

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ**  
**BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJESİ**  
**SONUÇ RAPORU**

Carleson Eğrileri Üzerinde Tanımlı Modifiye Morrey Uzaylarında Harmonik Analizin Bazı İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

Dr. Öğr. Üyesi Canay Aykol Yüce

Prof. Dr. Vagif S. Guliyev Doktora Öğrencisi Zeynep akır

17B0430003

28.06.2017 - 28.06.2019

31.07.2019

Ankara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri  
Ankara - 2019

### I. Projenin Türkçe ve İngilizce Adı ve zetleri

**Türkçe Adı** : Carleson Eğrileri zerinde Tanımlı Modifiye Morrey Uzaylarında Harmonik Analizin Bazı İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

**İngilizce Adı** : The Boundedness of Some Integral Operators of Harmonic Analysis in Modified Morrey Spaces Defined on Carleson Curves

## Özetleri

: Carleson Eğrileri Üzerinde Tanımlı Modifiye Morrey Uzaylarında Harmonik Analizin Bazı İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

### ÖZET

Morrey uzayları, 1938 yılında C.B. Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışması ve kesin ön eşitsizliklerinin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Daha sonra Morrey uzaylarının Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

Morrey uzayları analizde önemli bir yere tutmasına rağmen bu uzaylarda kompakt destekli sürekli fonksiyonların uzayı ve basit fonksiyonların uzayı yoğun değildir. Bu özelliğin olmaması uygulamalarda birçok sıkıntı ortaya çıkarmaktadır.

Ancak modifiye Morrey uzaylarında kompakt destekli sürekli fonksiyonların uzayı ve basit fonksiyonların uzayı yoğun olduğundan modifiye Morrey uzaylarında bu problem ortadan kalkmaktadır. Böylece kompleks düzlemdeki Cauchy tipli integrallerin modifiye Morrey uzaylarında sınırlılığını elde etmek mümkün olacaktır. Dolayısıyla kompleks düzlemde verilen diferensiyel denklemlerin çözümleri bulunabilir.

Modifiye Morrey uzayları V.P. Il'in, V. S. Guliyev, J. Hasanov, Y. Zeren, C. Aykol, Y.Y. Mammadov ve K. Rahimova gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. V. S. Guliyev, J. Hasanov ve Y. Zeren 2011 yılında modifiye Morrey uzaylarının Morrey uzayları ve Lebesgue uzayları ile ilişkisini kapsamlı bir biçimde inceleyerek bu uzaylar arasında yeni gömme bağıntıları elde etmişlerdir. Ayrıca bu uzaylarda maksimal operatörün sınırlılığını ve Riesz potansiyelinin sınırlılığı için gerek ve yeter şartları ispatlamışlardır. Ancak literatürde Carleson eğrileri üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzayları üzerine yapılmış herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu eksikliğin giderilmesi amacıyla yürütülen proje süresince Carleson eğrileri üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzaylarının topolojik özellikleri incelenmiş ve bu uzaylarda maksimal operatör, kesirli maksimal operatör ve Riesz potansiyelinin sınırlılığı elde edilmiştir.

Ayrıca, proje sürecinde Morrey uzayları hakkında yapılan çalışmalarla Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım için sonuçlar alınmıştır. Bundan başka, maksimal ve singüler integral operatörlerin lokal 'tamamlayıcı' genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzaylarında sınırsız kümeler üzerinde sınırlılığı ispatlanmıştır.

