ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BİR GEOMETRİK SÜRECİN ORTALAMA DEĞER VE VARYANS FONKSİYONLARI İÇİN KUVVET SERİSİ AÇILIMLARI VE TAHMİNLERİ

Mustafa Hilmi PEKALP

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

TEZ ONAYI

Mustafa Hilmi PEKALP tarafından hazırlanan "**Bir Geometrik Sürecin Ortalama Değer ve Varyans Fonksiyonları için Kuvvet Serisi Açılımları ve Tahminleri**" adlı tez çalışması 01/11/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL
Kırıkkale Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Mehmet YILMAZ
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İhsan KARABULUT
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Mahmut KARA
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

01/11/2019

Mustafa Hilmi PEKALP

ÖZET

Doktora Tezi

BİR GEOMETRİK SÜRECİN ORTALAMA DEĞER VE VARYANS FONKSİYONLARI İÇİN KUVVET SERİSİ AÇILIMLARI VE TAHMİNLERİ

Mustafa Hilmi PEKALP

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Bu çalışmada yenileme sürecinin bir genellemesi olan ve güvenirlik, envanter ve kuyruk teorisi, risk ve garanti analizi ile uygulamalı istatistiğin birçok alanında araştırmacılar tarafından sıklıkla kullanılan geometrik süreç gözönüne alınmıştır. Geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı, dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonlarına dayalı olarak verildiğinden, konvolüsyon fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı bulunarak olasılık değerleri hesap edilmiştir. Ayrıca bir geometrik sürecin uygulamalarda çoğunlukla ortalama değer ve varyans fonksiyonu bilgisine ihtiyaç duyulmasından dolayı, bu fonksiyonların sayısal bir yöntem ve kuvvet serisi açılımları yardımıyla hesap edilmesi ve tahmin edilmesi problemi üzerinde durulmuştur.

Kasım 2019, 118 sayfa

Anahtar Kelimeler: Geometrik süreç, geometrik fonksiyon, varyans fonksiyonu, integral denklem, kuvvet serisi açılımı, tahmin.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

POWER SERIES EXPANSIONS AND ESTIMATIONS FOR MEAN VALUE AND VARIANCE FUNCTIONS OF A GEOMETRIC PROCESS

Mustafa Hilmi PEKALP

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

In this study, the geometric process which is a generalization of the renewal process and often used by researchers in reliability, inventory and queuing theory, risk and warranty analysis, and in many fields of applied statistics is considered. Since one-dimensional distribution of the geometric process is based on the convolution of the distribution functions, the probability values are calculated by obtaining the power series expansions of the convolution functions. Further, due to the fact that the applications of the geometric process mostly need the knowledge of the geometric and variance functions, the problem of calculating these functions by a numerical method and power series expansions and of estimating these functions are considered.

November 2019, 118 pages

Key Words: Geometric process, geometric function, variance function, integral equation, power series expansion, estimation.

TEŞEKKÜR

“Bir Geometrik Sürecin Ortalama Değer ve Varyans Fonksiyonları için Kuvvet Serisi Açılımları ve Tahminleri” ile ilgili yaptığım bu çalışmada bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın her aşamasında önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Halil AYDOĞDU’ya (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca yapılan tez izleme toplantılarında fikirleri ve önerileri ile tez çalışmamın olgunlaşmasına katkıda bulunan, destekleri ile beni gayretlendiren hocalarım Sayın Doç. Dr. İhsan KARABULUT’a (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) ve Sayın Doç. Dr. Mahmut KARA’ ya (Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) teşekkür ederim.

İstatistik bilimini bana sevdiren ve öğrenmemde büyük katkıları olan Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü’ndeki hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili eşim Buse PEKALP’e, annem Sevgi PEKALP’e, babam Hamdi Lütfi PEKALP’e ve kardeşim Mert Erim PEKALP’e bana karşı duydukları sarsılmaz inançlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca her daim yanımda olan sevgili dostlarım Onur DOĞANAY’a, Gökhan SARI’ya, Engin Deniz AVCI’ya, Dr. Kamil Demirberk ÜNLÜ’ye ve Yasin OKKAOĞLU’na teşekkür ederim.

Tez çalışmasının bir bölümü Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 1002 programı kapsamında 117F304 proje numarası ile desteklenmiştir. Çalışmamıza verdikleri destekten dolayı TÜBİTAK’a teşekkür ederim.

Mustafa Hilmi PEKALP

Ankara, Kasım 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$I(.)$	Gösterge fonksiyonu
X_n	$(n-1)$. ve n. olaylar arası geçen zaman
S_n	n. olayın gerçekleşme zamanı
$N(t)$	$(0, t]$ aralığındaki olay sayısı
$M(.)$	Ortalama değer fonksiyonu
$M_2(.)$	İkinci moment fonksiyonu
$V(.)$	Varyans fonksiyonu
$\Gamma(.)$	Gamma fonksiyonu
$[.]$	Tam değer fonksiyonu
$*$	Stieltjes konvolüsyon işlemi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Lam (1988) ilk kez, ardışık çalışma zamanlarının stokastik azalan bir dizi, tamir zamanlarının ise stokastik artan bir dizi olduğu bir sistemin modellenmesinde homojen olmayan Poisson sürecine alternatif olarak geometrik süreci tanımlamıştır. Bu monoton sayma süreci aşağıdaki gibi verilmektedir.

$\{N(t), t \geq 0\}, (0, t]$ aralığında belirli türden olayların sayısını sayan bir sayma süreci olsun. $\{X_n, n = 1,2, \dots\}$ negatif değerler almayan ve bu sayma sürecine göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanların oluşturduğu rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olmak üzere $\{a^{n-1}X_n, n = 1,2, \dots\}$ bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olacak biçimde bir $a > 0$ sayısı varsa $\{X_n, n = 1,2, \dots\}$ dizisi üzerine kurulan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine a oranlı bir geometrik süreç denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$, a oranlı ve ilk olayın gerçekleşme zamanının dağılımı F olan bir geometrik süreç olsun. Bu durumda X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, ilk olayın gerçekleşme zamanına ait dağılım fonksiyonu ile tek olarak belirlenir, yani $F_{X_k}(x) = F(a^{k-1}x), k = 1,2, \dots$. Buradan $a < 1$ için geometrik süreç stokastik artan iken $a > 1$ için stokastik azalandır. $a = 1$ iken geometrik süreç bir yenileme süreci olur.

Yenileme sürecinin bir genellemesi olan geometrik süreç güvenirlik, envanter ve kuyruk teorisi, risk ve garanti analizi ile uygulamalı istatistiğin birçok alanında araştırmacılar tarafından sıklıkla kullanılan önemli bir sayma süreci modelidir. Bu uygulama alanları için Pham ve Wang (1996), Pham ve Zhang (1999), Pham (2000), Pham ve Wang (2001) ve Park ve Pham (2010) çalışmaları incelenebilir. Geometrik süreç ile ilgili uygulamalarda, çoğunlukla sürecin bir boyutlu olasılık dağılımına, M ortalama değer (geometrik) ve V varyans fonksiyonu değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Aydoğdu vd. (2013) çalışmalarında ilk olay zamanının üstel dağılım olduğu varsayımı altında geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımını ardışık diferansiyel denklemlerin çözümü olarak elde etmişlerdir. Aydoğdu ve Karabulut (2014) ise ilk olay zamanının Weibull dağılımı olduğu varsayımı altında $N(t)$ nin bir boyutlu olasılık dağılımı için verilen konvolüsyon fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımını elde ederek geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımını hesaplamışlardır. Bu çalışmada ise ilk olay zamanı gamma dağılımına sahip olan geometrik süreç gözönüne alınarak $N(t)$ nin bir boyutlu olasılık dağılımı için verilen konvolüsyon fonksiyonları için bir kuvvet serisi açılımı çıkartılacak ve bu serinin yardımıyla sürecin bir boyutlu dağılımı elde edilecektir. M geometrik fonksiyon birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Analitik olarak elde edilemeyen bu fonksiyon için Braun vd. (2005) ilk olayın gerçekleşme zamanına ait dağılımın üstel dağılım olması durumunda geometrik fonksiyon için alt ve üst sınırlar vermiştir. Tang ve Lam (2007) ise geometrik fonksiyonunun sayısal hesabı için bir sayısal yöntem önermişler ve bu fonksiyonu üstel, gamma, Weibull ve lognormal dağılım durumlarında hesaplamışlardır. Ek olarak, Aydoğdu vd. (2013), Aydoğdu ve Karabulut (2014) çalışmalarında ise geometrik fonksiyon için sırasıyla üstel ve Weibull dağılımlarını gözönüne alarak kuvvet serisi açılımları elde etmişlerdir. Ancak literatürde gamma dağılımı durumunda geometrik fonksiyonun kuvvet serisi açılımı bulunmamaktadır. Pratikte üstel ve Weibull dağılımları kadar sık kullanılan gamma dağılımı için de geometrik fonksiyonun kuvvet serisi açılımı bu çalışma ile elde edilecektir. Geometrik fonksiyon ile ilgili literatürde birçok çalışma olmasına rağmen varyans fonksiyonu ile ilgili sınırlı sayıda çalışma mevcuttur. Aydoğdu ve Altındağ (2015) dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonlarına dayalı olarak varyans fonksiyonunun sayısal hesabını ve Monte Carlo tahminini elde etmişlerdir. Ancak bu çalışmalardaki hesaplamalar oldukça zor ve karmaşık olan dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonları üzerine kuruludur. Bundan dolayı V varyans fonksiyonunun hesabı için daha işlevsel ve uygulaması kolay olan bir yönteme ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaç doğrultusunda, geometrik sürecin ikinci moment fonksiyonu için bir integral denklem elde edilecektir. Bu integral denklem yardımıyla ikinci moment fonksiyonunun hesabı için Tang ve Lam (2007) tarafından geometrik fonksiyon için önerilen sayısal yöntemin bir uyarlaması yapılacaktır. Daha sonra ikinci moment fonksiyonunun üstel, gamma ve Weibull dağılımları durumunda kuvvet serisi açılımı elde edilecek ve hem geometrik hem de ikinci moment fonksiyonlarına ait kuvvet serisi açılımları kullanılarak varyans fonksiyonunun kuvvet serisi açılımı bulunacaktır.

Literatürde, geometrik süreçten gelen bir $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ veri seti gözönüne alınarak geometrik sürecin üç önemli parametresi için hem parametrik hem de parametrik olmayan tahmin edicilerin önerildiği, bu tahmin edicilerin istatistiksel özelliklerinin incelendiği ve hangi tahmin edicinin daha iyi performansa sahip olduğunun gösterildiği çok sayıda çalışma yapılmıştır. Ancak, M geometrik ve V varyans fonksiyonu için tahmin probleminin ele alındığı bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışmada bir geometrik sürece ait olaylar arası geçen zamanlar olan $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri gözlendiğinde F, M ve V fonksiyonlarının tahmin problemi ele alınacaktır. Uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan ve önemli birer yaşam süresi dağılımları olan üstel, Weibull, gamma, lognormal gibi parametrik modeller için F nin bilinmeyen parametrelerinin tahminlerine bağlı olarak F nin tahmini üzerinde durulacaktır. Daha sonra F nin tahminine dayalı olarak M geometrik fonksiyonu için tahmin ediciler önerilecektir. Benzer biçimde V varyans fonksiyonu için önerilecek tahmin ediciler ise yine F nin tahminine dayalı olarak elde edilecektir. Ek olarak, M ve V için elde edilen tahmin edicilerin tutarlılık, yansızlık, asimptotik yansızlık gibi bazı istatistiksel özellikleri incelenecektir. Ayrıca F nin analitik olarak bilinmediği durumlarda M ve V fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmini üzerinde durulacaktır. Önerilen tahmin ediciler için de bazı istatistiksel özellikler incelenecektir.

Bu çalışma aşağıdaki biçimde düzenlenmiştir.

İkinci bölümde, çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlar üzerinde durulmaktadır. Matematiksel bazı tanımlamalar, konvolüsyon işlemi, bağımsız rasgele değişkenlerin toplamının dağılımı, stokastik sıralama, integral denklemler, yenileme denklemi ve çözümü hatırlatılmakta ve bazı önemli yaşam dağılımları verilmektedir. Parametrik olmayan tahmin edicilerin elde edilmesinde araç olarak kullanılacak örneklem dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları tanıtılmakta ve bazı istatistiksel özellikleri incelenmektedir.

Üçüncü bölümde, yenileme süreçlerinin tanımı yapılmakta, yenileme süreci ile ilgili temel kavramlar hatırlatılmakta ve ortalama değer (yenileme) ile varyans fonksiyonları verilmektedir. Yenileme ve varyans fonksiyonları için bazı sınırlar hatırlatılmaktadır.

Daha sonra, geometrik süreç tanıtılmakta ve sürece ilişkin bir boyutlu olasılık dağılımı ile geometrik ve ikinci moment fonksiyonları verilmektedir. Sürecin geometrik fonksiyonunun sağladığı integral denklem hatırlatılarak ikinci moment fonksiyonu için yeni bir integral denklem çıkartılmaktadır. Sonrasında, sürecin varyans fonksiyonu tanımlanmaktadır.

Dördüncü bölümde, Tang ve Lam (2007) tarafından geometrik fonksiyonun hesabı için önerilen yamuk integrasyon kuralı verilerek, bu yöntemin ikinci moment fonksiyonu ve böylece varyans fonksiyonu için bir uyarlaması yapılmaktadır. Daha sonra, geometrik ve varyans fonksiyonlarının sayısal olarak hesabı gerçekleştirilmektedir.

Beşinci bölümde, üstel ve Weibull dağılımları durumunda geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımının ve geometrik fonksiyonunun kuvvet serisi açılımları hatırlatılarak gamma dağılımı durumunda bir boyutlu olasılık dağılımı için ve Erlang dağılımı durumunda geometrik fonksiyon için kuvvet serisi açılımları elde edilmektedir. Ayrıca üstel, Weibull ve Erlang dağılımları gözönüne alınarak geometrik sürecin ikinci moment fonksiyonunun kuvvet serisi açılımları çıkartılmaktadır. Daha sonra, olasılık dağılımının, geometrik, ikinci moment ve varyans fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımları kullanılarak hesabı gerçekleştirilmektedir.

Altıncı bölümde, geometrik ve varyans fonksiyonlarının hem parametrik hem de parametrik olmayan tahmin edicileri önerilmektedir. Önerilen tahmin edicilerin bazı istatistiksel özellikleri incelenmektedir.

Yedinci bölümde, altıncı bölümde önerilen tahmin edicilerin yan ve hata kareler ortalaması (HKO) kriterlerine göre değerlendirilmesi amacıyla simülasyon çalışmaları yapılmaktadır.

Sekizinci ve son bölümde, çalışmada elde edilen sonuçların genel bir değerlendirilmesi verilmektedir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlar üzerinde durulmaktadır. Matematiksel bazı tanımlamalar, konvolüsyon işlemi, bağımsız rasgele değişkenlerin toplamının dağılımı, stokastik sıralama, integral denklemler, yenileme denklemi ve çözümü hatırlatılmakta ve bazı önemli yaşam dağılımları verilmektedir. Parametrik olmayan tahmin edicilerin elde edilmesinde araç olarak kullanılacak örneklem dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları tanıtılmakta ve bazı istatistiksel özellikleri incelenmektedir.

2.1 Matematiksel Bazı Kavramlar

Tanım 2.1: (a_n) bir dizi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ biçimindeki bir ifadeye sonsuz seri veya kısaca seri denir. Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi verildiğinde (a_n) dizisinin ilk n teriminin toplamından oluşan ve $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ ile verilen (s_n) dizisine serinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsak yani, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ve serinin toplamı s dir denir. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri adı verilir.

Teorem 2.1: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

Yukarıda verilen teoremin karşıtı doğru değildir. Yani bir serinin genel teriminin limitinin sıfır olması o serinin yakınsak olmasını gerektirmez. Böylece Teorem 2.1'den şu şekilde bir sonuç çıkarılabilir.

Sonuç 2.1 Eğer bir serinin genel teriminin limiti sıfır değil ise o seri ıraksaktır.

Tanım 2.2: $K_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ile verilen toplama $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kalan terimi denir.

Kalan terim ile serinin yakınsaklık durumu arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.2: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} K_n = 0$ dır.

Bütün serilerin kısmi toplamlar dizisini elde edip ilgili serinin yakınsaklık durumunu incelemek her zaman mümkün olmayabilir. Bu tür durumlarda serinin yakınsaklık durumunun incelenmesi için yakınsaklık testleri adı verilen bazı testler kullanılır. Aşağıda pozitif terimli seriler ve onlarla ilgili bazı testler verilmektedir.

Tanım 2.3: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine pozitif terimli seri denir.

Pozitif terimli serilerin kısmi toplamlar dizisinin monoton artan bir dizidir. Bu durumda pozitif terimli serilerin yakınsak olduğunu göstermek için kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu tip seriler için bazı yakınsaklık testleri ispatsız olarak şöyle verilmektedir.

Teorem 2.3 (Karşılaştırma Testi): Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ ve $a_n \leq Cb_n$ olacak şekilde bir C sabiti mevcut olsun.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır.
b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksaktır.

Teorem 2.4 (Oran Testi): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir pozitif terimli seri ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olsun.

a) $r < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır.
b) $r > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.
c) $r = 1$ ise seri yakınsak da ıraksak da olabilir.

Teorem 2.5 (Raabe Testi): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir pozitif terimli seri ve $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = r$ olsun.

a) $r < -1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır.

b) $r > -1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.
c) $r = -1$ ise seri yakınsak da ıraksak da olabilir.

Şimdi terimlerinin işareti ardışık olarak değişen ve alterne seri olarak adlandırılan seriler için bazı yakınsaklık testleri verilecektir.

Teorem 2.6 (Leibnitz Testi): Eğer

a) Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} \leq a_n$
b) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

şartları sağlanırsa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serisi yakınsaktır.

Tanım 2.4: Terimleri bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin terimlerinin mutlak değerlerinden oluşan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsaktır denir.

Teorem 2.7: Mutlak yakınsak her seri aynı zamanda yakınsaktır.

2.2 Kuvvet Serileri

Tanım 2.5: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ biçiminde verilen bir seriye kuvvet serisi denir. Burada c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

Bir kuvvet serisinin terimleri x e bağlı olduğundan dolayı serinin yakınsaklık veya ıraksaklık durumu da bu x değerlerine göre değişiklik gösterebilmektedir.

Tanım 2.6: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisinin $|x-a| < R$ için yakınsak olduğu en büyük R sayısına bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa da yakınsaklık aralığı denir.

Bir kuvvet serisinin toplamı, yakınsaklık aralığında $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ ile verilen bir f fonksiyonu tanımlar. Bu fonksiyon $(\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k)$ polinom dizisinin limiti olduğundan polinomların sahip olduğu birçok özelliğe sahiptir. Bu durumda kuvvet serilerinin türev ve integrali ile ilgili aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.8 (Terim-Terim Türevlenebilme): $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $\forall x \in (a-R, a+R)$ için $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ olsun. f fonksiyonu $(a-R, a+R)$ aralığında türevlenebilirdir ve $f'(x) = (\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k (x-a)^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}$ dir. Ayrıca $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}$ serilerinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.

Teorem 2.9 (Terim-Terim İntegrallenebilme): $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $\forall x \in (a-R, a+R)$ için $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ olsun. f fonksiyonu integrallenebilirdir ve $\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^x (t-a)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$ dir.

2.3 Taylor Serileri

Bir kuvvet serisinin toplamının, yakınsaklık aralığında bir f fonksiyonu tanımladığı bilinmektedir. Bu bölümde bir fonksiyon verildiğinde bir nokta komşuluğunda ona karşılık gelen seri bulunacaktır.

Tanım 2.7: f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ serisine f fonksiyonu tarafından a noktasında üretilen Taylor serisi denir.

Taylor açılımında özel olarak $a = 0$ alınırsa $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ serisi elde edilir. Bu seriye Maclaurin serisi adı verilir.

2.4 Reel Değerli Fonksiyon Dizilerinde Yakınsaklık

Tanım 2.8: $n = 1,2,\ldots$ için f_n ve f, (Ω, U, μ) ölçü uzayından $\mathbb{R}$'ye tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olsun.

i. a) $A \subset \Omega$ ve $x \in A$ için bir $\epsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ olacak şekilde bir n_0 tamsayısı var ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna x noktasında yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ biçiminde gösterilir.
   b) Eğer $\forall x \in A$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ise (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

ii. Yukarıdaki ifadede $\forall x \in A$ için verilen n_0 tamsayısı sadece ϵ sayısına bağlı, yani x'den bağımsız ise (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

iii. $\mu\left(\left\{x \in \Omega: \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0$ ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{hhhy} f$ ile gösterilir.

Teorem 2.10: $n = 1,2,\ldots$ için f_n ve f (Ω, U, μ) ölçü uzayından $\mathbb{R}$'ye tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi Ω üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise aynı zamanda noktasal yakınsaktır. Ayrıca noktasal yakınsak her fonksiyon dizisi hemen hemen her yerde yakınsaktır. Yani,

$$Düzgün\ Yakınsak \Rightarrow Noktasal\ Yakınsak \Rightarrow Hemen\ hemen\ her\ yerde\ yakınsak$$

dır.

Teorem 2.11: (f_n) fonksiyon dizisinin A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$ olmasıdır.

Reel değerli fonksiyon dizileri ile ilgili bazı önemli yakınsaklık teoremleri aşağıda verilir.

Teorem 2.12 (Sınırlı Yakınsaklık): (Ω, U, μ) $\mu(\Omega) < \infty$ ile bir ölçü uzayı olmak üzere Ω üzerinde tanımlı ölçülebilir (f_n) fonksiyon dizisi hemen hemen her yerde bir f fonksiyonuna yakınsasın, yani $f_n \xrightarrow{hhhy} f$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}^+$ sabiti var, yani (f_n) düzgün sınırlı bir dizi ise f μ ölçüsüne göre integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

dır.

Teorem 2.13 (Monoton Yakınsaklık): (Ω, U, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere Ω üzerinde tanımlı negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir (f_n) dizisini gözönüne alalım. Hemen hemen her yerde $f_n \uparrow f$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

dır.

Teorem 2.14 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık): (Ω, U, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere Ω üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir (f_n) dizisi hemen hemen her yerde bir f fonksiyonuna yakınsasın. $|f_n| \leq g$ olacak şekilde negatif olmayan reel değerli integrallenebilir bir g fonksiyonu var ise f integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

dır (Billingsley, 1995).

Teorem 2.14'ün bir sonucu aşağıda verilir.

Sonuç 2.2 (Weierstrass M-testi): (Ω, U, μ) ölçü uzayında Ω sayılabilir bir küme, U Ω'nın bütün alt kümelerinin oluşturduğu kuvvet kümesi ve μ bir sayma ölçüsü olsun. $|x_{nk}| \leq M_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ ve herbir k için $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ serileri yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ dır (Billingsley, 1995).

Teorem 2.15 (Lebesgue Genişletilmiş Baskın Yakınsaklık): (Ω, U, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere $n = 1,2,\ldots$ için f_n ve g_n, Ω üzerinde tanımlı ve her $n \geq 1$ için $|f_n| \leq g_n$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f_n \xrightarrow{hhhy} f, g_n \xrightarrow{hhhy} g, g_n$ ve g integrallenebilir ve $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

dır (Athreya ve Lahiri, 2006).

Teorem 2.16 (Scheffe): (Ω, U, μ) ölçü uzayı olsun. Bu uzay üzerinde tanımlı negatif olmayan değerli ölçülebilir $f_n, n = 1,2,\ldots$ ve f fonksiyonlarını gözönüne alalım. $f_n \xrightarrow{hhhy} f$ ve $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu < \infty$ ise

$$\sup_{A\in U} \left| \int_A f d\mu - \int_A f_n d\mu \right| \leq \int_\Omega |f_n - f| d\mu \to 0$$

dır (Athreya ve Lahiri, 2006).

Teorem 2.16'da (Ω, U, μ) yerine $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ Lebesgue ölçü uzayı alınsın. $f_n, n = 1,2,\ldots$ ve f fonksiyonları bu uzay üzerinde tanımlı olasılık yoğunluk fonksiyonları olarak seçildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3: Herhangi bir (f_n) olasılık yoğunluk fonksiyonlarının dizisi bir f olasılık yoğunluk fonksiyonuna Lebesgue ölçüsüne göre hemen hemen her yerde yakınsar ise

a) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$

dır. Burada F_n ve F sırasıyla f_n ve f olasılık yoğunluk fonksiyonlarına karşılık gelen mutlak sürekli dağılım fonksiyonlarıdır.

2.5 Konvolüsyon ve Bağımsız Rasgele Değişkenlerin Toplamlarının Dağılımı

Tanım 2.9: F ve G, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi iki dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x)\,, t \in \mathbb{R}$$

ile tanımlanan $F * G$ fonksiyonuna F ve G dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonu denir. Burada " $*$ " Stieltjes konvolüsyon işlemini göstermektedir.

$t < 0$ için $F(t) = G(t) = 0$ şartı sağlanıyor ise $t \geq 0$ iken

$$F * G(t) = \int_{0}^{t} G(t-x)dF(x)\,, t \geq 0$$

olarak ifade edilmektedir.

F ve G, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi iki dağılım fonksiyonu olduğunda konvolüsyon işlemi değişme ve birleşme özelliklerine sahiptir. Bu özellikler aşağıdaki gibi verilmektedir.

F, G ve H fonksiyonları birer dağılım fonksiyonu olsun. $G(-\infty) = 0$ ve $G(t-y) = \int_{-\infty}^{t-y} dG(z)$ olduğundan

$$F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x) dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{t-x} dG(z) \right) dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{t-z} dF(x) \right) dG(z)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-z) dG(z)$$
$$= G * F(t)$$

dır. O halde konvolüsyon işlemi değişme özelliğine sahiptir. Ayrıca

$$F * G * H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (G * H)(t-x) dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (H * G)(t-x) dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x-y) dH(y)\, dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (F * G)(t-y) dH(y)$$
$$= H * (F * G)(t)$$
$$= (F * G) * H(t)$$

olduğundan konvolüsyon işlemi birleşme özelliğine de sahiptir (Feller, 1971).

Tanım 2.10: F fonksiyonu herhangi bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F^{0*}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan dağılıma sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım veya sıfır noktasında Dirac dağılımı denir.

Sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım konvolüsyon işlemine göre birim elemandır. Yani,

$$
\begin{aligned}
F^{0*} * F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-x)dF^{0*}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{0^-} F(t-x)dF^{0*}(x) + \int_{0^-}^{0^+} F(t-x)dF^{0*}(x) + \int_{0^+}^{\infty} F(t-x)dF^{0*}(x) \\
&= F(t-0)\big(F^{0*}(0^+) - F^{0*}(0^-)\big) \\
&= F(t)
\end{aligned}
$$

dir.

Teorem 2.17: X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ve sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonlarına sahip olsun. Bu durumda $X+Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X+Y}(t) = F * G(t)$$

dir. Yani bağımsız iki rasgele değişkeninin toplamının dağılım fonksiyonu, bu rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonuna eşittir (Feller, 1971). Ayrıca F ve G dağılım fonksiyonlarına sırasıyla f ve g olasılık yoğunluk fonksiyonları karşılık geldiğinde $F * G(t)$ dağılım fonksiyonuna da $f * g(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu karşılık gelir. Burada

$$f_{X+Y}(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 2.18: $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve sırasıyla $F_1, F_2, \dots, F_n$ dağılım fonksiyonlarına sahip olsun. Bu durumda $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = F_1 * F_2 * \dots * F_n(t)$$

dir.

Özel olarak $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı F dağılıma sahip rasgele değişkenler olduğunda $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = \underbrace{F * F * \dots * F}_{n\ kez}(t) = F^{n*}(t)$$

dır. F^{n*}, F dağılım fonksiyonunun kendisi ile n kez konvolüsyonudur. F dağılım fonksiyonu f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise F^{n*} dağılım fonksiyonu da f^{n*} olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Burada f^{n*}, f olasılık yoğunluk fonksiyonunun kendisi ile n kez konvolüsyonudur. n bir doğal sayı olmak üzere $F^{(n+1)*}(t) = F^{n*} * F(t)$ dir. $n = 1$ için $F^{1*}(t) = F(t)$ iken $n = 0$ için sıfır noktasında yoğunlaşmış dağılım fonksiyonudur.

2.6 Laplace ve Laplace-Stieltjes Dönüşümleri

Tanım 2.11: X negatif değerler almayan bir rasgele değişken ve f bu rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere Laplace dönüşümü

$$f_L(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx$$

biçiminde ifade edilir. Bazı durumlarda $\mathcal{L}\{f(x); t\}$ ve $f^*(t)$ gösterimleri de kullanılabilir.

$t \geq 0$ için F bir dağılım fonksiyonu ve bu dağılım fonksiyonuna karşılık gelen f olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere $F_L(t)$ ve $f_L(t)$ sırasıyla bu fonksiyonların Laplace dönüşümleri olsun. Bu durumda

- $\mathcal{L}\{F(t)\} = F_L(t) = \frac{1}{t} f_L(t)$
- $c > 0$ sabiti için $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{c} f\left(\frac{1}{c} t\right)\right\} = f_L(ct)$

dir.

X ve Y negatif değerler almayan, sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonları ile karşılık gelen f ve g olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip, birbirlerinden bağımsız rasgele değişkenler olsun. Bu durumda

- $$(f*g)_L(t) = \int_0^\infty e^{-tz}\big(f*g(z)\big)dz = \int_0^\infty e^{-tz} f_{X+Y}(z)dz$$
$$= E\big(e^{-t(X+Y)}\big) = E(e^{-tX})E(e^{-tY})$$
$$= \int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx \int_0^\infty e^{-ty} g(y)dy = f_L(t)g_L(t)$$

- $$(F_{X+Y})_L(t) = \frac{1}{t}(f_{X+Y})_L(t) = \frac{1}{t}(f*g)_L(t) = \frac{1}{t} f_L(t)g_L(t)$$

dir.

