

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SALKOWSKI EĞRİLERİNİN GEOMETRİK UYGULAMALARI

Alime GENÇ GÜZEL


MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
2020


Her hakkı saklıdır


## TEZ ONAYI

Alime GENÇ GÜZEL tarafından hazırlanan " Salkowski Eğrilerinin Geometrik Uygulamaları" adlı tez çalışması 15/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI 

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ   
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI   
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Ayşe ALTIN   
Hacettepe Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM  
Enstitü Müdürü

## ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

15/01/2020



Alime GENÇ GÜZEL

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Alime GENÇ GÜZEL

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Sabit eğrilik ve sabit torsiyonlu eğriler Helis eğrileri olarak bilinmektedir. Eğriliklerden birinin sabit değerinin sabit olmaması durumunda eğrilik özellikleri Salkowski tarafından incelenmiştir.

Son yıllarda Salkowski eğrilerinin normallerinin sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapanları çalışılmaya başlanmıştır. Bu eğriler slant helislerin özel bir olarak ele alınmış ve Pisagor hodograf (PH) eğrilerine örnek teşkil etmiştir. Daha sonra da double Pisagor hodograf (DPH) eğrileri incelenmiştir.

Pisagor hodograf (PH) eğrileri özellikle CAD (Computer Aided Design) çalışmalarında temel teşkil etmektedir. Salkowski eğrilerinin slant olanları PH eğrileri için örnekler olarak verilmektedir.

Bu tezde yukarıdaki açıklamalar ışığı altında Salkowski eğrileri geniş bir şekilde incelenecektir.

**Ocak 2020, 34 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Lancret Teoremi, Bileşik kapalı alan eğrisi, Sabit eğrilik, Salkowski eğrisi, Sabit torsiyon, Anti-Salkowski eğrisi, Pisagor hodograf (PH) eğrisi, Double Pisagor hodograf (DPH) eğrisi

# ABSTRACT

Master Thesis

## GEOMETRIC APLICATIONS OF SALKOWSKI CURVES

Alime GENÇ GÜZEL

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Curves with constant curvature and constant torsion are known as helical curves. In case one of the curvatures is fixed and the other is not, the curvature properties are examined by Salkowski. In recent years, it has been started to study the normals of Salkowski curves which make a constant angle with a fixed direction. These curves are considered as a special example of slant helices and Pythagoras hodograph (PH) curves. Then, double Pythagorean hodograph (DPH) curves were examined. Pythagorean hodograph (PH) curves especially are the basis of CAD (Computer Aided Design) studies. Slant Salkowski curves are given as examples for PH curves. In this thesis, Salkowski curves will be examined in the light of the above explanations.

**January 2020, 34 pages**

**Key Words:** Lancret's theorem, Closed (composite) space curve, Constant curvature, Salkowski curve, Constant torsion, anti-Salkowski curve, Pythagorean hodograph (PH) curve, Double Pythagorean hodograph (PH) curve

## TEŞEKKÜR

Çalıőmamın her aşamasında görüő ve önerileriyle beni yönlendiren, bana her konuda yardımcı olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı)'ya ve çalıőmalarım sırasında sonsuz desteğini esirgemeyen sevgili eőim ve değerli aileme en içten saygı ve teőekkürlerimi sunarım.

Alime GENÇ GÜZEL  
Ankara, Ocak 2020



## İÇİNDEKİLER

### TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT .....	iii
TEŞEKKÜR .....	iv
SİMGELER DİZİNİ .....	vi
ŞEKİLLER DİZİN .....	vii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
3. SABİT EĞRİLİKLİ EĞRİLER .....	7
4. SALKOWSKİ EĞRİLERİ.....	12
4.1 Salkowski Eğrilerinin Bir Karakterizasyonu .....	13
4.2 Salkowski Eğrileri ve Rasyonel Pisagor Double Hodograf (DPH) Eğrileri.....	15
4.3 Salkowski Eğrileri ve Dairesel Helis Yaylarından Oluşan Sabit Eğrilikli Kapalı Uzay Eğrileri .....	18
4.3.1 Kapalı eğriler .....	18
4.3.2 Sabit eğrilik düğümü .....	21
4.3.3 Sabit olmayan eğrilik ve sabit torsiyonlu eğri ailesi .....	22
5. SLANT HELİS UYGULAMALARI .....	25
5.1 Denge Şekil Denklemlerinin Gerçek Çözümleri .....	26
5.2 Slant Helis Çözümleri .....	28
5.3 Standart Geodezik Çözümler.....	32
KAYNAKLAR .....	33
ÖZGEÇMİŞ.....	34

## SİMGELER DİZİNİ

$\kappa$	Eğrilik
$\tau$	Torsiyon
T	Teğet vektör alanı
N	Asli normal vektör alanı
B	Binormal vektör alanı
R	Reel sayılar cismi
$E^3$	Öklid-3 uzay





## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Sağ dairesel helis .....	4
Şekil 4.1 Bazı $m\in\mathbb{R}$ değerleri için çizilen Salkowski eğrileri .....	12
Şekil 4.2 Bir küre ve bir küp arasındaki kesişme.....	19
Şekil 4.3 Sürekli torsiyona ve sabit eğriliğe sahip boru şeklinde yüzey ile bu yüzeyin dairesel yay parçalarından yapılmış gösterimi .....	20
Şekil 4.4 Sürekli torsiyona ve sabit eğriliğe sahip boru şeklinde yüzeyin başka bir örneği ile bu yüzeyin dairesel yay parçalarından yapılmış gösterimi .....	20
Şekil 4.5 Sabit eğrilikli bir eğrinin düğümlü bir $C^3$ modeli.....	22
Şekil 4.6 Bazı $m\in\mathbb{R}$ değerleri için çizilen anti-Salkowski eğrileri.....	24
Şekil 5.1 Bazı Salkowski eğrileri.....	29
Şekil 5.2 Bazı anti-Salkowski eğrileri.....	31
Şekil 5.3 Bazı $m\in\mathbb{R}$ için çizilen canonical helisler.....	32

## 1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride en çok çalışılan konulardan biri de eğriler teorisidir. Eğriler teorisinde özellikle geodezikler, genel helisler, slant helisler, rektifiyan eğriler, mannheim eğrileri gibi özel eğriler çalışılmaktadır. Eğrilerin diferansiyel geometrisinde en çok araştırılan problemlerden biri regüler bir eğrinin karakterizasyonudur. Bu problemin çözümünde  $\kappa$  (eğrinin eğriligi) ve  $\tau$  (eğrinin burulması) önemli rol oynar. Eğrilerin eğrilik ve torsiyonu arasındaki ilişkiden faydalanarak birkaç eğri örneği verelim:

1.  $\kappa = 0$  ise eğri bir doğrudur.
2.  $\kappa \neq 0$  ve  $\tau = 0$  ise eğri düzlemseldir.
3.  $\kappa = sbt > 0$  ve  $\tau = 0$  ise eğri, yarıçapı  $r = \frac{1}{\kappa}$  olan bir çemberdir.
4.  $\kappa = sbt > 0$  ve  $\tau = sbt \neq 0$  ise eğri bir dairesel helistir (Millman ve Parker 1977).
5.  $\kappa$  ve  $\tau$  eğrilikleri sabit değil fakat

$$\frac{\tau}{\kappa} = sbt$$

ise eğri bir genel helistir.

Burada biraz helislerin yaşam içindeki uygulama alanlarından bahsedelim. Örnek verecek olursak: DNA yapısındaki molekül dizilişinde, karbon nano tüplerde, helis biçimindeki merdivenlerde, bir fasülye filizinin çubuğa sarılırken izlediği yolda, vida hareketlerinde helis yapılarını görürüz. Bu yüzden helisler doğadaki ve bilimdeki en büyüleyici eğrilerden birisidir.

6.  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında  $\kappa(t) > 0$  olan bir eğri olsun.  $a \neq 0$  olmak üzere  $a$  ve  $b$  sabitleri için

$$\frac{\tau}{\kappa} = at + b$$

ise  $\alpha$  eğrisi rektifiyan eğrisidir (Chen 2003).

7.  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun.  $\lambda \neq 0$  olacak şekilde bir sabit olmak üzere

$$\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)$$

ise  $\alpha$  eğrisi mannheim eğrisidir.

8. Eğrilerin karakterizasyonu için diğer bir yaklaşım da;  $\alpha$  birim hızlı bir uzay eğrisi,  $\kappa(t) \neq 0$  olmak üzere

$$\sigma(t) = \left( \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (t) = sbt$$

ise  $\alpha$  slant helistir.(Yaylı 2005).

E. Salkowski tarafından 1 yy. önce yayınlanan bir makalede sabit eğrilikli fakat sabit olmayan torsiyona sahip eğrilerin bir ailesi, Salkowski eğrileridir. Bu eğriler sabit eğrilığe sahip ve normal vektörleri sabit bir doğru ile sabit bir açı yapan uzay eğrileri olarak karakterize edilir. Dairesel helis yaylarının (özel bir durum olarak daireysel yaylar içeren) yapıştırılmasıyla oluşturulan eğrilerin  $\tau$  (torsiyon) fonksiyonu süreksiz bir fonksiyondur. Salkowski eğrilerinin tanıtılması bu sorunu çözmek için yeterli özgürlüğü sağlar. Dolayısıyla Salkowski eğrileri farklı torsiyonlara sahip daireysel helis yaylarını birleştirmek için kullanılabilirler. Bu çalışmada sabit eğrilığe ve sabit torsiyona sahip kapalı eğrilerin bazı örnekleri oluşturulacaktır.

