çünkü, $\alpha \to 0$ için

$$A^{-1}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\lambda_k}\, \varphi_k$$

olup, B_α regülerleştirici ailedir.

Şimdi $A \not> 0$, $A \neq A^*$, $Ax = 0$ ise $x = 0$ olduğunu kabul edelim. A^* operatörünü (1.11) 'e uygularsak,

$$A^*Ax = f_1 \ , \qquad (f_1 = A^*f) \tag{1.12}$$

elde edilir.

(1.11) 'in çözümü $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ olduğundan (1.12) denkleminin de çözümünün tekliği açıktır.

Gerçekten, $A^*Ax = 0$ ise $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ dır. Böylece,

$$\tilde{B}_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1}$$

(1.12) denklemi için regülerleştirici operatörler ailesi olur.

O zaman, $\alpha \to 0$ durumunda,

$$B_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1} A^*$$

$$B_0 = (A^*A)^{-1} A^*$$

$$B_0 = A^{-1}\, (A^*)^{-1} A^*$$

$$B_0 = A^{-1}$$

olup, (1.11) için regülerleştirici operatörler ailesi olur.

Yukarıda gösterilen regülerleştirmelerde 1. cins operatör denklemine 2. cins operatörler ailesini karşılık getiririz. Örneğin,

$$\int_a^b K(x,\ \xi)\ u(\xi)\ d\xi = f(x)$$

$$u(x) + \int_a^b K(x,\ \xi)\ u(\xi)\ d\xi = f(x)$$

alınırsa, $Ax = f$ denklemi

$$\alpha Ex + Ax = f$$

şeklinde 2. cins operatör denkleme karşılık gelir. Buna göre, B_α operatörünün bulunması problemi,

$$(\alpha E + A)x = f$$

şeklinde 2. cins denklemin çözümünün bulunması problemine denktir (Lavrent'ev 1973, 1986).

1.7. Ardışık Yaklaşım Metodu

$$A : X \rightarrow F$$

olmak üzere,

$$Ax = f \tag{1.13}$$

denklemini gözönüne alalım, burada $A = A^*$, $A > 0$, $||A|| < 2$ olsun.

E birim operatör olmak üzere (1. 13) 'ün yerine,

$$x - (E - A)x = f$$

yazalım.

Ardışık yaklaşımları aşağıdaki gibi alalım:

$$x_{j+1} = (E-A)x_j + f \ , \quad x_0 = f \ ,$$

$$x_1 = (E-A)f + f$$

$$x_2 = (E-A)^2 f + (E-A)f + f$$

$$\vdots$$

$$x_n = \sum_{j=0}^{n} (E-A)^j f \ ;$$

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} (E-A)^j$$

olacak şekilde, operatörler cümlesine bakalım (Lavrent'ev 1973, 1986).

$\{B_n\}$ 'nin regülerleştirici operatörler cümlesi olduğu ispat edilebilir.

Gerçekten,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k \ , \qquad Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \varphi_k$$

alınırsa,

$$B_n A x = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{j=0}^{n} (1-\lambda_k)^j \Big] \lambda_k x_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} [1-(1-\lambda_k)^{n+1}]\, x_k \varphi_k$$

elde edilir. Yani, $A > 0$, $\lambda_k > 0$ ve $\| A \| < 2$ olduğundan $0 < \lambda_k < 2$'dir.

O taktirde,

$$-2 < -\lambda_k < 0$$

$$-1 < 1 - \lambda_k < 1$$

$$| 1 - \lambda_k | < 1$$

$$\lim_{n \to \infty} |1 - \lambda_k|^{n+1} = 0$$

olup,

$$\lim_{n \to \infty} B_n A x = x$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\|E - A\| = 1$$

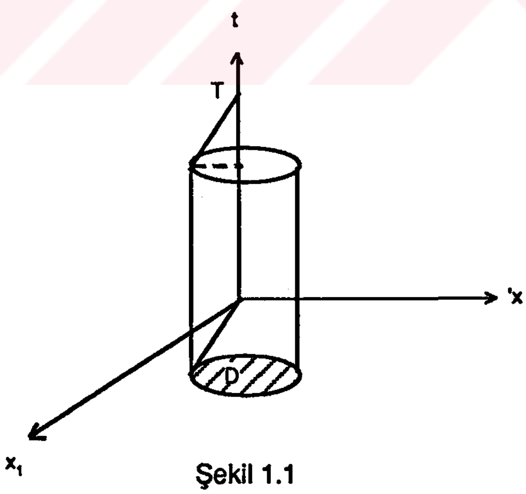
olduğundan,

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} (E - A)^j$$

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1$$

dır.

1.8. Galerkin Metodu



$('x = (x_2, x_3, \ldots, x_n))$

Şekil 1.1

D bölgesi R^n uzayında sınırlı bir alt bölge olsun. Q_T ile silindirik bölgeyi, Γ_T ile silindirin yanal yüzeyini, ∂Q_T ile silindirin sınırını, D_T ile de silindirin üst kısmını ve D_0 ise silindirin tabanını göstermek üzere ,

$Q_T = \{ (x, t) \mid x \in D, o < t < T \}$

$\Gamma_T = \{ (x, t) \mid x \in \partial D, 0 < t < T \}$

$D_T = \{ (x, T) \mid x \in D \}$

$D_0 = \{ (x, 0) \mid x \in D \}$

olsun.

Bu metod birçok problemin çözümün varlığını ispatlamak için kullanılan bir yöntemdir. Karmaşık problemlerde verilen denklemin katsayılarının zamandan bağımsız olması halinde problemi Fourier metodu ile çözmek mümkündür. Galerkin metodu ise daha genel olup, karmaşık problemlerde verilen denklemin katsayılarının zamana bağlı olması önemli değildir. Galerkin metodunu aşağıdaki örnek üzerinde gösterelim:

$$Lu \equiv u_{tt} - \operatorname{div} (k (x) \nabla u) + a (x) u = f (x , t) , \tag{1. 14}$$

$$k (x) \in C^1 (\bar{D}) \quad , a (x) \in C (\bar{D}) \;\; ; k (x) \geq k_0 = \text{sabit} > 0$$

denkleminin Q_T bölgesinde,

$$u (x, t) \mid_{t=0} = \varphi (x) \tag{1. 15}$$

$$u_t (x, t) \mid_{t=0} = \psi (x) \tag{1. 16}$$

başlangıç şartlarını ve

$$u (x, t) \mid_{\Gamma_T} = 0 \tag{1. 17}$$

sınır şartını sağlayan problemin çözümünü bulalım. Bunun için ,

$v_1 (x), v_2 (x), \ldots$ fonksiyonları $C^2 (\bar{D})$' den ve $k = 1, 2, \ldots$ $v_k \mid_{\partial D} = 0$,

olmak üzere, keyfi lineer bağımsız ve $\overset{\circ}{H}{}^1 (D)$' de tam olan fonksiyonlar sistemini göz önüne alalım.

(1.14) — (1.17) probleminin yaklaşık çözümünü,

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k (t) v_k (x) \tag{1. 18}$$

şeklinde arayalım.

Yaklaşık çözüm için başlangıç şartları,

$$\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)$$

$$\psi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \psi_k v_k(x)$$

biçiminde olsun. Çözümü (1.18)'de olduğu gibi,

$$< u_{Ntt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla_{uN}) + a(x)u_N, v_j > = < f(x,t), v_j >, \; j = \overline{1, N}$$

$$< Lu_N, v_j > = < f(x,t), v_j >, \; j = \overline{1, N} \tag{1.19}$$

sisteminden,

$$u_N(x,t)\,|_{t=0} = \varphi^N \tag{1.20}$$

$$u_{Nt}(x,t)\,|_{t=0} = \psi^N \tag{1.21}$$

şartlarını sağlayacak biçimde arayacağız.

(1.19) — (1. 21) Cauchy probleminin çözümünün varlığı ispatlanabilir. Bunun için uygun homogen problemin C^2 (0, T)'de yalnız sıfır çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir (Naimark 1969).

{ $u_N(x,t)$ }'ler için alınan ön değerlendirmelerden {$u_N(x,t)$ } yaklaşık çözümler dizisinin H^1 (Q_T)'de sınırlı olduğu görülür. Hilbert uzayında sınırlı bir cümle zayıf kompakt olduğundan, { $u_N(x,t)$ } dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla { $u_N(x,t)$ }'den H^1 (Q_T)'de zayıf yakınsak bir alt dizi seçilebilir.

$$< u_N, L^* v_j > = < f, v_j >, \; j = \overline{1, N} \tag{1.22}$$

eşitliğinde $N \to \infty$ için limit alınırsa, genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında,

$$< u, L^* v_j > = < f, v_j >, \; j = \overline{1, N} \tag{1.23}$$

ya da,

$$< Lu - f, v_j > = 0 \quad j = \overline{1, N}$$

elde edilir. {v_j}'ler L_2 (D)'de tam ve lineer bağımsız olduğundan ,

$Lu - f = 0$

bulunur (Mikhailov 1978).

1.9 Genelleştirilmiş Türev

$f_{\alpha}(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları Ω 'da integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ için, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ olmak üzere ,

$$\int_{\Omega} f_{\alpha}\, \varphi \, d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v\, D_{\varphi}^{\alpha}\, d\Omega$$

ise, f_{α} 'ya Ω bölgesinde $v(x)$'in α 'ıncı mertebeden *genelleştirilmiş türevi* denir. Burada f_{α} ,

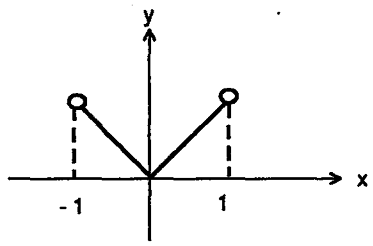
$$f_{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

şeklindedir (Mikhailov 1978).

Örnek 1. 6 :

$\Omega = (-1 , 1)$ açık aralığında $v(x) = |x|$ fonksiyonun genelleştirilmiş türevi var ve sgnx dir.

İspat:



Şekil 1.2

$$v'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(x) \in C_0^{1}(\overline{\Omega}) \text{ ve } \varphi(-1) = \varphi(1) = 0$$

dır.

$$\int_{\Omega} f_\alpha\, \varphi(x) d\Omega = (-1) \int_{\Omega} v\, D^{\alpha}_{\varphi}\, d\Omega$$

$$\int_{\Omega} v\, D^{\alpha}_{\varphi}\, d\Omega = -\int_{\Omega} f_\alpha\, \varphi(x)\, d\Omega$$

$$v = u, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = dv$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\, dx = du, \quad \varphi(x) = v$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\Omega = v(x)\,\varphi(x)\big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \varphi(x) \frac{\partial v}{\partial x}\, dx$$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = f_\alpha$ alınarak,

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\Omega = -\int_{\Omega} f_\alpha\, \varphi(x)\, dx$$

biçimine getirilir ve en son ifadeye örnek uygulanırsa,

$$\int_{-1}^{1} |x| \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,\varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} (x)\,\varphi'(x)\, dx$$

$$= (-x)\,\varphi(x)\big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-1)\, \varphi(x)\, dx + (x)\,\varphi(x)\big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} (1)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= -\left[\int_{-1}^{0} (-1)\,\varphi(x)\, dx + \int_{0}^{1} (1)\,\varphi(x)\, dx\right]$$

$$= -\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, \varphi(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} f_\alpha\, \varphi(x)\, dx$$

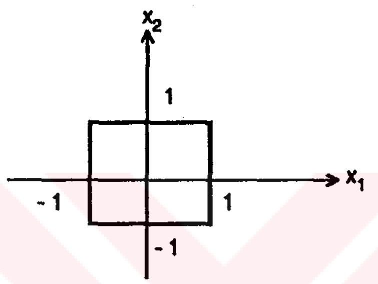
elde edilir. O halde $v(x) = |x|$ fonksiyonunun $(-1, 1)$ aralığında genelleştirilmiş türevi sgnx dir.

Bir fonksiyonun α'ıncı mertebeden genelleştirilmiş türevinin olması (α - 1)'inci mertebeden türevlerinin var olacağı anlamına gelmez. f (t) ve g (t) fonksiyonları [-1, 1] aralığında sürekli fakat bu aralıkta genelleştirilmiş birinci türevi olmasın. Buna göre aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 1. 7 :

$v(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ fonksiyonunun $-1 \leq x_1 \leq 1$, $-1 \leq x_2 \leq 1$, karesinde genelleştirilmiş birinci türevi yoktur. Ancak, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevi var ve sıfırdır.

İspat:



Şekil 1.3

$$\bar{\Omega} = \{ (x_1, x_2) \mid -1 \leq x_1, x_2 \leq 1 \}, \quad \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in C_0^{\,2}(\bar{\Omega})$$

$$\int_\Omega v\, D_\varphi^\alpha \, d\Omega = (-1)^2 \int_\Omega f_\alpha \, \varphi(x)\, d\Omega$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} \, dx_1 \, dx_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [f(x_1) + g(x_2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} \, dx_1 \, dx_2 +$$

$$+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x_1) \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} \, d x_2 \right\} d x_1 +$$

$$+ \int_{-1}^{1} g(x_2) \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} \, d x_1 \right\} d x_2$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{-1}^{1} dx_1 + \int_{-1}^{1} g(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big|_{-1}^{1} dx_2$$

yazılır. φ 'nin kendisi ve türevleri sınırda sıfır olduğundan,

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} v(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} \, d x_1 \, d x_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x_1) . \, 0 \;\, d x_1 + \int_{-1}^{1} g(x_2) . \, 0 \;\, d x_2 = 0$$

dır.

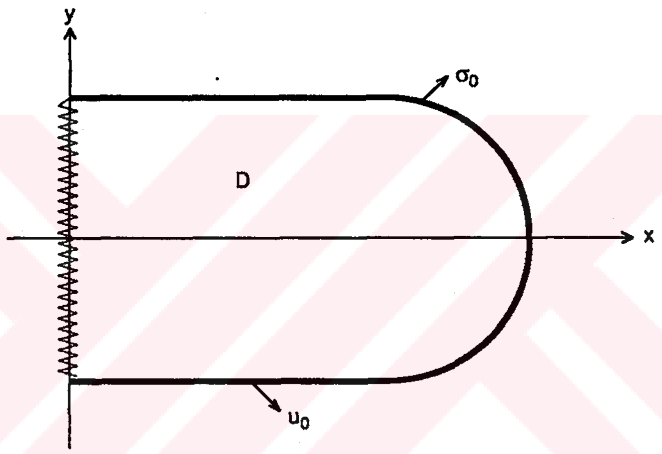
BÖLÜM 2

$x\Delta u + ku_x = xf(x,y)$ DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN HADAMARD ANLAMINDA İNCELENMESİ

Bu bölümde belirli bir D bölgesinin sınırının bir kısmında çözüm verildiğinde aynı bölgenin içinde (2.1) denkleminin çözümünün bulunması problemini inceleyeceğiz. Yani,

$$\begin{cases} x\,\Delta u + ku_x = x\,f(x,y)\ , \qquad k>1 & (2.1) \\ u(x,y)\big|_{\sigma_0} = u_0(x,y) & (2.2) \end{cases}$$

problemini $D = \{(x,y) \mid x>0,\ y \in R^n \text{ ve } G(x,y) < 0\}$ bölgesinde ele alacağız. $u : D \subset R^{n+1} \to R$ bir fonksiyon, $\sigma_0 = \partial D / \{x = 0\}$; ∂D ise D bölgesinin sınırı ve u_0 , σ_0 üzerinde verilmiş bir fonksiyon ; $G(x,y) = 0$ ise ∂D'yi tanımlayan fonksiyondur.



Şekil 2. 1

Bu problem için aşağıdaki üç soruyu cevaplandırmalıyız.

1. Problemin çözümü var mıdır?
2. Problemin çözümü tek midir?
3. Koşullar az değiştiğinde uygun çözümler de az değişir mi?

Önce problemin çözümü için ön değerlendirmeler alacağız. Başka bir deyişle çözümün varlığını önceden kabul edip onun için değerlendirmeler elde edeceğiz.

Galerkin metodu sınır koşulları sıfır olan probleme uygulanabildiğinden (2.1) - (2.2) probleminde homogen olmayan sınır koşulunu homogen hale getirmek gerekir.

Eğer bölgenin sınırı ve sınır üzerinde verilen u_0 fonksiyonu yeter derecede düzgün ise (örneğin C^2 den) o takdirde, D 'nin içinde $C^2\ (\bar{D})$ 'den olmak üzere σ_0 'da u_0 ile çakışan bir w fonksiyonu vardır (Mikhailov 1978).

Yani,

$$w \in C^2(\bar{D})$$

$$w\Big|_{\sigma_0} = u_0$$

dır.

$v = u - w$ yardımcı fonksiyonunu gözönüne alalım. O zaman problem aşağıdaki şekli alır.

$$x\,\Delta\,(v + w) + k(v + w)_x = x \cdot f(x, y)$$

$$(v + w)\Big|_{\sigma_0} = u_0$$

Artık burada bilinmeyen fonksiyon v dir. Eğer,

$x\,f(x, y) - x\,\Delta w - k\,w_x = F(x, y)$ olarak alınırsa,

$$\begin{cases} Lv \equiv x\,\Delta\,v + k\,v_x = F(x, y) & (2.3) \\ v\Big|_{\sigma_0} = 0 & (2.4) \end{cases}$$

biçiminde homogen sınır şartlı problem elde ederiz.

Şimdi de problem için söz konusu olan üç şartın sağlandığını gösterelim:

2.1. Çözümün Tekliği

Teorem 2.1: σ_0, C^2'den olmak üzere, (2.3) – (2.4) probleminin çözümü $H^2(D)$ Hilbert uzayında tektir.

