ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİNGULAR İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Cahit CİNBAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİNGULAR İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Cahit CİNBAT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

Yaklaşımlar teorisinin temel problemlerinden birisi, verilen f fonksiyonunu kendisinden daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlar dizisinin veya ailesinin herhangi bir anlamda limiti biçiminde gösterebilmektir. Bu tezde, verilen integrallenebilir bir f fonksiyonuna, singular integral operatörleri ile yaklaşım incelenmiştir. Bunun için ilk olarak, singular integral operatörü ve konvolüsyon tipli integral operatörleri tanımları verilmiştir. Bu tanımlardan sonra, Dirichlet problemi ve bazı pozitif çekirdeklerin (Poisson, Abel-Poisson, Fejer ve Gauss-Weirstrass) elde edilişi açıklanmıştır. Daha sonra, konvolüsyon tipli singular integral operatörlerin $C_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$, L_p uzaylarında yakınsaklıkla ilgili teoremleri ve temel özellikleri araştırılmıştır. Periyodik fonksiyonların Fourier serileriyle ifade edilebildiği gerçeği bilinmektedir. Bu nedenle, Fourier serileri, Fourier serilerinin çeşitli anlamda toplanabilirliği üzerine temel teoremler ve özdeşlikler araştırılmıştır. Bunlara ek olarak, $T(f;x)$ singular integral operatörünün periyodik bir f fonksiyonuna norm yakınsaklığı için gerek ve yeter şartlar gösterilmiştir. Ayrıca, $1 \leq p < \infty, L_p$ uzayında yakınsaklık teoremlerin ispatı verilmiştir. Son olarak, pozitif çekirdekli singular integral operatörleriyle periyodik fonksiyonların yaklaşım hızı araştırılmış ve bununla ilgili teoremin ispatı verilmiştir.

Ocak 2021, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Singular İntegral Operatörü, Konvolüsyon Tipli Singular İntegral Operatörü, Pozitif Çekirdek, Dirichlet Çekirdeği, Yaklaşım Birimi, Süreklilik Modülü.

ABSTRACT

Master Thesis

APPROXIMATION BY SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

Cahit CİNBAT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

One of the fundamental problems of approximation theory is to represent in the form of limit for a given function f in some sense or other functions having certain properties , and generally , by functions which have better properties than f. In this thesis, the approximation of a given integrable f function by singular integral operators was examined. For this purpose, firstly, definitions of singular integral operators and singular convolution integrals were given. After the definitions, Dirichlet problem and the attainment of some positive kernels (Poisson, Abel-Poisson, Fejer and Gauss-Weirstrass) were stated. Moreover, some basic properties of singular integrals and theorems related to their convergence in the norms of the spaces $C_{2\pi}$, $L_p, 1 \leq p < \infty$ were searched. The fact is known that periodic functions can be represented as a sum of Fourier series. This thesis presents the fundamental facts and theorems of Fourier series, the summability of Fourier series. In addition to these, necessary and sufficient conditions for the norm convergence of $T(f;x)$ singular integral operators towards a periodic f function were examined. Moreover, some theorems related to convergence of the space L_p, $1 \leq p < \infty$ were given. Finaly, the rate of convergence by singular integral operators with positive kernels towards a periodic f function was searched and the proofs of theorems were given.

January 2021, 70 pages

Key Words: Singular Integral Operators, Singular Integral Operators of Convolution Type, Positive Kernels, Dirichlet Kernel, Approximate Identity, Modulus of Continuity.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşturulmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek tezi oluşturmama katkıda bulunan danışman hocalarım Prof. Dr. Ertan İBİKLİ ve Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI'ya, çalışmalarım süresince fedakarlıklar göstererek beni destekleyen eşim Hayriye CİNBAT'a en derin duygularla teşekkür ederim.

Cahit CİNBAT
Ankara, Ocak 2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$C(f)$	Sürekli fonksiyonlar kümesi
$L(f)$	Lebesgue fonksiyonlar kümesi
$L_p[a,b]$	$1 \leq p < \infty$, Lebesgue uzayı
$\|x\|$	x normu
$\|\bullet\|_{C[a,b]}$	$\|\bullet\| = \max_{a \leq x \leq b} \lvert\bullet\rvert$ ile tanımlanan norm
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$f * g$	f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu
ODE	Adi diferansiyel denklem
h.h.h.	hemen hemen her
$\mathbb{R}_0^+$	$[0,\infty)$
D	L operatörün tanım kümesi
U	L operatörünün değer kümesi
$P_r(\theta) = P(r,\theta)$	Poisson çekirdeği
$A_\varepsilon(x)$	Abel-Poisson çekirdeği
$F_n(t)$	Fejer çekirdeği
$W_\lambda(x)$	Gauss-Weirstrass çekirdeği
$P_r(f;x)$	Poisson integrali
$a_\varepsilon(f;x)$	Abel-Poisson integrali
$\sigma_n(f;x)$	Fejer integrali
$u_\lambda(f;x)$	Gauss-Weirstrass integrali
$D_n(x)$	Dirichlet çekirdeği
$S_n(f;x)$	n inci kısmi toplam
$T_\lambda(f;x)$	T integral operatörleri ailesi
$K_\lambda(t-x)$	T operatörünün çekirdek ailesi
Λ	İndis kümesi
$\lambda_\circ$	İndis kümesinin limit noktası
λ	parametre

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Singular integrallere, fonksiyonlar teorisi ve diferansiyel denklemler teorisinde rastlayabiliriz. Birim dairede Dirichlet problemi, ısı denklemi için Cauchy problemi ve yarı düzlemde Dirichlet problemi gibi problemlerin çalışmaları sonucunda elde edilen Poisson integralini, Gauss-Weierstrass integralini ve Abel-Poisson integralini önemli singular integral örnekleri olarak gösterebiliriz.

Yaklaşım teorisi ile ilgili çalışmaların sonucunda, başta sınır değer prolemlerinin çözümü, sinyal işleme, ses tanıma, veri gösterimi ve diferansiyel denklemlerin çözümü konularında matematiksel güçlü araçlar sağlanmıştır. Yaklaşım teorisiyle ilgili çalışmalar, günümüzde artan uygulama alanlarıyla dikkat çekmektedir ve gelecekte de önemli olmaya devam edecektir. Bu açıdan bakıldığında; singular integral operatörleri ile yaklaşımın araştırılmasının yaklaşım teorisi alanında yapılan çalışmalara katkı sağlayacağı değerlendirilmektedir.

Tezin ikinci bölümünde ise, bu tez boyunca singular integral operatörlerinin yaklaşımı için kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Bunun için ilk olarak, konvolüsyon tipli integral operatörü ve singular integral operatörü tanımları verilmiştir.

Matematiğin birçok dalında pozitif çekirdekli konvolüsyon tipli integral operatörleri önemli yer tutmaktadır. Bu integrallere örnek olarak harmonik fonksiyonlar teorisinde Poisson ve Abel-Poisson integrallerini, Fourier serileri teorisinde Fejer integralini ve diferansiyel denklemler teorisinde Gauss- Weierstrass integralini gösterebiliriz. Bu maksatla, tezin üçüncü bölümünde Dirichlet problemi ve bazı pozitif çekirdekler (Poisson, Abel-Poisson, Fejer ve Gauss-Weierstrass) ve onların integrallerinin elde edilişi açıklanmıştır.

Tezin dördücü bölümünde ise $T_\lambda(f;x)$ konvolüsyon tipli singular integral operatörlerin $C_{2\pi}$, $L_p, 1 \leq p < \infty$ uzaylarında f fonksiyonuna yakınsamasıyla ilgili temel özellikler araştırılmış ve temel teoremlerin ispatları verilmiştir.

Yaklaşımlar teorisinin ikinci temel problemi ise, eğer bir yaklaşım varsa bu yaklaşımın hızı nedir problemidir. Tezin son bölümde ise , pozitif çekirdekli singular integral operatör ailesinin $L_1(-\pi,\pi)$ uzayında f fonksiyonuna L_1 normunda yaklaşımı ve bu yaklaşımın hızı araştırılmış ve bununla ilgili teoremin ispatı verilmiştir.

2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bu tez boyunca singular integral operatörlerinin yaklaşımı için yararlanılacak temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1 Bazı Önemli Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. A , F cismi üzerinde lineer uzay olsun.
$\|x\| : A \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa norm denir.

(i) $\forall x \in A, \|x\| \geq 0$
(ii) $\forall x \in A, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
(iii) $\forall x \in A$ ve $\forall \alpha \in F, \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(iv) $\forall x, y \in A$ olmak üzere $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Norm üzerinde tanımlı lineer uzaya lineer normlu uzay denir.

Tanım 2.1.2. (**$\mathbf{L}_p$(D) Uzayları**). Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon uzayı genellikle L harfiyle gösterilir.
D, $(-\infty, \infty)$ reel eksenin sonlu veya sonsuz(yani sınırsız) bir alt aralığı olsun. Yani; $D = (-\infty, \infty)$, $D = (a, \infty)$, $D = (-\infty, b)$, $D = (a, b)$ gibi durumlar olabilir.
$1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$\int_D |f(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir fonsiyonlar uzayına $L_p(D)$ uzayı denir. Bu uzayda norm;
$1 \leq p < \infty$ olduğunda

$$\|f\|_p = \left\{ \int_D |f(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

dir.
Eğer $p = \infty$ ise

$$\|f\|_{\infty} = ess\sup_{x\in D} |f(t)|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3. ($L_1 [a,b]$ **Uzayı**).

$L_1 [a,b]$ kümesine $[a,b]$ periyot aralığında birinci kuvvetten Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

$f \in L_1 [a,b]$ için

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

dir.

Tanım 2.1.4. ($L_p [-\pi,\pi]$ **Uzayı**). $1 \leq p < \infty$, $L_p [-\pi,\pi]$ kümesine $[-\pi,\pi]$ periyot aralığında p-ninci kuvvetten Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

$f \in L_p [-\pi,\pi]$ için

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Fatou Lemması 2.1.5. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \mathbb{R}$ üzerinde pozitif fonksiyonlar dizisi olmak üzere;

hemen her x için $\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) = f(x)$ oluyorsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$$

dir.

(Butzer&Nessel,1971)

Teorem 2.1.6. (**Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi**). $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton artan integrallenebilir pozitif fonksiyonlar dizisi olsun.

Hemen her x için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

dir.

(Butzer&Nessel,1971)

Teorem 2.1.7. (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi). $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1$ ve hemen her x için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olsun. Eğer $\forall n$ icin $|f_n(x)| \leq g(x)$ h.h. yerde olacak şekilde $g \in L_1$ varsa , $f \in L_1$ gerçeklenir ve .

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

dir.

(Butzer&Nessel,1971)

Teorem 2.1.8. (**Fubini Teoremi**). $x, y \in \mathbb{R}$ ve $f(x,y)$, Öklit uzayı $\mathbb{R}^2$ üzerinde ölçülebilir ve tanımlanmış kompleks değerli iki (reel) değişkenli fonksiyon olsun:

(i) $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$, yani çift katlı integral $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$ mutlak yakınsak olsun. O zaman, hemen her x için $f(x,y)$ fonksiyonu y değişkenine göre $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak integrallenebilirdir, yani hemen her yerde $f(x,\circ) \in L_1(\mathbb{R})$ dir. Daha açık olarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\circ,y)dy \in L_1(\mathbb{R}) \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right\}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

dir.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\,dy\right\}dx$ sonlu ise $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\;dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right\}dx$$

dir. Teorem 2.1.8 in ikinci kısmına Tonelli-Hobson teoremi de denir.

(Butzer&Nessel,1971)

Teorem 2.1.9. (**Minkowsky Eşitsizliği**). Eğer $p \geq 1$, $f, h \in L_p$ ise $f + h \in L_p$

,

$$\|f+h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$$

dir.

(Butzer&Nessel,1971)

Teorem 2.1.10. (Hölder Eşitsizliği). $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f \in L_p$ ve $h \in L_q$ ise $f\,.h \in L_1$ ve

$$\|f.h\|_1 \leq \|f\|_p \, \|h\|_q$$

dir.

(Butzer&Nessel,1971)

Teorem 2.1.11. (Hölder-Minkowsky Eşitsizliği).
$f(x,y)$, $\mathbb{R}^2$ de ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer $\|f(\circ,y)\|_{X(\mathbb{R})} \in L_1$ ise

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(\circ,y)dy \right\|_{X(\mathbb{R})} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|f(\circ,y)\| \, dy$$

dir.
Bu teoreme aynı zamanda genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliği de denir.
(Butzer&Nessel,1971)

Tanım 2.1.12. (d-Noktası). $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)] \, dt = 0$$

koşulunu sağlayan diğer bir ifadeyle integrali türevlenebilen f fonksiyonunun x noktasına $d-$noktası denir. Tüm d-noktaları kümesi $D(f)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. (Lebesgue Noktası). $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt = 0$$

koşulunu sağlayan f fonsiyonunun x noktasına Lebesgue noktası denir. Tüm Lebesgue noktaları kümesi $L(f)$ ile gösterilir.

Yukarıda verilen Tanım 2.1.12 ve Tanım 2.1.13 den her bir Lebesgue noktasının aynı zamanda d-noktası olduğu açıkca görülmektedir. Gerçekten, $f \in L_1$ olmak üzere, genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğinden

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]\, dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt$$

dir. Bu eşitsizlik, her Lebesgue noktasının aynı zamanda d-noktası olduğunu gösterir. Yani,

$$L(f) \subset D(f)$$

dir.

Şimdi, $f \in L_1$ olmak üzere, L_1 uzayında verilen f fonksiyonuna ait her bir x süreklilik noktasının aynı zamanda o fonksiyonun Lebesgue noktası olduğunu göstermeye çalışalım. f fonksiyonunun x noktasında sürekli olduğunu kabul edelim. Sürekliliğin tanımından her pozitif $\varepsilon > 0$ verildiğinde , ε'na bağlı bir δ bulunur ki;

$$|t - x| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlansın. O zaman $h \leq \delta$ seçilirse,

$$\frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt < \varepsilon$$

elde edilir ve bu da

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt = 0$$

olduğunu gösterir. Bu durumda, L_1 uzayında verilen f fonksiyonuna ait her bir x süreklilik noktasının aynı zamanda o fonksiyonun Lebesgue noktasıdır.

$f \in L_1$ fonksiyonunun tüm süreklilik noktaları kümesini $C(f)$ ile gösterirsek,

$$C(f) \subset L(f)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, süreklilik noktaları, Lebesgue noktaları ve d-noktaları arasında

$$C(f) \subset L(f) \subset D(f)$$

biçiminde bir ilişki mevcuttur. Sonuç olarak, $D(f)$ kümesi için ispat edilmiş her bir önerme $C(f)$ ve $L(f)$ kümelerinde olan noktalar için de geçerlidir.

