ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YARIM EKSENDE SPEKTRAL TEKİLLİĞE SAHİP SIÇRAMA KOŞULLU STURM–LIOUVILLE OPERATÖRLERİ

İbrahim ERDAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

TEZ ONAYI

İbrahim ERDAL tarafından hazırlanan " **Yarım Eksende Spektral Tekilliğe Sahip Sıçrama Koşullu Sturm-Liouville Operatörleri** " adlı tez çalışması 20/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. İshak ALTUN
Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Cihan ORHAN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Esra KIR ARPAT
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

20/07/2018

İbrahim ERDAL

ÖZET

Doktora Tezi

YARIM EKSENDE SPEKTRAL TEKİLLİĞE SAHİP SIÇRAMA KOŞULLU STURM–LIOUVILLE OPERATÖRLERİ

İbrahim ERDAL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral teoride bilinen bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yarım eksendeki impalsif Sturm-Liouville operatörüne ait bazı spektral özellikler elde edilmiş, bu operatörün Jost çözümü ve Jost fonksiyonunun asimptotik eşitliği bulunmuştur. Sürekli durumda bilinen yöntemlerden farklı olarak bu impalsif operatörün özdeğerleri ve spektral tekillikleri farklı bir yoldan incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, yarım eksendeki impalsif diskre Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi yapılmış, orjinal sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Temmuz 2018, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Spektral teori, impalsif koşul, Sturm-Liouville operatörü, fark operatörü, Jost çözümü, özdeğer problemi, spektral tekillik, saçılım fonksiyonu, asimptotik

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

IMPULSIVE STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH SPECTRAL SINGULARITIES ON THE SEMI-AXIS

İbrahim ERDAL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some well known basic definitions and theorems of spectral theory are given.

In the third chapter, some spectral properties of impulsive Sturm-Liouville operator are obtained on semi axis, Jost solution and asymptotic equation of Jost function of this operator are found. Unlike the conventional methods in continuous case, eigenvalues and spectral singularities of this impulsive operator are investigated in a different way.

In the fourth chapter, the spectral analysis of impulsive discrete Sturm-Liouville operator on semi axis is considered, original results are obtained.

The fifth and the last chapter is devoted to the discussion and conclusion.

July 2018, 53 pages

Key Words: Spectral theory, impulsive condition, Sturm-Liouville operator, difference operator, Jost solution, eigenvalue problem, spectral singularity, scattering function, asymptotic

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde emeği geçen, başta danışman hocam Sayın Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) olmak üzere engin bilgi birikiminden yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve değerli hocam Doç. Dr. Esra KIR ARPAT'a (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) en içten dileklerimle teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hayatımın her aşamasında yanımda olup hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, her an desteklerini hissettiğim sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Doktora yaptığım süre zarfında verdiği burstan ötürü TÜBİTAK'a da teşekkür ederim.

İbrahim ERDAL
Ankara, Temmuz 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$\rho\,(L)$	L operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün diskre (nokta) spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi
$L^2(X)$	$\left\{ f \mid f : X \to \mathbb{R}, \int\limits_X \|f(x)\|^2 \, dx < \infty \right\}$
$L^2\,(1,\infty)$	$\left\{ f \mid f : (1,\infty) \to \mathbb{R}, \int\limits_1^\infty \|f(x)\|^2 \, dx < \infty \right\}$
$l^2(\mathbb{N})$	$\left\{ y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \|\|y_n\|\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|^2 < \infty \right\}$
$\operatorname{Re} A$	A kompleks sayısının reel (gerçel) kısmı
$\operatorname{Im} A$	A kompleks sayısının imajiner (sanal) kısmı
$\lfloor x \rfloor$	x reel sayısının tam değeri
$o(1)$	Sonsuz küçük değerler
$O(1)$	Sınırlı değerler
$W[Y,Z]$	Y ve Z çözümlerinin Wronskiyeni
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematikte, gerçek hayatta karşılaşılan birçok problemin çözümü için modellemeler mevcut olup bu modellemelerin çoğu başlangıç ya da sınır değer problemleriyle ifade edilmektedir. Bir diferensiyel eşitlik verildiğinde, bütün koşulların bağımsız değişkenin aynı değeri için belirlenmesi halinde problem *başlangıç değer problemi*, koşulların bağımsız değişkenin iki farklı değerinde, özellikle de ilgili bölgenin sınırlarında verilmesi halinde ise problem *sınır değer problemi* olarak nitelendirilir. Spektral teoride, her iki durumda da problemlerin çözümü için operatörlerden yararlanılır. Başta fizik ve kuantum mekaniği olmak üzere, uygulamalı bilimlerin çoğunda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi uzun yıllar birçok bilim adamının çalışma konusu olmuştur.

Teoride, regüler ve singüler olmak üzere iki çeşit diferensiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral analizleri detaylı bir biçimde araştırılmıştır. Tanım bölgesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatörlere *regüler operatörler*, tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz noktaya sahip olan diferensiyel operatörlere *singüler operatörler* denir.

İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinmektedir. İkinci mertebeden Sturm-Liouville denklemi ise literatürde

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda w(x)y \tag{1.1}$$

şeklinde karşımıza çıkar. Bu denklem ve bu denklemle birlikte farklı birtakım sınır koşulları tarafından üretilen operatöre Sturm-Liouville operatörü denilmektedir. Bu operatör adını, yıllar önce bu konuda çalışmaya başlayan iki matematikçiden almıştır. 1836 yılında Sturm ve Liouville adlı yazarlar aynı derginin aynı sayısında yayınlanan makalelerinde,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ a \leq x \leq b$$
$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0$$
$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

sınır değer problemini incelemiş, bu problemin aşikar olmayan çözümünün varolup olmadığını ve spektrumunu araştırmıştır ((Sturm 1836), (Liouville 1836)). Zaman içinde bu problemlere duyulan ilgi artmış, Sturm-Liouville problemleri çeşitli bilimlerde somut, fiziksel anlamı yoğun olan bir uygulama alanına sahip olmuştur. Örneğin; $V(x)$ potansiyel alan fonksiyonu, m parçacığın kütlesi, h Planck sabiti, $u(x,t)$ parçacığın dalga fonksiyonu, E, u nun konumuna karşılık gelen enerji seviyesi olmak üzere, kuantum mekaniğinde iyi bilinen Schrödinger dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{h}{2m}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + V(x)u(x,t) = 0,$$
$$u(x,t) = e^{it\sqrt{E}y(x)}$$

dönüşümü altında

$$-y'' + \frac{2m}{h}V(x)y = \frac{2m}{h}Ey$$

denklemine dönüşür ki, bu da Sturm-Liouville tipinde bir denklemdir. Daha açık olarak Sturm-Liouville denklemlerine bir boyutlu $V(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemleri de denir.

19. ve 20. yüzyıllarda, Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi daha hızlı gelişmiş, Hilbert uzay kavramı oluştuktan sonra da bu uzaylarda tanımlanan lineer selfadjoint operatörler teorisi oldukça ilgi görmüştür. Bilindiği gibi, incelenen sınır değer ya da başlangıç değer problemindeki diferensiyel ifadenin katsayıları ve sınır şartlarındaki parametreler reel değerli olduğunda, o diferensiyel operatör *kendine eşlenik (selfadjoint),* aynı diferensiyel ifadenin katsayıları ve sınır şartlarındaki parametreler kompleks olduğunda ise o diferensiyel operatör *kendine eşlenik olmayan*

(non-selfadjoint) olarak adlandırılmaktadır. Operatör kendine eşlenik olduğunda, operatörün tüm özdeğerleri ve o özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları reel iken, kendine eşlenik olmadığında bu özdeğerler reel olmayabilir ve bu durumda *spektral tekillikler* denilen özfonksiyonların tamlığı için engel teşkil eden noktalar mevcut olmaktadır.

Spektral teoride, sınırsız aralıkta kendine eşlenik olmayan singüler diferensiyel operatörler alanındaki çalışmalarda öncülük Naimark'a aittir. Naimark, 1960 yılında q kompleks değerli fonksiyon, h bir kompleks sayı, λ spektral parametre olmak üzere,

$$l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda^2 y,\ x \in \mathbb{R}_+ := [0,\infty) \tag{1.2}$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{1.3}$$

sınır koşulunun yardımı ile $L^2(0,\infty)$ uzayında tanımlı kendine eşlenik olmayan Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisini incelemiştir. Bu çalışmada, ele alınan operatörün spektrumunun, sürekli ve diskre spektrum ile spektral tekilliklerden oluştuğu gösterilmiştir. Ayrıca spektral teoride iyi bilindiği üzere bir spektral tekilliğin, rezolvent operatörün çekirdeğinin kutup noktası olduğu, sürekli spektrum üzerinde bulunduğu, fakat özdeğer olmadığı Naimark'ın bu çalışmasında ispatlanmıştır. Bunun yanı sıra, en az bir $\epsilon > 0$ için,

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} |q(x)|\, dx < \infty$$

şartı sağlandığında, operatörün sonlu sayıda ve sonlu katlı özdeğer ile spektral tekilliğe sahip olduğu elde edilmiştir.

Naimark' ın bulduğu bu sonuçlardan sonra, sayısız matematikçi tarafından Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisi geliştirilmiştir. En önemlilerinden birisi (Marchenko 1986) olup, Marchenko (1.2) denkleminin

$$y(0) = 0 \tag{1.4}$$

sınır koşulu altında

$$\lim_{x\to\infty} y\,(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = 1,\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{+} := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \ \operatorname{Im}\lambda \geq 0\}$$

koşulunu sağlayan sınırlı çözümünü elde etmiştir. $e\,(x,\lambda)$ ile göstereceğimiz bu çözüme (1.2) ve (1.4) sınır değer probleminin Jost çözümü denir. Ayrıca Marchenko, bu Jost çözümünün

$$\int_{0}^{\infty} x\,|q\,(x)|\,dx < \infty$$

koşulu altında

$$e\,(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{x}^{\infty} K\,(x,t)\,e^{i\lambda t}dt,\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{+}$$

integral gösterime sahip olduğunu göstermiştir. Burada $K\,(x,t)$, q fonksiyonu yardımı ile verilen bir integral denklemdir.

$$e\,(\lambda) := 1 + \int_{0}^{\infty} K\,(0,t)\,e^{i\lambda t}dt,\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{+}$$

ile tanımlı fonksiyona da bu sınır değer probleminin Jost fonksiyonu adını vermiştir.

Günümüze kadar, spektral teorinin gerek düz gerekse ters problemleriyle alakalı çok sayıda çalışma yapılmıştır. Ancak bu çalışmaların hepsi elbette ki diferensiyel operatörlere ait değildir. Teknoloji ve bilim geliştikçe, karşılaşılan problemleri gerçeğine en uygun şekilde modellemek için diferensiyel denklemler yeterli olmadığından, birçok matematikçi fark denklemlerini incelemeye koyulmuştur. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların çoğu ayrık (kesikli) olduğundan, bu tür denklemler önemli matematiksel modeller oluşturmaktadır. Oysa ki diferensiyel denklemler, doğadaki sürekli olayları karakterize ederler sadece. İlginç olan, fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzerleridir. Fark denklemleri teorisinin uygulamaları, biyolojide canlı popülasyon sayısının incelenmesinde, ekonomide, kontrol teorisinde, moleküler biyolojide hücre hareketlerinin gözlemlenmesinde ve daha birçok alanda zengin bir biçimde mevcuttur. Atkinson, Kelly, Peterson ve Agarwal bu alandaki çalışmalara öncülük eden bilim adamlarıdır (Atkinson 1964, Agarwal ve Wong 1997, Agarwal 2000, Kelly ve Peterson 2001).

Son yıllarda fark denklemlerinin spektral analizi de yoğun biçimde incelenmeye başlanmıştır. İkinci basamaktan lineer fark denklemi olarak bilinen

$$\triangle\left(a_{n-1}\triangle y_{n-1}\right)+\left(q_n-\lambda\right)y_n=0, \quad n\in\mathbb{N} \tag{1.5}$$

fark ifadesi, (1.1) Sturm-Liouville denkleminin tam olarak diskre analoğudur. Burada $\triangle$, $\triangle y_n := y_{n+1}-y_n$ şeklinde tanımlı ileri fark operatörü, a_n ve q_n ise (1.1) denklemindeki q potansiyel fonksiyonuna karşılık gelen reel ya da kompleks dizileri ifade etmektedir. Ayrıca,

$$b_n=q_n-a_{n-1}-a_n$$

seçildiğinde, (1.5) denkleminin

$$a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1}=\lambda y_n, \quad n\in\mathbb{N} \tag{1.6}$$

denklemine dönüştüğü açık olarak görülmektedir. Yıllar içinde, spektral teoride fark denklemlerinin uygulama alanlarının artmasıyla, (1.6) denklemi çok sayıda çalışmada incelenmiştir. Örneğin, $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel diziler, $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $a_n>0$ ve $n\in\mathbb{Z}$ olduğunda, Guseinov

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|\left(|1-a_n|+|b_n|\right)<\infty$$

şartı altında, (1.6) denkleminin saçılım teorisinin ters problemini çalışmıştır (Guseinov 1976b). (Bairamov vd 2001) ve (Krall vd 2001) da aynı problemi yarım eksende belli koşullar altında incelemiş ancak burada $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri kompleks seçilmiştir. 2001 ve 2003 yıllarında ise, Adıvar ve Bairamov tarafından kompleks $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri için tüm eksende (1.6) denklemi incelenerek, önemli spektral özellikler elde edilmiştir.

Yukarıda bahsedilen literatüre bakılırsa, hem Sturm-Liouville hem de onun diskre analoğu olan fark operatörlerinin spektral teorisi gerek yarım eksende, gerek tüm eksende, operatörün gerek selfadjoint, gerekse non-selfadjoint olduğu durumda skaler katsayılı olarak detaylıca incelenmiştir. Dikkat edilirse, bu problemlerde modelleme yapılan süreçlerde bir süreksizlik ya da olaylar esnasında bir durum değişikliği söz konusu değildir. Söz konusu olduğunda da, ne diferensiyel denklemler teorisi, ne de fark denklemler teorisi karşılaşılan bu etkiye cevap verebilmektedir. Bunun için yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur.

Bilimsel süreçlerin bazı aşamalarında anlık ve keskin durum değişikliklerine rastlanabilir. Bunlar kısa süreli ani değişimlerdir ve tüm süreç ile kıyaslandığında ihmal edilebilecek kadar kısadır. Bu sebeple bu etkilere impals (sıçrama) etkisi denilmektedir. Doğadaki birçok değişim ve gelişim süreci belli zamanlardaki bu anlık durum değişiklikleriyle karakterize edilir. Örneğin, malzemelerdeki sıcaklık dağılımı ve ısı geçişi bu tür süreçlerdendir. Ayrıca bazı biyolojik olgular, tıp ve biyolojideki patlama ritim modelleri, ekonomideki optimal kontrol modelleri, farmokokinetik ve frekans modulasyonlu sistemler de impals etkiler içerir. Bu tür fiziksel olayların matematiksel modeli ifade edildiğinde ortaya impalsif (sıçramalı) diferensiyel denklemler çıkar. Gerçek hayatta karşılaştığımız birçok bilimsel süreçte bu impalsif etkileri içeren impalsif diferensiyel denklemlerden yararlanılmaktadır.