İspat: (2. 3) – (2. 4) probleminin v_1 ve v_2 gibi iki çözümü olduğunu kabul edelim.

$$\begin{cases} x\,\Delta v_1 + k\,v_{1x} = F(x, y) & (2.5) \\ v_1\Big|_{\sigma_0} = 0 & (2.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\,\Delta v_2 + k\,v_{2x} = F(x,y) & (2.7) \\ v_2\big|_{\sigma_0} = 0 & (2.8) \end{cases}$$

(2.5)'den (2.7)'yi ve (2, 6)'dan (2.8) taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{cases} x\,\Delta\,(v_1 - v_2) + k(v_1 - v_2)_x = 0 \\ (v_1 - v_2)\big|_{\sigma_0} = 0 \end{cases}$$

bulunur.

$v_1 - v_2 = v$

alınarak,

$$\begin{cases} x\,\Delta\,v + kv = 0 \\ v\big|_{\sigma_0} = 0 \end{cases}$$

elde edilir. $v\big|_{\sigma_0} = 0$ ise bu takdirde tüm bölgede $v \equiv 0$ olduğunu ispat etmek gerekir. İspat sonucunda $v_1 = v_2$ olduğu görülecektir. Şimdi bunu gösterelim:

Lineer problemlerde teklik teoremini ispatlamak için uygun lineer homogen sistemin yalnız sıfır çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir.

(2.3)'e karşılık gelen homogen denkleminin her iki tarafını $-v$ ile çarpalım. Amacımız $-vLv$ ifadesini pozitif karesel form ve uygun divergence formda yazmaktır.

i. $-x\,v_{xx}\,v = -(x\,v_x\,v)_x + x\,v_x^2 + \frac{1}{2}(v^2)_x$

ii. $-x\,v_{y_i y_i}\,v = -(x\,v_{y_i}\,v)_{y_i} + x\,v_{y_i}^2 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$

iii. $-k\,v_x\,v = -\frac{1}{2}\,(k\,v^2)_x$

i., ii. ve iii. ifadelerini $-vLv$ 'de yerlerine yazarsak,

$$xv_x^2 + x\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 - (x\,v_x\,v)_x - \sum_{i=1}^{n}(x\,v_{y_i}\,v)_{y_i} + \frac{1}{2}(v^2)_x - \frac{1}{2}(k\,v^2)_x = 0 \tag{2.9}$$

bulunur. $x > 0$ olduğundan,

$$x\,v_x^2 + x\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 \geq 0$$

dir.

(2.9) ifadesini D bölgesi üzerinden integralleyelim.

$$\int_D (x\, v_x^2 + x \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2)\, dD - \int_D [(x\, v_x\, v)_x - \frac{1}{2}(v^2)_x + \frac{1}{2}(kv^2)_x + \sum_{i=1}^{n} (x\, v_{y_i}\, v)_{y_i}] dD = 0$$

Ostrogradsky (Mikhailov 1978) formülüne göre,

$$\int_D (x\, v_x^2 + x \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2) dD - \int_{\sigma_0} \{ [(x\, v_x\, v) - \frac{1}{2}(v^2) + \frac{1}{2}(kv^2)]\, n_x + \sum_{i=1}^{n} (x\, v_{y_i}\, v) n_{y_i} \} ds$$

$$+ \frac{1}{2}(k-1) \int_{x=0} v^2\, dy = 0$$

$k > 1$ ve $v\big|_{\sigma_0} = 0$ olduğundan kolayca

$$\int_D (x\, v_x^2 + x \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2) dD + \frac{1}{2}(k-1) \int_{x=0} v^2\, dy = 0$$

yazılır.

Buradan $v_x = 0$, $v_{y_i} = 0$ ve $v\big|_{\sigma_0} = 0$ bulunur. Bu bize D bölgesinde $v \equiv 0$ sonucunu verir.

O halde, lineer homogen problemin $C^2(\bar{D})$ uzayında yalnız sıfır çözümü olduğundan, problemin çözümü aynı uzayda tektir.

$C^2(\bar{D})$ uzayı $H^2(D)$ 'de her yerde yoğun olduğundan Teorem 2.1, $H^2(D)$ Hilbert uzayında da ispatlanmış olur.

2.2. Problemin Çözümünün Varlığı

Teorem 2.2 :

σ_0, C^2 'den olsun. Bu takdirde $\frac{F}{\sqrt{x}} \in L_2(D)$ olmak üzere (2.3) – (2.4) probleminin $\overset{0}{\underset{\sim}{H}}{}^1(D)$ Hilbert uzayında genelleştirilmiş çözümü vardır.

İspat: Problemin çözümünün varlığını ispatlamak için , $F(x, y) \neq 0$ haline bakalım .
(2.3) denklemini $-v$ ile çarpıp D bölgesi üzerinden integralini alırsak,

$$\int_D (x v_x^2 + x \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2) dD + \frac{1}{2}(k-1) \int_{x=0} v^2 dy = -\int_D F(x, y)\, v\, dD \qquad (2.10)$$

buluruz.

Cauchy - Bunyakovskii (Mikhailov 1978) eşitsizliğinden,

$$\int_D F \cdot v\, dD = \int_D \frac{1}{\sqrt{x}} F\sqrt{x}\, v\, dD \leq \int_D \beta^2 \frac{F^2}{x} dD + \int_D \frac{1}{\beta^2} x v^2 dD$$

yazılabilir.

$$-\int_D F \cdot v\, dD \leq \int_D |F \cdot V|\, dD \leq \int_D \beta^2 \frac{F^2}{x} dD + \int_D \frac{1}{\beta^2} x v^2 dD$$

olup (2.10) ifadesi yardımıyla,

$$\int_D (x v_x^2 + x \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2)\, dD + \frac{1}{2}(k-1) \int_{x=0} v^2 dy \leq \int_D \beta^2 \frac{F^2}{x} dD + \int_D \frac{1}{\beta^2} x v^2 dD$$

$$\int_D (x v_x^2 + x \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2)\, dD - \frac{1}{\beta^2} \int_D x v^2 dD \leq \int_D \beta^2 \frac{F^2}{x} dD \qquad (2.11)$$

sonucu yazılabilir. Ayrıca, (2.11) eşitsizliğinin sol tarafındaki $\int_D x v_x^2 dD - \frac{1}{\beta^2}\int_D x v^2 dD$ terimleri için

$$\int_a^b f^2(x)\, dx \leq \int_a^b [f'(x)]^2 \qquad , (0 \leq a < b \leq 1)$$

eşitsizliği (Relich - Poincare eşitsizliği) uygulanırsa ,

$$\int_D x v_x^2 dD - \frac{1}{\beta^2} \int_D x v^2 dD \geq K(D) \int_D x v^2 dD - \frac{1}{\beta^2} \int_D x v^2 dD = \int_D [K(D) - \frac{1}{\beta^2}]\, x v^2 dD , \quad K(D) > 0$$

olduğundan, β 'yı $\frac{K(D)}{2} - \frac{1}{\beta^2} > \varepsilon_0 > 0$

olacak şekilde seçebiliriz. Burada K(D), D bölgesinin çapıdır. O takdirde (2.11) eşitsizliği,

$$\left[\frac{K(D)}{2} - \frac{1}{\beta^2}\right] \int_D x v^2 dD + \int_D x \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 dD \leq \int_D \beta^2 \frac{F^2}{x} dD$$

biçiminde yazılır.

$$\frac{K(D)}{2} - \frac{1}{\beta^2} = P(D) > 0$$

alınırsa,

$$P(D)\int_D x\, v^2\, dD + \int_D x \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2\, dD \le \beta^2 \int_D \frac{F^2}{x} dD \tag{2.12}$$

bulunur.

Bilindiği gibi Galerkin metodunda kullanacağımız değerlendirmeler çok özel olmalıdır.

$w_i(x, y)$; $(i = 1, 2, ...)$ σ_0 'da sıfır ve $w_i(x, y) \in C^2(\bar{D})$ olmak üzere $L_2(D)$ 'de $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$, ... fonksiyonlarının oluşturduğu tam ve lineer bağımsız $\{w_1, w_2, ..., w_n, ...\}$ fonksiyonlar sistemini gözönüne alalım (Mikhailov 1978).

$$u_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N} c_i\, w_i(x, y)$$

olsun.

$$w_i \Big|_{\sigma_0} = 0 \quad \text{olduğundan} \quad u_N \Big|_{\sigma_0} = 0 \quad \text{'dır.}$$

$u_N(x, y)$ fonksiyonunu,

$$\langle x \Delta u_N + k u_{Nx}, w_j(x, y) \rangle = \langle F, w_j(x, y) \rangle, \quad j = \overline{1, N}$$

biçiminde veya

$$\langle x \Delta u_N + k\, u_{Nx} - F,\ w_j(x, y) \rangle = 0, \quad j = \overline{1, N} \tag{2.13}$$

eşitliklerinden bulacağız.

c_i 'lere göre N tane lineer denklem aldık. (2.13) sisteminin çözümü olan u_N 'nin sonradan belirtilen $\overset{0}{\tilde{H}}{}^1(D)$ uzayında $N \to \infty$ 'a yaklaştığında (2.3) – (2.4) probleminin kesin çözümüne yaklaşacağını göstereceğiz.

$$\langle x \Delta \sum_{i=1}^{N} c_i w_i + k \sum_{i=1}^{N} (c_i w_i)_x - F,\ w_j(x, y) \rangle = 0, \quad j = \overline{1, N}$$

$$\langle x \Delta \sum_{i=1}^{N} c_i w_i + k \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}(c_i w_i) - F,\ w_j(x, y) \rangle = 0, \quad j = \overline{1, N} \tag{2.14}$$

(2.14) 'e uygun homogen sisteme bakalım.

$$\langle x \Delta \sum_{i=1}^{N} c_i w_i + k \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}(c_i w_i),\ w_j(x, y) \rangle = 0, \quad j = \overline{1, N} \tag{2.15}$$

(2.15) - sisteminin yalnız sıfır çözümü olduğunu ispatlayalım. (2.15) sisteminin j. nci denklemini $-c_j$ ile çarpıp 1 'den N 'ye kadar toplarsak,

$$\langle x\,\Delta u_N + k\,u_{Nx}\,,\,-u_N\rangle = 0$$

elde edilir. O zaman çözümün $H^2(D)$ 'de tekliğinin ispatında $v(x, y)$ için yapılan işlemler $u_N(x, y)$ için tekrarlanırsa,

$$\int_D \Big(x\,u_{Nx}^2 + x\sum_{i=1}^{N} u_{Ny_i}^2\Big)\,dD + \frac{1}{2}(k-1)\int_{x=0} u_N^2\,dy = 0$$

bulunur. O zaman D bölgesinde $u_N = 0$ ve dolayısıyla $\sum_{i=1}^{N} c_i\,w_i\,(x, y) = 0$ olur. $w_i\,(x, y)$ 'ler lineer bağımsız olduğundan $c_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ 'dir. O halde (2.14) homogen sisteminin yalnız sıfır çözümü vardır. Bundan dolayı keyfi $F \in L_2(D)$ için (2.14) sisteminin tek çözümü vardır.

(Lineer homogen cebirsel denklemler sisteminin yalnız sıfır çözümü varsa homogen olmayan sistemin çözümü var ve tektir).

Şimdi $u_N\,(x, y)$ için ön değerlendirmeler alalım. Bunun için (2.14) sisteminin j 'nci denklemini $-c_j$ ile çarpıp 1 'den N 'e kadar toplarsak,

$$\langle x\,\Delta u_N + k u_{Nx} - F\,,\,-u_N\rangle = 0$$

$$\langle x\,\Delta u_N + k\,u_{Nx}\,,\,-u_N\rangle = \langle F, -u_N\rangle \tag{2.16}$$

bulunur. (2.11) eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{2}\int_D x\,u_{Nx}^2\,dD + \frac{1}{2}\int_D x\sum_{i=1}^{N} u_{Ny_i}^2\,dD \le 2\,\beta^2\int_D \frac{F^2}{x}\,dD$$

$$\frac{1}{2}\int_D x\,u_{Nx}^2\,dD \le 2\,\beta^2\int_D \frac{F^2}{x}\,dD \tag{2.17}$$

ve

$$\frac{1}{2}\int_D x\sum_{i=1}^{N} u_{Ny_i}^2\,dD \le 2\,\beta^2\int_D \frac{F^2}{x}\,dD\,, \quad \frac{F}{\sqrt{x}} \in L_2(D) \tag{2.18}$$

yazılabilir. (2.17) ve (2.18) eşitsizliklerinin sağ tarafı N 'den bağımsız olduğu için öyle bir C sabiti bulunabilir ki,

$$\int_D x\,u_{Nx}^2\,dD \le C \tag{2.19}$$

ve

$$\int_D x \sum_{i=1}^{N} u_{Ny_i}^2 \, dD \le C \qquad (2.20)$$

dir. $\overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D)$ ile aşağıdaki Hilbert uzayını tanımlayalım:

$$\overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D) = \left\{u(x,y) : \; u\big|_{\sigma_0} = 0 \,, \; u(x,y) \text{ ölçülebilir ve } \int_D x\,(u_x^2 + \sum_{i=1}^{N} u_{y_i}^2)\, dD < \infty\right\}$$

$\overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D)$ 'de iç çarpım;

$$(u, v)_{\overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D)} = \int_D x(u_x v_x + \sum_{i=1}^{N} u_{y_i} v_{y_i})\, dD$$

şeklinde tanımlanır.

O halde $\{u_N\}$ dizisi $\overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D)$ Hilbert uzayında sınırlıdır. Hilbert uzayında sınırlı bir cümle zayıf kompakt olduğundan, $\{u_N\}$ dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır.

$\{u_N\} \subset \overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D)$ yaklaşık çözümler dizisini göz önüne alalım. $\overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D)$ uzayı Hilbert uzayı ve $\{u_N\}$ dizisi sınırlı olduğundan $\{u_N\}$ dizisinin bu uzayda zayıf yakınsak bir alt dizisini seçebiliriz. Basitlik için bu alt dizi $\{u_N\}$ dizisinin kendisi olsun.

(2.14) sistemini,

$$\langle x\,\Delta u_N + k\,u_{Nx} \,,\; w_j \rangle = \langle F, w_j \rangle, \quad j = \overline{1, N} \qquad (2.21)$$

şeklinde yazalım.

Şimdi Δ operatöründe $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ 'ler w_j 'lere uygulanacak formda yazılsın. Eğer bu işlemler yapılırsa aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\langle x\,\Delta u_N \,, w_j \rangle = \int_D x\,\Delta u_N\, w_j\, dD = \int_D x\,(u_{Nxx} + \sum_{i=1}^{N} u_{Ny_iy_i})\, w_j\, dD$$

$$x\,u_{Nxx}\, w_j = (x\,u_{Nx}\, w_j)_x - (u_{Nx}\, w_j) - (x\,u_{Nx}\, w_{jx})$$

$$x\,u_{Ny_iy_i}\, w_j = (x\,u_{Ny_i}\, w_j)y_i - (x\,u_{Ny_i}\, w_{jy_i}) \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$k\,u_{Nx}\, w_j = k(u_N\, w_j)_x - k\,u_N\, w_{jx}$$

$$\langle x\,\Delta u_N \,, w_j \rangle = -\int_D u_{Nx}\, w_j\, dD - \int_D x\,u_{Nx}\, w_{jx}\, dD - \int_D x \sum_{i=1}^{N} u_{Ny_i}\, w_{jy_i}\, dD$$

$$\langle k\,u_{Nx} \,, w_j \rangle = \int_D k\,u_{Nx}\, w_j\, dD = -\int_D k u_N\, w_{jx}\, dD$$

Bütün bu değerler (2.21) 'de yerlerine yazıldığında,

$$-\int_D u_{Nx}(w_j + x\, w_{jx})\, dD - \int_D x \sum_{i=1}^{N} u_{Ny_i} w_{jy_i}\, dD - \int_D k\, u_N w_{jx}\, dD = \int_D F\, w_j\, dD$$

elde edilir.

$N \to \infty$ için $u_N \xrightarrow{\overset{0}{\tilde{H}}{}^1(D)} v$ olduğundan son eşitlikte limite geçilirse,

$$-\int_D v_x(w_j + x w_{jx})\, dD - \int_D x \cdot \sum_{i=1}^{N} v_{y_i} w_{jy_i}\, dD - \int_D k\, v\, w_{jx}\, dD = \int_D F\, w_j\, dD$$

yazılabilir.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında,

$$\langle v, L^* w_j \rangle = \langle F, w_j \rangle \tag{2.22}$$

veya

$$\langle Lv - F, w_j \rangle = 0$$

dır. (2.22)' de olan $\{w_j\}$ 'ler $L_2(D)$ 'de tam olduklarından,

$$Lv - F = 0$$

bulunur.

O halde v denklemin bir çözümüdür. Problemin çözümü için,

$u_N \xrightarrow{\overset{0}{\tilde{H}}{}^1(D)} v$ ve $u_N\big|_{\sigma_0} = 0$ olduğundan $v\big|_{\sigma_0} = 0$ sonucu kolayca görülür.

Gerçekten, $\forall\, \eta(x, y) \in C^\infty(\bar{D})$ için,

$$\int_D u_{Nxi}(x, y)\ \ \eta(x, y)\ dD \longrightarrow \int_D v_{xi}(x, y)\ \ \eta(x, y)\ dD, \; i = \overline{1, N} \tag{2.23}$$

dir. Öte yandan,

$$\int_D u_{Nxi}(x, y)\ \eta(x, y)\ dD = \int_{\sigma_0} u_N(x, y)\ \eta(x, y)\, n_{xi}\, ds + \int_D u_N(x, y)\ \eta_{xi}\ (x, y)\ dD$$

$u_N(x, y)\big|_{\sigma_0} = 0$ olduğundan,

$$\int_{\sigma_0} u_N(x,y)\ \eta(x,y)\, n_{x_i}\, ds = 0$$

olup,

$$\int_D u_{Nx_i}(x,y)\ \eta(x,y)\ dD = \int_D u_N(x,y)\ \eta_{x_i}(x,y)\, dD \tag{2.24}$$

dır. (2.24)'de $N \to \infty$ için limite geçilirse,

$$\int_D v\ (x,y)\ \eta_{x_i}\ (x,y)\ dD = \int_D v_{x_i}\ (x,y)\ \eta\,(x,y)\, dD\ = \langle v_{x_i}, \eta \rangle \tag{2.25}$$

yazılır.

$$\langle v_{x_i}, \eta \rangle = \int_{\sigma_0} v\,\eta\ n_{x_i}\, ds + \int_D v\ \eta_{x_i}\ dD$$

$$\int_{\sigma_0} v\,\eta\ n_{x_i}\, ds = 0$$

bulunur. $\eta \in C^{\infty}\ (\bar{D})$ olduğundan,

$v\,\big|_{\sigma_0} = 0$ dır. ($C^{\infty}\ (\bar{D})$ uzayı L_2 (D)'de yoğundur). Böylece (2.3) – (2.4) probleminin çözümünün varlığı ispatlanmış olur.