The Boundedness of Some Integral Operators of Harmonic Analysis in Modified Morrey Spaces Defined on Carleson Curves

### ABSTRACT

Morrey Spaces was discovered by C.B. Morrey in 1938 while he was dealing with problems in the theory of analysis of variations and solutions of quadratic elliptic partial differential equations. Morrey spaces have important applications in the study of the regularity properties of the solutions of partial differential equations and the existence of exact pre-inequalities. Later, Navier-Stokes and Schrödinger equations which are important applications of Morrey spaces, elliptic problems with discontinuous coefficients and important applications in potential theory have emerged. Although Morrey spaces play an important role in analysis, the space of compact supported continuous functions and the space of simple

functions are not dense in Morrey spaces. Lack of this feature creates many problems in applications. However, this problem is solved in modified Morrey spaces because the space of compact supported continuous functions and the space of simple functions are dense in modified Morrey spaces. Thus, it will be possible to obtain the boundedness of Cauchy- type integrals in the complex plane in these spaces. Therefore, the solutions of the differential equations given in the complex plane can be found. Modified Morrey spaces were studied by many authors such as V.P. Il'in, V. S. Guliyev, J. Hasanov, Y. Zeren, C. Aykol, Y.Y. Mammadov and K. Rahimova. V. S. Guliyev, J. Hasanov and Y. Zeren examined the relationship of modified Morrey spaces with Morrey spaces and Lebesgue spaces in 2011 and obtained new burial relations. They also proved the boundedness of the maximal operator and found the necessary and sufficient conditions for the boundedness of Riesz potential in modified Morrey spaces. However, there are no studies on modified Morrey spaces defined on Carleson curves in the literature. During this project the topological properties of the modified Morrey spaces defined on the Carleson curves are examined and the boundedness of the maximal operator, fractional maximal operator and Riesz potential are obtained in these spaces in order to eliminate this deficiency. Furthermore, while studying Morrey spaces, also approximation by trigonometric polynomials in Morrey spaces is proved. Finally, the boundedness of maximal and singular integral operators in local 'complementary' generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets is proved.

## II. Amaç ve Kapsam

Bu projede, Carleson eğrisi üzerinde tanımlı kesirli maksimal, maksimal operatörün ve Riesz potansiyelinin Carleson eğrisi üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzaylarında sınırlılığı için gerek ve yeter şartları araştırılmıştır. Ayrıca Carleson eğrisi üzerinde tanımlı Cauchy singüler integral operatörün Carleson eğrisi üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzaylarında varlığı ve sınırlılığı incelenmiştir. Morrey uzayları hakkında yapılan çalışmalarla Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım için sonuçlar alınmıştır. Maksimal ve singüler integral operatörlerin lokal 'tamamlayıcı' genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzaylarında sınırsız kümeler üzerinde sınırlılığı ispatlanmıştır.

## III. Materyal ve Yöntem

Kullanılan materyaller kaynaklar kısmında belirtilen kitap ve makalelerdir. Ayrıca üniversitemiz ve diğer üniversitelerin kütüphanelerinden ve TÜBİTAK ULAKBİM yayın veri tabanından başka materyaller de temin edilmiştir.

## IV. Analiz ve Bulgular

Bu projede;

1. Kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzayları tanımlanarak temel özellikleri verilmiştir.
2. Carleson eğrisi üzerinde tanımlı kesirli maksimal ve maksimal operatörün Carleson eğrisi üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzaylarında sınırlılığı için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.
3. Carleson eğrisi üzerinde tanımlı Riesz potansiyelinin Carleson eğrisi üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzaylarında sınırlılığı için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.
4. Morrey uzayları hakkında yapılan çalışmalarla Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım için sonuçlar alınmıştır.
5. Maksimal ve singüler integral operatörlerin lokal 'tamamlayıcı' genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzaylarında sınırsız kümeler üzerinde sınırlılığı ispatlanmıştır.