Şimdi impals etkisinin nasıl oluştuğunu anlayabilmek için vücuda ilaç dağılımı için kullanılan Kruger-Thiemer modeline bir göz atalım. Bu model, insan bedeninde ilaç dağılımı için Kruger-Thiemer tarafından önerilen basit iki aşamalı bir modeldir. Ağız yoluyla alınan ilacın ilk önce mide-bağırsak sistemi içinde çözündüğü kabul edilir. Daha sonra mide aracılığı ile ince bağırsaklara geçer. İnce bağırsaklardan emilen ilaçlar kana karışır ve karaciğer üzerinden geçerek tüm vücuda dağılır. Kanda ilaç seviyesi az olduğunda istenen etki çıkmaz iken, fazla olduğunda da yan etkiler ortaya çıkar. İlaç, daha sonra görünür dağılım hacmi (V_D) olarak adlandırılan vücutta sıvıların olduğu kas ve dokular tarfından emilir. Görünür dağılım hacmi, uygulanan bir ilacın toplam miktarının kanda gözlemlenen aynı konsantrasyonda tutulmasını gerektirecek teorik hacimdir. Son olarak, ilaç kanı temizleyen karaciğer ve böbrekler aracılığı ile vücuttan dışarı atılır. Şimdi, $x(t)$ ve $y(t)$ ile sırasıyla t anında mide-bağırsak sisteminde bulunan ilacı ve görünür dağılım hacmi (V_D)'ni gösterelim. k_1 ve k_2 de ilgili oran sabitleri olsun. O halde, bu modelin dinamik sistemi

$$x^{'} = -k_1 x, \; y^{'} = -k_2 y + k_1 x \tag{1.7}$$

şeklindedir. Kabul edelim ki, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_N < T$ anlarında, ilaç $\delta_0, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_N$ miktarlarında emilsin. Bu durumda

$$\begin{cases} x(t_i^+) = x(t_i^-) + \delta_i, \; i = 1, 2, ..., N \\ y(t_i^+) = y(t_i^-) \\ x(0) = \delta_0, \; y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

yazılır. İstenen terapik etkiyi elde etmek için bu zaman aralığında görünür dağılım hacmindeki ilaç miktarının hiç bir zaman belli sabit bir değerin altına düşmemesi gerekir. Son olarak biyolojik maliyet fonksiyonu

$$f(\delta) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} \delta_i^2$$

alınırsa, hem ilacın yan etkilerini azaltmak hem de maliyeti düşürmek için (1.7) ve (1.8) e bağlı olarak $\inf_{\delta \geq 0} f(\delta)$ değerini hesaplamak gerekir. Bu problem açıkça göstermektedir ki, (1.7) ve (1.8) ile basit bir impalsif diferensiyel denklem sistemi ifade edilmiştir (Lakshmikantham vd 1998).

Bir impalsif diferensiyel denklem sisteminde söz konusu impals etkisi anlarındaki atlamalar sırasında süreksizlik noktaları oluşmaktadır. Dolayısıyla, normal diferensiyel denklemlerde sürekli fonksiyon uzayları söz konusuyken, burada parçalı sürekli fonksiyonlar uzayı söz konusudur. İmpalsif diferensiyel denklemlerinin teorisi

(Lakshmikantham 1998), (Samoilenko vd 1995) ve (Bainov vd 1998) kitaplarında detaylı bir şekilde incelenmiştir. İmpalsif operatörlerin spektral teorisi de son yıllarda Mukhtarov, Mostafazadeh, Uğurlu ve Bairamov tarafından incelenmeye başlanmıştır (Mukhtarov vd 2004, Mostafazadeh 2009, Uğurlu ve Bairamov 2013). Özellikle, Mostafazadeh, 2011 yılında tüm reel eksen üzerinde

$$-\psi''(x) = k^2\psi(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

denklemini, $x = 0$ noktasında verilen impalsif koşul ile incelemiştir.

Bu doktora tezinde, ilk olarak (1.2) diferensiyel ifadesi yardımıyla üretilen impalsif diferensiyel operatör ele alınacak, bu operatörün spektral teorisine ilişkin sonuçlar elde edilecektir. Daha sonra ise, aynı problemler yarım eksende (1.2) ifadesinin diskre analoğu olan fark denklemi için incelenerek, elde edilen impalsif fark operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri araştırılacaktır. Hem sürekli hem de kesikli durumda denklemlerin Jost fonksiyonuna ait asimptotikler bulunup, bu fonksiyonların bazı analitik özelliklerinden bahsedilecektir. Literatürde impalsif operatörlere ait çalışmalar çoğunlukla tüm eksende bulunduğundan ve bu tezde kullanılan yöntem klasik yöntemlerden farklı olduğundan, bu tezden elde edilen sonuçlarla literatürdeki bu boşluğun kapatılması hedeflenmektedir.

Bu tezde, günümüzde çok yaygın kullanılması ve daha kolay ifade edilmesinden dolayı sıçrama koşullu operatör yerine impalsif operatör tabiri kullanılacaktır.

2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

Bu bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edeceğimiz sonuçlar için ihtiyaç duyacağımız bilinen bazı temel kavram ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 $X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzay ve $T : D(T) \subset X \to X$ operatörü lineer olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ operatörüne T operatörünün rezolvent operatörü ya da kısaca rezolventi denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.2 $R_\lambda(T)$ operatörü mevcut, sınırlı ve tanım cümlesi X uzayında yoğun olması durumunda, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T operatörünün bir regüler değeri denir. T operatörünün regüler değerlerinden oluşan cümleye ise T operatörünün rezolvent cümlesi denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.3 $R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayılarının cümlesine T operatörünün diskre spektrumu ya da nokta spektrumu adı verilir
(Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.4 $R_\lambda(T)$ mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekildeki λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye T operatörünün sürekli spektrumu denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.5 X bir kompleks vektör uzayı ve $T : X \to X$ operatörü lineer olsun. λ kompleks sayısı için $Tx = \lambda x$ denkleminin aşikar olmayan bir $x \in X$ çözümü varsa λ sayısına T operatörünün özdeğeri denir. Bu x çözümüne ise T operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.6 Bir T operatörünün rezolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve T operatörünün özdeğeri olmayan noktalara T operatörünün spektral tekillikleri denir (Naimark 1960).

Üçüncü bölümde incelenecek olan impalsif Sturm-Liouville operatörünün bazı analitik özelliklerinin belirlenmesinde aşağıdaki teoremlerden yararlanılacaktır:

Teorem 2.1 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.2 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.3 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.4 (Privalov Teoremi**)**: Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan, analitik bir fonksiyonun reel eksendeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.5 (Pavlov Teoremi): f fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ kümesinde analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+$ kümesinde sonsuz mertebeden türevlenebilir, $\mu(T = \left\{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\}) = 0$,

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq A_n \ , \ z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \ , \ n = 0, 1, 2, ...$$

ve

$$E(s) = \inf_n \frac{A_n s^n}{n!}$$

olmak üzere, bir $h > 0$ için

$$\int_0^h \ln E(s) d\mu(T, s) = -\infty$$

olsun. Eğer en az bir H pozitif reel sayısı için

$$\int_{-\infty}^{H} \frac{\ln|f(x)|}{x^2+1}dx < \infty \quad , \quad \int_{H}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{x^2+1}dx < \infty$$

ise, f fonksiyonu kapalı üst düzlemde özdeş olarak sıfırdır (Pavlov 1967).

3. İMPALSİF STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ

Yarım eksendeki impalsif operatörlerin spektral teorisini incelediğimiz bu doktora tezinde, çalışmalarımıza ilk olarak Sturm-Liouville operatörleri ile başladık.

$x = 1$ noktası, impalsif koşulun verildiği nokta olmak üzere, yarım eksendeki Sturm-Liouville denklemi tarafından üretilen L operatörü impalsif Sturm-Liouville operatörü olarak tanımlanacaktır. Bu bölümde, ilk olarak bahsedilen Sturm-Liouville denkleminin bazı özel çözümleri ve bu çözümler yardımıyla M transfer matrisi elde edilecektir. Sonraki alt kısımlarda sırasıyla L impalsif Sturm-Liouville operatörünün rezolvent operatörü verilecektir. Daha sonra rezolvent operatörün kutup noktalarıyla ilişkili olarak L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin kümesi M matrisi yardımıyla karakterize edilerek belirli koşullar altında bu kümelerin ve katlarının sonluluğu elde edilecektir. Elde edilen sonuçlar, bölüm sonundaki detaylı bir örnek içinde kullanılacaktır.

$L^2[0,\infty)$ Hilbert uzayında yarım eksen üzerinde

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \qquad x \in [0,1) \cup (1,\infty), \tag{3.1}$$

Sturm-Liouville diferensiyel denklemi,

$$y(0) = 0 \tag{3.2}$$

sınır koşulu ve

$$y_{\pm}(1) = \lim_{x \to 1^{\pm}} y_{\pm}(x)$$

şeklinde tanımlanmak üzere $x = 1$ noktasındaki

$$\begin{bmatrix} y_+(1) \\ y'_+(1) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_-(1) \\ y'_-(1) \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

impalsif koşulu ile üretilen L operatörünün, spektral tekillikleri ve özdeğerleri problemini inceleyelim. Burada a, b, c, d kompleks sayılar, $\det B \neq 0$, λ bir spektral parametre olmak üzere, kompleks değerli q potansiyel fonksiyonu

$$\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty \tag{3.4}$$

koşulunu sağlasın.

(3.1) denkleminin, $[0,1)$ ve $(1,\infty)$ aralığındaki çözümleri sırasıyla

$$\begin{cases} y_-(x) := y(x), & 0 \le x < 1 \\ y_+(x) := y(x), & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde gösterilsin. Açıktır ki, $x = 1$ noktası, (3.1) denkleminin impals (sıçrama) noktasıdır ve kompleks terimlerden oluşan B matrisi ile birlikte (3.3) impalsif koşulu, bu denklemin çözümlerinin $[0,1)$ aralığından $(1,\infty)$ aralığına karşılıklı devam etmesini sağlar. $S\left(x,\lambda^2\right)$ ve $C\left(x,\lambda^2\right)$, (3.1) denkleminin sırasıyla

$$S\left(0,\lambda^2\right) = 0, \qquad S'\left(0,\lambda^2\right) = 1,$$

$$C\left(0,\lambda^2\right) = 1, \qquad C'\left(0,\lambda^2\right) = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan $[0,1)$ aralığındaki temel çözümleri olup λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır ve bu iki çözümün Wronskiyeni için

$$W[S\left(x,\lambda^2\right), C\left(x,\lambda^2\right)] = -1, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{3.5}$$

eşitliği gerçeklenir. Ek olarak, $S\left(x,\lambda^2\right)$ ve $C\left(x,\lambda^2\right)$ çözümleri,

$$S\left(x,\lambda^2\right) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x Q(x,t)\frac{\sin\lambda\gamma t}{\lambda\gamma}dt \tag{3.6}$$

ve

$$C\left(x,\lambda^2\right) = \cos\lambda x + \int_0^x P(x,t)\cos\lambda t dt \tag{3.7}$$

integral gösterimlerine sahip olup burada $Q(x,t)$ ve $P(x,t)$ çekirdek fonksiyonları q potansiyel fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilir (Levitan ve Sargsjan 1991).

Ayrıca, $e(x,\lambda)$ ve $\widehat{e}(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin $\lambda \in \overline{C}_+$ için sırasıyla

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} e(x,\lambda)e^{-i\lambda x} &= 1, \\ \lim_{x\to\infty} \widehat{e}(x,\lambda)e^{i\lambda x} &= 1, \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan $(1,\infty)$ aralığındaki lineer bağımsız çözümleri olup

$$W[e(x,\lambda), \widehat{e}(x,\lambda)] = -2i\lambda, \quad x \in (1,\infty), \quad \lambda \in \overline{C}_+ \tag{3.8}$$

eşitliği kolaylıkla doğrulanabilir. $e(x,\lambda)$ çözümü, (3.1) denkleminin sınırlı çözümüdür ve (3.4) koşulu altında

$$e(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int_x^{\infty}K(x,t)\,e^{i\lambda t}dt,\quad \lambda\in\overline{C}_+ \tag{3.9}$$

gösterimine sahiptir. Burada $K(x,t)$, q fonksiyonu yardımıyla tanımlıdır (Marchenko 1986). Ayrıca, $F_x(x,y):=\dfrac{\partial}{\partial x}F(x,y)$ ve σ fonksiyonu

$$\sigma(x):=\int_x^{\infty}|q(t)|\,dt$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$|K(x,t)| \le c\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \tag{3.10}$$

$$|K_x(x,t)| \le \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|+c\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \tag{3.11}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Diğer yandan, x_0, $(1,\infty)$ aralığında bir reel sayı olmak üzere, (3.1) denkleminin $(1,\infty)$ aralığındaki sınırsız çözümü olan $\widehat{e}(x,\lambda)$, (3.4) koşulu altında

$$\widehat{e}(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+\frac{1}{2i\lambda}\int_{x_0}^{x}e^{i(x-t)\lambda}q(t)\widehat{e}(t,\lambda)\,dt+\frac{1}{2i\lambda}\int_x^{\infty}e^{i(t-x)}q(t)\widehat{e}(t,\lambda)\,dt \tag{3.12}$$

integral denklemini sağlar (Naimark 1968).