Tanım 2.12: $\mathbb{R}$'de sınırlı ve azalmayan bir F fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü

$$F_{LS}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dF(x)\,, t \in \mathbb{R}$$

ile ifade edilir. F ve G $\mathbb{R}$'de tanımlı iki dağılım fonksiyonu olsun. $F_{LS}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dF(x)$ ve $G_{LS}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dG(x)$ olmak üzere

$$(F*G)_{LS}(t) = F_{LS}(t)G_{LS}(t)$$

dir (Kawata, 1972). Ayrıca

$$(F*G)_{LS}(t) = (f*g)_L(t) = f_L(t)g_L(t) = F_{LS}(t)G_{LS}(t)$$

dir.

2.7 Stokastik Sıralama

Tanım 2.13: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve bu uzayda tanımlı herhangi iki rasgele değişken X ve Y olmak üzere her $z \in \mathbb{R}$ için

$$P(X > z) \leq (\geq) P(Y > z)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise X stokastik olarak Y'den küçüktür (büyüktür) denir ve $X \leq_{st} (\geq_{st})\ Y$ ile gösterilir (Ross 1983). Ayrıca bir $X_k, k = 1,2, \ldots$ rasgele değişken dizisi için $X_k \leq_{st} (\geq_{st}) X_{k+1}$ eşitsizliği her k için sağlanıyorsa bu diziye stokastik artan (azalan) denir ve $X_k \uparrow_{st} (\downarrow_{st})$ ile gösterilir.

2.8 İntegral Denklemler

Bilinmeyen bir fonksiyonu integral işareti altında içeren denklemlere integral denklemler denir. İntegral denklemler için sınıflandırma yapılırken farklı değerlendirmeler yapıldığından farklı isimlerle integral denklemler ortaya çıkmaktadır. Fonksiyon tek değişkenli olduğunda genel olarak bir integral denklem

$$u(x)v(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x)$$

olarak verilebilir. Burada a ve b birer sabit, λ bir parametre, $u(x)$, $h(x)$ ve $K(x,t)$ tanım aralığı $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ için bilinen fonksiyonlar $v(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $K(x,t)$ fonksiyonu integral denklemin çekirdeği olarak adlandırılır. Bilinmeyen fonksiyonun yer aldığı konuma göre

a) $\int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x)$

b) $v(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x)$

c) $u(x)v(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x)$

sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü çeşit integral denklem çeşitleri olarak bilinir.

İntegral denklemdeki bilinmeyen fonksiyon birinci dereceden bir fonksiyon ise lineer integral denklem denir. Örneğin

$$v(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)v^2(t)dt = h(x)$$

olarak verilen bir integral denklem lineer olmayan integral denklemdir.

Bir integral denklemin integrasyon sınırlarından en az biri sonsuz ya da çekirdek fonksiyonu tanım aralığına ait en az bir değer için sonsuz veya çekirdek karesi integrallenemeyen bir fonksiyon ise bu integral denkleme singüler integral denklem adı verilir. Ayrıca $A(x,t)$ sınırlı ve $0 < \alpha < 1$ için herhangi bir integral denklemin çekirdeği

$$K(x,t) = \frac{A(x,t)}{|x-t|^\alpha}$$

ise bu tür integral denklemlere zayıf singüler integral denklemler adı verilir.

$$\int_a^x K(x,t)v(t)dt = h(x) \tag{2.1}$$

$$\int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x) \tag{2.2}$$

(2.1) eşitliğindeki gibi integrasyon sınırlarından biri x gibi bir değişken ise bu denkleme Volterra integral denklemi denir. (2.2) eşitliğindeki gibi integral sınırlarının her ikisi de sabit olabileceği gibi biri sabit diğeri sonsuz veya her ikisi de sonsuz olabilir. Her iki sınırı da sonsuz olan denklemlere Fredholm integral denklemi adı verilir. Volterra integral denklemi, Fredholm integral denkleminin özel bir halidir.

$K(x,t)$ $(x-t)$ yi değişken kabul eden tek değişkenli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$v(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)v(t)dt = h(x) \tag{2.3}$$

ile verilen denkleme konvolüsyon integral denklemi adı verilir. Eğer $t < 0$ ve $x - t < 0$ iken $K(x - t) = 0$ ise (2.3) integral denklemi

$$v(x) - \lambda \int_0^t K(x - t)v(t)dt = h(x)$$

ile verilen konvolüsyon çekirdekli Volterra integral denklemi olacaktır (Aydoğdu, 1997).

2.9 Yenileme Denklemi ve Çözümü

Tanım 2.15: A bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere bir F dağılım fonksiyonu ile a fonksiyonu bilinen birer fonksiyon olsun. Bu durumda

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t - x)dF(x)\,, t \geq 0 \tag{2.4}$$

ile verilen integral denkleme bir yenileme denklemi denir (Karlin ve Taylor, 1975).

Teorem 2.19: a sınırlı bir fonksiyon olmak üzere (2.4) integral denkleminin sonlu aralıklar üzerinde sınırlı bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t - x)d\left(\sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(x)\right), t \geq 0$$

dir (Karlin ve Taylor, 1975).

2.10 Bazı Önemli Yaşam Dağılımları

2.10.1 Üstel dağılım

Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}}, x > 0\,; \theta > 0$$

olan X rasgele değişkeni θ parametreli üstel dağılıma sahiptir denir ve X~Üstel(θ) ile gösterilir. Üstel dağılımda $E(X) = \theta$ ve $Var(X) = \theta^2$ dir.

Üstel dağılım birçok bakım-onarım ve yer değiştirme problemlerinde ve güvenirlik teorisindeki diğer analizlerde sıkça kullanılan önemli bir dağılımdır. Bunun en önemli nedeni hafızasızlık özelliğini taşımasıdır. Hafızasızlık özelliği

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s),\ \forall s, t\ > 0$$

ile tanımlanır. Böylece yaşam süresi üstel dağılımlı t yaşındaki bir birimin en az $s + t$ süre çalışması olasılığı, yeni birimin en az s süre çalışması olasılığına eşit olacaktır. Bilindiği üzere sürekli dağılımlar ailesi içerisinde yukarıdaki fonksiyonel denklemi, yani hafızasızlık özelliğini sağlayan tek dağılım üstel dağılımdır.

2.10.2 Weibull dağılımı

Y~Üstel(θ) olsun. $\alpha > 0$ için $X = Y^{1/\alpha}$ dönüşümü ile verilen X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x^{\alpha}}{\theta}}, x > 0\,; \theta > 0\,, \alpha > 0$$

biçiminde elde edilir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir X rasgele değişkeni α ve θ parametreli Weibull dağılımına sahiptir denir ve $X \sim \mathrm{W}(\alpha,\theta)$ ile gösterilir. Weibull dağılımında $E(X) = \theta^{1/\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$ ve $Var(X) = \theta^{2/\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right]$ dir. Burada α şekil parametresi, θ ise ölçek parametresidir.

2.10.3 Gamma dağılımı

Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\theta}}, x > 0\,; \alpha > 0\,, \theta > 0$$

olan X rasgele değişkenine α ve θ parametreli gamma dağılımına sahiptir denir ve $X \sim \Gamma(\alpha,\theta)$ ile gösterilir. Gamma dağılımında $E(X) = \alpha\theta$ ve $Var(X) = \alpha\theta^2$ dir. α şekil parametresi iken θ ölçek parametresidir. Şekil parametresi α nın tamsayı olması durumunda gamma dağılımı, Erlang dağılımı olarak adlandırılır. Ayrıca $\alpha = 1$ iken $X \sim$Üstel(θ) olur.

2.10.4 Lognormal dağılım

Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{x\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(lnx-\delta)^2}{2\tau^2}}, x > 0\,; \delta \in \mathbb{R}\,, \tau > 0$$

olan X rasgele değişkenine δ ve τ parametreli lognormal dağılımına sahiptir denir ve $X \sim \mathrm{LN}(\delta,\tau)$ ile gösterilir. $X \sim \mathrm{LN}(\delta,\tau)$ ise $E(X) = e^{\delta+\frac{\tau^2}{2}}$ ve $Var(X) = (e^{\tau^2} - 1)e^{2\delta+\tau^2}$ dir.

2.11 Örneklem Dağılım ve Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

2.11.1 F nin değerinin parametrik olmayan tahmini

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ F dağılım fonksiyonu ve karşılık gelen sürekli bir f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir kitleden alınmış n birimlik rasgele bir örneklem olsun. Bu örnekleme dayalı olarak

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}[X_1, X_2, \dots, X_n \text{ lerden } x \text{ den küçük olanların sayısı}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x)}{n}, x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

ile verilen F_n fonksiyonuna örneklem (deneysel) dağılım fonksiyonu denir. Burada $I(.)$ gösterge fonksiyonudur. Örneklem dağılım fonksiyonu $\hat{F}_n(x)$, $F(x)$ dağılım fonksiyonunun parametrik olmayan bir tahmin edicisidir ve Glivenko-Cantelli lemması gereğince güçlü tutarlı bir tahmin edici olduğu bilinmektedir, yani $n \to \infty$ iken $P\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| \to 0\right\}\right) = 1$ olduğundan $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{hhhy} F(x)$ dir.

2.11.2 f nin değerinin parametrik olmayan tahmini

Örneklem dağılım fonksiyonu yardımıyla örneklem yoğunluk fonksiyonu verilebilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu için aşağıda ifade edilen sonuçlar ispatsız olarak verilecektir. Aşağıdaki sonuçların teorik alt yapısı için Parzen (1962) incelenebilir.

$n = 1,2, \dots$ için $h_n > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ olmak üzere

$$f_n(x) = \frac{\hat{F}_n(x + h_n) - \hat{F}_n(x - h_n)}{2h_n}, x \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

istatistiğine örneklem yoğunluk fonksiyonu denir.

(2.6) eşitliğinin gözönüne alınması ve bir $g(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla, $f(x)$ olasılık fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahmin edici

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n} g\left(\frac{x-X_j}{h_n}\right) \tag{2.7}$$

ile verilir. Bu tahmin edicinin asimptotik yansızlık, güçlü tutarlılık ve asimptotik normallik gibi bazı istatistiksel özelliklerini incelemek için g olasılık yoğunluk fonksiyonu ve h_n dizisi için bazı şartların sağlanması gerekmektedir.

g fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayan bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun.

1. $\sup\{g(x): x \in \mathbb{R}\} < \infty$
2. $|x| \to \infty$ $iken$ $\lim|xg(x)| = 0$ (2.8)
3. $g(-x) = g(x), x \in \mathbb{R}$

Teorem 2.20: g fonksiyonu (2.8)'de verilen özellikleri sağlayan bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $n = 1,2,\dots$ için $h_n > 0$ iken $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ olmak üzere (2.7)'de verilen $\hat{f}_n(x)$, $f(x)$ için asimptotik yansız bir tahmin edici, yani $E(\hat{f}_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ dir.

Teorem 2.21: Teorem 2.20'nin şartları altında ve $\lim\limits_{n\to\infty} nh_n = \infty$ ise $\hat{f}_n(x)$, $f(x)$'e ikinci momentte yakınsar, yani $E\left(\left|\hat{f}_n(x) - f(x)\right|^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dir.

Teorem 2.22: Teorem 2.21'in şartları altında ve f'nin sürekli olduğu her $x \in \mathbb{R}$ noktasında $\frac{\hat{f}_n(x)-E(\hat{f}_n(x))}{\sqrt{Var(\hat{f}_n(x))}} \xrightarrow[n\to\infty]{} Z\sim N(0,1)$ dir.

Teorem 2.23: f düzgün fonksiyonların sınıfında bulunan bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. Teorem 2.20'nin şartları altında ve $\lim_{n\to\infty} n(h_n)^2 = \infty$ ise $\hat{f}_n(x) \xrightarrow{hhhy} f(x)$ dir.

(2.8)'de verilen özellikleri sağlayan birçok g olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunabilir. Örneğin g, ortalaması 0 varyansı 1 olan normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu olursa (2.8) ile verilen özellikleri sağlar. $n = 1,2, \dots$ için h_n dizisinin de birçok seçimi vardır. Bunun için bir örnek aşağıdaki gibi verilebilir.

Örnek 1. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, bilinmeyen bir f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir kitleden alınmış n birimlik rasgele bir örneklem olsun. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ olarak seçilsin. Bu durumda $|g(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ olup $\sup\{g(x): x \in \mathbb{R}\} < \infty$ bulunur. $x > 1$ iken $e^x < e^{x^2}$ olduğundan $e^{-x^2/2} < e^{-x/2}$ olacaktır. Böylece $xe^{-x^2/2} < xe^{-x/2} = \frac{x}{e^{x/2}}$ bulunur. $0 < \theta < 1$ olmak üzere $e^t = 1 + te^{\theta t}$ açılımında t yerine $x/2$ alınırsa $\frac{x}{e^{x/2}} = \frac{x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{\theta x}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{\frac{\theta x}{2}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ olup $xe^{-x^2/2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ bulunur. Buradaki yönteme benzer olarak $|x| \to \infty$ iken $\lim|xg(x)| = 0$ olduğu da gösterilebilir. Ayrıca $g(-x) = g(x), x \in \mathbb{R}$ olacaktır. Böylece (2.8)'de verilen özellikler sağlanır. Şimdi $h_n = \frac{1}{n^{1/4}}$ alınsın. Buradan $h_n > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ dır. Ayrıca $nh_n = n^{3/4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ve $n(h_n)^2 = n^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ olur. Bu durumda (2.7) ile verilen tahmin edici

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, n^{3/4}} \sum_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{(x-X_j)^2}{2n^{1/2}}\right) \tag{2.9}$$

olarak elde edilir (Roussas, 1997).

3. YENİLEME VE GEOMETRİK SÜREÇLER

Bu bölümde, yenileme süreçlerinin tanımı yapılmakta, yenileme süreci ile ilgili temel kavramlar ve ortalama değer (yenileme) ile varyans fonksiyonları verilmektedir. Yenileme ve varyans fonksiyonları için bazı sınırlar hatırlatılmaktadır. Daha sonra, geometrik süreç tanıtılarak sürece ilişkin bir boyutlu olasılık dağılımı ile geometrik ve ikinci moment fonksiyonları verilmektedir. Sürecin geometrik fonksiyonunun sağladığı integral denklem verildikten sonra ikinci moment fonksiyonu için yeni bir integral denklem elde edilmektedir. Sonrasında, sürecin varyans fonksiyonu tanımlanmaktadır.

3.1 Yenileme Süreçleri

$N(t)$, $(0,t]$ aralığında meydana gelen olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci adı verilir. $\{N(t), t \geq 0\}$, $T = [0,\infty)$ sürekli parametreli ve $E = \{0,1,2,\ldots\}$ kesikli durum uzaylı bir sayma sürecidir. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci şu özelliklere sahiptir.

i. $N(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$,
ii. $N(t)$ negatif olmayan tamsayı değerli bir rasgele değişkendir,
iii. Eğer $s < t$ ise $N(s) \leq N(t)$ ‘dir,
iv. $s < t$ için $N(t) - N(s)$, $(s,t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

Tanım 3.1: $X_1, X_2, X_3, \ldots$ negatif değerler almayan bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. $k = 1,2,\ldots$ için $S_0 = 0$ ve $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ olmak üzere $N(t) = sup\{k: S_k \leq t\}$ ile tanımlanan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine bir yenileme süreci denir.

Her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$, yenileme rasgele değişkeni olarak adlandırılır. $N(t)$, $(0,t]$ aralığında gerçekleşen belli bir türden yenilemelerin sayısı sayan, negatif değerler almayan, tamsayı değerli bir rasgele değişkendir ve her sabit $t \geq 0$ için sonludur. Ayrıca $\{N(t) \geq n\}$ olayı $\{S_n \leq t\}$ olayına denk olduğundan $P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$ dır.

X_1, ilk yenileme zamanı olmak üzere X_k, $(k-1)$. yenileme gerçekleştikten sonra k. yenileme gerçekleşinceye kadar geçen zamanı gösterirken S_k, k. yenileme zamanıdır. Matematiksel olarak bir yenileme sürecine negatif değerler almayan, bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir $\{X_k, k = 1,2,\dots\}$ dizisi olarak bakılabilir. Bu durumda $S_0 = 0$ ve $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, $k = 1,2,\dots$ ile verilen k. varış zamanının dağılım fonksiyonu Teorem 2.18'e göre $F^{k*}(t)$ ile verilmektedir. Ayrıca $k = 1,2,\dots$ için $F^{k*}(t) \leq F^k(t)$ dir.

Her sabit $t \geq 0$ için yenileme rasgele değişkeni $N(t)$ nin olasılık dağılımı

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k+1) \\ &= P(S_k \leq t) - P(S_{k+1} \leq t) \\ &= F^{k*}(t) - F^{(k+1)*}(t), k = 1,2,\dots \end{aligned}$$

ile verilir.

Teorem 3.1: $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun. $N(t)$ rasgele değişkeninin her mertebeden momentleri sonludur, yani her $t \geq 0$ ve $r \geq 0$ için $E\left(N^r(t)\right) < \infty$'dır (Smith 1958, Ross 1983).

3.1.1 Yenileme ve varyans fonksiyonları

Tanım 3.2: $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$M(t) = E\big(N(t)\big), t \geq 0 \tag{3.1}$$

ile tanımlanan M fonksiyonuna yenileme sürecinin ortalama değer fonksiyonu veya kısaca yenileme fonksiyonu denir.

$M(t), (0, t]$ aralığında gerçekleşen yenilemelerin beklenen sayısıdır. Yenileme sürecinin bütün mertebeden momentlerinin sonlu olması nedeniyle yenileme fonksiyonu da sonludur, yani her $t \geq 0$ için $M(t) < \infty$ dur. Yenileme fonksiyonu F dağılım fonksiyonunun konvolüsyonlarına bağlı olarak

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)\,, t \geq 0$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca bu ifade yardımıyla $M(t)$ yenileme fonksiyonunun azalmayan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu gösterilebilir. Bununla birlikte yenileme fonksiyonu için $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$ olup $t \to \infty$ iken 1'e yakınsamaması dışında dağılım fonksiyonu özelliklerine sahiptir. $M(t)$ için bir integral denklem ise (3.1) ifadesinin ilk yenileme zamanı X_1 üzerinden koşullandırması ile

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x)\,, t \geq 0 \tag{3.2}$$

olarak elde edilir.

Tanım 3.3: $\{N(t), t \ \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$V(t) = Var\big(N(t)\big), t \geq 0$$

ile tanımlanan V fonksiyonuna yenileme sürecinin varyans fonksiyonu denir.

Yenileme sürecinin bütün mertebeden momentlerinin sonlu olması nedeniyle varyans fonksiyonu da sonludur, yani her $t \geq 0$ için $V(t) < \infty$ dur. Bir yenileme sürecinin varyans fonksiyonu

$$V(t) = E\big(N^2(t)\big) - E\big(N(t)\big)^2, t \geq 0 \tag{3.3}$$

olmak üzere $E\big(N^2(t)\big)$ ifadesi ilk yenileme zamanı X_1 üzerinden koşullandırma ile varyans fonksiyonu için bilinen

$$V(t) = M(t)\big(1 - M(t)\big) + 2\int_0^t M(t-x)dM(x)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca V varyans fonksiyonu

$$V(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t) + \int_0^t V(t-x)dF(x) \tag{3.4}$$

integral denklemini sağlar. Bununla birlikte V varyans fonksiyonunu F dağılım fonksiyonunun konvolüsyonlarına bağlı olarak

$$V(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)\,(1 + \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)), t \geq 0$$

biçiminde yazılabilir.

3.1.2 Yenileme ve varyans fonksiyonları için bazı sınırlar

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere yenileme fonksiyonu için bir sınır aşağıdaki gibi verilir.

En az bir $t_0 \geq 0$ için $F(t_0) < 1$ iken $F(t_0) < \frac{c}{1+c}$ olacak biçimde bir $c > 0$ sabiti vardır. Bu durumda her $t \leq t_0$ için $M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(F(t))^k \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{1+c}\right)^k = c$'dir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere varyans fonksiyonu için bir sınır aşağıdaki gibi verilir.

$B(t) = E\binom{N(t)}{2}$, yani $B(t)$ $N(t)$'nin ikinci binom momenti olsun.

$$B(t) = \sum_{k=2}^{\infty}\binom{k}{2}P(N(t) = k) = \sum_{k=2}^{\infty}\binom{k}{2}(F^{k*}(t) - F^{(k+1)*}(t))$$

olup her iki tarafın Laplace-Stieltjes dönüşümünün alınmasıyla

$$B_{LS}(t) = \sum_{k=2}^{\infty}\binom{k}{2}F_{LS}^{k}(t)\big(1 - F_{LS}(t)\big)$$

$$= \frac{F_{LS}^2(t)}{2\left(1-F_{LS}(t)\right)} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) F_{LS}^{k-2}(t)\left(1-F_{LS}(t)\right)^2$$

$$= \left(\frac{F_{LS}(t)}{1-F_{LS}(t)}\right)^2$$

bulunur. Yenileme fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü $M_{LS}(t) = \frac{F_{LS}(t)}{1-F_{LS}(t)}$ olduğundan

$$B_{LS}(t) = (M_{LS}(t))^2$$

elde edilir ve buradan

$$B(t) = M * M(t), t \geq 0$$

sonucuna ulaşılır. $E\left(N^2(t)\right) = 2B(t) + M(t)$ olup

$$V(t) = M(t)\left(1 - M(t)\right) + 2M * M(t), t \geq 0 \tag{3.5}$$

yazılabilir. $F(t_0) < 1$ iken bir $c > 0$ sabiti ile her $t \leq t_0$ için $M(t) \leq c$ olduğunu biliyoruz. $M * M(t) \leq M^2(t)$ ifadesinin gözönüne alınmasıyla (3.5)'den her $t \leq t_0$ için

$$V(t) \leq c(1 + c)$$

eşitsizliğine ulaşılır (Aydoğdu 1997).

3.2 Geometrik Süreçler

Bu bölümde trende sahip bir veri setinin modellenmesi için önerilen ve stokastik monoton bir sayma süreci olan geometrik süreç tanıtılacaktır. Sürece ilişkin bir boyutlu olasılık dağılımı ile ortalama değer (geometrik) ve ikinci moment fonksiyonları verilecektir. Sürecin ortalama değer fonksiyonunun sağladığı integral denklem hatırlatılarak ikinci moment fonksiyonu için yeni bir integral denklem çıkarılacaktır. Sonrasında, sürecin varyans fonksiyonu tanımlanacaktır.

Tanım 3.4: X_1 ilk olayın gerçekleşme zamanı ve X_k, $(k-1)$. olay gerçekleştikten sonra k. olay gerçekleşinceye kadar geçen zamanı göstermek üzere $\{a^{k-1}X_k, k = 1,2,\ldots\}$ rasgele değişkenlerin bir dizisi bağımsız ve aynı dağılımlı olacak şekilde bir $a > 0$ reel sayısı varsa $\{X_k, k = 1,2,\ldots\}$ dizisi üzerine kurulu bir $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine a oranlı bir geometrik süreç denir.

Geometrik süreç Wang ve Pham (1996) tarafından $a = 1/\alpha$ oran parametresi ile sözde-yenileme süreci olarak da adlandırılmaktadır.

$\{N(t), t \geq 0\}$, a oranlı ve ilk olayın gerçekleşme zamanının dağılımı F olan bir geometrik süreç olsun. Bu durumda X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, ilk olayın gerçekleşme zamanına ait dağılım fonksiyonu ile tek olarak belirlenir. Yani, $F_{X_k}(x) = F(a^{k-1}x), k = 1,2,\ldots$ dir. Buradan $a < 1$ için geometrik süreç stokastik artan olup $a > 1$ için stokastik azalandır. $a = 1$ iken geometrik süreç bir yenileme süreci olur. $S_0 = 0$ ve $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ olmak üzere $S_k, k.$ olayın gerçekleşme zamanının dağılım fonksiyonu ise Teorem 2.18 gereğince $F_1 * F_2 * \ldots * F_k(t)$ ile verilmektedir. Ayrıca $F_1(t) = F(t)$ olmak üzere $a \leq (>)\ 1$ için $F_1 * F_2 * \ldots * F_k(t) \leq (\geq)\ F^{k*}(t) \leq (\geq)\ F^k(t), k = 1,2,\ldots$ dir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ a oran parametresi ile bir geometrik süreç olsun. $S_0 = 0$ ve $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ olmak üzere her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımı

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k+1) \\ &= P(S_k \leq t) - P(S_{k+1} \leq t) \\ &= F_1 * F_2 * \ldots * F_k(t) - F_1 * F_2 * \ldots * F_{k+1}(t) \qquad (3.6) \end{aligned}$$

ile verilir.

Teorem 3.2: $\{N(t), t\ \geq 0\}$, a oran parametresi ile bir geometrik süreç olsun. $a \leq 1$ için $N(t)$ rasgele değişkeni her mertebeden sonlu momentlere sahiptir. $a > 1$ iken $\theta =$

$\inf\{x: F(x) > F(0)\}$ olmak üzere $t > \frac{a\theta}{a-1}$ için $N(t)$ rasgele değişkeni sonlu momentlere sahip değildir (Lam 2007).

3.2.1 Geometrik ve varyans fonksiyonları

Tanım 3.5: $\{N(t), t \geq 0\}$ a oran parametresi ile bir geometrik süreç olmak üzere

$$M(t) = E\big(N(t)\big), t \geq 0 \tag{3.7}$$

ile tanımlanan M fonksiyonuna geometrik sürecinin ortalama değer fonksiyonu veya kısaca geometrik fonksiyon denir.

$M(t), (0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların ortalama sayısıdır. $M(t)$ geometrik fonksiyon dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonlarına bağlı olarak

$$M(t) \;= \sum_{k=1}^{\infty} F_1 * \ldots * F_k(t), \;\; t \geq 0 \tag{3.8}$$

biçiminde yazılabilir. $M(t)$ için bir integral denklem (3.7) ifadesinin ilk olay zamanı X_1 üzerinden koşullandırılması ile

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(a(t-x))dF(x), t \geq 0 \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. $a \leq 1$ için geometrik sürecin her mertebeden momentleri sonlu olduğundan her $t \geq 0$ için $M(t)$ geometrik fonksiyon sonludur. $a > 1$ iken $\theta = \inf\{x: F(x) > F(0)\}$ olmak üzere $t > \frac{a\theta}{a-1}$ için $M(t)$ sonlu değildir (Lam 2007 ve Braun vd. 2005).

Tanım 3.6: $\{N(t), t \geq 0\}$ a oran parametresi ile bir geometrik süreç olmak üzere

$$M_2(t) = E\big(N^2(t)\big), t \geq 0 \tag{3.10}$$

ile tanımlanan M_2 fonksiyonuna geometrik sürecinin ikinci moment fonksiyonu denir.

$M_2(t)$ ikinci moment fonksiyonu dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonlarına bağlı olarak

$$M_2(t) \ = 2\sum_{k=1}^{\infty} k(F_1 * \dots * F_k(t)) - \sum_{k=1}^{\infty} F_1 * \dots * F_k(t), t \geq 0 \tag{3.11}$$

biçiminde yazılabilir.

Geometrik sürecin ikinci moment fonksiyonu için bir integral denklem aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.3: $\{N(t), t \geq 0\}$, a oranlı bir geometrik süreç olsun. $M_2(t)$ ikinci moment fonksiyonu

$$M_2(t) = 2M(t) - F(t) + \int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)\, dF(x), t \geq 0 \tag{3.12}$$

integral denklemini sağlar (Pekalp ve Aydoğdu 2018).

İspat. (3.10) ile verilen ifade ilk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 = x$ üzerinden koşullandırarak

$$M_2(t) = E\big(N^2(t)\big) = \int_0^{\infty} E(\,N^2(t)|X_1 = x)dF(x)$$

bulunur. $E(N^2(t)|X_1 = x) = E(1 + N\big(a(t-x)\big))^2, x < t$ ve $E(N^2(t)|X_1 = x) = 0, x \geq t$ olduğunun göz önüne alınmasıyla ilgili eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} M_2(t) &= \int_0^t E(1 + N\big(a(t-x)\big))^2\, dF(x) \\ &= \int_0^t dF(x) + 2\int_0^t E\Big(N\big(a(t-x)\big)\Big)\, dF(x) + \int_0^t E\Big(N^2\big(a(t-x)\big)\Big)\, dF(x) \\ &= F(t) + 2\int_0^t M(a(t-x))\, dF(x) + \int_0^t M_2(a(t-x))\, dF(x) \end{aligned}$$

Geometrik fonksiyon için verilen (3.9) integral denklemi yardımıyla

$$M_2(t) = 2F(t) + 2\int_0^t M(a(t-x))\,dF(x) - F(t) + \int_0^t M_2(a(t-x))\,dF(x)$$

$$= 2M(t) - F(t) + \int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)\,dF(x),\ t \geq 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.■

$a \leq 1$ için geometrik sürecin her mertebeden momentleri sonlu olduğundan her $t \geq 0$ için $M_2(t)$ ikinci moment fonksiyonu sonludur. $a > 1$ iken $\theta = \inf\{x: F(x) > F(0)\}$ olmak üzere $t > \frac{a\theta}{a-1}$ için $M_2(t)$ sonlu değildir.

Tanım 3.7: $\{N(t), t \geq 0\}$ a oran parametresi ile bir geometrik süreç olmak üzere

$$V(t) = M_2(t) - \big(M(t)\big)^2, t \geq 0 \tag{3.13}$$

ile verilir.