2.3. Çözüm kararlı mıdır?

(2.19) — (2.20) de

$$\int_D x\, u_{Nx}^2\, dD \le C$$

ve

$$\int_D x \sum_{i=1}^{N} u^2_{Ny_i}\, dD \le C$$

idi. (2.17) – (2.18) 'den

$$\frac{1}{2}\ \|\sqrt{x}\,u_{Nx}\|^2 \le 2\,\beta^2\,\|\frac{F}{\sqrt{x}}\|^2$$

$$\frac{1}{2} \;\|\sqrt{x}\sum_{i=1}^{N} u_{Ny_i}\|^2 \le 2\,\beta^2 \;\|\frac{F}{\sqrt{x}}\|^2$$

yazılır. $N \to \infty$ için $\overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D)$ de zayıf yakınsaklıktan dolayı,

$$\frac{1}{2} \;\|\sqrt{x}\,v_x\|^2 \le \;\frac{1}{2}\;\underline{\lim}_{N\to\infty} \;\|\sqrt{x}\,u_{Nx}\|^2 \le 2\,\beta^2 \;\|\frac{F}{\sqrt{x}}\|^2$$

$$\frac{1}{2} \;\|\sqrt{x}\sum_{i=1}^{N} v_{y_i}\|^2 \le \;\frac{1}{2}\;\underline{\lim}_{N\to\infty} \;\|\sqrt{x}\sum_{i=1}^{N} u_{Nyi}\|^2 \le 2\;\beta^2\;\|\frac{F}{\sqrt{x}}\|^2$$

$$\frac{1}{2} \;\|\sqrt{x}\,v_x\|^2 \le 2\,\beta^2\;\|\frac{F}{\sqrt{x}}\|^2$$

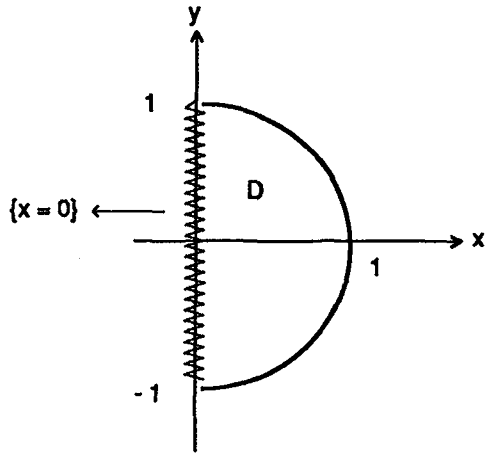
$$\frac{1}{2} \;\|\sqrt{x}\sum_{i=1}^{N} v_{y_i}\|^2 \le 2\,\beta^2\;\|\frac{F}{\sqrt{x}}\|^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \;\|\sqrt{x}\,v_x\| \le \sqrt{2}\;\beta\;\|\frac{F}{\sqrt{x}}\|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \;\|\sqrt{x}\sum_{i=1}^{N} v_{y_i}\| \le \sqrt{2}\;\beta\;\|\frac{F}{\sqrt{x}}\|$$

$\|\frac{F}{\sqrt{x}}\| \to 0$ ise $\|\sqrt{x}\,v_x\| \to 0$ ve $\|\sqrt{x}\sum_{i=1}^{N} v_{y_i}\| \to 0$ olur. O halde çözüm koşullara $\overset{0}{\tilde{H}}{}^{1}(D)$ uzayında sürekli bağımlıdır. Yani kararlılık vardır. Burada norm $L_2(D)$ uzayında tanımlanan normdur.

2.4. İki Boyutlu Uzayda Seçilen Bir Bölge İçin F(x, y) Fonksiyonunun Değişik Konumlarda İrdelenmesi



Şekil 2. 2

D bölgesi,

$D = \{ (x,y) \mid x > 0 \, , x^2 + y^2 < 1 \}$

ve

$\sigma_0 = \{ (x,y) \mid x > 0, \; x^2 + y^2 = 1 \}$

olsun.

(2.3) denkleminin sağ tarafındaki F(x,y) fonksiyonu için hangi durumlarda varlık teoreminin geçerli olduğunu araştıralım:

1) Eğer $\alpha < \frac{1}{2}$ ise o taktirde, $F(x,y) \in C \;(\bar{D})$ için $\frac{F\,(x,y)}{x^{\alpha}} \in L_2\,(D)$ dir. Örnek olarak,

a) $F\,(x,y) = \sin x \, . \, g\,(y), \quad g\,(y) \in C_{[0,1]}$

b) $F\,(x,y) = x^{\alpha} \, . \, g\,(y), \quad \alpha < \frac{1}{2}\,, \; g\,(y) \in C_{[0,1]}$

verilebilir.

2) $F(x,y) = 1$ ise $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L_2(D)$ dir. Çünkü,

$$\int_D \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{x}\ dy\right) dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\ dx = \infty$$

dır. Bu durumda, $F(x, y) = C =$ sabit ise varlık teoremi geçerli değildir.

3) $F(x,y) \in C(\bar{D})$ ve $F(0, y) \neq 0$ ise,

$$\int_D \left(\frac{F(0, y)}{\sqrt{x}}\right)^2 dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{F^2(0, y)}{x}\ dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F^2(0, y)\ dy = \infty$$

olurki, bu tür fonksiyonlar için de varlık teoremi geçerli değildir.

4) Lebesgue anlamında integrallenemeyen her $F(x, y)$ fonksiyonu için

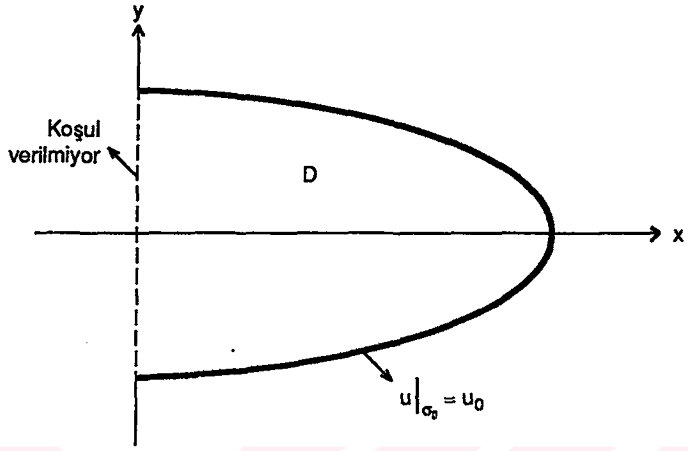
$$\frac{F(x,y)}{\sqrt{x}} \notin L_2(D)$$

dır ve bu tür fonksiyonlar için de varlık teoremi geçerli değildir.

BÖLÜM 3

İNTEGRO - DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN HADAMARD ANLAMINDA İNCELENMESİ

Şimdi de (3.1) integro-diferansiyel denkleminin (3.2) sınır şartını sağlayan çözümünün D bölgesinde bulunması problemini inceleyelim.



Şekil 3.1

$$\begin{cases} x\,\Delta u + k\,u_x + \displaystyle\int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = x\, f(x, y) & (3.1) \\ u(x, y)\big|_{\sigma_0} = u_0(x, y) & (3.2) \end{cases}$$

problemini $k > \frac{1}{2}$ için inceliyelim. Burada $K(x, y, \xi, \eta) \neq 0$, DxD bölgesi üzerinde sürekli ve $M > 0$ olmak üzere $|\,K(x, y, \xi, \eta)\,| < M$ dir.

Problem için, çözümün

1. Tekliği
2. Varlığı
3. Kararlılığı

sorularını ayrı ayrı ele alalım.

3.1. Çözümün Tekliği

Teorem 3.1: $\beta = S_k$ çap D ve $k > \frac{1}{2}(1 + S_k \,.\, \text{çap D})$ olsun. Bu takdirde (3.1) – (3.2) probleminin $H^2(D)$ uzayında yalnız tek çözümü olabilir.

İspat: Çözümün tekliğini $H^2(D)$ uzayında ispatlamak için uygun homogen problemin aynı uzayda yalnız sıfır çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{cases} x\,\Delta u + k\,u_x + \int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0 & (3.3) \\ u\big|_{\sigma_0} = 0 & (3.4) \end{cases}$$

homogen problemin (3.3) denklemini u_x ile çarpalım.

$u(x, y) \in C^2(\bar{D})$ olsun. O zaman,

I. $$x\,u_{xx}\,u_x = \frac{1}{2}(x\,u_x^2)_x - \frac{1}{2}u_x^2$$

II. $$x\,u_{y_i y_i}\,u_x = (x\,u_{y_i}\,u_x)_{y_i} - \frac{1}{2}(u_{y_i}^2\,x)_x + \frac{1}{2}u_{y_i}^2 \;, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

eşitliklerini dikkate alarak,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i}^2 + (k - \frac{1}{2})u_x^2 + \frac{1}{2}(x\,u_x^2)_x - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x\,u_{y_i}^2)_x +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(x\,u_{y_i}\,u_x)_{y_i} + u_x\int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (3.5)$$

bulunur.

Keyfi pozitif β sayısı için,

$$\Big|\, u_x \int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \Big| \le \frac{1}{2}\Big[\beta\, u_x^2 + \frac{1}{\beta}\Big(\int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\Big)^2\Big]$$

olacağı açıktır.

Belirlenmiş (x, y) için Schwarz eşitsizliğinden,

$$\Big(\int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\Big)^2 \le \int_D K^2(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \int_D u^2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

elde edilir ve böylece

$$\Big|\, u_x \int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \,\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\Big[\beta\, u_x^2 + \frac{1}{\beta}\int_D K^2(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \int_D u^2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\Big] \qquad (3.6)$$

bulunur.

$$Lu \equiv x\,\Delta u + k\,u_x \quad \text{ve} \quad |\nabla_y u|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_{y_i}^2$$

olmak üzere (3.4) şartını sağlayan u fonksiyonu için (3.5) 'den

$$\int_D Lu\,u_x\,dD = \int_D \Big[\,\frac{1}{2}|\nabla_y u|^2 + \Big(k - \frac{1}{2}\Big)\,u_x^2\,\Big]\,dD \tag{3.7}$$

yazılabilir. O zaman, (3.3) denklemini u_x ile çarpıp D bölgesi üzerinden integrallenirse ve

$$x\,\Delta u + k\,u_x + \int_D K(x, y, \xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = L_k u$$

ile birlikte (3.6) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$0 = \int_D L_k u\,u_x\,dD \geq \int_D \Big[\,\frac{1}{2}|\nabla_y u|^2 + \Big(k - \frac{1}{2}\Big)\,u^2{}_x\,\Big]\,dD$$

$$-\frac{1}{2}\Big[\,\beta\int_D u_x^2\,dD + \frac{1}{\beta}\iint_{DxD} K^2\,(x, y, \xi, \eta)\;\;dx\,dy\,d\xi\,d\eta \int_D u^2(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\,\Big] \tag{3.8}$$

bulunur. Basitlik açısından,

$$\iint_{DxD} K^2\,(x, y, \xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta = S_k = \text{Sabit}$$

alalım. O takdirde (3.8) eşitsizliği;

$$0 = \int_D L_k\,u\,u_x\,dD \geq \int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y u|^2 + \Big(k - \frac{1}{2}\Big)\,u_x^2\Big]\,dD - \frac{1}{2}\Big[\beta\int_D u_x^2\,dD + \frac{1}{\beta}S_k\int_D u^2(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\,\Big]$$

$$= \int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y u|^2 + \Big(k - \frac{1}{2}\Big)u_x^2 - \frac{1}{2}\beta\,u_x^2 - \frac{1}{2\,\beta}\,S_k\,u^2\,\Big]\,dD$$

$$= \int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y u|^2 + \Big(k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta\Big)\,u_x^2 - \frac{1}{2\,\beta}\,S_k\,u^2\,\Big]\,dD \tag{3.9}$$

şekline gelir.

Poincare - Rellich (Mikhailov 1978) eşitsizliğine göre

$$\frac{S_k}{2\beta}\int_D u^2\, dD \le \frac{S_K\, K(D)}{2\beta}\int_D u_{y_1}^2\, dD$$

dır. Burada K(D); D bölgesinin çapıdır. K(D) := diam D = çap D

β sayısı,

$$\frac{S_K\, K(D)}{2\beta} < \frac{1}{2}$$

şeklinde olsun.

(3.3) denklemindeki k ise $k - \frac{1}{2}(1+\beta) > 0$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman (3.9) 'dan

$$0 = \int_D L_k u\, u_x\, dD \ge \int_D \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} u_{y_i}^2\Big)\, dD \qquad (3.10)$$

yazılır.

(3.10) 'dan D bölgesinde $u_{y_i} = 0$, $(i = 2, 3, ..., n)$ elde edilir. $u\big|_{\sigma_0} = 0$ olduğundan $u \equiv 0$ yani, homogen (3.3) – (3.4) probleminin $C^2(\bar{D})$ 'de sıfır çözümü vardır. Dolayısıyla (3.1) – (3.2) probleminin çözümü $C^2(\bar{D})$ de tekdir.

u çözümünün aynı zamanda $H^2(D)$ de tek olduğu ispatlanabilir. Gerçekten bu, $C^2(\bar{D})$, $H^2(D)$ 'de yoğun olduğundan çıkar.

Herbir $u_n \xrightarrow{H^2(D)} u$, $u_n \in C^2(\bar{D})$ için (3.10) eşitsizliğini yazmak mümkündür. O halde (3.10) 'da $n \to \infty$ için limite geçmekle $u(x, y) \in H^2(D)$ fonksiyonu için (3.10) eşitsizliğini bulmuş oluruz. Böylece problemin çözümünün $H^2(D)$ 'de de tek olduğu ispatlanmış olur.

3.2. Problemin Çözümünün Varlığı

Teorem 3.2:

$k > \frac{1}{2}(1 - \frac{S_k}{2\beta} \cdot$ çap D) ve $xf \in L_2(D)$ olsun. O takdirde (3.1) – (3.2) probleminin genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında $L_K u \in L_2(D)$'den olmak üzere $H^1(D)$ uzayında çözümü olabilir.

İspat:

Eğer $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ve $\{\varphi_j(y)\}$ 'ler $L_2[-1, 1]^n$ 'de tam ve lineer bağımsız sistem ise o takdirde $(x-b)^i \varphi_j(y)$, $L_2(D = [a, b] \times [-1, 1]^n)$ 'de tam sistem olur (Kolmogorov 1970). $D^1 = [-1, 1]^n$ ve $\varphi_j(y)$ 'lerin D^1 'nün sınırında sıfır olduğunu varsayalım.

$$L_K u = x f(x, y) \tag{3.11}$$

$$u\Big|_{\sigma_0} = 0 \tag{3.12}$$

(3.11) – (3.12) probleminin yaklaşık çözümünü,

$$u_N(x, y) = \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} (x-b)^i \varphi_j(y)$$

şeklinde

$$\langle L_K u_N, (x-b)^i \varphi_j(y) \rangle = \langle xf, (x-b)^i \varphi_j(y) \rangle \qquad i, j = \overline{1,N} \tag{3.13}$$

N^2 tane denklemin oluşturduğu sistemde arayacağız.

u_N 'yi bulmak demek c_{ij} 'leri $(i, j = \overline{1,N})$ bulmak demektir. (3.13) sistemi c_{ij} 'ler için lineer cebirsel denklem sistemidir. Bu sistemin çözümünün varlığı ve tekliğini ispatlamak için uygun homogen sistemin yalnız sıfır çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir.

Homogen (3.13) sistemini alalım. Yani (3.13) 'de $f = 0$ olsun. (3.13) sisteminin $(i-1, j)$ çiftine uygun denklemi $i\, c_{ij}$ ile çarpıp i ve j 'ye göre 1 'den N 'ye kadar toplarsak,

$$\langle L_K u_N , u_{Nx} \rangle = 0$$

elde edilir. O zaman benzer biçimde u_N için (3.10) eşitsizliğini

$$0 = \int_D L_k u_N u_{Nx} \, dD \geq \frac{1}{2} \int_D \sum_{i=2}^{N} u^2_{Ny_i} \, dD \tag{3.14}$$

biçiminde yazabiliriz.

(3.14) 'den

$$u_N(x, y) = \sum_{i, j=1}^{N} c_{ij} (x-b)^i \varphi_j (y) = 0$$

yazılır.

$(x-b)^i \varphi_j (y)$ sisteminin lineer bağımsızlığından $c_{ij} = 0$ olup (3.13) sisteminin homogen olması halinde yalnız sıfır çözümünün olduğu ortaya çıkar. Bu ise keyfi $x f \in L_2(D)$ için (3.13) sisteminin tek çözümünün olduğunu gösterir.