## V. Sonuç ve Öneriler

Fonksiyon uzayların modern teorisi S.L. Sobolev, A. Zygmund, S.M. Nikolskii, A. Calderon, V. Maz'ya, L.D. Kudryavtsev, N. Aronszayn, E.M. Stein, O.V. Besov, P.I. Lizorkin, H. Triebel, V.I. Burenkov ve diğerleri gibi dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmiştir. Bu teori reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna ve diğer matematiksel disiplinler içinde kısmi diferensiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi birçok alanlara başarıyla uygulanmıştır. Ayrıca ortaya çıkan yeni problemlerin çözülebilmesi ve fonksiyon uzaylarındaki bazı boşlukların giderilebilmesi için yeni tip fonksiyon uzaylarının tanımlanması ve araştırılması gerekmektedir. İntegral ve diferensiyel operatörlerin farklı norm eşitsizlikleri fonksiyon uzaylarının teorisinde ve onların uygulamalarında esaslı öneme sahiptir. Özellikle diferensiyellenebilir fonksiyonların klasik uzayları teorisi (Sobolev uzayları, Besov uzayları, ağırlıklı Besov tipi uzaylar, vb.) bu eşitsizlikler üzerine esaslı olarak inşa edilirler. Yakın zamanlarda integral ve diferensiyel operatörler için norm eşitsizlikleri ile ilgili birçok zor problemler çözülmüştür. Bu sonuçlar fonksiyonel analizin özellikle etkin ve geniş olarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulamaları için temel araçlar olmuştur. Morrey uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışması ve kesin ön eşitsizliklerinin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Daha sonraları Morrey uzaylarının önemli uygulamaları olan Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır. Tamamlanan bu projede harmonik analizin temel operatörlerinden maksimal operatör, kesirli maksimal operator ve Riesz potansiyelinin modifiye Morrey ve Morrey uzaylarında sınırlılığı elde edildiğinden, alınan sonuçların uygulamalı matematik alanında, kısmi türevli, denklemler teorisinde birçok uygulamaya sahip olacağı düşünülmektedir.

## VI. Geleceğe İlişkin Öngörülen Katkıları

Araştırmada ele alınan problemlerin etkisi sadece analizde değil matematiğin diğer dallarında da olacaktır. Özellikle çalışılan konunun kısmi diferensiyel denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.

Araştırmadan çıkan sonuçlar sunum haline getirilerek ulusal ve uluslararası kongrelerde sunulmuş ve bilim dünyasının haberdar olması sağlanmıştır.

## VII. Sağlanan Altyapı Olanakları ile Varsa Gerçekleştirilen Projeler

Yok

## VIII. Sağlanan Altyapı Olanaklarının Varsa Bilim/Hizmet ve Eğitim Alanlarındaki Katkıları

Araştırmada ilgilenilen konular oldukça günceldir ve son 10 yılda dünyanın birçok ileri seviyedeki matematik çalışma gruplarında ünlü matematikçiler tarafından çalışılmaktadır. Bu nedenle araştırmanın Türkiye'de Ankara Üniversitesi'nde gerçekleştirilmiş olması üniversitemizin popülaritesini artıracak ve ülkemize bilimsel alanda ileri derecede hizmette bulunulmuş olacaktır. Projenin sonuçları ile Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünün yüksek lisans ve doktora öğrencileri için yeni çalışma alanları ortaya konacaktır.