$A_\pm$ ve $B_\pm$, λ parametresine bağlı katsayılar olmak üzere (3.1) denkleminin $[0,1)$ ve $(1,\infty)$ aralığındaki lineer bağımsız çözümleri yardımıyla (3.1)-(3.3) impalsif sınır değer probleminin genel çözümü

$$\begin{cases} y_-(x,\lambda)=A_-C\left(x,\lambda^2\right)+B_-S\left(x,\lambda^2\right), & 0\le x<1\\ y_+(x,\lambda)=A_+e(x,\lambda)+B_+\widehat{e}(x,\lambda), & x>1\end{cases} \tag{3.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.13) ifadesinden

$$\begin{cases} y'_-(x,\lambda)=A_-C'\left(x,\lambda^2\right)+B_-S'\left(x,\lambda^2\right), & 0\le x<1\\ y'_+(x,\lambda)=A_+e'(x,\lambda)+B_+\widehat{e}'(x,\lambda), & x>1\end{cases}$$

bulunup çözümlerin $x=1$ noktasında tanımlanan değerleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
y_-(1,\lambda) &= A_-C\left(1,\lambda^2\right)+B_-S\left(1,\lambda^2\right)\\
y_-'(1,\lambda) &= A_-C'\left(1,\lambda^2\right)+B_-S'\left(1,\lambda^2\right)\\
y_+(1,\lambda) &= A_+e(1,\lambda)+B_+\widehat{e}(1,\lambda)\\
y_+'(1,\lambda) &= A_+e'(1,\lambda)+B_+\widehat{e}'(1,\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu değerler (3.3) impalsif koşulunda dikkate alınırsa

$$\begin{bmatrix} A_+e(1,\lambda)+B_+\widehat{e}(1,\lambda)\\ A_+e'(1,\lambda)+B_+\widehat{e}'(1,\lambda)\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix} A_-C\left(1,\lambda^2\right)+B_-S\left(1,\lambda^2\right)\\ A_-C'\left(1,\lambda^2\right)+B_-S'\left(1,\lambda^2\right)\end{bmatrix}$$

gerçeklenir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\begin{bmatrix} e(1,\lambda) & \widehat{e}(1,\lambda)\\ e'(1,\lambda) & \widehat{e}'(1,\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_+\\ B_+\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix} C\left(1,\lambda^2\right) & S\left(1,\lambda^2\right)\\ C'\left(1,\lambda^2\right) & S'\left(1,\lambda^2\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_-\\ B_-\end{bmatrix}$$

eşitliği bulunur. Son eşitlikte N ve D matrisleri

$$N:=\begin{bmatrix} e(1,\lambda) & \widehat{e}(1,\lambda)\\ e'(1,\lambda) & \widehat{e}'(1,\lambda)\end{bmatrix}$$

ve

$$D:=\begin{bmatrix} C\left(1,\lambda^2\right) & S\left(1,\lambda^2\right)\\ C'\left(1,\lambda^2\right) & S'\left(1,\lambda^2\right)\end{bmatrix}$$

şeklinde seçilirse $\det N=-2i\lambda\neq 0$ olduğundan M transfer matrisi

$$M:=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}=N^{-1}BD \tag{3.14}$$

olarak tanımlanır ve

$$\begin{bmatrix} A_+\\ B_+\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} A_-\\ B_-\end{bmatrix} \tag{3.15}$$

eşitliğini sağlar. (3.14) eşitliğinden M matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
M_{11}(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda}\left\{\widehat{e}'(1,\lambda)\left[aC\left(1,\lambda^2\right)+bC'\left(1,\lambda^2\right)\right]\right. \\
&\qquad \left.-\,\widehat{e}(1,\lambda)\left[cC\left(1,\lambda^2\right)+dC'\left(1,\lambda^2\right)\right]\right. \\
M_{12}(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda}\left\{\widehat{e}'(1,\lambda)\left[aS\left(1,\lambda^2\right)+bS'\left(1,\lambda^2\right)\right]\right. \\
&\qquad \left.-\widehat{e}(1,\lambda)\left[cS\left(1,\lambda^2\right)+dS'\left(1,\lambda^2\right)\right]\right\} \\
M_{21}(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda}\left\{-e'(1,\lambda)\left[aC\left(1,\lambda^2\right)+bC'\left(1,\lambda^2\right)\right]\right. \\
&\qquad \left.+e(1,\lambda)\left[cC\left(1,\lambda^2\right)+dC'\left(1,\lambda^2\right)\right]\right\} \\
M_{22}(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda}\left\{-e'(1,\lambda)\left[aS\left(1,\lambda^2\right)+bS'\left(1,\lambda^2\right)\right]\right. \\
&\qquad \left.+e(1,\lambda)\left[cS\left(1,\lambda^2\right)+dS'\left(1,\lambda^2\right)\right]\right\} \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi, (3.1)-(3.3) sınır değer probleminin keyfi iki çözümünün katsayıları olan $A_{\pm}$ ve $B_{\pm}$, $A_{\pm}^{\pm}$ ve $B_{\pm}^{\pm}$ katsayıları yardımıyla yeniden düzenlenirse

$$f(x,\lambda)=\begin{cases} A_{-}^{+}C\left(x,\lambda^2\right)+B_{-}^{+}S\left(x,\lambda^2\right), & 0\le x<1 \\ A_{+}^{+}e(x,\lambda)+B_{+}^{+}\widehat{e}(x,\lambda), & 1<x<\infty \end{cases} \qquad (3.17)$$

ve

$$g(x,\lambda)=\begin{cases} A_{-}^{-}C\left(x,\lambda^2\right)+B_{-}^{-}S\left(x,\lambda^2\right), & 0\le x<1 \\ A_{+}^{-}e(x,\lambda)+B_{+}^{-}\widehat{e}(x,\lambda), & 1<x<\infty \end{cases} \qquad (3.18)$$

çözümlerine ulaşılır. $\widehat{e}(x,\lambda)\notin L^2(1,\infty)$ olduğundan, f çözümü (3.1)-(3.3) impalsif sınır değer probleminin Jost çözümü olarak göz önüne alındığında,

$$f(x,\lambda)\to e(x,\lambda), \qquad x\to\infty$$

asimptotiği elde edilir ve bu asimptotik yardımıyla

$$B_{+}^{+}=0, \qquad A_{+}^{+}=1 \qquad (3.19)$$

eşitlikleri bulunur. Ayrıca g çözümü de problemin (3.2) sınır koşulunu sağlayan çözümü olarak düşünülürse h, sıfırdan farklı keyfi bir kompleks sayı olmak üzere

$$A_{-}^{-}=0, \qquad B_{-}^{-}=h \qquad (3.20)$$

eşitlikleri elde edilir. Ek olarak, (3.19) ifadesi (3.15) eşitliğinde dikkate alınırsa,

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{-}^{+}\\ B_{-}^{+}\end{bmatrix}$$

denklemi çözülerek

$$A_{-}^{+}=\frac{M_{22}(\lambda)}{\det M}, \qquad B_{-}^{+}=-\frac{M_{21}(\lambda)}{\det M} \tag{3.21}$$

katsayıları bulunur. Benzer şekilde (3.20) ifadesi (3.15) eşitliğinde hesaba katılırsa,

$$\begin{bmatrix} A_{+}^{-} \\ B_{+}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$$

denklemi çözülerek

$$A_{+}^{-}=hM_{12}(\lambda), \qquad B_{+}^{-}=hM_{22}(\lambda) \tag{3.22}$$

katsayıları elde edilir. Böylece, A_{-}^{+}, B_{-}^{+}, A_{+}^{+}, B_{+}^{+} katsayıları (3.17) ifadesinde ve A_{-}^{-}, B_{-}^{-}, A_{+}^{-}, B_{+}^{-} katsayıları da (3.18) ifadesinde yerine konulursa, f ve g çözümleri sırasıyla

$$f(x,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{M_{22}(\lambda)}{\det M}C\left(x,\lambda^2\right)-\dfrac{M_{21}(\lambda)}{\det M}S\left(x,\lambda^2\right), & 0\le x<1 \\ e(x,\lambda), & 1<x<\infty \end{cases} \tag{3.23}$$

ve

$$g(x,\lambda)=\begin{cases} hS\left(x,\lambda^2\right), & 0\le x<1 \\ hM_{12}(\lambda)e(x,\lambda)+hM_{22}(\lambda)\widehat{e}(x,\lambda), & 1<x<\infty \end{cases} \tag{3.24}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada, (3.23) ifadesiyle tanımlı f çözümüne (3.1)-(3.3) impalsif sınır değer probleminin Jost çözümü denir.

Artık, verilen bilgiler ışığında sıradaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.1 Her $\lambda\in\overline{C}_{+}$ için

$$(i)\quad W[f,g](x,\lambda)=-2i\lambda hM_{22}(\lambda), \qquad x\to\infty, \tag{3.25}$$

$$(ii)\quad W[f,g](x,\lambda)=\frac{hM_{22}(\lambda)}{\det M}, \qquad x\to 0^{+} \tag{3.26}$$

asimptotik eşitlikleri gerçeklenir.

İspat. (3.23) ve (3.24) ifadeleri $x\to\infty$ ve $x\to 0^{+}$ için f ve g çözümlerinin Wronskiyenlerini hesaplamak için kullanılabilir. Yani, $x\to\infty$ için Wronskiyenin x değişkeninden bağımsızlığı kullanılarak

$$\begin{aligned} W[f,g](x,\lambda) &= e(x,\lambda)\left\{hM_{12}(\lambda)e'(x,\lambda)+hM_{22}(\lambda)\widehat{e}'(x,\lambda)\right\} \\ &\quad -e'(x,\lambda)\left\{hM_{12}(\lambda)e(x,\lambda)+hM_{22}\lambda)\widehat{e}(x,\lambda)\right\} \\ &= hM_{22}(\lambda)W[e(x,\lambda),\widehat{e}(x,\lambda)] \\ &= -2i\lambda hM_{22}(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $x \to 0^+$ için,

$$\begin{aligned} W[f,g](x,\lambda) &= \left\{ \frac{M_{22}(\lambda)}{\det M} C\left(x,\lambda^2\right) - \frac{M_{21}(\lambda)}{\det M} S\left(x,\lambda^2\right) \right\} hS'\left(x,\lambda^2\right) \\ &\quad - \left\{ \frac{M_{22}(\lambda)}{\det M} C'\left(x,\lambda^2\right) - \frac{M_{21}(\lambda)}{\det M} S'\left(x,\lambda^2\right) \right\} hS\left(x,\lambda^2\right) \\ &= -\frac{hM_{22}(\lambda)}{\det M} W[S\left(x,\lambda^2\right), C\left(x,\lambda^2\right)] \\ &= \frac{hM_{22}(\lambda)}{\det M} \end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. ■

3.1 L Operatörünün Rezolvent Operatörü

Bu kısımda, L impalsif Sturm-Liouville operatörünün $R_{\lambda^2}(L)$ rezolvent operatörü elde edilecektir.

Teorem 3.2 $\varphi \in L^2(0,\infty)$ olmak üzere

$$R_{\lambda^2}(L)\varphi(x) := \int_0^\infty G(x,t;\lambda)\varphi(t)dt$$

şeklinde verilen operatör, L impalsif Sturm-Liouville operatörünün rezolvent operatörüdür. Burada $\lambda \in \overline{C}_+$ olmak üzere G Green fonksiyonu

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{g(t,\lambda)f(x,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}, & 0 \le t \le x, \quad t \ne 1,\ x \ne 1 \\ \dfrac{f(t,\lambda)g(x,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}, & x \le t \le \infty, \quad t \ne 1,\ x \ne 1 \end{cases}$$

olarak tanımlıdır.

İspat. L operatörünün rezolvent operatörünü bulmak için $\varphi \in L^2(0,\infty)$ olmak üzere,

$$-y'' + q(x)y - \lambda^2 y = \varphi(x), \qquad x \in [0,1) \cup (1,\infty), \tag{3.27}$$

diferensiyel denkleminin (3.2) sınır koşulunu ve (3.3) impalsif koşulunu sağlayan ve $L^2(0,\infty)$ uzayından olan $y(x,\lambda)$ çözümü bulunmalıdır. (3.27) denkleminin homojen kısmı olan (3.1) diferensiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü $f(x,\lambda)$ ve $g(x,\lambda)$ olup $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ üst yarı düzleminde (3.1) denkleminin genel çözümü

$$\widetilde{y}(x,\lambda) = c_1 f(x,\lambda) + c_2 g(x,\lambda)$$

şeklindedir. Buradan (3.27) denkleminin genel çözümünü

$$y(x,\lambda) = c_1(x)f(x,\lambda) + c_2(x)g(x,\lambda) \tag{3.28}$$

olacak şekilde arayalım. (3.28) ifadesinin x değişkenine göre türevi alınırsa

$$y'(x,\lambda) = c_1'(x)f(x,\lambda) + c_2'(x)g(x,\lambda) + c_1(x)f'(x,\lambda) + c_2(x)g'(x,\lambda)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$c_1'(x)f(x,\lambda) + c_2'(x)g(x,\lambda) = 0 \tag{3.29}$$

olduğu kabul edilirse

$$y'(x,\lambda) = c_1(x)f'(x,\lambda) + c_2(x)g'(x,\lambda)$$

bulunur. O halde

$$y''(x,\lambda) = c_1'(x)f'(x,\lambda) + c_2'(x)g'(x,\lambda) + c_1(x)f''(x,\lambda) + c_2(x)g''(x,\lambda)$$

sağlanır. Son eşitlik (3.27) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-c_1'(x)f'(x,\lambda) - c_2'(x)g'(x,\lambda) = \varphi(x) \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.29) ve (3.30) eşitliklerinden

$$\begin{cases} c_1'(x)f(x,\lambda) + c_2'(x)g(x,\lambda) = 0 \\ -c_1'(x)f'(x,\lambda) - c_2'(x)g'(x,\lambda) = \varphi(x) \end{cases}$$

denklem sistemi elde edildiğinden $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ değerleri

$$c_1(x) = \alpha_1 + \int_0^x \frac{\varphi(t)g(t,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}dt$$

ve

$$c_2(x) = \alpha_2 + \int_x^\infty \frac{\varphi(t)f(t,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}dt$$

şeklindedir. Bu değerler (3.28) çözümünde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) &= \alpha_1 f(x,\lambda) + \alpha_2 g(x,\lambda) + \int_0^x \frac{\varphi(t)g(t,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)} f(x,\lambda)\,dt \\ &+ \int_x^\infty \frac{\varphi(t)f(t,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)} g(x,\lambda)\,dt \end{aligned}$$

bulunur. Bu çözüm (3.2) sınır koşulunu sağlamalıdır. O halde

$$y(0,\lambda)=\alpha_1 f\,(0,\lambda)+\alpha_2 g\,(0,\lambda)+\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(t)f(t,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}g\,(0,\lambda)\,dt=0$$

eşitliğinden

$$\alpha_1=0$$

olmalıdır. Ayrıca $y(x,\lambda)$ çözümünün $L^2(0,\infty)$ uzayından olması için

$$\alpha_2=0$$

olmalıdır. Böylece

$$y(x,\lambda)=\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)g(t,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}f\,(x,\lambda)\,dt+\int\limits_x^\infty \frac{\varphi(t)f(t,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}g\,(x,\lambda)\,dt$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\lambda\in\overline{C}_+$ için

$$G(x,t;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{g(t,\lambda)f\,(x,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}, & 0\le t\le x,\;\; t\neq 1,\; x\neq 1\\[2mm] \dfrac{f(t,\lambda)g\,(x,\lambda)}{W[f,g](x,\lambda)}, & x\le t\le\infty,\;\; t\neq 1,\; x\neq 1\end{cases}$$

olmak üzere, L operatörünün rezolvent operatörü

$$y(x,\lambda)=R_{\lambda^2}(L)\varphi(x)=\int\limits_0^\infty G(x,t;\lambda)\varphi(t)dt$$

şeklinde bulunur. ■

3.2 L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısının incelenmesi için özdeğer ve spektral tekillik tanımı gereğince L nin rezolvent operatörünün kutup noktası olan $W[f,g](x,\lambda)$ fonksiyonunun $\overline{C}_+$ yarı düzlemindeki sıfırlarının yapısı incelenmelidir.