Şimdi u_N (x, y) 'yi değerlendirmek için (3.13) sisteminin (i – 1, j) çiftine uygun denklemi $i c_{ij}$ ile çarpıp, i ve j 'ye göre 1 'den N 'ye kadar toplarsak,

$$\langle L_K u_N , u_{Nx} \rangle = \langle x f, u_{Nx} \rangle$$

bulunur. Bu takdirde benzer biçimde u_N (x, y) için (3.9) eşitsizliğinden,

$$\langle x f, u_{Nx} \rangle = \int_D L_K u_N u_{Nx} \, dD \geq$$

$$\geq \int_D \Big[\frac{1}{2} \Big(\sum_{i=2}^{N} u^2_{Nyi} \Big) + (k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta) u^2_{Nx} + \Big(\frac{1}{2} - S_k \frac{K(D)}{2\beta} \Big) u^2_{Ny_1} \Big] \, dD \tag{3.15}$$

elde edilir.

Burada $(k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta) > 0$ ve $\Big(\frac{1}{2} - S_k \frac{K(D)}{2\beta}\Big) > 0$ olduğu hatırlanmalıdır.

$\langle x f, u_{Nx} \rangle$ 'i gözönüne alalım. Cauchy - Bunyakovskii eşitsizliğinden

$$| \langle x f, u_{Nx} \rangle | \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_D x^2 f^2 \, dD + \frac{1}{2} \varepsilon \int_D u^2_{Nx} \, dD \tag{3.16}$$

yazılır. (3.15) ve (3.16) dan ise

$$\int_D \Big[\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=2}^{N} u^2_{Ny_i}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - S_k \frac{K(D)}{2\beta}\Big) u^2_{Ny_1} + \Big(k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\varepsilon\Big) u^2_{Nx}\Big]\, dD$$

$$\le \frac{1}{2\varepsilon}\int_D x^2 f^2\, dD \qquad (3.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.16) eşitsizliğinden ε 'nu $k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ olarak seçelim. O zaman (3.17) eşitsizliği,

$$\int_D (\,|\nabla_y u_N|^2 + u^2_{Nx}\,)\, dD \le \kappa \int_D x^2 f^2\, dD$$

formuna gelir. Burada κ ; ε, β ve $K(D)$ ye bağımlı fakat N 'den bağımsız bir sabittir.

$\{u_N\}$ dizisi $H^1(D)$ 'de sınırlıdır. $H^1(D)$ Hilbert uzayı olduğundan $\{u_N\}$ dizisinin $H^1(D)$ 'de zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır. Basitlik için bu alt dizi $\{u_N\}$ olsun, yani $u_N \xrightarrow{H^1(D)} u$ dur.

(3.13) sistemini,

$$\langle L_K u_N\,,\ (x-b)^i \varphi_j(y) \rangle = \langle x f\,,\ (x-b)^i \varphi_j(y) \rangle \qquad i, j = \overline{1, N}$$

$$\langle x \Delta u_N + k\, u_{Nx} + \int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u_N(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\,,\ (x-b)^i \varphi_j(y) \rangle =$$

$$= \langle x f\,,\ (x-b)^i \varphi_j(y) \rangle \qquad i, j = \overline{1, N} \qquad (3.18)$$

şeklinde yazalım.

Δ operatöründe $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y_i}$ 'leri $(x-b)^i \varphi_j(y)$ 'lere uygulanacak şekle getirelim. Bunu yapmak mümkündür. Çünkü $H^1(D)$ uzayında u_N için zayıf yakınsaklık söz konusudur.

$$\langle x \Delta u_N\,,\ (x-b)^i \varphi_j(y) \rangle = \int_D x\, \Delta u_N\, (x-b)^i \varphi_j(y)\, dD = \int_D x(u_{Nxx} + u_{Ny_iy_i})\,(x-b)^i \varphi_j(y)\, dD$$

$$x\, u_{Nxx}\,(x-b)^i \varphi_j(y) = (x\, u_{Nx}\, x\,(x-b)^i \varphi_j(y))_x - u_{Nx}\,(x-b)^i \varphi_j(y) - i\, x\, u_{Nx}\,(x-b)^{i-1} \varphi_j(y)$$

$$x\, u_{Ny_iy_i}\,(x-b)^i \varphi_j(y) = (x\, u_{Ny_i}\,(x-b)^i \varphi_j(y))_{y_i} - x\, u_{Ny_i}\,(x-b)^i \varphi_{jy_i}(y)$$

O zaman,

$$(x \Delta u_N + k u_{Nx} - F)(x-b)^i \varphi_j(y)) =$$

$$= (x u_{Nx} (x-b)^i \varphi_j(y))_x - u_{Nx}(x-b)^i \varphi_j(y) - i x u_{Nx} (x-b)^{i-1} \varphi_j(y)$$

$$+ (x u_{Ny_l} (x-b)^i \varphi_j(y))_{y_l} - x u_{Ny_l} (x-b)^i \varphi_{jy_l}(y)$$

$$+ k u_{Nx} (x-b)^i \varphi_j(y) - F(x-b)^i \varphi_j(y)$$

dır. Son ifadeyi ve $u_N \big|_{\sigma_0} = 0$ ifadesini gözönünde bulundurarak, kolayca

$$\int_D (L_k u_N - F)(x-b)^i \varphi_j(y)\, dD =$$

$$= -\int_D \Big[u_{Nx} (x-b)^i \varphi_j(y) + i x u_{Nx} (x-b)^{i-1} \varphi_j(y) +$$

$$+ x u_{Ny_l} (x-b)^i \varphi_{jy_l} - k u_{Nx} (x-b)^i \varphi_j(y)$$

$$+ \int_D K(x, y, \xi, \eta)\, u_N(\xi, \eta)(x-b)^i \varphi_j(y)\, d\xi\, d\eta \Big]\, dD$$

olduğunu görürüz.

$N \to \infty$ için $u_N \xrightarrow{H^1(D)} u$ olduğundan son eşitlikte $N \to \infty$ olmak üzere limite geçilirse genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında,

$$\langle u, L_k^* \psi_j \rangle = \langle F, \psi_j \rangle$$

yazılır; burada $\psi_j = (x-b)^i \varphi_j(y)$ 'dir.

Başka bir gösterimle,

$$\langle L_k u - F, \psi_j \rangle = 0 \tag{3.19}$$

biçiminde de yazılabilir.

(3.19) da $\{\psi_j\}$ sistemi $L_2(D)$ uzayında tam olduğundan

$$L_k u - F = 0$$

bulunur. O halde u (3.11) denklemin bir çözümüdür.

$u_N \xrightarrow{H^1(D)} u$ zayıf yakınsak ve $u_N \big|_{\sigma 0} = 0$ gereğince $u\big|_{\sigma 0} = 0$ bulunur. Böylece

(3.11) - (3.12) problemin çözümünün varlığı ispatlanmış olur.

3.3 Çözümün Koşullara Sürekli Bağımlılığı

(3. 17) eşitsizliğini göz önünde bulundurarak $N \to \infty$ için limit alınırsa,

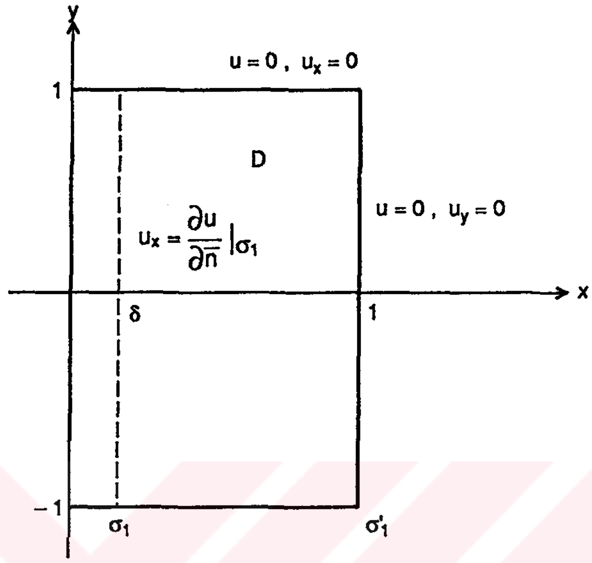
$$\int_D (|\nabla_y u|^2 + u_x^2)\, dD \le \kappa \int_D x^2 f^2\, dD$$

bulunur. Böylece x f fonksiyonu $L_2(D)$ de az değiştiğinde u çözümü $H^1(D)$ de az değişir. Dolayısıyla uygun uzaylarda çözüm koşullara sürekli bağımlıdır.

BÖLÜM 4

$Lu \equiv x\Delta u + k u_x = x f(x, y)$ DENKLEMİ İÇİN KARIŞIK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN HADAMARD ANLAMINDA DOĞRULUĞUNUN İNCELENMESİ

Bu bölümde (4.1) , (4.2) ve (4.3) ile tanımlanan problemin D bölgesindeki çözümünü araştıracağız.



Şekil 4.1

$D = \{ (x, y) \mid x \in (\delta, 1), y_i \in (-1, 1), i = 1, ..., n \}$

$\partial D = \sigma_0 \cup \sigma_1$, $D' = (-1, 1)^n$, $\sigma_0 = \{\{x = \delta\} \cup \{x = 1\}\} \cap \bar{D}$ olsun.

$$\begin{cases} Lu \equiv x\Delta u + k u_x = x f(x, y), \quad k > \frac{1}{2} & (4.1) \\ u\big|_{\sigma_0} = u_0 & (4.2) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\big|_{\sigma_1} = u_1 & (4.3) \end{cases}$$

karışıkprobleminin D bölgesinde çözümünü bulalım ; burada $\bar{n}$, σ_1 'in dış normalidir.

Hatırlanacağı üzere Galerkin metodu sınır koşulları sıfır olan problemlere uygulanabildiğinden problemi sınır koşulları sıfır olan denk probleme dönüştürelim.

D bölgesi ve bu bölgenin sınırında verilmiş fonksiyonlar yeteri kadar düzgün ise öyle $w \in C^2(\bar{D})$ fonksiyonu vardır ki;

$$u_0 = w\big|_{\sigma_0}$$

dır (Mikhailov 1978). $v = u - w$ fonksiyonunu gözönüne alarak,

$$u = v + w$$

biçimine getirip (4.1) ve (4.2), (4.3) 'de yerine yazarsak

$$\begin{cases} x\,\Delta v + k\,v_x = -x\,\Delta w - k\,w_x + x\,f & (4.4) \\ v\big|_{\sigma_0} = 0 \ , \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\sigma_1} = \tilde{v}_1 & (4.5) \end{cases}$$

bulunur. (4.4) 'nin sağ tarafı bilinen fonksiyonlar olduğundan $-x\,\Delta w - k\,w_x + xf = F(x, y)$ alabiliriz. Bu takdirde (4.4) denklemi

$$x\,\Delta v + k\,v_x = F(x, y) \tag{4.6}$$

denklemine indirgenir.

4.1. (4.5) – (4.6) Probleminin Çözümü Tek midir?

Teorem 4.1.

(4.1), (4.2) ve (4.3) probleminde $k > \dfrac{1}{2}$ olsun. O takdirde bu probleminin $C^2(\overline{D})$ uzayında çözümü tektir.

İspat: Problemin u_1, u_2 gibi iki çözümü olsun. O zaman

$$x\,\Delta u_1 + k\,u_{1x} = F(x, y) \tag{4.7}$$

$$u_1\big|_{\sigma_0} = 0 \ , \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{\sigma_1} = \tilde{v}_1 \tag{4.8}$$

ve

$$x\,\Delta u_2 + k\,u_{2x} = F(x, y) \tag{4.9}$$

$$u_2\big|_{\sigma_0} = 0 \ , \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{\sigma_1} = \tilde{v}_1 \tag{4.10}$$

yazılabilir. (4.7)'den (4.9) 'u, (4.8)'den (4.10) 'u taraf tarafa çıkarırsak,

$$\begin{cases} x\,\Delta(u_1 - u_2) + k(u_1 - u_2)_x = 0 \\ (u_1 - u_2)\big|_{\sigma_0} = 0 \ , \quad \dfrac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2)\Big|_{\sigma_0} = 0 \end{cases}$$

bulunur.

$$u_1 - u_2 = \hat{u}$$

alınırsa,

$$\begin{cases} x\,\Delta\hat{u} + k\,\hat{u}_x = 0 \quad , \quad k > \frac{1}{2} & (4.11) \\ \hat{u}\Big|_{\sigma_0} = 0 & (4.12) \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{\sigma_1} = 0 & (4.13) \end{cases}$$

elde edilir. Eğer $\hat{u}\Big|_{\sigma_0} = 0$, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\Big|_{\sigma_1} = 0$ ise o takdirde tüm bölgede $\hat{u} \equiv 0$ olduğunu göstermek gerekir. Böylece,

$$u_1 - u_2 = 0$$

olup,problemin çözümünün D bölgesinde tek olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi (4.11) denklemi ile ilgili problemin çözümünün tüm D bölgesinde sıfır olduğunu gösterelim. Ön değerlendirmeler bulmak için (4.11) denklemini $\hat{u}_x$ ile çarpıp,

I. $$x\,\hat{u}_{xx}\,\hat{u}_x = \frac{1}{2}(x\,\hat{u}_x^2)_x - \frac{1}{2}\hat{u}_x^2$$

II. $$x\,\hat{u}_{y_i y_i}\,\hat{u}_x = (x\,\hat{u}_{y_i}\,\hat{u}_x)_{y_i} - \frac{1}{2}(\hat{u}_{y_i}^2\,x)_x + \frac{1}{2}\hat{u}_{y_i}^2 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ifadelerini dikkate alırsak,

$$0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{y_i}^2 + (k - \frac{1}{2})\hat{u}_x^2 + \frac{1}{2}(x\,\hat{u}_x^2)_x - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x\,\hat{u}_{y_i}^2)_x + \sum_{i=1}^{n}(x\,\hat{u}_{y_i}\,\hat{u}_x)_{y_i} \tag{4.14}$$

bulunur.

(4.12) – (4.13) sınır koşullarını dikkate alarak (4.14) eşitliğinin D bölgesi üzerinden integrali alınırsa,

$$0 = \int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y\,\hat{u}|^2 + (k - \frac{1}{2})\,\hat{u}_x^2\Big]\,dD + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} x\,\hat{u}_x^2\,d\sigma_1' + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1}\Big(x\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{y_i}^2\Big)\,d\sigma_1$$

$$\int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y\,\hat{u}|^2 + (k - \frac{1}{2})\,\hat{u}_x{}^2\Big]\,dD = 0 \tag{4.15}$$

yazılabilir.

$$|\nabla_y\,\hat{u}| \geq 0 \quad \text{ve} \quad (k - \frac{1}{2}) > 0$$

olduğundan,

$$\hat{u}_{y_i} = 0 \quad , \quad \hat{u}_x = 0$$

olur. $\hat{u}\big|_{\sigma_0} = 0$ olduğundan ise D bölgesinde $\hat{u} \equiv 0$ dır. Yani homogen (4.11) – (4.12) problemin yalnız sıfır çözümü vardır. Dolayısıyla $C^2(\bar{D})$ 'de problemin çözümünün tekliği ispatlanmış olur.

4.2. Çözümün Varlığı

Teorem 4.2.

Kabul edelim ki; $\varepsilon > 0$ için $k - \frac{1}{2} > \varepsilon$, $x f \in L_2(D)$ ve $u_0(y) \in C^1(\bar{D})$, $u_1(y) \in C^2(\bar{D})$ olmak üzere, (4.17) – (4.18) şartları sağlanmış olsun.

O takdirde (4. 1), (4.16) – (4.18) probleminin $H^1(D)$ uzayında $u(x, y)$ çözümü vardır ve genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında $L u \in L_2(D)$ 'dir.

İspat: D bölgesini,

$$D := \{ (x, y) \mid \ \delta < x < 1 \ , \ \ y = (y_1, \ldots, y_n) \in D'_y \ , \ D'_y = (-1, 1)^n \ , \ -1 \le y_i \le 1 \ , \ \ i = \overline{1, n} \ \}$$

şeklinde tanımlayalım. (4.1) denklemi için koşulları aşağıdaki gibi alabiliriz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{x = \delta} = u_0(y) & (4.16) \\[2ex] u\big|_{x=1} = u_1(y) & (4.17) \\[2ex] u\big|_{y_i = \pm 1} = 0 \ , \qquad i = \overline{1, n} & (4.18) \end{cases}$$

$L_2(D'_y)$ de $\{w_i(y)\}$ 'ler tam ve ortonormal bir fonksiyon sistemi olsun. Öyleki, $w_i(y)$, $(i = 1, 2, \ldots)$ $\partial D'_y$ de sıfır ve $w_i(y) \in C^2(\bar{D})$ olsun. (4.1), (4.16) – (4.18) probleminin çözümünü,

$$u_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N} c_i(x)\, w_i(y) \tag{4.19}$$

şeklinde arayalım. Buradan $c_i(x)$ 'ler,

$$\Big(x\, \Delta \sum_{i=1}^{N} c_i(x)\, w_i(y) + k \frac{\partial}{\partial x} \Big(\sum_{i=1}^{N} c_i(x)\, w_i(y) \Big) \, , \ w_i(y) \Big)_{L_2(D'_y)} =$$

$$= (x\, f(x, y), w_i(y))_{L_2(D'_y)} \ , \qquad i = \overline{1, N} \tag{4.20}$$

sisteminin,

$$c_i'(\delta) = \frac{d}{dx} c_i(x)\Big|_{x=\delta} = u_{0i} \tag{4.21}$$

ve

$$c_i(1) = c_i(x)\Big|_{x=1} = u_{1i} \quad , \qquad i = \overline{1, N} \tag{4.22}$$

şartlarını sağlayan çözümüdür. Burada,

$$u_{0N} = \sum_{i=1}^{N} u_{0i}\, w_i(y)$$

$u_{1N} = \sum_{i=1}^{N} u_{1i}\, w_i(y)$ ve u_{0i}, u_{1i} 'ler $u_0(y)$ ve $u_1(y)$ fonksiyonlarının Fourier katsayılarıdır. Yani,

$$u_0(y) = \sum_{i=1}^{\infty} u_{0i}\, w_i(y)$$

$$u_1(y) = \sum_{i=1}^{\infty} u_{1i}\, w_i(y)$$

dir. Bilindiği üzere, (4.20) – (4.22) probleminin çözümünün varlığını gösterebilmek için uygun homogen sistemin yalnız sıfır çözümünün olduğunu ispatlamak gerekir (Naimark 1969).
(4.20) – (4.22) problemine karşılık gelen homogen probleme bakalım. Yani,

$$f(x, y) = u_{0i} = u_{1i} = 0$$

olsun. (4.20) sisteminin j 'inci terimini $\frac{d}{dx} c_j(x)$ ile çarparak j 'ye göre 1 'den N 'ye kadar toplayıp, $(\delta, 1)$ aralığı üzerinden x 'e göre integral alalım. O takdirde,

$$\langle x \Delta u_N + k\, u_{N_x} ,\; u_{N_x} \rangle_{L_2(D_y')} = 0 \tag{4.23}$$

$$u_N\Big|_{\sigma_0} = 0 \, , \quad \frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{\sigma_1} = 0 \tag{4.24}$$

yazılır. (4.23) - (4.24) probleminin çözümünün tekliği (4.11) - (4.13) probleminde olduğu gibi gösterilebilir. O zaman (4.20) - (4.22) probleminin her $xf \in L_2(D)$ için $u_N(x,y)$ çözümü var ve tektir. Bu çözüm için ön değerlendirmeler alalım.