## IX. Kaynaklar

- [1] D.R. Adams, A note on Riesz potentials, *Duke Math. J.* 42 (1975), 765-778.
- [2] D.R. Adams, Choquet integrals in potential theory, *Publ. Mat.* 42 (1998), 3-66.
- [3] C. Aykol and M.E. Yıldırım, On the boundedness of the maximal operator and Riesz potential in the modified Morrey spaces. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat.* 63 (2014), no. 2, 1-11.
- [4] C. Aykol, H. Armutcu and M. N. Omarova, Maximal commutator and commutator of maximal function on modified Morrey spaces, *Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics*, 36(1), 29-35 (2016).
- [5] V.I. Burenkov and H.V. Guliyev, Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces, *Studia Mathematica* 163, 2 (2004), 157-176.
- [6] V.I. Burenkov and V.S. Guliyev, Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz operator in local Morrey-type spaces, *Potential Analysis* 30, 3 (2009), 211-249.
- [7] L. Cararelli, Elliptic second order equations, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 58 (1990), 253-284.
- [8] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy- Littlewood maximal function, *Rend. Math.* 7 (1987), 273-279.
- [9] G. Di Fazio and M. A. Ragusa Commutators and Morrey spaces, *Bollettino U.M.I.*, 7 (5-A) (1991), 323-332.
- [10] G. DiFazio, D.K. Palagachev and M.A. Ragusa, Glocal Morrey regularity of strong solutions to the Dirichlet problem for elliptic equations with discontinuous coefficients, *J. Funct. Anal.* 166 (1999), 179-196.
- [11] V.S. Guliyev, Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces, *J. Inequal. Appl.* 2009, Art ID 503948, 20 pp.
- [12] V.S. Guliyev, On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator, *Math. Ineq. Appl.* 6, 2(2003), 317-330.
- [13] V.S. Guliyev and J. Hasanov, Necessary and sufficient conditions for the boundedness of B-Riesz potential in the B-Morrey spaces, *Jour. Math. Anal. Appl.* 347, 1 (2008), 113-122.
- [14] V.S. Guliyev, J. Hasanov and Y. Zeren, Necessary and sufficient conditions for the boundedness of B-Riesz potential in modified Morrey spaces, *Jour. Math. Ineq.* 5, 4 (2011), 491-506.
- [15] V.S. Guliyev and Y.Y. Mammadov, Riesz potential on the Heisenberg group and modified Morrey spaces, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* 20(1) (2012), 189-212.
- [16] V.S. Guliyev and K. Rahimova, Parabolic fractional maximal operator and modified parabolic Morrey spaces, *Jour. Funct. Spaces Appl.*, 2012, Article ID 543475, 20 pages, 2012.
- [17] V.S. Guliyev and K. Rahimova, Parabolic fractional integral operator in modified parabolic Morrey spaces, *Proc. Razmadze Mathematical Institute*, 163 (2013), 85-106.
- [18] V. Kokilashvili, A. Meskhi and H. Rafeiro, Riesz type potential operators in generalized grand Morrey spaces, *Georgian Math. J.* 20 (2013), no. 1, 43-64.
- [19] A. Kufner, O. John and S. Fucik, *Function spaces*, Noordhoff, Leyden and Academia, Prague, 1977.
- [20] A.L. Mazzucato, Besov-Morrey spaces: function theory and applications to non-linear PDE. *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003), 1297-1364.
- [21] C.B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1938), 126-166.
- [22] B. Muckenhoupt and R. Wheeden, Weighted norm inequalities for fractional integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* 192 (1974), 261-274.
- [23] A. Ruiz and L. Vega, Unique continuation for Schrödinger operators with potential in Morrey spaces, *Publ. Mat.* 35 (1991), 291-298.
- [24] A. Ruiz and L. Vega, On local regularity of Schrödinger equations, *Int. Math. Res. Notices* 1993, 1 (1993), 13-27.
- [25] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean Spaces*. Princeton Univ. Press (1971).
- [26] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Math. Ser. 30. Princeton University Press, Princeton (1971).
- [27] M.E. Taylor, *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution*

equations, Comm. Partial Differential Equations 17(1992), 1407-1456.

## X. Ekler

### a) Mali Bilanço ve Açıklamaları:

Projenin toplam bütçesi 5000 TL dir. Bütçenin 3.528,20 TL si dizüstü bilgisayar ve 165,20 TL si mouse alımı için kullanılmıştır.

### b) Makine ve Teçhizatın Konumu ve İlerideki Kullanımına Dair Açıklamalar:

Dizüstü bilgisayar ve mouse yapılacak bilimsel çalışmalar için kullanılacaktır.

### c) Teknik ve Bilimsel Ayrıntılar (varsa Kesim III'de yer almayan analiz ayrıntıları):

### d) Sunumlar (bildiriler ve teknik raporlar) (Altyapı Projeler için uygulanmaz):

1. Zeynep Çakır, 'Carleson Eğrileri Üzerinde Tanımlı Modifiye Morrey Uzaylarında Potansiyel Operatörler', 13. Ankara Matematik Günleri, 27-28 Nisan 2018, Ankara, TÜRKİYE
2. Canay Aykol, 'Boundedness of potential operators in modified Morrey spaces defined on Carleson curves', 5th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2018), 23-27 Temmuz 2018, Trabzon, TÜRKİYE
3. Canay Aykol, 'Approximation in weighted Morrey spaces by trigonometric polynomials ', Operators in General Morrey-type Spaces and Applications (OMTSA 2019), 16-20 Temmuz 2019, Kütahya TÜRKİYE