2.2 Singular İntegral

Singular integral kavramına giriş yapmak için aşağıdaki fonksiyonu ele alalım.

$$\phi_n(t,x) = \tfrac{1}{\pi}\tfrac{n}{1+n^2(t-x)^2} \qquad (2.2.1)$$

Eğer n ve x sabit sayı ve t yi de 0 ve 1 arasında bir değişken olarak alırsak, $\phi_n(t,x)$ ifadesi t ye bağlı sürekli bir fonksiyondur. Bu durumda her integrallenebilir $f(t)$ $(0 \le t \le 1)$ için

$$f_n(x) = \tfrac{n}{\pi}\int_0^1 \tfrac{f(t)}{1+n^2(t-x)^2}dt = \int_0^1 \phi_n(t,x)f(t)dt \qquad (2.2.2)$$

biçiminde fonksiyon oluşturabiliriz (Natanson,1960).

Teorem 2.2.1. $f(x)$ sürekli ve $0 < x < 1$ olmak üzere ,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (2.2.3)$$

dir. (Natanson,1960)

İspat. Dikkat edilirse

$$I = \int_0^1 \phi_n(t,x)dt = \tfrac{n}{\pi}\int_0^1 \tfrac{1}{1+n^2(t-x)^2}dt$$

$z = n(t-x)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$dz = ndt$

$t = 1$ için $z = n(1-x)$

$t = 0$ için $z = -nx$ olur

İntegralimizde değişkenleri ve sınırları değiştirirsek,

$$I = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-nx}^{n(1-x)} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$n \to \infty \quad \text{için} \quad I = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2},$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-t}^{t} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{t\to\infty} \arctan(z) \mid_{-t}^{t}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{t\to\infty} 2\arctan(t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}$$

$$= 1 \qquad (2.2.4)$$

elde edilir.

Şimdi (2.2.3) ün ispatı için $n \to \infty$ iken

$$r_n = f_n(x) - f(x) \int\limits_0^1 \phi_n(t,x)dt$$

$$= \frac{n}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2} dt$$

ifadesinin 0 a yakınsadığını göstermek yeterlidir.

Bu maksatla; keyfi $\varepsilon > 0$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir δ sayısı f sürekli olduğundan bulunabilir.

$|t-x| < \delta \Longrightarrow -\delta < t-x < \delta$ ya da $-\delta < x-t < \delta \Longrightarrow 0 < x-\delta < t < x+\delta < 1$ olsun.

r_n in bu aralıklara göre integralini alalım.

$$r_n = \frac{n}{\pi} \int\limits_0^{x-\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2} dt + \frac{n}{\pi} \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2} dt + \frac{n}{\pi} \int\limits_{x+\delta}^{1} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2} dt$$

integralini sırasıyla

$$= A_n + B_n + C_n \qquad (2.2.5)$$

biçiminde yazalım.

B_n integrali (2.2.4) den dolayı

$$|B_n| \leq \frac{n}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{|f(t)-f(x)|}{1+n^2(t-x)^2}dt \leq \varepsilon\frac{n}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{1}{1+n^2(t-x)^2}dt \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}dz = \varepsilon \qquad (2.2.6)$$

elde edilir.

A_n integrali için ise

$$|A_n| \leq \frac{n}{\pi(1+n^2\delta^2)}\int_{0}^{x-\delta} |f(t)-f(x)|\,dt < \frac{A(\delta)}{n} \qquad (2.2.7)$$

$A(\delta)$, n e bağlı olmayan bir ifadedir.

Benzer şekilde,

$|C_n| < \frac{C(\delta)}{n}$ (2.2.8)

dir ve $C(\delta)$ de n e bağlı olmayan bir ifadedir.

Sonuç olarak; (2.2.5) denkleminde sırasıyla (2.2.6),(2.2.7) ve (2.2.8) eşitsizlikleri yerine yazılırsa,

$$|r_n| < \varepsilon + \frac{A(\delta)+C(\delta)}{n}$$

elde ederiz. Yeterince büyük n için

$$|r_n| < 2\varepsilon \Longrightarrow r_n \to 0$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Burada dikkat edilirse; yeterince büyük n değerleri alındığında x den farklı ve x in çok uzağındaki t değerleri için $\phi_n(t,x)$ in değerleri oldukça küçük olduğu görülmektedir. Bu nedenle; temel olarak (2.2.2) integralinin büyüklüğünün x noktasının hemen komşuluğundaki sayıların integral işareti altındaki fonksiyonunun değerleriyle belirlenmekte olduğu anlaşılmaktadır. Ancak, $f(t)$ fonksiyonunun x noktası komşuluğundaki değeri ($t = x$ noktasında fonksiyon sürekli olduğundan) hemen hemen

$f(x)$ e eşittir. Yani, yeterince büyük n için (2.2.2) integralinin değerini hesaplamada $f(t)$ nin $f(x)$ i değiştirmedeki etkisi çok azdır. ■

Sonuç olarak;

$\frac{n}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{1}{1+n^2(t-x)^2}dt$ integral fonksiyonu Teorem **2.2.1**. den dolayı hemen hemen $f(x)$ e eşittir.

Tanım 2.2.2. (Singular İntegral). $a \leq \alpha < x < \beta \leq b$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \phi_n(t,x)dt = 1$ olması koşuluyla, $(a \leq t \leq b,\ a < x < b)$ karesinde tanımlı $\phi_n(t,x)$ $(n = 1, 2...)$ fonksiyonuna çekirdek denir.

$\phi_n(t,x)$ çekirdek olmak üzere,

$$f_n(x) = \int\limits_a^b \phi_n(t,x)f(t)dt$$

biçimindeki integrallere singular integral denir.

2.3 Sınırlı Lineer Operatör

Tanım 2.3.1 (Lineer Operatör). L operatörü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir:

(i) L: $D \to U$ operatörü için D ve U vektör uzaylarıdır.

(ii) $\forall\ x, y \in D$ ve a, b skaler için, $L(x) = L_x$ gösterimi olmak üzere

$$L(x+y) = L(x) + L(y) = L_x + L_y$$

$$L(ax) = aL(x) = aL_x$$

dir.

Yukarıdaki bu iki ifadenin birleşimini kısaca ifade edersek,

$$L(ax+by) = aL(x) + bL(y)$$

dir

Tanım 2.3.2. (Sınırlı Lineer Operatör).

X ve Y normlu uzaylar olsun. D tanım kümesi de X in alt kümesi olmak üzere, $L : D(L) \to Y$ lineer bir operatör olsun.

Eğer keyfi $x \in D(L)$ için $\|L_x\| \leq k\|x\|$ koşulunu sağlayan reel bir k sayısı mevcut ise, L operatörü sınırlıdır denir.

$x = 0$ için $L(x) = 0$ olacağından, $x = 0$ durumu hariç olmak üzere, $\|L_x\| \leq k\|x\|$ ifadesini bölme işlemiyle

$$\tfrac{\|L_x\|}{\|x\|} \leq k$$

elde ederiz. Bu ise, k'nın en az, sol taraftaki ifadenin, $D(L) - \{0\}$ üzerinden alınan supremumu kadar büyük olabileceğini gösterir. En küçük k değeri söz konusu supremum olduğudur. Bu büyüklük $\|L\|$ ile gösterilir;

$$\|L\| = \sup_{x \in D(L)-\{0\}} \tfrac{\|L_x\|}{\|x\|}$$

dir. $\|L\|$ büyüklüğüne, L operatörünün normu denir. $\|L_x\| \leq k\|x\|$ ifadesinde $k = \|L\|$ alarak, $\|L_x\| \leq \|L\| \|x\|$ şeklinde yazabiliriz.

Teorem 2.3.3. (Sınırlılık ve Süreklilik). X ve Y normlu uzaylar ve $D(L) \subset X$ olmak üzere,

$L : D(L) \to Y$ bir lineer operatör olsun. O zaman,

(a) L operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart L nin sürekli olmasıdır.

(b) L bir noktada sürekli ise her noktada süreklidir.

İspat:

(a) ($\Longrightarrow$)L'nin sınırlı olduğunu varsayalım,

$L = 0$ için ifade aşikardır.

$L \neq 0$ alalım.

Bu durumda, $\|L\| \neq 0$ dır. Herhangi bir $x_0 \in D(L)$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

δ sayısını $\delta = \frac{\varepsilon}{\|L\|}$ biçiminde seçebiliriz. $\|x - x_0\| < \delta$ olacak şekilde, her $x \in D(L)$ için

$$\|L_x - L_{x_0}\| = \|L(x - x_0)\| \qquad (L \quad \text{lineer})$$

$$\leq \|L\| \, \|x - x_0\| \qquad (L \ \text{sınırlı})$$

$$< \|L\| \, \delta = \|L\| \, \frac{\varepsilon}{\|L\|} = \varepsilon$$

elde edilir.

Bu da $x_0 \in D(L)$ nin keyfi olması sebebiyle, bu sonuç L operatörünün sürekli olduğunu gösterir.

($\Longleftarrow$) Tersine olarak, L' nin keyfi bir $x_0 \in D(L)$ noktasında sürekli olsun. Buna göre, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde ,

her $x \in D(L)$ için $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan

$$\|L_x - L_{x_0}\| \leq \varepsilon \qquad (2.3.3)$$

eşitsizliği ve bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Öyleyse, $D(L)$'de herhangi bir $y \neq 0$ alalım ve

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y$$

olacak biçimde x değerini seçelim. Bu durumda,

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y$$

olup, normda yerine yazarsak $\|x - x_0\| = \left\| \frac{\delta}{\|y\|} y \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|y\| = \delta$ elde ederiz. L'nin lineer olmasından dolayı

$$\|L_x - L_{x_0}\| = \|L(x - x_0)\| = \left\| L(\frac{\delta}{\|y\|} y) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|L_y\| \qquad (2.3.4)$$

biçiminde yazabiliriz. Sürekliliğin tanımından $\|L_x - L_{x_0}\| \leq \varepsilon$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlikte (2.3.4) eşitliğini yerine yazarsak,

$\|L_x - L_{x_0}\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|L_y\| \leq \varepsilon$

elde ederiz. Buradan da

$\|L_y\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$

bulunur. Bu eşitsizlikte $\frac{\varepsilon}{\delta}$ ifadesini $k = \frac{\varepsilon}{\delta}$ olarak seçersek, $\|L_y\| \leq k\|y\|$ şeklinde yazabiliriz. Bu sonuç, L nin sınırlı olduğunu gösterir.

(b) L nin bir noktada sürekli ise (a) daki ispatın ikinci bölümü gereği L nin sınırlı olması gerektirir. Bu durumda ise (a) ispatının birinci bölümü ise L'nin her noktada sürekliliğini gösterir.

2.4 İntegral Operatörleri

Tanım 2.4.1.
$T : D \rightarrow B$ bir fonksiyon uzayından başka fonksiyon uzayına bir dönüşüm olsun. $H(t, x)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere,

$$T(f; x) = \int_a^b f(t)H(t, x)dt$$

dönüşümüne integral operatörü denir. f ve g , D üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar ise, T integral operatörü lineer operatördür.

Tanım 2.4.2 (İntegral Operatörleri Ailesi).
(a, b) sınırlı yada sınırsız aralık, $\wedge \subset \mathbb{R}$ indis kümesi ve $\lambda_0 \in \wedge$ indis kümesinin bir yığılma noktası olsun. $x \in (a, b)$ için

$$T_\lambda(f; x) = \int_a^b f(t)H_\lambda(x - t)dt$$

integral operatör ailesi ele alındığında; $H_\lambda(x - t)$ ifadesi T_λ operatörünün çekirdeğidir. Özel olarak $H_\lambda(t, x)$ çekirdeği pozitif seçilirse, bu denkleme pozitif çekirdekli integral operatör ailesi denir.

Pozitif çekirdekli integral operatörlerine, fonksiyonlar ve diferansiyel denklemler teorilerinin bir çok problemlerinde karşılaşılmaktadır. Örneğin, Fourier serilerinin bazı toplanabilme yöntemleri ile yakınsaklığının hesaplanması bu tür integrallerin yakınsaklığına indirgenip incelenebilmektedir. Özel olarak, Dirichlet ve ısı denklemi için sınır değer problemlerinin çözümü pozitif çekirdekli integraller şeklinde verilebilmektedir. Bu maksatla, konvolüsyon ve konvolüsyon tipli operatörün tanımı ve özellikleri aşağıdaki verilmiştir.

2.5 Konvolüsyon ve Konvolüsyon Tipi Operatör

Tanım 2.5.1. (Konvolüsyon).
İntegrallenebilir fonksiyon uzayının elemanları olan iki f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu $f * g$ biçiminde gösterilen ve

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \qquad (2.5.1)$$

formülü ile tanımlanan fonksiyona konvolüsyon denir.
Konvolüsyon, integral fonksiyonlar uzayı üzerinde bir işlemdir ve bu işlem f ve g fonksiyonlarına yeni bir fonksiyon karşı getirmektedir. Bu yeni fonksiyon çoğu zaman $h(x)$ olarak gösterilir ve bundan dolayı $h(x) = (f * g)(x)$ işareti kabul edilir.

Lemma 2.5.2. f, g ve s 2π periyotlu integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

(i) $f * (g + s) = (f * g) + (f * s)$

(ii) $k \in C$, $(kf) * g = k(f * g) = f * (kg)$

(iii) $f * g = g * f$

(iv) $(f * g) * s = f * (g * s)$

(v) $f * g$ süreklidir.

(Stein&Shakarchi,2003)

İspat (iii)**:** $x-t=y$ dönüşümü yapılırsa, $t=x-y$ elde edilir ve tekrar y ye yine t denirse

$$(f*g)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(x-t)dt=-\int_{x+\pi}^{x-\pi}f(x-y)g(y)dy=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt$$

elde edilir. Buradan

$$f*g=g*f$$

eşitliği sağlanır.

İlk dört madde konvolüsyonun cebirsel özelliklerini, yani lineer, değişme ve birleşmeyi belirtir. (vi) madde ise $(f*g)$ konvolüsyonunun f veya g den daha düzgün olduğu önemli bir prensibi ortaya koyar. Burada, f ve g sadece Riemann integrallenebilir olmasına karşın $(f*g)$ süreklidir.