(4.15) 'de olduğu gibi,

$$\int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y u_N|^2 + (k-\frac{1}{2})\, u_{Nx}^2\Big]\, dD + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} x\, u_{Nx}^2\, d\sigma_1' + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1} \Big(x \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\sigma_1} x\, u_{0N}^2\, d\sigma_1 - \frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} \Big(x \sum_{i=1}^{n} u_{1Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1' = \langle x f, u_{Nx} \rangle$$

ve dolayısıyla

$$\int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y u_N|^2 + (k-\frac{1}{2})\, u_{Nx}^2\Big]\, dD + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} x\, u_{Nx}^2\, d\sigma_1' + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1} \Big(x \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1$$

$$= \langle x f, u_{Nx} \rangle + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1} x\, u_{0N}^2\, d\sigma_1 + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} \Big(x \sum_{i=1}^{n} u_{1Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1' \qquad (4.25)$$

elde edilir.

Cauchy - Bunyakovskii eşitsizliğinden,

$$\int_D x f\, u_{Nx}\, dD \le \varepsilon \int_D u_{Nx}^2\, dD + \frac{1}{\varepsilon}\int_D (x f)^2\, dD \qquad (4.26)$$

yazılabilir. $k-\frac{1}{2} > \varepsilon$ olmak üzere (4.26) eşitsizliğini (4.25) de kullanarak,

$$\int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y u_N|^2 + (k-\frac{1}{2}-\varepsilon)\, u_{Nx}^2\Big]\, dD + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} x\, u_{Nx}^2\, d\sigma_1' + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1} \Big(x \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1 \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_D (x f)^2\, dD + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1} x\, u_{0N}^2\, d\sigma_1 + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} \Big(x \sum_{i=1}^{n} u_{1Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1' \qquad (4.27)$$

şekline dönüşür. $\{w_i(y)\}$, $L_2(D_y')$ de ortonormal sistem olduğundan,

$$\int_{\sigma_1} u_{0N}^2\, d\sigma_1 = \sum_{i=1}^{N} (u_{0i})^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} (u_{0i})^2 = \int_{\sigma_1} u_0^2\, d\sigma_1$$

dir. Benzer durum $u_{1Ny_i}^2$ için de yazılabilir.

Bu halde, (4.27) eşitsizliğinden,

$$\int_D \Big[\frac{1}{2}|\nabla_y u_N|^2 + (k-\frac{1}{2}-\varepsilon)\, u_{Nx}^2\Big]\, dD + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} x\, u_{Nx}^2\, d\sigma_1' + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1} \Big(x \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1 \le \kappa \qquad (4.28)$$

olur. Burada κ sabiti N 'den bağımsızdır.

$(k-\frac{1}{2}-\varepsilon)>0$ olduğundan, (4.28) 'den kolayca

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma'_1} x\, u_{Nx}^2 \, d\sigma'_1 + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1}\Big(x\sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1 + \int_D (u_{Nx}^2 + |\nabla_y u_N|^2)\, dD \le \kappa_1 \tag{4.29}$$

elde edilir.

(4.29) eşitsizliğinden $\{u_N\}$ dizisinin $H^1(D)$ 'de sınırlı olduğu bulunur. O zaman $\{u_N\}$ 'den $H^1(D)$ 'de zayıf yakınsak bir alt dizi seçebiliriz. Basitlik açısından bu alt dizi yine $\{u_N\}$ olsun. Benzer olarak,

$$\int_{\sigma'_1} x\, u_{Nx}^2 \, d\sigma'_1 + \int_{\sigma_1}\Big(x\sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2\Big)\, d\sigma_1 \le \kappa_1$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$u_{Nx}\Big|_{\sigma'_1} \quad ; \quad u_{Nyi}\Big|_{\sigma_1}$$

izlerinin de $N \to \infty$ için $L_2(\sigma'_1)$ ve $L_2(\sigma_1)$ de zayıf yakınsak olduğu görülebilir. Bu takdirde, (4.20) sisteminde j. denklemi $\eta_k(x)$ ile çarpıp Δ operatöründeki ikinci mertebeden türevleri birinci mertebeye indirgeyerek $\eta_k\ w_j$ 'nin üzerine atalım.

$$\int_{\delta}^{1}\langle x\, \Delta u_N + k\frac{\partial}{\partial x}u_N\, ,\, w_j\rangle_{L_2(D'_y)}\, dx = \int_D (x\, \Delta u_N + k\frac{\partial}{\partial x}u_N)\, w_j\, dD \tag{4.30}$$

dır. Buna göre,

$$x\, u_{Nxx}\, \eta_k(x)\, w_j(y) = (x\, u_{Nx}\, w_j(y)\, \eta_k(x))_x - u_{Nx}\, w_j(y)\, \eta_k(x) - x\, \eta'_k(x)\, u_{Nx}\, w_j(y)$$

$$x\, u_{Ny_iy_i}\, \eta_k(x)\, w_j(y) = (\, x\eta_k(x)\, u_{Ny_i}\, w_j(y))_{y_i} - x\, u_{Ny_i}\, w_{jy_i}\, \eta_k(x)\, , \qquad i, j = \overline{1, N}$$

eşitliklerini (4.30) da yerlerine yazarsak,

$$\int_D (x\, \Delta u_N + k\frac{\partial}{\partial x}u_N)\, w_j(y)\, \eta_k(x)\, dD =$$

$$= \int_D \Big[-\sum_{i=1}^{n} x\, u_{Ny_i}\, \eta_k(x)\, w_{jy_i} - u_{Nx}\, w_j(y)\, \eta_k(x) - x\, \eta'_k(x)\, u_{Nx}\, w_j(y) + k u_{Nx}\, \eta_k(x)\, w_j(y)\Big]\, dD$$

$$- \int_{\sigma_1} x\, u_{0N}\, \eta_k(\delta)\, w_j(y)\, d\sigma_1 + \int_{\sigma'_1} x\, u_{Nx}\, \eta_k(1)\, w_j(y)\, d\sigma'_1 \tag{4.31}$$

elde edilir. Bu durumda (4.20) denklemini ve (4.30), (4.31) eşitliklerini dikkate alarak,

$$\int_D [-\sum_{i=1}^{n} x\, u_{Ny_i}\, \eta_k(x)\, w_{jy_i}(y) - u_{Nx}\, w_j(y)\, \eta_k(x) - x\, \eta_k'(x)\, u_{Nx}\, w_j(y)$$

$$+ k\, u_{Nx}\, \eta_k(x)\, w_j(y)]\, dD - \int_{\sigma_1} x\, u_{0N}\, \eta_k(\delta)\, w_j(y)\, d\sigma_1$$

$$+ \int_{\sigma_1'} x\, u_{Nx}\, \eta_k(1)\, w_j(y)\, d\sigma_1' = \int_D x\; f(x,y)\, w_j(y)\, \eta_k(x)\, dD\,, \qquad j = \overline{1, N}$$

yazabiliriz.

u_N , $H^1(D)$ 'de, $u_{Nx}\big|_{\sigma_1'}$ $L_2(\sigma_1')$ de ve u_{1N} , $L_2(\sigma_1)$ de zayıf yakınsak olduğundan son eşitlikte $N \to \infty$ için limit alınırsa,

$$-\int_D [\sum_{i=1}^{n} x\, u_{y_i}\, \eta_k(x)\, w_{jy_i}(y) + u_x\, \eta_k(x)\, w_j(y) + x\, u_x\, \eta_k'(x)\, w_j(y)$$

$$- k\, u_x\, \eta_k(x)\, w_j(y)]\, dD - \int_{\sigma_1} x\, u_0\, \eta_k(\delta)\, w_j(y)\, d\sigma_1$$

$$+ \int_{\sigma_1'} x\, u_x\, \eta_k(1)\, w_j(y)\, d\sigma_1' = \int_D x\; f(x,y)\, w_j(y)\, \eta_k(x)\, dD\,, \qquad j = \overline{1, N} \tag{4.32}$$

$$\eta_k(x)\, w_j(y) = \psi(x,y) \quad , \quad (\psi(x,y) \in C^{\infty}(\overline{D}))$$

ve

$\{w_j\}$ sistemi $L_2(D_y')$ de tam ve $\eta_k(x) \in C^2(\delta, 1)$ keyfi olduğundan (4.32) den

$$-\int_D [\sum_{i=1}^{n} x\, u_{y_i}\, \psi_{y_i}(x,y) + u_x\, \psi(x,y) + x\, u_x\, \psi_x(x,y) - k\, u_x\, \psi(x,y)]\, dD$$

$$- \int_{\sigma_1} x\, u_0\, \psi(\delta, y)\, d\sigma_1 + \int_{\sigma_1'} x\, u_x\, \psi(1,y)\, d\sigma_1' = \int_D x\, \psi(x,y)\, f(x,y)\, dD$$

biçiminde yazılarak ,genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında;

$$L u \equiv x f$$

$$u\big|_{\sigma_0} = u_0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\sigma_1} = u_1$$

bulunur. O halde u (4.1), (4.16) - (4.18) probleminin çözümüdür.

4.3. Çözüm Kararlı mıdır?

(4.29) eşitsizliğinde κ_1 yerine $\frac{1}{\varepsilon}\int_D (x\,f)^2\, dD$ alalım. O takdirde,

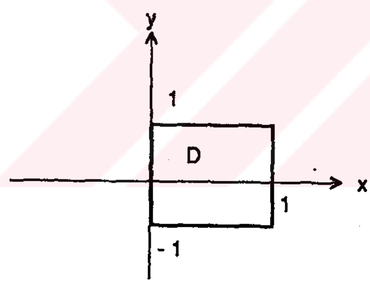
$$\frac{1}{2}\int_{\sigma_1'} x\, u_{Nx}^2\, d\sigma_1' + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1} \Big(x \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2 \Big)\, d\sigma_1 + \int_D (u_{Nx}^2 + |\nabla_y u_N|^2)\, dD \le \frac{1}{\varepsilon}\int_D (x\,f)^2\, dD$$

eşitsizliğinden $N \to \infty$ için

$$\int_D (u_x^2 + |\nabla_y u|^2)\, dD \le \frac{1}{\varepsilon}\int_D (x\,f)^2\, dD$$

olup $f(x, y)$ fonksiyonu $L_2(D)$ 'de az değiştiğinde u çözümü de $H^1(D)$ 'de az değişir. Dolayısıyla bu uzaylarda çözüm kararlıdır.

4.4. İki Boyutlu Uzayda Seçilen Bir Bölge İçin f (x, y) Fonksiyonunun Değişik Durumlarına Ait Örnekler:



Şekil 4. 2

D bölgesi,

$$D = \{ (x, y) \mid 0 < x < 1, -1 < y < 1 \}$$

ve

$$\sigma_0 = \{ (x, y) \mid y = \pm 1 \text{ ve } x = 1 \text{ doğruları} \}$$

olsun.

(4.1) denkleminin sağ tarafındaki f (x,y) fonksiyonu için hangi durumlarda varlık teoreminin geçerli olduğunu araştıralım:

1) $f(x,y) \in C(\bar{D})$ ise $x\, f(x,y) \in L_2(D)$'dendir. Yani, sürekli her $f(x,y)$ fonksiyonu için varlık teoremi geçerlidir. Örnek olarak,

a) $f(x,y) = \sin x \,.\, \cos y$

b) $f(x,y) = x\,.\,y$

seçilebilir.

2) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $\alpha < \dfrac{3}{2}$ ise $x\, f(x,y) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$

ve

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^{\alpha-1})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha-2}} < \infty$$

olup, bu tür fonksiyonlar için de varlık teoremi geçerlidir.

3) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $\alpha \geq \dfrac{3}{2}$ ise $x\, f(x,y) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$

ve

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^{\alpha-1})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha-2}} = \infty$$

bulunur ki, bu şekildeki fonksiyonlar için $x\, f(x,y) \notin L_2(D)$ dir ve bu tür fonksiyonlar için varlık teoremi geçerli değildir.

4) Lebesgue anlamında integrallenemeyen her $f(x,y)$ fonksiyonu için $x\, f(x,y) \notin L_2(D)$ dir ve bu tür fonksiyonlar için de varlık teoremi geçerli değildir.

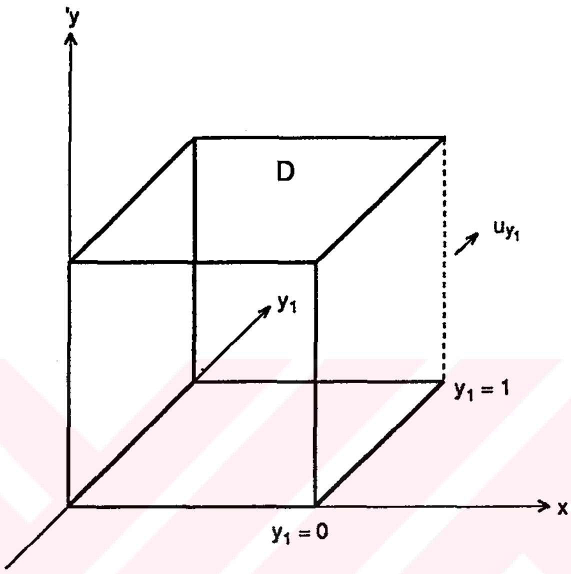
BÖLÜM 5

$Lu \equiv x\Delta u + ku_x = x\, f(x, {}'y)$ OPERATÖRÜYLE İLGİLİ TERS PROBLEM

Bu bölümde

$$L\,u \equiv x\, f(x, {}'y)$$

denklemi için belirli sınır şartları verildiğinde (u, f) çiftinin bulunması ters problemi üzerinde durulmuştur.



Şekil 5.1

İncelenen problemde, şekil 5. 1 'den de görüleceği gibi, $y = (y_1, {}'y)$, ${}'y = (y_2, y_3, \ldots, y_n)$

$$D = \{\, (x,y) \mid x \in (0, 1)\,,\ y_i \in (0, 1)\,, i = 1, \ldots, n \,\}$$

$$\partial D = \sigma_0 \cup \{y_1 = 0\} \cup \{y_1 = 1\}$$

$$\sigma_0 = \partial D / (\{y_1 = 0\} \cup \{y_1 = 1\})$$

olarak ele alınmıştır.

$$L\,u \equiv x\,\Delta u + k\,u_x = x\, f(x, {}'y)\,, \qquad k < 0 \tag{5.1}$$

denklemini

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y_1}\right|_{y_1 = 0} = u_0\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y_1}\right|_{y_1 = 1} = u_1\,, \qquad u\Big|_{\sigma_0} = u_2 \tag{5.2}$$

şartları altında gözönüne alalım. (5.1) - (5.2) probleminin çözümü için ayrıca,

$$u\Big|_{y_1 = 0} = u_3 \tag{5.3}$$

şartı verilsin.

5.1. Problem 5.1. (Çözümün tekliği)

(5.1) denkleminden (5.2) – (5.3) şartlarını sağlayan (u, f) çiftini bulmak gerekir.

Teorem 5.1.

Problem 5.1. 'in $C^3(\bar{D}) \times C^1(\bar{D})$ cümlesinde en çok bir çözümü olabilir. Burada $u \in C^3(\bar{D})$, $f \in C^1(\bar{D})$ dır.

Bu teorem, Problem 5.1 'in çözümünün tekliği hakkındaki teoremdir.

İspat :

(5.1) – (5.3) probleminin $C^3(\bar{D}) \times C^1(\bar{D})$ cümlesinde iki çözümü olsun.

$$(u^{(1)}, f^{(1)}),\ (u^{(2)}, f^{(2)})$$

$$x\,\Delta u^{(i)} + k\,u_x^{(i)} = x\,f^{(i)}(x, 'y) \tag{5.4}$$

$$u_{y_1}^{(i)}\Big|_{y_1=0} = u_0,\quad u_{y_1}^{(i)}\Big|_{y_1=1} = u_1,\quad u^{(i)}\Big|_{\sigma_0} = u_2 \tag{5.5}$$

$$u^{(i)}\Big|_{y_1=0} = u_3,\qquad i = 1, 2 \tag{5.6}$$

i = 2 için yazılmış (5.4) – (5.6) eşitliklerinden i = 1 için yazılmış uygun eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$u = u^{(2)} - u^{(1)},\quad f = f^{(2)} - f^{(1)}$$

için

$$x\,\Delta u + k\,u_x = x\,f(x, 'y) \tag{5.7}$$

$$u_{y_1}\Big|_{y_1=0} = 0,\quad u_{y_1}\Big|_{y_1=1} = 0,\quad u\Big|_{\sigma_0} = 0 \tag{5.8}$$

$$u\Big|_{y_1=0} = 0 \tag{5.9}$$

elde edilir.