Ayrıca (3.8) ve (3.11) ’den varyans fonksiyonu $V(t)$ için

$$V(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k(F_1 * \dots * F_k(t)) - M(t)\big(1 + M(t)\big), t \geq 0 \tag{3.14}$$

bulunur. $a \leq 1$ iken a oranlı bir geometrik sürecin bütün mertebeden momentleri sonludur. Böylece $a \leq 1$ olduğunda $V(t)$ varyans fonksiyonu da her $t \geq 0$ için sonlu olacaktır. $a > 1$ ve $F(t) > 0$ olsun. Her $t > 0$ için $M(t)$ sonlu olmayacaktır. Bu durumda $V(t)$ varyans fonksiyonu da sonlu değildir.

4. $M(t)$ ve $V(t)$ FONKSİYONLARININ SAYISAL HESABI

Bu bölümde Tang ve Lam (2007) tarafından geometrik fonksiyon $M(t)$ nin hesabı için önerilen yamuk integrasyon kuralı hatırlatılarak, bu yöntemin ikinci moment fonksiyonu $M_2(t)$ ve böylece varyans fonksiyonu $V(t)$ için bir uyarlaması yapılacaktır. Daha sonra, geometrik ve varyans fonksiyonlarının sayısal olarak hesabı gerçekleştirilecektir.

Yamuk integral kuralına göre $\int_a^b g(t)dt$ tipindeki bir integralinin yaklaşık hesabı

$$\int_a^b g(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{g(t_{i-1}) + g(t_i)}{2}(t_i - t_{i-1})$$

$$= \frac{h}{2} g(t_0) + h \sum_{i=1}^{n-1} g(t_i) + \frac{h}{2} g(t_n)$$

ile verilir. Burada $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ noktaları $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ olacak şekilde $[a, b]$ aralığının bir parçalanışıdır ve $i = 0,1, \dots, n$ için $h = \frac{b-a}{n}$ ve $t_i = a + ih$ 'dir.

Şimdi $a < 1$ olmak üzere $M(t)$ için verilen (3.9) integral denklemini gözönüne alalım. İlk olayın gerçekleşme zamanına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu f iken (3.9) da verilen integral denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M\big(a(t-x)\big) f(x) dx\,, t \geq 0.$$

Yukarıdaki ifadede $s = a(t-x)$ dönüşümü yaparak

$$M(t) = F(t) + \frac{1}{a}\int_0^{at} M(s)\, f\left(t - \frac{s}{a}\right) ds, t \geq 0$$

bulunur. $T > 0$ olmak üzere $t \in [0, T]$ ve $f(0) = 0$ olsun. $i = 0,1, \dots, n$ için $h = \frac{T}{n}$ ve $t_i = ih$ alınsın.

$$M(t_i) = F(t_i) + \frac{1}{a}\int_0^{at_i} M(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds$$

$$= F(t_i) + \frac{1}{a}\int_0^{t_{[ai]}} M(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds + \frac{1}{a}\int_{t_{[ai]}}^{at_i} M(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds \qquad (4.1)$$

yazılabilir. Burada at_i $[0, T]$ aralığının $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ parçalanmasına ait olmak zorunda olmadığından $[0, at_i]$ integral aralığı $[0, t_{[ai]}]$ ve $[t_{[ai]}, at_i]$ alt aralıklarına parçalanmıştır.

$$I_1 = \frac{1}{a}\int_0^{t_{[ai]}} M(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds$$

ve

$$I_2 = \frac{1}{a}\int_{t_{[ai]}}^{at_i} M(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds$$

olsun. $[0, t_{[ai]}]$ aralığının $\{0, h, 2h, \dots, [ai]h\}$ parçalanışı ile yamuk integral kuralına göre

$$I_1 = \frac{1}{a}\int_0^{t_{[ai]}} M(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds$$

$$\approx \frac{h}{2a} M(t_0) f\left(t_i - \frac{t_0}{a}\right) + \frac{h}{a}\sum_{k=1}^{[ai]-1} M(t_k) f\left(t_i - \frac{t_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} M\left(t_{[ai]}\right) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right)$$

$$= \frac{h}{a}\sum_{k=1}^{[ai]-1} M(t_k) f\left(t_i - \frac{t_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} M\left(t_{[ai]}\right) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right), \qquad (4.2)$$

yazılır. Burada $M(0) = 0$ dır. Benzer olarak I_2 integralinin hesabı ise $[t_{[ai]}, at_i]$ aralığındaki başlangıç ve bitiş noktalarının yardımıyla yamuk integral kuralının kullanılması ile

$$I_2 = \frac{1}{a}\int_{t_{[ai]}}^{at_i} M(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds$$

$$\approx \frac{at_i - t_{[ai]}}{2a}\left(M\left(t_{[ai]}\right) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right) + M(at_i) f(0)\right)$$

$$= \frac{at_i - t_{[ai]}}{2a}\left(M\left(t_{[ai]}\right) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right)\right) \qquad (4.3)$$

bulunur. (4.2) ve (4.3) denklemleri (4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$M(t_i) \approx F(t_i) + \frac{h}{a}\sum_{k=1}^{[ai]-1} M(t_k) f\left(t_i - \frac{t_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} M\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right) + \frac{at_i - t_{[ai]}}{2a}\left(M\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right)\right) \tag{4.4}$$

bulunur. $M(t_i)$'nin yaklaşık değeri $\widetilde{M}(t_i)$ olmak üzere $M(0) = 0$ olduğundan $\widetilde{M}(t_i)$ ardışık olarak aşağıdaki denklemden hesap edilir.

$$\widetilde{M}(t_i) = F(t_i) + \frac{h}{a}\sum_{k=1}^{[ai]-1} \widetilde{M}(t_k) f\left(t_i - \frac{t_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} \widetilde{M}\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right) + \frac{at_i - t_{[ai]}}{2a}\left(\widetilde{M}\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right)\right). \tag{4.5}$$

Şimdi $a < 1$ olmak üzere $M_2(t)$ için verilen (3.12) integral denklemini gözönüne alalım. İlk olayın gerçekleşme zamanına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu f iken (3.12) de verilen integral denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M_2(t) = 2M(t) - F(t) + \int_0^t M_2\big(a(t-x)\big) f(x)dx, t \geq 0.$$

Yukarıdaki ifadede $s = a(t - x)$ dönüşümü yaparak

$$M_2(t) = 2M(t) - F(t) + \frac{1}{a}\int_0^{at} M_2(s) f\left(t - \frac{s}{a}\right) ds, t \geq 0$$

bulunur. $T > 0$ olmak üzere $t \in [0, T]$ ve $f(0) = 0$ olsun. $i = 0,1, \dots, n$ için $h = \frac{T}{n}$ ve $t_i = ih$ alınsın.

$$\begin{aligned} M_2(t_i) &= 2M(t_i) - F(t_i) + \frac{1}{a}\int_0^{at_i} M_2(s) f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds \\ &= 2M(t_i) - F(t_i) + \frac{1}{a}\int_0^{t_{[ai]}} M_2(s) f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds + \frac{1}{a}\int_{t_{[ai]}}^{at_i} M_2(s) f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds \end{aligned} \tag{4.6}$$

yazılabilir. Burada at_i $[0, T]$ aralığının $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ parçalanmasına ait olmak zorunda olmadığından $[0, at_i]$ integral aralığı $[0, t_{[ai]}]$ ve $[t_{[ai]}, at_i]$ alt aralıklarına parçalanmıştır.

$$I_1 = \frac{1}{a}\int_0^{t_{[ai]}} M_2(s) f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds$$

ve

$$I_2 = \frac{1}{a}\int_{t_{[ai]}}^{at_i} M_2(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds$$

olsun. $[0, t_{[ai]}]$ aralığının $\{0, h, 2h, \dots, [ai]h\}$ parçalanışı ile yamuk integral kuralına göre

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a}\int_0^{t_{[ai]}} M_2(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds \\ &\approx \frac{h}{2a} M_2(t_0) f\left(t_i - \frac{t_0}{a}\right) + \frac{h}{a}\sum_{k=1}^{[ai]-1} M_2(t_k) f\left(t_i - \frac{t_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} M_2\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right) \\ &= \frac{h}{a}\sum_{k=1}^{[ai]-1} M_2(t_k) f\left(t_i - \frac{t_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} M_2\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right), \end{aligned} \tag{4.7}$$

yazılır. Burada $M_2(0) = 0$ dır. Benzer olarak I_2 integralinin hesabı ise $[t_{[ai]}, at_i]$ aralığındaki başlangıç ve bitiş noktalarının yardımıyla yamuk integral kuralının kullanılması ile

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{a}\int_{t_{[ai]}}^{at_i} M_2(s)\, f\left(t_i - \frac{s}{a}\right) ds \\ &\approx \frac{at_i - t_{[ai]}}{2a}\left(M_2\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right) + M_2(at_i) f(0)\right) \\ &= \frac{at_i - t_{[ai]}}{2a}\left(M_2\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

bulunur. (4.7) ve (4.8) denklemleri (4.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$M_2(t_i) \approx 2M(t_i) - F(t_i) + \frac{h}{a}\sum_{k=1}^{[ai]-1} M_2(t_k) f\left(t_i - \frac{t_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} M_2\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right) + \frac{at_i - t_{[ai]}}{2a}\left(M_2\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right)\right) \tag{4.9}$$

bulunur. $M_2(t_i)$'nin yaklaşık değeri $\widetilde{M}_2(t_i)$ olmak üzere $M_2(0) = 0$ olduğundan $\widetilde{M}_2(t_i)$ ardışık olarak aşağıdaki gibi hesap edilir.

$$\widetilde{M}_2(t_i) = 2M(t_i) - F(t_i) + \frac{h}{a}\sum_{k=1}^{[ai]-1} \widetilde{M}_2(t_k) f\left(t_i - \frac{t_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} \widetilde{M}_2\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right) + \frac{at_i - t_{[ai]}}{2a}\left(\widetilde{M}_2\big(t_{[ai]}\big) f\left(t_i - \frac{t_{[ai]}}{a}\right)\right). \tag{4.10}$$

Burada $M(t_i)$ (4.5) denkleminden yaklaşık olarak hesap edilebilir. Ayrıca varyans fonksiyonu için verilen (3.3) ifadesi göz önüne alındığında varyans fonksiyonu $V(t)$

$$\tilde{V}(t_i) = \tilde{M}_2(t_i) - \left(\tilde{M}(t_i)\right)^2, i = 0,1, \dots n \quad (4.11)$$

ifadesi ile yaklaşık olarak hesap edilebilir.

Tang ve Lam (2007), (4.5) ile verilen denklem için yaklaşım hatasının $M(t_i) - \tilde{M}(t_i) = O(h^2)$ olduğunu göstermişlerdir. Bu ifadeye benzer olarak (4.10) ile verilen denklem için yaklaşım hatası $M_2(t_i) - \tilde{M}_2(t_i) = O(h^2)$ bulunur. Şimdi $\tilde{V}(t_i)$ için hata $e_i = V(t_i) - \tilde{V}(t_i), i = 1,2, \dots, n$ olsun. $e_0 = 0$ dir. (4.11) ifadesine göre

$$e_i = M_2(t_i) - \tilde{M}_2(t_i) - \left(M(t_i) - \tilde{M}(t_i)\right)\left(2M(t_i) - \left(M(t_i) - \tilde{M}(t_i)\right)\right)$$

yazılabileceğinden, $e_i = O(h^2) + O(h^4) = O(h^2)$ olup $\tilde{V}(t_i)$'nin yaklaşım hatası $O(h^2)$ bulunur.

Geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonları önerilen sayısal yöntem ile aşağıdaki çizelgelerde farklı a oran parametreleri ve zaman noktaları için hesaplanmıştır. Geometrik süreç ile ilgili uygulamalarda sıklıkla gamma, Weibull ve lognormal gibi önemli yaşam dağılımları ile karşılaşıldığı için ilk olay zamanının dağılımı olarak $X_1 \sim \Gamma(2,1), X_1 \sim \mathrm{W}(2,1)$ ve $X_1 \sim \mathrm{LN}(0,1)$ alınmıştır. Her bir dağılım durumunda a oran parametresi $0.95, 0.975, 0.99$ olarak seçilmiştir. Uygulamalarda fonksiyonların ihtiyaç duyulan değerleri gözönüne alınarak t zaman noktaları $(0,10E(X_1)]$ aralığından belirlenmiştir, yani gamma dağılımı için $t \in (0,20]$, Weibull dağılımı için $t \in (0,20]$ ve lognormal dağılım için $t \in (0,18]$ olarak alınmıştır. Fonksiyonların değerleri aşağıdaki Çizelge 4.1-4.9 da verilmiştir.

Çizelge 4.1 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.95$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

$\boldsymbol{t}$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$
0.1	0.0047	0.0047	0.0047
0.5	0.0918	0.0950	0.0866
1	0.2822	0.3190	0.2393
2	0.7417	1.0663	0.5162
3	1.2142	2.2141	0.7398
4	1.6786	3.7554	0.9378
5	2.1326	5.6683	1.1205
8	3.4350	13.3985	1.5993
10	4.2577	19.9987	1.8706
15	6.1753	40.5558	2.4211
20	7.9221	65.5971	2.8371

Çizelge 4.2 $X_1 \sim \mathrm{W}(2,1)$ ve $a = 0.95$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

$\boldsymbol{t}$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$
0.1	0.0100	0.0100	0.0099
0.5	0.2299	0.2474	0.1946
1	0.7424	0.9760	0.4248
2	1.8117	3.9223	0.6402
3	2.8140	8.7692	0.8504
4	3.7681	15.2271	1.0283
5	4.6779	23.0655	1.1827
8	7.1779	53.0640	1.5410
10	8.6830	77.1125	1.7174

Çizelge 4.3 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.95$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

$\boldsymbol{t}$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$
0.1	0.0107	0.0107	0.0106
0.5	0.2584	0.2876	0.2208
1	0.6170	0.8722	0.4915
2	1.2774	2.6547	1.0229
3	1.8872	5.1183	1.5568
4	2.4642	8.1575	2.0854
5	3.0164	11.7012	2.6025
8	4.5622	24.8646	4.0511
10	5.5195	35.3844	4.9191
15	7.7150	66.2778	6.7561
18	8.9201	87.2250	7.6574

Çizelge 4.4 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.975$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

$\boldsymbol{t}$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$
0.1	0.0047	0.0047	0.0047
0.5	0.0919	0.0953	0.0868
1	0.2830	0.3216	0.2415
2	0.7481	1.0895	0.5299
3	1.2321	2.2911	0.7730
4	1.7135	3.9326	0.9967
5	2.1895	6.0039	1.2102
8	3.5843	14.6529	1.8059
10	4.4877	22.3090	2.1699
15	6.6600	47.3366	2.9806
20	8.7195	79.7023	3.6718

Çizelge 4.5 $X_1 \sim \mathrm{W}(2,1)$ ve $a = 0.975$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

t	$\widetilde{M}(t)$	$\widetilde{M}_2(t)$	$\widetilde{V}(t)$
0.1	0.0100	0.0100	0.0099
0.5	0.2303	0.2489	0.1958
1	0.7480	0.9948	0.4353
2	1.8519	4.1119	0.6825
3	2.9137	9.4274	0.9376
4	3.9485	16.7602	1.1699
5	4.9568	25.9554	1.3851
8	7.8364	63.3526	1.9438
10	9.6458	95.2989	2.2567

Çizelge 4.6 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.975$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

t	$\widetilde{M}(t)$	$\widetilde{M}_2(t)$	$\widetilde{V}(t)$
0.1	0.0107	0.0107	0.0106
0.5	0.2591	0.2898	0.2226
1	0.6217	0.8891	0.5027
2	1.2980	2.7572	1.0722
3	1.9322	5.4018	1.6682
4	2.5408	8.7367	2.2809
5	3.1311	12.7055	2.9016
8	4.8237	28.0249	4.7570
10	5.9017	40.7864	5.9567
15	8.4591	80.3013	8.7449
18	9.9129	108.5230	10.2573

Çizelge 4.7 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.99$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

t	$\widetilde{M}(t)$	$\widetilde{M}_2(t)$	$\widetilde{V}(t)$
0.1	0.0047	0.0047	0.0047
0.5	0.0919	0.0954	0.0870
1	0.2835	0.3232	0.2428
2	0.7519	1.1038	0.5384
3	1.2431	2.3395	0.7942
4	1.7352	4.0458	1.0349
5	2.2253	6.2218	1.2698
8	3.6815	15.5060	1.9527
10	4.6406	23.9268	2.3918
15	6.9987	52.4183	3.4363
20	9.3023	90.9436	4.4106

Çizelge 4.8 $X_1 \sim \mathrm{W}(2,1)$ ve $a = 0.99$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

t	$\widetilde{M}(t)$	$\widetilde{M}_2(t)$	$\widetilde{V}(t)$
0.1	0.0100	0.0100	0.0099
0.5	0.2306	0.2497	0.1965
1	0.7514	1.0064	0.4418
2	1.8769	4.2330	0.7103
3	2.9774	9.8626	0.9977
4	4.0665	17.8090	1.2724
5	5.1438	27.9976	1.5385
8	8.3075	71.3032	2.2888
10	10.3620	110.1240	2.7526

Çizelge 4.9 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.99$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı

$\boldsymbol{t}$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t})$	$\widetilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$
0.1	0.0107	0.0107	0.0106
0.5	0.2596	0.2911	0.2237
1	0.6245	0.8995	0.5095
2	1.3108	2.8218	1.1037
3	1.9605	5.5851	1.7415
4	2.5897	9.1197	2.4133
5	3.2053	13.3836	3.1098
8	4.9998	30.2846	5.2866
10	6.1655	44.7850	6.7714
15	9.0025	91.5200	10.4743
18	10.6603	126.2879	12.6449

5. $M(t)$ ve $V(t)$ FONKSİYONLARININ KUVVET SERİSİ AÇILIMLARI

5.1 Üstel Dağılım Durumunda Geometrik Süreç

Bu bölümde ilk olayın gerçekleşme zamanı üstel dağılımlı olduğunda geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı ardışık diferansiyel denklemlerin çözümüne dayalı olarak verilmektedir. Ayrıca sürecin geometrik, ikinci moment ve varyans fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımları elde edilmektedir.

5.1.1 $N(t)$'nin olasılık dağılımı

$\{N(t), t \geq 0\}$ ilk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim Üstel(\theta)$ olan a oran parametreli bir geometrik süreç olsun.

Teorem 5.1: $a \neq 1$ olmak üzere

$$P(N(t) = j) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{c_k a^{\frac{(j-k)(j-k-1)}{2}}}{(a-1)(a^2-1)\dots(a^{j-k}-1)} \left(e^{-\frac{a^k t}{\theta}} - e^{-\frac{a^j t}{\theta}}\right), j = 1,2,\dots$$

dır, burada $c_0 = 1$ olmak üzere c_k değerleri ardışık olarak

$c_k = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_i a^{\frac{(k-i)(k-i-1)}{2}}}{(a-1)(a^2-1)\dots(a^{k-i}-1)}, k = 1,2, \dots$ dir (Aydoğdu vd. 2013).

İspat. İlk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim Üstel(\theta)$ olan a oran parametreli bir $\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik süreci gözönüne alınsın ve

$$p_j(t) = P(N(t) = j), j = 0,1,2, \dots$$

olarak yazılsın. Burada

$$p_j(0) = P(N(0) = j) = \begin{cases} 1, j = 0 \\ 0, j = 1,2, \dots \end{cases}$$

ve

$p_0(t) = P(N(t) = 0) = P(X_1 > t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$ olduğundan

$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\frac{1}{\theta} p_0(t)$

dir.

$$p_1(t) = P(N(t) = 1) = P(X_1 \leq t, X_1 + X_2 > t) = \int_0^\infty P(X_1 \leq t, X_1 + X_2 > t) dF(x)$$

$$= \int_0^t P(X_2 > t - x) dF(x)$$

$$= \int_0^t \left(1 - F\big(a(t - x)\big)\right) dF(x)$$

$$= e^{-\frac{at}{\theta}} \int_0^t e^{\frac{x}{\theta}} f(x) dx$$

olup $f(x) = -\frac{dp_0(x)}{dx}$ olduğunun gözönüne alınmasıyla

$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\frac{a}{\theta} p_1(t) + \frac{1}{\theta} p_0(t)$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Buradan $p_j(t)$ için

$p_j(t) = P\big(S_j \leq t\big) - P\big(S_{j+1} \leq t\big), j = 0,1,2 \ldots$

olup

$F_{S_n}(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t) - \cdots - p_{n-1}(t), n = 1,2, \ldots$

yazılabilir. Böylece

$f_{S_n}(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{dp_k(t)}{dt}, n = 1,2, \ldots$

olur. Bulunan bu ifade yardımıyla $p_2(t)$ için bir diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$p_2(t) = P(N(t) = 2) = P(X_1 + X_2 \leq t, X_1 + X_2 + X_3 > t)$$

$$= \int_0^{\infty} P(S_2 \leq t, S_3 > t) f_{S_2}(x)dx$$

$$= \int_0^{t} \left(1 + F\left(a^2(t-x)\right)\right) f_{S_2}(x)dx$$

$$= e^{-\frac{a^2 t}{\theta}} \int_0^{t} e^{\frac{a^2 x}{\theta}} f_{S_2}(x)dx$$

olup,

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\frac{a^2}{\theta} p_2(t) + f_{S_2}(t)$$

$$= -\frac{a^2}{\theta} p_2(t) - \frac{dp_0(t)}{dt} - \frac{dp_1(t)}{dt}$$

$$= -\frac{a^2}{\theta} p_2(t) - \frac{dp_0(t)}{dt} + \frac{a}{\theta} p_1(t) + \frac{dp_0(t)}{dt}$$

$$= -\frac{a^2}{\theta} p_2(t) + \frac{a}{\theta} p_1(t)$$

dir. Benzer olarak S_3 üzerinden koşullandırarak

$$p_3(t) = e^{-\frac{a^3 t}{\theta}} \int_0^{t} e^{\frac{a^3 x}{\theta}} f_{S_3}(x)dx$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -\frac{a^3}{\theta} p_3(t) + f_{S_3}(t)$$

$$= -\frac{a^3}{\theta} p_3(t) - \frac{dp_0(t)}{dt} - \frac{dp_1(t)}{dt} - \frac{dp_2(t)}{dt}$$

$$= -\frac{a^3}{\theta} p_3(t) + \frac{a^2}{\theta} p_2(t)$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Bu şekilde devam edildiğinde

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\frac{a^n}{\theta} p_n(t) + \frac{a^{n-1}}{\theta} p_{n-1}(t)$$

denklemine ulaşılır. Böylece $p_j(t)$ olasılığı için

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\frac{1}{\theta} p_0(t)$$

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = -\frac{a^j}{\theta} p_j(t) + \frac{a^{j-1}}{\theta} p_{j-1}(t), j = 1,2,3, \ldots$$

bulunur. Burada verilen birinci dereceden diferansiyel denklemin j ye göre ardışık olarak çözülmesiyle $P(N(t) = j)$ olasılığı için aşağıda verilen analitik ifadeye ulaşılır.

$a \neq 1$ olmak üzere

$$P(N(t) = j) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{c_k a^{\frac{(j-k)(j-k-1)}{2}}}{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^{j-k}-1)} \left(e^{-\frac{a^k t}{\theta}} - e^{-\frac{a^j t}{\theta}}\right), j = 1,2, \ldots$$

dır, burada $c_0 = 1$ olmak üzere c_k değerleri ardışık olarak

$c_k = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_i a^{\frac{(k-i)(k-i-1)}{2}}}{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^{k-i}-1)}, k = 1,2, \ldots$ denklemleri ile hesaplanır. Böylelikle ispat tamamlanır.■

$S_n, n.$ olayın gerçekleşme zamanı dağılımı olan $F_1 * F_2 * \ldots * F_n(t)$ fonksiyonu

$$p_j(t) = P(N(t) = j) = F_1 * F_2 * \ldots * F_j(t) - F_1 * F_2 * \ldots * F_{j+1}(t)$$

ve

$$F_1 * F_2 * \ldots * F_j(t) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} p_k(t)$$

olduğunun gözönüne alınmasıyla yukarıda verilen Teorem 5.1 yardımıyla analitik olarak elde edilebilir. Bu ifade aşağıdaki sonuç ile verilir.

Sonuç 5.1: $S_n, n.$ olayın gerçekleşme zamanı dağılımı

$$F_1 * F_2 * \ldots * F_n(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{c_k a^{\frac{(j-k)(j-k-1)}{2}}}{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^{j-k}-1)} \left(e^{-\frac{a^k t}{\theta}} - e^{-\frac{a^j t}{\theta}}\right)$$

dır (Aydoğdu vd. 2013).

Geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı önerilen teoremin kullanılmasıyla aşağıdaki çizelgelerde farklı a oran parametreleri ve zaman noktaları için hesaplanmıştır. Geometrik sürecin model olarak önerildiği uygulamalarda a oran parametresinin $0.95 \leq a \leq 1.05$ değerleri arasında yer aldığı Lam vd. (2004) tarafından belirtildiğinden, bu parametre için $0.95, 0.99, 1.01$ ve 1.05 değerleri seçilmiştir. İlk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim Üstel(2)$ ve t zaman noktaları ise 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4 ve 5 olarak alınmıştır. t zaman noktasına kadar hiç olay gerçekleşmemesi, 1, 2, 3, 4 ve 5 olay gerçekleşmesi olasılıkları aşağıdaki Çizelge 5.1-5.4'de sunulmuştur.

Çizelge 5.1 $X_1 \sim Üstel(2)$ ve $a = 0.95$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9512	0.7788	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821
$P(N(t) = 1)$	0.0476	0.1959	0.3071	0.3772	0.3476	0.2847	0.2186
$P(N(t) = 2)$	0.0011	0.0234	0.0738	0.1836	0.2568	0.2839	0.2759
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0018	0.0112	0.0565	0.1201	0.1791	0.2201
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0001	0.0012	0.0124	0.0399	0.0803	0.1249
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0001	0.0021	0.0101	0.0274	0.0537

Çizelge 5.2 $X_1 \sim Üstel(2)$ ve $a = 0.99$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9512	0.7788	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821
$P(N(t) = 1)$	0.0476	0.1949	0.3040	0.3697	0.3372	0.2734	0.2078
$P(N(t) = 2)$	0.0012	0.0242	0.0754	0.1839	0.2523	0.2734	0.2604
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0020	0.0124	0.0604	0.1245	0.1804	0.2153
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0001	0.0015	0.0147	0.0456	0.0884	0.1322
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0001	0.0028	0.0133	0.0343	0.0643

Çizelge 5.3 $X_1 \sim Üstel(2)$ ve $a = 1.01$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9512	0.7788	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821
$P(N(t) = 1)$	0.0475	0.1945	0.3025	0.3660	0.3322	0.2680	0.2027
$P(N(t) = 2)$	0.0012	0.0245	0.0762	0.1839	0.2497	0.2680	0.2527
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0021	0.0129	0.0622	0.1264	0.1804	0.2121
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0001	0.0017	0.0159	0.0485	0.0920	0.1349
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0002	0.0033	0.0150	0.0379	0.0693

Çizelge 5.4 $X_1 \sim Üstel(2)$ ve $a = 1.05$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9512	0.7788	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821
$P(N(t) = 1)$	0.0475	0.1935	0.2995	0.3588	0.3225	0.2576	0.1929
$P(N(t) = 2)$	0.0012	0.0252	0.0776	0.1836	0.2443	0.2570	0.2375
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0023	0.0141	0.0657	0.1294	0.1791	0.2043
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0002	0.0020	0.0185	0.0539	0.0982	0.1381
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0002	0.0044	0.0188	0.0451	0.0782

5.1.2 $M(t)$ ve $V(t)$ fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımları

$\{N(t), t \geq 0\}$ oran parametresi $a < 1$ olan bir geometrik süreç olsun. İlk olayın gerçekleşme zamanı X_1 rasgele değişkeninin aşağıda verilen θ parametreli

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}, t \geq 0, \theta > 0 \tag{5.1}$$

üstel dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Şimdi $a < 1$ durumunu gözönüne alalım. (5.1) ifadesi ile verilen F dağılım fonksiyonunun Maclaurin açılımı

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k \quad t \geq 0 \tag{5.2}$$

dır.

Geometrik fonksiyon için verilen (3.9) integral denklemine dayalı olarak (5.2) serisinin kullanılmasıyla tek bir çözüme sahip olan kuvvet serisi açılımı $a < 1$ için aşağıdaki gibi verilir.

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} c_k}{k!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k, t \geq 0, \tag{5.3}$$

burada $c_1 = 1$ ve $c_k = \prod_{j=1}^{k-1} (1 - a^j)$ $k = 2,3, \ldots$ dır (Aydoğdu vd. 2013).

(5.3) ifadesindeki serinin yakınsama hızı şu şekilde belirlenir: Verilen a, θ ve t için $u_k = c_k (t/\theta)^k / k!$, $k = 1, 2, \ldots$ olarak tanımlansın. $c_{k+1} = (1 - a^k) c_k$ olduğundan $u_{k+1} = ((1 - a^k) t/(k+1)\theta) u_k$, $k = 1,2, \ldots$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Böylece u_k, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$ için monoton azalandır. Burada $k_0 = \min\{k \in \{1,2, \ldots\} : ((1 - a^k) t) < ((k+1)\theta)\}$'dır. Bu durumda m_1 pozitif tamsayısı $m_1 \geq k_0$ olacak şekilde seçilerek geometrik fonksiyona aşağıdaki gibi yaklaşımda bulunulabilir.

$$\breve{M}(t) = \sum_{k=1}^{m_1} (-1)^{k-1} u_k, \tag{5.4}$$

Buradan yaklaşım hatası

$$\begin{aligned} \left| M(t) - \breve{M}(t) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k - \sum_{k=1}^{m_1} (-1)^{k-1} u_k \right| \\ &< u_{m_1+1} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir (Aydoğdu vd. 2013).