### e) Yayınlar (hakemli bilimsel dergiler) ve tezler (Altyapı Projeler için uygulanmaz):

1. Canay Aykol, Xayyam A. Badalov, Javanshir J. Hasanov, 'Maximal and singular operators in the local "complementary" generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets' Quaestiones Mathematicae (2019): 1-26. <http://dx.doi.org/10.2989/16073606.2019.1635539>.
2. Zeynep Cakir, Canay Aykol, Dilek Soylemez, Ayhan Serbetci 'Approximation by trigonometric polynomials in Morrey spaces' Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 39 (2019), no. 1, Mathematics, 1-14.
3. Irada B. Dadashova, Canay Aykol, Zeynep Çakır, Ayhan Şerbetçi 'Potential operators in modified Morrey spaces defined on Carleson curves' Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Volume 172, Issue 1, April 2018, Pages 15-29.

## Proje Başlığı:

### Carleson Eğrileri Üzerinde Tanımlı Modifiye Morrey Uzaylarında Harmonik Analizin Bazı İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

$L_{p,\lambda}$  Morrey uzayları, 1938 yılında C.B. Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışması ve kesin ön eşitsizliklerinin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Daha sonraları Morrey uzaylarının önemli uygulamaları olan Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte Morrey uzaylarında kompakt destekli sürekli fonksiyonların  $C_0^\infty$  uzayı ve basit fonksiyonların uzayının yoğun olmaması uygulamalarda birçok sıkıntılar ortaya çıkarmaktadır. Bu nedenle  $\tilde{L}_{p,\lambda}(R^n) = L_{p,\lambda}(R^n) \cap L_p(R^n)$  modifiye Morrey uzaylarını tanımlama ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Modifiye Morrey uzaylarında  $C_0^\infty$  uzayı ve basit fonksiyonların uzayı yoğun olduğundan bu uzaylardaki sınırlılık çalışmalarında karşılaşılan birçok problem ortadan kalkmaktadır. Böylece kompleks düzlemdeki maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli ve Cauchy tipli singüler integrallerin kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzaylarında sınırlılığını elde etmek mümkün olmaktadır.

$1 \leq p < \infty$ ,  $0 \leq \lambda \leq n$ , ve  $[t]_1 = \min\{1, t\}$  olsun.  $L_{p,\lambda}(R^n)$  Morrey uzayları ve  $\tilde{L}_{p,\lambda}(R^n)$  modifiye Morrey uzayları sırasıyla

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} = \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} \left( t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} = \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} = \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} \left( [t]_1^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

sonlu olacak biçimdeki lokal integrellenebilir  $f$  fonksiyonların sınıfıdır, burada

$$B(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < t\} \text{ dir.}$$



$\Gamma$  kompleks düzlemde bir Carleson eğrisi (regüler eğri) olsun.  $\Gamma$  üzerinde  $0 < \lambda < 1$ ,  $p \geq 1$ ,  $f \in L_p^{loc}(R^n)$  ve  $[r]_1 = \min\{1, r\}$  olmak üzere  $L_{p,\lambda}(\Gamma)$  Morrey uzayları ve  $\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)$  modifiye Morrey uzayları

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{r>0, t \in \Gamma} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,r))} = \sup_{r>0, t \in \Gamma} \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{r>0, t \in \Gamma} [r]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(\Gamma(t,r))} = \sup_{r>0, t \in \Gamma} \left( \frac{1}{[r]_1^\lambda} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)|^p d\nu(\tau) \right)^{1/p}$$

sonlu olacak biçimdeki

fonksiyonların sınıfıdır, burada  $B(t,r) = \{z \in C : |z-t| < r\}$  olmak üzere  $\Gamma(t,r) = \Gamma \cap B(t,r)$  dir.