Şimdi, Teorem 3.1. gereğince aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 3.1 L impalsif Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin incelenebilmesi için gerek ve yeter koşul, M_{22} fonksiyonunun $\overline{C}_+$ düzlemindeki sıfırlarının incelenmesidir. Burada M_{22} fonksiyonu

$$\begin{aligned}
M_{22}(\lambda) = \frac{i}{2\lambda}\Bigg\{ & e^{i\lambda}\Bigg(-ia\sin\lambda - ib\lambda\cos\lambda + aK(1,1)\frac{\sin\lambda}{\lambda} + bK(1,1)\cos\lambda + d\cos\lambda \\
& -ibQ(1,1)\sin\lambda + bK(1,1)Q(1,1)\frac{\sin\lambda}{\lambda} + c\frac{\sin\lambda}{\lambda} + dQ(1,1)\frac{\sin\lambda}{\lambda}\Bigg) \\
& + \left(aK(1,1)e^{i\lambda} - ia\lambda e^{i\lambda} + ce^{i\lambda}\right)\int_0^1 Q(1,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt \\
& + \left(bK(1,1)e^{i\lambda} - ib\lambda e^{i\lambda} + de^{i\lambda}\right)\int_0^1 Q_x(1,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt \\
& + \left(c\frac{\sin\lambda}{\lambda} + d\cos\lambda + dQ(1,1)\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)\int_1^\infty K(1,t)e^{i\lambda t}dt \\
& - \left(a\frac{\sin\lambda}{\lambda} + b\cos\lambda + bQ(1,1)\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)\int_1^\infty K_x(1,t)e^{i\lambda t}dt \\
& - a\int_0^1 Q(1,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt\int_1^\infty K_x(1,t)e^{i\lambda t}dt - b\int_0^1 Q_x(1,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt\int_1^\infty K_x(1,t)e^{i\lambda t}dt \\
& + c\int_0^1 Q(1,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt\int_1^\infty K(1,t)e^{i\lambda t}dt + d\int_0^1 Q_x(1,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt\int_1^\infty K(1,t)e^{i\lambda t}dt
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Böylece, L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin kümesi sırasıyla $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ ile

$$\begin{aligned}
\sigma_d(L) &= \left\{\mu = \lambda^2 : \operatorname{Im}\lambda > 0 \text{ ve } M_{22}(\lambda) = 0\right\} \\
\sigma_{ss}(L) &= \left\{\mu = \lambda^2 : \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \neq 0 \text{ ve } M_{22}(\lambda) = 0\right\}
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 3.3 (3.4) koşulu altında, M_{22} fonksiyonu, $b \neq 0$ olmak üzere $\lambda \in \overline{C}_+$ ve $|\lambda| \to \infty$ için

$$M_{22}(\lambda) = \frac{b}{4}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] \tag{3.31}$$

asimptotik eşitliğini gerçekler.

İspat. $e(x,\lambda)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi

$$e'(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[i\lambda + O(1)], \quad x \in (1,\infty),\ \lambda \in \overline{C}_+,\ |\lambda| \to \infty \tag{3.32}$$

asimptotik eşitliğini sağlar. Böylece, (3.16) ve (3.32) ifadelerinden $\lambda \in \overline{C}_+$ ve $|\lambda| \to \infty$ olmak üzere M_{22} fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}
M_{22}(\lambda) &= \left\{ -\frac{ia}{2}\left[\frac{e'(1,\lambda)}{\lambda}e^{-i\lambda}\right]\left[S\left(1,\lambda^2\right)e^{i\lambda}\right] - \frac{ib}{2}\left[\frac{e'(1,\lambda)}{\lambda}e^{-i\lambda}\right]\left[S'\left(1,\lambda^2\right)e^{i\lambda}\right] \right. \\
&\quad \left. \frac{ic}{2\lambda}\left[e(1,\lambda)e^{-i\lambda}\right]\left[S\left(1,\lambda^2\right)e^{i\lambda}\right] + \frac{id}{2\lambda}\left[e(1,\lambda)e^{-i\lambda}\right]\left[S'\left(1,\lambda^2\right)e^{i\lambda}\right] \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{4i}\left(\frac{e^{2i\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 Q(1,t)\,e^{i\lambda(1+t)}dt - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 Q(1,t)\,e^{i\lambda(1-t)}dt\right) \right. \\
&\quad + \frac{b}{4}\left[e^{2i\lambda} + 1 + Q(1,1)\frac{e^{2i\lambda}}{i\lambda} - \frac{Q(1,1)}{i\lambda}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{i\lambda}\int_0^1 Q_x(1,t)\,e^{i\lambda(1+t)}dt - \frac{1}{i\lambda}\int_0^1 Q_x(1,t)\,e^{i\lambda(1-t)}dt\right] \\
&\quad + \frac{c}{4}\left[\frac{e^{2i\lambda}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 Q(1,t)\,e^{i\lambda(1+t)}dt - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 Q(1,t)\,e^{i\lambda(1-t)}dt\right] \\
&\quad + \frac{id}{4}\left[\frac{e^{2i\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \varphi(1,1)\frac{e^{2i\lambda}}{i\lambda^2} - \frac{Q(1,1)}{i\lambda^2}\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{i\lambda^2}\int_0^1 Q_x(1,t)\,e^{i\lambda(1+t)}dt - \frac{1}{i\lambda^2}\int_0^1 Q_x(1,t)\,e^{i\lambda(1-t)}dt\right]\right\}
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. O halde $\lambda \in \overline{C}_+$ ve $|\lambda| \to \infty$ olmak üzere M_{22} fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
M_{22}(\lambda) &= \left\{ O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{b}{4} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\} \\
&= \frac{b}{4}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]
\end{aligned}$$

asimptotik eşitliği elde edilerek ispat tamamlanır. ■

L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin nicel özelliklerini inceleyebilmek için M_{22} fonksiyonunun $\overline{C}_+$ düzlemindeki sıfırlarının sayısal özelliklerinin incelenmesi gerektiğini bildiğimizden, bu amaç için

$$S_1 := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad M_{22}(\lambda) = 0\}$$

ve

$$S_2 := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad M_{22}(\lambda) = 0\}$$

kümelerini tanımlayalım. O halde $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümeleri

$$\sigma_d(L) = \left\{\mu : \mu = \lambda^2,\ \lambda \in S_1\right\},\quad \sigma_{ss}(L) = \left\{\mu : \mu = \lambda^2,\ \lambda \in S_2\right\} \tag{3.33}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Artık, L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin yapısının belirlenmesinde önemli rol oynayan sıradaki lemma verilebilir.

Lemma 3.1 (3.4) koşulu altında

(i) S_1 kümesi sınırlı ve en fazla sayılabilir sayıda elemana sahip olup, bu kümenin limit noktaları varsa reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.

(ii) μ lineer Lebesgue ölçüsü olmak üzere, S_2 kümesi kompakttır ve $\mu(S_2) = 0$ gerçeklenir.

İspat. (i) (3.31) asimptotik eşitliği yardımıyla yeterince büyük $\lambda \in \overline{C}_+$ sayıları için M_{22} fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu görülür. Bu nedenle M_{22} fonksiyonunun $\lambda \in \overline{C}_+$ kapalı üst yarı düzlemindeki sıfırları sınrlı bir bölgede olup buradan S_1 ve S_2 kümelerinin sınırlılığı elde edilir. Diğer taraftan M_{22}, $\mathbb{C}_+$ da analitik bir fonksiyondur ve Teorem 2.1. gereğince özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyonun analitiklik bölgesi içindeki sıfırları ayrık olacağından S_1 kümesinin $\mathbb{C}_+$ açık üst düzlemindeki sıfırları en çok sayılabilir sayıdadır. Ayrıca, Teorem 2.3. gereğince özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyonun analitiklik bölgesi içindeki sıfırlarının limit noktaları analitiklik bölgesinin sınırında olacağından M_{22} nin $\mathbb{C}_+$ daki sıfırlarının limit noktaları reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır. Böylece (i) ifadesinin ispatı tamamlanmış olur.

(ii) S_2 kümesi reel sayıların bir alt kümesi olup sınırlı bir küme olduğundan, S_2 kümesinin kompakt bir küme olduğunu göstermek için kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $\lambda_0 \in \overline{S_2}$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \in S_2$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ olacak şekilde bir (λ_n) dizisi vardır. Buna göre M_{22} fonksiyonu $\overline{C}_+$ üzerinde sürekli olduğundan

$$M_{22}(\lambda_0) = M_{22}\left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n\right) = \lim_{n\to\infty} M_{22}(\lambda_n) = 0$$

bulunur, yani $\lambda_0 \in S_2$ gerçeklenir. O halde S_2 kümesi kapalıdır, dolayısıyla kompakttır. Ayrıca Teorem 2.4. gereğince özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyonun reel sıfırlar kümesinin Lebesgue ölçüsü sıfır olup buradan $\mu(S_2) = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

(3.33) ve Lemma 3.1 yardımıyla sıradaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4 (3.4) koşulu gerçeklendiğinde

(i) L impalsif Sturm-Liouville operatörünün özdeğerler kümesi sınırlı ve en çok sayılabilir sayıda elemana sahiptir. Ayrıca özdeğerlerin limit noktaları varsa reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.

(ii) L operatörünün spektral tekillikler kümesi kompakttır ve lineer Lebesgue ölçüsü sıfırdır.

Şimdi ilerideki teoremlerde ihtiyaç duyacağımız aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1 M_{22} fonksiyonunun $\overline{C}_+$ kapalı üst yarı düzlemindeki bir sıfırının katına, L impalsif operatörünün bu sıfıra karşılık gelen özdeğerinin veya spektral tekilliğinin katı denir.

Teorem 3.5

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} |q(x)|\, dx < \infty, \quad \epsilon > 0 \tag{3.34}$$

koşulu gerçeklendiğinde, L impalsif operatörünün sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekillikleri vardır ve bunların herbirinin katı da sonludur.

İspat. (3.10) ve (3.34) dikkate alınırsa c_1 pozitif bir sabit sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} |K(1,t)| &\leq c\sigma\left(\frac{1+t}{2}\right) \\ &\leq ce^{-t\frac{\epsilon}{2}} \int_{t/2}^{\infty} e^{\epsilon x} |q(x)|\, dx \\ &\leq c_1 e^{-t\frac{\epsilon}{2}} \end{aligned} \tag{3.35}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde (3.11) ve (3.34) göz önüne alınırsa c_2 pozitif bir sabit sayı olmak üzere,

$$|K_x(1,t)| \leq c_2 e^{-t\frac{\epsilon}{2}} \tag{3.36}$$

eşitsizliği bulunur. (3.35) ve (3.36) eşitsizliklerinden, M_{22} fonksiyonunun reel eksenden $\operatorname{Im}\lambda > -\epsilon/2$ alt yarı düzlemine analitik devama sahip olduğu görülür.

Böylece reel eksen M_{22} fonksiyonunun analitiklik bölgesi içinde kaldığından Teorem 2.3. gereğince $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümelerinin reel eksen üzerinde limit noktaları yoktur. Dolayısıyla bu kümeler sonlu sayıda elemana sahip olup sınırlıdır. Diğer yandan M_{22}, $\operatorname{Im}\lambda > -\epsilon/2$ düzleminde analitik olduğundan analitik fonksiyonların teklik teoremleri gereğince $\overline{C}_+$ düzlemi içinde sıfırlarının katı sonlu olup buradan bütün özdeğer ve spektral tekilliklerin katlarının sonluluğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

İncelemelerimizi biraz daha detaylandırmak için, S_1 kümesinin tüm limit noktaları kümesini S_3 ve M_{22} fonksiyonunun $\overline{C}_+$ düzleminde sonsuz katlılığa sahip tüm sıfırlarından oluşan kümeyi de S_4 olarak tanımlayalım. Analitik fonksiyonların teklik teoremlerinden

$$S_1 \cap S_4 = \emptyset, \quad S_3 \subset S_2, \quad S_4 \subset S_2, \quad \mu(S_3) = 0, \quad \mu(S_4) = 0 \tag{3.37}$$

elde edilir. Ayrıca M_{22} fonksiyonunun reel eksen üzerinde tüm basamaktan türevlerinin sürekliliğinden

$$S_3 \subset S_4 \tag{3.38}$$

bulunur.

Teorem 3.6 $\epsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ olacak şekilde sayılar için

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x^\delta} |q(x)| \, dx < \infty \tag{3.39}$$

koşulu altında

$$S_4 = \emptyset$$

gerçeklenir.