(5.7) denkleminin her iki tarafının y_1 'e göre türevi alınır ve $x\, f\,(x, 'y)$ ifadesinin y_1 'den bağımsız olduğuna dikkat edilirse,

$$L\, u_{y_1} = 0 \tag{5.10}$$

yazılır. (5.10) da $u_{y_1} = \hat{u}$ dersek problem,

$$L\, \hat{u} = 0 \tag{5.11}$$

$$\hat{u}\Big|_{y_1=0} = 0\,, \qquad \hat{u}\Big|_{y_1=1} = 0\,, \qquad \hat{u}\Big|_{\sigma_0} = 0 \tag{5.12}$$

formuna dönüşür. Dolayısıyla (5.11) – (5.12) Dirichlet problemini elde ederiz. Basitlik açısından (5.11) denkleminin her iki yanını x ile bölersek, (5.11) – (5.12) problemi

$$\Delta\hat{u} + \frac{k}{x}\hat{u}_x = 0 \tag{5.13}$$

$$\hat{u}\Big|_{\partial D} = 0 \tag{5.14}$$

Dirichlet problemine dönüşür.

(5.13) denkleminin her iki tarafını $-\hat{u}$ ile çarpalım. Amacımız $-\hat{u}L\hat{u}$ ifadesini $\hat{u}$ 'nın birinci türevlerinden ve $\hat{u}$ 'dan oluşan pozitif karesel form ve uygun divergence formda yazmaktır. Bunun için,

I. $$-\hat{u}_{xx}\,\hat{u} = -(\hat{u}_x\,\hat{u})_x + \hat{u}_x^2$$

II. $$-\hat{u}_{y_i y_i}\,\hat{u} = -(\hat{u}_{y_i}\,\hat{u})_{y_i} + \hat{u}_{y_i}^2\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

III. $$-\hat{u}\,\frac{k}{x}\,\hat{u}_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{x}\hat{u}^2\right)_x - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2}\hat{u}^2$$

eşitliklerini dikkate alınırsa,

$$-\hat{u}\,L\,\hat{u} = \hat{u}_x^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2}\,\hat{u}^2 - (\hat{u}_x\,\hat{u})_x - \sum_{i=1}^{n}(\hat{u}_{y_i}\,\hat{u})_{y_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{x}\hat{u}^2\right)_x \tag{5.15}$$

bulunur. ($x > 0$ olduğundan $\hat{u}_x^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2}\,\hat{u}^2 \geq 0$ dır).

(5.15) ifadesini D bölgesi üzerinden integre edersek,

$$\int_D \left[\, (\hat{u}_x\,\hat{u})_x + \sum_{i=1}^{n}(\hat{u}_{y_i}\hat{u})_{y_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{x}\hat{u}^2\right)_x \,\right] dD = \int_D \left(\hat{u}_x^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2}\,\hat{u}^2\right) dD \tag{5.16}$$

ve Ostrogradsky formülünden,

$$\int_D (\hat{u}_x^2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\frac{k}{x^2}\hat{u}^2)\, dD = \int_{\partial D} \{[(\hat{u}_x \hat{u}) + \frac{1}{2}(\frac{k}{x}\hat{u}^2)]\, n_x + \sum_{i=1}^{n} (\hat{u}_{y_i} \hat{u})\, n_{y_i}\}\, ds$$

sonucunu buluruz. $k < 0$ ve $\hat{u}\big|_{\sigma_0} = 0$ olduğundan kolayca

$$\int_D (\hat{u}_x^2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\frac{k}{x^2}\hat{u}^2)\, dD = 0 \tag{5.17}$$

elde edilir.

Bilindiği gibi negatif olmayan üç terimin toplamının sıfır olması, herbirinin sıfır olması demektir. Ayrıca negatif olmayan bir fonksiyonun integrali sıfır ise kendisi de sıfırdır. O takdirde,

$$\hat{u}_x = 0, \quad \hat{u}_{y_i} = 0 \quad \text{ve} \quad \hat{u}\big|_{\sigma_0} = 0$$

olduğundan tüm D bölgesinde $\hat{u} \equiv 0$ dır.

(5.9) şartından ve $\hat{u} = u_{y_1}$ eşitliğinden, D bölgesinde

$$u \equiv 0$$

elde edilir. O zaman (5.7) denkleminden , D bölgesinde $f \equiv 0$ olur. Yani Problem 5.1. 'in çözümü $C^3(\bar{D}) \times C^1(\bar{D})$ uzayında tektir. O halde Teorem 5.1 ispatlanmış olur.

$H^3(D)$ $(H'(D))$ uzayında $C^3(\bar{D})$ $(C^1(\bar{D}))$ uzayından olan fonksiyonlar her yerde yoğun olduğu için Teorem 5.1'in $H^3(D) \times H'(D)$ uzayında da doğru olduğu açıktır.

5.2. Problemin Çözümünün Varlığı

Teorem 5.2.

D bölgesinin sınırı $C^2(\bar{D})$ 'den ve $F \in L_2(D)$ olduğunu kabul edelim. O takdirde (5.22) – (5.23) problemin $\overset{\circ}{H}{}^1(D)$ Hilbert uzayında genelleştirilmiş çözümü vardır.

İspat : (5.1) denkleminin her iki tarafını y_1 'e göre türevini alarak ve $x\, f(x, 'y)$ ifadesinin y_1 'den bağımsız olduğu gözönüne alınırsa,

$$L\, u_{y_1} \equiv 0 \tag{5.18}$$

elde edilir. $u_{y_1} = \hat{u}$ alındığında (5.2) şartlarını dikkate alarak $\hat{u}$ için,

$$L\, \hat{u} \equiv 0 \tag{5.19}$$

$$\hat{u}\Big|_{y_1=0} = u_0\ , \qquad \hat{u}\Big|_{y_1=1} = u_1\ , \qquad \hat{u}\Big|_{\sigma_0} = u_{2y_1} \tag{5.20}$$

problemi bulunur.

Aşikardır ki (5.20) şartları

$$\hat{u}\Big|_{\partial D} = \tilde{u}_0 \tag{5.21}$$

biçiminde yazılabilir (5.19) – (5.20) Dirichlet probleminde homogen olmayan sınır koşullarını homogen hale getirelim. Kabul edelim ki verilmiş u_0, u_1, u_2 fonksiyonları bölgenin sınırında yeteri kadar düzgün ve

$$w \in C^2(\bar{D})$$

$$w\Big|_{\partial D} = \tilde{u}_0$$

olsun. $v = \hat{u} - w$ fonksiyonu yardımıyla,

$$-\Delta w - \frac{k}{x} w_x = F(x, 'y)$$

olmak üzere (5.19) – (5.21) problemi

$$L\,v \equiv \Delta v + \frac{k}{x} v_x = F(x, 'y) \tag{5.22}$$

$$v\Big|_{\partial D} = 0 \tag{5.23}$$

problemine dönüşür.

Önce (5.22) – (5.23) problemi için ön değerlendirmeler alalım. (5.22) denklemini $-v$ ile çarparak D bölgesi üzerinde integrali alınırsa ve (5.15) - (5.16) eşitlikleri dikkate alındığında,

$$\int_D \Big(v_x^2 + \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2} v^2\Big)\, dD = -\int_D F\,v\,dD \tag{5.24}$$

bulunur.

Cauchy - Bunyakovskii eşitsizliğinden,

$$-\int_D F\,v\,dD \le \int_D |\beta F \frac{1}{\beta} v|\,dD \le \int_D \beta^2 F^2\,dD + \int_D \frac{1}{\beta^2} v^2\,dD$$

olup, (5.24) ifadesi,

$$\int_D \left(v_x^2 + \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2}\,v^2\right) dD - \frac{1}{\beta^2}\int_D v^2\, dD \le \beta^2 \int_D F^2\, dD \tag{5.25}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca (5.25) eşitsizliğinin sol tarafındaki

$$\int_D v_x^2\, dD$$

terimine Relich - Poincare eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_D v_x^2\, dD \ge K(D)\int_D v^2\, dD\,, \qquad (K(D) \equiv \text{diam } D)$$

olduğundan (5.25) eşitsizliği,

$$K(D)\int_D v^2\, dD + \int_D \left(\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2}\,v^2\right) dD - \frac{1}{\beta^2}\int_D v^2\, dD \le \beta^2 \int_D F^2\, dD$$

$$\left(K(D) - \frac{1}{\beta^2}\right)\int_D v^2\, dD + \int_D \left(\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2}\,v^2\right) dD \le \beta^2 \int_D F^2\, dD$$

$$K(D) - \frac{1}{\beta^2} = K_1(D) > 0$$

alınarak,

$$K_1(D)\int_D v^2\, dD + \int_D \left(\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{k}{x^2}\,v^2\right) dD \le \beta^2 \int_D F^2\, dD \tag{5.26}$$

şeklinde ifade edilir. (5.26) eşitsizliği aradığımız ön değerlendirmedir.

Şimdi (5.22), (5.23) problemine Galerkin metodunu uygulayalım. $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$, ..., fonksiyonları $L_2(D)$ 'de lineer bağımsız ve $L_2(D)$ 'de tam fonksiyonlar sistemi olsun.

Öyle ki, $w_i(x, y)$; $(i = 1, 2, \ldots)$ ∂D da sıfır ve $w_i(x, y) \in C^2(\bar{D})$ olsun. Bilindiği üzere böyle bir $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ sistemi vardır.

$$u_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N} c_i\, w_i(x, y)$$

olsun.

$$w_i\big|_{\partial D} = 0 \quad \text{olduğundan} \quad u_N\big|_{\partial D} = 0 \quad \text{dır.}$$

Şimdi $u_N(x, y)$ fonksiyonunu,

$$\langle \Delta u_N + \frac{k}{x} u_{Nx} , w_j(x, y) \rangle = \langle F(x, y) , w_j(x, y) \rangle$$

$$\langle \Delta u_N + \frac{k}{x} u_{Nx} - F , w_i(x, y) \rangle = 0 , \quad i = \overline{1, N} \tag{5.27}$$

denklemler sisteminden bulalım.

Burada c_i 'lere göre N tane lineer denklem aldık. (5.27) sisteminin çözümü olan u_N 'nin $N \to \infty$ 'a yaklaştığında (5.22) – (5.23) probleminin kesin çözümüne yaklaştığını göstereceğiz.

$$\langle \Delta \sum_{i=1}^{N} c_i w_i + \frac{k}{x} \sum_{i=1}^{N} (c_i w_i)_x - F , w_j(x, y) \rangle = 0 , \quad j = \overline{1, N}$$

$$\langle \Delta \sum_{i=1}^{N} c_i w_i + \frac{k}{x} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x} (c_i w_i) - F , w_j(x, y) \rangle = 0 , \quad j = \overline{1, N} \tag{5.28}$$

(5.28) 'e uygun,

$$\langle \Delta \sum_{i=1}^{N} c_i w_i + \frac{k}{x} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x} (c_i w_i) , w_j(x, y) \rangle = 0 , \quad j = \overline{1, N} \tag{5.29}$$

homogen sistemin yalnız sıfır çözümü olduğunu ispatlayalım.

(5.29) sisteminin j. denklemini $-c_j$ ile çarpıp 1 'den N 'ye kadar toplarsak,

$$\langle \Delta u_N + \frac{k}{x} u_{Nx} , - u_N \rangle = 0$$

elde edilir. O takdirde (5.17) eşitliğinden,

$$\int_D \left(u_{Nx}^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i} - \frac{1}{2} \frac{k}{x^2} u_N^2 \right) dD = 0$$

bulunur. Bu durumda D bölgesinde $u_N = 0$ ve dolayısıyla,

$$\sum_{i=1}^{N} c_i w_i(x, y) = 0$$

olur. $w_i(x, y)$ 'ler lineer bağımsız olduğundan $c_i = 0$, $(i = 1, 2, ..., N)$ dir. O halde homogen (5.28) sisteminin yalnız sıfır çözümü vardır. Bundan dolayı keyfi $F(x, y)$ için (5.28) sisteminin tek çözümü vardır.

Şimdi $u_N(x, y)$ için ön değerlendirmeler alalım. Bunun için (5.28) sisteminin j 'nci denklemini $-c_j$ ile çarpıp 1 'den N 'ye kadar toplarsak,

$$\langle \Delta u_N + \frac{k}{x} u_{Nx} - F , - u_N \rangle = 0$$

$$\langle \Delta u_N + \frac{k}{x} u_{Nx} , - u_N \rangle = \langle F , - u_N \rangle \qquad (5.30)$$

bulunur. (5.26) eşitsizliğinden,

$$K_1 (D) \int_D u_N^2 \, dD + \int_D \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2 - \frac{1}{2} \frac{k}{x^2} u_N^2 \Big) \, dD \le \beta^2 \int_D F^2 \, dD$$

$$K_1 (D) \int_D u_N^2 \, dD \le \beta^2 \int_D F^2 \, dD \qquad (5.31)$$

ve

$$\int_D \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2 - \frac{1}{2} \frac{k}{x^2} u_N^2 \Big) \, dD \le \beta^2 \int_D F^2 \, dD \qquad (5.32)$$

yazılabilir. (5.31) ve (5.32) eşitsizliklerinin sağ tarafı N 'den bağımsız olduğundan ,

$$\int_D u_N^2 \, dD \le C \qquad (5.33)$$

sağlanacak şekilde N'den bağımsız bir C sabiti vardır. Benzer olarak,

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i}^2 \, dD \le C \quad , \qquad \int_D \frac{1}{x^2} u_N^2 \, dD \le C \qquad (5.34)$$

eşitsizlikleri geçerli olur.

O halde $\{u_N\}$ dizisi $\overset{\circ}{H}{}^1 (D)$ Hilbert uzayında sınırlıdır. Hilbert uzayında sınırlı bir cümle zayıf kompakt olduğundan $\{u_N\}$ 'nin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır. Basitlik olması açısından bu alt dizi $\{u_N\}$ olsun. (5.28) sistemini,

$$\langle \Delta u_N + \frac{k}{x} u_{Nx} , \ w_j \rangle = \langle F, w_j \rangle \quad , \quad j = \overline{1, N} \qquad (5.35)$$

şeklinde yazalım.

$$\Delta u_N \cdot w_j = \int_D \Delta u_N \, w_j \, dD = \int_D (u_{Nxx} + \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_iy_i}) \, w_j \, dD$$

$$u_{Nxx} \cdot w_j = (u_{Nx} \, w_j)_x - (u_{Nx} \, w_{jx})$$

$$u_{Ny_iy_i} \cdot w_j = (u_{Ny_i} \, w_j)_{y_i} - (u_{Ny_i} \, w_{jy_i})$$

$$\frac{k}{x} u_{Nx} \cdot w_j = (\frac{k}{x} u_N \, w_j)_x + \frac{k}{x^2} \, u_N \, w_j - \frac{k}{x} u_N \, w_{jx}$$

$$\langle \Delta u_N , w_j \rangle = - \int_D u_{Nx} w_{jx} \, dD - \int_D \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i} \, w_{jy_i} \, dD$$

$$\langle \frac{k}{x} u_{Nx} , w_j \rangle = \int_D \frac{k}{x} u_{Nx} \, w_j \, dD = - \int_D \frac{k}{x} u_N \, w_{jx} \, dD + \int_D \frac{k}{x^2} u_N \, w_j \, dD$$

İfadeleri (5.35)'de yerlerine yazılırsa,

$$- \int_D u_{Nx} \, w_{jx} \, dD - \int_D \sum_{i=1}^{n} u_{Ny_i} \, w_{jy_i} \, dD - \int_D (\frac{k}{x} \, w_{jx} - \frac{k}{x^2} \, w_j) \, u_N \, dD = \int_D F \, w_j \, dD$$

elde edilir. $N \to \infty$ için limit alındığında, ($u_N \xrightarrow{\mathring{H}^1} v$ ye yakınsaktır) genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında,

$$\langle v, L^* w_j \rangle = \langle F, w_j \rangle \tag{5.36}$$

veya

$$\langle Lv - F, w_j \rangle = 0 \tag{5.37}$$

olur.

(5.37) 'deki $\{w_j\}$ 'ler $L_2(D)$ 'de tam olduğundan,

$$Lv - F = 0$$

yazılabilir. O halde v denklemin bir çözümüdür.

$u_N \xrightarrow{\mathring{H}^1} v$ ve $u_N \big|_{\sigma_0} = 0$ uyarınca $u \big|_{\sigma_0} = 0$ olduğu kolayca ispatlanabilir. Böylece (5.22) – (5.23) probleminin $\mathring{H}^1(D)$ Hilbert uzayında genelleştirilmiş çözümü vardır.

5.3. Çözüm kararlı mıdır ?

(5. 32) 'den $N \to \infty$ için limite geçilirse,

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^{n} v^2_{y_i} - \frac{1}{2}\frac{k}{x^2} v^2 \right) dD \leq \beta^2 \int_D F^2 \, dD$$

elde edilir. Buradan $F \in L_2(D)$ de az değiştiğinde $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(D)$ de az değişir. Dolayısıyla çözüm kararlıdır.

BÖLÜM 6

$Lu \equiv x\Delta u + ku_x = x\, f(x, 'y)$ OPERATÖRÜ İÇİN KUVVETLİ KÖTÜ KONULMUŞ TERS PROBLEM

Bu bölümde kuvvetli kötü konulmuş ters problem incelenmiştir. D bölgesinde , (D bölgesi 5. bölümde olduğu gibi tanımlanmıştır)

$$Lu \equiv x\,\Delta u + k\,u_x = x\,f(x, 'y) \tag{6.1}$$

denklemi ve $'y = (y_2, y_3, \ldots, y_n)$ olmak üzere ,

(6.1) denklemi için

$$u,\, u_{y_n}\Big|_{y_n=0} = u_0(x, y'),\;\; u_1(x, y') \tag{6.2}$$

şartı verilmiş olsun. (6.1) – (6.2) Cauchy probleminin çözümü için

$$u\Big|_{y_1=0} = u_2(x, 'y) \tag{6.3}$$

ilave şartı verilmiş olsun.