İkinci moment fonksiyonu için verilen (3.12) integral denklemini gözönüne alalım. (5.3) de verilen kuvvet serisinin türetilmesinde kullanılan yöntemi kullanarak bu fonksiyon için bir kuvvet serisi aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.2: $a < 1$ için (3.12) denkleminin çözümü

$$M_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k, t \geq 0 \qquad (5.5)$$

dır, burada $b_1 = 1$ ve $b_k = 2c_k - 1 - \sum_{j=1}^{k-1} a^j b_j \; k = 2,3, ...$

İspat. Her $t > 0$ için (5.5) ifadesi ile verilen serinin mutlak yakınsak olduğunu varsayılsın. Bu varsayım altında ilk olarak (3.12) integral denklemini sağlayacak biçimde b_k katsayıları belirlenir. Daha sonra bu katsayılar ile serinin gerçekten mutlak yakınsak olduğu gösterilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

$k = 1,2, ...$ için $|b_k| \leq 2$ olduğu gözlemlenmiştir. Herhangi bir $K \geq 1$ için $0 \leq x \leq t$ aralığında $\frac{2}{\theta} e^{(t-2x)/\theta}$ integrallenebilir fonksiyonu ile $\left|\sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k-1} b_k (t-x)^k}{k! \theta^{k+1}} e^{-x}/_\theta\right| \leq \frac{2}{\theta} e^{(t-2x)/\theta}$dir. Bu durumda baskın yakınsaklık teoreminin bir uygulaması olarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} \int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)\, dF(x) &= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a^k b_k (t-x)^k}{k! \theta^{k+1}} e^{-x}/_\theta dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a^k b_k}{k! \theta^{k+1}} \int_0^t (t-x)^k e^{-x}/_\theta dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n+1} a^k b_k}{k! n! \theta^{k+n+1}} t^{n+k+1} Beta(k+1, n+1) \qquad (5.6) \end{aligned}$$

Burada son denklem

$$\int_0^t (t-x)^k e^{-x/\theta} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\theta^n} t^{n+k+1} Beta(k+1, n+1)$$

eşitliği yardımıyla elde edilmiştir. $Beta(k+1, n+1) \leq 1/(n+1)$ olduğundan dolayı (5.6) eşitliğindeki çift seri mutlak yakınsaktır. Böylece $Beta(k+1, n+1)$ ifadesi yerine $\frac{k!n!}{(n+k+1)!}$ yazılabilir. Ayrıca $r = k, s = n + k$ dönüşümü ile

$$\int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)\, dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n+1} a^k b_k}{k!n!\theta^{k+n+1}} t^{n+k+1} \frac{k!n!}{(n+k+1)!}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{(s+1)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{s+1} \sum_{r=1}^{s} a^r b_r$$

elde edilir. $M_2(t)$ için (3.12) deki integral denklem kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} c_k}{k!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{k+1} \sum_{r=1}^{k} a^r b_r.$$

Buradan t'nin aynı kuvvetlerine ait katsayıların eşitlenmesi ile $b_1 = 1$ ve $b_k = 2c_k - 1 - \sum_{j=1}^{k-1} a^j b_j$, $k = 2,3, \dots$ bulunur. İspatı tamamlamak için (5.5) eşitliğinde verilen serinin bu katsayılar ile mutlak yakınsak olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. $k = 1,2, \dots$ için $|b_k| \leq 2$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(t/\theta\right)^k}{k!} = 2\left(e^{t/\theta} - 1\right) < \infty$$

dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi $a = 1$ alalım. Bu durumda $c_1 = 1, c_k = 0$, $k = 2,3, \dots$ ve $b_1 = 1, b_2 = -2, b_k = 0, k = 3,4, \dots$ bulunur. Böylelikle $M_2(t) = \frac{t}{\theta} + \left(\frac{t}{\theta}\right)^2, t \geq 0$ eşitliğine ulaşılır. Sonuç olarak, Teorem 5.2 $a = 1$ için de geçerlidir.

(5.5) serisinin yakınsaklık hızını belirlemek için verilen a, θ ve t için $v_k = b_k(t/\theta)^k / k!$, $k = 1, 2, \ldots$ olarak tanımlansın. Bu durumda $k = k^*, k^* + 1, \ldots$ için $|v_k|$ monoton azalandır. Burada $k^* = \min\{k \in \{1,2, \ldots\} : |v_{k+1}/v_k| < 1\}$'dır. Ek olarak $k \geq k^*$ için v_k'lar aynı işarete sahiptir. m_2, $m_2 \geq k^*$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı olmak üzere $M_2(t)$'ye aşağıdaki gibi bir yaklaşımda bulunulabilir.

$$\breve{M}_2(t) = \sum_{k=1}^{m_2} (-1)^{k-1} v_k. \tag{5.7}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \left|M_2(t) - \breve{M}_2(t)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k - \sum_{k=1}^{m_2} (-1)^{k-1} v_k\right| \\ &< \left|v_{m_2+1}\right| \end{aligned}$$

elde edilir.

Hem geometrik fonksiyon $M(t)$ hem de ikinci moment fonksiyonu $M_2(t)$ için sırasıyla (5.4) ve (5.7) ile verilen kuvvet serisi açılımlarını göz önüne alalım. Bu durumda varyans fonksiyonu $V(t)$'ye aşağıdaki gibi yaklaşımda bulunulabilir.

$$\breve{V}(t) = \sum_{k=1}^{m_2} (-1)^{k-1} v_k - \left(\sum_{k=1}^{m_1} (-1)^{k-1} u_k\right)^2, t \geq 0. \tag{5.8}$$

Geometrik sürecin geometrik, ikinci moment ve varyans fonksiyonları için önerilen (5.4), (5.7) ve (5.8)'deki kuvvet serisi açılımlarının kullanılmasıyla bu fonksiyonlar aşağıdaki çizelgelerde farklı a oran parametreleri ve zaman noktaları için hesaplanmıştır. Sunulan Çizelge 5.5-5.7'de a oran parametresi 0.95, 0.975 ve 0.99 iken ilk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim Üstel(2)$ olarak seçilmiştir. t zaman noktaları ise 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15 ve 20 olmak üzere $t \in (0, 10E(X_1)]$ aralığına göre belirlenmiştir.

Çizelge 5.5 X_1~Üstel(2) ve $a = 0.95$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

$\boldsymbol{t}$	**GTS***	$\breve{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$	**GTS**	$\breve{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t})$	$\breve{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$
0.1	2	0.0499	3	0.0523	0.0498
0.5	3	0.2485	4	0.3071	0.2454
1	4	0.4938	5	0.7257	0.4818
2	5	0.9758	6	1.8818	0.9296
3	5	1.4464	7	3.4383	1.3464
4	6	1.9061	8	5.3680	1.7350
5	6	2.3554	8	7.6457	2.0977
8	8	3.6455	11	16.3421	3.0521
10	9	4.4613	12	23.4973	3.5942
15	12	6.3647	16	45.2070	4.6971
20	16	8.1009	20	71.1562	5.5319
*GTS: Gerekli Terim Sayısı					

Çizelge 5.6 X_1~Üstel(2) ve $a = 0.975$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

$\boldsymbol{t}$	**GTS***	$\breve{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$	**GTS**	$\breve{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t})$	$\breve{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$
0.1	2	0.0500	3	0.0524	0.0499
0.5	3	0.2492	4	0.3098	0.2477
1	3	0.4969	4	0.7377	0.4908
2	4	0.9877	5	1.9393	0.9637
3	4	1.4726	6	3.5880	1.4196
4	5	1.9516	6	5.6680	1.8593
5	5	2.4249	7	8.1640	2.2836
8	6	3.8123	8	18.0039	3.4705
10	7	4.7111	9	26.3907	4.1965
15	8	6.8733	11	53.0560	5.8143
20	10	8.9242	13	86.8350	7.1943
*GTS: Gerekli Terim Sayısı					

Çizelge 5.7 X_1~Üstel(2) ve $a = 0.99$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

$\boldsymbol{t}$	GTS*	$\breve{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$	GTS	$\breve{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t})$	$\breve{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$
0.1	2	0.0500	3	0.0525	0.0500
0.5	2	0.2497	3	0.3114	0.2491
1	3	0.4988	4	0.7450	0.4963
2	3	0.9950	4	1.9753	0.9852
3	4	1.4889	5	3.6836	1.4669
4	4	1.9803	5	5.8630	1.9416
5	4	2.4693	6	8.5065	2.4093
8	5	3.9221	7	19.1547	3.7721
10	5	4.8790	7	28.4531	4.6484
15	6	7.2320	8	59.0350	6.7331
20	7	9.5309	9	99.5148	8.6771
*GTS: Gerekli Terim Sayısı					

5.2 Gamma Dağılımı Durumunda Geometrik Süreç

Bu bölümde ilk olarak, ilk olayın gerçekleşme zamanı dağılımı gamma olan geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı için kuvvet serisi açılımı verilecektir. Gamma dağılımının şekil parametresi α'nın tamsayı olmadığı durumlarda $M(t)$ ve $V(t)$ için kuvvet serisi açılımları elde edilememektedir. Dolayısıyla, bu bölümde, ilk olayın gerçekleşme zamanı Erlang dağılımına sahip olan geometrik sürecin geometrik, ikinci moment ve varyans fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımları elde edilmektedir.

5.2.1 $N(t)$'nin olasılık dağılımı

İlk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim Gamma(\alpha, \beta)$ olan a oran parametreli $\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik sürecini gözönüne alalım. $N(t)$ rasgele değişkeninin bir boyutlu olasılık dağılımını elde etmek için analitik ifadesi olmayan $F_1 * \ldots * F_k(t)$ konvolüsyon fonksiyonunun kuvvet serisi açılımı elde edilir ve bu açılım yardımıyla $N(t)$ rasgele değişkeninin bir boyutlu olasılık dağılımı bulunur. Bununla ilgili teorem aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 5.3:

a) $k = 1,2, \ldots$ ve her sabit $t \geq 0$ için

$$F_1 * \ldots * F_k(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha+s} l_k(s) \tag{5.9}$$

dir. Burada $l_k(s) = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} l_{k-1}(s-r) \frac{\alpha^{(k-1)(\alpha+r)}}{\Gamma(\alpha)(\alpha+r)} \frac{\Gamma((k-1)\alpha+s-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma(k\alpha+s+1)}$ olup $l_1(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+s)}, s = 0,1,2, \ldots$.

b) Her sabit $t \geq 0$ için

$$P(N(t) = k) = \begin{cases} 1 - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+s} l_1(s) & , k = 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha+s} \left(l_k(s) - \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} l_{k+1}(s) \right) & , k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

dir.

Bu teoremin ispatını vermeden önce ispat için gerekli olacak önemli bir eşitlik White (1964) tarafından verilen lemmanın uyarlaması olarak aşağıdaki gibi verilir.

Lemma 5.1: G ve H, $[0, \infty)$ destek kümesine sahip herhangi iki dağılım fonksiyonu olsun. a, b pozitif tamsayılar ve $\alpha > 0$ olmak üzere $H(t) = \sum_{r=a}^{\infty} \frac{(-1)^{a+r}}{r!} h(r) \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+r}$ ve $G(t) = \sum_{p=b}^{\infty} \frac{(-1)^{p+b}}{p!} g(p) \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha+p}, k = 1,2, \ldots$ olsun. Bu durumda

$$G * H(t) = \sum_{s=a+b}^{\infty} \frac{(-1)^{s+a+b}}{s!} l(s) \left(\frac{t}{\beta}\right)^{(k+1)\alpha+s}$$

dir. Burada $l(s) = \sum_{r=a}^{s-b} \binom{s}{r} h(r) g(s-r) \frac{\Gamma(k\alpha+s-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+s+1)}$ dir.

İspat: Konvolüsyon işleminin tanımı kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$G * H(t) = \int_0^t H(t-x)dG(x)$$

$$= \int_0^t \sum_{r=a}^{\infty} \frac{(-1)^{a+r}}{r!} h(r) \left(\frac{t-x}{\beta}\right)^{\alpha+r} \sum_{p=b}^{\infty} \frac{(-1)^{p+b}}{p!\beta^{k\alpha+p}} g(p)(k\alpha+p)x^{k\alpha+p-1}\,dx$$

$$= \sum_{r=a}^{\infty} \sum_{p=b}^{\infty} \frac{(-1)^{a+b+r+p}}{r!p!\beta^{(k+1)\alpha+r+p}} h(r)g(p)(k\alpha+p) \int_0^t (t-x)^{\alpha+r} x^{k\alpha+p-1}\,dx$$

$$= \sum_{r=a}^{\infty} \sum_{p=b}^{\infty} \frac{(-1)^{a+b+r+p}}{r!p!} h(r)g(p)(k\alpha+p) \left(\frac{t}{\beta}\right)^{(k+1)\alpha+r+p} \frac{\Gamma((k\alpha+p)\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+r+p+1)}$$

$$= \sum_{r=a}^{\infty} \sum_{p=b}^{\infty} \frac{(-1)^{a+b+r+p}}{r!p!} h(r)g(p) \left(\frac{t}{\beta}\right)^{(k+1)\alpha+r+p} \frac{\Gamma((k\alpha+p+1)\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+r+p+1)}$$

olup $s = r + p$ dönüşümü yapılmasıyla

$$G * H(t) = \sum_{s=a+b}^{\infty} \frac{(-1)^{a+b+s}}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{(k+1)\alpha+s} \sum_{r=a}^{s-b} \binom{s}{r} h(r)g(s-r) \frac{\Gamma((k\alpha+s-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+s+1)}$$

olur. Buradan $l(s) = \sum_{r=a}^{s-b} \binom{s}{r} h(r)g(s-r) \frac{\Gamma(k\alpha+s-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+s+1)}$ alınmasıyla

$$G * H(t) = \sum_{s=a+b}^{\infty} \frac{(-1)^{s+a+b}}{s!} l(s) \left(\frac{t}{\beta}\right)^{(k+1)\alpha+s}$$

bulunur. ■

Teorem 5.3' ün ispatı a) İlk olarak (5.9) daki kuvvet serisinin verilen katsayılar ile mutlak yakınsak olduğu gösterilir. $l_1(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+s)} < 2, s = 0,1,2, \ldots$ dir. Buradan $0 < \alpha \leq 1$ için $l_2(s) < 2^{s+2}(\alpha+s)$ ve $\alpha > 1$ için $l_2(s) < 2^{s+2}\alpha^{\alpha+s}(\alpha+s)$ olarak elde edilir. Benzer olarak $0 < \alpha \leq 1$ için $l_3(s) < 2^{2s+3}(2\alpha+s)$ ve $\alpha > 1$ için $l_3(s) < 2^{2s+3}\alpha^{3\alpha+s}(2\alpha+s)$ bulunur. Bu şekilde ardışık olarak devam edildiğinde $0 < \alpha \leq 1$ için $l_k(s) < 2^{(k-1)s+k}((k-1)\alpha+s)$ ve $\alpha > 1$ için $l_k(s) < 2^{(k-1)s+k}\alpha^{\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)(\alpha+s)}((k-1)\alpha+s)$ olarak elde edilir. Böylece

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha+s} l_k(s) \right| < \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(t/\beta)^{k\alpha+s}}{s!} 2^{(k-1)s+k}((k-1)\alpha+s) & ,0 < \alpha \leq 1 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(t/\beta)^{k\alpha+s}}{s!} 2^{(k-1)s+k} \alpha^{\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)(\alpha+s)}((k-1)\alpha+s) & ,\alpha > 1 \end{cases}$$

olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki seriler oran testi gereğince yakınsaktır. Böylece (5.9)'daki serinin mutlak yakınsak olduğu gösterilmiş olur.

α şekil ve β ölçek parametresi ile gamma dağılımına sahip bir rasgele değişkenin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir.

$$F(t) = \int_0^t \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}dx \text{ ve } f(t) = \frac{t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}, t > 0, \alpha, \beta > 0.$$

İlk olayın gerçekleşme zamanı X_1 için $F_{X_1}(t) = F_1(t) = F(t)$ olmak üzere dağılım fonksiyonunun Maclaurin açılımı

$$F(t) = \int_0^t \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha+n}} \int_0^t x^{\alpha+n-1}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+n)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+n} \tag{5.10}$$

olarak bulunur. Ayrıca $F_{X_{k+1}}(x) = F(a^k x), k = 0,1,2,\ldots$ olduğunun gözönüne alınmasıyla

$$F_{k+1}(t) = F(a^k t) = \int_0^{a^k t} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha+n}} \int_0^{a^k t} x^{\alpha+n-1}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{a^{k(\alpha+n)}}{\Gamma(\alpha)(\alpha+n)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+n} \tag{5.11}$$

elde edilir. Böylece (5.9)'da verilen eşitliğin $k = 1$ için doğru olduğu ortaya çıkmış olur. Şimdi bu eşitliğin k için doğru olduğunu kabul ederek $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Lemma 5.1' de $G(t)$ ve $H(t)$ yerine sırasıyla (5.9)'da verilen $F_1 * \ldots * F_k(t)$ ve (5.11)'de verilen $F_{k+1}(t)$ alınmasıyla

$$F_1 * \ldots * F_{k+1}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{(k+1)\alpha+s} l(s)$$

bulunur. Burada $l(s) = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} l_k(s-r) \frac{a^{k(\alpha+r)}}{\Gamma(\alpha)(\alpha+r)} \frac{\Gamma(k\alpha+s-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+s+1)}$, yani $l(s) = l_{k+1}(s)$ dir. Böylece tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

b) Her sabit $t \geq 0$ ve $k = 0,1,2, \ldots$ için

$$P(N(t) = k) = F_1 * F_2 * \ldots * F_k(t) - F_1 * F_2 * \ldots * F_{k+1}(t)$$

olduğu bilinmektedir. $k = 0$ için,

$$P(N(t) = 0) = P(X_1 > t) = 1 - P(X_1 \leq t)$$

$$= 1 - \int_0^t \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} = 1 - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+s} l_1(s)$$

dir. $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$P(N(t) = k) = F_1 * \ldots * F_k(t) - F_1 * \ldots * F_{k+1}(t)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha+s} l_k(s) - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{(k+1)\alpha+s} l_{k+1}(s)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha+s} \left(l_k(s) - \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} l_{k+1}(s)\right)$$

dir. Burada $l_k(s) = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} l_{k-1}(s-r) \frac{a^{(k-1)(\alpha+r)}}{\Gamma(\alpha)(\alpha+r)} \frac{\Gamma((k-1)\alpha+s-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma(k\alpha+s+1)}$ dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı önerilen kuvvet serisi açılımının kullanılmasıyla aşağıdaki çizelgelerde farklı a oran parametreleri ve zaman noktaları için hesaplanmıştır. a oran parametresi için $0.95, 0.99, 1.01$ ve 1.05 değerleri seçilmiştir. İlk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim \Gamma(\alpha = 2, \beta = 1)$ ve t zaman noktaları ise 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4 ve 5 olarak alınmıştır. t zaman noktasına kadar hiç olay gerçekleşmemesi, 1, 2, 3, 4 ve 5 olay gerçekleşmesi olasılıkları aşağıdaki Çizelge 5.8-5.11'de sunulmuştur.

Çizelge 5.8 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.95$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9953	0.9098	0.7358	0.4060	0.1991	0.0916	0.0404
$P(N(t) = 1)$	0.0047	0.0886	0.2468	0.4602	0.4652	0.3621	0.2431
$P(N(t) = 2)$	0.0000	0.0016	0.0170	0.1206	0.2662	0.3621	0.3767
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0000	0.0004	0.0125	0.0617	0.1489	0.2425
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0072	0.0312	0.0800
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0038	0.0153

Çizelge 5.9 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.99$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9953	0.9098	0.7358	0.4060	0.1991	0.0916	0.0404
$P(N(t) = 1)$	0.0047	0.0885	0.2456	0.4529	0.4515	0.3458	0.2281
$P(N(t) = 2)$	0.0000	0.0017	0.0181	0.1252	0.2685	0.3540	0.3562
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0000	0.0006	0.0149	0.0700	0.1610	0.2496
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0010	0.0100	0.0405	0.0973
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009	0.0064	0.0239

Çizelge 5.10 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 1.01$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9953	0.9098	0.7358	0.4060	0.1991	0.0916	0.0404
$P(N(t) = 1)$	0.0047	0.0884	0.2449	0.4493	0.4447	0.3380	0.2211
$P(N(t) = 2)$	0.0000	0.0018	0.0187	0.1274	0.2691	0.3493	0.3457
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0000	0.0006	0.0161	0.0741	0.1664	0.2515
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011	0.0116	0.0455	0.1057
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0081	0.0290

Çizelge 5.11 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 1.05$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9953	0.9098	0.7358	0.4060	0.1991	0.0916	0.0404
$P(N(t) = 1)$	0.0047	0.0883	0.2437	0.4421	0.4316	0.3230	0.2079
$P(N(t) = 2)$	0.0000	0.0019	0.0198	0.1314	0.2696	0.3389	0.3244
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0000	0.0007	0.0187	0.0821	0.1755	0.2519
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0016	0.0153	0.0561	0.1213
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0020	0.0125	0.0410

5.2.2 Erlang dağılımı durumunda $M(t)$ ve $V(t)$ Fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımları

$\{N(t), t \geq 0\}$ oran parametresi $a < 1$ olan bir geometrik süreç olsun. İlk olayın gerçekleşme zamanı X_1 rasgele değişkeninin α ve β parametreleri ile gamma dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Burada $\alpha > 0$ sayısı bir tamsayıdır.

Teorem 5.4: Geometrik fonksiyon $M(t)$ için verilen (3.9) integral denkleme dayalı olarak (5.10) serisinin kullanılmasıyla tek bir çözüme sahip olan kuvvet serisi açılımı $a < 1$ için aşağıdaki gibi verilir.

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}, t \geq 0. \tag{5.12}$$

Burada

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)} & , k = 0,1,\dots,\alpha-1 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)} + \dfrac{(-1)^\alpha k!}{(k-\alpha)!\,\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{r=0}^{k-\alpha} \binom{k-\alpha}{r} y_r a^{\alpha+r} Beta(k-r, \alpha+r+1)\right] & , k = \alpha, \alpha+1, \dots \end{cases}$$

dir.

İspat. Her $t > 0$ için (5.12) ifadesi ile verilen serinin mutlak yakınsak olduğunu varsayalım. Bu varsayım altında (3.9) integral denklemini sağlayacak biçimde y_k katsayılarını belirleyelim. Daha sonra bu katsayılar ile serinin gerçekten mutlak yakınsak olduğunun gösterilmesi ile ispat tamamlanır.

(5.12) denklemine bağlı olarak

$$\int_0^t M\big(a(t-x)\big)f(x)dx = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} y_k \, a^{\alpha+k} \left(\frac{t-x}{\beta}\right)^{\alpha+k} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} dx$$

dir. Ayrıca

$\int_0^t (t-x)^{\alpha+k} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \leq \int_0^t (t-x)^{\alpha+k} x^{\alpha-1} dx = t^{2\alpha+k} Beta(\alpha+k+1, \alpha) \leq \frac{t^{2\alpha+k}}{\alpha}$ ve $e^{-x/\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n$ olduğundan

$$\int_0^t M\big(a(t-x)\big)f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k!n!} \frac{y_k a^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)\beta^{k+n+2\alpha}} \int_0^t x^{\alpha+n-1}(t-x)^{k+\alpha} dx$$

yazılabilir. $\int_0^t x^{\alpha+n-1}(t-x)^{k+\alpha} dx = t^{k+n+2\alpha} Beta(\alpha+n, k+\alpha+1)$ olup

$$\int_0^t M\big(a(t-x)\big)f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k!n!} \frac{y_k a^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+n+2\alpha} Beta(\alpha+n, k+\alpha+1)$$

bulunur. $r = k, s = n + k$ dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned}\int_0^t M\big(a(t-x)\big)f(x)dx &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=r}^{\infty} \frac{(-1)^s}{r!(s-r)!} \frac{y_r a^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{s+2\alpha} Beta(\alpha+s-r, r+\alpha+1) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{s} \frac{(-1)^s}{r!(s-r)!} \frac{y_r a^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{s+2\alpha} Beta(\alpha+s-r, r+\alpha+1)\end{aligned}$$

bulunur.

$M(t)$ için verilen (5.12) integral denklemini kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} y_k \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)k!(\alpha+k)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+k}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+2\alpha}\sum_{r=0}^{k}\frac{y_r a^{\alpha+r}}{r!(k-r)!}Beta(\alpha+k-r,r+\alpha+1)$$

Buradan t'nin aynı kuvvetlerine ait katsayıların eşitlenmesi ile

$$y_k=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)} & ,k=0,1,\dots,\alpha-1\\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)}+\dfrac{(-1)^{\alpha}k!}{(k-\alpha)!\,\Gamma(\alpha)}[\sum_{r=0}^{k-\alpha}\binom{k-\alpha}{r}y_r a^{\alpha+r}Beta(k-r,\alpha+r+1)] & ,k=\alpha,\alpha+1,\dots\end{cases}$$

bulunur. Şimdi (5.12) eşitliğinde verilen serinin bu katsayılar ile mutlak yakınsak olduğunu gösterelim.

Hesaplamalar göstermiştir ki $|y_k|\le 2^{k\alpha}, k=0,1,\dots$. Buradan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k y_k}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|y_k|}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k\alpha}}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}$$

olup, oran testi gereğince yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki seri yakınsak olduğundan (5.12) deki seri mutlak yakınsaktır. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.5: İkinci moment fonksiyonu $M_2(t)$ için verilen (3.12) integral denkleme dayalı olarak (5.10) serisinin kullanılmasıyla tek bir çözüme sahip olan kuvvet serisi açılımı $a<1$ için aşağıdaki gibi verilir.

$$M_2(t)\ =\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z_k}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha},t\ge 0. \tag{5.13}$$

Burada

$$z_k=\begin{cases}2y_k-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)} & ,k=0,1,\dots,\alpha-1\\ 2y_k-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)}+\dfrac{(-1)^{\alpha}k!}{(k-\alpha)!\,\Gamma(\alpha)}\left[\sum_{r=0}^{k-\alpha}\binom{k-\alpha}{r}z_r a^{\alpha+r}Beta(k-r,\alpha+r+1)\right] & ,k=\alpha,\alpha+1,\dots\end{cases}$$

dir.

İspat. Her $t > 0$ için (5.13) ifadesi ile verilen serinin mutlak yakınsak olduğunu varsayalım. Bu varsayım altında (3.12) integral denklemini sağlayacak biçimde z_k katsayılarını belirleyelim. Daha sonra bu katsayılar ile serinin gerçekten mutlak yakınsak olduğunun gösterilmesi ile ispat tamamlanır.

(5.13) denklemine bağlı olarak

$$\int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)f(x)dx = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z_k\, a^{\alpha+k} \left(\frac{t-x}{\beta}\right)^{\alpha+k} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} dx$$

dir. Ayrıca

$\int_0^t (t-x)^{\alpha+k} x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta} dx \le \int_0^t (t-x)^{\alpha+k} x^{\alpha-1} dx = t^{2\alpha+k} Beta(\alpha+k+1,\alpha) \le \frac{t^{2\alpha+k}}{\alpha}$ ve $e^{-x/\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n$ olduğundan

$$\int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k!n!} \frac{z_k a^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)\beta^{k+n+2\alpha}} \int_0^t x^{\alpha+n-1}(t-x)^{k+\alpha} dx$$

yazılabilir. $\int_0^t x^{\alpha+n-1}(t-x)^{k+\alpha} dx = t^{k+n+2\alpha} Beta(\alpha+n, k+\alpha+1)$ olup

$$\int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k!n!} \frac{z_k a^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+n+2\alpha} Beta(\alpha+n, k+\alpha+1)$$

bulunur. $r = k, s = n + k$ dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned}\int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)f(x)dx &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=r}^{\infty} \frac{(-1)^s}{r!(s-r)!} \frac{z_r a^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{s+2\alpha} Beta(\alpha+s-r, r+\alpha+1)\\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{s} \frac{(-1)^s}{r!(s-r)!} \frac{z_r a^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{s+2\alpha} Beta(\alpha+s-r, r+\alpha+1)\end{aligned}$$

bulunur.

$M_2(t)$ için verilen (3.12) integral denklemini kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}z_k\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+k}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}y_k\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)k!(\alpha+k)}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+k}=$ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+2\alpha}\sum_{r=0}^{k}\frac{z_r\alpha^{\alpha+r}}{r!(k-r)!}Beta(\alpha+k-r,r+\alpha+1)$

Buradan t'nin aynı kuvvetlerine ait katsayıların eşitlenmesi ile

$$z_k=\begin{cases}2y_k-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)} & ,k=0,1,\ldots,\alpha-1\\ 2y_k-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+k)}+\dfrac{(-1)^{\alpha}k!}{(k-\alpha)!\,\Gamma(\alpha)}\left[\sum_{r=0}^{k-\alpha}\binom{k-\alpha}{r}z_r\alpha^{\alpha+r}Beta(k-r,\alpha+r+1)\right] & ,k=\alpha,\alpha+1,\ldots\end{cases}$$

bulunur. Şimdi (5.13) eşitliğinde verilen serinin bu katsayılar ile mutlak yakınsak olduğunu gösterelim.