Son yıllarda Salkowski eğrilerinin normallerinin sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapanları çalışılmaya başlanmıştır. Bu eğriler slant helislerin özel hali olarak ele alınmış Pisagor Hodograf (PH) eğrilerine örnek teşkil etmiştir. Daha sonrada Double Pisagor Hodograf (DPH) eğrileri olarak incelenmiştir. Bu bağlamda Salkowski eğrileri geniş bir biçimde incelenmiştir ve Salkowski eğri parçalarını kullanarak kapalı eğrileri kurmanın bir yöntemi belirtilmiştir. Son bir ilave, sabit torsiyonlu çift taraflı uzay eğrileri sınıfını tanımlamaya ayrılmıştır. Onlara ise Anti-Salkowski eğrileri denilmektedir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlardan söz edilecektir.

**Tanım 2.1**  $I \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha & : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyona  $\mathbb{R}^3$  Öklid-3 uzayında bir eğri denir (O'Neill 1997).

**Tanım 2.2**  $\alpha, \mathbb{R}^3$  de bir eğri olsun.  $\forall t \in I$  için

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

hız vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki teğet vektörü denir (Shifrin 2011).

**Tanım 2.3**  $\alpha, \mathbb{R}^3$  de bir eğri olsun.  $\forall t \in I$  için  $\alpha'(t) \neq 0$  ise  $\alpha$  eğrisine regüler bir eğri denir (O'Neill 1997).

### Örnek 2.1

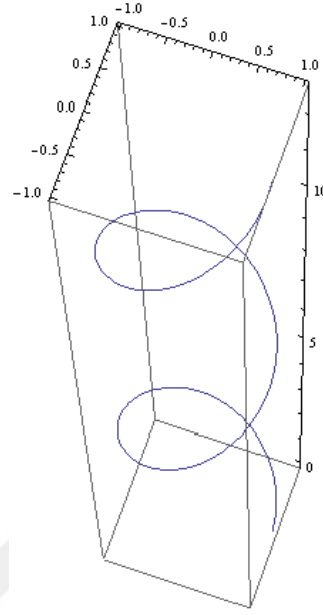
$$\begin{aligned}\alpha & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \rightarrow \alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)\end{aligned}$$

eğrisi verilsin. Burada  $r > 0$  ve  $h > 0$  dır. Bu eğriye sağ dairesel helis denir ( $h < 0$  ise sol dairesel helistir). Dairesel helisin  $xy$ -düzlemine izdüşümü çemberdir.

$$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, h) \neq 0$$

olduğundan  $\alpha$  regüler bir eğridir.

$\alpha$  nın resmi ( $r = 1$  ve  $h = 1$ );



Şekil 1.1 Sağ dairesel helis  $\alpha(t)$

şeklindedir (Millman ve Parker 1977).

**Tanım 2.4**  $\alpha, I \subset \mathbb{R}$  de tanımlı  $\mathbb{R}^3$  de bir eğri olsun.  $c_1, c_2 \in I$  olmak üzere

$$\int_{c_1}^{c_2} \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına  $t = c_1$  den  $t = c_2$  ye  $\alpha$  nın yay uzunluğu denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.5**  $\alpha, I \subset \mathbb{R}$  de tanımlı  $\mathbb{R}^3$  de birim hızlı bir eğri ve  $T = \alpha'$ , eğrisinin birim teğet vektör alanı olsun.

$$\begin{aligned} \kappa & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow \kappa(t) = \|T'(t)\| \end{aligned}$$

reel sayısına  $\alpha$  eğrisinin eğriliği denir (O.'Neill 1997).

**Tanım 2.6**  $\alpha, I \subset \mathbb{R}$  de tanımlı  $\mathbb{R}^3$  de birim hızlı bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} \tau & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow \tau(t) = -\langle B'(t), N(t) \rangle \end{aligned}$$

reel sayısına  $\alpha$  eğrisinin torsiyonu denir (O.'Neill 1997).

**Tanım 2.7**  $\alpha, \kappa > 0$  eğrilige sahip  $\mathbb{R}^3$  de birim hızlı bir eğri olsun.  $T, N, B$  vektör alanları  $\alpha$  eğrisinin her noktasında ortonormal vektör alanlarıdır ve  $\alpha$  eğrisi üzerinde Frenet çatı alanı olarak isimlendirilir (O.'Neill 1997).

**Tanım 2.8**  $\alpha, \kappa > 0$  eğrilige sahip  $\mathbb{R}^3$  de birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin  $T, N, B$  vektör alanlarının her  $t$  anında bir eksen etrafında ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin  $t$  parametresine karşılık gelen  $\alpha(t)$  noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör:

$$D = \tau T + \kappa B$$

şeklindedir. Buradan Frenet formülleri:

$$\begin{aligned} T' &= D \wedge T \\ N' &= D \wedge N \\ B' &= D \wedge B \end{aligned}$$

olur (Hacısalihoglu 2000).

**Teorem 2.1**  $\alpha, \kappa > 0$  eğrilige ve  $\tau$  torsiyonuna sahip  $\mathbb{R}^3$  de birim hızlı bir eğri olsun. Böylece Frenet vektörleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir (O.'Neill 1997).

**Tanım 2.9** Öklid-3 uzayında  $\alpha$  eğrisi boyunca  $\{N, C, N \wedge C = W\}$  alternatif çatısı için

$$\begin{aligned} \text{Asli normal vektör:} & \quad N \\ \text{Asli normal vektörün türevi:} & \quad C = \frac{N'}{\|N'\|} \\ \text{Darboux vektörü:} & \quad W = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} N'(t) \\ C'(t) \\ W'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(t) & 0 \\ -f(t) & 0 & g(t) \\ 0 & -g(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(t) \\ C(t) \\ W(t) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$f = \kappa \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}$$
$$g = \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\kappa \left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} f$$

olup sırasıyla Frenet çatısındaki eğrilik ve torsiyona denk gelirler.

### **Teorem 2.2**

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$$
$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

eğrisi verilsin.

1.  $\alpha$  eğrisi birim hızlı ( $\|\alpha'(t)\| = 1$ ) ise:

$$T = \alpha'(t)$$
$$N = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$$
$$B = T \wedge N$$

ve

2.  $\alpha$  eğrisi birim hızlı değilse:

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$
$$N = B \wedge T$$
$$B = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

ve

$$k_1 = \kappa = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$
$$k_2 = \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

şeklindedir.

### 3. SABİT EĞRİLİKLİ EĞRİLER

Burada eğrilerin  $\kappa$  (eğrinin eğriliği) ve  $\tau$  (eğrinin burulması) arasındaki ilişkiden faydalanarak eğrilik durumlarına göre karakterizasyonlarını inceleyeceğiz.

**Teorem 3.1**  $k_1 = \kappa = 0$  ve  $k_2 = \tau = \text{sbt}$  ise eğri bir doğrudur.

**İspat.**

$$\begin{aligned}k_1 = \kappa = 0 &\Rightarrow \alpha''(s) = 0 \\&\Rightarrow \alpha'(s) = a \\&\Rightarrow \alpha(s) = as + b \quad (\text{a ve b sabit vektörler})\end{aligned}$$

■

**Teorem 3.2** Bir  $\alpha = \alpha(s)$  uzay eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart  $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 0$  olmasıdır.

**İspat.**

$$\begin{aligned}\alpha' &= T \\ \alpha'' &= \kappa N \\ \alpha''' &= \kappa' N + \kappa N' \\ \alpha'''' &= \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') &= \det(T, \kappa N, (\kappa' N - \kappa^2 T + \kappa \tau B)) = 0 \\ &= \det(T, \kappa N, -\kappa^2 T + \kappa \tau B) = \det(T, \kappa N, \kappa \tau B) \\ &= \kappa^2 \tau = 0 \quad \rightarrow \quad \kappa = 1 \text{ ve } \tau = 0\end{aligned}$$

ise  $\alpha$  düzlemsel bir eğridir. ■

**Teorem 3.3** Bir  $\alpha = \alpha(s)$  uzay eğrisinin eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $\det(\alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}) = 0$  olmasıdır.



**İspat.** ( $\Rightarrow$ ) :

$$\alpha' = T$$

$$\alpha'' = \kappa N$$

$$\alpha''' = \kappa' N + \kappa N'$$

$$\alpha''' = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B) = \kappa' N - \kappa^2 T + \kappa \tau B$$

$$\alpha^{IV} = -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 T' + \kappa'' N + \kappa' N' + \kappa' \tau B + \kappa \tau' B + \kappa \tau B'$$

$$\alpha^{IV} = -2\kappa\kappa' T - \kappa^2(\kappa N) + \kappa'' N + \kappa'(-\kappa T + \tau B) + \kappa' \tau B + \kappa \tau' B + \kappa \tau(-\tau N)$$

$$\alpha^{IV} = (-2\kappa\kappa' - \kappa' \kappa) T + (-\kappa^3 - \kappa \tau^2 + \kappa'') N + (2\kappa' \tau + \kappa \tau') B$$

$$\alpha^{IV} = (-3\kappa' \kappa) T + (-\kappa^3 - \kappa \tau^2 + \kappa'') N + (2\kappa' \tau + \kappa \tau') B$$

$$\det(\alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^2 & \kappa' & \kappa \tau \\ -3\kappa' \kappa & -\kappa^3 - \kappa \tau^2 + \kappa'' & 2\kappa' \tau + \kappa \tau' \end{bmatrix}$$

$$= \kappa^5 \left( \frac{\kappa}{\tau} \right)'$$

elde edilir.