İspat. (3.39) koşulu (3.34) koşulundan daha zayıf olup bu koşul altında M_{22} fonksiyonu reel eksenden alt yarı düzleme analitik devam ettirilemez. Böylece L impalsif operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin sonluluğu Teorem 3.5. de kullanılan yöntemle ispatlanamaz.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
J_1(\lambda) &= 1+\int_1^\infty K(1,t)e^{i\lambda(t-1)}dt,\\
J_2(\lambda) &= i\lambda - K(1,1)+\int_1^\infty K_x(1,t)e^{i\lambda(t-1)}dt,\\
J_3(\lambda) &= \cos\lambda e^{i\lambda}+Q(1,1)e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda}+\int_0^1 Q_x(1,t)e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt,\\
J_4(\lambda) &= e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda}+\int_0^1 Q(1,t)e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt
\end{aligned}$$

olmak üzere (3.16) ifadesinden

$$\lambda M_{22}(\lambda)=\frac{i}{2}\left[dJ_1(\lambda)J_3(\lambda)+cJ_1(\lambda)J_4(\lambda)-bJ_2(\lambda)J_3(\lambda)-aJ_2(\lambda)J_4(\lambda)\right] \tag{3.40}$$

elde edilir. Ayrıca M_{22}, $\mathbb{C}_+$ düzleminde analitik bir fonksiyondur ve bu fonksiyonun her basamaktan türevi reel eksende süreklidir. Böylece (3.39) koşulundan, c_3 pozitif bir sabit sayı olmak üzere,

$$|K(1,t)|\leq c_3 e^{-\epsilon\left(\frac{t}{2}\right)^\delta} \tag{3.41}$$

eşitsizliği bulunur. $\lambda\in\mathbb{C}_+$, $|\lambda|<H$ ve $n=0,1,2,...$ için (3.41) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^n}{d\lambda^n}J_1(\lambda)\right| &\leq \int_1^\infty (t-1)^n\,|K(1,t)|\,dt\\
&\leq c_3\int_1^\infty (2t)^n\, e^{-\epsilon\left(\frac{t}{2}\right)^\delta}dt
\end{aligned} \tag{3.42}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde c_4 pozitif bir sabit sayı olmak üzere,

$$|K_x(1,t)|\leq c_4 e^{-\epsilon\left(\frac{t}{2}\right)^\delta}$$

olduğu kullanılarak, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, $|\lambda|<H$ ve $n=0,1,2,...$ için

$$\left|\frac{d^n}{d\lambda^n}J_2(\lambda)\right|\leq c_4\int_1^\infty (2t)^n\, e^{-\epsilon\left(\frac{t}{2}\right)^\delta}dt \tag{3.43}$$

eşitsizliği bulunur. Q ve Q_x fonksiyonlarının sürekliliği ve

$$e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda}=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{i\lambda r}dr,\qquad e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda t}{\lambda}=\frac{1}{2}\int\limits_{1-t}^{1+t} e^{i\lambda r}dr$$

eşitlikleri kullanılarak $\lambda\in\mathbb{C}_+$, $|\lambda|<H$ ve $n=0,1,2,...$ için, c_5 pozitif bir sabit sayı olmak üzere,

$$\left|\frac{d^n}{d\lambda^n}J_i(\lambda)\right|\le c_5 2^n,\quad i=3,4 \tag{3.44}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.40)ve (3.42)-(3.44) ifadelerinden $c_6=maks\{c_3,c_4,c_5\}$ ve $\alpha:=(|a|+|b|+|c|+|d|)$ olmak üzere $n=0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda M_{22})\right| &\le \sum_{s=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ s\end{pmatrix}\left|\frac{d^{n-s}}{d\lambda^s}J_1(\lambda)\right|\left[|d|\left|\frac{d^s}{d\lambda^s}J_3(\lambda)\right|+|c|\left|\frac{d^s}{d\lambda^s}J_4(\lambda)\right|\right]\\ &\quad+\sum_{s=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ s\end{pmatrix}\left|\frac{d^{n-s}}{d\lambda^s}J_2(\lambda)\right|\left[|b|\left|\frac{d^s}{d\lambda^s}J_3(\lambda)\right|+|a|\left|\frac{d^s}{d\lambda^s}J_4(\lambda)\right|\right]\\ &\le c_6\alpha\sum_{s=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ s\end{pmatrix}\int\limits_1^\infty 2^s[2t]^{n-s}e^{-\epsilon\left(\frac{t}{2}\right)^\delta}dt\\ &\le c_6\alpha 2^{2n}\int\limits_0^\infty t^n e^{-\epsilon\left(\frac{t}{2}\right)^\delta}dt\end{aligned} \tag{3.45}$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, $|\lambda|<H$ ve $n=0,1,2,...$ için

$$A_n:=c_6\alpha 2^{2n}\int\limits_0^\infty t^n e^{-\epsilon\left(\frac{t}{2}\right)^\delta}dt \tag{3.46}$$

olmak üzere

$$\left|\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda M_{22})\right|\le A_n$$

yazılabilir. Diğer yandan (3.46) eşitliğinde $\epsilon\left(\frac{t}{2}\right)^\delta=u$ dönüşümü yapılırsa

$$A_n=c_6\alpha 2^{2n}\frac{2^{n+1}}{\delta\epsilon^{(n+1)/\delta}}\Gamma\left(\frac{n+1}{\delta}\right)$$

elde edilir. Son eşitlikte $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ olduğu dikkate alınır ve $p_0^n:=\dfrac{2^{n+1}}{\delta^{(\delta+n+1)/\delta}\epsilon^{(n+1)/\delta}}$ şeklinde seçilirse, K ve p; c_3, ϵ, δ değişkenlerine bağlı sabitler olmak üzere

$$A_n\le K\alpha p^n n^{n(1-\delta)/\delta}n! \tag{3.47}$$

eşitsizliği bulunur. Lemma 3.1 gereğince yeterince büyük $H > 0$ için $|\ln M_{22}(\lambda)| < \infty$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{H} \frac{|\ln M_{22}(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \text{ ve } \int_{H}^{\infty} \frac{|\ln M_{22}(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \tag{3.48}$$

integralleri mutlak yakınsaktır. Ayrıca

$$E(s) := \inf \left\{ \frac{A_n s^n}{n!} : n = 0, 1, 2, ... \right\}$$

olmak üzere (3.47) eşitsizliğinden

$$E(s) \leq K\alpha \exp \left\{ -\frac{1-\delta}{\delta} e^{-1} p^{-\delta/(1-\delta)} s^{-\delta/(1-\delta)} \right\} \tag{3.49}$$

bulunur. M_{22} fonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan, $\mu(S_4, s)$, S_4 kümesinin s komşuluğunun lineer Lebesgue ölçüsü olmak üzere (3.45), (3.48) ve Pavlov Teoremi gereğince, $m > 0$ olmak üzere

$$\int_{0}^{m} \ln E(s) d\mu(S_4, s) > -\infty \tag{3.50}$$

olmalıdır. (3.49) ve (3.50) eşitsizliklerinden

$$\int_{0}^{m} s^{-\delta/(1-\delta)} d\mu(S_4, s) < \infty \tag{3.51}$$

elde edilir. $\delta/(1-\delta) \geq 1$ olduğundan (3.51) integralinin yakınsak olabilmesi ancak $\mu(S_4, s) = 0$ olmasıyla, yani $S_4 = \emptyset$ olmasıyla sağlanır. ■

3.3 Örnek

Bu kısımda, impalsif Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerini daha detaylı araştırdığımız bir örnek inceleyelim.

Örnek 3.1 a, d kompleks sayılar ve $ad \neq 0$ olmak üzere

$$-y''(x) = \lambda^2 y(x), \quad x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \tag{3.52}$$

diferensiyel denklemi

$$y(0) = 0 \tag{3.53}$$

sınır koşulu ve

$$\begin{bmatrix} y_+(1) \\ y'_+(1) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_-(1) \\ y'_-(1) \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

impalsif koşulu tarafından üretilen $\widetilde{L}$ operatörünü göz önüne alalım. Dikkat edilirse L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin nicel özelliklerinin daha rahat incelenmesi için (3.52)-(3.54) sınır değer probleminde $q = 0$ ve impalsif koşulu belirleyen B matrisi köşegen yani $b = c = 0$ alınmıştır.

$q = 0$ için, (3.6) ve (3.7) çözümlerinden (3.52) denkleminin $[0, 1)$ aralığındaki lineer bağımsız çözümleri

$$S\left(x, \lambda^2\right) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}, \qquad C\left(x, \lambda^2\right) = \cos \lambda x$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde $q = 0$ için, (3.9) ve (3.12) çözümlerinden (3.52) denkleminin $(1, \infty)$ aralığındaki lineer bağımsız çözümleri

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x}, \qquad \widehat{e}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}$$

biçimindedir. Böylece (3.16) ifadesinden

$$M_{22}(\lambda) = \frac{ie^{i\lambda}}{2\lambda^2}\left[-ia\lambda \sin \lambda - ib\lambda^2 \cos \lambda + c \sin \lambda + d\lambda \cos \lambda\right] \tag{3.55}$$

bulunur. $\widetilde{L}$ impalsif operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerini bulmak için M_{22} fonksiyonunun sıfırları incelenmelidir. Bu amaçla, (3.55) eşitliğinden

$$e^{2i\lambda} = \frac{a + d}{a - d}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $A = \dfrac{a}{d}$ olmak üzere son eşitliğin çözümü

$$\lambda_k = -\frac{i}{2} \ln \left|\frac{A + 1}{A - 1}\right| + \frac{1}{2} Arg\left(\frac{A + 1}{A - 1}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3.56}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi bazı özel durumlar incelenecektir.

Durum 1: θ bir reel sayı olmak üzere $A = \dfrac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1}$ olsun. Bu durumda $\dfrac{A + 1}{A - 1} = e^{i\theta}$ olduğundan $\left|\dfrac{A + 1}{A - 1}\right| = 1$ ve $Arg\left(\dfrac{A + 1}{A - 1}\right) = \theta$ bulunur. (3.56) ifadesinden

$$\lambda_k = \frac{\theta}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Böylece $\lambda_k \in \mathbb{R}$ olduğundan $\mu_k = \lambda^2$, $k \in \mathbb{Z}$ sayıları $\widetilde{L}$ operatörünün spektral tekillikleridir. Ayrıca, bu durumda operatörün özdeğeri yoktur.

Durum 2: $\operatorname{Im} A \neq 0$ olsun. Bu durumda bazı özel alt durumları inceleyelim.

2(i): A sayısı sadece imajiner kısımdan oluşan bir kompleks sayı olsun, yani $\operatorname{Re} A = 0$ olsun. Bu durumda $\left|\dfrac{A+1}{A-1}\right| = 1$ olup

$$\lambda_k = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

bulunur. Bu da $\mu_k = \lambda^2$, $k \in \mathbb{Z}$ sayılarının $\widetilde{L}$ impalsif operatörünün spektral tekillikleri olduğu anlamına gelir. Burada λ_k, $k \in \mathbb{Z}$ çözümleri reel sayı olduğundan bu şart altında operatörün özdeğeri yoktur.

2(ii): $\operatorname{Re} A < 0$ olsun. Bu durumda $\left|\dfrac{A+1}{A-1}\right| < 1$ olup (3.56) ifadesinden $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_k \in \mathbb{C}_+$ bulunur. Böylece

$$\lambda_k = \frac{i}{2}\ln\left|\frac{A-1}{A+1}\right| + \frac{1}{2}Arg\left(\frac{A+1}{A-1}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

sayıları $\widetilde{L}$ impalsif operatörünün özdeğerleridir. Ayrıca, bu koşul altında $\widetilde{L}$ operatörü spektral tekilliğe sahip değildir.

2 (iii): $\operatorname{Re} A > 0$ olsun. Bu durumda $\left|\dfrac{A+1}{A-1}\right| > 1$ olup (3.56) ifadesinden $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_k \in \mathbb{C}_-$ bulunur. Böylece $\widetilde{L}$ operatörünün özdeğer ve spektral tekillikleri yoktur.

Durum 3: A reel sayı olsun. Şimdi bu koşul altında bazı alt durumları inceleyelim.

3(i): $0 < A < 1$ olsun. $\dfrac{A+1}{A-1} < -1$ olup $Arg\left(\dfrac{A+1}{A-1}\right) = \pi$ bulunur. Böylece (3.56) ifadesinden

$$\lambda_k = \frac{i}{2}\ln\left|\frac{A-1}{A+1}\right| + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Bu durumda $\left|\dfrac{A+1}{A-1}\right| > 1$ olduğundan $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_k \in \mathbb{C}_-$ bulunur.

Dolayısıyla $\widetilde{L}$ operatörünün özdeğer ve spektral tekillikleri yoktur.

3(ii): $1 < A < \infty$ olsun. $\dfrac{A+1}{A-1} > 1$ olup $Arg\left(\dfrac{A+1}{A-1}\right) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (3.56) ifadesinden

$$\lambda_k = -\frac{i}{2}\ln\left(\frac{A+1}{A-1}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Burada $\left|\dfrac{A+1}{A-1}\right| > 1$ olduğundan $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_k \in \mathbb{C}_-$ olup Durum 3(i) de olduğu gibi $\widetilde{L}$ impalsif operatörünün özdeğer ve spektral tekillikleri yoktur.

3(iii): $-1 < A < \infty$ olsun. Bu durumda $-1 < \dfrac{A+1}{A-1} < 0$ olup $Arg\left(\dfrac{A+1}{A-1}\right) = \pi$ bulunur ve (3.56) ifadesinden

$$\lambda_k = \frac{i}{2}\ln\left|\frac{A-1}{A+1}\right| + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Burada $\left|\dfrac{A-1}{A+1}\right| > 1$ olduğundan $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_k \in \mathbb{C}_+$ bulunur. Böylece $\mu_k = \lambda^2$, $k \in \mathbb{Z}$ sayıları $\widetilde{L}$ operatörünün özdeğerleridir. Ayrıca, bu durumda $\widetilde{L}$ operatörünün spektral tekilliği yoktur.

3(iv): $-\infty < A < -1$ olsun. Bu durumda $0 < \dfrac{A+1}{A-1} < 1$ olup $Arg\left(\dfrac{A+1}{A-1}\right) = 0$ elde edilir. Böylece (3.56) ifadesinden

$$\lambda_k = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $\left|\dfrac{A-1}{A+1}\right| > 1$ olduğundan $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_k \in \mathbb{C}_+$ dır. Yani, $\mu_k = \lambda^2$, $k \in \mathbb{Z}$ sayıları $\widetilde{L}$ impalsif operatörünün özdeğerleridir. Ayrıca, bu durumda $\widetilde{L}$ impalsif operatörünün spektral tekilliği yoktur.

4. İMPALSİF FARK OPERATÖRLERİ

Bu bölümde $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ y := \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \|y\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^2 < \infty \right\}$ uzayı üzerinde

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{N}\backslash \{k-1, k, k+1\} \tag{4.1}$$

fark denklemi,

$$y_0 = 0 \tag{4.2}$$

sınır koşulu ve $x = k$ noktasındaki

$$\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ \Delta y_{k+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_{k-1} \\ \nabla y_{k-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

impalsif koşulu ile üretilen L_o operatörünün saçılım fonksiyonu, özdeğer ve spektral tekillikleri problemi incelenecektir. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kompleks sayılar, $\det B \neq 0$, ∇; $\nabla y_n := y_n - y_{n-1}$ şeklinde tanımlı geri fark operatörü ve Δ; $\Delta y_n := y_{n+1} - y_n$ şeklinde tanımlı ileri fark operatörüdür. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n \neq 0$ olmak üzere, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel terimli dizilerinin

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(|1-a_n| + |b_n|\right) < \infty \tag{4.4}$$

koşulunu sağladığı kabul edilecektir. (4.1) denkleminin $n = 0, 1, 2, ..., k-1$ ve $n = k+1, k+2, ...$ için çözümleri sırasıyla

$$\begin{cases} y_n^-(z) := y_n(z), & n = 0, 1, 2, ..., k-1 \\ y_n^+(z) := y_n(z), & n = k+1, k+2, ... \end{cases}$$

şeklinde gösterilsin. S_0 ve S yarışeritleri sırasıyla

$$S_0 := \left\{ z : z = \eta + i\xi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{3\pi}{2}, \ \xi > 0 \right\},$$

$$S := S_0 \cup \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca, $Q_n(z)$ ve $P_n(z)$, (4.1) denkleminin $n = 0, ..., k-1$ için sırasıyla

$$Q_0(z) = \frac{1}{a_0}, \quad Q_1(z) = 0$$

ve

$$P_0(z) = 0, \quad P_1(z) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan temel çözümleri olup z nin tam fonksiyonlarıdır (Berezanski 1968). (4.1) fark denkleminin keyfi $y = \{y_n(z)\}$ ve $u = \{u_n(z)\}$ çözümlerinin Wronskiyeni

$$W[y,u] := a_n \left[y_n(z)u_{n+1}(z) - y_{n+1}(z)u_n(z)\right]$$

şeklinde tanımlı olduğundan her $z \in \mathbb{C}$ için

$$W\left[Q_n(z), P_n(z)\right] = 1 \tag{4.5}$$

bulunur.