Problem 6.1.

(6.1) denklemi için (6.2) – (6.3) şartlarını sağlayan $(u(x, y), x\, f(x, 'y))$ çifti elde etmek amacımızdır. Problem (6.1) 'in 5. Bölümde araştırılan ters problemden farkı,

1. Sınır şartlarının az olması,
2. Problem (6. 1) 'in kuvvetli kötü konulmuş olmasıdır.

Teorem 6.1.

Problem 6.1 'in $C^3(\bar{D}) \times C^1(\bar{D})$ cümlesinde $u \in C^3(\bar{D})$, $f \in C^1(\bar{D})$olacak şekilde en fazla bir çözümü olabilir.

Teorem 6.1 Problem 6.1 'in çözümünün tekliği ile ilgilidir. Bu problemin çözümünün varlığını, genel olarak ispatlayamayız. Çünkü, (6.1) – (6.3) problemi Hadamard anlamında kuvvetli kötü konulmuş bir problemdir. Teorem 6.1 'i ispatlamak için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

(6.1) – (6.3) probleminin $C^3(\bar{D}) \times C^1(\bar{D})$ cümlesinde iki çözümünün varlığını kabul edelim. $(u^{(1)}, f^{(1)})$, $(u^{(2)}, f^{(2)})$ alınarak,

$$x\,\Delta u^{(i)} + k\,u_x^{(i)} = x\,f^{(i)}(x, 'y) \tag{6.4}$$

$$u^{(i)}, u_{y_n}^{(i)}\Big|_{y_n=0} = u_0\,,\ u_1 \tag{6.5}$$

$$u^{(i)}\Big|_{y_1=0} = u_2 \qquad i = 1, 2\ ; \tag{6.6}$$

$i = 2$ için yazılmış (6.4) – (6.6) eşitliklerinden, $i = 1$ için yazılmış uygun eşitlikleri çıkarırsak, $u = u^{(2)} - u^{(1)}$, $f = f^{(2)} - f^{(1)}$ için

$$x\,\Delta u + k\,u_x = x\,f(x, 'y) \tag{6.7}$$

$$u, u_{y_n}\Big|_{y_n=0} = 0 \tag{6.8}$$

$$u\Big|_{y_1=0} = 0 \tag{6.9}$$

yazılabilir.

(6.7) denkleminin her iki tarafının y_1 'e göre türevi alınırsa,

$$x\,\Delta u_{y_1} + k\,u_{y_1 x} = 0 \tag{6.10}$$

bulunur.

(6.10) denkleminde $w = u_{y_1}$ alınırsa, w fonksiyonu için

$$x\,\Delta w + k\,w_x = 0 \tag{6.11}$$

elde edilir.

(6.8) şartları ise

$$w, w_{y_n}\Big|_{y_n=0} = 0 \tag{6.12}$$

şeklini alır.

Önce, aşağıdaki genel bir probleme bakalım:

$$\begin{cases} |\Delta_{x,y} z| \le C\,(|z| + |\nabla z|) & (6.13) \\ z(x, 'y, 0) = 0\,, \quad z_{y_n}(x, 'y, 0) = 0 & (6.14) \end{cases}$$

(6.13) – (6.14) probleminin $C^2(\bar{D})$ yalnız sıfır çözümü varsa (6.11) – (6.12) probleminin $C^2(\bar{D})$ cümlesinde yalnız sıfır çözümü olabileceği kolayca ispatlanabilir.

(6.13) – (6.14) probleminin $C^2(\bar{D})$ cümlesinde yalnız sıfır çözümünün olabileceğini Carleman metodu ile ispatlayacağız.

Basitlik için $y_n = u_1$, $x = u_2$, $y_i = u_{2+i}$, $i = 1, 2, ..., n-1$ alalım.

$$\Omega(u^0) = \left\{ u : \ u_1 > 0 , \quad 0 < \delta u_1 < \gamma - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n+1} (u_i - u_i^0)^2 , \quad \gamma < 1 , \quad \delta > 1 \right\}$$

$$\psi(u) = \delta u_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n+1} (u_i - u_i^0)^2 + \alpha_0 \quad , \quad \alpha_0 > 0 \ , \quad \gamma + \alpha_0 = \eta < 1$$

olsun.

$u^0 = (u_2^0 , u_3^0 , \dots , u_{n+1}^0) \in D'$, $D' = \{(x, y) : (x, y_1, ..., y_{n-1}) \in (0, 1)^n\}$ ise $(0, u^0 \in \Omega (u^0)) \subset D$ ve $\Omega(u^0)$ bölgesinde $\alpha_0 < \psi(u) < \eta$ olacağı açıktır.

$H = \exp(\lambda \psi^{-\nu})$ olsun, burada λ, ν pozitif parametrelerdir.

Lemma 6.1:

Her $\varphi \in C^2(\bar{D})$ için

$$-\varphi \Delta\varphi H^2 = \Big[|\nabla \varphi|^2 - \sum_{i=1}^{n+1} (2\lambda^2 \nu^2 \psi^{-2\nu-2} \psi_{u_i}^2 +$$

$$+ \lambda \nu (\nu+1) \psi^{-\nu-2} \psi_{u_i}^2 + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{u_i u_i}) \varphi^2 \Big] H^2 + d_1(\varphi) \qquad (6.15)$$

dır, burada $d_1(\varphi) = - \sum_{i=1}^{n+1} (\varphi \varphi_{u_i} H^2 + \psi^{-\nu-1} \lambda \nu \psi_{u_i} \varphi^2 H^2)_{u_i}$ 'dır.

İspat:

$$-\varphi \Delta\varphi H^2 = -\varphi \Big(\sum_{i=1}^{n+1} \varphi_{u_i u_i} \Big) e^{2\lambda \psi^{-\nu}}$$

dır. Öte yandan

$$-\varphi \varphi_{u_i u_i} H^2 = -(\varphi \varphi_{u_i} e^{2\lambda\psi^{-\nu}})_{u_i} + \varphi_{u_i}^2 e^{2\lambda\psi^{-\nu}} - 2\lambda\nu \ \varphi \varphi_{u_i} e^{2\lambda\psi^{-\nu}} \psi_{u_i} \psi^{-\nu-1}$$

ve

$$-2\lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}H^2\varphi\varphi_{u_i} = -(\lambda\nu\psi_{ui}\psi^{-\nu-1}H^2\varphi^2)_{u_i} - 2\lambda^2\nu^2\psi_{u_i}^2\psi^{-2\nu-2}H^2\varphi^2 -$$

$$-\lambda\nu(\nu+1)\psi_{u_i}^2H^2\psi^{-\nu-2}\varphi^2 + \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_iu_i}H^2\varphi^2 \;; \qquad i=\overline{1,n+1}$$

olduğundan son iki eşitlik dikkate alınarak

$$-\varphi\varphi_{u_iu_i}H^2 = -(\varphi\varphi_{u_i}e^{2\lambda\psi^{-\nu}})_{u_i} + \varphi_{u_i}^2e^{2\lambda\psi^{-\nu}} - (\lambda\nu\psi_{ui}\psi^{-\nu-1}H^2\varphi^2)_{u_i} -$$

$$-2\lambda^2\nu^2\psi_{u_i}^2\psi^{-2\nu-2}H^2\varphi^2 - \lambda\nu(\nu+1)\psi_{u_i}^2H^2\psi^{-\nu-2}\varphi^2 + \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_iu_i}H^2\varphi^2$$

$$-\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\varphi_{u_iu_i}\Big)H^2 = -\varphi\Delta\varphi H^2 = \sum_{i=1}^{n+1}\varphi_{u_i}^2H^2 - 2\lambda^2\nu^2\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^2\Big)\psi^{-2\nu-2}H^2\varphi^2 +$$

$$+\lambda\nu\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_iu_i}\Big)\psi^{-\nu-1}H^2\varphi^2 - \lambda\nu(\nu+1)\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^2\Big)H^2\psi^{-\nu-2}\varphi^2 + d_1(\varphi)$$

$$= |\nabla\varphi|^2H^2 - 2\lambda^2\nu^2\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^2\Big)\psi^{-2\nu-2}H^2\varphi^2 -$$

$$-\lambda\nu(\nu+1)\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^2\Big)H^2\psi^{-\nu-2}\varphi^2 + \lambda\nu\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_iu_i}\Big)\psi^{-\nu-1}H^2\varphi^2 + d_1(\varphi)$$

$$= -\varphi\Delta\varphi H^2 = \Big[|\nabla\varphi|^2 - \sum_{i=1}^{n+1}(2\lambda^2\nu^2\psi^{-2\nu-2}\psi_{u_i}^2 +$$

$$+\lambda\nu(\nu+1)\psi^{-\nu-2}\psi_{u_i}^2 + \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_iu_i})\varphi^2\Big]H^2 + d_1(\varphi)$$

$$d_1(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n+1}(\varphi\varphi_{u_i}H^2 + \psi^{-\nu-1}\lambda\nu\psi_{u_i}\varphi^2H^2)_{u_i}$$

(6.15) ifadesi bulunur.

Lemma 6.2 :

$\nu_0 = \dfrac{(n+2)\eta}{\delta(1-\eta)}$, $\lambda_0 = 2(\nu+2)^2(\delta^2+\gamma^2)^2+2$ olmak üzere $\nu \geq 2+\nu_0$, $\lambda \geq \lambda_0$ ise, o zaman keyfi $\varphi \in C^2(\bar{D})$ için

$$\psi^{\nu+1}(\Delta\varphi)^2H^2 \geq 3\lambda^3\nu^4\delta^4\psi^{-2\nu-2}H^2\varphi^2 - 2\lambda\nu|\nabla\varphi|^2H^2 + d_2(\varphi) \tag{6.16}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Burada,

$$d_2(\varphi H) = \sum_{i=1}^{4} d_{2i}(\varphi H)$$

$$d_{21}(\varphi H) = 4\lambda\nu \sum_{i,j=1}^{n+1} \left[\psi_{u_i}(\varphi_{u_i} - \lambda\nu\,\psi_{u_i}\psi^{-\nu-1}\varphi)(\varphi_{u_j} - \lambda\nu\,\psi_{u_j}\psi^{-\nu-1}\psi)\right]_{u_j} -$$

$$-2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^{n+1} \left[\psi_{u_i}(\varphi_{u_i} - \lambda\nu\,\psi_{u_i}\psi^{-\nu-1}\varphi)\right]_{u_i} + 2\nu^2\lambda^2 \sum_{i=1}^{n+1} (\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}\varphi^2)_{u_i}$$

$$d_{22}(\varphi H) = 2\lambda^3\nu^3 \left(\psi^{-2\nu-2}\varphi^2 |\nabla\psi|^2 \sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}\right)_{u_i}$$

$$d_{23}(\varphi H) = -2\lambda^2\nu^2(\nu+1) \sum_{i=1}^{n+1} (|\nabla\psi|^2\psi^{-\nu-2}\psi_{u_i}\varphi^2)_{u_i}$$

$$d_{24}(\varphi H) = 2\lambda^2\nu^2 \sum_{i=1}^{n+1} (\psi_{u_i}\psi^{-\nu-1}\varphi^2)_{u_i}$$

dır.

İspat :

$\omega = H\varphi$ yardımcı fonksiyonunu alalım. O takdirde,

$$\varphi = \omega H^{-1} = \omega e^{-\lambda\psi^{-\nu}}$$

$$H^{-1} = e^{-\lambda\psi^{-\nu}}$$

$$H = e^{\lambda\psi^{-\nu}}$$

$$H_{u_i}^{-1} = \lambda\nu e^{-\lambda\psi^{-\nu}}\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{u_i} &= \omega_{u_i} e^{-\lambda\psi^{-\nu}} + \lambda\nu e^{-\lambda\psi^{-\nu}}\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}\omega \\ &= H^{-1}(\omega_{u_i} + \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}\omega)\end{aligned}$$

$$\varphi_{u_iu_i} = (\lambda\nu e^{-\lambda\psi^{-\nu}}\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i})(\omega_{u_i} + \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}\omega) + H^{-1}(\omega_{u_iu_i} - \lambda\nu(\nu+1)\psi^{-\nu-2}\psi_{u_i}^{\ 2}\omega +$$
$$+ \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\psi_{u_iu_i}\omega + \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}\omega_{u_i})$$

$$\varphi_{u_iu_i} = \lambda\nu\,\omega_{u_i} e^{-\lambda\psi^{-\nu}}\,\psi^{-\nu-1}\,\psi_{u_i} + \lambda^2\nu^2 e^{-\lambda\psi^{-\nu}}\,\psi^{-2\nu-2}\,\omega\,\psi_{u_i}^{\;2} +$$

$$+ H^{-1}\,\omega_{u_iu_i} - H^{-1}\lambda\nu\,(\nu+1)\,\psi^{-\nu-2}\,\psi_{u_i}^{\;2}\,\omega + H^{-1}\lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\,\psi_{u_iu_i}\,\omega + H^{-1}\,\lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\,\psi_{u_i}\,\omega_{u_i}$$

$$\varphi_{u_iu_i} = H^{-1}\,(\omega_{u_iu_i} + 2\lambda\nu\,\psi_{u_i}\,\psi^{-\nu-1}\,\omega_{u_i} + \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\,\psi_{u_iu_i}\,\omega - \lambda\nu\,(\nu+1)\,\psi_{u_i}^{\;2}\,\psi^{-\nu-2}\,\omega +$$

$$+ \lambda^2\nu^2\,\psi^{-2\nu-2}\,\omega\,\psi_{u_i}^{\;2})$$

dır. En son ifadenin her iki tarafını H ile çarpıp i'ye göre 1'den (n +1)'e kadar toplayarak karesi alınırsa,

$$H\,\varphi_{u_iu_i} = (\omega_{u_iu_i} + 2\lambda\nu\,\psi_{u_i}\,\psi^{-\nu-1}\,\omega_{u_i} + \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\,\psi_{u_iu_i}\,\omega - \lambda\nu\,(\nu+1)\,\psi_{u_i}^{\;2}\,\psi^{-\nu-2}\,\omega) +$$

$$+ \lambda^2\nu^2\,\psi^{-2\nu-2}\,\omega\,\psi_{u_i}^{\;2})$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} H\,\varphi_{u_iu_i} = H\,(\Delta\varphi) = \sum_{i=1}^{n+1}\omega_{u_iu_i} + 2\lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}\,\omega_{u_i} + \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\,\omega\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_iu_i} -$$

$$-\lambda\nu\,(\nu+1)\,\omega\,\psi^{-\nu-2}\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^{\;2} + \lambda^2\nu^2\,\psi^{-2\nu-2}\,\omega\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^{\;2}$$

$$H^2\,(\Delta\varphi)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n+1}\omega_{u_iu_i} + 2\lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}\,\omega_{u_i} + \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\,\omega\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_iu_i} -$$

$$-\lambda\nu\,(\nu+1)\,\omega\,\psi^{-\nu-2}\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^{\;2} + \lambda^2\nu^2\,\psi^{-2\nu-2}\,\omega\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^{\;2}\Big)^2$$

elde edilir. Bulunan ifadenin her iki yanı $\psi^{\nu+1}$ ile çarpılırsa,

$$\psi^{\nu+1}\,H^2\,(\Delta\varphi)^2 = \psi^{\nu+1}\Big(\Delta\omega + \sum_{i=1}^{n+1}(\lambda^2\nu^2\,\psi^{-2\nu-2}\,\psi_{u_i}^2 -$$

$$-\lambda\nu\,(\nu+1)\,\psi^{-\nu-2}\,\psi_{u_i}^2 + \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\,\psi_{u_iu_i})\omega + 2\lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}\,\omega_{u_i}\Big)^2$$

bulunur.

$$a = \Delta\omega + \sum_{i,j=1}^{n+1}(\lambda^2\nu^2\,\psi^{-2\nu-2}\,\psi_{u_i}^2 - \lambda\nu(\nu+1)\,\psi^{-\nu-2}\,\psi_{u_i}^2 + \lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\,\psi_{u_iu_i})\omega$$

$$b = 2\lambda\nu\,\psi^{-\nu-1}\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}\,\omega_{u_i}$$

alarak en son bulunan ifadeye $(a+b)^2 \geq 2ab$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$\psi^{\nu+1} H^2 (\Delta\varphi)^2 = \psi^{\nu+1} \Big(\Delta\omega + \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda^2 \nu^2 \psi^{-2\nu-2} \psi_{u_i}^2 -$$

$$-\lambda\nu(\nu+1)\psi^{-\nu-2}\psi_{u_i}^2 + \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_iu_i})\omega + 2\lambda\nu\psi^{-\nu-1}\sum_{i=1}^{n+1} \psi_{u_i}\omega_{u_i}\Big)^2 \geq$$

$$\geq 4\lambda\nu\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}\omega_{u_i}\Big)\Big[\Delta\omega + \sum_{j=1}^{n+1}\lambda\nu\psi^{-\nu-1}(\lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_j}^2$$

$$-(\nu+1)\psi^{-1}\psi_{uj}^2 + \psi_{u_ju_j})\omega\Big] \qquad (6.17)$$

olacağı açıktır.