( $\Leftarrow$ ) : Eğer  $\det(\alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}) = 0$  ise  $\kappa \neq 0$  olduğundan  $\left( \frac{\kappa}{\tau} \right)' = 0$ . Buradan  $\frac{\kappa}{\tau} = sbt$  elde edilir. O halde  $\alpha(s)$  eğilim çizgisidir. ■

**Teorem 3.4**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$

$s \rightarrow \alpha(s)$  ve  $\kappa \equiv 1$  olsun.

$\alpha$  nın teğetler göstergesi (T) küresel helistir ancak ve ancak  $\det(\alpha''', \alpha^{vv}, \alpha^v) = 0$  olmasıdır.

**İspat.** ( $\Rightarrow$ ) :

$$\alpha'(s) = T$$

$$T' = \kappa N = N; (\kappa \equiv 1)$$

T bir küresel helis  $\Rightarrow \det(T^{(2)}, T^{(3)}, T^{(4)}) = 0$

$\alpha'(s) = T$  olduğundan  $\det(\alpha''', \alpha^{vv}, \alpha^v) = 0$  olur.

( $\Leftarrow$ ) :  $\kappa \equiv 1$  olduğundan

$$\begin{aligned}\alpha''' &= \kappa' N - \kappa^2 T + \kappa \tau B = -T + \tau B \\ \alpha^{IV} &= (-3\kappa' \kappa) T + (-\kappa^3 - \kappa \tau^2 + \kappa'') N + (2\kappa' \tau + \kappa \tau') B = 0 \\ \alpha^V &= 0\end{aligned}$$

$$\det(\alpha''', \alpha^w, \alpha^v) = \det(-T + \tau B, 0, 0) = 0$$

ise  $\alpha$  küresel helistir. ■

### **Teorem 3.5 (Lancert's Teoremi):**

$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sbt} \Rightarrow$  Eğri bir genel helistir.

**İspat.**  $C$ , bir  $C^{(r)}$  eğrisi ( $r \geq 3, \kappa \neq 0, \tau \neq 0$ ) olmak üzere  $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sbt}$  olsun. Dolayısıyla  $c$  bir sabit olmak üzere  $\frac{\tau}{\kappa} = c$  dir.

Şimdi bir  $u$  vektörü tanımlayalım.

$$\begin{aligned}u &= \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} T + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} B \\ |u|^2 &= \frac{c^2}{1+c^2} + \frac{1}{1+c^2} = 1\end{aligned}$$

Dolayısıyla  $u$  bir birim vektördür.

$$\frac{du}{ds} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \frac{dT}{ds} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \frac{dB}{ds}$$

Serret-Frenet vektörleri ve türevleri arasındaki ilişkiden;

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= \kappa N \\ \frac{dB}{ds} &= -\tau N\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} (\kappa N) + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (-\tau N) \\ &= \frac{c\kappa - \tau}{\sqrt{1+c^2}} N = \frac{(\frac{\tau}{\kappa})\kappa - \tau}{\sqrt{1+c^2}} N = 0N = 0\end{aligned}$$

Dolayısıyla  $\frac{du}{ds} = 0$  olup  $u$  sabittir ve uzayda sabit bir doğru oluşturur.

Şimdi,  $\theta; u$  ile  $T$  arasında bir açı olsun. O halde

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot T}{|u| \cdot |T|}\right) = \cos^{-1}(u \cdot T) = \cos^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)$$

olup  $c = \frac{\tau}{\kappa} \neq 0$  sabit ve  $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \in (-1, 1)$  olduğundan  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Dolayısıyla  $C$  bir genel helistir. ■

**NOT:**  $k_1 = \kappa = sbt$  ve  $k_2 = \tau \neq sbt \Rightarrow$  Eğri bir Salkowski eğrisidir.

$k_1 = \kappa \neq sbt$  ve  $k_2 = \tau = sbt \Rightarrow$  Eğri bir Anti-Salkowski eğrisidir.

**Önerme 3.1**  $\alpha : I \rightarrow R^3; \kappa \equiv 1$  yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş eğri olsun.

$\alpha$  nın normal vektörü ( $N$ ), uzayda sabit bir doğru ile sabit açı yapar ancak ve ancak

$$\tau(t) = \mp \frac{t}{\sqrt{\tan^2 \theta - t^2}}$$

dir.

\* Eğer açı  $\theta = 0$  ise o zaman normal vektör sabittir ve eğri, düz bir doğrudur. ( $\kappa \equiv 1$

çelişmesine rağmen)

\* Eğer açı  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ise torsiyon sabittir ve  $\kappa \equiv 1$  olduğu için eğri bir dairesel helistir.

**İspat.**  $\vec{d}$ , normal vektörü  $N$  olan ve bir  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  sabit açılı, sabit bir yön olsun.

Dolayısıyla

$$N \cdot \vec{d} = \cos \theta \tag{1}$$

Frenet vektörlerinin türevleri arasındaki ilişkiden:

$$N' = -\kappa T - \tau B \tag{*}$$

(1) in türevini alalım.

$$N' \cdot \vec{d} + N \cdot \vec{d}' = 0 \Rightarrow N' \cdot \vec{d} = 0 \tag{2}$$

$$\Rightarrow (-\kappa T - \tau B) \cdot \vec{d} = 0 \text{ (* dan)}$$

$$\Rightarrow T \cdot \vec{d} = -\tau B \cdot \vec{d}$$

Eğer  $b = \vec{B} \cdot \vec{d}$  koyarsak;

$$\vec{d}' = -\tau \vec{B} \vec{T} + \cos \theta \vec{N} + b \vec{B}$$

$\|\vec{d}\| = 1$  olduğundan

$$b = \mp \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \tau^2}}$$

alırız. Dolayısıyla

$$\vec{d} = \mp \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} \sin \theta \vec{T} + \cos \theta \vec{N} \pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \tau^2}} \vec{B} \quad (3)$$

Eğer (2) eşitliğini tekrar türetirsek şunu elde ederiz:

$$(\dot{\tau} \vec{B} + (1 + \tau^2) \vec{N}) \cdot \vec{d} = 0$$

(3) eşitliğini kullanarak şu diferansiyel eşitliği buluruz:

$$\pm \tan \theta \frac{\dot{\tau}}{(1 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 = 0 \quad (4)$$

İntegre edersek;

$$\pm \tan \theta \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} + t + c = 0; c : \text{integrasyon sabiti} \quad (5)$$

Bu integrasyon sabiti  $t \rightarrow t - c$  parametre değişimi ile sınıflandırılabilir. Sonuç olarak,

$$\pm \tan \theta \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} = -t \Rightarrow \tau(t) = \mp \frac{t}{\sqrt{\tan^2 \theta - t^2}}$$

■

#### 4. SALKOWSKI EĞRİLERİ

$\forall m \in R, m \neq 0$  ve  $m \neq \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$  olmak üzere

$$\gamma_m(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} -\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)s) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)s) - \frac{1}{2} \sin s, \\ \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)s) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)s) + \frac{1}{2} \cos s, \\ \frac{1}{4m} \cos(2ns) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlı eğriye "Salkowski eğrisi" denir. Burada  $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$  dir (Monterde 2008).

$\gamma_m$  Salkowski eğrisinin geometrik elemanları:

(1)  $\|\gamma'_m(s)\| = \frac{\cos(ns)}{\sqrt{1+m^2}}$  olup dolayısıyla eğri  $]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}[$  aralığında regülerdir.

(2)  $\kappa(s) \equiv 1$  ve  $\tau(s) = \tan(ns)$  dir.

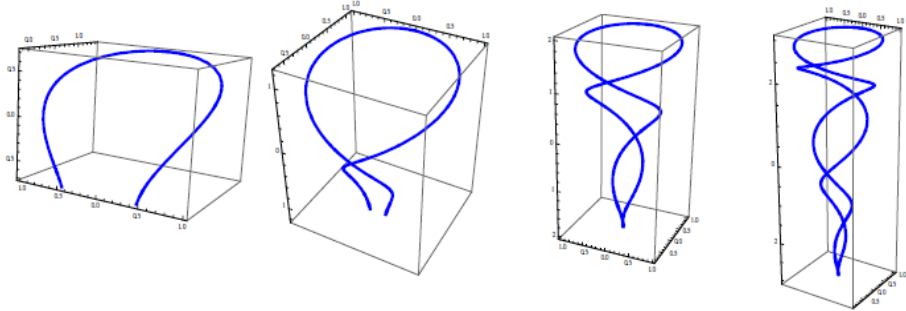
Frenet elemanları:

$$\vec{T}(s) = -(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns), \cos(ns) \sin(s) - n \cos(s) \sin(ns), \frac{n}{m} \sin(ns))$$

$$\vec{N}(s) = n \left( \frac{\sin(s)}{m}, -\frac{\cos(s)}{m}, -1 \right) \quad (4.2)$$

$$\vec{B}(s) = (n \cos(ns) \sin(s) - \cos(s) \sin(ns), -n \cos(s) \cos(ns) - \sin(s) \sin(ns), \frac{n}{m} \cos(ns))$$

şeklindedir (Salkowski 1909).



Şekil 4.1  $s \in [-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}]$  olmak üzere  $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$  için çizilen bazı Salkowski eğrileri

#### 4.1 Salkowski Eğrilerinin Bir Karakterizasyonu

Bir Salkowski eğrisinin normal vektör ifadesinden (bkz. denk.4.2) birim kürenin bir paralelini tanımladığı görülebilir. Normal vektör ile sabit vektör  $(0,0,-1)$  arasındaki açı:  $\phi = \arccos n$  şeklindedir.