Diğer taraftan, $\lambda = 2\cos z$ olmak üzere, $n = k+1, k+2, ...$ için $e_n(z)$, (4.1) fark denkleminin kapalı üst yarı düzlemde

$$\lim_{n\to\infty} e^{-inz} e_n(z) = 1, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

koşulunu sağlayan çözümü olup bu çözüme sürekli durumdakine benzer şekilde (4.1) denkleminin Jost çözümü denir (Guseinov 1976b). Ek olarak, $e_n(z)$ çözümü $\mathbb{C}_+$ açık üst yarı düzleminde z değişkenine göre analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+$ kapalı üst yarı düzleminde sürekli ve periyodik bir fonksiyondur, yani her $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için, $e_n(z + 2\pi) = e_n(z)$ sağlanır. Ayrıca

$$\begin{cases} \mu_n = \left\{ \prod_{k=n}^{\infty} a_k \right\}^{-1} \\ A_{n1} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \\ A_{n2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1 - a_k^2) + b_k \sum_{s=k+1}^{\infty} b_s \right\} \\ A_{n,m+2} = A_{n+1,m} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1 - a_k^2)\, A_{k+1,m} - b_k A_{k,m+1} \right\}, \quad m = 1, 2, ... \end{cases} \tag{4.6}$$

olmak üzere, $e_n(z)$ fonksiyonu,

$$e_n(z) = \mu_n e^{inz} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

gösterimine sahiptir ve (4.4) koşulundan μ_n fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu açıktır. Burada $c > 0$ bir sabit ve $\frac{m}{2}$ rasyonel sayısının tam kısmı $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ olmak üzere

$$|A_{nm}| \leq c \sum_{k=n+\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \tag{4.8}$$

eşitsizliği gerçeklenir. (4.1) denkleminin $\lambda = 2\cos z$ ve $n = k+1, k+2, ...$ için bir diğer çözümü $e_n(-z)$, kapalı alt yarı düzlemde

$$\lim_{n\to\infty} e^{inz} e_n(-z) = 1, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_-$$

koşulunu sağlar ve

$$e_n(-z) = \mu_n e^{-inz} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{-imz}\right), \quad n = k+1, k+2, ... \tag{4.9}$$

gösterimine sahiptir. Burada μ_n ve A_{nm} ifadeleri, (4.6) eşitliğinde tanımlandığı gibidir ve A_{nm} ifadesi (4.8) eşitsizliğini sağlar. Ayrıca, $e_n(-z)$ çözümü $\mathbb{C}_-$ açık alt yarı düzleminde z değişkenine göre analitik, $\overline{\mathbb{C}}_-$ kapalı alt yarı düzleminde sürekli ve periyodik bir fonksiyondur, yani her $z \in \overline{\mathbb{C}}_-$ için, $e_n(-z+2\pi) = e_n(-z)$ gerçeklenir. Böylece (4.1) denkleminin $e_n(z)$ ve $e_n(-z)$ çözümleri her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$W\left[e_n(z), e_n(-z)\right] = -2i \sin z \tag{4.10}$$

eşitliğini sağladığından bu denklemin bir temel çözümler sistemini oluşturur.

Bu bölümün devamında, aksi belirtilene kadar $z \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ olduğu kabul edilecektir. $A_\pm$ ve $B_\pm$, z değişkenine bağlı katsayılar olmak üzere (4.1) denkleminin, $n = 0, 1, 2, ..., k-1$ ve $n = k+1, k+2, ...$ için lineer bağımsız çözümleri yardımıyla (4.1)-(4.3) impalsif fark sınır değer probleminin genel çözümü

$$\begin{cases} y_n^-(z) = A_- Q_n(z) + B_- P_n(z), & n = 0, 1, 2, ..., k-1 \\ y_n^+(z) = A_+ e_n(z) + B_+ e_n(-z), & n = k+1, k+2, ... \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir. $y_{k+2}(z), y_{k+1}(z), y_{k-1}(z)$ ve $y_{k-2}(z)$ değerleri (4.3) impalsif koşulunda göz önüne alınırsa

$$\begin{pmatrix} A_+ e_{k+1}(z) + B_+ e_{k+1}(-z) \\ A_+ \Delta e_{k+1}(z) + B_+ \Delta e_{k+1}(-z) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} A_- Q_{k-1}(z) + B_- P_{k-1}(z) \\ A_- \bigtriangledown Q_{k-1}(z) + B_- \bigtriangledown P_{k-1}(z) \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{pmatrix} e_{k+1}(z) & e_{k+1}(-z) \\ \Delta e_{k+1}(z) & \Delta e_{k+1}(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} Q_{k-1}(z) & P_{k-1}(z) \\ \nabla Q_{k-1}(z) & \nabla P_{k-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix}$$

elde edilir. Son eşitlikte T ve K matrisleri sırasıyla

$$T := \begin{pmatrix} Q_{k-1}(z) & P_{k-1}(z) \\ \nabla Q_{k-1}(z) & \nabla P_{k-1}(z) \end{pmatrix}$$

ve

$$K := \begin{pmatrix} e_{k+1}(z) & e_{k+1}(-z) \\ \Delta e_{k+1}(z) & \Delta e_{k+1}(-z) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanırsa, $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$\det K = -\frac{2i \sin z}{a_{k+1}} \neq 0$$

gerçeklenir. O halde K matrisinin tersi mevcuttur ve M transfer matrisi

$$M := \begin{pmatrix} M_{11} & M_{22} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = K^{-1} B T \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlı olup

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

eşitliğini sağlar. (4.11) eşitliğinden M matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} M_{11}(z) &= -\frac{a_{k+1}}{2i \sin z} \{\Delta e_{k+1}(-z) [\alpha Q_{k-1}(z) + \beta \bigtriangledown Q_{k-1}(z)] \\ &\qquad - e_{k+1}(-z) [\gamma Q_{k-1}(z) + \delta \bigtriangledown Q_{k-1}(z)]\} \\ M_{12}(z) &= -\frac{a_{k+1}}{2i \sin z} \{\Delta e_{k+1}(-z) [\alpha P_{k-1}(z) + \beta \bigtriangledown P_{k-1}(z)] \qquad (4.13) \\ &\qquad - e_{k+1}(-z) [\gamma P_{k-1}(z) + \delta \bigtriangledown P_{k-1}(z)]\} \\ M_{21}(z) &= -\frac{a_{k+1}}{2i \sin z} \{-\Delta e_{k+1}(z) [\alpha Q_{k-1}(z) + \beta \bigtriangledown Q_{k-1}(z)] \\ &\qquad + e_{k+1}(z) [\gamma Q_{k-1}(z) + \delta \bigtriangledown Q_{k-1}(z)]\} \\ M_{22}(z) &= -\frac{a_{k+1}}{2i \sin z} \{-\Delta e_{k+1}(z) [\alpha P_{k-1}(z) + \beta \bigtriangledown P_{k-1}(z)] \qquad (4.14) \\ &\qquad + e_{k+1}(z) [\gamma P_{k-1}(z) + \delta \bigtriangledown P_{k-1}(z)]\} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.1)-(4.3) impalsif fark sınır değer probleminin keyfi iki çözümünün katsayıları $A_\pm$ ve $B_\pm$, yeni kompleks katsayılar $A_\pm^\pm$ ve $B_\pm^\pm$ ile ifade edilirse E_n ve F_n çözümleri

$$E_n(z) = \begin{cases} A_-^+ Q_n(z) + B_-^+ P_n(z), & n = 0,1,2,...,k-1 \\ A_+^+ e_n(z) + B_+^+ e_n(-z), & n = k+1, k+2, ... \end{cases} \tag{4.15}$$

ve

$$F_n(z) = \begin{cases} A_-^- Q_n(z) + B_-^- P_n(z), & n = 0,1,2,...,k-1 \\ A_+^- e_n(z) + B_+^- e_n(-z), & n = k+1, k+2, ... \end{cases} \tag{4.16}$$

olarak yazılabilir. Eğer E_n çözümü (4.1)-(4.3) impalsif fark sınır değer probleminin Jost çözümü olarak dikkate alınırsa,

$$A_+^+ = 1, \quad B_+^+ = 0 \tag{4.17}$$

bulunur. Ayrıca, F_n çözümü (4.1) denkleminin (4.2) sınır koşulunu sağlayan çözümü olarak düşünülürse,

$$A_-^- = 0, \quad B_-^- = 1 \tag{4.18}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.12) ve (4.17) birlikte göz önüne alınırsa

$$A_-^+ = \frac{M_{22}(z)}{\det M}, \quad B_-^+ = -\frac{M_{21}(z)}{\det M} \tag{4.19}$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde (4.12) ve (4.18) ifadeleri dikkate alınırsa

$$A_+^- = M_{12}(z), \quad B_+^- = M_{22}(z) \tag{4.20}$$

bulunur. Böylece, A_-^+, B_-^+, A_+^+, B_+^+ katsayılarının (4.15) ifadesinde ve A_-^-, B_-^-, A_+^-, B_+^- katsayılarının (4.16) çözümünde yerine konulmasıyla E_n ve F_n çözümleri sırasıyla

$$E_n(z) = \begin{cases} \dfrac{M_{22}(z)}{\det M} Q_n(z) - \dfrac{M_{21}(z)}{\det M} P_n(z), & n = 0,1,2,...,k-1 \\ e_n(z), \quad n = k+1, k+2, ... \end{cases} \tag{4.21}$$

ve

$$F_n(z) = \begin{cases} P_n(z), \quad n = 0,1,2,...,k-1 \\ M_{12}(z)\, e_n(z) + M_{22}(z)\, e_n(-z), & n = k+1, k+2, ... \end{cases} \tag{4.22}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Şimdi (4.21) ve (4.22) ifadeleri yardımıyla sıradaki lemma verilebilir.

Lemma 4.1 Her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$(i) \quad W\left[E_n(z), F_n(z)\right] = \frac{M_{22}(z)}{\det M}, \quad n \to 0,$$

$$(ii) \quad W\left[E_n(z), F_n(z)\right] = -2iM_{22}(z)\sin z, \quad n \to \infty$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat. (4.21) ve (4.22) ifadeleri $n \to 0$ ve $n \to \infty$ için E_n ve F_n çözümlerinin Wronskiyenlerini hesaplamak için kullanılabilir. O halde $n \to 0$ için Wronskiyenin n değişkeninden bağımsızlığı kullanılarak

$$\begin{aligned}
W\left[E_n(z), F_n(z)\right] &= a_n \left\{ \left[\frac{M_{22}(z)}{\det M} Q_n(z) - \frac{M_{21}(z)}{\det M} P_n(z)\right] P_{n+1}(z) \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{M_{22}(z)}{\det M} Q_{n+1}(z) - \frac{M_{21}(z)}{\det M} P_{n+1}(z)\right] P_n(z) \right\} \\
&= \frac{M_{22}(z)}{\det M} a_n \left\{Q_n(z)P_{n+1}(z) - Q_{n+1}(z)P_n(z)\right\} \\
&= \frac{M_{22}(z)}{\det M} W\left[Q_n(z), P_n(z)\right] \\
&= \frac{M_{22}(z)}{\det M}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $n \to \infty$ için,

$$\begin{aligned}
W\left[E_n(z), F_n(z)\right] &= a_n \left\{e_n(z)\left[M_{12}(z)\, e_{n+1}(z) + M_{22}(z)\, e_{n+1}(-z)\right]\right. \\
&\quad \left. e_{n+1}(z)\left[M_{12}(z)\, e_n(z) + M_{22}(z)\, e_n(-z)\right]\right\} \\
&= M_{22}(z)\, a_n \left\{e_n(z)e_{n+1}(-z) - e_{n+1}(z)e_n(-z)\right\} \\
&= M_{22}(z)\, W\left[e_n(z), e_n(-z)\right] \\
&= -2i \sin z M_{22}(z)
\end{aligned}$$

bulunarak ispat tamamlanır. ■

4.1 $\mathbf{L_0}$ Operatörünün Rezolvent Operatörü

Bu kısımda L_0 operatörünün rezolvent operatörü $R_\lambda(L_0)$ elde edilecektir. $Q_n(z), P_n(z)$ ve $e_n(z)$ fonksiyonlarının analitik özelliklerinden (4.21) ifadesi ile tanımlanan $E_n(z)$ çözümü $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığından S_0 şeridine analitik devam ettirilebilir.

Ayrıca $\widehat{e}_n(z)$, (4.1) fark denkleminin $n = k+1, k+2, ...$ için kapalı üst yarı düzlemde

$$\lim_{n\to\infty} e^{inz}\widehat{e}_n(z) = 1, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

koşulunu sağlayan sınırsız çözümü olmak üzere (4.22) ifadesi ile tanımlanan $F_n(z)$ fonksiyonu, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığından S_0 şeridine analitik devam ettirildiğinde

$$\widehat{F}_n(z) = \begin{cases} P_n(z), & n = 0, 1, 2, ..., k-1 \\ \widehat{M}_{12} e_n(z) + M_{22}\widehat{e}_n(z), & n = k+1, k+2, ... \end{cases} \tag{4.23}$$

şekline dönüşecektir. Burada $\widehat{M}_{12}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{12}(z) \quad = \quad & -\frac{a_{k+1}}{2i\sin z}\left\{\Delta\widehat{e}_{k+1}(z)\left[\alpha P_{k-1}(z) + \beta \bigtriangledown P_{k-1}(z)\right]\right. \\ & \left. -\widehat{e}_{k+1}(z)\left[\gamma P_{k-1}(z) + \delta \bigtriangledown P_{k-1}(z)\right]\right\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, dikkat edilmelidir ki $e_n(z)$ ve $P_n(z)$ çözümleri $\mathbb{C}_+$ üst yarı düzleminde analitik olup M_{22} fonksiyonu, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığından S_0 şeridine analitik devam ettirilebilir. Bu nedenle M_{22}, $\widehat{F}_n$ çözümü içinde değişmeden kalmıştır.

(4.21) ve (4.23) ifadeleri yardımıyla sıradaki lemma verilebilir.