Tanım 2.5.3 (**Konvolüsyon Tipli Operatör**). Eğer f ve g fonksiyonlarından birini (örneğin g fonksiyonunu) sabit tutarsak, bu durumda h fonksiyonu sadece f in seçimine bağlı olarak değişir ve $h(x)=(f*g)(x)$ formulü her f fonksiyonunu bir h fonksiyonuna karşı getirir. Dolayısıyla, $f\rightarrow h$ bağıntısı bir operatör olarak tanımlamaktadır. Şimdi,

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

formülündeki g fonksiyonunu H ile gösterirsek;

$$(f*H)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)H(x-t)dt$$

biçiminde yazabiliriz. H değişmez olduğundan ,

$$(f*H)(x)=T(f;x)$$

gösterimi ile tanımlanan bir T operatörü elde edilir. Böylece,

$$T(f;x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)H(x-t)dt$$

eşitliğinde T operatörüne konvolüsyon tipi operatör denir. (Stein&Shakarchi,2003)

H fonksiyonuna ise bu operatörün çekirdeği denir. H çekirdeği bir reel λ parametresine bağlı olduğunda ise $T_\lambda(f;x)$ operatörler ailesi elde edilir ve

$$T_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)H_\lambda(x-t)dt$$

olarak yazılır.

Tanım 2.5.4 (Singular İntegral Operatörü). Λ indeks kümesi ve λ_0 da Λ indeks kümesinin yığılma noktası olsun. Eğer $H(t,\lambda)$ çekirdek fonksiyonu t_0 noktasında $lim_{\lambda\to\lambda_0} H(t_0,\lambda) = \infty$ koşulunu sağlıyorsa, $H(t,\lambda)$ çekirdek fonksiyonuna "Singular Çekirdek" ve

$$T_\lambda(f;x) = \int_D f(t)H_\lambda(x-t)dt, \qquad x \in D \qquad (2.5.2)$$

integral operatörleri ailesine de (x,λ) parametrelerine bağlı konvolüsyon tipli singular integral operatörleri ailesi denir.

Yukarıda tanımı verilen $T_\lambda(f;x)$ singular integral operatörleri ailesinin yapısal özelliklerinin $H_\lambda(x-t)$ çekirdeklerine bağlı olduğu ve bu çekirdeklerin singular integral operatörleriyle yaklaşımında büyük rol oynadığı çok açıktır. Dolayısıyla,integralin içinde yer alabilecek bazı çekirdekleri tanımak daha yararlı olacaktır. Bu nedenle; harmonik fonksiyonlar teorisinden Dirichlet problemini ve buna bağlı olarak elde edilen Poisson ve Abel-Poisson çekirdeklerini ve integrallerini, Fourier serileri teorisinden Fejer çekirdeği ve integralini, ayrıca diferansiyel denklemler teorisinden Gauss-Weierstrass çekirdeği ve integral denklemlerinin elde edilişini ve özellikleri bundan sonraki bölümde incelenmiştir.

3. DIRICHLET PROBLEMİ VE BAZI POZİTİF ÇEKİRDEKLER

3.1 Dirichlet Problemi Tanımı

Dirichlet problemi tanımına geçmeden önce harmonik fonksiyonu tanımlayalım:
$\mathbb{R}^2$ de $u(x,y)$ fonksiyonu için u_{xx} ve u_{yy} türevleri sürekli ve $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplace denklemini sağlayan $u(x,y)$ fonksiyonuna harmonik fonksiyon denir.
Kompleks düzlemde bir bölgede meydana gelen bir fiziksel problem; örneğin kararlı durum sıcaklıkları, elektrostatik, ideal sıvı akışı v.s bazı koşulların sağlanması durumunda bir harmonik fonksiyon ile ifade edilebilmektedir. Verilen bir bölgede harmonik olan ve bölgenin sınırı üzerinde bazı koşulları sağlayan bir $u(x,y)$ fonksiyonunu bulma problemine Dirichlet problemi adı verilir.

3.2 Birim Dairede Dirichlet Problemi ve Poisson Çekirdeği

Dirichlet Problemi:
Birim dairede $\phi = \{(x,y) \in R^2 : \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$ ve
$\partial\phi = \{(x,y) \in R^2 : \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$ sınırı üzerinde $g \in C(\partial\phi)$ olacak şekilde bir g fonksiyonu var olsun. Birim disk içinde ,

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, & (x,y) \in \phi \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial\phi \end{array}$$

olacak şekilde Laplace denklemini sağlayan $u(x,y)$ fonksiyonunu bulunmasına Dirichlet Problemi denir. Şimdi, yukarıdaki koşulları sağlayan Dirichlet probleminin çözümü olan $u(x,y)$ fonksiyonunu bulmaya çalışalım:

Çözüm:
Değişkenlere ayırma yöntemini uyguladığımızda,

$$u(x,y) = C(x).D(y)$$

$$x = rcos\theta,\ y = rsin\theta$$

$$u(x,y) = u(rcos\theta,\ rsin\theta), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \ \ tan\theta = \frac{x}{y}$$

denklemlerini elde ederiz. Problem birim çemberde olduğu için $u(x, y)$ fonksiyonunu kutupsal koordinatlarda ifade edelim;

$\phi = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ bölgesinde $\partial\phi = \{(1, \theta) : -\pi \leq \theta < \pi\}$ sınır değeridir ve

$u(x, y) = C(x).D(y)$ denklemini $u(r, \theta) = A(\theta)B(r)$ denklem biçimine dönüştürebiliriz.

Laplace denklemi ise

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

dir. Laplace denklemini kutupsal biçimde yazarsak,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \qquad (3.2.1)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (3.2.2)$$

olur.

Buradan da $u = u(r, \theta)$ fonksiyonunu Laplace kutupsal denklemi biçiminde yazarsak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \ \ 0 < r < 1, \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

olur. Sınır değerini de

$$u(1, \theta) = g(\theta), \quad -\pi \leq \theta < \pi)$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Çözümü bulmak için aşağıdaki basamakları uygulayalım.

Basamak 1 : Değişkenlere ayırma yöntemi uyguladığımızda,

$$u(r, \theta) = A(\theta).B(r) \qquad (3.2.3)$$

olur. (3.2.3) ifadesinin gerekli türevlerini alıp (3.2.1) denkleminde yerine koyarsak;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$A(\theta).B''\ (r) + \frac{1}{r}.A(\theta).B'(r) + \frac{1}{r^2}B(r).A''\theta) = 0 \qquad (3.2.4)$$

elde ederiz.

(3.2.4) denkleminin her iki tarafını r^2 ile çarparsak,

$$r^2 A(\theta).B''\ (r) + r.A(\theta).B'(r) + B(r).A''(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{r^2.B''(r)+rB'(r))}{B(r)} = -\frac{A''(\theta)}{A(\theta)}$$

olur.

Burada, her iki taraf sabit bir değer λ ‘e eşit olur.

$$\lambda(r,\theta) = \frac{r^2.B^{''}(r)+rB'(r))}{B(r)} = -\frac{A^{''}(\theta)}{A(\theta)}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r}(r,\theta) = 0 \ \text{ ve } \ \frac{\partial\lambda}{\partial\theta}(r,\theta) = 0$$

Bu durumda $\lambda(r,\theta)$ sabit bir fonksiyondur. Buradan da

$$\lambda = \frac{r^2.B^{''}(r)+rB\prime(r))}{B(r)} = -\frac{A^{''}(\theta)}{A(\theta)} \qquad (3.2.5)$$

denklemi her r ve θ için yazılabilir.

(3.2.5) denklemini de adi diferansiyel denklem olarak yazarsak;

$$A''(\theta) + \lambda.A(\theta) = 0 \qquad (3.2.6)$$

ve

$$r^2 B''(r) + r.B^{'}(r) - \lambda.B(r) = 0 \qquad (3.2.7)$$

denklem sistemi elde ederiz.

Basamak 2:

Sınır değer koşulu

$$u(1,\theta) = A(\theta).B(1) = g(\theta)$$

dır.

Burada olay birim disk üzerinde gerçekleştiğinden dolayı , g fonksiyonunun 2π periyotlu bir fonksiyon olduğu açıkca görülmektedir. Aynı şekilde, $A(\theta)$ da 2π periyotlu periyodik bir fonksiyondur. Öyleyse, (3.2.6) ve (3.2.7) denklemlerinin çözümü için $\lambda \in \mathbb{R}$ a bağlı 3 durum vardır:

(i) $\lambda < 0$ durumu .

Keyfi $\mu > 0$ için $\lambda = -\mu^2$ olarak alıp, (3.2.6) denkleminde yerine yazarsak,

$$A''(\theta) - \mu^2.A(\theta) = 0$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü de,

$$A(\theta) = c_1 e^{\mu\theta} + c_2 e^{-\mu\theta}$$

dir. Bu durumda , sadece mümkün olan 2π periyotlu çözüm $c_1 = c_2 = 0$ ile bağlantılı olarak $u = 0$ dir.
Böylece, $\lambda < 0$ durumu yalnızca aşikar çözüm verir.

(ii) $\lambda = 0$ durumu

$$A(\theta) = c_1.\theta + c_2.$$

Fonksiyonun 2π periyotlu olması için $c_1 = 0$ ve $A(\theta) = c_2$ sabit olması gerekir. B için ODE ise

$$r.B'' + B' = 0 \qquad (3.2.8)$$

olur. Şimdi, bu durumda çözüm

$$B(r) = r^s \qquad (3.2.9)$$

biçiminde olsun. (3.2.9) nın diferansiyel denklem çözümünü (3.2.8) de yerine yazarsak,

$$s.(s-1)+s=0 \Rightarrow s^2=0 \text{ ve } s=0 \quad \text{olur.}$$

Bu durumda B için genel çözüm ise

$$B(r)=d_1r^0+d_2r^0lnr=d_1+d_2lnr \qquad (3.2.10)$$

dır.

Burada, $r\to 0$ için $lnr\to\infty$ olur. Bu durumda $B(r)$ sınırsız olur.

Öyleyse,

$$u(r,\theta)=A(\theta).B(r)=c_2(d_1+d_2lnr)$$

denklemi için $r\to 0^+$ için $lnr\to-\infty$ olduğundan $u(r,\theta)$ sınırsız olur. Bu ise fiziksel sezgilerle çelişir. Yani, $\lambda=0$ durumu fiziksel sezgilere ve çözüm kümemizin diskin içinde sürekli ve sınırlı fonksiyon olması hipoteziyle uyuşmayan sonuç ürettiğinden bu çözümün dikkate alınmasına gerek yoktur.

(iii) $\lambda>0$ durumu

$\lambda=\mu^2$, $\mu>0$ olarak alırsak,

$$A''(\theta)+\mu^2A(\theta)=0$$

$$A''+\mu^2A=0$$

denklemleri elde ederiz. Euler diferansiyel denklem çözümünden

$$s^2+\mu^2=0\Rightarrow s=\pm\,\mu i\Rightarrow A(\theta)=c_1e^{i\mu\theta}+c_2e^{-i\mu\theta}$$

ya da $\quad A(\theta)=c_1cos(\mu\theta)+c_2sin(\mu\theta)$

olur.

$A(\theta)$, 2π periyotlu fonksiyon olduğundan $\mu=\sqrt{\lambda}\in Z$ olmalıdır. Bu sebeple, $\lambda=\mu^2=j^2$, $j\in Z/\{0\}$ olarak alınabilir ($j=0$ durumu daha önce incelendi). Bilindiği üzere, periyodik fonksiyonları Fourier serileriyle ifade etmek mümkündür. Bu nedenle, Fourier serisini kullanmak için $A(\theta)$ yı kompleks biçimde incelemek daha uygun olacaktır.

Ancak, önce (3.2.9) da belirtilen $B(r)$ denkleminin çözümünü bulmaya çalışalım:

$B(r)$ için $\lambda = j^2$ olduğunda,

$$r^2 B'' + r.B' - \lambda.B = 0$$

$$\Longrightarrow r^2 B'' + r.B' - j^2 B = 0 \qquad (3.2.11)$$

olur.

Euler diferansiyel denklem çözümünden ($B(r) = r^s$ denilmişti)

$$s.(s-1) + s - j^2 = 0$$

$$\Rightarrow s^2 - j^2 = 0 \Rightarrow s = \pm j$$

elde edilir. (3.2.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$B(r) = d_1 r^j + d_2 r^{-j}, \quad j = 1, 2, \ldots ..$$

olur.

$j \to \infty$ ve $r \to 0$ olduğundan $d_2\ r^{-j} \to \infty$ olur. Bu durumda $B(r)$ sınırsız olur ve u fonksiyonunun sürekliliği ve fiziksel sezgilerle çelişir. Bu nedenle, sadece $B(r) = d_1 r^j$ durumunu çözüm olarak alırız.

Böylece $\lambda > 0$ durumunda, $A(\theta)$ ve $B(r)$ çözümlerini (3.2.3) denkleminde yerine yazarsak,

$$u(r,\theta) = A(\theta).B(r)$$

$$= (c_1 e^{i\mu\theta} + c_2 e^{-i\mu\theta}) d_1 r^j$$

elde edilir.

Sonuç olarak; $\lambda > 0$ durumunda,

$$u(r,\theta) = A(\theta).B(r) = r^{|j|}e^{ij\theta}, \quad j \in Z$$

çözüm olarak yazılabilir.

Sınır değerinde Laplace denkleminin özel çözümü;

$$u(1,\theta) = 1^j.e^{ij\theta} = e^{ij\theta},\ j \in Z$$

olur.

Basamak 3:

Bu basamakta , Dirichlet problemi birim dairede gerçekleştiği için problemin çözümünde Fourier serisini kullanacağız. Şimdi, başlangıçtaki Dirichlet problemini çözmek için sınır değer koşulunun sağlandığı özel çözümlerin lineer kombinasyonu olan bir genel çözüm bulmaya çalışalım;

$$u(r,\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j r^{|j|} e^{ij\theta},\ \ 0 \leq r < 1,\ \ -\pi \leq \theta < \pi \qquad (3.2.12)$$

$$u(1,\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\theta} = g(\theta) \qquad (3.2.13)$$

biçiminde yazabiliriz.

(3.2.13) sınır değer denkleminden Fourier serisi katsayısı ise

$$a_j = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ e^{-ijt}dt \qquad (3.2.14)$$

dir. (3.2.14) de verilen Fourier katsayısını (3.2.13) denkleminde yerine yazarsak,

$$u(r,\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ijt}dt\right)\ r^{|j|}e^{ij\theta}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ijt}dt\right) r^{|j|}e^{ij\theta}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} r^{|j|}e^{ij(\theta-t)}\right)dt \qquad (3.2.15)$$

dır.