Bu gerçek, bir diğer önemli eğri sınıfı olan genel helisleri hatırlatır. (Genel helisler, teğet vektörleri uzayda sabit bir doğruyla sabit bir açı yapan eğrilerdir.) Böyle bir durumda tanjant göstergesi birim kürede bir paralel tanımlar ve  $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabittir}$  (Lancert's Teoremi).

Şimdi sabit eğrilikli eğrilerin alt sınıfının ifadesini özelleştireceğiz:

**Lemma 4.1**  $\alpha : I \rightarrow R^3$ ,  $\kappa \equiv 1$  yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş eğri olsun.

$\alpha$  nın normal vektörü  $(N)$ , uzayda sabit bir doğru ile sabit bir  $\theta$  açısı yapar ancak ve ancak

$$\tau(t) = \mp \frac{t}{\sqrt{\tan^2 \theta - t^2}}$$

\* Eğer açı  $\theta = 0$  ise o zaman normal vektör sabittir ve eğri, düz bir doğrudur. ( $\kappa \equiv 1$  çelişmesine rağmen)

\* Eğer açı  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ise torsiyon sabittir ve  $\kappa \equiv 1$  olduğu için eğri bir dairesel helistir.

**İspat.**  $(\Rightarrow)$  :  $\vec{d}$ , normal vektörü  $N$  olan ve bir  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  sabit açıyla, sabit bir yön olsun. Dolayısıyla

$$N \cdot \vec{d} = \cos \theta \quad (1)$$

Frenet vektörlerinin türevleri arasındaki ilişkiden:

$$N' = -\kappa T - \tau B \quad (*)$$

(1) in türevini alalım.

$$\begin{aligned} N' \cdot \vec{d} + N \cdot \vec{d}' &= 0 \Rightarrow N' \cdot \vec{d} = 0 \\ &\Rightarrow (-\kappa T - \tau B) \cdot \vec{d} = 0 \quad (* \text{ dan}) \\ &\Rightarrow T \cdot \vec{d} = -\tau B \cdot \vec{d} \end{aligned} \quad (2)$$

Eğer  $b = \vec{B} \cdot \vec{d}$  koyarsak;

$$\vec{d}' = -\tau \vec{B} \vec{T} + \cos \theta \vec{N} + b \vec{B}$$

$\|\vec{d}\| = 1$  olduğundan

$$b = \mp \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \tau^2}}$$

alırız. Dolayısıyla

$$\vec{d} = \mp \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} \sin \theta \vec{T} + \cos \theta \vec{N} \pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \tau^2}} \vec{B} \quad (3)$$

Eğer (2) eşitliğini tekrar türetirsek şunu elde ederiz:

$$(\dot{\tau} \vec{B} + (1 + \tau^2) \vec{N}) \cdot \vec{d} = 0$$

(3) eşitliğini kullanarak şu diferansiyel eşitliği buluruz:

$$\pm \tan \theta \frac{\dot{\tau}}{(1 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 = 0 \quad (4)$$

integre edersek;

$$\pm \tan \theta \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} + t + c = 0; c: \text{integrasyon sabiti} \quad (5)$$

Bu integrasyon sabiti  $t \rightarrow t - c$  parametre değişimi ile sınıflandırılabilir. Sonuç olarak,

$$\pm \tan \theta \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} = -t \Rightarrow \tau(t) = \mp \frac{t}{\sqrt{\tan^2 \theta - t^2}}$$

( $\Leftarrow$ ): Kabul edelim ki;  $\tau = \pm \frac{t}{\sqrt{\tan^2 \theta - t^2}}$  olsun. b eşitliğinde yerine koyarsak;

$$b = \mp \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \tau^2}} = b = \mp \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{\tan^2 \theta - t^2}}} = \mp \cos \theta \sqrt{\tan^2 \theta - t^2}$$

olur. Torsiyon ( $\tau$ ) pozitif işaretli olduğunda  $b$  nin negatif işaretli olacağını varsayalım.

O zaman

$$\tau \cdot b = -t \cos \theta$$

olur.

Şimdi  $\vec{d}$  nin sabit olduğunu kanıtlayacağız.

$$\begin{aligned} \vec{d} &= -\tau b \vec{T} + \cos \theta \vec{N} + b \vec{B} \\ &= t \cos \theta \vec{T} + \cos \theta \vec{N} \mp \cos \theta \sqrt{\tan^2 \theta - t^2} \vec{B} \\ &= \cos \theta \left( t \vec{T} + \vec{N} \mp \sqrt{\tan^2 \theta - t^2} \vec{B} \right) \end{aligned}$$

Frenet formülünü uygulayarak

$$\begin{aligned} \dot{d} &= \cos \theta \left( \vec{T} + t\vec{N} - \vec{T} \mp \frac{t}{\sqrt{\tan^2 \theta - t^2}} \vec{B} \pm \frac{t}{\sqrt{\tan^2 \theta - t^2}} \vec{B} \mp (\pm t)\vec{N} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla  $\vec{d}$  sabittir ve  $\vec{d} \cdot \vec{N} = \cos \theta$ . ■

Bir eğrinin içsel veya doğal denklemleri belirlendikten sonra bir sonraki hedef:

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv 1 \\ \tau(t) &= \mp \frac{t}{\sqrt{\tan^2 \theta - t^2}} = \mp \frac{\frac{t}{\tan \theta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\tan \theta}\right)^2}} = \mp \tan \left( \arcsin \left( \frac{t}{\tan \theta} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

şeklinde olan Frenet formüllerini entegre etmektir.

**Teorem 4.1**  $\kappa \equiv 1$  olan Salkowski eğrileri slant helistir ancak ve ancak

$$\tau = \tan(\arcsin(mt)); \quad m = \frac{1}{\tan \theta}$$

olmasıdır.

**İspat.**

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \\ &= \frac{\tau'}{(1 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= sbt \end{aligned}$$

sağladığı için  $\kappa \equiv 1$  olan Salkowski eğrileri slant helistir. ■

## 4.2 Salkowski Eğrileri ve Rasyonel Pisagor Double Hodograf (DPH) Eğrileri

Pisagor hodograf (PH) notasyonu son yıllarda yoğun şekilde çalışılmıştır. Genelleştirilmiş helislerle ilişkisi Farouki ve meslektaşları tarafından kurulmuştur. Double PH eğrileri, sadece teğet vektörünün rasyonel bir vektörel fonksiyon olduğu değil, tüm Frenet çatısının rasyonel olduğu polinom eğrileridir.



**Tanım 4.1**  $\alpha : I \rightarrow R^3$  rasyonel bir eğri olmak üzere  $\|\alpha'\|$  ve  $\|\alpha' \wedge \alpha''\|$  fonksiyonları rasyonel fonksiyon ise  $\alpha$  rasyonel eğrisinin rasyonel double Pisagor hodograf (DPH) eğrisi olduğu söylenir.

Salkowski eğrileri, genelleştirilmiş helis olmayan rasyonel DPH eğrilerinin bir sınıfını sağlar.  $M$  parametresinin bazı değerleri ve uygun yeniden parametrelendirme altında Salkowski eğrisi, rasyonel bir double Pisagor hodograf (DPH) eğrisi olan rasyonel bir ifadeyi kabul eder.

**Lemma 4.2**  $\alpha : R \rightarrow R^3$  rasyonel bir Pisagor hodograf (PH) eğrisi olsun.

Eğer  $\alpha$  nın normal vektörleri sabit bir  $\vec{d}$  doğrusuyla sabit bir  $a$  açısı yaparsa o zaman  $\alpha$  eğrisi rasyonel double Pisagor hodograf (DPH) eğrisi olur (Monterde 2008).

**İspat.**

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ \vec{B} &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \\ \vec{N} &= \vec{B} \wedge \vec{T}\end{aligned}$$

$\vec{d}$  birim vektör olmak üzere  $\vec{N} \cdot \vec{d} = a$ ;  $a = \text{sabit}$  olsun.

O zaman

$$\begin{aligned}a &= \frac{\det(\alpha' \wedge \alpha'', \alpha', \vec{d})}{\|\alpha' \wedge \alpha''\| \cdot \|\alpha'\|} \\ \|\alpha' \wedge \alpha''\| &= \frac{\det(\alpha' \wedge \alpha'', \alpha', \vec{d})}{a \cdot \|\alpha'\|}\end{aligned}$$

Hipoteze göre  $\|\alpha'\|$  fonksiyonu rasyonel bir fonksiyon olduğunda  $\|\alpha' \wedge \alpha''\|$  fonksiyonunda rasyonel bir fonksiyondur.

Tersi doğru değildir. ■

**Önerme 4.1**  $\forall x \in Z$ ;  $|x| > 2$  olmak üzere  $m_x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$  olsun.

O zaman Salkowski eğrisi  $\beta_x(s) = \gamma_{m_x}(2x \arctan(s))$  bir rasyonel double Pisagor hodograf (DPH) eğrisidir.

**İspat.**

İlk olarak,  $\beta_x$  in rasyonel eğri olduğunu gösterelim...

$$\frac{\sqrt{1+m_x^2}}{m_x} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \cdot \sqrt{x^2-1} = x$$

ve

$$n = \frac{1}{a}, \quad 1 \pm 2n = 1 \pm \frac{2}{a}$$

alalım. Buradan  $(2x \arctan(s))$  içinde değerlendirildiğinde denklem 4.1' deki tüm trigonometrik fonksiyonlar rasyonel fonksiyon haline gelir.