(6.17) eşitsizliğinin sağ tarafında parantezleri açarak her bir terim için ayrı ayrı ön değerlendirme alalım. O takdirde,

1. $$4\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}\psi_{u_i}\omega_{u_i}\omega_{u_ju_j} = 4\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}(\psi_{u_i}\omega_{u_i}\omega_{u_j})_{u_j} - 4\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}\psi_{u_i}\omega_{u_j}\omega_{u_iu_j} =$$

$$= 4\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}(\psi_{u_i}\omega_{u_i}\omega_{u_j})_{u_j} - 2\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}(\psi_{u_i}\omega_{u_j}^2)_{u_i} + 2\lambda\nu\sum_{i=1}^{n+1}\omega_{u_i}^2$$

yazılır. Burada yeniden $\psi(u)$ fonksiyonun tanımı kullanılarak,

$$\psi_{u_iu_j}(u) = \begin{cases} 1 & i=j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

olduğu dikkate alınmıştır. Ayrıca,

$$\omega = \varphi H = e^{\lambda\psi^{-\nu}}\varphi$$

$$\omega_{u_i} = H(\varphi_{u_i} - \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}\varphi) \text{ ve } \nu \geq 2, \ \delta > 1$$

olduğundan,

$$4\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}\psi_{u_i}\omega_{u_i}\omega_{u_ju_j} = 4\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}[\psi_{u_i}H(\varphi_{u_i} - \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}\varphi) \ H(\varphi_{u_j} - \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_j}\varphi)]_{u_j} -$$

$$-2\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}[\psi_{u_i}H^2(\varphi_{u_j} - \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_j}\varphi)^2]_{u_j} + 2\lambda\nu\sum_{i=1}^{n+1}H^2(\varphi_{u_j} - \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_j}\varphi)^2 =$$

$$=d_{21}'(\varphi H)+2\lambda\nu\sum_{i=1}^{n+1}H^2(\varphi_{u_i}{}^2-2\lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_i}\varphi\varphi_{u_i}+\lambda^2\nu^2\psi^{-2\nu-2}\psi_{u_i}^2\varphi^2)=$$

$$=d_{21}'(\varphi H)+2\lambda\nu H^2\sum_{i=1}^{n+1}\varphi_{u_i}{}^2-4\lambda^2\nu^2\psi^{-\nu-1}H^2\varphi\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}\varphi_{u_i}+$$
$$+2\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2}H^2\varphi^2\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^2)=$$

$$=d_{21}'(\varphi H)+2\lambda\nu H^2|\nabla\psi|^2-4\lambda^2\nu^2\psi^{-\nu-1}H^2\varphi\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}\varphi_{u_i}+$$
$$+2\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2}H^2\varphi^2|\nabla\psi|^2=$$

$$=d_{21}'(\varphi H)+2\lambda\nu H^2|\nabla\psi|^2+2\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2}H^2\varphi^2|\nabla\psi|^2-$$
$$-2\lambda^2\nu^2\sum_{i=1}^{n+1}(H^2\psi^{-\nu-1}\varphi^2\psi_{u_i})_{u_i}-2\lambda^2\nu^2(\nu+1)\varphi^2\psi^{-\nu-2}H^2|\nabla\psi|^2+$$
$$+2\lambda^2\nu^2\varphi^2\psi^{-\nu-1}H^2\geq$$

$$\geq d_{21}(H\varphi)+2\lambda\nu|\nabla\varphi|^2H^2+2\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2}|\nabla\psi|^2\varphi^2H^2 \tag{6.18}$$

elde edilir.

2. $|\nabla\psi|\geq\delta>1$, $\eta^{-1}<\psi^{-1}$, $\nu>\dfrac{(n+2)\eta}{\delta(1-\eta)}$ şartlarından, $\psi^{-1}-\dfrac{n+2}{2\nu}|\nabla\psi|^{-2}>1$ eşitsizliği bulunur ve o takdirde,

$$4\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}\psi_{u_i}\omega_{u_i}\lambda^2\nu^2\psi^{-2\nu-2}\psi_{u_j}^2\omega=2\lambda^3\nu^3\sum_{i,j=1}^{n+1}(\psi_{u_i}\psi^2_{u_j}\psi^{-2\nu-2}\omega^2)_{u_i}+$$
$$+4\lambda^3\nu^3(\nu+1)\psi^{-2\nu-3}|\nabla\psi|^4\omega^2-2\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2}|\nabla\psi|^2\omega^2-$$
$$-4\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2}\Big(\sum_{i=2}^{n+1}\psi_{u_i}^2\Big)\omega^2\geq d_{22}(\omega)+4\lambda^3\nu^4\psi^{-2\nu-2}|\nabla\psi|^4\omega^2(\psi^{-1}-\frac{n+1}{2\nu}|\nabla\psi|^{-2})\geq$$

$$\geq d_{22}(\omega)+4\lambda^3\nu^4\delta^4\psi^{-2\nu-2}\omega^2=d_{22}(H\varphi)+4\lambda^3\nu^4\delta^4\psi^{-2\nu-2}\varphi^2H^2 \tag{6.19}$$

dır.

3. $$-4\lambda\nu \sum_{i,j=1}^{n+1} \psi_{u_i}\omega_{u_i}\lambda\nu(\nu+1)\psi^{-\nu-2}\psi_{u_j}^2\omega = -2\lambda^2\nu^2(\nu+1)\sum_{i,j=1}^{n+1}(\psi_{u_i}\psi_{u_j}^2\psi^{-\nu-2}\omega^2)_{u_i} +$$

$$+2\lambda^2\nu^2(\nu+1)|\nabla\psi|^2\psi^{-\nu-2}\omega^2 + 4\lambda^2\nu^2(\nu+1)\Big(\sum_{i=2}^{n+1}\psi_{u_i}^2\Big)\psi^{-\nu-2}\omega^2 -$$

$$-2\lambda^2\nu^2(\nu+1)(\nu+2)\psi^{-\nu-3}|\nabla\psi|^4\omega^2 \geq d_{23}(\omega) - 2\lambda^2\nu^2(\nu+1)(\nu+2)\psi^{-\nu-3}|\nabla\psi|^4\omega^2 =$$

$$= d_{23}(H\varphi) - 2\lambda^2\nu^2(\nu+1)(\nu+2)\psi^{-\nu-3}|\nabla\psi|^4\varphi^2 H^2 \qquad (6.20)$$

4. $$4\lambda\nu\sum_{i,j=1}^{n+1}\psi_{u_i}\omega_{u_i}\lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{u_iu_j}\omega = 2\lambda^2\nu^2\sum_{i=1}^{n+1}(\psi_{u_i}\psi^{-\nu-1}\omega^2)_{u_i} -$$

$$-2\lambda^2\nu^2\psi^{-\nu-1}\omega^2 + 2\lambda^2\nu^2(\nu+1)\psi^{-\nu-2}|\nabla\psi|^2\omega^2 \geq$$

$$\geq d_{24}(\omega) - 2\lambda^2\nu^2\psi^{-\nu-1}\omega^2 = d_{24}(H\varphi) - 2\lambda^2\nu^2\psi^{-\nu-1}H^2\varphi^2 \qquad (6.21)$$

Eğer (6.17) – (6.21) eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$\psi^{\nu+1}H^2(\Delta\varphi)^2 \geq d_2(\varphi H) + 2\lambda\nu|\nabla\varphi|^2 H^2 +$$

$$+\lambda^2\nu^2\varphi^2H^2(4\lambda\nu^2\delta^4\psi^{-\nu-1} - 2 - 2(\nu+1)(\nu+2)\psi^{-2}|\nabla\psi|^4)\psi^{-\nu-1} \qquad (6.22)$$

elde edilir.

$\lambda \geq \lambda_0$ için

$$\lambda\nu^2\delta^4\psi^{-\nu-1} - 2(\nu+1)(\nu+2)\psi^{-2}|\nabla\psi|^4 - 2 \geq 0$$

olduğunu hatırlarsak, o zaman (6.22) eşitsizliğinden (6.16) bulunur. Böylece Lemma 6.2 ispatlanmış olur.

Lemma 6.3 :

Lemma 6.2 'nin şartları sağlansın ve

$$\nu \geq \nu_1 = \max\{\nu_0 + n + 1,\ \ 4(n+1) + 8(n+1)(\delta^2 + \eta^2) + 1\}$$

olsun. Bu takdirde,

$$-2(n+1)\,\lambda\,\nu\,\varphi\,(\Delta\,\varphi)\,H^2 + \psi^{\nu+1}\,(\Delta\,\varphi)^2\,H^2 \geq$$

$$\geq 2\,\lambda^3\,\nu^3\,\psi^{-2\nu-2}\,\varphi^2\,H^2 + 2\,\lambda\,\nu\,n\,|\nabla\,\varphi|^2\,H^2 + 2(n+1)\,\lambda\nu\,d_1(\varphi) + d_2(\varphi) \qquad (6.23)$$

dır.

İspat :

(6.15) eşitliğini $2(n+1)\,\lambda\,\nu$ ile çarparak, bulunan ifade (6.16) ile toplanırsa,

$$-2(n+1)\,\lambda\,\nu\,\varphi\,(\Delta\,\varphi)\,H^2 + \psi^{\nu+1}\,(\Delta\,\varphi)^2\,H^2 \geq$$

$$\geq 2\,\lambda\,\nu\,n\,|\nabla\,\varphi|^2\,H^2 + \Big(3\,\lambda^3\,\nu^4\,\delta^4\,\psi^{-2\nu-2} - 4(n+1)\,\lambda^3\,\nu^3\,\psi^{-2\nu-2}\,|\nabla\,\psi|^2 -$$

$$-2(n+1)\,\lambda^2\,\nu^2\,(\nu+1)\,\psi^{-\nu-2}\sum_{i=1}^{n+1}\psi_{u_i}^2 + 2(n+1)\,\lambda^2\,\nu^2\,\psi^{-\nu-1}\Big)\,\varphi^2\,H^2 +$$

$$+\,2(n+1)\,\lambda\,\nu\,d_1(\varphi) + d_2(\varphi)$$

elde edilir.

$\nu \geq \nu_1$ olduğundan, son eşitsizlikten (6.23)bulunur. Dolayısıyla Lemma 6.3 ispatlanmış olur.

Teorem 6.1 'in İspatı

Lemma 6.3 'ü ve (6.13) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$[(n+1)^2\,\lambda^2\,\nu^2\,z^2 + 2\,c^2(z^2 + |\nabla z|^2)]\,H^2 + 2\,\psi^{\nu+1}\,H^2\,(|z|^2 + |\nabla z|^2)\,C^2 \geq$$

$$\geq ((n+1)^2\,\lambda^2\,\nu^2\,z^2 + (\Delta z)^2)\,H^2 + \psi^{\nu+1}\,(\Delta\,z)^2\,H^2 \geq$$

$$\geq 2(n+1)\,\lambda\nu\,|z|\cdot|\Delta z|\,H^2 + (\Delta z)^2 H^2 \psi^{\nu+1} \geq$$

$$\geq -2(n+1)\,\lambda\nu\,|z|\,.\,|\Delta z|\,H^2 + \psi^{\nu+1} H^2 (\Delta z)^2 \geq$$

$$\geq 2\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2} z^2 H^2 + 2\lambda\nu n\,|\nabla z|^2 H^2 + 2(n+1)\,\lambda\nu\, d_1(\varphi) + d_2(\varphi)$$

bulunur veya

$$0 \geq H^2 z^2 (2\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2} - [\,(n+1)^2\lambda^2\nu^2 + 2C^2 + 2\psi^{\nu+1}C^2\,] +$$

$$+ H^2 |\nabla z|^2 (2\lambda\nu n - 2C^2\psi^{\nu+1} - 2C^2) + 2(n+1)\,\lambda\nu\, d_1(\varphi) + d_2(\varphi) \qquad (6.24)$$

dır. $\nu \geq \nu_1$ alınırsa $\lambda > \bar{\lambda}_0$ için,

$$2\lambda^3\nu^3\psi^{-2\nu-2} - [\,(n+1)^2\lambda^2\nu^2 + 2C^2 + 2\psi^{\nu+1}C^2\,] \geq \lambda$$

$$2\lambda\nu - 2C^2\psi^{\nu+1} - 2C^2 \geq \lambda$$

olacak şekilde, $\bar{\lambda}_0$ olacağı açıktır.

Bundan başka $\Omega(u^0)$ bölgesinde $H \geq 1$ dır. O takdirde (6.24) eşitsizliğinden $\Omega(u^0)$ bölgesinde $\lambda \geq \bar{\lambda}_0$ için

$$0 \geq \lambda\,(z^2 + |\nabla z|^2) + 4\lambda\nu\, d_1(zH) + d_2(zH) \qquad (6.25)$$

yazılabilir.

(6.25) eşitsizliğinin $\Omega(u^0)$ bölgesi üzerinden integrali ve elde edilen eşitsizliğin $\lambda \to \infty$ için limit alınırsa, H fonksiyonunun tanımından ve (6.14) şartlarından,

$$\int_{\Omega(u^0)} (z^2 + |\nabla z|^2)\, d\Omega\,(u^0) \leq 0$$

elde edilir; yani $\Omega(u^0)$ bölgesinde $z \equiv 0$ dır.

u^0 noktasını D bölgesinin sınırının $\{y_n = 0\}$ olan kısmında değiştirerek D 'nin $0 \leq y_n \leq \delta$ şartını sağlayan noktaların kümesinde $z = 0$ olduğu ispatlanmış olur. D 'nin kalan kısmında $z = 0$ olduğu benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 6.1 'in ispatını tamamlamak için (6.11) – (6.12) probleminin her bir çözümünün D 'de ($x > 0$ olan noktalar için) (6.13) – (6.14)probleminin şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir.

$\Omega(u^0)$ bölgesinden ve k sabitine bağlı bir C için, (6.11) denkleminin her bir çözümünün (6.13) eşitsizliğini sağladığı ise aşikardır; benzer durum (6.12) ve (6.14) şartları içinde geçerlidir.

Yani (6.11) – (6.12) probleminin w çözümü (6.13) – (6.14) şartlarını sağlar. O zaman D bölgesinde $w \equiv 0$ bulunur. (6.9) şartından ve $w = u_{y_1}$ eşitliğinden D bölgesinde $u \equiv 0$ elde edilir; (6.7) denkleminden ise $f \equiv 0$ bulunur. Böylece Teorem 6.1 ispatlamış olur.

Not: $H^3(D)$ 'de $C^3(\bar{D})$ olan fonksiyonlar her yerde yoğun olduğu için, Teorem 6.1' in $H^3(D)$ uzayında da doğru olacağı açıktır.

KAYNAKLAR

AMIROV, A. Kh. AND PASHAEV, R.T. 1991. The inverse problem for the wave equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 3.

BEREZANSKII, Yu. M. 1958. "The existence theorem in the inverse problem in spectral analysis for the Schröndinger equation", Tr. Mosk.., 7, 3 - 62.

BITSADZE, A.V. 1981. Some problems of partial differential equations. Publishers Akad. Nauk SSSR.

FIKERA G., 1963. Kedinoy teorii kraevıkh zadaçdlya elliptiko - paraboliçeskikh uravneniy vtorogo poriatka . Sb. perevodov, Matematika, T. 7, No: 6, page 99 - 121.

GELFAND, I.M. and LEVITAN. B.M. 1951. On the differential Equations its spectral function. Izv. AN. SSSR., Ser. Math., 15, 309 – 360.

IVANOV, V.K., VASIN, V.V. and TANANA, V.P. 1978. Theory of linear ill - posed problems and its applications, "Nauka", Moscow.

KELDISH, M. V. 1951. O nekotorikh sluçyakh vırojdenya uravnenya eliptiçeskogo tipa na granitse oblasti Dokl. AN. SSSR, T. 77, No: 2, page: 181 - 183.

KOLMOGROV, A.N. and FOMIN. S.V. 1970. Introductory real analysis. Prentice - Hall International, Inc. , London.

KREIN, M.G. 1954. On the effective method of solvability of inverse problem. Dokl. AN. SSSR., 94, 767 - 770.

LAVRENT'EV, M.M. and ROMANOV V.G. 1966. On three linearized inverse problems for hyperbolic equations, Dokl. Akad. Nauk, SSSR 171, 1279 – 1281.

LAVRENT'EV, M.M. 1973. On conditionally correct problems for differential equations.

LAVRENT'EV, M.M. ROMANOV, V.G. and SHISHATSKII, S.P. 1986. Ill - posed problems of mathematical physics and analysis. Amer. Math. Society Rhode Island.

LIUSTERNIK, L.A. and SOBOLEV. V.I. 1966. Elements of functional analysis (translated by A.E. Labarre, Jr. et al.), Frederich Ungar publishing Co., Inc., Newyork.

MARCHENKO, V.A.1977. Sturm – Liouville operators and their applications, "Naukova Dum.

MIKHAILOV, V.P. 1978. Partial differential equations. Mir Publishers, Moskow.

MIZOCHATA, S. 1977. Theory of partial differential equations. M. Mir., 504.

NAIMARK, M.A., 1969. Linear differential operators, Moscova.

NOVIKOFF, P.S. 1938. Sur le probléme inverse du potential, C.R. (Dokl.) Acad. Sci., URSS, 165 – 168.

NOVIKOV, R.G. 1988. "A multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta y + (v(x) - E\,u(x))y = 0$", Funkts. Analiz Prilozken, 4, 11 - 22.

SOBOLEV, S.L. 1962. Applications of functional analysis in mathematical physics, Izdat. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk.

SELVESTER, J. and UHLMANN, G. 1987. "A global uniqueness theorem", Ann. Math., 125, 153 - 159.

TIKHONOV, A.N. 1943. On the stability of inverse problems, C.R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, 39, 176 – 179.

TIKHONOV, A.N. and ARSENIN, V. YA. 1974. Methods of solving ill - posed problem, Nauka, Moscow, 1974.

VRAGOV, V. N. 1983. Kraevie zadaçi dlya neglassiçeskikh uravneniy Matematiceskoy fiziki, Novosibirsk.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa YILDIZ, 16.10.1956 yılında Zonguldak'ta doğdu. 1974'de Zonguldak Kilimli Lisesinden mezun oldu. 1979'da Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. 1980 - 1984 yılları arasında Zonguldak Mehmet Çelikel Lisesinde Matematik Öğretmenliği yaptı. Vatani görevini Manisa'da tamamladıktan sonra 1984 yılı Kasım ayında Hacettepe Üniversitesi Zonguldak Mühendislik Fakültesine Uzman olarak atandı. 1988'de Öğretim Görevlisi olup, 1992 tarihinde Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne aynı görevle atanmıştır, halen bu görevi sürdürmektedir.