Burada, (3.2.15) integralinin içindeki toplam

$$\left|\sum_{j=-n}^{n} r^{|j|} e^{ij(\theta-t)}\right| \leq \sum_{j=-n}^{n} r^{|j|} < \infty, \qquad 0 \leq r < 1$$

sınırlıdır ve kismi toplamlar dizisi de düzgün sınırlıdır.

Böylece, (3.2.15) integralinin limitlerinin sırasını değiştirirsek,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ijt}(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=-n}^{n} r^{|j|}e^{ij\theta})dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=-n}^{n} r^{|j|}e^{ij(\theta-t)})dt,$$

olur.

Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoreminden yararlanarak,

$$u(r,\theta) \ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)(\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|}e^{ij(\theta-t)})dt \qquad (3.2.16)$$

elde edilir.

Burada, (3.2.16) integrali içindeki parentez içindeki seri toplamına

$$P_r(\theta) = P(r,\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|}e^{ij\theta} \qquad (3.2.17)$$

$P_r(\theta) = P(r,\theta)$ diyelim. Bu durumda, Dirichlet probleminin çözümü

$$u(r,\theta) = (g * P_r)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ P_r(\theta-t).dt \quad (3.2.18)$$

dir ve g ve $P_r(\theta)$ ın konvolüsyon integralidir.$\square$

Poisson çekirdeği denklemini elde etmek için (3.2.17) ifadesine geri dönelim:

Önce,

$\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|}e^{ij\theta} =?$ seri toplamının toplamını bulalım. Bunun için $\sum_{j=-n}^{n} r^{|j|}e^{ij\theta}$ kismi toplamlar dizisinin genel terimini ele alalım:

$$\sum_{j=-n}^{n} r^{|j|}e^{ij\theta} = 1 + \sum_{j=-n}^{-1} r^{|j|}e^{ij\theta} + \sum_{j=1}^{n} r^{|j|}e^{ij\theta}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} r^{j}e^{-ij\theta} + \sum_{j=1}^{n} r^{j}e^{ij\theta}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} (re^{-i\theta})^{j} + \sum_{j=1}^{n} (re^{i\theta})^{j}$$

geometrik seri toplamından

$$= 1 + \tfrac{(re^{-i\theta})^{n+1} - re^{-i\theta}}{re^{-i\theta} - 1} + \tfrac{(re^{i\theta})^{n+1} - re^{i\theta}}{re^{i\theta} - 1}$$

elde ederiz. Burada,

$0 \leq r < 1$, $n \to \infty$ için $r^n \to 0$ olduğundan

$$\sum_{j=-n}^{n} r^{|j|}e^{ij\theta} = 1 + \tfrac{-re^{-i\theta}}{re^{-i\theta} - 1} + \tfrac{-re^{i\theta}}{re^{i\theta} - 1}$$

$$= 1 + \tfrac{-re^{-i\theta} - re^{i\theta} + 2r^2}{(re^{-i\theta} - 1)(re^{i\theta} - 1)}$$

$$= 1 + 2.\tfrac{r\cos\theta - r^2}{r^2 + 1 - 2r\cos\theta}$$

$$= \tfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \qquad (3.2.19)$$

olur. (3.2.19) ifadesini (3.2.17) de yerine yazarsak,

$$P_r(\theta) = P(r,\theta) = \tfrac{1}{2\pi}\tfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \qquad (3.2.20)$$

eşitliği olarak yeni bir denklem ederiz ve buna Poisson çekirdek denklemi denir. Böylece, $P_r(\theta)$ Poisson çekirdek olmak üzere ,

$$g(\theta) = u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)P_r(\theta)dt$$

integralini konvolüsyon olarak yazabiliriz.

Sonuç1: $\quad u(r,\theta) = (g * P_r)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)P_r(\theta - t)dt$

Örnek 3.1 Poisson Çekirdeği Grafiği

$P_r(t-x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos(t-x)+r^2}$ denkleminde $t-x=\theta$ yazılırsa,

$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$

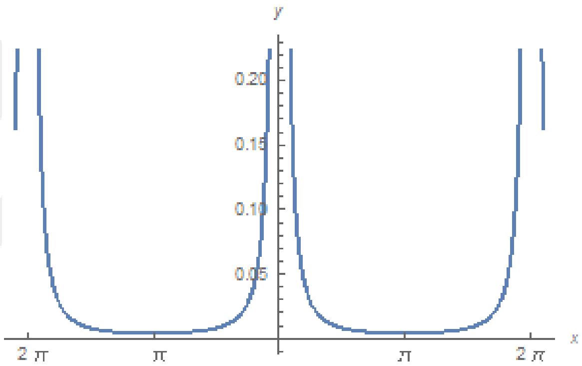
biçimine dönüsür. Tekrar $\theta = x$ yazıldığında ise,

$P_r(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos x+r^2)}$

elde edilir.

Burada $r = 0,95$ alındığında

$P_{0,95}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-(0,95)^2}{(1-2(0,95)\cos x+(0,95)^2)} = \frac{0,0155}{-1,9\cos(x)+1,9025}$



Şekil 3.1 $P_{0,95}(x)$ Poisson çekirdek fonksiyonu grafiği (Geogebra)

Poisson Çekirdeğinin Özellikleri:

1) $x=0$ için $\lim\limits_{r\to1} P_r(0) = \lim\limits_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos x+r^2)} = \lim\limits_{r\to1}\frac{1(1-r)(1+r)}{2\pi(1-r)(1-)} = \infty$

$x \neq 0$ için $\lim\limits_{r\to1} P_r(x) = \lim\limits_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos x+r^2)} = \lim\limits_{r\to1} P_r(0) = \lim\limits_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\frac{1-1^2}{(1-2r\cos x+1^2)} = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{r\to1} P_r(x) = \begin{cases} \infty & x=0 \text{ ise} \\ 0 & x\neq0 \text{ ise} \end{cases}$$

2) $$g(\theta) = u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)P_r(\theta)dt$$

$$\Longrightarrow u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{(1-2r\cos x+r^2)} u(re^{i\theta})d\theta$$

$u \equiv 1$ alınırsa

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} 1.P_r(\theta)dt$$

$$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)dt = 1$$

elde edilir.

3) $P_r(-\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(-\theta)+r^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = P_r(\theta)$ olduğundan $P_r(\theta)$ çift fonksiyondur.

4) Tanım Kümesi $D = (-\pi, \pi)$

İndis Kümesi $\Lambda = (0, 1)$

İndis kümesinin bir limit Noktası $\lambda_0 = 1$

Parametre $\lambda = r$ olmak üzere,

Her belirtilmiş pozitif δ sayısı için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \begin{pmatrix} \sup & P_r(\theta)) \\ |\theta| \geq \delta \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{yani} \lim_{r\to 1} \begin{pmatrix} \sup & P_r(\theta) \\ |\theta| \geq \delta \end{pmatrix} = 0$$

dır.

Sonuç 2: Poisson çekirdeği pozitif ve çift fonksiyon olup grafiği çan eğrisi biçimindedir.

Tanım 3.2.1. (**Poisson İntegrali**). $\Lambda = (0,1)$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda = r$ ve $f \in L_1(-\pi, \pi)$ olmak üzere,

$\theta = t - x$ dönüşümü Sonuç 1'de yazıldığında;

$$P_r\ (f; x) = u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} dt$$

$$P_r\ (f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x) + r^2} dt \qquad (3.2.21)$$

olur. Elde edilen (3.2.21) ifadesine Poisson integrali denir ve $P_r\ (f; x)$ ile gösterilir.

3.3 Üst Yarı Düzlem Dirichlet Problemi ve Abel-Poisson Çekirdeği

Üst yarı düzlemde $\phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ve $\partial\phi = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ sınırı üzerinde $g \in C(\partial\phi)$ olacak şekilde bir g fonksiyonu
ve $u \in C^2(\partial\phi) \cap C(\overline{\phi})$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \qquad && (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0 \\ u(x, y) &= g(x, y), && (x, y) \in \partial\phi, \quad y > 0 \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan $u(x, y)$ fonksiyonu olsun. Burada tanımlı $u(x, y)$ fonksiyonu bulunmasına üst yarı düzlemde Dirichlet problemi adı verilir.

Şimdi, üst yarı düzlemde Dirichlet probleminin çözümü olan $u(x, y)$ fonksiyonunu bulmaya çalışalım:

Çözüm:

Değişkenlere ayırma yöntemini uygulayalım:

$$y > 0 \quad \text{olmak üzere, } u(x, y) = X(x).Y(y), \qquad (3.3.1)$$

biçiminde çözüm harmonik fonksiyon olsun. Laplace denkleminin ise

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(Laplace Denklemi)} \qquad (3.3.2)$$

olduğunu biliyoruz. Bu maksatla, (3.3.1) fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerini alırsak,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Y.X', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = X.Y' \quad , \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Y.X'' \quad , \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X.Y''$$

elde ederiz.

(3.3.2) Laplace denkleminde bu ifadeleri yerine yazıldığında,

$$\Delta u = Y.X'' + X.Y'' = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Burada,

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (3.3.3)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0 \qquad (3.3.4)$$

$\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{R}$ olsun.

$\lambda > 0$ çözümü dikkate alınmalıdır.(Birim dairede Dirichlet probleminin çözümünde olduğu gibi, $\lambda < 0$ durumu yalnızca aşikar çözüm ve $\lambda = 0$ durumu fiziksel olmayan sonuç ürettiğinden bu çözümleri dikkate almaya gerek yoktur.)

Şimdi $\lambda = k^2$ ifadesi (3.3.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$X'' + k^2 X = 0$$

elde edilir.

Euler diferansiyel denklem çözümünden ,

$$s^2 + k^2 = 0 \Rightarrow s = \pm ki$$

$$\Rightarrow X_k(x) = A(k).e^{ikx} + B(k).e^{-ikx}$$

dır.

Burada;

$$x \to \infty \quad \text{için} \quad B(k).e^{-ikx} \to 0$$

olur.

Dolayısıyla,

$$X_k(x) = A(k).e^{ikx}$$

elde edilir.

Yine $\lambda = k^2$ ifadesi (3.3.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$Y'' - \lambda Y = 0 \Longrightarrow Y'' - k^2 Y = 0$$

olur.

Euler çözümünden $s^2 - k^2 = 0 \Rightarrow s = \pm k$ olur. Buna bağlı olarak, $Y(y)$ ifadesinin genel çözümünü

$$Y(y) = C(y).e^{ky} + D(y).e^{-ky}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemde, $y \to \infty$ olduğunda $C(y).e^{ky}$ sınırsız olur. Bu da fiziksel sezgilerle uyuşmaz. Bu nedenle, çözüm sadece $Y_k(y) = D(y).e^{-ky}$ olur. Sınırlı yapmak için de çözüm $Y_k(y) = D(y).e^{-|k|y}$ olarak alınabilir.
Öyleyse; $X(x)$ ve $Y(y)$ elde edilen çözümleri (3.3.1) de yerine yazılırsa,

genel çözüm

$$u(x, y) = X(x).Y(y) = A(k).e^{ikx} D(k).e^{-|k|y} = A(k).e^{ikx-|k|y}$$

elde edilir.
Sınır değeri ise,

$$u(x, 0) = A(k).e^{kx-|k|0} = A(k).e^{ikx} \quad \text{olur.}$$

Üst yarı düzlemdeki Dirichlet problemi, kompakt bölgede gerçekleşmediğinden dolayı diferansiyel denklemin çözümü integral toplamı biçiminde olmalıdır. Bu nedenle genel çözümün

$$u(x.y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx-|k|y} dk \qquad (3.3.5)$$

biçiminde alınması daha uygundur.
Bu durumda, problemin başlangıç (sınır) değerini

$$u(x,0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx}dk=f(x)$$

fonksiyonu biçiminde yazabiliriz.

$A(k)$ ifadesi Fourier dönüşüm formülünden

$$A(k)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ikm}f(m)dm$$

dır.

Elde edilen $A(k)$ ifadesini (3.3.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ikx-|k|y}(\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ikm}f(m)dm)dk$$

elde ederiz.

Bu integrali Fubini teoreminden

$$u(x,y)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(m)(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-m)-|k|y}dk)dm$$

integrali biçiminde yazabiliriz.

İçindeki parentezli ifadeye $I_{(*)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-m)-|k|y}dk$ denirse,

$$u(x,y)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(m)I_{(*)}dm \qquad (3.3.6)$$

olur.

$I_{(*)}$ integralinde $t=x-m$ değişken değiştirmesi yaptıktan sonra,

$$I_{(*)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ikt-|k|y}dk=\int\limits_{0}^{\infty}e^{ikt-|k|y}dk+\int\limits_{-\infty}^{0}e^{ikt-|k|y}dk$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}e^{k(it-y)}dk+\int\limits_{-\infty}^{0}e^{k(it+y)}dk$$

$$=\tfrac{1}{it-y}e^{k(it-y)}|_{k=0}^{k=\infty}+\tfrac{1}{it+y}e^{k(it+y)}\ |_{k=-\infty}^{k=0}$$

$$= \left[\frac{1}{it-y} \left(\lim_{k\to\infty} \; e^{k(it-y)} \right) - e^{0} \right] + \frac{1}{it+y} \left(e^{0} - \lim_{k\to\infty} e^{k(it+y)} \right)$$

$$= \frac{-1}{it-y} + \frac{1}{it+y} = \frac{y+it+y-it}{(y-it)(y+it)}$$

$$= \frac{2y}{y^2+t^2} \qquad (3.3.7)$$

elde edilir.

(3.3.7) eşitliğini (3.3.6) integralinde yerine yazarsak,

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(m) I_{(*)} dm$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(m) \frac{2y}{y^2+t^2} dm$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(m) \frac{2y}{y^2+(x-m)^2} dm$$

elde edilir. Burada, $t = m$ dönüşümü yaparsak,

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{2y}{y^2+(x-t)^2} dt \qquad (3.3.8)$$

olur.

Burada $y > 0$ olmak üzere, integral içindeki ifadeye

$$A_y(x-t) = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2+(x-t)^2} \qquad (3.3.9)$$

$A_y(x-t)$ yeni bir fonksiyon olarak adlandıralım. Bu durumda, üst yarı düzlem Dirichlet probleminin çözümü

$$u(x,y) = (f * A_y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) A_y(x-t) dt$$

dir. Bu çözüm integrali ise f ve A_y fonksiyonlarının konvolüsyonu olur.

(3.3.9) denkleminde y yerine ε yazılırsa,

$$A_\varepsilon(x-t) = \frac{1}{2\pi}\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(x-t)^2}$$

elde edilir.