Gerçekten de,  $\beta_x(s)$  in üç koordinatı  $x \in Z$  olduğunda rasyonel fonksiyonlar olarak yazılabilen kombinasyonlardır. Bunlar;

$$\begin{aligned} \cos(4 \arctan(s)) &= \frac{1 - 6s^2 + s^4}{(1 + s^2)^2} \\ \sin(4 \arctan(s)) &= -\frac{4s(s^2 - 1)}{(1 + s^2)^2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \cos(2x \arctan(s)), \\ \sin(2x \arctan(s)) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi  $\beta_x$  eğrisinin Pisagor hodograf (PH) eğrisi olduğunu kabul edelim.

$$\left\| \gamma'_m(v) \right\| = \frac{\cos(nv)}{\sqrt{1+m^2}}; \quad v = v(s) = 2x \arctan(s)$$

değişken değiştirmesi ile

$$\begin{aligned} v'(s) &= \frac{2x}{1+s^2} \\ \left\| \beta'_x(s) \right\| &= -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \cdot \frac{s^2-1}{s^2+1} \cdot v'(s) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla  $\beta_x$  eğrisi bir Pisagor hodograf (PH) eğrisidir. Lemma. 4.2 ye göre eğri rasyonel double Pisagor hodograf (DPH) eğrisidir. ■

Örneğin;  $x = 3$ ,  $mx = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  için Salkowski eğrisinin yeni parametrizasyonu:

$$\left( -\frac{4\sqrt{2}s(15 - 20s^2 + 58s^4 - 20s^6 + 15s^8)}{15(1+s^2)^5}, -\frac{16\sqrt{2}(-1+s^2)^5}{15(1+s^2)^5}, \frac{2(1-6s^2+s^4)}{3(1+s^2)^2} \right)$$

şeklindedir.

### 4.3 Salkowski Eğrileri ve Dairesel Helis Yaylarından Oluşan Sabit Eğrilikli Kapalı Uzay Eğrileri

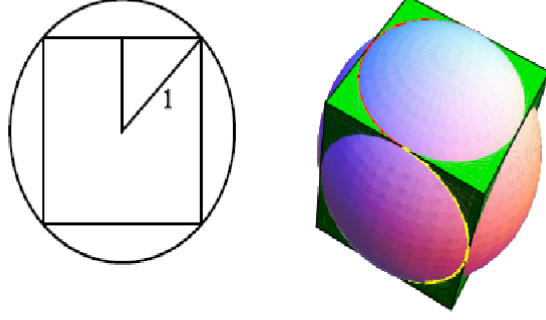
Dairesel helis yaylarının (özel bir durum olarak daireysel yayları içeren) yapıştırılmasıyla oluşturulan eğrilerin torsiyon fonksiyonu süreksiz bir fonksiyondur. Salkowski eğrilerinin tanıtılması bu sorunu çözmek için yeterli özgürlüğü sağlar. Sabit eğrilikli ve sabit torsiyonlu kapalı eğrilerin dört örneğini göreceğiz. Bu bölüm boyunca oluşturacağımız eğriler, kavşak noktalarında Frenet elemanlarının (eğrilik, torsiyon, çati) aynı olacağı şekilde eğrilerin yapıştırılmasıyla yapılır.

$C^3$  düzgün eğrilerini elde etmek için tüm yapmamız gereken yay uzunluğuna göre tüm parçaları yeniden parametrelendirmektir. Hatırlayacağımız üzere; Salkowski eğrilerinde parametre değişimi  $s = \frac{1}{n} \arcsin(mt)$  şeklindedir. Böylece, oluşturulan eğrilerden herhangi biri, bir  $C^3$  düzgün eğrisi elde etmek için kolayca yeniden parametrelendirilebilir.

#### 4.3.1 Kapalı eğriler

Dairesel helislerin teğet vektörleri sabit bir doğru ile sabit bir açı yapar. Bu nedenle daireysel bir helisin birimi birim kürede bir paralel tanımlar. Bu yüzden daireysel helislerin parçalarından yapılan uzayda muhtemel bir kapalı eğri gösterimi olarak paralel parçalarıyla yapılan birim kürede bir eğri seçebiliriz. Dairesel helisleri Salkowski eğrileri ile değiştirdiğimizde de aynı yöntem faydalıdır (Monterde 2008).

Normal bir çok yüzölütün her yüzü ile küre arasındaki kesişme bir paralel tanımlar. Uzaysal rotasyon sayesinde, böyle bir paralelin yatay olduğunu varsayabiliriz. Bu yüzden,  $\gamma_m$  gösterimi yatay paralelleri tanımlayan bir Salkowski eğrisi vardır.



Şekil 4.2 Bir küre ve bir küp arasındaki kesişme sürekli bir notrix seçimini mümkün kılar

Bir küp kullanarak iki basit yapı ile çalışalım. Küp yüzlerinin ve birim kürenin kesişmesi olarak tanımlanan paraleller  $\frac{\pi}{4}$  ün tüm enlemleridir. Bu nedenle,  $\gamma_1$  Salkowski eğrisinin  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  arasındaki parçasını ele alalım.

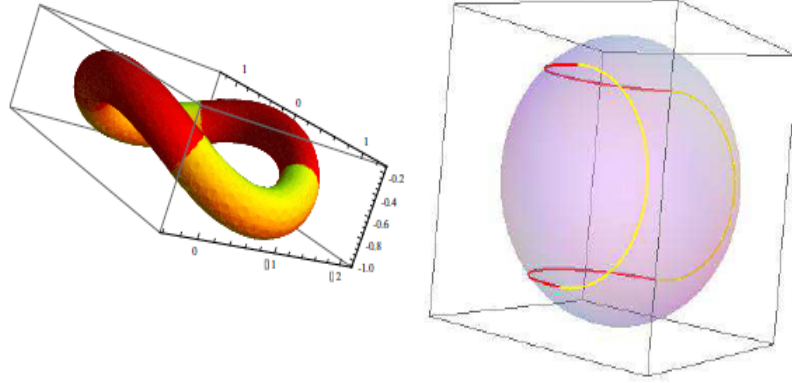
$\frac{\pi}{2}$  de Salkowski eğrisinin torsiyonu:

$$\tau_1 := \tau\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

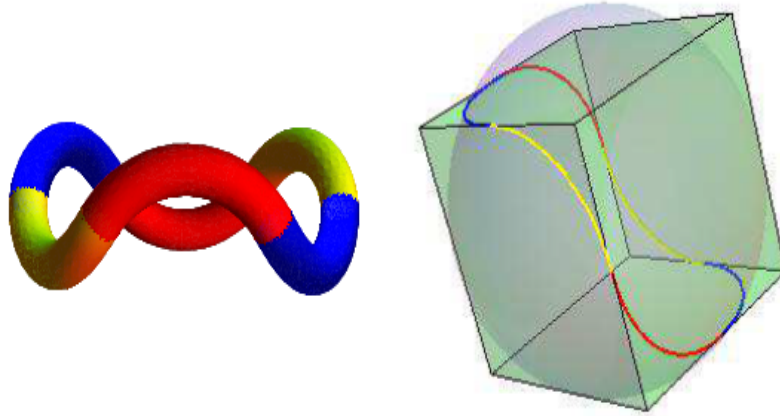
Benzer şekilde,

$$\tau\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\tau_1$$

Şimdi  $x = \gamma_1|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  ve  $y = \gamma_{-1}|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  olsun. Kapalı bir eğri oluşturmak için dört temel parçayı  $xyxy$  şeklinde bir araya getirmek mümkündür (Bkz: Şekil 4.3 Sol).  $xy$  deki bağlantı noktası torsiyonu  $\tau_1$  iken;  $yx$  deki bağlantı noktası torsiyonu  $-\tau_1$  dir. Bu nedenle kapalı eğrinin torsiyon fonksiyonu süreklidir. Bağlantı noktalarındaki Frenet çatıları aynıdır. Üstelik eğrilik sabit olduğu zaman türevi ortadan kalkar. Bu yüzden kapalı eğri geometrik sürekliliğe sahiptir.



Şekil 4.3 Sol, sürekli torsiyona ve  $\kappa \equiv 1$  eğriligine sahip olan kapalı eğri görsel kolaylık olması açısından boru şeklinde bir yüzey olarak sunulmuştur. Sağ, bu yüzeyin dairesel yay parçalarından yapılmış gösterimi bulunmaktadır.



Şekil 4.4 Sol,  $\kappa \equiv 1$  eğriligine ve sürekli torsiyona sahip kapalı bir eğrinin başka bir örneği boru şeklinde bir yüzey ile temsil edilir.

Sağ, bu yüzeyin gösterimi birim küre ve bir küp arasındaki kesişimin bir bölümü vardır

Önceki örnekte, bağlantı noktaları torsiyonu kaybolmayan noktalardır. Alternatif bir yapı, bağlantı noktalarının bir kısmı olarak kaybolan burulma noktalarının kullanılmasından ibarettir.  $p = \gamma_{1|_{[0, \frac{\pi}{2}]}}$  ve  $r = \gamma_{-1|_{[0, \frac{\pi}{2}]}}$  olsun. O zaman  $prprpr$  yine kapalı bir eğridir (Şekil 4.4).  $pr$ ,  $\tau_0$  torsiyonlu bir noktada iken;  $rp$  kaybolan torsiyonlu bir noktadadır.

### 4.3.2 Sabit eğrilik düğümü

Eğriler dairelerin yada dairesel helis parçalarının birleştirilmesiyle ve bağlantı noktalarından aynı Frenet çatışımı devam ettirmesiyle tanımlanır. Buna 'splicing' (ekleme) denir.

Burada aynı işlemi tekrarlayacağız. Şimdi, dairesel parçalar ile Salkowski eğri parçalarını değiştirelim. Böylece farklı torsiyondan oluşan dairesel helisin iki parçasını sürekli olarak birleştirebiliriz.