Lemma 4.2 Her $z \in S \setminus \{0, \pi\}$ için

$$(i) \quad W\left[\widehat{F}_n(z), E_n(z)\right] = -\frac{M_{22}}{\det M}, \quad n \to 0,$$

$$(ii) \quad W\left[\widehat{F}_n(z), E_n(z)\right] = 2iM_{22}\sin z, \quad n \to \infty$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat.

$$W\left[e_n(z), \widehat{e}_n(z)\right] = -2i\sin z$$

olduğu kullanılarak, Lemma 4.1. in ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Şimdi L_0 impalsif fark operatörünün rezolvent operatörünü belirleyen sıradaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1

$$(R_\lambda(L_0)\psi)_n := \sum_{m\in\mathbb{N}} G_{n,m}(z)\psi_m, \quad \psi=\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}),\ n\in\mathbb{N}$$

şeklinde verilen operatör, L_0 operatörünün rezolvent operatörüdür. Burada $\lambda = 2\cos z \in \rho(z)$ ve $z \in S$ olmak üzere $G_{n,m}$ Green fonksiyonu $m, n \neq k$ için

$$G_{n,m}(z) = \begin{cases} \dfrac{E_n(z)\widehat{F}_m(z)}{W[\widehat{F}_n(z), E_n(z)]}, & m = 0,1,2,...,n-1 \\ \dfrac{E_m(z)\widehat{F}_n(z)}{W[\widehat{F}_n(z), E_n(z)]}, & m = n, n+1, ... \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. L_0 operatörünün rezolvent operatörünü bulmak için $\psi = \{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ olmak üzere

$$a_{n-1}s_{n-1} + b_n s_n + a_n s_{n+1} - \lambda s_n = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{k-1,k,k+1\} \tag{4.24}$$

fark denkleminin (4.2) sınır koşulunu, (4.3) impalsif koşulunu sağlayan ve $\ell^2(\mathbb{N})$ uzayının elemanı olan $s_n(z)$ çözümü bulunmalıdır. (4.24) denkleminin homojen kısmı olan (4.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü $\widehat{F}_n(z)$ ve $E_n(z)$ olup $s_n(z)$, (4.24) homogen olmayan denkleminin bir çözümü olmak üzere

$$s_n(z) = c_n E_n(z) + d_n \widehat{F}_n(z) \tag{4.25}$$

eşitliği gerçeklenecek şekilde $c_n \neq 0$ ve $d_n \neq 0$ katsayıları vardır. Buradan

$$\begin{aligned} s_{n-1}(z) &= c_{n-1}E_{n-1}(z) + d_{n-1}\widehat{F}_{n-1}(z) \\ &= -\Big[(c_n - c_{n-1})\, E_{n-1}(z) + (d_n - d_{n-1})\, \widehat{F}_{n-1}(z)\Big] \\ &\quad + c_n E_{n-1}(z) + d_n \widehat{F}_{n-1}(z) \end{aligned}$$

bulunur. Parametrelerin değişimi metodu gereğince

$$(c_n - c_{n-1})\, E_{n-1}(z) + (d_n - d_{n-1})\, \widehat{F}_{n-1}(z) = 0 \tag{4.26}$$

olduğundan

$$s_{n-1}(z) = c_n E_{n-1}(z) + d_n \widehat{F}_{n-1}(z)$$

eşitliği elde edilir. (4.25) ifadesinden

$$\begin{aligned} s_{n+1}(z) &= c_{n+1}E_{n+1}(z) + d_{n+1}\widehat{F}_{n+1}(z) \\ &= (c_{n+1} - c_n)\, E_{n+1}(z) + (d_{n+1} - d_n)\, \widehat{F}_{n+1}(z) \\ &\quad + c_n E_{n+1}(z) + d_n \widehat{F}_{n+1}(z) \end{aligned}$$

gerçeklenir. $s_{n-1}(z)$, $s_n(z)$ ve $s_{n+1}(z)$ ifadelerinin (4.24) denkleminde yerine konulmasıyla

$$(c_{n+1} - c_n)\, E_{n+1}(z) + (d_{n+1} - d_n)\, \widehat{F}_{n+1}(z) = \frac{\psi_n}{a_n} \tag{4.27}$$

elde edilir. Böylece (4.26) ve (4.27) ifadeleri yardımıyla

$$c_{n+1} - c_n = \frac{\widehat{F}_n(z)\psi_n}{W[\widehat{F}_n(z), E_n(z)]}$$

ve

$$d_{n+1} - d_n = -\frac{E_n(z)\psi_n}{W[\widehat{F}_n(z), E_n(z)]}$$

eşitlikleri bulunur. Bu iki denklemin çözülmesiyle

$$c_n = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\widehat{F}_m(z)\psi_m}{W[\widehat{F}_n(z), E_n(z)]} \tag{4.28}$$

$$d_n = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{E_m(z)\psi_m}{W[\widehat{F}_n(z), E_n(z)]} \tag{4.29}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (4.28) ve (4.29) katsayıları (4.25) çözümünde yerine konulursa

$$s_n(z) = E_n(z) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\widehat{F}_m(z)\psi_m}{W[\widehat{F}_n(z), E_n(z)]} + \widehat{F}_n(z) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{E_m(z)\psi_m}{W[\widehat{F}_n(z), E_n(z)]}$$

çözümü elde edilerek ispat tamamlanır. ∎

4.2 $\mathbf{L_0}$ Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

Bu kısımda Lemma 4.2. ve L_0 operatörünün rezolvent operatörü $R_\lambda(L_0)$ yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1 L_0 impalsif fark operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin incelenebilmesi için gerek ve yeter koşul, M_{22} fonksiyonunun S üzerindeki sıfırlarının incelenmesidir.

Böylece, L_0 operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin kümesi sırasıyla $\sigma_d(L_0)$ ve $\sigma_{ss}(L_0)$ ile

$$\begin{aligned}\sigma_d(L_0) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2\cos z,\ z \in S_0,\ M_{22}(z) = 0\} \\ \sigma_{ss}(L_0) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2\cos z,\ z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ M_{22}(z) = 0\right\}\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi M_{22} fonksiyonunun asimptotik eşitini belirleyen sıradaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2 (4.4) koşulu altında M_{22} fonksiyonu, $z = \eta + i\xi$ olmak üzere $\xi \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikleri gerçekler:

(i) Eğer $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ ise

$$M_{22} = e^{4iz} \left(\prod_{n=1}^{k-2} a_n\right)^{-1} a_{k+1} \left[(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\, \mu_{k+1} + o(1)\right] \tag{4.30}$$

sağlanır.

(ii) Eğer $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ ise

$$M_{22} = e^{5iz} \left(\prod_{n=1}^{k-3} a_n\right)^{-1} a_{k+1} \left[-a_{k-2}^{-1} (\alpha + \beta)\, \mu_{k+2} - (\beta + \delta)\, \mu_{k+1} + o(1)\right] \tag{4.31}$$

gerçeklenir.

İspat. (4.14) ifadesinden

$$\begin{aligned}M_{22} = & -\frac{a_{k+1}}{2i\sin z} \{\beta e_{k+2}(z) P_{k-2}(z) - (\alpha + \beta)\, e_{k+2}(z) P_{k-1}(z) \\ & + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\, e_{k+1}(z) P_{k-1}(z) - (\beta + \delta)\, e_{k+1}(z) P_{k-2}(z)\}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $e_n(z)$ için

$$e_n(z) = \mu_n e^{inz} [1 + o(1)], \quad n \in \mathbb{N}, \quad z = \eta + i\xi, \quad \xi \to \infty$$

asimptotik eşitliği sağlandığından $\xi \to \infty$ olmak üzere M_{22} fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}M_{22}(z) = & -\frac{a_{k+1}}{2i\sin z} \left[\beta \frac{e_{k+2}(z) e^{-i(k+2)z}}{\mu_{k+2}} P_{k-2}(z) e^{i(k+2)z} \mu_{k+2}\right. \\ & - (\alpha + \beta) \frac{e_{k+2}(z) e^{-i(k+2)z}}{\mu_{k+2}} P_{k-1}(z) e^{i(k+2)z} \mu_{k+2} \\ & + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \frac{e_{k+1}(z) e^{-i(k+1)z}}{\mu_{k+1}} P_{k-1}(z) e^{i(k+1)z} \mu_{k+1} \\ & \left. - (\beta + \delta) \frac{e_{k+1}(z) e^{-i(k+1)z}}{\mu_{k+1}} P_{k-2}(z) e^{i(k+1)z} \mu_{k+1}\right]\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\xi \to \infty$ için,

$$\begin{aligned}
M_{22}(z) &= -\frac{a_{k+1}}{2i\sin z}\left[\beta\left(\prod_{n=1}^{k-3} a_n\right)^{-1}\left(e^{i(k-3)z}+e^{-i(k-3)z}\right)e^{i(k-3)z}e^{5iz}\mu_{k+2}\right. \\
&\quad -(\alpha+\beta)\left(\prod_{n=1}^{k-2} a_n\right)^{-1}\left(e^{i(k-2)z}+e^{-i(k-2)z}\right)e^{i(k-2)z}e^{4iz}\mu_{k+2} \\
&\quad +(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\left(\prod_{n=1}^{k-2} a_n\right)^{-1}\left(e^{i(k-2)z}+e^{-i(k-2)z}\right)e^{i(k-2)z}e^{3iz}\mu_{k+1} \\
&\quad \left. -(\beta+\delta)\left(\prod_{n=1}^{k-3} a_n\right)^{-1}\left(e^{i(k-3)z}+e^{-i(k-3)z}\right)e^{i(k-3)z}e^{4iz}\mu_{k+1}\right] \\
&= -\frac{a_{k+1}}{2i\sin z}\left[e^{5iz}\left(\prod_{n=1}^{k-3} a_n\right)^{-1}\beta\mu_{k+2}\left[1+o(1)\right]+\right. \\
&\quad -e^{4iz}\left(\prod_{n=1}^{k-2} a_n\right)^{-1}(\alpha+\beta)\,\mu_{k+2}\left[1+o(1)\right] \\
&\quad +e^{3iz}\left(\prod_{n=1}^{k-2} a_n\right)^{-1}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\,\mu_{k+1}\left[1+o(1)\right] \\
&\quad \left. -e^{4iz}\left(\prod_{n=1}^{k-3} a_n\right)^{-1}(\beta+\delta)\,\mu_{k+1}\left[1+o(1)\right]\right]
\end{aligned}$$

asimptotiği bulunur. Buradan $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ olması durumunda (4.30) eşitliği ve eğer $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ olması durumunda ise (4.31) asimptotik eşitliği elde edilir. İspatın son kısmında $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ iken $(\alpha+\beta)$ ve $(\beta+\gamma)$ ifadelerinin aynı anda sıfıra eşit olmayacağını gösterelim. Kabul edelim ki $(\alpha+\beta)$ ve $(\beta+\gamma)$ aynı anda sıfıra eşit olsun. Yani, $\alpha+\beta = \beta+\gamma = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha = \gamma = -\beta$ bulunur. Ayrıca $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ ise $\alpha+\beta = -\gamma-\delta$ olup bu denklemde $\alpha = -\beta$ olduğu kullanılırsa $\gamma = -\delta$ elde edilir. O halde $\alpha = -\beta$ ve $\gamma = -\delta$ eşitlikleri kullanılarak

$$\det B = \alpha\delta - \beta\gamma = (-\beta)\,\delta - \beta\,(-\delta) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\det B \neq 0$ olması ile çelişir. O halde kabulumüz yanlış olup $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ iken $(\alpha+\beta)$ ve $(\beta+\gamma)$ ifadeleri aynı anda sıfıra eşit olamaz. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.3 $\mathbf{L_0}$ Operatörünün Saçılım Fonksiyonu

Bu kısımda, B matrisinin elemanlarının reel olduğu kısıtlaması altında L_0 operatörünün saçılım fonksiyonu elde edilecektir.

Teorem 4.3 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ birer reel sayı olmak üzere, her bir $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$M_{22}(z) \neq 0$$

gerçeklenir.

İspat. (4.1)-(4.3) impalsif fark sınır değer probleminin E_n ve F_n çözümlerini dikkate alalım. Bu durumda (4.13), (4.14) ve (4.20) ifadelerinden $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$\overline{B_+^-} = \overline{M_{22}(z)} = M_{12}(z) = A_+^- \tag{4.32}$$

bulunur. Kabul edelim ki $M_{22}(z_0) = 0$ olacak şekilde bir $z_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ sayısı mevcut olsun. O halde (4.32) eşitliğinden $A_+^-(z_0) = B_+^-(z_0) = 0$ elde edilip $F_n(z_0)$ çözümü özdeş olarak sıfır bulunur. Böylece F_n, (4.1)-(4.3) impalsif fark sınır değer probleminin aşikar çözümü olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup her $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ve $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için $M_{22}(z) \neq 0$ dır. ■

Şimdi Teorem 4.3. ün bir sonucu olarak spektral tekilliklerle ilgili sıradaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ birer reel sayı olmak üzere, M_{22} fonksiyonunun $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ aralığında reel sıfırları olmadığından L_0 impalsif fark operatörü spektral tekilliğe sahip değildir.

Tanım 4.1 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ birer reel sayı olmak üzere, L_0 impalsif fark operatörünün saçılım fonksiyonu

$$\mathcal{S}(z) := \frac{E(0, -z)}{E(0, z)}$$

şeklinde tanımlıdır.

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ve $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel diziler olduğundan her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için (4.15) ifadesinden

$$\overline{E_n(z)} = E_n(-z)$$

olup buradan saçılım fonksiyonu

$$\mathcal{S}(z) = \frac{\overline{E(0,z)}}{E(0,z)} = \frac{\overline{M_{22}(z)}}{M_{22}(z)} = \frac{M_{12}(z)}{M_{22}(z)} \tag{4.33}$$

şekline dönüşür.

Teorem 4.4 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ birer reel sayı olmak üzere, her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için $\mathcal{S}$ saçılım fonksiyonu

$$\mathcal{S}(-z) = \mathcal{S}^{-1}(z) = \overline{\mathcal{S}(z)}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. (4.33) ifadesinden

$$\mathcal{S}(-z) = \frac{M_{12}(-z)}{M_{22}(-z)}$$

elde edilir. Ayrıca $\overline{M_{22}(-z)} = M_{22}(z)$ ve $\overline{M_{12}(-z)} = M_{12}(z)$ olduğundan her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{S}(-z) = \mathcal{S}^{-1}(z) = \overline{\mathcal{S}(z)}$ bulunarak ispat tamamlanır. ∎

4.4 Örnek

Bu kısımda implasif fark operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerini daha detaylı araştırdığımız bir örnek inceleyelim.