Tekrar $x-t=x$ dönüşümü yapılırsa,

$$A_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2} \qquad (3.3.10)$$

biçimine dönüşür ve bu denkleme **Abel-Poisson Çekirdeği** denir.

Tanım 3.3.1. (Abel-Poisson İntegrali).

$f \in L_1(-\pi,\pi)$, $\lambda = [0,\infty)$ ve $\lambda_0 = 0$ olmak üzere $\lambda = \varepsilon$ için

$$a_\varepsilon(f\ ;x) = (f * A_\varepsilon)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)A_\varepsilon(x-t)dt = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\varepsilon^2+(x-t)^2}dt \qquad (3.3.11)$$

ifadesine Abel-Poisson integrali adı verilir.

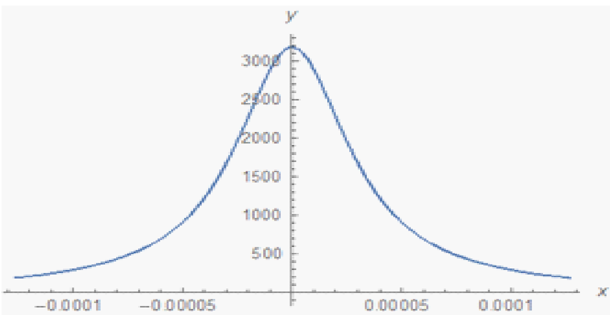
Abel-Poisson çekirdek grafiği örneği aşağıda verilmiştir.

Örnek

$A_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$ fonksiyonunda $\varepsilon = 0,000001$ değeri alındığında

Örnek 3.2 $A_{0,000001}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{0,0000001}{0,000001^2+x^2}$ olur.

Grafiği aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.2 $A_{0,000001}(x)$ Abel-Poisson çekirdek fonksiyonu grafiği (Geogebra)

Abel-Poisson Çekirdeği Özellikleri

1) $\int_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(x)dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2+x^2}dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2(1+(\frac{x}{\varepsilon})^2)}dx$

$t = \frac{x}{\in} \Longrightarrow dt = \frac{1}{\in}dx$ *(değişken değiştirme yapılırsa)*

$$= \frac{1}{\in\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\in}{1+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\arctan t \mid \begin{matrix} \infty \\ -\infty \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1$$

2) $x \neq 0$ iken $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2} = 0$

3)$x = 0$ iken $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2+0^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$

4) Abel-Poisson çekirdek fonksiyonunun grafiği çan eğrisi biçimindedir. Ayrıca, negatif olmayan çift fonksiyondur.

Tanım Kümesi $D = (-\infty, \infty)$

İndis Kümesi $\lambda = [0, \infty)$

limit noktası $\lambda_0 = 0$

Parametre $\lambda = \varepsilon$ olmak üzere, her belirtilmiş pozitif δ sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \begin{pmatrix} Sup\ A_\varepsilon(x) \\ |x| \geq \delta \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} \begin{pmatrix} Sup\ A_\varepsilon(x) \\ |x| \geq \delta \end{pmatrix} = 0$$

dır.

3.4 Fourier Serisinin Toplanabilirliği ve Fejer Çekirdeği

2π periyotlu f fonksiyonunun Fourier serisinin kismi toplamları

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad k = 0, 1, 2 \qquad (3.4.1)$$

biçimindedir.

a_k ve b_k Fourier katsayıları ise

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad k = 0, 1, 2... \quad (3.4.2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt, \quad k = 0, 1, 2... \quad (3.4.3)$$

dir.

(3.4.2) ve (3.4.3) ifadelerini (3.4.1) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] dt \qquad (3.4.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] dt \qquad (3.4.5)$$

elde edilir.

(3.4.5) *de* köşeli parantez içindeki ifadeye Dirichlet Çekirdeği denir ve

$$D_n(x) = \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\right] = \begin{cases} \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)} & , \ x \neq 2j\pi \\ 2n+1 & , \ x = 2j\pi \end{cases} \qquad j \in \mathbb{Z} \qquad (3.4.6)$$

ile gösterilir.

Bu durumda kismi toplamlar integralini

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt \qquad (3.4.7)$$

biçiminde yazabiliriz.

(3.4.4) *de* köşeli parantez içindeki ifade $\alpha = t - x$ olmak üzere açıldğında,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{2\sin(\frac{\alpha}{2})\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha\right]}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})+\sum_{k=1}^{n} 2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos k\alpha}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$\alpha = t - x$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \tfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin(\frac{t-x}{2})}$$

elde edilir. Bu ifade (3.4.4) de yerine yazıldığında kısmi toplamlar integralini (integral operatörünü)

$$S_n(f,x) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt$$

$$= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\tfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin(\frac{t-x}{2})}dt, \quad n = 0,1,2 \qquad (3.4.8)$$

elde ederiz.

$S_n(f;x)$ kısmi toplamlar dizisinin her zaman f fonksiyonuna yakınsaması söz konusu değildir. Bu durumda $S_n(f,x)$ kismi toplamların aritmetik ortalamaları alınarak f fonksiyonuna yakınsayan yeni bir integral operatörü Cesaro tarafından bulunmuştur ve bu integral operatörüne Fejer integrali ve integral içindeki çekirdeğe de Fejer çekirdeği adı verilmiştir. CESARO yöntemi;

$$\sigma_n(f,x) = \tfrac{S_0(f,x)+S_1(f,x)+S_2(f,x)+....+S_{n-1}(f,x)}{n}$$

$$= \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x)$$

$$= \tfrac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{\sin(\frac{t}{2})\sin(k+\frac{1}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})}\right]dt$$

$$= \tfrac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{\frac{1}{2}[\cos kt-\cos(k+1)t]}{2\sin^2(\frac{t}{2})}\right]dt$$

$$= \tfrac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\tfrac{\sin(\frac{n(t-x)}{2})}{\sin(\frac{(t-x)}{2})}\right]^2 dt$$

Burada, $\left[\tfrac{\sin(\frac{n(t-x)}{2})}{\sin(\frac{(t-x)}{2})}\right]^2 = F_n(t)$ denirse,

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{2n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)F_n(t-x)dt \qquad (3.4.9)$$

elde edilir.

Burada, $\sigma_n(f;x) = (f * F_n)(x)$ ifadesi f ve F_n fonksiyonlarının konvolüsyonu biçimindedir.

$\sigma_n(f,x)$ ifadesine $Fejer$ integrali ve $F_n(t)$ ye de $Fejer$ çekirdeği denir.

Ayrıca, $f(x) \equiv 1$ olarak alındığında; Fourier katsayıları sırasıyla,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1.dt = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cos(kt)dt = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\sin(kt)dt = 0$$

dır.

(3.4.1) deki $S_n(f,x)$ kısmi toplamlar dizisinde her n için $S_n(1,x) = 1$ elde edilir. Buna göre,

$$\sigma_n(1,x) = \frac{S_0(1,x)+S_1(1,x)+S_2(1,x)+....+S_{n-1}(1,x)}{n} = \frac{1+1+1+......+1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

dir.

Burada (3.4.9) denkleminde $f(t) = 1$ alınırsa,

$$\sigma_n(1;x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1.F_n(t-x)dt = 1 \qquad .$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t-x)dt = 1$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} F_n(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1, \ \forall n = 1,2,... \quad (3.4.10)$$

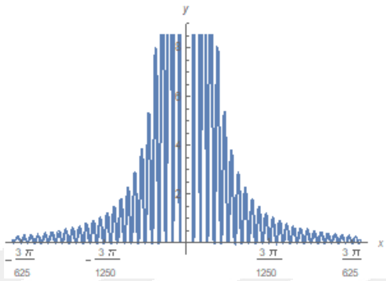
elde edilir.

Fejer Çekirdeği Grafiği Örneği

$F_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$ Fejer Çekirdeği Fonksiyeli olmak üzere,

$n = 100000$ olarak alındığında

$F_{10000}(x) = \frac{1}{2.10000.\pi}\left(\frac{\sin\frac{10000x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.3 $F_{10000}(x)$ Fejer Çekirdeği fonksiyonu grafiği (Geogebra)

Fejer Çekirdeği Özellikleri:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1, \;\; \forall n = 1, 2, ..$

2) $x = 0$ iken $\lim_{n\to\infty} F_n(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{nx}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\pi} = \infty$$

Yani $\;x = 0\;$ için $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \infty$

3) $x \neq 0$ iken $\sin^2\frac{nx}{2} \leq 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Yani $\;x \neq 0\;$ için $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$

4) $F_n(-x) = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin\frac{n(-x)}{2}}{\sin(\frac{-x}{2})}\right)^2 = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = F_n(x)$ olduğundan Fejer çekirdeği çift fonksiyondur.

5) Tanım Kümesi $D = (-\pi, \pi)$

İndis Kümesi $\Lambda = \mathbb{N}$

limit noktası $\lambda_0 = \infty$

Parametre $\lambda = n$ olmak üzere, her belirtilmiş pozitif δ sayısı için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \begin{pmatrix} SupF_n(x)) \\ |x| \geq \delta \end{pmatrix} = \lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} SupF_n(x) \\ |x| \geq \delta \end{pmatrix} = 0$$

dır.

Tanım 3.4.1 (Fejer İntegrali):
$f \in L_1(-\pi, \pi)$,indis kümesi $\Lambda = \mathbb{N}$, $\lambda_0 = \infty$ ve parametre $\lambda = n$ olmak üzere,

$$\sigma_n(f; x) = \tfrac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(t-x) dt = \tfrac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{\sin(\frac{n(t-x)}{2})}{\sin(\frac{(t-x)}{2})} \right]^2 dt \qquad (3.4.11\ )$$

ifadesine Fejer integrali denir.

3.5 Isı Denklemi ve Gauss-Weierstrass Çekirdeği

Isının bir cisim üzerinde belli bir konumdan ne kadar zamanda ve nasıl dağılacağını tanımlayan bir parçalı diferansiyel denkleme ısı denklemi denir. (x, y, z) kartezyen koordinat sisteminde konumu ve t zamanı göstermek üzere; ısı denkleminin genel ifadesi

$$\tfrac{\partial u}{\partial t} - k \left(\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

dir. Burada $k \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ve $u = u(x, y, z, t)$ dir.
Isı denklemi bir boyutta ise

$$\tfrac{du}{dt} - k \tfrac{d^2 u}{dx^2} = 0 \qquad (3.5.1)$$

dir.

Burada ısı x boyunca t ye bağlı olarak değişir. Bu değişimi

$$u(x,t) = A(x).B(t) \qquad (3.5.2)$$

denklemi biçiminde yazabiliriz.

$u(x,0) = f(x)$ başlangıç koşul fonksiyonu olmak üzere, diferansiyel denklemin çözümünü değişkenlere ayırma yöntemi kullanarak bulabiliriz.

$\frac{du}{dt} - \lambda \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \implies A(x).B'(t) - B(t).A''(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = k$$

$$\Rightarrow A''(x) = kA(x) \quad \text{ve} \quad B'(t) = kB(t)$$

Başlangıç değeri koşulundan

$$u(x,0) = A(x)B(0) = f(x)$$

biçiminde gösterebiliriz. Burada;

eğer $k > 0$ ise diferansiyel denklemin aşikar çözümü, $k = 0$ durumunda ise sabit bir çözümü vardır.

eğer $k < 0$ durumunda ise $k = -\mu^2$ olmak üzere; $A(x) = c_1 e^{i\mu x}$ ve $B(t) = c_2 e^{-\mu^2 t}$ çözümleri olur.
(3.5.2) de bu ifadeler yerine yazıldığında;

$$u(x,t) = c_1 e^{i\mu x} c_2 e^{-\mu^2 t} = G(k) e^{i\mu x - \mu^2 t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} G(k) e^{ikx - k^2 t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{ikx - k^2 t} dk$$

ve $t = 0$ için

$$u(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{ikx} dk$$

elde edilir.

Fouirer dönüşümünden

$$G(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi) e^{-ik\phi} d\phi$$

olur ve

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi) e^{-ik\phi} d\phi \right) e^{ikx} dk$$

elde edilir. Uygun düzenlemeler yapıldığında;

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi) e^{-\frac{(\phi - x)^2}{4t}} d\phi$$

elde edilir.

Bu integralde $\frac{1}{2\sqrt{t}} = \lambda$ denirse $u(x,t) = u_\lambda(x)$ olur ve

$$u_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi) e^{-\lambda^2 (\phi - x)^2} d\phi, \quad \lambda > 0 \qquad (3.5.3)$$

biçimine dönüşür. (3.5.3) integrali içindeki

$$W_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 x^2} \qquad (3.5.4)$$

ifadesini $W_\lambda(x)$ ile gösterelim. $W_\lambda(x)$ fonksiyonuna Gauss-Weierstrass çekirdeği denir.

Gauss-Weirstrauss Çekirdeği Grafiği Örneği

$W_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 x^2}$ çekirdeğinde

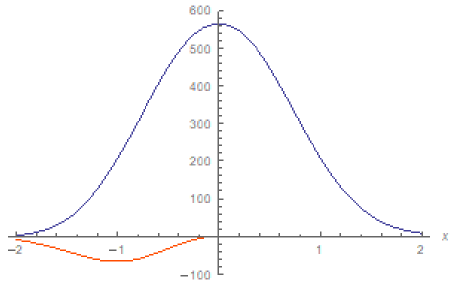
$\lambda = 1000$ alındığında

$$W_{1000}(x) = \frac{1000}{\sqrt{\pi}} e^{-1000^2 x^2}$$

fonksiyoneli elde edilir. $W_{1000}(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdadır

Gauss-Weierstrass Çekirdeğinin Özellikleri

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} W_\lambda(t) dt = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2} dt$



Şekil 3.4 $W_{1000}(x)$ Gauss-Weierstrass çekirdek fonksiyon grafiği (Geogebra)

integralinde $\lambda t = x \Longrightarrow \lambda dt = dx$ dönüşümünü yaparsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\lambda(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

elde ederiz. Burada

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{eşitliğini kullanırsak,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\lambda(t)dt == \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1$$

olur.

2)$t \neq 0$ için $\lim\limits_{\lambda\to\infty} W_\lambda(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda^2 t^2} = 0$

3)$t = 0$ için $\lim\limits_{\lambda\to\infty} W_\lambda(0) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda^2 0^2} = \infty$

4)$W_\lambda(-x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\ \lambda^2(-x)^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\ \lambda^2 x^2} = W_\lambda(x)$

$\Longrightarrow W_\lambda(x)$ çift fonksiyondur.

Ayrıca grafiği çan eğrisi biçimindedir.