Hesaplamalar göstermiştir ki $|z_k|\le 2^{k\alpha}, k=0,1,\ldots$. Buradan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k z_k}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z_k|}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k\alpha}}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}$$

olup, oran testi gereğince yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki seri yakınsak olduğundan (5.13) deki seri mutlak yakınsaktır. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

Hem geometrik fonksiyon $M(t)$ hem de ikinci moment fonksiyonu $M_2(t)$ için önerilen kuvvet serisi açılımları varyans fonksiyonu için verilen (3.13) ifadesinde yerine konursa

$$V(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z_k}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y_k}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k+\alpha}\right)^2,t\ge 0 \tag{5.14}$$

bulunur. Bu durumda geometrik ve ikinci moment fonksiyonlarının değerlerine ulaşılmasının ardından varyans fonksiyonu değeri de yukarıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanmaktadır.

Geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonları için önerilen kuvvet serisi açılımının kullanılmasıyla bu fonksiyonlar aşağıdaki çizelgelerde farklı α oran parametreleri ve zaman noktaları için hesaplanmıştır. Sunulan çizelgelerde a oran parametresi 0.95, 0.975 ve 0.99 iken ilk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ olarak seçilmiştir. Karşılaştırma yapmak amacıyla fonksiyonların kuvvet serisi açılımından hesap edileceği zaman noktaları, Bölüm 4'de gamma dağılımı durumunda sayısal yöntem ile elde edilen fonksiyon değerlerini hesap etmek için kullanılan zaman noktaları olarak seçilmiştir. Kuvvet serisi açılımından elde edilen fonksiyon değerleri aşağıdaki Çizelge 5.12-5.14'de verilmektedir.

Çizelge 5.12 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.95$ iken M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$	$\boldsymbol{M_2(t)}$	$\boldsymbol{V(t)}$
0.1	0.0047	0.0047	0.0047
0.5	0.0918	0.0950	0.0866
1	0.2822	0.3190	0.2393
2	0.7417	1.0663	0.5162
3	1.2142	2.2142	0.7398
4	1.6786	3.7555	0.9378
5	2.1326	5.6685	1.1206
8	3.4351	13.3990	1.5993
10	4.2578	19.9996	1.8705
15	6.1756	40.5583	2.4207
20	7.9588	65.8520	2.5098

Çizelge 5.13 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.975$ iken M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

t	$M(t)$	$M_2(t)$	$V(t)$
0.1	0.0047	0.0047	0.0047
0.5	0.0919	0.0953	0.0868
1	0.2830	0.3216	0.2415
2	0.7481	1.0895	0.5299
3	1.2321	2.2912	0.7731
4	1.7135	3.9327	0.9967
5	2.1895	6.0041	1.2102
8	3.5844	14.6535	1.8059
10	4.4878	22.3100	2.1699
15	6.6604	47.3407	2.9800
20	9.0384	85.8668	4.1733

Çizelge 5.14 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.99$ iken M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

t	$M(t)$	$M_2(t)$	$V(t)$
0.1	0.0047	0.0047	0.0047
0.5	0.0919	0.0954	0.0870
1	0.2835	0.3232	0.2428
2	0.7520	1.1038	0.5384
3	1.2431	2.3396	0.7942
4	1.7352	4.0460	1.0350
5	2.2253	6.2220	1.2698
8	3.6816	15.5067	1.9528
10	4.6407	23.9279	2.3917
15	6.9993	52.4255	3.4352
20	9.3020	90.9400	4.4128

5.3 Weibull Dağılımı Durumunda Geometrik Süreç

Bu bölümde ilk olay zamanı Weibull dağılımına sahip olan geometrik sürecinin bir boyutlu olasılık dağılımı, geometrik ve ikinci moment fonksiyonları için kuvvet serisi açılımları bulunacaktır. Hem geometrik hem de ikinci moment fonksiyonlarının yardımıyla sürecin varyans fonksiyonunun kuvvet serisi açılımı elde edilecektir.

5.3.1 $N(t)$'nin olasılık dağılımı

$\{N(t), t \geq 0\}$ oran parametresi $a < 1$ olan bir geometrik süreç olsun. İlk olayın gerçekleşme zamanı X_1 rasgele değişkeninin α ve β parametreleri ile

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}, t \geq 0, \alpha, \beta > 0 \tag{5.15}$$

Weibull dağılıma sahip olduğu varsayılsın. (5.15) ifadesi ile verilen F dağılım fonksiyonunun Maclaurin açılımı

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha}, t \geq 0 \tag{5.16}$$

dır.

Teorem 5.6:

a) $k = 1,2, \ldots$ ve her sabit $t \geq 0$ için

$$F_1 * \ldots * F_k(t) = \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^{m+k} \frac{y_k(m)}{m!\, c_m} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{m\alpha} \tag{5.17}$$

dir. Burada $y_k(m) = \sum_{r=k-1}^{m-1} a^{(k-1)(m-r)\alpha} c_{m-r}\, y_{k-1}(r)$ olup başlangış koşulu $y_0(m) = I(m = 0)$ ve $c_m = \Gamma(m\alpha + 1)/\Gamma(m + 1)$ dir.

b) Her sabit $t \geq 0$ için

$$P(N(t)=k)=\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^{m+k}\frac{v_k(m)}{m!\,c_m}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{m\alpha},k=0,1,\ldots \tag{5.18}$$

dır. Burada $v_0(m)=c_m, m=0,1,\ldots$ ve $v_k(m)=y_k(m)+y_{k+1}(m), k=1,2,\ldots,m=k,k+1,\ldots$ dir (Aydoğdu ve Karabulut 2014).

İspat. a) (5.17) de verilen serinin geçerliliği için mutlak yakınsak bir seri olduğunu göstermek gerekmektedir.

$$\frac{y_1(m)}{c_m}=1,m=1,2,\ldots$$

ve

$$\frac{y_2(m)}{c_m}=\frac{1}{c_m}\sum_{r=1}^{m-1}a^{(m-r)\alpha}\,c_{m-r}y_1(r)=\frac{1}{c_m}\sum_{r=1}^{m-1}a^{(m-r)\alpha}\frac{c_{m-r}c_r}{c_m}$$

dir. Lomnicki (1966) çalışmasında $\sum_{r=0}^{m-1}\frac{c_{m-r}c_r}{c_m}<2^m,m=1,2,\ldots$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Bu durumda $0<a\le 1$ için $\frac{y_2(m)}{c_m}<2^m$, $a>1$ için $\frac{y_2(m)}{c_m}<(2a^{\alpha})^m$ eşitsizliklerinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Şimdi $y_k(m)$ için verilen ifadeyi gözönüne alalım. $k=1,2,\ldots,m=k,k+1,\ldots$ olmak üzere $0<a\le 1$ iken $\frac{y_k(m)}{c_m}<2^{(k-1)m}$ ve $a>1$ iken $\frac{y_k(m)}{c_m}<(2a^{\alpha})^{(k-1)m}$ eşitsizliklerinin geçerli olduğu tümevarım yöntemi ile gösterilebilir. İlk olay zamanının dağılımı Weibull dağılımı olduğunda geometrik sürecin tanımından X_k rasgele değişkeninin dağılımının da

$$F_k(t)=1-e^{-\left(\frac{a^{k-1}t}{\beta}\right)^{\alpha}},t\ge 0$$

ile verilen dağılım fonksiyonu olduğunu biliyoruz. X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun Maclaurin serisi açılımı

$$F_k(t)=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}(\beta a^{1-k})^{-i\alpha}\frac{t^{i\alpha}}{i!},t\ge 0 \tag{5.19}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda

$$\sum_{m=k}^{\infty}\left|(-1)^{m+k}\frac{y_k(m)}{m!\,c_m}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{m\alpha}\right| < \begin{cases} exp\left(2^{k-1}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right), 0 < a \leq 1 \\ exp\left((2a^{\alpha})^{k-1}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right), a > 1 \end{cases}$$

bulunur. Buradan (5.17) de verilen seri her $k \geq 1$ için mutlak yakınsaktır. Mutlak yakınsak olduğu gösterilen serinin geçerliliğini tümevarım yöntemi ile gösterelim. İlk olarak $k = 1$ için serinin doğru olduğu görülmektedir. Şimdi herhangi bir k için de serinin doğru olduğunu varsayalım. White (1964) tarafından verilen lemmada $G(t)$ ve $H(t)$ sırasıyla $F_1 * \ldots * F_k(t)$ ve $F_{k+1}(t)$ olarak seçilirse

$$F_1 * \ldots * F_{k+1}(t) = \sum_{m=k+1}^{\infty}(-1)^{m+k+1} l(m)\frac{t^{m\alpha}}{m!}$$

açılımına ulaşılır. Burada $l(m) = \frac{1}{c_m}\beta^{-m\alpha}\sum_{i=k}^{m-1} a^{k(m-i)\alpha} c_{m-i} y_k(i)$ dir.

$l(m) = \frac{y_{k+1}(m)}{c_m}\beta^{-m\alpha}$ olduğundan tümevarım yöntemi ile a şıkkının ispatı tamamlanır.

b) $N(t)$ nin olasılık dağılımı

$$P(N(t) = k) = F_1 * \ldots * F_k(t) - F_1 * \ldots * F_{k+1}(t) = F_1 * \ldots * (1 - F_{k+1})(t)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun Maclaurin serisi açılımı olan (5.16) ifadesine dayalı olarak

$$(1 - F_{k+1})(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \frac{a^{kj\alpha}}{\beta^{j\alpha}}\frac{t^{j\alpha}}{j!} \tag{5.20}$$

dir. Buradan White'ın lemmasında verilen $G(t)$ ve $H(t)$ yerine (5.17) ve (5.20) denklemlerinde verilen ifadelerin yazılmasıyla (5.18) deki kuvvet serisi elde edilmektedir. (5.17) deki serinin mutlak yakınsak olduğunu bildiğimizden (5.18) deki serinin de her $k \geq 1$ için mutlak yakınsak olacaktır. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı önerilen kuvvet serisi açılımının kullanılmasıyla aşağıdaki çizelgelerde farklı a oran parametreleri ve zaman noktaları için hesaplanmıştır. a oran parametresi için $0.95, 0.99, 1.01$ ve 1.05 değerleri seçilmiştir. İlk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim W(2,1)$ ve t zaman noktaları ise 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4 ve 5 olarak alınmıştır. t zaman noktasına kadar hiç olay gerçekleşmemesi, 1, 2, 3, 4 ve 5 olay gerçekleşmesi olasılıkları aşağıdaki Çizelge 5.15-5.18'de sunulmuştur.

Çizelge 5.15 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.95$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9900	0.7788	0.3679	0.0183	0.0001	0.0000	0.0000
$P(N(t) = 1)$	0.0099	0.2126	0.5281	0.3511	0.0511	0.0025	0.0000
$P(N(t) = 2)$	0.0000	0.0084	0.0979	0.4554	0.3348	0.0841	0.0093
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0001	0.0060	0.1526	0.4048	0.3285	0.1174
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0000	0.0002	0.0211	0.1712	0.3667	0.3279
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0015	0.0340	0.1711	0.3345

Çizelge 5.16 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.99$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9900	0.7788	0.3679	0.0183	0.0001	0.0000	0.0000
$P(N(t) = 1)$	0.0099	0.2119	0.5208	0.3291	0.0434	0.0018	0.0000
$P(N(t) = 2)$	0.0000	0.0091	0.1036	0.4466	0.2883	0.0601	0.0052
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0001	0.0074	0.1727	0.3936	0.2588	0.0707
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0000	0.0003	0.0302	0.2077	0.3541	0.2373
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0030	0.0565	0.2240	0.3236

Çizelge 5.17 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 1.01$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9900	0.7788	0.3679	0.0183	0.0001	0.0000	0.0000
$P(N(t) = 1)$	0.0099	0.2116	0.5171	0.3186	0.0400	0.0016	0.0000
$P(N(t) = 2)$	0.0000	0.0094	0.1065	0.4410	0.2666	0.0507	0.0039
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0002	0.0082	0.1821	0.3834	0.2261	0.0538
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0000	0.0003	0.0355	0.2235	0.3372	0.1939
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0041	0.0703	0.2438	0.2985

Çizelge 5.18 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 1.05$ için geometrik sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

Olasılık	t						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$P(N(t) = 0)$	0.9900	0.7788	0.3679	0.0183	0.0001	0.0000	0.0000
$P(N(t) = 1)$	0.0099	0.2109	0.5097	0.2988	0.0342	0.0012	0.0001
$P(N(t) = 2)$	0.0000	0.0101	0.1119	0.4275	0.2264	0.0358	0.0057
$P(N(t) = 3)$	0.0000	0.0002	0.0100	0.1994	0.3556	0.1678	0.0563
$P(N(t) = 4)$	0.0000	0.0000	0.0005	0.0478	0.2474	0.2882	0.1735
$P(N(t) = 5)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0073	0.1010	0.2618	0.2800

5.3.2 $M(t)$ ve $V(t)$ fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımları

Teorem 5.7: Geometrik fonksiyon $M(t)$ için verilen (3.9) integral denkleme dayalı olarak (5.16) serisinin kullanılmasıyla tek bir çözüme sahip olan kuvvet serisi açılımı $a < 1$ için aşağıdaki gibi verilir.

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} d_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha}, t \geq 0, \tag{5.21}$$

burada $d_1 = 1$ ve $d_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (k\alpha + 1) Beta(j\alpha + 1, (k-j)\alpha + 1) a^{j\alpha} d_j,\ k = 2,3, \ldots$'dır (Aydoğdu ve Karabulut 2014).

İspat. Her $t > 0$ için (5.21) ifadesi ile verilen serinin mutlak yakınsak olduğunu varsayalım. Bu varsayım altında (3.9) integral denklemini sağlayacak biçimde d_k katsayılarını belirleyelim. Daha sonra bu katsayılar ile serinin gerçekten mutlak yakınsak olduğunun gösterilmesi ile ispat tamamlanır.

(5.21) denklemine bağlı olarak

$$\int_0^t M\big(a(t-x)\big)\,dF(x) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a^{k\alpha} d_k (t-x)^{k\alpha} \alpha}{k!\,\beta^{(k+1)\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}\,dx$$

yazılabilir. $t > 0$ için

$$\int_0^t (t-x)^{k\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}\,dx \le t^{(k+1)\alpha} Beta(k\alpha+1,\alpha)$$

$$\le \frac{t^{(k+1)\alpha}}{\alpha}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left| \frac{(-1)^{k-1} a^{k\alpha} d_k \alpha}{k!\,\beta^{(k+1)\alpha}} (t-x)^{k\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} \right| dx \le \left(\frac{t}{\beta}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|d_k|}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} < \infty$$

dır. Bu durumda yukarıdaki eşitliğinin sağ tarafındaki toplam ile integral yer değiştirebilir.

$$\int_0^t M\big(a(t-x)\big)\,dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a^{k\alpha} d_k \alpha}{k!\,\beta^{(k+1)\alpha}} \int_0^t (t-x)^{k\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n+1} a^{k\alpha} d_k \alpha}{k!\,n!\,\beta^{(k+n+1)\alpha}} t^{(k+n+1)\alpha} Beta(n\alpha+\alpha, k\alpha+1)$$

Burada son denklem

$$\int_0^t (t-x)^{k\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\beta^{n\alpha}} t^{(k+n+1)\alpha} Beta(n\alpha+\alpha, k\alpha+1)$$

eşitliği yardımıyla elde edilmiştir. $Beta(n\alpha+\alpha, k\alpha+1) \leq 1/((n+1)\alpha)$ olduğundan dolayı bu eşitlikteki çift seri mutlak yakınsaktır. Böylece bu denklemin sağ tarafındaki toplamlar yer değiştirebilir. Buradan $s=k, r=n+k$ dönüşümü ile

$$\int_0^t M\big(a(t-x)\big)\,dF(x) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s+1}a^{r\alpha}d_r\alpha}{r!s!\beta^{(r+s+1)\alpha}}t^{(r+s+1)\alpha}Beta(s\alpha+\alpha, r\alpha+1)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}\alpha\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha(r+1)}\sum_{s=1}^{r}\frac{a^{s\alpha}d_s}{s!(r-s)!}Beta((r-s)\alpha+\alpha, s\alpha+1)$$

elde edilir. $M(t)$ için verilen (3.9) integral denklemini kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(d_k-1)}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(-1)^{k+1}}{k!}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha(k+1)}\sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}d_s a^{s\alpha}Beta((k-s)\alpha+\alpha, s\alpha+1).$$

Buradan t'nin aynı kuvvetlerine ait katsayıların eşitlenmesi ile $d_1=1$ ve $d_k = 1-\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}(k\alpha+1)Beta(j\alpha+1,(k-j)\alpha+1)a^{j\alpha}d_j$, $k=2,3,\ldots$ bulunur. Şimdi (5.21) eşitliğinde verilen serinin bu katsayılar ile mutlak yakınsak olduğunu gösterelim. $b_k = c_k - \sum_{j=1}^{k-1}c_j b_{k-j}a^{(k-j)\alpha}$ ve $c_k = \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}$ alınırsa $d_k = 1-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{c_j c_{k-j}}{c_k}a^{(k-j)\alpha}d_j, k=1,2,\ldots$ bulunur. Burada $d_k = \frac{b_k}{c_k}, k=1,2,\ldots$'dır. $\alpha<1$ için $\Gamma(k\alpha+1)<\Gamma(k+1)$ olduğundan $c_k<1$ dir. Buradan $|b_1|\leq 1$, $|b_2|\leq 2$, $|b_3|\leq 2^2,\ldots,|b_k|\leq 2^{k-1}, k=1,2,\ldots$ bulunur. Böylelikle $|d_k|\leq\frac{k!2^{k-1}}{\Gamma(k\alpha+1)}, k=1,2,\ldots$ elde edilir. $\alpha>1$ için $c_k>1$ ve c_k artan olduğundan $b_k>0$ ve $|b_k|\leq c_k$ eşitsizliklerine ulaşılır. Buradan $|d_k|\leq 1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Yani

$$|d_k| \leq \begin{cases}\frac{k!2^{k-1}}{\Gamma(k\alpha+1)} & ,\alpha<1\\ 1 & ,\alpha\geq 1\end{cases}$$

olup oran testi ile (5.21)'deki seri mutlak yakınsaktır (Aydoğdu ve Karabulut 2014).

İkinci moment fonksiyonu $M_2(t)$ için verilen (3.12) integral denklemini gözönüne alalım. (5.21) de verilen kuvvet serisinin türetilmesinde kullanılan yöntemi kullanarak bu fonksiyon için bir kuvvet serisi açılımı aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.8: $a < 1$ için

$$M_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} g_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha}, t \geq 0 \tag{5.22}$$

dır, burada $g_1 = 1$ ve $g_k = 2d_k - 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (k\alpha + 1) Beta(j\alpha + 1, (k-j)\alpha + 1) a^{j\alpha} g_j$ $k = 2,3, \ldots.$

İspat. Her $t > 0$ için (5.22) ifadesi ile verilen serinin mutlak yakınsak olduğunu varsayalım. Bu varsayım altında (3.12) integral denklemini sağlayacak biçimde g_k katsayılarını belirleyelim. Daha sonra bu katsayılar ile serinin gerçekten mutlak yakınsak olduğunun gösterilmesi ile ispat tamamlanır.

(5.22) denklemine bağlı olarak

$$\int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)\, dF(x) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a^{k\alpha} g_k (t-x)^{k\alpha} \alpha}{k! \beta^{(k+1)\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} dx \tag{5.23}$$

yazılabilir. $t > 0$ için

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-x)^{k\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} dx &\leq t^{(k+1)\alpha} Beta(k\alpha + 1, \alpha) \\ &\leq \frac{t^{(k+1)\alpha}}{\alpha} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left| \frac{(-1)^{k-1} a^{k\alpha} g_k \alpha}{k! \beta^{(k+1)\alpha}} (t-x)^{k\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} \right| dx \leq \left(\frac{t}{\beta}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|g_k|}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} < \infty$$

dur. Bu durumda (5.23) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam ile integral yer değiştirebilir.

$$\int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)\, dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a^{k\alpha} g_k \alpha}{k! \beta^{(k+1)\alpha}} \int_0^t (t-x)^{k\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n+1}a^{k\alpha}g_k\alpha}{k!n!\beta^{(k+n+1)\alpha}}t^{(k+n+1)\alpha}Beta(n\alpha+\alpha,k\alpha+1)(5.24)$$

Burada son denklem

$$\int_0^t (t-x)^{k\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\beta^{n\alpha}}t^{(k+n+1)\alpha}Beta(n\alpha+\alpha,k\alpha+1)$$

eşitliği yardımıyla elde edilmiştir. $Beta(n\alpha+\alpha,k\alpha+1) \leq 1/((n+1)\alpha)$ olup (5.24) eşitliğindeki çift seri mutlak yakınsaktır. Böylece (5.24) ile verilen denklemin sağ tarafındaki toplamlar yer değiştirebilir. Buradan $s=k, r=n+k$ dönüşümü ile

$$\int_0^t M_2\big(a(t-x)\big)\,dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n+1}a^{k\alpha}g_k\alpha}{k!n!\beta^{(k+n+1)\alpha}}t^{(k+n+1)\alpha}Beta(n\alpha+\alpha,k\alpha+1)$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}\alpha\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha(r+1)}\sum_{s=1}^{r}\frac{a^{s\alpha}g_s}{s!(r-s)!}Beta((r-s)\alpha+\alpha,s\alpha+1)$$

elde edilir. $M_2(t)$ için verilen (3.12) integral denklemini ile aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}g_k}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}d_k}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}\alpha\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha(r+1)}\sum_{s=1}^{r}\frac{a^{s\alpha}g_s}{s!(r-s)!}Beta((r-s)\alpha+\alpha,s\alpha+1).$$

Buradan t'nin aynı kuvvetlerine ait katsayıların eşitlenmesi ile $g_1=1$ ve $g_k = 2d_k - 1 - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}(k\alpha+1)Beta(j\alpha+1,(k-j)\alpha+1)a^{j\alpha}g_j,\ \ k=2,3,\ldots$ bulunur. Şimdi (5.22) eşitliğinde verilen serinin bu katsayılar ile mutlak yakınsak olduğunu gösterelim.

$k=1,2,\ldots$ için $h_k = c_k - \sum_{j=1}^{k-1}c_jc_{k-j}a^{j\alpha}(2d_j+g_j)$ ve $c_k = \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}$ alınırsa $g_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{c_jc_{k-j}}{c_k}a^{j\alpha}(2d_j+g_j)$ bulunur. Burada $g_k = \frac{h_k}{c_k}, k=1,2,\ldots$'dır.

$\alpha<1$ için $\Gamma(k\alpha+1)<\Gamma(k+1)$ olduğundan $c_k<1$ dir. Buradan $|h_1|\leq 1$, $|h_2| \leq 2.2^{2-1}$, $|h_3|\leq 3.2^{3-1},\ldots,|h_k|\leq k.2^{k-1}, k=1,2,\ldots$ bulunur. Böylelikle $|g_k| \leq$

$\frac{k!k2^{k-1}}{\Gamma(k\alpha+1)}, k = 1,2, \ldots$ elde edilir. $\alpha > 1$ iken $a^{j\alpha}$ değeri j'nin büyümesiyle hızlı bir şekilde sıfıra doğru gitmektedir. Gerçekte, bir $k^* \in \mathbb{N}$ ile $k \geq k^*$için $|g_k| \leq 1$'dir.

Şimdi (5.22)'de $M_2(t)$ için verilen kuvvet serisinin bu katsayılar ile yakınsak olduğunu gösterelim. $\alpha < 1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1} g_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|g_k|}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k2^{k-1}}{\Gamma(k\alpha+1)} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha}$$

olup, oran testi gereğince yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki seri yakınsak olduğundan (5.22)'deki seri mutlak yakınsaktır. $\alpha > 1$ olduğunda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1} g_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} \right| = \sum_{k=1}^{k^*-1} \left| \frac{(-1)^{k-1} g_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} \right| + \sum_{k=k^*}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1} g_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} \right|$$

olup,

$$\sum_{k=k^*}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1} g_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left({}^{t}/_{\beta}\right)^{k\alpha}}{k!} = e^{\left({}^{t}/_{\beta}\right)^{\alpha}} < \infty$$

dur. Böylece bu katsayılar ile ikinci moment fonksiyonu için verilen kuvvet serisi mutlak yakınsaktır. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

Hem geometrik fonksiyon $M(t)$ hem de ikinci moment fonksiyonu $M_2(t)$ için önerilen kuvvet serisi açılımları varyans fonksiyonu için verilen (3.13) ifadesinde yerine konursa

$$V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} g_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} d_k}{k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{k\alpha}\right)^2, t \geq 0 \qquad (5.25)$$

bulunur. Böylece varyans fonksiyonunun değeri de (5.25) yardımıyla hesaplanmaktadır.

Geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonları aşağıdaki çizelgelerde farklı a oran parametreleri ve zaman noktaları için hesaplanmıştır. Sunulan çizelgelerde a oran parametresi 0.95, 0.975 ve 0.99 iken ilk olayın gerçekleşme zamanı $X_1 \sim W(2,1)$ ve t

zaman noktaları ise 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4 ve 5 olarak alınmıştır. Kuvvet serisi açılımından elde edilen fonksiyon değerleri aşağıdaki Çizelge 5.19-5.21'de verilmektedir.

Çizelge 5.19 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.95$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

t	$M(t)$	$M_2(t)$	$V(t)$
0.1	0.0100	0.0100	0.0099
0.5	0.2299	0.2475	0.1946
1	0.7424	0.9761	0.4248
2	1.8117	3.9225	0.6402
3	2.8141	8.7698	0.8505
4	3.7683	15.2283	1.0282
5	4.6781	23.0675	1.1825

Çizelge 5.20 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.975$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

t	$M(t)$	$M_2(t)$	$V(t)$
0.1	0.0100	0.0100	0.0099
0.5	0.2303	0.2489	0.1958
1	0.7480	0.9948	0.4353
2	1.8519	4.1122	0.6826
3	2.9138	9.4281	0.9377
4	3.9486	16.7616	1.1698
5	4.9571	25.9577	1.3848

Çizelge 5.21 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.99$ için M, M_2 ve V fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımı

t	$M(t)$	$M_2(t)$	$V(t)$
0.1	0.0100	0.0100	0.0099
0.5	0.2306	0.2497	0.1965
1	0.7514	1.0064	0.4418
2	1.8769	4.2332	0.7103
3	2.9775	9.8633	0.9978
4	4.0667	17.8104	1.2723
5	5.1441	28.0002	1.5382

6. $M(t)$ ve $V(t)$ FONKSİYONLARININ TAHMİNİ

Bu bölümde geometrik ve varyans fonksiyonları için hem parametrik hem de parametrik olmayan tahmin edicileri önerilmektedir. Önerilen tahmin edicilerin bazı istatistiksel özelliklerinin incelenmesinin ardından bu tahmin edicilerin performanslarının değerlendirilmesi amacıyla simülasyon çalışmaları yapılmaktadır.

6.1 Parametrik Tahmin

$\{N(t), t \geq 0\}$ ilk olayının gerçekleşme zamanı dağılımı F_1 olan a oranlı bir geometrik süreç olsun. Kabul edelim ki F_1 dağılım fonksiyonu şekilsel olarak bilinsin, fakat bazı parametreleri bilinmesin. Ayrıca sürecin a oran parametresi de bilinmesin. Bu dağılımın bilinmeyen parametrelerini $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ ile gösterelim. $k \geq 2$ için $(k-1)$. olay gerçekleştikten sonra k. olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olan X_k dağılım fonksiyonunun $F_k(t) = F_1(a^{k-1}t), t \geq 0$ olduğu bilinmektedir. Şimdi $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ geometrik süreçten gelen bir veri kümesi olsun. Bu veri kümesindeki rasgele değişkenlerin bağımsız, fakat aynı dağılımlı olmadığı bilinmektedir. $\hat{a}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ bu veri kümesine dayalı olarak elde edilen $a, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerinin tahmin edicileri olsun. Bu durumda $F_1 = F$ olmak üzere $F = F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ ve $F_k = F_k(a, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), k = 2,3, \dots$ gösterimlerini kullanalım. F ve F_k dağılım fonksiyonlarında bilinmeyen $a, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerinin yerine $\hat{a}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ tahmin edicilerinin yazılmasıyla F ve F_k için sırasıyla $\hat{F} = F(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$ ve $\hat{F}_k = F_k(\hat{a}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$ biçiminde parametrik tahmin edicilere ulaşılmış olur, burada $F_k(t) = F(a^{k-1}t)$'dır. Bu durumda (3.8) ve (3.14) konvolüsyon seri ifadelerinin yardımıyla $\hat{F}$ ve $\hat{F}_k$ tahmin edicilerine dayalı olarak her sabit $t \geq 0$ için $M(t)$ ve $V(t)$'nin parametrik tahmin edicileri sırasıyla

$$\widehat{M}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t) \tag{6.1}$$

ve

$$\hat{V}_n(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t)\right) \quad (6.2)$$

olarak verilebilir.

Şimdi bu tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik yansızlık özellikleri incelenecektir.

Teorem 6.1: $\alpha \leq 1$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere F mutlak sürekli dağılım fonksiyonu ve $k = 1,2,\dots$ için $f_k = f_k(a, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstersin. f_k, herbir parametresine göre sürekli olsun. $\hat{a}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ sırasıyla $a, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerinin güçlü tutarlı tahmin edicileri ise her sabit $t \geq 0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}(\hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t)) \xrightarrow{hhhy} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}(F_1 * \dots * F_k(t))$$

dir.