Örnek 4.1 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ birer kompleks sayı olmak üzere

$$y_{n-1} + y_{n+1} = 2\cos z y_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\} \tag{4.34}$$

fark denklemi

$$y_0 = 0 \tag{4.35}$$

sınır koşulu ve

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ \Delta y_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \nabla y_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

impalsif koşulu tarafından üretilen $\widetilde{L}_0$ operatörünü göz önüne alalım. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için (4.1) denkleminin katsayıları $a_n = 1$ ve $b_n = 0$ alındığından (4.13) ve (4.14) ifadelerinden $k = 2$ için direkt olarak

$$M_{22}(z) = -\frac{e^{3iz}}{2i \sin z}\left[-(\alpha+\beta)e^{iz} + \alpha + \beta + \gamma + \delta\right] \tag{4.37}$$

ve

$$M_{12}(z) = -\frac{e^{-3iz}}{2i\sin z}\left[-(\alpha+\beta)e^{-iz}+\alpha+\beta-\gamma-\delta\right] \qquad (4.38)$$

eşitlikleri elde edilir. $\widetilde{L}_0$ impalsif fark operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerini bulmak için M_{22} fonksiyonunun sıfırları incelenmelidir. Bu amaçla (4.37) eşitliğinden

$$e^{iz} = 1 + \frac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta}$$

buluınur. Böylece $H = \dfrac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta}$ olmak üzere son eşitliğin çözümü

$$z_m = -i\ln|1+H| + Arg(1+H) + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \qquad (4.39)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi bazı özel durumlar incelenecektir.

Durum 1: $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $H = e^{i\theta} - 1$ olsun O halde $Arg(1+H) = \theta$ olduğundan

$$z_m = \theta + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Bu durumda $z_m \in \mathbb{R}$ bulunduğundan

$$\{z_m : m \in \mathbb{Z}\} \cap \left\{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0,\pi\}\right\}$$

kesişim kümesindeki sayılar $\widetilde{L}_0$ impalsif fark operatörünün spektral tekillikleridir.

Durum 2: D kümesi

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 1\}$$

şeklinde tanımlanırsa $|1+H| = 1$ olup buradan

$$z_m = \theta + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Böylece, (4.39) ve son eşitlikten

$$\{z_m : m \in \mathbb{Z}\} \cap D$$

kümesinin elemanları $\widetilde{L}_0$ impalsif fark operatörünün spektral tekillikleri olarak elde edilir. Ayrıca D_* kümesi

$$D_* := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1\}$$

şeklinde tanımlanırsa $|1+H|<1$ olup buradan $S_0 \cap D_*$ kümesinin elemanlarının $\widetilde{L}_0$ operatörünün özdeğerleri olduğu kolaylıkla görülebilir.

Durum 3: H bir reel sayı olmak üzere eğer $-2<H<0$ ise $\widetilde{L}_0$ impalsif fark operatörü özdeğerlere sahiptir. Aksi durumda $\widetilde{L}_0$ operatörünün özdeğerleri yoktur. Ayrıca bu durumda $H=-2$ için $\widetilde{L}_0$ impalsif fark operatörünün spektral tekilliği vardır.

Şimdi, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ birer reel sayı olmak üzere $\widetilde{L}_0$ impalsif fark operatörünün saçılım fonksiyonunu inceleyelim. (4.33), (4.37) ve (4.38) ifadelerini kullanarak her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için $\mathcal{S}$ saçılım fonksiyonu

$$\mathcal{S}(z)=e^{-6iz}\left[\frac{(\alpha+\beta)\,e^{-iz}+(\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{-(\alpha+\beta)\,e^{iz}+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}\right]$$

şeklinde elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Gerçek hayatta karşılaşılan süreçlerin fonksiyonel analiz, uygulamalı matematik ve kuantum mekaniğinde modellenip çözülmesinde kimi zaman diferensiyel denklemler, kimi zaman ise fark denklemleri kullanılmaktadır. Diferensiyel denklemler sürekli problemleri, fark denklemleri ise daha ziyade sürekli olmayan kesikli problemleri karakterize ederler. Spektral teoride ise, modellenen bu problemlerin çözümü için operatör teorisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle Sturm-Liouville diferensiyel denklemleri yardımıyla elde edilen diferensiyel operatörlerin ve fark denklemleri yardımıyla elde edilen fark operatörlerinin spektral analizi günümüze kadar çok sayıda matematikçi tarafından araştırılmıştır. Ancak birçok fiziksel süreçte zamanın belirli anında veya anlarında keskin durum değişikliklerine rastlanabilir. Bu sebeple impalsif denklemlerin ve impalsif operatörlerin analizi giderek artan bir ilgiyle karşılaşmaktadır.

Literatür incelendiğinde, Hilbert uzaylarında tanımlı lineer sınırlı, sınırsız, selfadjoint, non-selfadjoint operatörlerin spektral özellikleri ile ilgili günümüze kadar pek çok çalışma mevcut olduğu görülmektedir. Ancak yapılan çalışmaların çoğu diferensiyel ya da fark denklemleri üzerine olup, impalsif fark veya impalsif diferensiyel denklemlere ilişkin literatürde yeteri kadar çalışma bulunmamaktadır. Bu doktora tezinde amaçlanan yarım eksendeki impalsif Sturm-Liouville ve impalsif fark operatörlerinin spektral teorisini inceleyerek literatürdeki bu boşluğu kapatmaktır.

Tezin ilk bölümünde, $L^2[0,\infty)$ Hilbert uzayında yarım eksen üzerinde

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \qquad x \in [0,1) \cup (1,\infty),$$

diferensiyel denklemi yardımıyla üretilen L impalsif operatörü ele alınmış, bu operatörün asimptotik özellikleri, özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenmiş, belli koşullar altında özdeğer ve spektral tekillikler kümesinin ve katlarının sonlu olduğu gösterilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde ise, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel terimli diziler olmak üzere $l^2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayında

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{k-1, k, k+1\}$$

fark ifadesi yardımıyla üretilen L_0 impalsif fark operatörü ele alınmıştır. Bu operatörün Jost çözümü verilmiş, bu çözümün analitiklik özellikleri ve asimptotik davranışları incelenmiştir. Ayrıca L_0 operatörünün özdeğer ve spektral tekillikleri araştırılmıştır. Her iki bölümde de elde edilen sonuçlar birer örnek üzerinde uygulanarak bu sonuçların geçerliliği somut olarak gösterilmiştir.

Tezdeki bu çalışmaların devamı olarak tez çalışmasının konusunu oluşturan impalsif koşullu L Sturm-Liouville operatörünün ve L_0 fark operatörünün esas fonksiyonları incelenebilir. Diğer yandan, en genel anlamıyla sürekli ve ayrık analizin birleştirilmesi olarak bilinen zaman skalası kavramı son yıllarda birçok matematikçi tarafından ilgi görmüş, diferensiyel denklemler ve fark denklemleri ile yapılan çalışmalar zaman skalasına taşınarak bu çalışmalar sonucunda daha genel sonuçlara ulaşılmıştır. Bu tez çalışmasının konusunu oluşturan operatörlerin spektral teorisi üzerine yapılan çalışmalar da zaman skalasında modellenerek bu operatörlerin detaylı bir şekilde incelenmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

Adıvar, M. and Akbulut, A. 2010. Non-self-adjoint boundary-value problem with discontinuous density function. Math. Meth. Appl. Sci., 33, 11, 1306–1316.

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. J. Math. Anal. Appl., 261, 461-478.

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2003. Difference equations of second order with spectral singularities. J. Math. Anal. Appl., 277, 714-721.

Agarwal, R. P. and Wong, P. J. Y. 1997. Advanced topics in difference equations, Mathematics and its Applications. 404, Kluwer, Dordrecht.

Agarwal, R. P. 2000. Difference equations and inequalities. Theory, methods and applications. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 228, Marcel Dekker, Inc., New York.

Agranovich, Z. S. and Marchenko, V. A. 1965. The inverse problem of scattering theory, Gordon and Breach.

Akhiezer, N. I. 1965. The classical moment problem and some related questions in analysis, New York.

Allahverdiev, B. P., Bairamov, E. and Ugurlu, E. 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions. J. Math. Anal. Appl., 401 (1), 388-396.

Atkinson, F. V. 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems. New York, Academic Press.

Berezanski, Y. M. 1968. Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators, AMS, Providence.

Bainov, D. and Simeonov, P. 1998. Oscillation theory of impulsive differential equations. International Publications, Orlando, FL.

Bairamov, E., Çakar Ö. and Çelebi A. O. 1997. Quadratic pencil of Schrödinger operators with spectral sngularities: Discrete spectrum and principal functions. Jour. Math. Anal. Appl., 216, 303-320.

Bairamov, E., Çakar Ö. and Krall, A. M. 1999. Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition. J. Diff. Equation, 151, 252-267.

Bairamov, E. and Çelebi, A. O. 1999. Spectrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators. Quart. J. Math. Oxford Ser., (2)50, 371-384.

Bairamov, E., Çakar Ö. and Krall, A. M. 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities. Math. Nacr., 229, 5-14.

Bairamov, E. and Coskun, C. 2004. Jost solutions and the spectrum of the system of difference equations. Appl. Math. Lett., 17, 1039-1045.

Bairamov, E. and Coskun, C. 2005. The structure of the spectrum of a system of difference equations. Appl. Math. Lett.,18, 387-394.

Bairamov, E. and Karaman, O. 2002. Spectral singularities of Klein-Gordon s-wave equations with an integral boundary condition. Acta Math. Hungar, 97, 121-131.

Dolzhenko, E. P. 1979. Boundary value uniqueness theorems for analytic functions. Math. Notes, 26, 437-442.

Gasymov, M. G. and Levitan, B. M. 1966. Determination of the Dirac system from scattering phase. Sov. Math. Dokl., 167, 1219-1222.

Gasymov, M. G. 1968. Expansion in terms of the solutions of a scattering theory problem for the non-selfadjoint Schrödinger equation. Soviet Math. Dokl., 9, 390-393.

Glazman, I. M. 1965. Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators. Jerusalem.

Gohberg, I. C. and Krein, M. G. 1969. Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators. American Math. Society.

Guseinov, G. S. 1976a. The determination of an infinite Jacobi matrix from the scattering data. Sov. Math. Dokl., 17, 596-600.

Guseinov, G. S. 1976b. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation. Sov. Math. Dokl., 230, 1045-1048.

Guseinov, G. S. 2009. On the concept of spectral singularities. Pramana-J. Phys., 73 (3), 587-603.

Jaulent, M. and Jean, C. 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials deending on energy. Comm. Math. Phys., 28(3), 177-220.

Keldyš, M. V. 1951. On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-selfadjoint equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 77, 11-14.

Kelly, W. G. and Peterson, A. C. 2001. Difference Equations. An introduction with applications. Harcourt Academic Press.

Kemp, R. R. D. 1958. A singular boundary value problem for a non-selfadjoint differential operator. Canad. J. Math., 10, 447-462.

Kir, E. 2005. Spectrum and principal functions of the non-selfadjoint Sturm-Liouville operators with a singular potential. Appl. Math. Lett., 18, 1247-1255.

Krall, A. M. 1965a. The adjoint of differential operators with integral boundary conditions. Proc. AMS, 16, 738-742.

Krall, A. M. 1965b. A nonhomogenous eigenfunction expansion. Trans AMS, 117, 352-361.

Krall, A. M. 1965c. Second order ordinary differential operators with general boundary conditions. Duke. Jour. Math., 32, 617-625.

Krall, A. M., Bairamov, E. and Çakar Ö. 1999. An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities. J. Diff. Equation, 151, 268-289.

Krall, A. M., Bairamov, E. and Çakar Ö. 2001. Spectral analysis of non-selfadjoint discrete Schrödinger operators with spectral singularities. Math. Nachr., 229, 5-14.

Kreyszig , E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: Wiley&Sons. Inc.

Lakshmikantham, V., Bainov, D. D. and Simeonov, P. S. 1998. Theory of impulsive differential equations. World Scientific, Singapore.

Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S. 1975. Introduction to spectral theory, Translations of Mathematical Monographs, 39.

Levitan, B. M. 1987. Inverse Sturm-Liouville Problems. VSP, Zeist.

Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S. 1991. Sturm-Liouville and dirac operators. Kluwer Academic, Dordrecht.

Liouville, J. 1836. Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosins. Journ. Math. Pures Appl., 1, 14-32.

Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J. 1974. Elements of functional analysis. Halsted Press, New York.

Lyance, V. E. 1967. A differential operator with spectral singularities. I, II, AMS Translations, 2(60), 185-225, 227-283.

Marchenko, V. A. 1977. Some questions of the theory of one dimensional linear differential operators II. Amer. Math. Soc. Transl., (2)101, 107-191.

Marchenko, V. A. 1986. Sturm-Liouville operators and applications. Birkhauser Verlag, Basel.

Mostafazadeh, A. and Mehri-Dehnavi, H. 2009. Spectral singularities, biorthonormal systems and a two-parameter family of complex point interactions. J. Phys. A., 42 (12), 125303, 27 pp.

Mostafazadeh, A. 2011. Spectral singularities of a general point interaction. J. Phys.A., 6 (1), 47-55.

Mukhtarov, O. Sh., Kadakal, M. and Muhtarov, F. S. 2004a. On discontinuous Sturm- Liouville problems with transmission conditions. J. Math. Kyoto Univ., 44 (4), 779-798.

Mukhtarov, O. Sh. and Tunc, E. 2004b. Eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with transmission conditions. Israel J. Math., 144, 367-380.

Naimark, M. A. 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. AMS Translations, 2(16), 103-193.

Naimark, M. A. 1968. Linear differential operators II. Ungar, New York.

Ugurlu, E. and Bairamov, E. 2013. Dissipative operators with impulsive conditions. J. Math. Chem., 51 (6), 1670-1680.

Pavlov, B. S. 1967. The non-selfadjoint Schrödinger operator. Topics in Mathematics and Physics, 1, 87-114.

Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. and Skripnik, N. V. 2011. Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities, De Gruyter studies in mathematics 40, Germany.

Samoilenko, A. M. and Perestyuk, N. A. 1995. Impulsive differential equations, World Scientific, Singapore.

Schwartz, J. T. 1960. Some non-selfadjoint operators. Comm. Pure Appl. Math., 13, 609-639.

Sturm, C. 1836. Mémoire sur les Équations différentielles linéaires du second ordre. Journ. Math. Pures Appl., 1, 106-186.

Tunca, G. B. and Bairamov, E. 1999. Discrete spectrum and principal functions of non-selfadjoint differential operator. Czechoslovak Math. J., 49(124), no. 4, 689-700.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İbrahim ERDAL

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 21/08/1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Halide Edip Lisesi (2005)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2010)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları:

Yardımcı, Ş., **Erdal İ**. 2018. Investigation of an impulsive Sturm-Liouville operator on semi axis. Hacet. J. Math. Stat. Doi: 10.15672/HJMS.2018.591 (SCI Exp.).