5) Tanım Kümesi $D = (-\infty, \infty)$

İndis Kümesi $\Lambda = [0, \infty)$

limit noktası $\lambda_0 = \infty$

Parameter $\lambda = \lambda$

Her belirtilmiş pozitif δ sayısı için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \begin{pmatrix} Sup\ W_\lambda(x)) \\ |x| \geq \delta \end{pmatrix} = \lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} Sup\ W_\lambda(x) \\ |x| \geq \delta \end{pmatrix} = 0$$

dır.

Tanım 3.5.1. (Gauss-Weierstrass İntegrali).

$f \in L_1(-\infty, \infty)$,indis kümesi $\Lambda = [0, \infty)$,limit noktası $\lambda_0 = \infty$ ve parametre $\lambda = \lambda$ olmak üzere,

$$u_\lambda(f;x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\lambda^2\ (t-x)^2} dt, \qquad (3.5.5)$$

ifadesine Gauss-Weierstrass integrali denir.

4. KONVOLÜSYON TİPLİ SİNGULAR İNTEGRAL OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM

4.1 Çekirdek ve Yaklaşım Birimi

Singular integralleri üreten çekirdeğin tanımını verelim.

Tanım 4.1.1. (Periyodik Çekirdek). Λ kümesi $0 \leq a < b \leq +\infty$ olmak üzere (a, b) aralığı ya da $\mathbb{N}$ olsun. ρ ise Λ kümesi üzerinde değişen bir parametre ve ρ_0 da a, b veya $+\infty$ noktalarından biri (yığılma noktası) olsun. Her $\rho \in \Lambda$ için $\chi_\rho \in L^1_{2\pi}$ ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u)du = 2\pi \qquad (\rho \in \Lambda) \qquad (4.1.1)$$

koşulunu gerçekleyen $\{\chi_\rho(x)\}$ fonksiyonlar kümesine (periyodik) çekirdek denir.

Her $\rho \in \Lambda$ için $\{\chi_\rho(x)\}$ fonksiyonlar kümesine :

eğer $\chi_\rho(x)$ reel fonksiyon ise reel çekirdek,

eğer $\chi_\rho(x) \in L^\infty_{2\pi}$ ise sınırlı,

eğer $\chi_\rho(x) \in C_{2\pi}$ ise sürekli,

ve

eğer $\chi_\rho(x)$ mutlak sürekli ise mutlak süreklidir denir. (Butzer&Nessel,1971)

Yine $\{\chi_\rho(x)\}$ için $\{\chi_\rho(x)\}$ reel çekirdekler kümesi hemen her x için $\chi_\rho(-x) = \chi_\rho(x)$ sağlanıyorsa ise çift ve hemen her x için $\chi_\rho(x) \geq 0$ ise pozitif olur. Genellikle (4.1.1) yerine,

$$\lim_{\rho \to \rho_0} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u)du = 2\pi \qquad (4.1.2)$$

kabul edilir.

Tanım 4.1.2. (Periyodik Singular İntegral). $f \in L_1(-\pi, \pi)$ ve $\{\chi_\rho(u)\}$ periyodik çekirdek olmak üzere,

$$A_\rho(f;x) = (f * \chi_\rho)(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\chi_\rho(u)du \qquad (4.1.3)$$

ifadesine (periyodik) **singular integral** (ya da **konvolüsyon integrali**) denir. Eğer çekirdek pozitif ve sürekli ise singular integral pozitif ve süreklidir.

Önerme 4.1.3. $f \in f \in L_1(-\pi,\pi)$ ve $\{\chi_\rho(u)\}$ periyodik çekirdek olmak üzere, $A_\rho(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\chi_\rho(u)du$ operatörü $L_1(-\pi,\pi)$ uzayından $L_1(-\pi,\pi)$ uzayına dönüşüm yapan sürekli operatördür.

İspat: A_ρ lineer olduğundan onun L_1 den L_1 e Teorem 2.3.3 den dolayı sınırlı operatör olduğunu göstermek yeterlidir.

Operatör normuunun tanımına göre

$$\left\|A_\rho\right\|_{L_1(-\pi,\pi)\to L_1(-\pi,\pi)} = \sup_{\substack{f\neq 0 \\ f\in L_1}} \frac{\left\|A_\rho(f;x)\right\|_1}{\|f\|_1} \qquad (4.1.4)$$

dir. Bizim bu ifadenin sınırlı olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Şimdi , $f \in L_1(-\pi,\pi)$ fonksiyonu için

$$\left\|A_\rho(f;x)\right\|_{X_{2\pi}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\chi_\rho(u)du \right| dx$$

$$\leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f(x-u)\chi_\rho(u)\right| du \right) dx$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\chi_\rho(u) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f(x-u)\right| dx \right) du$$

dir. İkinci integralde $x-u=t$ dersek, (4.1.1) koşulundan dolayı

$$= (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt)(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\chi_\rho(u)\right| du) = \|f\|_1$$

sonuç olarak $\left\|A_\rho(f;x)\right\|_1 \leq \|f\|_1$

elde ederiz ve

$$\frac{\left\|A_\rho(f;x)\right\|_1}{\|f\|_1} \leq 1$$

olur. Bu da operatörün normu (4.1.4) den

$$\left\|A_\rho\right\|_{L_1(-\pi,\pi)\to L_1(-\pi,\pi)} = \sup_{\substack{f\neq 0\\ f\in L_1}} \frac{\left\|A_\rho(f;x)\right\|_1}{\|f\|_1} \leq 1$$

olduğunu göstermektedir.

Sonuç olarak, $A_\rho(f;x)$ operatörü sınırlıdır. Operatörün sınırlılığı ve sürekliliği teoremi 2.3.3 den dolayı sınırlı olan lineer operatör süreklidir. Dolayısıyla, $A_\rho(f;x)$ oparatörü sürekli bir integral operatörüdür.

Tanım 4.1.4. (**Periyodik Durumlarda Yaklaşım Birimi**).
$[-\pi,\pi]$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan $\{\chi_\rho(u)\}$ singular çekirdek kümesine Yaklaşım Birimi ailesi denir.

(i) $\chi_\rho(u)$ negatif olmayan çift fonksiyondur ve her $\rho\geq 1$ için,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u)du = 1 \qquad (4.1.5)$$

(ii) $M>0$ sayısı var ise ve her $\rho \geq 1$ için ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\chi_\rho(u)\right| du \leq M \qquad (4.1.6)$$

(iii) Her $\delta \geq 0$ için, $\rho\to\infty$ iken

$$\int_{\delta\leq|u|\leq\pi} \left|\chi_\rho(u)\right| du \to 0,$$

ya da (iii) ün yerine daha yaygın olan

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\sup_{\delta\leq|u|\leq\pi}\left|\chi_\rho(u)\right|\right] = 0 \qquad (4.1.7)$$

ifadesi kullanılır.

Eğer χ_ρ fonksiyonları pozitif oluyorsa, genellikle çan şeklinde grafiği vardır. Öyleki, $y=\chi_\rho(y)$ eğrisi altında kalan alanın integrali 2π eşittir ve artan ρ değerleri artıkça grafik $y=0$ civarında daha daralır ve değeri daha büyük olur. Böylece $y=0$ çevresinde eğri altındaki grafiğinin alanı 2π olarak gerçekleşir.

Sonuç1: $\Lambda=\mathbb{N}$, $\rho_0=\infty$, $\rho=n$ olmak üzere $\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin(\frac{n(t-x)}{2})}{\sin(\frac{(t-x)}{2})}\right]^2 dt$

Fejer integrali periyodik çekirdekli integraldir. İntegralin içindeki $\mathbf{F}_n(x)$ Fejer çekirdeği Tanım 4.1.4 koşullarını sağladığından dolayı periyodik yaklaşım birimi olur.

Sonuç 2: $\Lambda=(0,1)$, $\rho_0=1$, $\rho=r$ olmak üzere, $P_r\,(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt$

Poisson integrali periyodik çekirdekli integraldir. İntegralin içindeki Poisson çekirdeği de Tanım 4.1.4 koşullarını sağladığından dolayı periyodik yaklaşım birimi olur.

Teorem 4.1.5. $D_n(u)$, (3.4.6) de tanımlanan Dirichlet çekirdeği olmak üzere,

$L_n=\|D_n\|_1$ Fourier serisinin Lebesgue sabitleri ise

$n\to\infty$ iken $L_n=\frac{4}{\pi^2}\log n+O(1)$

dir.

İspat: Açıkça,

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{\sin((2n+1)u/2)}{\sin(u/2)}\right|du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|\sin nu\cot\tfrac{u}{2}+\cos nu\right|du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\sin nu|\cot\tfrac{u}{2}du+O(1)$$

$|u|\leq\frac{\pi}{2}$ için $(\frac{1}{u})-\cot u$ fonksiyonu sınırlı olduğundan ,

$$L_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{|\sin nu|}{u}du+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\sin nu|\left\{\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{u}{2}-\tfrac{1}{u}\right\}du+O(1)$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}\frac{|\sin nu|}{u}du+O(1)$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin nu}{(k\pi/n)+\mathrm{u}}du+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin nu}{\mathrm{u}}du+O(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nu \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k\pi/n)+\mathrm{u}} \right\} du + O(1)$$

olur.

Ancak harmonik toplam eşitsizliğinin ışığında,

$$\frac{n}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}\right\} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k\pi/n)+\mathrm{u}} \leq \frac{n}{\pi}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n-1}\right\}$$

$0 \leq u \leq \frac{\pi}{n}$ için eşitsizliği sağlanır. Buradan da

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k\pi/n)+\mathrm{u}} = \frac{n}{\pi}\left\{\log n + O(1)\right\}$$

istenen ispat tamamlanır.

Sonuç 3: Dirichlet çekirdeği $D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$ nin mutlak değerinin integrali $N \to \infty$ için $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx \geq c \log N$ *dir.*Teorem 4.1.5 den sınırlandırılmadığını biliyoruz. Bu nedenle, Dirichlet çekirdeği, Tanım 4.1.4 ün ikinci kısmının koşulunu sağlayamadığından yaklaşım birimi olamaz.

Teorem 4.1.6. $A_\rho(f;x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\chi_\rho(u)du$ integralinde $\chi_\rho(u)$ çekirdeği periyodik yaklaşım birimi ve $f \in L_1(-\pi,\pi)$ olsun. Eğer $x = x_0$, f 'nin süreklilik noktası ise bu noktada

$$\lim_{\rho\to\rho_0} A_\rho(f;x_0) = f(x_0) \qquad (4.1.8)$$

dir.

İspat: x_0, f fonksiyonunun bir süreklilik noktası olduğunda, keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde , öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $|u| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|f(x_0+u) - f(x_0)| < \varepsilon$ olur. Öyleyse, bu koşulları sağlayan bir δ sayısı seçelim.

$$\begin{aligned} A_\rho(f;x_0) - f(x) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0-u)\chi_\rho(u)du - f(x_0) \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0-u)\chi_\rho(u)du - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0)\chi_\rho(u)du \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - u) - f(x_0)]\, \chi_\rho(u)du$$

u yerine $-u$ yazılırsa ,

$$A_\rho(f; x_0) - f(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 + u) - f(x_0)]\, \chi_\rho(u)du \quad \text{olur.}$$

Eşitliğin her iki tarafının mutlak değerini alalım. Sonra genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğini kullanalım.

$$\left|A_\rho(f; x_0) - f(x_0)\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 + u) - f(x_0)]\, \chi_\rho(u)du\right|$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0 + u) - f(x_0)|\, \chi_\rho(u)du \qquad (4.1.9)$$

$$\leq \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x_0 + u) - f(x_0)|\, \chi_\rho(u)du + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0 + u) - f(x_0)|\, \chi_\rho(u)du$$

$$+ \int_{\delta}^{\pi} |f(x_0 + u) - f(x_0)|\, \chi_\rho(u)du$$

$$= i_\rho^{'} + i_\rho^{''} + i_\rho^{'''} \qquad (4.1.10)$$

eşitsizliğini yazalım.

$$i_\rho^{''} < \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \chi_\rho(u)du < \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u)du = \varepsilon$$

dır. Diğer eşitsizlikler için $\chi_\rho(u)$ çift olduğundan

$$i_\rho^{'} + i_\rho^{'''} = \int_{\delta}^{\pi} (|f(x_0 + u) - f(x_0)| + |f(x_0 - u) - f(x_0)|)\chi_\rho(u)du$$

$$\leq (2\,|f(x_0)| + 2\,\|f\|_1) \left(\sup_{|u|\geq\delta} \chi_\rho(u)\right) (\pi - \delta)$$

dır ve periyodik yaklaşım birimi özelliğine göre $\lim_{\rho\to\infty} \left[\sup_{\delta\leq|u|\leq\pi} \left|\chi_\rho(u)\right|\right] = 0$ olduğundan sağ tarafın limiti sıfırdır. Böylece,ispat tamamlanır.

Önerme 4.1.6. $f \in L_{2\pi}^{\infty}$ ve (4.1.3) integralinin çekirdeği $\chi_\rho(u)$ yaklaşım birimi ise

$$\text{her } \; s \in L_{2\pi}^{1} \text{ için } \; \lim_{\rho \to \rho_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left[A_\rho(f;x) - f(x) \right] s(x)dx = 0 \tag{4.1.11}$$

dir.

İspat: Yine (4.1.9) gerçeklenir ve her $s \in L_{2\pi}^{1}$ ve $0 < \delta < \pi$ için Fubini teoremi yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} \left[A_\rho(f;x) - f(x) \right] s(x)dx \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u)du \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x-u) - f(x) \right] s(x)dx \right\} \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|u| \leq \delta} + \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \right) \left| \chi_\rho(u) \right| du \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[s(x+u) - s(x) \right] dx \right| \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

dır.

Ancak, $s \in L_{2\pi}^{1}$ sürekli olmasından dolayı, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki tüm $|u| \leq \delta$ için

$$\left\| s(\circ + u) - s(\circ) \right\|_1 \leq \varepsilon$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq N \sup_{|u| \leq \delta} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[s(x+u) - s(x) \right] dx \right| \\
&\leq N \left\| f \right\|_\infty 2\pi\varepsilon
\end{aligned}$$

ve

$$I_2 \leq 2 \left\| f \right\|_\infty \left\| s \right\|_1 \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \left| \chi_\rho(u) \right| du$$

elde edilir. (4.1.7) nin ışığında (4.1.11) in ispatı tamamlanır.

Tanım 4.1.7. (Reel Eksende Yaklaşım Birimi).