Öncelikle dairesel helisin açık parametrizasyonunu hatırlayalım.

$x, y \in \mathbb{R}; X > 0$  verilsin.

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (x \cos s, x \sin s, ys) ; s \in \mathbb{R} \\ \kappa &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \tau &= -\frac{y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Herhangi bir  $r \in \mathbb{R}$  verildiğinde  $x = \frac{1}{1+r^2}$  ve  $y = \frac{r}{1+r^2}$  parametreleri ile tanımlanan dairesel helisin eğriliği:  $\kappa = 1$  ve torsiyonu:  $\tau = r$  olur.

Daha önceki gibi  $x = \gamma_{1|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}}$  ve  $y = \gamma_{-1|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}}$  olsun.  $\zeta_k(r_k)$ , torsiyonu  $\tau_0$  ve eğriliği  $\kappa \equiv 1$  olan dairesel helis olsun.

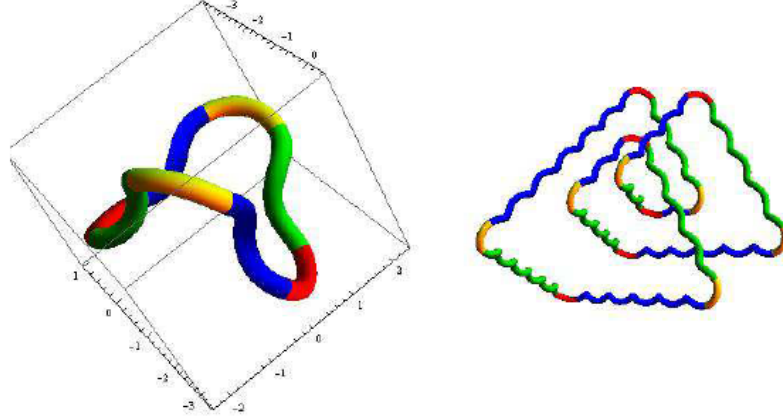
Şekil 4.5'de; soldaki kapalı eğri:

$$x\zeta_{\frac{1}{2}}yr_{\frac{1}{2}}x\zeta_{\frac{1}{2}}yr_{\frac{1}{2}}$$

Sağdaki kapalı eğri:

$$x\zeta_7yr_6x\zeta_6yr_4x\zeta_2yr_4x\zeta_5yr_4x\zeta_3yr_2x\zeta_1yr_4$$

şeklindedir.



Şekil 4.5 Sol, şekil 4.4 de gösterilen eğriye bazı dairesel helis parçalarının eklenmesiyle oluşturulmuş sabit eğrilikli bir başka eğri.

Sag, sabit eğrilikli bir eğrinin dugumlu bir  $C^3$  modeli

#### 4.3.3 Sabit olmayan eğrilik ve sabit torsiyonlu eğri ailesi

Burada eğriliği sabit olan bir eğriden başka, torsiyonu sabit olan bir eğrinin nasıl oluşturulacağını göstereceğiz.

$\alpha : ]a, b[ \rightarrow R^3$  eğrisi,  $\alpha'(k_0) \neq 0$  ve  $\kappa^\alpha(k_0) \neq 0$  olacak şekilde bir  $k_0$  noktasında 2-regüler bir eğri olduğunu hatırlayalım.

**Lemma 4.3**  $\alpha : I \rightarrow R^3$ ; eğriliği  $\kappa^\alpha$ , torsiyonu  $\tau^\alpha$  ve Frenet çatısı  $\{\vec{T}^\alpha, \vec{N}^\alpha, \vec{B}^\alpha\}$  şeklinde olan regüler bir eğri olsun.

$t \in I$  olmak üzere  $\beta(t) = \int_{t_0}^t \vec{B}^\alpha(v) dv$  olsun. O zaman  $\tau^\alpha(t) \neq 0$  olacak şekilde öyle bir  $t \in I$  vardır ki  $\beta$  eğrisi  $t$  noktasında 2-regülerdir ve

$$\kappa^\beta(t) = |\tau^\alpha(t)|$$

$$\tau^\beta(t) = \kappa^\alpha(t)$$

$$\vec{T}^\beta = \vec{B}^\alpha$$

$$\vec{N}^\beta = \vec{N}^\alpha$$

$$\vec{B}^\beta = -\vec{T}^\alpha$$

$$\dot{\beta}(t) = \vec{B}^\alpha(t).$$

$\|\vec{B}^\alpha(t)\| = 1$  olduğunda  $\beta$  yay uzunluğu tarafından parametrelendirilmiş bir eğridir ve

$$\vec{T}^\beta = \vec{B}^\alpha$$

dir.

Teğet vektörü türetirsek

$$\dot{T}^\beta = \dot{B}^\alpha = \tau^\alpha . N^\alpha$$

Dolayısıyla

$$\kappa^\beta(t) = \|\dot{T}^\beta(t)\| = |\tau^\alpha(t)|$$

ve

$$\vec{N}^\beta = \vec{N}^\alpha$$

Şimdi denklem 4.1 de tanımlanan  $\gamma_m$  Salkowski eğrisi için önceki sonucu uygulayalım. Denklem 4.2 de binormal vektör ifadesinden ve

$$\int \vec{B}^{\gamma_m}(t) dt = \int \vec{B}^{\gamma_m}(s) \|\gamma'_m(s)\| ds$$

gerçeğinden hareketle; herhangi bir  $m \in R$  ( $m \neq 0$ ) için

$$\delta_m(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(4n^2-1)m}(n(1-4n^2+3\cos(2ns))\cos(s) + (2n^2+1)\sin(s)\sin(2ns)), \\ \frac{1}{2(4n^2-1)m}(n(1-4n^2+3\cos(2ns))\sin(s) - (2n^2+1)\cos(s)\sin(2ns)), \\ \frac{n^2-1}{4n^2}(2ns + \sin(2ns)) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$n = \frac{m}{1+m^2}$$

elde ederiz (Monterde 2008).

Bu eğrilere **anti-Salkowski eğrileri** adı verilir.

Lemma 4.3 uygulandığında ise aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Önerme 4.2** Denklem 4.3 deki  $\delta_m$  eğrisi sabit torsiyona sahiptir ve  $\tau \equiv 1$  dir.

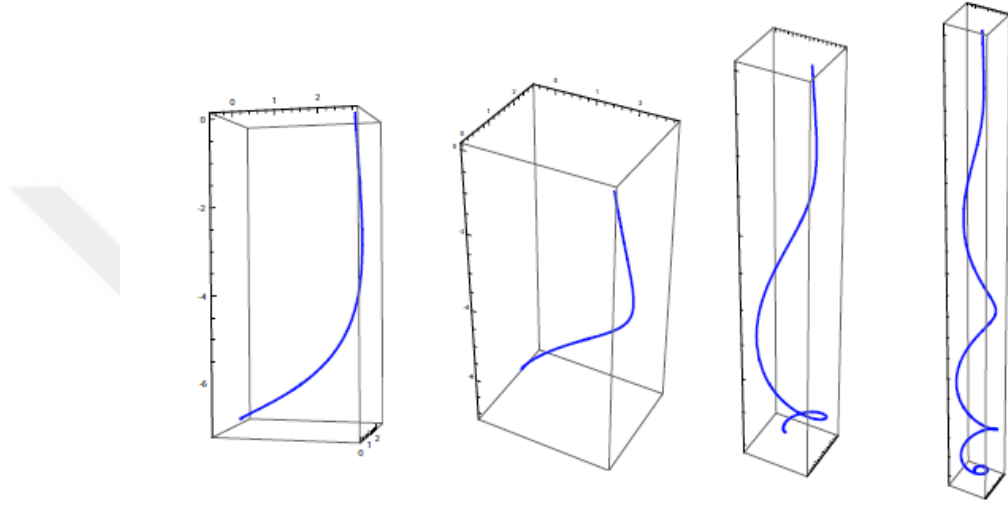


**Teorem 4.2**  $\tau \equiv 1$  olan uzay eğrileri ve onların sabit bir doğru ile sabit bir açı yapan normal vektörleri, denklem 4.3 de tanımlanan anti-Salkowski eğrileridir.

$\alpha$  eğrisi torsiyonu  $\tau \equiv 1$  olan bir eğri ve  $\delta(t) = \int_{t_0}^t \vec{B}^\alpha(v) dv$  olsun.

Lemma 4.3 e göre  $\delta$  sabit eğrilikli ( $\kappa \equiv 1$ ) ve aynı normal vektöre sahip bir eğridir.

Bu nedenle,  $\delta$  bir Salkowski eğrisi ve  $\alpha$  bir anti-Salkowski eğrisidir.



Şekil 4.6  $t \in [0, \frac{\pi}{2n}]$  olmak üzere  $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$  için  $\tau \equiv 1$  olan bazı anti-Salkowski eğrileri

## 5. SLANT HELİS UYGULAMALARI

Bu bölümde M.Yavari ve M.Zarrati'nin "The slant helix solutions of the equilibrium shape equations for the biopolymer chains" isimli çalışmasından faydalanarak slant helislerin biyopolimer zincirlerinin modellenmesindeki uygulamalarını vereceğiz.

Elastik çubuk teorisi uzun süredir incelenmiştir.Hooke, Bernoulli, Euler, Lagrange, Poisson, Navier, Stokes, Kirchhoff gibi birçok ünlü otorite tarafından incelenmiştir. Son yıllarda, elastik modeller biyoloji ve fizikte biyopolimer zincirlerini incelemek için yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bir biyopolimer zincirinin serbest enerjisi, genellikle eğriliğin ( $\kappa$ ) ve torsiyonun ( $\tau$ ) keyfi bir fonksiyonu olarak kabul edilir. Denge şekil denklemleri bir biyopolimer zincirinin serbest enerjisinin değişimi ile elde edilebilir. Şekil denklemleri biyomoleküllerin özelliklerini anlamada önemli bir rol oynar. Bazı bilim adamları yaptıkları çalışmalarda, biyopolimer zincirinin silindirik ve elipsoidal yüzeyler üzerindeki uyarlamaları için sayısal çözümler elde ettiler. Biyopolimer zincirlerinin serbest enerji profillerinin farklı davrandığını ve bunların yüzeyin geometrisine bağlı olduğunu buldular.

Şimdi total serbest enerji tanımını verelim...

**Tanım 5.1** Total serbest enerji; Öklid-3 ( $E^3$ ) uzayında düzgün bir eğri olan  $x(t)$  üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$F_{total} = \int F(x(t))dt$$

Burada  $t$ ; biyopolimer zincirinin yay uzunluğu ve  $F$ ;  $x(t)$  ye bağlı serbest enerji fonksiyonudur.

Düzgün bir eğri, eğrilik  $k_1 = \kappa(t)$  ve torsiyon  $k_2 = \tau(t)$  şeklinde iki değişmeze sahiptir.Bu nedenle serbest enerji fonksiyonu  $F$ ; eğriliğe, torsiyona ve türevlerine bağlı olan

$$F = F(\kappa, \tau, \kappa', \tau')$$

şeklinde genel forma sahiptir.

Şimdi  $E^3$  de  $x(t)$  eğrisinin bir parametrizasyonu olarak  $x_j(t)$  eğrisini kullanalım. Burada  $j = 1, 2, 3$ .

Eğrinin eğriliği ve torsiyonu:

$$\kappa = \sqrt{\frac{d^2x_j}{dt^2} \frac{d^2x_j}{dt^2}}$$

$$\tau = \epsilon_{jrs} \frac{dx_j}{dt} \frac{d^2x_r}{dt^2} \frac{d^3x_s}{dt^3} \frac{1}{\kappa^2}$$

Burada,  $j, r, s = 1, 2, 3$  ve  $\epsilon_{jrs}$ ;  $\epsilon_{123} = 1$  olan tamamen antisimetrik bir birim tensördür.

Denge şekil denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$K = \kappa \left[ \frac{\partial F}{\partial \kappa} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \kappa'} \right) \right] + \tau \left[ \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \tau'} \right) \right] + \kappa' \frac{\partial F}{\partial \kappa'} + \tau' \frac{\partial F}{\partial \tau'} - F$$

$$L = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \tau'} \right) \right]$$

$$M = \kappa \left[ \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \tau'} \right) \right] - \tau \left[ \frac{\partial F}{\partial \kappa} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \kappa'} \right) \right]$$

olmak üzere

$$K + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{K'}{\kappa} \right)' + \omega \left( \frac{L}{\kappa} \right)' + \omega M = 0 \quad (5.1)$$

$$\omega K' - \left( \frac{L}{\kappa} \right)'' - M' = 0$$

Burada  $w = \frac{\tau}{\kappa}$  olup  $x(t)$  eğrisinin eğimidir. Bu eğim diferansiyel geometride önemlidir.  $w$  nın sabit olması helisleri karakterize eder. Helislerin silindirik, küresel, eliptik, konik, slant gibi birçok farklı formu vardır.  $w = sbt$  ise eğri bir silindirik helistir. Bir helisin eğriliği sabit ise dairesel helis olarak adlandırılır. DNA dairesel helisin en önemli örneğidir. Şimdi, sıradışı bir serbest enerji modeli için şekil denklemlerinin helis çözümlerini görelim.

## 5.1 Denge Şekil Denklemlerinin Gerçek Çözümleri

$F = F(\kappa, \tau)$  fonksiyonu eğrilik ve torsiyona bağlı serbest enerji fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$F(\kappa, \tau) = \kappa \frac{\partial F(\kappa, \tau)}{\partial \kappa} + \tau \frac{\partial F(\kappa, \tau)}{\partial \tau} \quad (5.2)$$

fonksiyonu birinci dereceden homojen bir fonksiyondur.

Bu kısım için denklem 5.2 ile ilişki içinde olan  $F(\kappa, \tau)$  nun bir formu üzerinde çalışacağız. Bu nedenle, serbest enerji fonksiyonu için basit bir aday,

$$F = F_c \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

şeklinde eğrilik ve torsiyonun bir modeli olabilir. Burada  $F_c$  boyutsal nedenlerle sabittir. Bu  $F$  modeli için  $K = L = 0$  olması durumu söz konusudur (Thamwattana 2008).

Bu nedenle denklem 5.1 de  $\alpha$  keyfi bir sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right) = \alpha \kappa$$

sonucuna varırız. Burada eğer  $\alpha = 0$  olursa  $\omega = sbt$  olan çözümler elde ederiz. Bu durum ise silindirik helislerin modelimiz için önemsiz olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla bundan böyle  $\alpha \neq 0$  olması durumunu göz önünde bulunduracağız. Yukarıdaki son denklemi integre edersek,

$$\tau = \frac{(\alpha \int \kappa dt + C) \kappa}{\sqrt{1 - (\alpha \int \kappa dt + C)^2}} \quad (5.3)$$

Burada  $C$ , integrasyon sabitidir. Bu denlemdeki  $\tau$  yu  $F$  de yerine yazarsak

$$F = \frac{F_c \kappa}{\sqrt{1 - (\alpha \int \kappa dt + C)^2}} \quad (5.4)$$

sonucunu elde ederiz. Denklem 5.3 den

$$\omega = \frac{\tau}{\kappa}$$

$$\omega = \frac{(\alpha \int \kappa dt + C)}{\sqrt{1 - (\alpha \int \kappa dt + C)^2}}$$

olup  $\omega$  nın değerinin sabit olmasının imkansız olacağı sonucuna ulaşırız. Bu yüzden,  $\alpha \neq 0$  için, silindirik helisler şekil denklemlerinin çözümleri olamaz. Sonuç olarak; denklem 5.4 ü  $t$  parametresine göre integre edersek,

$$F_{total} = \frac{F_c}{\alpha} \arcsin \left( \alpha \int \kappa dt + C \right)$$

elde edilir. Buradan hareketle, toplam serbest enerji fonksiyonu toplam eğriliğin bir fonksiyonudur.

## 5.2 Slant Helis Çözümleri

Eğer

$$\psi = \frac{\kappa^2 w'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} = sbt$$

fonsiyonu sabit ise eğri bir slant helistir (Izumiya ve Takeuchi 2004). Slant helislerin asli normal vektör çatısı ( $\mathbf{N}$ ) sabit bir doğruyla sabit bir açı yapar.

Salkowski eğrileri ve anti-Salkowski eğrileri slant helislerin önemli örnekleridir. Şimdi bu eğrilerin özelliklerini inceleyelim...

### 1. Durum: Sabit eğrilikli çözümler ( $\kappa := k_1$ )

$\forall m \in \mathbb{R}, m \neq 0$  ve  $m \neq \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$  olmak üzere

$$\gamma_m(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} -\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)s) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)s) - \frac{1}{2} \sin s, \\ \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)s) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)s) + \frac{1}{2} \cos s, \\ \frac{1}{4m} \cos(2ns) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlı eğriye "**Salkowski eğrisi**" denir. Burada  $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$  dir (Monterde 2008).

Salkowski eğrileri  $]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}[$  aralığında regülerdir.  $\gamma_m$  Salkowski eğrisinin geometrik elemanları:

$$(1) \|\gamma'_m(s)\| = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cos(ns)$$

$$(2) \kappa(s) \equiv 1 \text{ ve } \tau(s) = \tan(ns) \text{ dir.}$$

Salkowski eğrisinin yay uzunluğu parametresi:

$$t = \int_0^s \|\gamma'_m(v)\| dv = \frac{1}{m} \sin(ns)$$

Buradan,

$$s = \frac{1}{n} \arcsin(mt)$$

Dolayısıyla  $\kappa(t) \equiv 1$  ve  $\tau(t) = \tan(\arcsin(mt))$  olur.

$m = \alpha$  ve  $n = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$  alırsak

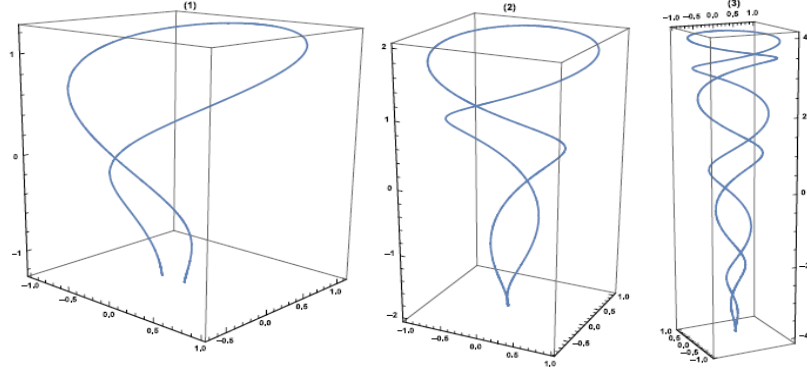
$$\tau(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1-(\alpha t)^2}} = \tan(\arcsin(\alpha t))$$

olur ve Salkowski eğrileri şekil denklemlerinin gerçek çözümleri demektir.

Son olarak,

$$F_{total}(t) = \frac{F_c}{\alpha} \arcsin(\alpha t)$$

olur.