$f \in L_{loc}^1(\Gamma)$  ve  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere

Kesirli maksimal operatörü

$$M_{\Gamma}^{\alpha} f(t) = \sup_{r>0} (\nu \Gamma(t,r))^{\alpha-1} \int_{\Gamma(t,r)} |f(\tau)| d\nu(\tau)$$

ile tanımlanır,  $\alpha=0$  için  $M_{\Gamma}$  Hardy-Littlewood maksimal operatörü elde edilir.

$I_{\Gamma}^{\alpha}$  Riesz potansiyeli

$$I_{\Gamma}^{\alpha} f(t) = \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{|t-\tau|^{1-\alpha}} d\nu(\tau)$$

biçiminde tanımlanır.

Yukarıda tanımladığımız operatörler harmonik analizin en önemli operatörleridir. Kısmi türevli denklemler teorisinde ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.

$\tilde{L}_{p,\lambda}(R^n)$  modifiye Morrey uzayları V.P. I'lin, V. S. Guliyev, J. Hasanov, Y. Zeren, C. Aykol, Y.Y. Mammadov ve K. Rahimova gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. V. S. Guliyev, J. Hasanov ve Y. Zeren 2011 yılında  $\tilde{L}_{p,\lambda}(R^n)$  modifiye Morrey uzaylarının Morrey uzayları ve Lebesgue uzayları ile ilişkisini kapsamlı bir biçimde inceleyerek bu uzaylar arasında yeni gömme bağıntıları elde etmişlerdir. Ayrıca bu uzaylarda  $M_{\Gamma}$  maksimal

operatörün sınırlılığını ve  $I_{\Gamma}^{\alpha}$  Riesz potansiyelinin sınırlılığı için gerek ve yeter şartları ispatlamışlardır.

Ancak literatürde Carleson eğrileri üzerinde tanımlı  $\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)$  modifiye Morrey uzayları üzerine yapılmış herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu eksikliğin giderilmesi amacıyla yürütülen proje süresince Carleson eğrileri üzerinde tanımlı  $\tilde{L}_{p,\lambda}(\Gamma)$  modifiye Morrey uzaylarının topolojik özellikleri incelenmiş ve bu uzaylarda maksimal operatör, kesirli maksimal operatör ve Riesz potansiyelinin sınırlılıkları elde edilmiştir.

Ayrıca, proje süresince Morrey uzayları hakkında yapılan çalışmalarla Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım için sonuçlar alınmıştır.

$\Omega$ ,  $R^n$  nin sınırsız bir alt kümesi,  $\tilde{B}(x,r) = \Omega \setminus B(x,r)$ ,  $1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$  ve  $\omega$  ve  $\theta$  ağırlık fonksiyonları olmak üzere lokal ‘tamamlayıcı’ genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayları

$$\|f\|_{\epsilon M^{p(\cdot),w}_{\theta}(x_0)} = \sup_{r>0} \frac{r^{\theta_{p^*(x_0)}}}{\omega(r)} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega \setminus \tilde{B}(x_0,r))}$$
 şeklinde tanımlanır.

Proje süresince, maksimal ve singüler integral operatörlerin lokal ‘tamamlayıcı’ genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzaylarında sınırsız kümeler üzerinde sınırlılığı da ispatlanmıştır.

Bu projede

1. Kompleks düzlemde Carleson eğrileri üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzayları tanımlanarak temel özellikleri verilmiştir.
2. Carleson eğrisi üzerinde tanımlı kesirli maksimal ve maksimal operatörün Carleson eğrisi üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzaylarında sınırlılığı için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.
3. Carleson eğrisi üzerinde tanımlı Riesz potansiyelinin Carleson eğrisi üzerinde tanımlı modifiye Morrey uzaylarında sınırlılığı için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.
4. Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım için sonuçlar alınmıştır.
5. Maksimal ve singüler integral operatörlerin lokal ‘tamamlayıcı’ genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzaylarında sınırsız kümeler üzerinde sınırlılığı ispatlanmıştır.