Λ sayılar kümesi, ρ_0 bu kümenin yığılma noktası olsun. $\rho \in \Lambda$ parametresine bağlı ve tüm reel eksende tanımlı $\left\{\chi_\rho(t)\right\}$ singular çekirdek fonksiyonuna, aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde reel eksende **Yaklaşım Birimi** denir.

(i) $\chi_\rho(t)$ negatif olmayan çift fonksiyondur.

(ii) Her $\rho \in \Lambda$ için ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\rho(t)dt = 1$$

(iii) Her belirtilen $\delta \geq 0$ için, $\rho \to \rho_0$ iken

$$\lim_{\rho \to \rho_0} \left[\underset{\delta \leq |t|}{Sup} \chi_\rho(t) \right] = 0 \qquad (4.1.12)$$

ve

$$\lim_{\rho \to \rho_0} \int_{\delta}^{\infty} \chi_\rho(t)dt = 0 \qquad (4.1.13)$$

Sonuç 3: Gauss-Weierstrass $W_\lambda(x)$ çekirdeği Tanım 4.1.7 nin koşullarını sağladığından dolayı Reel Eksende Yaklaşım Birimi olur.

Sonuç 4: Abel-Poisson $\mathrm{A}_\in(x)$ çekirdeği de Tanım 4.1.7 nin koşullarını sağladığından dolayı Reel eksende Yaklaşım Birimi olur.

4.2 L_1 Uzayında Süreklilik Modülü

$L_1[a, b]$ uzayında verilen bir fonksiyonun yapısal özelliklerini incelenemenin bir yolu da süreklilik modülü ile yapılabilmektedir. Bununla ilgili tanım ve teoremler aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.2.1. $f \in L_1$ olmak üzere,

$$\omega_{L_1}(f;\delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx$$

$$= \sup_{|t| \leq \delta} \|f(x+t) - f(x)\|_{L_1}\ , \quad \delta > 0 \qquad (4.2.1)$$

integraline f fonksiyonunun L_1-süreklilik modülü denir.

Lemma 4.2.2. $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olmak üzere,.

$|t-x| < \delta_2$ aralık bölgesi $|t-x| < \delta_1$ aralık bölgesinden daha büyüktür.

Burada,

$$\omega_{L_1}(f;\delta_1) = \sup_{|t|\leq\delta_1} \|f(\circ+t) - f(\circ)\|_{L_1} \leq \sup_{|t|\leq\delta_2} \|f(\circ+t) - f(\circ)\|_{L_1} = \omega_{L_1}(f;\delta_2)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\omega_{L_1}(f;\delta)$ monotonu artandır.

Lemma 4.2.3.

$$\omega_{L_1}(f,\delta) = \sup_{|t|\leq\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx \geq 0$$

Süreklilik modülünün tanımı ışığında , süreklilik modülü değerinin negatif olmadığı açıkça görülmektedir.

Süreklilik modülünün özellikleri aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 4.2.3. $f \in L_1$ ise

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_{L_1}(f,\delta) = 0 \qquad (4.2.2)$$

dir. (Hacıyev,2003)

Teorem 4.2.4. m bir doğal sayı olmak üzere,

$$\omega_{L_1}(f;m\delta) \leq m\omega_{L_1}(f;\delta) \qquad (4.2.3)$$

dir.(Butzer&Nessel,1971)

$\lambda > 0$ keyfi sayı olduğunda,

$$\omega_{L_1}(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega_{L_1}(f;\delta) \qquad (4.2.4)$$

dir. (Korovkin,1960)

Lemma 4.2.5. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\delta_1 < \delta_2$ ise,

$$\frac{\omega_{L_1}(f\ ;\ \delta_2)}{\delta_2} \leq \frac{\omega_{L_1}(f\ ;\ \delta_1)}{\delta_1}$$

dir.

İspat:

$$\omega_{L_1}(f;\delta_2) = \omega_{L_1}(f;\tfrac{\delta_1}{\delta_1}\delta_2) = \omega_{L_1}(f;\delta_1\tfrac{\delta_2}{\delta_1}) \leq (1+\tfrac{\delta_2}{\delta_1})\omega_{L_1}(f;\delta_1)$$

$$\leq 2\tfrac{\delta_2}{\delta_1}\omega_{L_1}(f;\delta_1)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\omega_{L_1}(f\ ;\ \delta_2)}{\delta_2} \leq \frac{\omega_{L_1}(f\ ;\ \delta_1)}{\delta_1}$$

olur ve ispat tamamlanır.

4.3 L_p Uzayında Süreklilik Modülü

L_1 uzayında olduğu gibi L_p uzayında da süreklilik modülü tanımlanabilir. $f \in L_p$ ise onun L_p süreklilik modülü $\omega_{L_p}(f\ ;\ \delta)$ sembolü ile gösterilir ve her pozitif δ için

$$\omega_{L_p}(f\ ;\delta) = \sup_{|t|\leq\delta}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)-f(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.3.1)$$

olarak tanımlanır. Bu ifadeyi

$$\omega_{L_p}(f\ ;\ \delta) = \sup_{|t|\leq\delta} \|f(\circ+t)-f(\circ)\|_p \qquad (4.3.2)$$

olarak da gösterebiliriz. Burada L_p normu $\circ$ ile gösterilen değişkene alınmaktadır. Bu süreklilik modülünün de negatif olmayan, δ ya göre monoton artan bir fonksiyon olduğu çok açık biçimde görülmektedir. Bu süreklilik modülü ile ilgili teoremler aşağıdadır:

Teorem 4.3.1. $f \in L_P$ ise

$$\lim_{\delta\to 0}\omega_{L_p}(f;\delta) = 0 \qquad (4.3.3)$$

dir. (Hacıyev,2003)

Teorem 4.3.2. m doğal sayı olmak üzere,

$$\omega_{L_p}(f;m\delta) \leq m\omega_{L_p}(f;\delta) \qquad (4.3.4)$$

dir. (Hacıyev,2003)

Teorem 4.3.3. Keyfi pozitif λ için

$$\omega_{L_p}(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega_{L_p}(f;\delta) \qquad (4.3.5)$$

dir. (Hacıyev,2003)

4.4 L_1 normunda yakınsaklık

Teorem 4.4.1. $A_\lambda(f;x)$ singular integral operatör ailesi $L_1(-\infty,\infty)$ uzayında dönüşüm yapan integral operatörleri ve $K_\lambda(t)$ çekirdeği de Tanım 4.1.7. de tanımlanan de reel eksende yaklaşım birimi olsun. Eğer

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\lambda(x-t)dt, \quad -\infty < x < \infty \qquad (4.4.1)$$

ise

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 = 0$$

dır.

İspat: Açıkça görülüyor ki,

$$|A_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, K_\lambda(t)dt$$

dir.

$K_\lambda(t)$ çift fonksiyon olduğundan

$$|A_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \int_{0}^{\infty} (|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|)K_\lambda(t)dt$$

dir. Eşitsizliğin her iki tarafında L_1 normuna geçersek,

$$\|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{0}^{\infty} (|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|)K_\lambda(t)dt)dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty (|f(x+t) - f(x)|\,dx + \int_{-\infty}^\infty (|f(x-t) - f(x)|\,dx \right) K_\lambda(t)dt$$

ve keyfi $\delta > 0$ için ;

$$\|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 \le \int_0^\delta \left(\int_{-\infty}^\infty (|f(x+t) - f(x)|\,dx + \int_{-\infty}^\infty (|f(x-t) - f(x)|\,dx \right) K_\lambda(t)dt$$

$$+ \int_\delta^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty (|f(x+t) - f(x)|\,dx + \int_{-\infty}^\infty (|f(x-t) - f(x)|\,dx \right) K_\lambda(t)dt$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi açık bir şekilde;

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x \pm t) - f(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^\infty |f(x \pm t)|\,dx + \int_{-\infty}^\infty |f(x)|\,dx \le 2\,\|f\|_1$$

ve

$$\sup_{|t|\le\delta} \int_{-\infty}^\infty |f(x \pm t) - f(x)|\,dx = \omega_{L_1}(f,\delta)$$

bu ifadeleri dikkate aldığımızda,

$$\|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 \le 2\omega_{L_1}(f,\delta) \int_0^\delta K_\lambda(t)dt + 4\,\|f\|_1 \int_\delta^\infty K_\lambda(t)dt$$

$$\le 2\omega_{L_1}(f,\delta) + 4\,\|f\|_1 \int_\delta^\infty K_\lambda(t)dt$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere baktığımızda;

$K_\lambda(t)$ çekirdeğinin özelliğinden keyfi $\delta > 0$ için,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_\delta^\infty K_\lambda(t)dt = 0$$

dir.

Süreklilik modülü özelliğinden de $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{L_1}(f;\delta) = 0.$ dir.

Bu durumda eşitsizlikte önce $\lambda \to \lambda_0$ iken limit alıp daha sonra $\delta \to 0$ aldığımızda,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.2: $f \in L_1$ ise (3.5.5) formülü ile tanımlanmış Gauss-Weirstrass integrali için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|w_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 = 0$$

dır.

Sonuç 4.4.3: $f \in L_1$ ise (3.3.11) formülü ile tanımlanmış Abel-Poisson integrali için

$$\lim_{\lambda\to 0} \|a_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 = 0$$

dır.

Teorem 4.4.4. $A_\lambda(f;x)$ singular integral operatör ailesi $L_1(-\pi,\pi)$ uzayında dönüşüm yapan integral operatörleri ve $K_\lambda(t)$ çekirdeği de Tanım (4.1.4) de tanımlanan de periyodik yaklaşım birimi olsun. Eğer

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_\lambda(x-t)dt, \qquad (4.4.1)$$

ise

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 = 0$$

dır.

İspat: Açık olarak,

$$|A_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, K_\lambda(t)dt$$

dir ve

$$\|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, dx\Big)K_\lambda(t)dt$$

dir. $L_1(-\pi,\pi)$ süreklilik modülünden,

$$\omega_{L_1}(f;\delta)=\sup_{|t|\leq\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx$$

olduğunu biliyoruz ve

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx\leq\omega_{L_1}(f;|t|)$$

dir. Bu durumda;

$$\|A_\lambda(f;x)-f(x)\|_1\leq\int_{-\pi}^{\pi}\omega_{L_1}(f;|t|)\,K_\lambda(t)dt$$

elde edilir. Lemma (4.2.5) den

$$\omega_{L_1}(f;|t|)=\omega_{L_1}\left(f;\delta_\lambda\tfrac{|t|}{\delta_\lambda}\right)\leq\left(\tfrac{|t|}{\delta_\lambda}+1\right)\omega_{L_1}(f;\delta_\lambda)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\|A_\lambda(f;x)-f(x)\|_1\leq\omega_{L_1}(f;\delta_\lambda)\,(\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{|t|}{\delta_\lambda}K_\lambda(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}K_\lambda(t)dt)\qquad(4.4.2)$$

$$=\omega_{L_1}(f;\delta_\lambda)\,(\tfrac{1}{\delta_\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,K_\lambda(t)dt+1)$$

elde edilir.

Eğer $g(t)=|t|$ olarak alırsak, $L_1[-\pi,\pi]$ üzerinde $g(t+2\pi)=g(t)$ olur ve

$$A_\lambda(g;0)=\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,K_\lambda(t)dt$$

biçiminde yazabiliriz. g fonksiyonu $x_0=0$ noktasında sürekli olduğundan Teorem 4.1.6 den dolayı

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}A_\lambda(g;0)=g(0)=0$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,K_\lambda(t)dt=0$$

dır. Eğer δ_λ 'yı

$$\delta_\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} |t| \, K_\lambda(t)dt$$ olarak alıp (4.4.2) deki eşitsizlikte yerine yazdığımızda,

$$\|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 \leq 2\omega_{L_1}\,(f;\delta_\lambda)$$

elde ederiz. Burada, $\lambda \to \lambda_0$ iken $\delta_\lambda \to 0$ olmaktadır. Böylece Teorem (4.2.4) den $\omega_{L_1}\,(f;\delta_\lambda) \to 0$ olduğunu söyleyebiliriz ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.5 : $f \in L_1(-\pi,\pi)$ ise (3.4.11) formülü ile tanımlanmış Fejer integrali için

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f;x) - f(x)\|_1 = 0$$

dır.

Sonuç 4.4.6 : $f \in L_1(-\pi,\pi)$ ise (3.2.21) formülü ile tanımlanmış Poisson integrali için

$$\lim_{r\to 1} \|P_r(f;x) - f(x)\|_1 = 0$$

dır.

4.5 L_p normunda yakınsaklık

$L_p(-\infty,\infty)$ ve $L_p(-\pi,\pi)$ uzaylarının yakınsaklık teoremlerini inceleyelim.

Teorem 4.5.1 : $A_\lambda(f;x)$ singular integral operatör ailesi $L_p(-\infty,\infty)$ uzayında dönüşüm yapan integral operatörleri ve $K_\lambda(t)$ çekirdeği de Tanım 4.1.7**.** de tanımlanan de reel eksende yaklaşım birimi olsun. Eğer

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\lambda(x-t)dt, \quad -\infty < x < \infty \qquad (4.5.1)$$

ise

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_p = 0$$

dır.

İspat: $x \in (-\infty,\infty)$ olmak üzere,

$$A_\lambda(f;x)-f(x)\le\int\limits_0^\infty\left[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right]K_\lambda(t)dt$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın x e göre mutlak değerli L_p normunu alırsak,

$$\left\|A_\lambda(f;x)-f(x)\right\|_p\le(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\left|\int\limits_0^\infty\left[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right]K_\lambda(t)dt\right|)^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir ve Minkowsky integral eşitsizliğine göre,

$$\left\|A_\lambda(f;x)-f(x)\right\|_p\le(\int\limits_0^\infty(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}})K_\lambda(t)dt$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi keyfi $\delta>0$ için $[0,\infty)$ aralığı yerine $[0,\delta)$ ve $[\delta,\infty)$ aralığını aldığımızda,

$$\begin{aligned}\left\|A_\lambda(f;x)-f(x)\right\|_p&\le(\int\limits_0^\delta(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}})K_\lambda(t)dt\\&+(\int\limits_\delta^\infty(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}})K_\lambda(t)dt\\&=i_\lambda'+i_\lambda" \qquad (4.5.2)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi ise i_λ' terimini dikkate alalım, Minkowsky eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}}&\le(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}}\\&+(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)-f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

olduğunu görüyoruz ve L_p -süreklilik modülünün tanımına göre

$$\sup_{|t|\le\delta}(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}}\le 2\omega_{L_p}(f;\delta)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği i_λ' integralinde yazarsak,

$$i_{\lambda}^{'} \leq 2\omega_{L_p}\ (f;\delta) \int\limits_{0}^{\delta} K_{\lambda}(t)dt \leq 2\omega_{L_p}\ (f;\delta) \qquad (4.5.3)$$

dir.