Şekil 5.1  $s \in [-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}]$  olmak üzere; (1)  $m = \frac{1}{5}$ , (2)  $m = \frac{1}{8}$ , (3)  $m = \frac{1}{16}$  için bazı Salkowski eğrileri

## 2. Durum: Sabit torsiyonlu çözümler ( $\tau := \tau_1$ )

Eşitlik (5.3.) ün t ye göre diferansiyeli alınırsa, şu ilişki ortaya çıkar:

$$\kappa' + \frac{\alpha \kappa^2}{\alpha \int \kappa dt + C} + \frac{\alpha \tau_1 \kappa}{\sqrt{1 - (\alpha \int \kappa dt + C)^2}} = 0$$

Dahası eşitlik (5.3.) den

$$\alpha \int \kappa dt = -C - \frac{\varepsilon \tau_1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau_1^2}}; \quad \varepsilon = \pm 1$$

$\alpha \int \kappa dt$  değişkenini son iki ilişkiden çıkarırsak

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \kappa' + \alpha (\kappa^2 + \tau_1^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad : \varepsilon = +1 \\ \tau_1 \kappa' - \alpha (\kappa^2 - \tau_1^2) \sqrt{\kappa^2 + \tau_1^2} = 0 : \varepsilon = -1 \end{array} \right\}$$

İlk diferansiyel eşitliğin çözümünden, yani  $\varepsilon = +1$  için,

$$\kappa = \frac{\alpha \tau_1^2 t}{\sqrt{1 - (\alpha \tau_1 t)^2}} = \tau_1 \tan(\arcsin(\alpha \tau_1 t))$$

İkinci diferansiyel eşitliğin çözümünden, yani  $\varepsilon = -1$  için,

$$z + \ln \frac{(\kappa - \tau_1) \left( \kappa - \sqrt{\kappa^2 + \tau_1^2} - \tau_1 \right)}{(\kappa + \tau_1) \left( \kappa + \sqrt{\kappa^2 + \tau_1^2} + \tau_1 \right)} = 0$$

Daha da basiteştirirsek;

$$\kappa = -\frac{(e^z + 1)\sqrt{e^{2z} - 6e^z + 1} - \varepsilon(e^{2z} - 2e^z - 3)}{(e^z - 3)\sqrt{e^{2z} - 6e^z + 1} - \varepsilon(e^{2z} - 6e^z + 1)}\tau_1$$

Burada  $z = \sqrt{8}\alpha\tau_1 t$  olarak belirlenmiştir.

### Anti-Salkowski eğrileri

Herhangi bir  $m \in R$  ( $m \neq 0$ ) için

$$\delta_m(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m(4n^2-1)}(n(1-4n^2+3\cos(2ns))\cos(s) + (2n^2+1)\sin(s)\sin(2ns), \\ \frac{1}{2m(4n^2-1)}(n(1-4n^2+3\cos(2ns))\sin(s) - (2n^2+1)\cos(s)\sin(2ns), \\ \frac{n^2-1}{4n^2}(2ns + \sin(2ns)) \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{m}{1+m^2}$$

elde ederiz (Monterde 2008). Anti-Salkowski eğrilerinin temel eğrilikleri

$$\kappa(s) = \tan(ns), \quad \tau(s) = 1$$

şeklindedir. Anti-Salkowski eğrisinin yay uzunluğu parametresi:

$$t = \int_0^s \|\delta'_m(v)\| dv = \frac{1}{m} \sin(ns)$$

Buradan,

$$s = \frac{1}{n} \arcsin(mt)$$

Dolayısıyla  $\kappa(t) = \tan(\arcsin(mt))$  ve  $\tau(t) = 1$  olur.

Burada  $m = \alpha$  ve  $n = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$  seçersek anti-Salkowski eğrileri şekil denklemlerinin gerçek çözümleri haline gelirler. Hesaplamalar sonunda

$$F_{total} = \frac{F_c}{\alpha} \arcsin\left(-\sqrt{1-(\alpha t)^2} + \zeta\right)$$

Sonuç olarak;

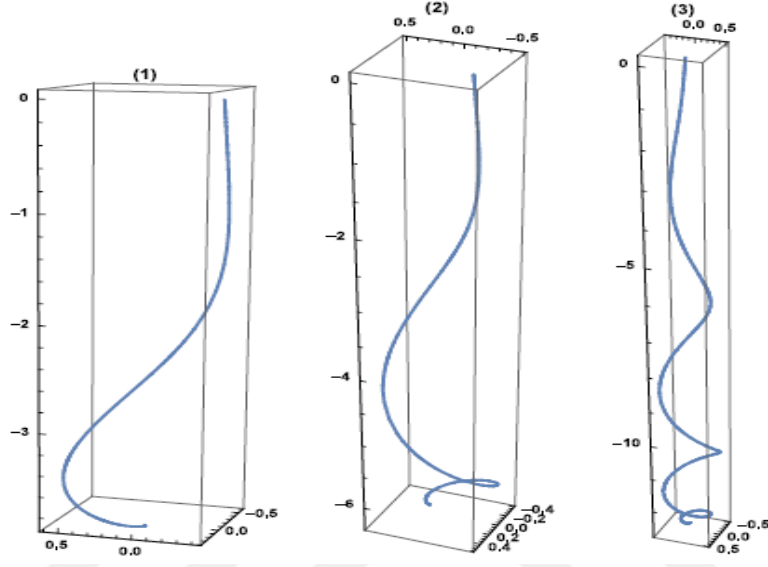
$$F_1(z) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{e^{\frac{z}{2}} - 1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{e^{\frac{z}{2}} + 1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{e^z - 3}{\sqrt{8}}\right)$$

$$F_2(z) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{3e^z - 1}{\sqrt{e^{2z} - 6e^z + 1}}\right) + \ln\left(e^z + \sqrt{e^{2z} - 6e^z + 1} - 3\right)$$

olmak üzere

$$F_{total} = \frac{F_c}{\alpha} \arcsin \left( \frac{9}{64} F_1(z) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}} F_2(z) + \zeta \right)$$

total serbest enerji fonksiyonu elde edilir.



Şekil 5.2  $s \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right]$  olmak üzere; (1)  $m = \frac{1}{5}$ , (2)  $m = \frac{1}{8}$ , (3)  $m = \frac{1}{16}$  için bazı anti-Salkowski eğrileri

### 5.3 Standart Geodezik Çözümler

Denge şekil denklemlerinin çözümleri şu şekildedir:

Eğriligi:

$$\kappa = \frac{C_1}{\alpha (1 + C_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

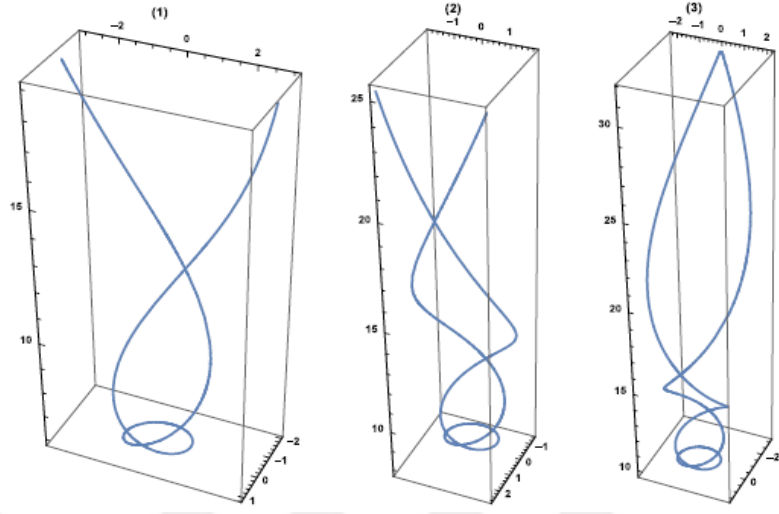
Torsiyonu:

$$\tau = \frac{C_1^2 t}{\alpha (1 + C_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Toplam serbest enerjisi:

$$F_{total} = \frac{F_c}{\alpha} \arctan(C_1 t)$$





Şekil 5.3  $\alpha = \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$  için çizilen canonical helisler

## KAYNAKLAR

- Beltran, J.V. and Monterde J., A characterization of quintic helices, Journal of Computational and Applied Mathematics, 206
- Camcı C., Kula L., Altınok M., On spherical slant helices in Euclidean 3-space, [math. DG].
- Farouki, R. T., Pythagorean-Hodograph Curves. Algebra and Geometry inseparable, Springer, Berlin
- Ghomi, M., H-Principles for curves and knots of constant curvature Geometriae Dedicata 127 (1), 19{35
- Hacısalıhoğlu H.H., Diferensiyel Geometri 1. Cilt. Hacısalıhoğlu yayınları, (2000), 272 p., Türkiye.
- Izumiya S., Takeuchi N., New special curves and developable surfaces, Turk J. Math. 28 153-163
- Izumiya S., Takeuchi N., New special curves and developable surfaces, Turk math. journal, 28; 531-537.
- Koch, R. and Engelhardt, C. Closed space curves of constant curvature consisting of arcs of circular helices, J. for Geometry and Graphics
- McAtee Ganatra, J.M., Knots of constant curvature, Journal of Knot Theory and its Ramifications
- Monterde J., Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion, Computer Aided Geometric Design, 26 (2009), 271-278
- Yavari M., Zarrati M., The slant helix solutions of the equilibrium shape equations for the biopolymer chains, Chinese Journal of Physics, 55 (2017), 444-456

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Alime GENÇ GÜZEL

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 19/08/1991

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

### **Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):**

Lise : Selahattin Akbilek Anadolu Lisesi (2009)

Lisans : Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü (Temmuz-2014)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Ocak-2020)