İspat. $\hat{f}_k = f_k(\hat{a}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$ yazalım. f_k olasılık yoğunluk fonksiyonu, $i = 1,2, \dots, r$ için herbir a, θ_i parametresine göre sürekli, $\hat{a}$, a'nın tutarlı bir tahmin edicisi ve $\hat{\theta}_i, \theta_i$'nin tutarlı bir tahmin edicisi olduğundan her sabit t için $\hat{f}_k(t) \xrightarrow{hhhy} f_k(t)$'dir. Şimdi $\hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t) \xrightarrow{hhhy} F_1 * \dots * F_k(t)$ olduğu tümevarım yöntemiyle gösterilir. $k = 1$ için $\hat{f}_1(t) \xrightarrow{hhhy} f_1(t)$ olduğundan Scheffe teoremi gereğince $\hat{F}_1(t) \xrightarrow{hhhy} F_1(t)$'dir. Kabul edelim ki bu yakınsama bir $k > 1$ doğal sayısı için sağlansın. Konvolüsyon işleminin tanımından

$$F_1 * \dots * F_k * F_{k+1}(t) = \int_0^t \left(F_1 * \dots * F_k(t-x)\right) f_{k+1}(x)dx$$

yazılabilir. $F_1 * \dots * F_k$ bir dağılım fonksiyonu olup $t \geq 0$ için $F_1 * \dots * F_k(t) \leq 1$'dir. Buradan

$$\left(\hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t-x)\right)\hat{f}_{k+1}(x) \leq \hat{f}_{k+1}(x) = \hat{f}_{k+1}(x) - f_{k+1}(x) + f_{k+1}(x)$$
$$\leq \left|f_{k+1}(x) - \hat{f}_{k+1}(x)\right| + f_{k+1}(x)$$

yazılabilir. Burada $\left(\hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t-x)\right)\hat{f}_{k+1}(x) \xrightarrow{hhhy} \left(F_1 * \dots * F_k(t-x)\right)f_{k+1}(x)$'dir. Ayrıca $g_n(x) = \left|f_{k+1}(x) - \hat{f}_{k+1}(x)\right| + f_{k+1}(x)$ alınmasıyla $g_n(x) \xrightarrow{hhhy} f_{k+1}(x)$, g_n integrallenebilirdir ve $\lim_{n\to\infty} \int g_n(x)dx = \int f_{k+1}(x)dx = 1$'dir. Bu durumda genişletilmiş baskın yakınsaklık teoremi gereğince

$$\hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_{k+1}(t) \xrightarrow{hhhy} F_1 * \dots * F_{k+1}(t)$$

bulunur. Sonuç olarak, tümevarım yöntemi ile $k \geq 1$ için

$$\hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t) \xrightarrow{hhhy} F_1 * \dots * F_k(t)$$

dir. Buradan her $k \geq 1$ ve $t \geq 0$ için

$$k^\alpha \hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t) \xrightarrow{hhhy} k^\alpha F_1 * \dots * F_k(t) \tag{6.3}$$

dir.

$a \leq 1$ iken geometrik süreç stokastik artan olup $F_1 = F$ olmak üzere $k = 1,2,\dots$ için $k^\alpha \hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t) \leq k^\alpha \hat{F}^{k*}(t)$'dir. Ayrıca $F_k = F, k = 2,3,\dots$ ile yukarıdaki (6.3) ifadesinden her sabit $t \geq 0$ için $k^\alpha \hat{F}^{k*}(t) \xrightarrow{hhhy} k^\alpha F^{k*}(t)$ olur.

Şimdi A, $\hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t)$'nin $F_1 * \dots * F_k(t)$'ye yakınsadığı noktaların kümesi olsun. $P(A) = 1$ dir. $F(0) < 1$ ve F sağdan sürekli olduğundan $F(c) < 1$ olacak şekilde en az bir $c > 0$ vardır. $r \in \mathbb{N}$ sayısı $t \leq rc$ olacak biçimde seçilsin. $\left(Y_1 > \frac{t}{r}, \dots, Y_r > \frac{t}{r}\right)$ olayı $(T_r > t)$ olayını gerektirdiğinden

$$P(T_r \leq t) = F^{r*}(t) \leq 1 - (1 - F(t/r))^r$$

yazılabilir. Burada $Y_1, Y_2, \dots$'ler birbirlerinden bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerdir ve $T_0 = 0$ olmak üzere $T_r = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$'dir. $F(c) <$

1 olmak üzere $t/r \le c$ olduğundan $F(t/r) < 1$'dir. Bu durumda $F^{r*}(t) < 1$ olacak şekilde en az bir $r \ge 1$ vardır. Her sabit $t \ge 0$ için $\hat{F}^{k*}(t)$, $F^{k*}(t)$ 'ye hemen hemen her yerde yakınsak olduğundan $P(C) = 1$ olacak şekilde bir $C \subset A$ kümesi vardır. Bu durumda $w \in C$ olmak üzere her $\epsilon > 0$ sayısı için $n_0(w)$ vardır öyle ki $n \ge n_0(w)$ için $\left|F^{k*}(t) - \hat{F}^{k*}(t)\right| < \epsilon$ sağlanır. $F^{r*}(t) < 1$ şartını sağlayan $r \ge 1$ için $\delta = 1 - F^{r*}(t)$ olmak üzere ϵ sayısını $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ olarak seçelim. Bu durumda $\epsilon = \frac{1}{2}\left(1 - F^{r*}(t)\right) = \frac{\delta}{2}$ olup $\hat{F}^{r*}(t) < 1 - \frac{\delta}{2}$ dır. Şimdi

$$g\big(n, n_0(w)\big) = \begin{cases} 1 - \frac{\delta}{2}, n \ge n_0(w) \\ 1, n < n_0(w) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $k \ge r$ için $k^{\alpha}\hat{F}^{k*}(t) \le k^{\alpha}\hat{F}^{(k-r)*}(t)\hat{F}^{r*}(t) \le k^{\alpha}(\hat{F}^{r*}(t))^{[k/r]} \le k^{\alpha}(g\big(n, n_0(w)\big))^{[k/r]}$ eşitsizliği yazılabilir. Böylelikle $n \ge n_0(w)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\, \hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t) \le \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\hat{F}^{k*}(t) = \sum_{k=1}^{r} k^{\alpha}\hat{F}^{k*}(t) + \sum_{k=r+1}^{\infty} k^{\alpha}\hat{F}^{k*}(t)$$
$$\le \sum_{k=1}^{r} k^{\alpha}(\hat{F}^{r*}(t))^{[k/r]} + \sum_{k=r+1}^{\infty} k^{\alpha}(g\big(n, n_0(w)\big))^{[k/r]} < \infty$$

olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi gereğince $w \in C$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\, \hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} k^{\alpha}\, \hat{F}_1 * \dots * \hat{F}_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} F_1 * \dots * F_k(t)$$

dir. ■

Sonuç 6.1: Yukarıdaki Teorem 6.1'in şartları altında ve $\alpha = 0$ iken her sabit $t \ge 0$ için

$$\widehat{M}_n(t) \xrightarrow{hhhy} M(t)$$

dir.

Sonuç 6.2: Yukarıdaki Teorem 6.1'in şartları altında, $\alpha = 1$ ve Sonuç 6.1'in gözönüne alınmasıyla her sabit $t \geq 0$ için

$$\hat{V}_n(t) \xrightarrow{hhhy} V(t)$$

dir.

Sonuç 6.1'e ve Sonuç 6.2'ye göre önerilen parametrik tahmin ediciler güçlü tutarlıdır.

Teorem 6.2: Yukarıda verilen Teorem 6.1'in şartları altında bir $t_0 \geq 0$ için $F(t_0) < 1$ ise her $t \leq t_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} E(\widehat{M}_n(t)) = M(t)$$

dir.

İspat. $F(t_0) < 1$ olduğundan $F(t_0) < \frac{c}{1+c}$ olacak biçimde bir $c > 0$ sabiti vardır. Bu durumda $a \leq 1$ olduğundan $t \leq t_0$ için

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_1 * \ldots * F_k(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} F(t)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1+c}\right)^k = c$$

olur. Böylece $\widehat{M}_n(t) \leq c$ yazılabilir. Sınırlı yakınsaklık teoreminin gözönüne alınmasıyla her $t \leq t_0$ için $\lim_{n\to\infty} E(\widehat{M}_n(t)) = M(t)$'dir. ■

Teorem 6.3: Teorem 6.1'in şartları altında herhangi bir $t \leq t_0$ için $F(t_0) < 1$ ise her $t \leq t_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{V}_n(t)) = V(t)$$

dir.

İspat. $F(t_0) < 1$ olduğundan $F(t_0) < \frac{c}{1+c}$ olacak biçimde bir $c > 0$ sabiti vardır. Bu durumda $a \leq 1$ iken her $t \leq t_0$ için $M(t) \leq c$ olduğunu biliyoruz. Şimdi her $t \leq t_0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} kF_1 * \dots * F_k(t)$ serisi için bir üst sınır, $a \leq 1$ iken $F_1 * \dots * F_k(t) \leq F^{k*}(t) \leq F^k(t)$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} kF_1 * \dots * F_k(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} kF^{k*}(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} kF^k(t) = \frac{F(t)}{\left(1-F(t)\right)^2}$$

şeklinde yazılabilir. Her $t \leq t_0$ için $F(t) \leq F(t_0) \leq \frac{c}{1+c}$ eşitsizliğine göre $\frac{F(t)}{\left(1-F(t)\right)^2} \leq c(1+c)$'dir. Buradan $\sum_{k=1}^{\infty} kF_1 * \dots * F_k(t) \leq c(1+c)$ olur. Varyans fonksiyonunun konvolüsyon serilerine bağlı ifadesi gözönüne alındığında $V(t) \leq 2\,c(1+c) + c(1+c) = 3c(1+c)$'dir. Böylece her $t \leq t_0$ için $\widehat{V}_n(t) \leq 3c(1+c)$ yazılabilir. Sınırlı yakınsaklık teoreminden her $t \leq t_0$ için $\lim_{n\to\infty} E(\widehat{V}_n(t)) = V(t)$'dir. ■

Teorem 6.2'ye ve Teorem 6.3'e göre önerilen parametrik tahmin ediciler asimptotik olarak yansızdırlar.

6.2 Parametrik Olmayan Tahmin

$\{N(t), t \geq 0\}$ a oranlı bir geometrik süreç olsun. a oran parametresinin bilinmediği varsayılsın. Bu durumda geometrik ve varyans fonksiyonu için önerilecek parametrik olmayan tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik yansızlık gibi istatistiksel özelliklerinin incelenmesi matematiksel olarak problem teşkil etmektedir. Bu nedenle fonksiyonların parametrik olmayan tahmin edicilerine ait bazı istatistiksel özelliklerinin incelenebilmesi için ilk olarak a oranı parametrik olmayan bir yöntem ile tahmin edilir. Daha sonra bu tahmin değeri a oranının gerçek değeri olarak kabul edilir. Bu kabul altında elde edilen geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicilerinin istatistiksel özelliklerinin incelenmesi mümkün olur.

a oranı için elde edilen tahmin değerinin, a oranının gerçek değeri olarak kabul edilmesiyle oluşturulan geometrik sürece uyarlanmış geometrik süreç adı verilir (Lam

2007). Bu bölümde uyarlanmış geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri elde edilir ve istatistiksel özellikleri incelenir.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ilk olay zamanının dağılımı F ve karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonu f olan a oranlı geometrik süreçten gelen bir veri kümesi olsun. Bu veri kümesine dayalı olarak a oran parametresinin parametrik olmayan tahmin edicisi

$$\tilde{a} = \exp\left\{\frac{6}{(n-1)n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)lnX_i\right\} \tag{6.4}$$

ile verilir (Lam 2007). a oran parametresinin $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ veri kümesinden tahmin edilmesinin ardından $\tilde{a}$ oranı bilinen bir parametre ve $\tilde{a} \leq 1$ olduğu kabul edilerek, uyarlanmış geometrik süreçte geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri elde edilebilir. Şimdi $Y_i = \tilde{a}^{i-1}X_i, i = 1,2, \dots, n$ yazılsın. Böylece $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ dağılım fonksiyonu F ve karşılık gelen sürekli bir f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir kitleden alınmış n birimlik rasgele bir örneklem olur. Bu örnekleme dayalı olarak (2.5) ve (2.9) eşitlikleri ile verilen $\tilde{F}_1(t) = F_n(t)$ ve $\tilde{f}_1(t) = f_n(t)$ tahmin edicileri sırasıyla F dağılım ve karşılık gelen f olasılık yoğunluk fonksiyonları için parametrik olmayan tahmin edicilerdir. Bu durumda $\tilde{F}_k(t) = F_n(a^{k-1}t), k = 1,2, \dots$ tahmin edicilerine dayalı olarak (3.8) ve (3.14) konvolüsyon seri ifadelerinin yardımıyla her sabit $t \geq 0$ için $M(t)$ ve $V(t)$'nin parametrik olmayan tahmin edicileri sırasıyla

$$\widetilde{M}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_k(t) \tag{6.5}$$

ve

$$\tilde{V}_n(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_k(t)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_k(t)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_k(t)\right) \tag{6.6}$$

olarak verilebilir.

Şimdi bu tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik yansızlık özellikleri incelenecektir.

Teorem 6.4: $a \leq 1$ bilinen bir sabit ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere F mutlak sürekli dağılım fonksiyonu iken her sabit $t \geq 0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}(\tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_k(t)) \xrightarrow{hhhy} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}(F_1 * \dots * F_k(t))$$

dir.

İspat. Teorem 2.23 gereğince her sabit t için $\tilde{f}_k(t) \xrightarrow{hhhy} f_k(t)$'dir. Şimdi $\tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_k(t) \xrightarrow{hhhy} F_1 * \dots * F_k(t)$ olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim. $k = 1$ için $\tilde{F}_1(t) \xrightarrow{hhhy} F_1(t)$ olur. Kabul edelim ki bu yakınsama bir $k > 1$ doğal sayısı için sağlansın. Konvolüsyon işleminin tanımından

$$F_1 * \dots * F_k * F_{k+1}(t) = \int_0^t \big(F_1 * \dots * F_k(t-x)\big) f_{k+1}(x)dx$$

yazılabilir. $F_1 * \dots * F_k$ bir dağılım fonksiyonu olup $t \geq 0$ için $F_1 * \dots * F_k(t) \leq 1$'dir. Buradan

$$\begin{aligned}\left(\tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_k(t-x)\right)\tilde{f}_{k+1}(x) \leq \tilde{f}_{k+1}(x) &= \tilde{f}_{k+1}(x) - f_{k+1}(x) + f_{k+1}(x) \\ &\leq \left|f_{k+1}(x) - \tilde{f}_{k+1}(x)\right| + f_{k+1}(x)\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\left(\tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_k(t-x)\right)\tilde{f}_{k+1}(x) \xrightarrow{hhhy} \big(F_1 * \dots * F_k(t-x)\big)f_{k+1}(x)$'dir. Ayrıca $g_n(x) = \left|f_{k+1}(x) - \tilde{f}_{k+1}(x)\right| + f_{k+1}(x)$ alınmasıyla $g_n(x) \xrightarrow{hhhy} f_{k+1}(x)$, g_n integrallenebilirdir ve $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n(x)dx = \int f_{k+1}(x)dx = 1$'dir. Bu durumda genişletilmiş baskın yakınsaklık teoremi gereğince

$$\tilde{F}_1 * \dots * \tilde{F}_{k+1}(t) \xrightarrow{hhhy} F_1 * \dots * F_{k+1}(t)$$

bulunur. Sonuç olarak, tümevarım yöntemi ile $k \geq 1$ için

$$\tilde{F}_1 * \ldots * \tilde{F}_k(t) \xrightarrow{hhhy} F_1 * \ldots * F_k(t)$$

dir. Buradan her $k \geq 1$ ve $t \geq 0$ için

$$k^{\alpha}\tilde{F}_1 * \ldots * \tilde{F}_k(t) \xrightarrow{hhhy} k^{\alpha}F_1 * \ldots * F_k(t)$$

dir.

Teorem 6.1‘in ispatında kullanılan benzer yöntemin kullanılmasıyla ispat tamamlanır. ■

Sonuç 6.3: Yukarıdaki Teorem 6.4’ün şartları altında ve $\alpha = 0$ iken her sabit $t \geq 0$ için

$$\widetilde{M}_n(t) \xrightarrow{hhhy} M(t)$$

dir.

Sonuç 6.4: Yukarıdaki Teorem 6.4’ün şartları altında, $\alpha = 1$ ve Sonuç 6.3’ün gözönüne alınmasıyla her sabit $t \geq 0$ için

$$\tilde{V}_n(t) \xrightarrow{hhhy} V(t)$$

dir.

Sonuç 6.3’e ve Sonuç 6.4’e göre önerilen parametrik olmayan tahmin ediciler güçlü tutarlıdır.

Örneklem geometrik fonksiyon $\widetilde{M}_n(t)$ ve örneklem varyans fonksiyonu $\tilde{V}_n(t)$, $\tilde{a}$ oranlı bir geometrik sürecin sırasıyla geometrik ve varyans fonksiyonlarına karşılık gelen fonksiyonlardır. Bu nedenle sürecin geometrik ve varyans fonksiyonu için geçerli olan sınırlar örneklem geometrik fonksiyonu $\widetilde{M}_n(t)$ ve örneklem varyans fonksiyonu $\tilde{V}_n(t)$ için de geçerli olur. Buna göre aşağıda verilen teoremlerin ispatları parametrik kısımda verilen Teorem 6.2 ve Teorem 6.3' e benzer olarak yapıldığı için burada ispatlar verilmemiştir.

Teorem 6.5: Yukarıda verilen Teorem 3'ün şartları altında bir $t_0 \geq 0$ için $F(t_0) < 1$ ise her $t \leq t_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} E(\,M_n(t)) = M(t)$$

dir.

Teorem 6.6: Teorem 3'ün şartları altında herhangi bir $t \leq t_0$ için $F(t_0) < 1$ ise her $t \leq t_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} E(\,V_n(t)) = V(t)$$

dir.

Teorem 6.5'e ve Teorem 6.6'ya göre önerilen parametrik olmayan tahmin ediciler asimptotik olarak yansızdırlar.

7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde Bölüm 6'da geometrik fonksiyon $M(t)$ ve varyans fonksiyonu $V(t)$ için önerilen tahmin edicilerin performanslarının değerlendirilmesi amacıyla bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bunun için Kısım 2.10'da verilen üstel, gamma, Weibull ve lognormal dağılımları gözönüne alınmıştır. Her bir dağılım durumunda geometrik sürecin a oran parametresi için $0.95, 0.975$ ve 0.99 değerleri seçilerek $n = 20, 30, 50, 100$ birimlik veri setleri üretilmiştir. Tüm simülasyon çalışmaları 1000 tekrar üzerine kurulmuştur. Simülasyon tahmin edicisi, tahmin edicilerin yan ve hata kareler ortalamaları (HKO) hesaplanarak çizelgeler halinde sunulmuştur.

7.1 Parametrik Tahmin Ediciler

$\{N(t), t \geq 0\}$ ilk olayının gerçekleşme zamanı dağılımı F olan a oranlı bir geometrik süreç olsun. Geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonları için F dağılım fonksiyonunun parametrelerine dayalı olarak kuvvet serisi açılımı mevcutsa kuvvet serisi açılımında dağılım parametrelerin tahmin edicileri ile değiştirilmesi sonucunda elde edilen geometrik ve varyans fonksiyonlarının tahmin edicilerinin (6.1) ve (6.2)'de belirtilen tahmin edicilere karşılık gelecektir. Böylece fonksiyonların tahmin değerleri bu kuvvet serisi açılımları yardımıyla hesap edilebilir. Eğer F dağılım fonksiyonunun parametrelerine dayalı olarak kuvvet serisi açılımı mevcut değilse bu kez de sayısal yöntemde dağılım parametrelerin tahmin edicileri ile değiştirilmesi sonucunda elde edilen tahmin ediciler kullanılarak geometrik ve varyans fonksiyonlarının tahmin değerleri hesap edilebilir. Parametrik tahmin değeri, yan ve hata kareler ortalamaları $t = 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$ zaman noktaları için aşağıdaki Çizelge 7.1-7.9'da verilmektedir.

Çizelge 7.1 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.95$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.95	20	0.1	0.0060	0.0013	0.0001	0.0060	0.0013	0.0001
		0.5	0.0944	0.0025	0.0066	0.0869	0.0003	0.0057
		1	0.2932	0.0110	0.0468	0.2364	-0.0029	0.0218
		2	0.7809	0.0392	0.1315	0.4968	-0.0194	0.0395
		3	1.2761	0.0618	0.2991	0.6998	-0.0400	0.0716
		4	1.7578	0.0792	0.4112	0.8782	-0.0596	0.1181
		5	2.2254	0.0929	0.5814	1.0416	-0.0789	0.1531
	30	0.1	0.0053	0.0006	0.0001	0.0053	0.0006	0.0001
		0.5	0.0916	-0.0002	0.0045	0.0851	-0.0016	0.0037
		1	0.2850	0.0029	0.0290	0.2339	-0.0054	0.0194
		2	0.7599	0.0182	0.0962	0.4976	-0.0186	0.0327
		3	1.2454	0.0311	0.1955	0.7051	-0.0346	0.0617
		4	1.7195	0.0409	0.3012	0.8883	-0.0495	0.1042
		5	2.1811	0.0485	0.5584	1.0563	-0.0642	0.1481
	50	0.1	0.0051	0.0004	0.0000	0.0050	0.0004	0.0000
		0.5	0.0904	-0.0014	0.0021	0.0847	-0.0019	0.0017
		1	0.2814	-0.0008	0.0105	0.2353	-0.0041	0.0059
		2	0.7494	0.0077	0.0491	0.5049	-0.0113	0.0163
		3	1.2298	0.0156	0.0912	0.7192	-0.0205	0.0371
		4	1.7006	0.0220	0.1638	0.9090	-0.0288	0.0628
		5	2.1601	0.0276	0.2348	1.0836	-0.0369	0.0896
	100	0.1	0.0051	0.0004	0.0000	0.0051	0.0004	0.0000
		0.5	0.0933	0.0015	0.0009	0.0877	0.0010	0.0008
		1	0.2859	0.0037	0.0049	0.2407	0.0014	0.0028
		2	0.7514	0.0097	0.0199	0.5166	0.0004	0.0071
		3	1.2292	0.0150	0.0420	0.7386	-0.0012	0.0139
		4	1.6981	0.0196	0.0798	0.9353	-0.0025	0.0240
		5	2.1562	0.0237	0.1095	1.1164	-0.0041	0.0400

Çizelge 7.2 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.975$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$			$\boldsymbol{V(t)}$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.975	20	0.1	0.0088	0.0041	0.0001	0.0087	0.0041	0.0001
		0.5	0.1230	0.0311	0.0050	0.1131	0.0263	0.0036
		1	0.3581	0.0751	0.0260	0.2889	0.0474	0.0131
		2	0.9075	0.1595	0.1005	0.5905	0.0606	0.0375
		3	1.4605	0.2284	0.2432	0.8391	0.0661	0.0702
		4	2.0014	0.2879	0.3894	1.0653	0.0686	0.1085
		5	2.5295	0.3401	0.5510	1.2760	0.0658	0.1492
	30	0.1	0.0068	0.0021	0.0001	0.0067	0.0021	0.0001
		0.5	0.1061	0.0142	0.0043	0.0984	0.0116	0.0035
		1	0.3219	0.0389	0.0217	0.2636	0.0221	0.0119
		2	0.8419	0.0939	0.0870	0.5548	0.0249	0.0312
		3	1.3736	0.1415	0.1808	0.7949	0.0219	0.0607
		4	1.8971	0.1837	0.2980	1.0148	0.0181	0.0969
		5	2.4113	0.2218	0.4335	1.2219	0.0118	0.1366
	50	0.1	0.0052	0.0005	0.0000	0.0052	0.0005	0.0000
		0.5	0.0921	0.0002	0.0020	0.0864	-0.0005	0.0017
		1	0.2871	0.0041	0.0105	0.2407	-0.0007	0.0058
		2	0.7677	0.0197	0.0424	0.5240	-0.0058	0.0162
		3	1.2662	0.0341	0.0899	0.7589	-0.0142	0.0328
		4	1.7603	0.0468	0.1510	0.9750	-0.0217	0.0546
		5	2.2479	0.0585	0.2238	1.1807	-0.0295	0.0798
	100	0.1	0.0048	0.0001	0.0000	0.0047	0.0001	0.0000
		0.5	0.0906	-0.0013	0.0008	0.0854	-0.0014	0.0007
		1	0.2821	-0.0009	0.0042	0.2390	-0.0025	0.0025
		2	0.7517	0.0037	0.0187	0.5230	-0.0069	0.0069
		3	1.2400	0.0079	0.0414	0.7610	-0.0121	0.0139
		4	1.7250	0.0116	0.0714	0.9801	-0.0166	0.0233
		5	2.2044	0.0150	0.1080	1.1891	-0.0211	0.0345

Çizelge 7.3 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.99$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$			$\boldsymbol{V(t)}$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.99	20	0.1	0.0069	0.0022	0.0001	0.0069	0.0022	0.0001
		0.5	0.1074	0.0155	0.0048	0.0991	0.0122	0.0032
		1	0.3314	0.0479	0.0249	0.2682	0.0254	0.0107
		2	0.8808	0.1288	0.1001	0.5651	0.0267	0.0256
		3	1.4415	0.1984	0.2140	0.8084	0.0142	0.0700
		4	1.9944	0.2592	0.3473	1.0371	0.0022	0.1025
		5	2.5394	0.3141	0.4979	1.2563	-0.0134	0.1387
	30	0.1	0.0061	0.0014	0.0000	0.0060	0.0014	0.0000
		0.5	0.1018	0.0098	0.0031	0.0950	0.0080	0.0025
		1	0.3166	0.0331	0.0147	0.2620	0.0192	0.0082
		2	0.8438	0.0919	0.0590	0.5605	0.0221	0.0228
		3	1.3868	0.1437	0.1262	0.8112	0.0170	0.0490
		4	1.9258	0.1906	0.2133	1.0485	0.0136	0.0831
		5	2.4598	0.2345	0.3172	1.2782	0.0084	0.1236
	50	0.1	0.0054	0.0007	0.0000	0.0054	0.0007	0.0000
		0.5	0.0950	0.0031	0.0019	0.0893	0.0023	0.0015
		1	0.2945	0.0111	0.0093	0.2481	0.0054	0.0056
		2	0.7858	0.0338	0.0379	0.5435	0.0052	0.0159
		3	1.2983	0.0552	0.0814	0.7958	0.0017	0.0325
		4	1.8100	0.0748	0.1388	1.0337	-0.0012	0.0537
		5	2.3187	0.0934	0.2093	1.2653	-0.0044	0.0770
	100	0.1	0.0048	0.0001	0.0000	0.0048	0.0001	0.0000
		0.5	0.0901	-0.0018	0.0008	0.0850	-0.0020	0.0007
		1	0.2812	-0.0023	0.0040	0.2391	-0.0037	0.0024
		2	0.7536	0.0017	0.0128	0.5300	-0.0084	0.0066
		3	1.2491	0.0060	0.0400	0.7797	-0.0145	0.0132
		4	1.7451	0.0099	0.0663	1.0148	-0.0201	0.0230
		5	2.2388	0.0135	0.1017	1.2442	-0.0256	0.0332

Çizelge 7.1-7.3'de ilk olayın gerçekleşme zamanı dağılımı $\Gamma(2,1)$ olan bir geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonlarının tahmini, bu tahminlerin yan ve HKO değerleri verilmektedir. Çizelge 7.1-7.3'e göre her bir örneklem hacminde t zaman noktasının artmasıyla tahmin edicilerin HKO değerlerinin arttığı, ancak örneklem hacminin artmasıyla birlikte her sabit t zaman noktası için HKO değerlerinin azaldığı görülmektedir. Örneğin, $a = 0.975$ ve $n = 50$ seçildiğinde t artarken HKO değerleri de artmaktadır. Ancak $a = 0.975$ ve $t = 1$ için hem $n = 50$ hem de $n = 100$ durumunda geometrik fonksiyonun tahmin edicisine ait HKO sırasıyla 0.0105 ve 0.0042 olduğundan

örneklem hacminin artmasıyla her sabit t için HKO değerlerinin azaldığı açıktır. Ayrıca, geometrik sürecin a oran parametresinin 1'e yaklaşması ile tahmin edicilerin HKO değerlerinin az miktarda da olsa azaldığı söylenebilir.

Çizelge 7.4 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.95$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.95	20	0.1	0.0140	0.0041	0.0002	0.0138	0.0039	0.0002
		0.5	0.2682	0.0383	0.0204	0.2140	0.0194	0.0098
		1	0.8303	0.0879	0.0866	0.4308	0.0059	0.0201
		2	1.9589	0.1472	0.2590	0.6604	0.0203	0.0727
		3	3.0080	0.1940	0.4878	0.8657	0.0152	0.1312
		4	3.9967	0.2286	0.8271	1.0393	0.0110	0.2127
		5	4.9325	0.2546	0.9912	1.1893	0.0065	0.2863
	30	0.1	0.0128	0.0028	0.0001	0.0126	0.0028	0.0001
		0.5	0.2547	0.0248	0.0131	0.2084	0.0138	0.0064
		1	0.7972	0.0547	0.0583	0.4313	0.0065	0.0195
		2	1.9020	0.0904	0.1842	0.6636	0.0234	0.0433
		3	2.9351	0.1210	0.3891	0.8748	0.0244	0.0879
		4	3.9132	0.1450	0.5535	1.0540	0.0257	0.1242
		5	4.8420	0.1641	0.7772	1.2088	0.0261	0.1805
	50	0.1	0.0112	0.0012	0.0001	0.0111	0.0012	0.0001
		0.5	0.2377	0.0078	0.0070	0.1983	0.0037	0.0039
		1	0.7586	0.0162	0.0371	0.4246	-0.0003	0.0069
		2	1.8377	0.0261	0.1138	0.6481	0.0079	0.0277
		3	2.8492	0.0351	0.2185	0.8579	0.0075	0.0509
		4	3.8104	0.0423	0.3511	1.0363	0.0080	0.0750
		5	4.7259	0.0480	0.5041	1.1911	0.0084	0.1088
	100	0.1	0.0106	0.0007	0.0000	0.0105	0.0006	0.0000
		0.5	0.2365	0.0066	0.0033	0.1982	0.0036	0.0017
		1	0.7594	0.0169	0.0169	0.4257	0.0009	0.0029
		2	1.8415	0.0299	0.0560	0.6454	0.0052	0.0133
		3	2.8559	0.0419	0.1171	0.8549	0.0044	0.0264
		4	3.8201	0.0520	0.1890	1.0326	0.0043	0.0371
		5	4.7385	0.0606	0.2913	1.1866	0.0039	0.0516

Çizelge 7.5 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.975$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.975	20	0.1	0.0138	0.0039	0.0002	0.0136	0.0037	0.0002
		0.5	0.2647	0.0344	0.0199	0.2139	0.0181	0.0093
		1	0.8311	0.0831	0.0862	0.4412	0.0059	0.0192
		2	1.9958	0.1440	0.2588	0.7028	0.0203	0.0687
		3	3.1076	0.1939	0.4866	0.9531	0.0155	0.1293
		4	4.1804	0.2320	0.7329	1.1797	0.0098	0.2019
		5	5.2177	0.2609	0.9815	1.3875	0.0024	0.2851
	30	0.1	0.0126	0.0026	0.0001	0.0124	0.0026	0.0001
		0.5	0.2514	0.0211	0.0128	0.2068	0.0110	0.0060
		1	0.7943	0.0463	0.0575	0.4410	0.0057	0.0114
		2	1.9315	0.0797	0.1813	0.7034	0.0209	0.0425
		3	3.0228	0.1091	0.3534	0.9596	0.0220	0.0801
		4	4.0813	0.1328	0.5501	1.1930	0.0231	0.1234
		5	5.1090	0.1521	0.7581	1.4082	0.0231	0.1710
	50	0.1	0.0115	0.0015	0.0001	0.0113	0.0014	0.0001
		0.5	0.2425	0.0122	0.0069	0.2023	0.0065	0.0035
		1	0.7763	0.0284	0.0329	0.4379	0.0026	0.0064
		2	1.9016	0.0497	0.1078	0.6961	0.0135	0.0248
		3	2.9840	0.0703	0.2181	0.9525	0.0149	0.0467
		4	4.0367	0.0882	0.3505	1.1869	0.0170	0.0724
		5	5.0608	0.1040	0.4975	1.4035	0.0184	0.1002
	100	0.1	0.0111	0.0012	0.0000	0.0110	0.0011	0.0000
		0.5	0.2443	0.0139	0.0033	0.2047	0.0089	0.0017
		1	0.7812	0.0332	0.0165	0.4429	0.0076	0.0029
		2	1.9122	0.0604	0.0553	0.7009	0.0184	0.0121
		3	3.0006	0.0869	0.1145	0.9606	0.0230	0.0231
		4	4.0594	0.1109	0.1880	1.1976	0.0278	0.0363
		5	5.0899	0.1331	0.2725	1.4165	0.0314	0.0506

Çizelge 7.6 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.99$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$			$\boldsymbol{V(t)}$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.99	20	0.1	0.0136	0.0036	0.0002	0.0134	0.0035	0.0002
		0.5	0.2590	0.0284	0.0188	0.2102	0.0137	0.0086
		1	0.8169	0.0656	0.0860	0.4410	-0.0008	0.0179
		2	1.9813	0.1045	0.2562	0.7211	0.0108	0.0686
		3	3.1086	0.1312	0.4419	0.9949	-0.0029	0.1254
		4	4.2095	0.1430	0.7282	1.2517	-0.0207	0.2003
		5	5.2859	0.1420	0.9765	1.4945	-0.0440	0.2721
	30	0.1	0.0122	0.0022	0.0001	0.0120	0.0021	0.0001
		0.5	0.2488	0.0182	0.0120	0.2054	0.0088	0.0060
		1	0.7943	0.0429	0.0570	0.4427	0.0010	0.0113
		2	1.9523	0.0754	0.1807	0.7214	0.0112	0.0414
		3	3.0801	0.1027	0.3416	1.0043	0.0066	0.0722
		4	4.1896	0.1231	0.5392	1.2725	0.0001	0.1200
		5	5.2813	0.1375	0.7220	1.5292	-0.0093	0.1671
	50	0.1	0.0116	0.0016	0.0001	0.0115	0.0016	0.0001
		0.5	0.2473	0.0167	0.0069	0.2060	0.0095	0.0035
		1	0.7933	0.0419	0.0320	0.4465	0.0047	0.0062
		2	1.9537	0.0769	0.1025	0.7281	0.0179	0.0239
		3	3.0886	0.1112	0.2069	1.0188	0.0210	0.0407
		4	4.2089	0.1424	0.3473	1.2970	0.0247	0.0698
		5	5.3147	0.1709	0.4861	1.5654	0.0269	0.0956
	100	0.1	0.0104	0.0004	0.0000	0.0103	0.0004	0.0000
		0.5	0.2355	0.0049	0.0026	0.1989	0.0023	0.0014
		1	0.7661	0.0147	0.0142	0.4409	-0.0009	0.0025
		2	1.9050	0.0281	0.0501	0.7126	0.0024	0.0107
		3	3.0194	0.0420	0.1079	0.9991	0.0013	0.0217
		4	4.1214	0.0548	0.1835	1.2736	0.0012	0.0360
		5	5.2109	0.0670	0.2706	1.5393	0.0008	0.0498

Çizelge 7.4-7.6'da ilk olayın gerçekleşme zamanı dağılımı W(2,1) olan bir geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonlarının tahmini, bu tahminlerin yan ve HKO değerleri verilmektedir. Çizelge 7.4-7.6'ya göre, yukarıdaki duruma benzer olarak, her bir örneklem hacminde t zaman noktasının artmasıyla tahmin edicilerin HKO değerlerinin arttığı, ancak örneklem hacminin artmasıyla birlikte her sabit t zaman noktası için HKO değerlerinin azaldığı görülmektedir. Ayrıca, geometrik sürecin a oran parametresinin 1'e yaklaşması ile tahmin edicilerin HKO değerlerinin az miktarda da olsa azaldığı söylenebilir.

Çizelge 7.7 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.95$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.95	20	0.1	0.0154	0.0048	0.0010	0.0149	0.0044	0.0009
		0.5	0.2485	-0.0100	0.0356	0.2027	-0.0181	0.0255
		1	0.6340	0.0170	0.1193	0.4488	-0.0427	0.0831
		2	1.3649	0.0875	0.3675	0.8853	-0.1376	0.2965
		3	2.0366	0.1494	0.6990	1.2934	-0.2634	0.6974
		4	2.6659	0.2018	1.0832	1.6785	-0.4070	1.1686
		5	3.2621	0.2457	1.5176	2.0437	-0.5588	1.8495
	30	0.1	0.0165	0.0058	0.0008	0.0160	0.0054	0.0006
		0.5	0.2640	0.0056	0.0247	0.2217	0.0009	0.0178
		1	0.6481	0.0311	0.0876	0.4900	-0.0015	0.0579
		2	1.3671	0.0897	0.2723	0.9859	-0.0371	0.2130
		3	2.0299	0.1427	0.5720	1.4626	-0.0941	0.4702
		4	2.6537	0.1896	0.9469	1.9197	-0.1658	0.8325
		5	3.2470	0.2306	1.3519	2.3557	-0.2468	1.2956
	50	0.1	0.0135	0.0028	0.0003	0.0132	0.0026	0.0003
		0.5	0.2563	-0.0021	0.0155	0.2175	-0.0033	0.0105
		1	0.6297	0.0127	0.0475	0.4847	-0.0069	0.0377
		2	1.3247	0.0473	0.1613	0.9901	-0.0328	0.1455
		3	1.9676	0.0804	0.3389	1.4856	-0.0711	0.3299
		4	2.5750	0.1109	0.5753	1.9666	-0.1189	0.5952
		5	3.1548	0.1384	0.8317	2.4293	-0.1732	0.8981
	100	0.1	0.0127	0.0021	0.0001	0.0125	0.0019	0.0001
		0.5	0.2586	0.0001	0.0072	0.2209	0.0001	0.0058
		1	0.6232	0.0062	0.0223	0.4922	0.0007	0.0186
		2	1.2986	0.0212	0.0773	1.0167	-0.0062	0.0809
		3	1.9231	0.0359	0.1558	1.5380	-0.0188	0.1754
		4	2.5139	0.0497	0.2638	2.0496	-0.0358	0.3355
		5	3.0789	0.0624	0.3981	2.5461	-0.0564	0.5577

Çizelge 7.8 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.975$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.975	20	0.1	0.0178	0.0071	0.0010	0.0172	0.0066	0.0009
		0.5	0.2609	0.0018	0.0349	0.2188	-0.0038	0.0240
		1	0.6565	0.0348	0.1095	0.4896	-0.0131	0.0753
		2	1.4100	0.1119	0.3383	0.9897	-0.0826	0.2870
		3	2.1119	0.1797	0.6631	1.4786	-0.1896	0.6407
		4	2.7788	0.2380	1.0588	1.9545	-0.3265	1.1378
		5	3.4184	0.2873	1.5068	2.4163	-0.4853	1.7914
	30	0.1	0.0156	0.0049	0.0007	0.0151	0.0046	0.0006
		0.5	0.2641	0.0050	0.0246	0.2223	-0.0003	0.0170
		1	0.6581	0.0365	0.0810	0.4987	-0.0039	0.0540
		2	1.4060	0.1079	0.2706	1.0285	-0.0438	0.2086
		3	2.1074	0.1752	0.5536	1.5577	-0.1106	0.4676
		4	2.7774	0.2366	0.9105	2.0821	-0.1988	0.8297
		5	3.4232	0.2921	1.3248	2.5968	-0.3048	1.2951
	50	0.1	0.0139	0.0032	0.0003	0.0136	0.0030	0.0003
		0.5	0.2599	0.0008	0.0149	0.2219	-0.0007	0.0102
		1	0.6399	0.0182	0.0470	0.5020	-0.0006	0.0336
		2	1.3576	0.0596	0.1572	1.0535	-0.0187	0.1362
		3	2.0330	0.1008	0.3268	1.6179	-0.0503	0.3108
		4	2.6811	0.1403	0.5487	2.1871	-0.0938	0.5534
		5	3.3087	0.1776	0.8156	2.7542	-0.1474	0.8605
	100	0.1	0.0128	0.0021	0.0001	0.0125	0.0020	0.0001
		0.5	0.2595	0.0004	0.0072	0.2231	0.0005	0.0050
		1	0.6282	0.0065	0.0218	0.5043	0.0016	0.0170
		2	1.3203	0.0223	0.0714	1.0685	-0.0037	0.0715
		3	1.9706	0.0384	0.1489	1.6538	-0.0145	0.1685
		4	2.5950	0.0542	0.2528	2.2507	-0.0303	0.3078
		5	3.2004	0.0693	0.3809	2.8512	-0.0504	0.4880

Çizelge 7.9 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.99$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik tahmin edicisi, yan ve hata kareler ortalaması

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.99	20	0.1	0.0161	0.0054	0.0007	0.0156	0.0050	0.0006
		0.5	0.2560	-0.0036	0.0313	0.2136	-0.0101	0.0196
		1	0.6487	0.0242	0.1085	0.4804	-0.0291	0.0623
		2	1.4002	0.0894	0.3312	0.9846	-0.1191	0.2533
		3	2.1064	0.1459	0.6537	1.4897	-0.2519	0.5980
		4	2.7823	0.1926	1.0587	1.9925	-0.4208	1.1197
		5	3.4350	0.2298	1.4953	2.4901	-0.6197	1.7452
	30	0.1	0.0157	0.0051	0.0006	0.0153	0.0047	0.0005
		0.5	0.2591	-0.0004	0.0229	0.2208	-0.0029	0.0158
		1	0.6423	0.0178	0.0762	0.5009	-0.0086	0.0515
		2	1.3754	0.0646	0.2594	1.0509	-0.0527	0.2069
		3	2.0694	0.1089	0.5431	1.6163	-0.1252	0.4597
		4	2.7385	0.1488	0.9050	2.1905	-0.2228	0.8172
		5	3.3891	0.1838	1.3133	2.7676	-0.3422	1.2412
	50	0.1	0.0144	0.0037	0.0003	0.0140	0.0035	0.0003
		0.5	0.2622	0.0026	0.0145	0.2250	0.0013	0.0100
		1	0.6450	0.0205	0.0468	0.5126	0.0030	0.0306
		2	1.3740	0.0632	0.1554	1.0922	-0.0115	0.1292
		3	2.0666	0.1061	0.3204	1.7012	-0.0403	0.3083
		4	2.7373	0.1476	0.5399	2.3304	-0.0829	0.5486
		5	3.3926	0.1873	0.8087	2.9715	-0.1383	0.8599
	100	0.1	0.0124	0.0018	0.0001	0.0122	0.0017	0.0001
		0.5	0.2591	-0.0005	0.0066	0.2234	-0.0003	0.0047
		1	0.6311	0.0066	0.0202	0.5099	0.0004	0.0162
		2	1.3359	0.0251	0.0677	1.0980	-0.0057	0.0708
		3	2.0053	0.0448	0.1450	1.7246	-0.0170	0.1641
		4	2.6543	0.0646	0.2522	2.3799	-0.0334	0.3009
		5	3.2896	0.0843	0.3807	3.0552	-0.0546	0.4441

Çizelge 7.7-7.9'da ilk olayın gerçekleşme zamanı dağılımı $LN(0,1)$ olan bir geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonlarının tahmini, bu tahminlerin yan ve HKO değerleri verilmektedir. Çizelge 7.4-7.9'a göre hem gamma hem de Weibull dağılımına göre elde edilen sonuçların lognormal dağılımı için de geçerli olduğu görülmektedir.

7.2 Parametrik Olmayan Tahmin Ediciler

(2.5) ve (2.9) eşitliklerinde sırasıyla F ve f için verilen parametrik olmayan tahmin edicilerinin (4.5) ve (4.10) eşitliklerinde yerine konulmasıyla ve a oran parametresi için (6.4) eşitliğinden hesaplanan değerin a oran parametresinin gerçek değeri olarak kabul edilmesiyle geometrik ve ikinci moment fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin değerleri sırasıyla,

$$\widetilde{M}(t_i) = \tilde{F}_n(t_i) + \frac{h}{\tilde{a}}\sum_{k=1}^{[\tilde{a}i]-1} \widetilde{M}(t_k)\tilde{f}_n\left(t_i - \frac{t_k}{\tilde{a}}\right) + \frac{h}{2\tilde{a}}\widetilde{M}\left(t_{[\tilde{a}i]}\right)\tilde{f}_n\left(t_i - \frac{t_{[\tilde{a}i]}}{\tilde{a}}\right) + \frac{\tilde{a}t_i - t_{[\tilde{a}i]}}{2\tilde{a}}\left(\widetilde{M}\left(t_{[\tilde{a}i]}\right)\tilde{f}_n\left(t_i - \frac{t_{[\tilde{a}i]}}{\tilde{a}}\right)\right)$$

ve

$$\widetilde{M}_2(t_i) = 2\widetilde{M}(t_i) - \tilde{F}_n(t_i) + \frac{h}{\tilde{a}}\sum_{k=1}^{[\tilde{a}i]-1} \widetilde{M}_2(t_k)\tilde{f}_n\left(t_i - \frac{t_k}{\tilde{a}}\right) + \frac{h}{2\tilde{a}}\widetilde{M}_2\left(t_{[\tilde{a}i]}\right)\tilde{f}_n\left(t_i - \frac{t_{[\tilde{a}i]}}{\tilde{a}}\right) + \frac{\tilde{a}t_i - t_{[\tilde{a}i]}}{2\tilde{a}}\left(\widetilde{M}_2\left(t_{[\tilde{a}i]}\right)\tilde{f}_n\left(t_i - \frac{t_{[\tilde{a}i]}}{\tilde{a}}\right)\right)$$

ifadeleri ile yaklaşık olarak hesap edilebilir. Ayrıca varyans fonksiyonu için verilen (3.13) ifadesi göz önüne alındığında varyans fonksiyonu $V(t)$

$$\tilde{V}(t_i) = \widetilde{M}_2(t_i) - \left(\widetilde{M}(t_i)\right)^2, i = 0,1,\dots n$$

denkleminden hesap edilebilir. Parametrik olmayan tahmin değeri, yan ve hata kareler ortalamaları $t = 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$ zaman noktaları için aşağıdaki Çizelge 7.10-7.18'de verilmektedir.

Çizelge 7.10 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.95$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.95	20	0.1	0.0055	0.0008	0.0002	0.0053	0.0006	0.0002
		0.5	0.1029	0.0111	0.0079	0.0920	0.0054	0.0052
		1	0.3251	0.0429	0.0351	0.2461	0.0068	0.0106
		2	0.7889	0.0472	0.1002	0.4864	-0.0298	0.0206
		3	1.2552	0.0410	0.1704	0.6695	-0.0702	0.0433
		4	1.6965	0.0180	0.2324	0.8518	-0.0860	0.0740
		5	2.1166	-0.0160	0.2880	1.0389	-0.0816	0.1222
	30	0.1	0.0039	-0.0008	0.0001	0.0037	-0.0009	0.0001
		0.5	0.1000	0.0082	0.0060	0.0914	0.0048	0.0033
		1	0.3005	0.0183	0.0220	0.2402	0.0008	0.0078
		2	0.7678	0.0261	0.0669	0.4852	-0.0310	0.0166
		3	1.2364	0.0222	0.1170	0.6740	-0.0658	0.0355
		4	1.6812	0.0026	0.1722	0.8556	-0.0822	0.0595
		5	2.1073	-0.0253	0.2330	1.0359	-0.0847	0.0854
	50	0.1	0.0045	-0.0002	0.0001	0.0044	-0.0002	0.0001
		0.5	0.0944	0.0026	0.0031	0.0879	0.0013	0.0023
		1	0.2820	-0.0002	0.0133	0.2334	-0.0060	0.0057
		2	0.7363	-0.0054	0.0456	0.4852	-0.0310	0.0125
		3	1.1848	-0.0294	0.0874	0.6887	-0.0511	0.0238
		4	1.6232	-0.0553	0.1339	0.8711	-0.0667	0.0421
		5	2.0447	-0.0879	0.1861	1.0514	-0.0692	0.0633
	100	0.1	0.0045	-0.0002	0.0000	0.0045	-0.0002	0.0000
		0.5	0.0930	0.0012	0.0015	0.0874	0.0008	0.0011
		1	0.2874	0.0052	0.0067	0.2396	0.0003	0.0033
		2	0.7492	0.0075	0.0255	0.5001	-0.0161	0.0076
		3	1.2164	0.0022	0.0497	0.7048	-0.0350	0.0172
		4	1.6710	-0.0075	0.0893	0.8884	-0.0494	0.0282
		5	2.1094	-0.0231	0.1175	1.0698	-0.0507	0.0433

Çizelge 7.11 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.975$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.975	20	0.1	0.0023	-0.0024	0.0001	0.0022	-0.0025	0.0001
		0.5	0.1010	0.0092	0.0066	0.0911	0.0043	0.0045
		1	0.3240	0.0410	0.0300	0.2487	0.0073	0.0093
		2	0.8282	0.0801	0.0786	0.5052	-0.0247	0.0180
		3	1.3162	0.0841	0.1246	0.7199	-0.0531	0.0453
		4	1.7859	0.0724	0.1683	0.9291	-0.0676	0.0838
		5	2.2322	0.0427	0.2090	1.1620	-0.0482	0.1303
	30	0.1	0.0055	0.0008	0.0002	0.0053	0.0007	0.0002
		0.5	0.1068	0.0149	0.0059	0.0971	0.0103	0.0039
		1	0.3185	0.0355	0.0216	0.2553	0.0138	0.0084
		2	0.8067	0.0586	0.0668	0.5164	-0.0134	0.0169
		3	1.3017	0.0696	0.1168	0.7229	-0.0501	0.0391
		4	1.7757	0.0622	0.1705	0.9262	-0.0705	0.0715
		5	2.2331	0.0436	0.1943	1.1436	-0.0666	0.1132
	50	0.1	0.0046	-0.0001	0.0001	0.0045	-0.0001	0.0001
		0.5	0.0943	0.0024	0.0025	0.0881	0.0013	0.0019
		1	0.2902	0.0072	0.0109	0.2405	-0.0010	0.0052
		2	0.7506	0.0026	0.0386	0.5032	-0.0267	0.0107
		3	1.2253	-0.0068	0.0763	0.7161	-0.0569	0.0258
		4	1.6874	-0.0260	0.1202	0.9197	-0.0769	0.0452
		5	2.1395	-0.0500	0.1696	1.1223	-0.0879	0.0685
	100	0.1	0.0045	-0.0002	0.0000	0.0045	-0.0002	0.0000
		0.5	0.0939	0.0021	0.0015	0.0885	0.0016	0.0012
		1	0.2898	0.0068	0.0067	0.2431	0.0016	0.0034
		2	0.7586	0.0105	0.0249	0.5149	-0.0150	0.0084
		3	1.2388	0.0067	0.0478	0.7377	-0.0353	0.0195
		4	1.7118	-0.0016	0.0769	0.9448	-0.0519	0.0337
		5	2.1725	-0.0170	0.1104	1.1562	-0.0540	0.0539

Çizelge 7.12 $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ ve $a = 0.99$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.99	20	0.1	0.0032	-0.0015	0.0001	0.0031	-0.0016	0.0001
		0.5	0.1087	0.0168	0.0060	0.0972	0.0102	0.0044
		1	0.3395	0.0560	0.0225	0.2612	0.0184	0.0092
		2	0.8597	0.1077	0.0729	0.5285	-0.0099	0.0173
		3	1.3668	0.1236	0.1244	0.7547	-0.0395	0.0450
		4	1.8547	0.1195	0.1680	0.9872	-0.0477	0.0765
		5	2.3224	0.0971	0.2033	1.2427	-0.0271	0.1291
	30	0.1	0.0046	-0.0001	0.0002	0.0044	-0.0002	0.0001
		0.5	0.1047	0.0127	0.0049	0.0962	0.0093	0.0034
		1	0.3305	0.0470	0.0203	0.2636	0.0208	0.0076
		2	0.8416	0.0897	0.0581	0.5384	0.0000	0.0155
		3	1.3588	0.1156	0.1018	0.7596	-0.0345	0.0390
		4	1.8529	0.1177	0.1464	0.9939	-0.0410	0.0700
		5	2.3346	0.1093	0.1886	1.2408	-0.0290	0.1127
	50	0.1	0.0048	0.0001	0.0001	0.0047	0.0001	0.0001
		0.5	0.0990	0.0071	0.0020	0.0923	0.0054	0.0019
		1	0.3081	0.0246	0.0107	0.2538	0.0110	0.0050
		2	0.7958	0.0439	0.0386	0.5315	-0.0069	0.0106
		3	1.3003	0.0572	0.0731	0.7558	-0.0384	0.0247
		4	1.7905	0.0553	0.1125	0.9821	-0.0528	0.0443
		5	2.2695	0.0442	0.1560	1.2202	-0.0496	0.0636
	100	0.1	0.0044	-0.0003	0.0000	0.0044	-0.0003	0.0000
		0.5	0.0951	0.0031	0.0014	0.0895	0.0025	0.0012
		1	0.2853	0.0018	0.0065	0.2412	-0.0016	0.0033
		2	0.7407	-0.0113	0.0246	0.5201	-0.0183	0.0083
		3	1.2191	-0.0240	0.0461	0.7541	-0.0401	0.0187
		4	1.6887	-0.0465	0.0722	0.9837	-0.0512	0.0335
		5	2.1530	-0.0723	0.1062	1.2111	-0.0587	0.0503

Çizelge 7.13 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.95$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$			$\boldsymbol{V(t)}$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.95	20	0.1	0.0073	-0.0027	0.0008	0.0070	-0.0029	0.0004
		0.5	0.2514	0.0215	0.0238	0.1977	0.0031	0.0078
		1	0.7809	0.0385	0.0571	0.3874	-0.0374	0.0066
		2	1.6804	-0.1312	0.0967	0.6177	-0.0225	0.0283
		3	2.4374	-0.3766	0.2377	0.9961	0.1457	0.1297
		4	3.1046	-0.6635	0.5327	1.5099	0.4816	0.6526
		5	3.6947	-0.9832	1.2507	2.1785	0.9958	1.9907
	30	0.1	0.0109	0.0010	0.0004	0.0106	0.0007	0.0004
		0.5	0.2485	0.0186	0.0189	0.2008	0.0062	0.0064
		1	0.7729	0.0305	0.0519	0.3991	-0.0257	0.0054
		2	1.6921	-0.1195	0.1057	0.6300	-0.0102	0.0277
		3	2.4805	-0.3336	0.2541	0.9939	0.1435	0.1197
		4	3.1798	-0.5883	0.5689	1.4896	0.4613	0.5979
		5	3.8031	-0.8748	1.1088	2.1381	0.9553	1.8818
	50	0.1	0.0102	0.0002	0.0002	0.0100	0.0001	0.0002
		0.5	0.2494	0.0195	0.0125	0.2051	0.0105	0.0048
		1	0.7637	0.0213	0.0430	0.4115	-0.0133	0.0038
		2	1.7128	-0.0988	0.0894	0.6484	0.0083	0.0178
		3	2.5378	-0.2762	0.1863	1.0037	0.1532	0.0928
		4	3.2802	-0.4880	0.3804	1.4787	0.4504	0.4870
		5	3.9503	-0.7276	0.7520	2.0985	0.9158	1.7039
	100	0.1	0.0118	0.0019	0.0001	0.0118	0.0019	0.0001
		0.5	0.2451	0.0152	0.0046	0.2081	0.0135	0.0022
		1	0.7599	0.0175	0.0170	0.4283	0.0035	0.0028
		2	1.7549	-0.0568	0.0455	0.6496	0.0094	0.0089
		3	2.6356	-0.1784	0.1211	0.9682	0.1178	0.0591
		4	3.4380	-0.3301	0.2539	1.3872	0.3590	0.2520
		5	4.1716	-0.5063	0.4709	1.9392	0.7565	0.9939

Çizelge 7.14 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.975$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.975	20	0.1	0.0089	-0.0010	0.0005	0.0086	-0.0013	0.0004
		0.5	0.2646	0.0343	0.0222	0.2090	0.0132	0.0070
		1	0.8168	0.0688	0.0534	0.4083	-0.0270	0.0052
		2	1.7536	-0.0983	0.0672	0.6693	-0.0132	0.0227
		3	2.5522	-0.3615	0.1918	1.1141	0.1765	0.1105
		4	3.2603	-0.6882	0.5273	1.7397	0.5699	0.5727
		5	3.8888	-1.0681	1.1908	2.5740	1.1889	1.9772
	30	0.1	0.0101	0.0001	0.0004	0.0098	-0.0001	0.0003
		0.5	0.2451	0.0148	0.0179	0.1994	0.0036	0.0061
		1	0.7667	0.0187	0.0513	0.4108	-0.0245	0.0050
		2	1.7102	-0.1416	0.1032	0.6712	-0.0114	0.0227
		3	2.5349	-0.3788	0.2464	1.0868	0.1492	0.1188
		4	3.2807	-0.6678	0.5502	1.6666	0.4967	0.5646
		5	3.9574	-0.9994	1.0963	2.4382	1.0532	1.8785
	50	0.1	0.0087	-0.0013	0.0002	0.0086	-0.0013	0.0002
		0.5	0.2455	0.0152	0.0104	0.2051	0.0093	0.0043
		1	0.7691	0.0212	0.0352	0.4235	-0.0118	0.0034
		2	1.7561	-0.0958	0.0749	0.6804	-0.0021	0.0171
		3	2.6313	-0.2824	0.1748	1.0867	0.1490	0.0915
		4	3.4330	-0.5155	0.3744	1.6499	0.4800	0.4755
		5	4.1684	-0.7884	0.7328	2.4102	1.0251	1.7003
	100	0.1	0.0106	0.0006	0.0001	0.010	0.0006	0.0001
		0.5	0.2369	0.0065	0.0042	0.2034	0.0076	0.0022
		1	0.7563	0.0083	0.0167	0.4333	-0.0020	0.0021
		2	1.7725	-0.0794	0.0453	0.6849	0.0024	0.0084
		3	2.6967	-0.2170	0.1118	1.0505	0.1129	0.0429
		4	3.5577	-0.3908	0.2386	1.5446	0.3747	0.2451
		5	4.3603	-0.5965	0.4572	2.2112	0.8261	0.9773

Çizelge 7.15 $X_1 \sim W(2,1)$ ve $a = 0.99$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$			$\boldsymbol{V(t)}$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.99	20	0.1	0.0118	0.0018	0.0004	0.0113	0.0014	0.0004
		0.5	0.2835	0.0529	0.0221	0.2231	0.0266	0.0069
		1	0.8386	0.0872	0.0516	0.4236	-0.0182	0.0046
		2	1.7910	-0.0859	0.0596	0.7071	-0.0032	0.0227
		3	2.6093	-0.3681	0.1895	1.1992	0.2014	0.1093
		4	3.3354	-0.7311	0.4812	1.9066	0.6343	0.5515
		5	3.9816	-1.1622	1.1850	2.8601	1.3216	1.9274
	30	0.1	0.0112	0.0013	0.0004	0.0109	0.0010	0.0003
		0.5	0.2644	0.0338	0.0127	0.2192	0.0226	0.0049
		1	0.8162	0.0648	0.0352	0.4329	-0.0089	0.0034
		2	1.8021	-0.0747	0.0519	0.7126	0.0024	0.0183
		3	2.6703	-0.3071	0.1523	1.1879	0.1901	0.1086
		4	3.4559	-0.6106	0.4312	1.8781	0.6057	0.5618
		5	4.1678	-0.9761	1.0092	2.8279	1.2894	1.8585
	50	0.1	0.0122	0.0023	0.0002	0.0120	0.0021	0.0001
		0.5	0.2433	0.0127	0.0079	0.2075	0.0110	0.0038
		1	0.7672	0.0158	0.0309	0.4315	-0.0103	0.0029
		2	1.7663	-0.1106	0.0674	0.7067	-0.0036	0.0163
		3	2.6677	-0.3097	0.1708	1.1423	0.1445	0.0873
		4	3.5031	-0.5635	0.3594	1.7616	0.4892	0.4690
		5	4.2773	-0.8665	0.7148	2.6182	1.0798	1.6386
	100	0.1	0.0099	-0.0001	0.0001	0. 0098	-0.0001	0.0001
		0.5	0.2397	0.0091	0.0042	0.2061	0.0096	0.0021
		1	0.7659	0.0145	0.0166	0.4414	-0.0004	0.0020
		2	1.8055	-0.0714	0.0446	0.7140	0.0037	0.0078
		3	2.7624	-0.2150	0.1088	1.1260	0.1283	0.0383
		4	3.6644	-0.4021	0.2276	1.6963	0.4239	0.2340
		5	4.5141	-0.6297	0.4493	2.4829	0.9444	0.9615

Çizelge 7.16 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.95$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.95	20	0.1	0.0146	0.0039	0.0011	0.0135	0.0030	0.0009
		0.5	0.2726	0.0142	0.0312	0.2145	-0.0063	0.0081
		1	0.6279	0.0108	0.0586	0.4131	-0.0784	0.0160
		2	1.2080	-0.0694	0.1173	0.7618	-0.2611	0.0970
		3	1.7216	-0.1656	0.2524	1.1131	-0.4436	0.2832
		4	2.1799	-0.2842	0.3857	1.4914	-0.5940	0.5757
		5	2.5989	-0.4175	0.5165	1.9030	-0.6996	0.8858
	30	0.1	0.0116	0.0009	0.0006	0.0111	0.0005	0.0005
		0.5	0.2595	0.0011	0.0174	0.2083	-0.0124	0.0072
		1	0.5975	-0.0195	0.0423	0.4148	-0.0767	0.0159
		2	1.1659	-0.1115	0.1058	0.7848	-0.2381	0.0887
		3	1.6782	-0.2090	0.2046	1.1563	-0.4004	0.2293
		4	2.1379	-0.3262	0.3227	1.5552	-0.5302	0.4458
		5	2.5586	-0.4578	0.4739	1.9857	-0.6168	0.7183
	50	0.1	0.0117	0.0010	0.0003	0.0114	0.0008	0.0003
		0.5	0.2700	0.0116	0.0110	0.2210	0.0002	0.0056
		1	0.6046	-0.0124	0.0372	0.4379	-0.0536	0.0144
		2	1.2000	-0.0775	0.0893	0.8365	-0.1864	0.0818
		3	1.7278	-0.1594	0.1666	1.2423	-0.3144	0.2295
		4	2.2089	-0.2553	0.2613	1.6656	-0.4199	0.4372
		5	2.6503	-0.3661	0.4022	2.1212	-0.4813	0.6933
	100	0.1	0.0122	0.0015	0.0002	0.0120	0.0014	0.0002
		0.5	0.2747	0.0163	0.0074	0.2284	0.0076	0.0034
		1	0.6132	-0.0038	0.0175	0.4594	-0.0321	0.0087
		2	1.2205	-0.0569	0.0528	0.8949	-0.1280	0.0501
		3	1.7617	-0.1255	0.0993	1.3332	-0.2236	0.1395
		4	2.2612	-0.2029	0.1738	1.7762	-0.3093	0.2871
		5	2.7252	-0.2912	0.2635	2.2388	-0.3637	0.6690

Çizelge 7.17 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.975$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{M(t)}$			$\boldsymbol{V(t)}$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.975	20	0.1	0.0168	0.0061	0.0011	0.0156	0.0051	0.0009
		0.5	0.3097	0.0505	0.0258	0.2361	0.0135	0.0070
		1	0.6674	0.0457	0.0516	0.4443	-0.0584	0.0126
		2	1.2632	-0.0349	0.1089	0.8327	-0.2396	0.0860
		3	1.7956	-0.1367	0.1718	1.2297	-0.4386	0.2780
		4	2.2634	-0.2774	0.2706	1.6866	-0.5944	0.5308
		5	2.6904	-0.4407	0.4199	2.1815	-0.7201	0.8754
	30	0.1	0.0130	0.0023	0.0006	0.0124	0.0019	0.0005
		0.5	0.2877	0.0285	0.0172	0.2297	0.0070	0.0062
		1	0.6383	0.0166	0.0379	0.4473	-0.0553	0.0117
		2	1.2449	-0.0532	0.0903	0.8537	-0.2185	0.0775
		3	1.7791	-0.1532	0.1573	1.2960	-0.3723	0.2197
		4	2.2649	-0.2760	0.2551	1.7678	-0.5131	0.4338
		5	2.7117	-0.4194	0.3963	2.2818	-0.6198	0.6978
	50	0.1	0.0113	0.0006	0.0003	0.0110	0.0005	0.0003
		0.5	0.2567	-0.0024	0.0111	0.2137	-0.0089	0.0051
		1	0.5919	-0.0297	0.0295	0.4355	-0.0672	0.0134
		2	1.1888	-0.1093	0.0807	0.8548	-0.2175	0.0770
		3	1.7256	-0.2067	0.1557	1.2980	-0.3702	0.2149
		4	2.2246	-0.3162	0.2562	1.7648	-0.5161	0.4250
		5	2.6911	-0.4400	0.3907	2.2686	-0.6331	0.6848
	100	0.1	0.0108	0.0002	0.0001	0.0107	0.0001	0.0001
		0.5	0.2622	0.0030	0.0060	0.2217	-0.0009	0.0030
		1	0.6102	-0.0115	0.0165	0.4588	-0.0438	0.0080
		2	1.2261	-0.0719	0.0494	0.9170	-0.1552	0.0452
		3	1.7871	-0.1451	0.0984	1.3991	-0.2691	0.1260
		4	2.3125	-0.2283	0.1669	1.9021	-0.3788	0.2522
		5	2.8067	-0.3244	0.2578	2.4388	-0.4628	0.4134

Çizelge 7.18 $X_1 \sim LN(0,1)$ ve $a = 0.99$ iken geometrik ve varyans fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin edicileri, yan ve hata kareler ortalamaları

a	n	t	$M(t)$			$V(t)$		
			Tahmin	**Yan**	**HKO**	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**
0.99	20	0.1	0.0144	0.0038	0.0008	0.0136	0.0031	0.0007
		0.5	0.3171	0.0575	0.0231	0.2429	0.0192	0.0065
		1	0.6741	0.0496	0.0421	0.4589	-0.0506	0.0103
		2	1.3081	-0.0027	0.0859	0.8519	-0.2518	0.0800
		3	1.8591	-0.1014	0.1388	1.2905	-0.4510	0.2732
		4	2.3506	-0.2390	0.2289	1.7882	-0.6251	0.5266
		5	2.7959	-0.4094	0.3775	2.3568	-0.7530	0.8566
	30	0.1	0.0140	0.0033	0.0006	0.0134	0.0029	0.0005
		0.5	0.3054	0.0459	0.0167	0.2424	0.0187	0.0053
		1	0.6665	0.0420	0.0363	0.4674	-0.0422	0.0099
		2	1.3063	-0.0045	0.0786	0.8956	-0.2081	0.0735
		3	1.8755	-0.0850	0.1273	1.3633	-0.3782	0.2022
		4	2.3944	-0.1952	0.1969	1.8809	-0.5324	0.3850
		5	2.8724	-0.3329	0.3039	2.4611	-0.6486	0.6836
	50	0.1	0.0134	0.0027	0.0003	0.0130	0.0025	0.0003
		0.5	0.2862	0.0266	0.0102	0.2358	0.0120	0.0040
		1	0.6448	0.0203	0.0225	0.4718	-0.0377	0.0082
		2	1.2816	-0.0292	0.0569	0.9286	-0.1751	0.0547
		3	1.8563	-0.1042	0.1041	1.4223	-0.3193	0.1695
		4	2.3892	-0.2005	0.1702	1.9599	-0.4534	0.3548
		5	2.8850	-0.3202	0.2698	2.5650	-0.5447	0.5792
	100	0.1	0.0098	-0.0009	0.0001	0.0096	-0.0009	0.0001
		0.5	0.2584	-0.0011	0.0051	0.2202	-0.0035	0.0026
		1	0.6012	-0.0233	0.0148	0.4614	-0.0481	0.0079
		2	1.2281	-0.0827	0.0445	0.9312	-0.1725	0.0409
		3	1.8009	-0.1596	0.0911	1.4393	-0.3023	0.1192
		4	2.3391	-0.2506	0.1618	1.9871	-0.4262	0.2485
		5	2.8515	-0.3538	0.2483	2.5756	-0.5342	0.4045

Parametrik olmayan tahmin ediciler için elde edilen sonuçların parametrik tahmin ediciler için elde edilen sonuçlara benzer olduğu Çizelge 7.10-7.18’den açıktır. Yani, Çizelge 7.10-7.18’e göre her bir örneklem hacminde t zaman noktasının artmasıyla tahmin edicilerin HKO değerlerinin arttığı, ancak örneklem hacminin artmasıyla birlikte her sabit t zaman noktası için HKO değerlerinin azaldığı görülmektedir. Ayrıca, geometrik sürecin a oran parametresinin 1’e yaklaşması ile tahmin edicilerin HKO değerlerinin az miktarda da olsa azaldığı söylenebilir.

Bir Örnek. Pham ve Wang (2001) belirli bir yazılımda meydana gelen hataların modellenmesi için bir $\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik sürecini gözönüne almışlardır. Burada $N(t), t$ zamanına kadar yazılımda meydana gelen hataların sayısını gösterir. Bu modelde i. yazılım hatasının onarım maliyetinin $W_i = c_0 + (i-1)U, i = 1,2, \ldots$ ile belirtilen bir rasgele değişken olduğu varsayılmıştır. $(i-1)U$ artış rasgele değişkeni, onarılan hatalar ortadan kaldırıldıkça bir sonraki hatanın tespitinin ve ortadan kaldırılma maliyetinin artmasından dolayı, bu artışı yansıtan kısım olarak düşünülmektedir ve c_0 bir sabit iken U, c_1 ortalamasına sahip bir rasgele değişkendir. Bu durumda $(0, t]$ aralığında yazılımdaki hataların ayıklanma maliyetinin beklenen değeri $E\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(c_0 + (i-1)U)\right)$ dir. Bu ifade $N(t)$ üzerinden koşullandırma ile sürecin geometrik ve varyans fonksiyonlarına bağlı olarak

$$C_1(t) = \frac{2c_0 - c_1}{2} M(t) + \frac{c_1}{2}\left(V(t) + M^2(t)\right), t \geq 0 \quad (7.1)$$

biçiminde yazılır. Aynı zamanda hataların tespiti için birim zamana düşen test etme maliyetini de c_2 ortalamasına sahip bir rasgele değişken olarak varsayar ve (7.1)'deki maliyete dahil edersek toplam test etme ve hata ayıklama maliyetlerinin beklenen değeri

$$C_2(t) = tc_2 + C_1(t), t \geq 0 \quad (7.2)$$

olur (Pham ve Wang 2001).

Şimdi Musa vd. (1987) tarafından verilen bir sistem yazılımındaki merkezi işlem biriminin saniye olarak $n = 136$ gözlenmiş hata zamanları için (7.1) ve (7.2) 'de verilen maliyet fonksiyonlarının tahmin değerlerini hesaplayalım. Bu veri seti içerisinde aynı anda gerçekleşen hatalar mevcut olduğundan dolayı bu zamanlar arası geçen hata süreleri 0 yerine 0.5 olarak alınmıştır. Lam vd. (2004) bu veri setinin $a < 1$ oran parametresi ile geometrik sürece uygunluğunu göstermişlerdir. Aynı zamanda Pekalp ve Aydoğdu (2018) çalışmasında bu veri setinin ilk olayın gerçekleşme zamanı dağılımının Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testine göre ortalaması $\hat{\theta} = 92.57793$ olan üstel dağılım olduğunu ve a oran parametresi için $\hat{a} = 0.97688$ olduğunu belirlemişlerdir.

Böylece (7.1) ve (7.2)'de verilen maliyet fonksiyonlarının tahmin değerleri Bölüm 6'da geometrik ve varyans fonksiyonları için önerilen tahmin edicileri kullanarak istenilen t için hesap edilebilir. Örneğin, Pham ve Wang (2001)'deki gibi $c_0 = 13.5, c_1 = 1$ ve $c_2 = 1.2$ olsun. $\hat{\theta} = 92.57793$ ve $\hat{a} = 0.97688$ olduğundan dolayı $\widehat{M}(100)$ ve $\widehat{V}(100)$ sırasıyla (6.1) ve (6.2)'den 1.0675 ve 1.0416 olarak elde edilir. Böylece $\hat{C}_1(100)$ ve $\hat{C}_2(100)$ sırasıyla 14.9684 ve 134.9684 olarak hesaplanır. Ayrıca (7.1) ve (7.2)'de verilen maliyet fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin değerleri de yine Bölüm 6'da önerilen parametrik olmayan tahmin ediciler yardımıyla bulunabilir. a oran parametresi için (6.4), geometrik ve varyans fonksiyonları için sırasıyla (6.5) ve (6.6)'daki tahmin edicileri kullanarak $t = 100$ için $\tilde{a} = 0.97688$, $\widetilde{M}(100) = 0.3582$ ve $\widetilde{V}(100) = 0.4013$ olarak elde edilir. Buradan maliyet fonksiyonlarının parametrik olmayan tahmin değerleri $\tilde{C}_1(100) = 4.9216$ ve $\tilde{C}_2(100) = 124.9216$ bulunur.

8. SONUÇLAR

Bu çalışmada yenileme sürecinin bir genellemesi olan ve güvenirlik, envanter ve kuyruk teorisi, risk ve garanti analizi ile uygulamalı istatistiğin birçok alanında araştırmacılar tarafından sıklıkla kullanılan geometrik süreçler gözönüne alınmıştır. Bir geometrik sürecin uygulamalarda ortalama değer ve varyans fonksiyonu bilgisine ihtiyaç duyulmasından dolayı bu fonksiyonların farklı yöntemler yardımıyla hesap edilmesi ve tahmin edilmesi problemi üzerinde durulmuştur.

Geometrik fonksiyon için bu fonksiyonun sağlamış olduğu integral denklemin kullanılmasıyla hesabına yönelik birçok çalışmanın mevcut olduğunu biliyoruz. Tang ve Lam (2007) (3.9) integral denklemini kullanarak yamuk integrasyon kuralına göre bu fonksiyonun hesabını gerçekleştirmiştir. Literatürde ikinci moment fonksiyonunun dolayısıyla varyans fonksiyonunun hesabı için uygulaması kolay bir yönteme ihtiyaç duyulmasından dolayı ilk olarak ikinci moment fonksiyonu için Teorem 3.3'de verilen bir integral denklem çıkarılmıştır. Böylece hem ikinci momentin hem de varyans fonksiyonunun hesabı için güçlü bir hesaplama aracına ulaşılmıştır. Tang ve Lam (2007) tarafından geometrik fonksiyon için önerilmiş olan yamuk integrasyon kuralına dayalı sayısal yöntem ikinci moment fonksiyonu için elde edilen (3.12) integral denklemine uyarlanarak, ikinci moment ve varyans fonksiyonlarının sayısal hesabı gerçekleştirilmiştir.

Sayma süreçlerinden gelen veri seti için model olarak geometrik süreç kullanıldığında ilk olay zamanının dağılımı genellikle üstel, Weibull, gamma gibi önemli yaşam dağılımı aileleri arasından belirlendiğinden bu dağılım varsayımları altında sürecin bir boyutlu olasılık dağılımının hesap edilmesi üzerinde durulmuştur. Sürecin olasılık dağılımı, dağılım fonksiyonlarının konvolüsyonlarına dayalı olarak verildiğinden konvolüsyon fonksiyonlarının kuvvet serisi açılımının bulunmasıyla olasılık değerleri hesap edilmiştir. Üstel ve Weibull dağılım durumlarında sürecin olasılık dağılımının kuvvet serisi açılımı Aydoğdu vd. (2013) ve Aydoğdu ve Karabulut (2014) çalışmalarında elde edilmiş olduğundan bu çalışmada sadece gamma dağılımı durumunda sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı bulunmuştur. Her bir dağılım durumu gözönüne alınarak uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan a oran parametre değerleri için belirli bir t zaman noktasına kadar hiç olay gerçekleşmemesi, 1, 2, 3, 4 ve 5 olay gerçekleşmesi olasılıkları üstel dağılım için Çizelge 5.1-5.5'de, gamma dağılımı için Çizelge 5.8-5.11'de ve Weibull dağılımı için Çizelge 5.15-5.18'de sunulmuştur.

Geometrik fonksiyonun birçok araştırmacı tarafından çalışılmış olduğu daha önceki bölümlerde ifade edilmişti. Aydoğdu vd. (2013), Aydoğdu ve Karabulut (2014) çalışmalarındaki geometrik fonksiyon için sırasıyla üstel ve Weibull dağılımlarını gözönüne alarak elde etmiş oldukları kuvvet serisi açılımları Kısım 5.1 ve Kısım 5.3 'de verilmiştir. Bu çalışmada ise ilk olay zamanı dağılımı olarak Erlang dağılımı varsayılarak ve geometrik fonksiyon için verilen (3.9) integral denklemi kullanılarak kuvvet serisi açılımı elde edilmiştir. Tüm dağılım durumları için çeşitli parametre değerlerinde seri açılımları hesaplanmıştır. Geometrik fonksiyonun kuvvet serisi açılımını elde ederken kullanılan çıkarımlara benzer olarak üstel, Weibull ve Erlang dağılımları durumunda (3.12) integral denklemi kullanılarak ikinci moment fonksiyonu için kuvvet serisi açılımı bulunmuştur. Hem geometrik fonksiyon hem de ikinci moment fonksiyonları için elde edilen kuvvet serisi açılımlarının (3.13) eşitliğinde yerine konmasıyla varyans fonksiyonun da kuvvet serisi açılımı çıkartılmıştır. Böylece önemli yaşam dağılımları varsayımı altında geometrik ve varyans fonksiyonu için uygulaması kolay bir yönteme ulaşılmıştır. Kuvvet serisi açılımında fonksiyonlara istenilen hata düzeyine göre yaklaşımda bulunulduğundan hesaplanan fonksiyon değerlerine bu fonksiyonların gerçek değerleri olarak bakılabilir. Bu nedenle kuvvet serisi açılımı ile hesaplanan değerleri, sayısal yöntem ile bulunan değerler ile karşılaştırdığımızda a oran parametresi 1'e yaklaşırken fonksiyon değerlerinin de birbirine yaklaştığı sonucuna ulaşabiliriz. Ayrıca sayısal yöntemde ele alınan adım uzunluğunun 0.01'den daha küçük olması, diğer bir deyişle hesap yapılmak istenen aralığın parçalanmasının daha çok olması durumunda bu değerlerin birbirlerine daha da yaklaşacağını belirtelim.

Bölüm 6'da geometrik sürecin geometrik ve varyans fonksiyonu için hem parametrik hem de parametrik olmayan tahmin ediciler önerilmiştir. Bu tahmin edicilerin bazı istatistiksel özellikleri incelenerek, performanslarının değerlendirilmesi amacıyla Bölüm 7'de bir simülasyon çalışması uygulanmıştır. Simülasyon çalışmasından hem parametrik hem de parametrik olmayan tahmin ediciler için benzer sonuçlar elde edilmiştir. Geometrik süreçten gelen bir veri setine dayalı olarak geometrik ve varyans fonksiyonlarının tahmini için küçük örneklem hacimlerinde ve her bir dağılım durumunda daha küçük HKO değerlerine sahip olmasından dolayı parametrik olmayan tahmin ediciler önerilebilir. Örneklem hacminin artmasıyla birlikte parametrik tahmin edicilerin HKO değerlerinin parametrik olmayan tahmin edicilere göre daha hızlı azaldığı ve böylece geometrik ve varyans fonksiyonlarının tahmini için parametrik tahmin edicilerin önerildiği simülasyon çalışmasından görülmektedir.

KAYNAKLAR

Athreya, K.B. and Lahiri, S.N. 2006. Measure Theory and Probability Theory. Springer.

Aydoğdu H. and Altındağ Ö. 2015. Computation of the Mean Value and Variance Functions in Geometric Process. Journal of Statistical Computation and Simulation, 86, 5, 986-995.

Aydoğdu, H. 1997. Yenileme Süreçlerinde Tahmin. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 158, Ankara.

Aydoğdu, H. and Karabulut, İ. 2014. Power Series Expansions for the Distribution and Mean Value Function of a Geometric Process with Weibull Interarrival Times. Naval Research Logistics, 61, 599-603.

Aydoğdu, H., Karabulut, İ. and Şen, E. 2013. On the Exact Distribution and Mean Value Function of a Geometric Process with Exponential Interarrival Times. Statistics and Probability Letters, 83, 2577-2582.

Billingsley, P. 1995. Probability and Measure, 3rd Ed., John Wiley&Sons Inc, New York.

Braun, W.J., Li, W. and Zhao, Y.Q. 2005. Properties of the Geometric and Related Processes. Naval Research Logistics, 52, 607-616.

Feller, W. 1971. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. II. Second Edition. John Wiley&Sons Inc, New York.

Karlin, S. and Taylor, H.M. 1975. A First Course in Stochastic Processes. Second Edition, Academic Press, New York.

Kawata, T. 1972. Fourier Analysis in Probability Theory. Academic Press, New York.

Lam, Y. 1988. Geometric Processes and Replacement Problem. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 4, 366-377.

Lam, Y. 2007. The Geometric Processes and Its Applications. World Scientific, Singapore.

Lam, Y., Zhu, L.X., Chan, J.S.K. and Liu, Q. 2004. Analysis of Data from a Series of Events by a Geometric Process Model. Acta Mathematicae App. Sin., 20, 263-282.

Lomnicki, Z.A. 1966. A note on the Weibull renewal process. Biometrika 53, 375–381.

Musa J.D., Iannino A., Okumoto K.. 1987. Software Reliability: Measurement, Prediction, Application, McGraw-Hill, New York.

Park, M. and Pham, H. 2010. Warranty Cost Analyses Using Quasi-Renewal Processes for Multicomponent Systems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans, 40, 6, 1329–1340.

Parzen, E. 1962. On estimation of a probability density function and mode. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 33, 1065–1076.

Pekalp, M.H. and Aydoğdu, H. 2018. An integral equation for the second moment function of a geometric process and its numerical solution, Naval Research Logistics 65:176–184.

Pham, H. 2000. Software Reliability. New York: Springer-Verlag.

Pham, H. and Wang, H. 1996. Imperfect Maintenance. European Journal of Operational Research, 94, 425-438.

Pham, H. and Wang, H. 2001. A Quasi-Renewal Process for Software Reliability and Testing Costs. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 31, 6, 623-631.

Pham, H. and Zhang, X. 1999. A Software Cost Model with Warranty and Risk Costs. IEEE Transactions on Computers, 48, 71-75.

Ross, S. M. 1983. Stochastic Processes. John Wiley and Sons Inc., New York.

Roussas, G.G. 1997. A Course in Mathematical Statistics, London, 2nd Ed. Academic Press.

Smith, W.L. 1958. Renewal Theory and Its Ramifications. J. Roy. Statist. Soc. B, 20, 243-302.

Tang, Y. and Lam, Y. 2007. Numerical Solution to an Integral Equation in Geometric Process. Journal of Statistical Computation and Simulation, 77, 549-560.

Wang, H. and Pham, H. 1996. A Quasi-Renewal Process and its Applications in Imperfect Maintenance. International Journal of Systems Science, 27, 1055–1062.

White, J.S. 1964. Weibull renewal analysis. Aerospace Reliability and Maintainability Conference, Society of Automative Engineers, Washington DC, 639–649.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mustafa Hilmi PEKALP

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 30/05/1986

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bahçelievler (Yabancı Dil Ağırlıklı) Deneme Lisesi (2004)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2011)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (Eylül 2011-Ekim 2013)

Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (Şubat 2014-Kasım 2019)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi (2015-Devam)

SCI, SCI-E, SSCI, AHCI İndekslerinde Taranan Araştırma Makaleleri

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2018. An Integral Equation for the Second Moment Function of a Geometric Process and Its Numerical Solution. Naval Research Logistics, 65:176-184 (Tezden Üretilmiştir).

Kara M., Altındağ Ö., **Pekalp M. H.** and Aydoğdu H. 2019. Parameter Estimation in α-Series Process with Lognormal Distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, DOI: 10.1080/03610926.2018.1504075.

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2019. An Asymptotic Solution of the Integral Equation for the Second Moment Function in Geometric Processes. Journal of Computational and Applied Mathematics, DOI:10.1016/j.cam.2018.12.014, 353: 179-190.

Pekalp M. H., Altındağ Ö., Acar Ö. and Aydoğdu H. 2019. Plug-in Estimators for the Mean Value and Variance Functions in Delayed Renewal Processes. Communications in Statistics-Theory and Methods, DOI:10.1080/03610926.2019.1604965.

Pekalp M. H., Aydoğdu H. and Türkman K.F. 2019. Discriminating Between Some Lifetime Distributions in Geometric Counting Processes, Communications in Statistics - Simulation and Computation, DOI: 10.1080/03610918.2019.1657452.

Uluslararası Alan İndekslerinde Taranan Araştırma Makaleleri

Pekalp, M.H., Aydoğdu, H. and Karabulut İ. 2014. Investigation of Trend by Graphical Methods in Counting Processes. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 63(1), 73-83.

Pekalp M.H. ve Aydoğdu H. 2019. Sabit Bekleme Zamanlı Tip II Sayaç Sürecinde Ortalama Değer ve Varyans Fonksiyonlarının Parametrik Tahmini. Süleyman Demirel Üni. Fen Edebiyat Fak. Fen Der., DOI:10.29233/sdufeffd.437282, Cilt 14, Sayı 1, 28-38.

Uluslararası Bildiriler

Pekalp, M.H., Aydoğdu, H. and Karabulut İ. 2014. Graphical Methods for Trend in Counting Processes, 9th International Statistics Day Symposium (Özet bildiri).

Pekalp, M.H., Aydoğdu, H. ve Karabulut İ. 2015. Replacement Policies for Alpha-Series Processes, 2nd Ankara-Istanbul Workshop on Stochastic Processes, (Poster).

Pekalp, M.H., Aydoğdu, H. ve Karabulut İ. 2015. Ayni Tür Yedeğe Sahip Tamir Edilebilen Sistem için Alpha Seri Süreç ve Bir Optimal Değiştirme Politikası, Uluslararası 9. İstatistik Kongresi (Özet bildiri).

Pekalp M.H. ve Aydoğdu H. 2016. Sayma Süreçlerine İlişkin Bazı Monoton Trend Testleri ve Karşılaştırılmaları, Xth International Statistics Days Conference, (Özet bildiri).

Karaduman M.Ö., **Pekalp M.H.** and Aydoğdu H. 2017. Estimation of the Mean Value Function for Weibull Trend Renewal Process, 10th International Statistics Congress, (Özet bildiri).

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2017. Power Series Expansion for the Variance Function of Erlang Geometric Process, 10th International Statistics Congress, (Özet bildiri).

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2017. Variance Function of Type II Counter Process with Constant Locking Time, 10th International Statistics Congress, (Özet bildiri).

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2017. Power Series Expansions for the One-Dimensional Probability Distribution and Mean Value Function in Gamma Geometric Processes, 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, (Özet Bildiri).

Karaduman M.Ö., **Pekalp M.H.** and Aydoğdu H. 2017. Estimation of Trend Function in Trend Renewal Process with Weibull Distribution, 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, (Özet bildiri).

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2017. Numerical Computation of the Variance Function in Geometric Processes, 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, (Özet bildiri).

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2018. Plug-in Estimator for the Mean Value Function of Type II Counter Process with Constant Locking Time, 4th International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, (Özet bildiri).

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2018. The Exact Distribution and Geometric Function of a Geometric Process with Erlang Interarrival Times, 4th International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress (Özet bildiri).

Karaca, B., **Pekalp M.H.** and Aydoğdu H. 2018. Parameter Estimation in Semi-Geometric Process with Exponential Interarrival Times, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, (Özet bildiri).

Karaduman M.Ö., **Pekalp M.H.** and Aydoğdu H. 2018. Estimation of the Mean Value Function for Gamma Trend Renewal Process, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, (Özet bildiri).

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2018. A Parametric Estimator for the Geometric Function in Geometric Process with Exponential Interarrival Times, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (Özet bildiri).

Pekalp M.H. and Aydoğdu H. 2018. Some Bounds for the Mean Value Function of the Remaining Life Process Based on an Integral Equation, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, (Özet bildiri).

Pekalp M.H., Eroğlu İnan G. and Aydoğdu H. 2019. Parameter Estimation in Doubly Geometric Process with Exponential Inter-renewal Times, 17th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, (Genişletilmiş özet bildiri).

Pekalp M.H., Özbek L. and Aydoğdu H. 2019. A Plug-in Estimator for the Mean Value Function of a Geometric Process with Exponential Distribution, 17th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, (Genişletilmiş özet bildiri).