Şimdi $i_{\lambda}^{"}$ terimini alalım. Yine Minkowsky eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}} &\leq (\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|)^p dx)^{\frac{1}{p}} \\ &+(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|)^p dx)^{\frac{1}{p}} + 2(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 4\left\|f\right\|_p\end{aligned}$$

dir. Buna göre;

$$i_{\lambda}^{"} \leq 4\left\|f\right\|_p \int\limits_{0}^{\delta} K_{\lambda}(t)dt \qquad (4.5.4)$$

dir. (4.5.3) ve (4.5.4) eşitsizlikleri (4.5.2) de yerine yazılırsa,

$$\left\|A_{\lambda}(f;x)-f(x)\right\|_p \leq 2\omega_{L_p}\ (f;\delta) + 4\left\|f\right\|_p \int\limits_{0}^{\delta} K_{\lambda}(t)dt$$

eşitsizliği elde edilir. Keyfi $\delta > 0$ için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_{\delta}^{\infty} K_{\lambda}(t)dt = 0$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left\|A_{\lambda}(f;x)-f(x)\right\|_p \leq 2\omega_{L_p}\ (f;\delta)$$

olur.

Şimdi $\delta \to 0$ iken

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left\|A_{\lambda}(f;x)-f(x)\right\|_p = 0$$

dır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.1: $f \in L_p(-\infty, \infty)$ ise, Abel-Poisson $a_\lambda(f, x)$ integrali için

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|a_\lambda(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

dır.

Sonuç 4.5.2: $f \in L_p(-\infty, \infty)$ ise, Gauss-Weierstrass $u_\lambda(f; x)$ integral operatörü için

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|u_\lambda(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

dır.

Şimdi ise $L_p(-\pi, \pi)$ periyodik fonksiyonlar uzayında norm yakınsaklığını inceleyelim.

Tanım 4.5.2: Bu uzayda L_p-süreklilik modülü tanımı

$$\omega_{L_p}(f; \delta) = \sup_{|t| \le \delta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklindedir.

Teorem 4.5.3: $A_\lambda(f; x)$ singular integral operatör ailesi $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında dönüşüm yapan integral operatörleri ve $K_\lambda(t)$ çekirdeği de Tanım 4.1.4. de tanımlanan de periyodik yaklaşım birimi olsun. Eğer

$$A_\lambda(f; x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_\lambda(x - t) dt, \qquad (4.5.5)$$

ise

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|A_\lambda(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

dır.

İspat: Burada ,

$$|A_\lambda(f; x) - f(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \, K_\lambda(t) dt$$

olduğu açıktır. Burada eşitsizliğin her iki tarafında L_p normınuna geçersek,

$$\|A_\lambda(f;x)-f(x)\|_p \leq (\int_{-\pi}^{\pi}(\left|\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,K_\lambda(t)dt\right|)^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafına ise L_p -süreklilik modülü ve Minkowsky eşitsizliğini uyguladığımızda,

$$\|A_\lambda(f;x)-f(x)\| \leq \int_{-\pi}^{\pi}\omega_{L_p}(f;|t|)K_\lambda(t)dt \qquad (4.5.6)$$

elde edilir. Keyfi δ_λ için,

$$\omega_{L_p}(f;|t|) \leq (\tfrac{|t|}{\delta_\lambda}+1)\omega_{L_p}(f;\delta_\lambda)$$

olur. Bu eşitsizliği (4.5.6) daki eşitzlikte yerine yazdığımızda,

$$\|A_\lambda(f;x)-f(x)\| \leq \int_{-\pi}^{\pi}\omega_{L_p}(f;|t|)K_\lambda(t)dt \leq \omega_{L_p}(f;\delta_\lambda)(\tfrac{1}{\delta_\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,K_\lambda(t)dt+1)$$

elde ederiz.

Eğer δ_λ yı $\delta_\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}|t|\,K_\lambda(t)dt$ olarak seçersek, $K_\lambda(t)$ çift fonksiyon olduğundan

$$\delta_\lambda = 2\int_0^{\pi}tK_\lambda(t)dt \text{ olarak yazılır.}$$

Keyfi pozitif β için

$$\delta_\lambda = 2\int_0^{\beta}tK_\lambda(t)dt + 2\int_{\beta}^{\pi}tK_\lambda(t)dt$$

$$\leq 2\beta\int_{-\pi}^{\pi}K_\lambda(t)dt + 2\sup_{t\geq\beta}K_\lambda(t)$$

$$\leq 2\beta + 2\pi\sup_{t\geq\beta}K_\lambda(t).$$

$K_\lambda(t)$ çekirdeğinin özelliğine göre keyfi $\beta \geq 0$ için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\sup_{t\geq\beta}K_\lambda(t)) = 0$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_{\lambda \to \lambda_0} \delta_\lambda \leq 2\beta$$

dır. $\beta \to 0$ iken limit alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \delta_\lambda = 0$$

olur. Bu da $\delta_\lambda \to 0$ iken $\omega_{L_p}(f; \delta_\lambda) \to 0$ olduğundan ispatı tamamlar.

Sonuç 4.5.3: $f \in L_p(-\pi, \pi)$ ise, $P_r(f; x)$ Poisson integrali için

$$\lim_{r \to 1} \|P_r(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

dır.

Sonuç 4.5.4: $f \in L_p(-\pi, \pi)$ ise, $\sigma_n(f; x)$ Fejer integrali için

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

dır.

5. KONVOLÜSYON TİPLİ SİNGULAR İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM HIZI

$$B_\rho(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\varkappa_\rho(u)du$$

ifadesinde, $\varkappa_\rho(u)$ çekirdeği periyodik yaklaşım birimi olmak üzere, konvolüsyon tipli singular integral operatör ailesinin $L_1(-\pi,\pi)$ uzayında f fonksiyonuna L_1 normunda yakınsak olduğu Teorem 4.4.4. ile verilmiştir. Bu bölümde de yaklaşımlar teorisinin diğer önemli bir problemi olan konvolüsyon tipli singular integral operatörünün L_1 normunda yaklaşım hızı incelenmiştir. Bu durumda,

$$(\alpha_\rho) = \|B_\rho(f;x) - f(x)\|_1$$

ifadesi bir sıfır ailesidir. Yani

$$\lim_{\rho\to\rho_0} \alpha_\rho = 0$$

dır. Eğer

$$\lim_{\rho\to\rho_0} \beta_\rho = 0 \text{ ve } \lim_{\rho\to\rho_0} \tfrac{\alpha_\rho}{\beta_\rho} = E,$$

E reel sayısı sabit olacak şekilde bir (β_ρ) sıfır ailesi bulunabilirse, bu durumda

$$(\alpha_\rho) = \|B_\rho(f;x) - f(x)\|_1 = O\ (\beta_\rho)$$

olur.

Burada; $B_\rho(f;\circ)$ operatör ailesinin f fonksiyonuna yakınsama hızının, (β_ρ) sıfır ailesinin sıfıra yakınsama hızına denk olduğunu sayabiliriz. Bu ise yaklaşımlar teorisinin ikinci temel probleminin çözümü için yukarıdaki koşulları sağlayan uygun bir (β_ρ) sıfır ailesinin bulunması gerektiğini gösterir.

Böyle bir sıfır ailesini elde edebilmek için $f \in L_1(-\pi,\pi)$ fonksiyonunun
$\forall\delta > 0$ için

$$\omega_{L_1}(f;\delta) = \sup_{|u|\le\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u) - f(x)|\, dx$$

$L_1(-\pi,\pi)$ uzayında süreklilik modülünü ele alalım. Bu süreklilik modulünü kullanarak yakınsaklık hızını aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

Teorem 5.1.1. $|f(x)| < g(x), \quad g \in L_1(-\pi,\pi)$ eşitsizliğini sağlayan her $f \in L_1(-\pi,\pi)$ için $\varkappa_\rho(u)$ negatif olmayan,
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varkappa_\rho(u)du = 1$ koşulunu sağlayan çift fonksiyon ve

$$\Delta_\rho = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |u|\, \varkappa_\rho(u)du$$

olmak üzere, $\rho \to \rho_0$ için $\Delta_\rho \to 0$ olsun.

$$B_\rho(f;x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\varkappa_\rho(u)du$$

integral operatörü için

$$\|B_\rho f - f\|_1 \leq 2\omega_{L_1}(f;\Delta_\rho)$$

dır.

İspat: Öncelikle

$$B_\rho(f;x) - f(x)$$

farkını ele alalım.

$$|B_\rho(f;x) - f(x)| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+u) - f(x)|\, \varkappa_\rho(u)du$$

ve eşitsizliğin her iki tarafında $L_1(-\pi,\pi)$ normuna geçersek

$$\|B_\rho(f;x) - f(x)\|_1 \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+u) - f(x)|\, \varkappa_\rho(u)du)dx$$

Fubini Teoreminden

$$\|B_\rho(f;x) - f(x)\|_1 \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+u) - f(x)|\, dx)\varkappa_\rho(u)du \qquad (5.1.1)$$

yazabiliriz. $L_1(-\pi,\pi)$ uzayında süreklilik modülü

$$\omega_{L_1}(f;\delta)=\sup_{|u|\leq\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+u)-f(x)|\,dx$$

olduğundan

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+u)-f(x)|\,dx\leq\omega_{L_1}(f;|u|)$$

yazabiliriz. Buna göre;

$$\|B_\rho(f;x)-f(x)\|_1\leq\int_{-\pi}^{\pi}\omega_{L_1}(f;|u|)\varkappa_\rho(u)du$$

dır. Süreklilik modülü Teorem 4.2.4. de verilen özelliğinden keyfi Δ_ρ dizisi alırsak,

$$\omega_{L_1}(f;|u|)=\omega_{L_1}(f;\tfrac{|u|}{\Delta_\rho}\Delta_\rho)\leq(\tfrac{|u|}{\Delta_\rho}+1)\omega_{L_1}(f;\Delta_\rho)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buna göre;

$$\|B_\rho(f;x)-f(x)\|_1\leq\omega_{L_1}(f;\Delta_\rho)(\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{|u|}{\Delta_\rho}\varkappa_\rho(u)du+\int_{-\pi}^{\pi}\varkappa_\rho(u)du)$$

$$=\omega_{L_1}(f;\Delta_\rho)(\tfrac{1}{\Delta_\rho}\int_{-\pi}^{\pi}|u|\,\varkappa_\rho(u)du+1)\qquad(5.1.2)$$

dır.

Burada $g(u)=|u|\,,\;\; g(u+2\pi)=g(u)$ fonksiyonunu alırsak $g\in L_1(-\pi,\pi)$ dir ve

$$B_\rho(g;0)=\int_{-\pi}^{\pi}|u|\,\varkappa_\rho(u)du\qquad\text{olur.}$$

Böylece, g fonksiyonu $x_0=0$ noktasında sürekli olduğu için Teorem 4.1.6 den dolayı

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\int_{-\pi}^{\pi}|u|\,\varkappa_\rho(u)du=0$$

dır. Şimdi sıfır dizisini

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u| \varkappa_\rho(u)du = \Delta_\rho$$

şeklinde alırsak,

$$\rho \to \rho_0 \text{ için } \quad \Delta_\rho = \int_{-\pi}^{\pi} |u| \varkappa_\rho(u)du \to 0 \quad \text{dır.}$$

Yukarıdaki (5.1.2) eşitsizliğinde Δ_ρ 'yi yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \|B_\rho(f;x) - f(x)\|_1 &\leq \omega_{L_1}(f, \Delta_\rho)(\tfrac{1}{\Delta_\rho}\Delta_\rho + 1) \\ &= 2.\omega_{L_1}(f, \Delta_\rho) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Buradan, $B_\rho(f;x) - f(x)$ farkının sıfıra yakınsama hızının ve dolayısıyla

$$B_\rho(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\varkappa_\rho(u)du$$

integral operatör ailesinin f fonksiyonuna yakınsama hızının $(\omega_{L_1}(f;\Delta_\rho))$ sıfır ailesinin sıfıra yakınsama hızından daha yavaş olamayacağını gösterir.

KAYNAKLAR

Aliprantis,C,D.1998.Burkinshow,O., Principles of Real Analysis, Academic Press.

Bary N.K. 1964. A Treatise on Trigonometric series, Vol I, Authorized Translation By Mulliens M.F., New York.

Butzer,P.L.,Nessel,R.J. 1971. Fourier Analysis and Approximation,Academic Press. New York and London.

İbikli, E. 1995.Note on Lp Boundedness of singular Integral Operators, Turkish J. V19,Ankara.

Haciyev,A. 2003.Fourier Dönüşümleri yüksek lisans Ders Notları, Ankara Ünv. Ankara.

Haciyev, A. 2003. Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörleri yüksek lisans Ders Notları, Ankara Ünv. Ankara.

Haciyev, A., Hacısalihoğlu, H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F. D. S.İşletme yayınları No:31. Ankara.

Korovkin,P.P. 1960.Linear Operators and Approximation theory, Hindustan Publ.Corp., Delhi.

Kreyzszig,E. 1978.Introductory Functional Analysis with Applications. Toronto.

Kumar,D. ,Singh,D. 2010.Fourier Transform in Lp (R) Spaces,p$\geq$ 1. Gen.Math.Notes,Vol.3No.1,India.

Natanson,I.P. 1964.Constructive Functions Theory ,Frederick Ungar Publishing Co., NewYork.

Natanson,I.P. 1960.Theory of Functions of a Real Variable. Vol.2. Frederick Ungar Publishing Co.,NewYork.

Stein E.M., Sharkarckhi R. 2003. Fourier Analysis, Princeton University, Princeton, Oxford.

Stein, E., Weiss,G. 1971.Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Space, Princeton,New Jersey.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Cahit CİNBAT

Doğum Yeri : TRABZON

Doğum Tarihi : 02/03/1966

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Kuleli Askeri Lisesi

Lisans : Boğaziçi Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı 2021

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

FMV Özel Ayazağa Işık Fen Lisesi İSTANBUL Matematik Öğretmeni 2019-2020

FMV Özel Ispartakule Işık Fen Lisesi İSTANBUL Matematik Öğretmeni 2018-2019

Kara Harp Okulu ANKARA Matematik Öğretim Görevlisi 2012-2014

Kuleli Askeri Lisesi İSTANBUL Matematik Öğretmeni 2002-2012

Maltepe Askeri Lisesi İZMİR Matematik Öğretmeni 1989-2002

SCI Yayınları:

Diğer Yayınları: