ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

# İKİ METRİK UZAY ÜZERİNDE İLİŞKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Özge BİÇER ÖDEMİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

# TEZ ONAYI

Özge BİÇER ÖDEMİŞ tarafından hazırlanan " **İki Metrik Uzay Üzerinde İlişkili Sabit Nokta Teoremleri** " adlı tez çalışması 24/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği(veya oy çokluğu)** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Doç. Dr. Murat OLGUN

**Jüri Üyeleri:**

**Başkan:** Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

**Üye** : Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

**Üye** : Prof. Dr. İshak ALTUN
Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

**Üye** : Doç. Dr. Murat OLGUN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

**Üye** : Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. Özlem YILDIRIM**
**Enstitü Müdürü**

## ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

24.05.2019

Özge BİÇER ÖDEMİŞ

**ÖZET**

Doktora Tezi

İKİ METRİK UZAY ÜZERİNDE İLİŞKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Özge BİÇER ÖDEMİŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat OLGUN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ilişkili dönüşümler, küme değerli dönüşümler ve F-büzülme kavramları yer almıştır. Ayrıca tezin geri kalan bölümlerinde kullanılan bir takım tanım ve teoremler ifade edilip bölüm bazı örneklerle pekiştirilmiştir.

Tezin diğer bölümleri orjinal sonuçlar için ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde B. Fisher ve arkadaşları tarafından ispatlanan tek değerli ilişkili dönüşümler için bir sabit nokta teoremi hatırlatılmıştır. Ardından Wardowski'nin tekniği kullanılarak bu teoremin F-büzülmelere bir genelleştirilmesi verilmiş ve bir takım sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk önce $\widetilde{\delta}-$metriği ile tanımlanan küme değerli ilişkili dönüşümler için tanım ve teoremler hatırlatılıp, ardından Hausdorff metriği kullanılarak bir takım küme değerli ilişkili dönüşümler ve küme değerli ilişkili F-büzülmeler ifade ve ispat edilmiştir. Üstelik bu teoremlere ilişkin bazı örnek ve sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların literatür için önemi belirtilmiştir.

**Mayıs 2019, 42 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Sabit nokta teorisi, tam metrik uzaylar, ilişkili sabit nokta, küme değerli ilişkili dönüşümler, ilişkili F-Büzülme.

# ABSTRACT

Ph.D. Thesis

RELATED FİXED POINT THEOREMS ON TWO METRIC SPACES

Özge BİÇER ÖDEMİŞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof. Dr. Murat OLGUN

This dissertation consist of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains concepts of related mappings, F-contraction and multivalued mappings. In addition, some definitions and theorems utilized in the following chapters are explained and this chapter is reinforced by some examples.

The remaining chapters are devoted to the original results.

In the third chapter, a fixed point theorem for related mappings ,which was demonstrated by B. Fisher et. al., is reminded. Then using the Wardowski's technique, the generalization of this theorem to F-contractions and its results have been provided.

In the fourth chapter, some definitions and theorems which are associated with multivalued related mappings with $\widetilde{\delta}-$distance, have been quoted. Subsequently, by using Hausdorff metric, multivalued related mappings and multivalued related F-contractions have been expressed and demonstrated. Furthermore, an example and some remarks have been attained.

The importance of results is indicated in the last chapter.

**May 2019, 42 pages**

**Key Words:** Fixed point theory, complete metric spaces, related fixed point, multivalued related mappings, related F-contraction.

## TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında çalışmalarımı yönlendiren, bilgi ve tecrübesiyle yolumu aydınlatan ve benden desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Murat Olgun (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Öğrendiğim bilgiler ve edindiğim tecrübeler bundan sonraki hayatımda bana yol gösterecektir.

Araştırma sürecim boyunca önerilerini ve değerli bilgilerini benimle paylaşan, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, doktora tezimin gelişmesine katkı sunan tez izleme kurulu üyeleri değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. İshak Altun ( Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve Sayın Doç. Dr. Yelda Aygar Küçükevcilioğlu (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'na teşekkürlerimi sunarım.

Gerek akademik ortamda gerekse beşeri ilişkilerde engin bilgi ve tecrübesiyle yanımda olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Tuğba Yurdakadim (Hitit Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' e, yol arkadaşım Tuğçe Alyıldız'a, ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez "TÜBİTAK 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olan, büyük bir sabır ile bu zorlu yolda desteğini benden esirgemeyen canım aileme, sevgili eşim Okan Ödemiş'e, çalışmalarıma sabırla destek olan dostlarım Gönül Alparslan ve Çağla Ören'e ve tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Özge BİÇER ÖDEMİŞ
Ankara, Mayıs 2019

## İÇİNDEKİLER

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}$ | Rasyonel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $(V, \sigma)$ | Metrik uzay |
| $\sigma(x, y)$ | x ile y arasındaki uzaklık |
| $(U, \rho)$ | Metrik uzay |
| $\rho(x, y)$ | x ile y arasındaki uzaklık |
| $\sup A$ | A kümesinin en küçük üst sınırı |
| $\inf A$ | A kümesinin en büyük alt sınırı |
| $\max A$ | A kümesinin en büyük elemanı |
| $\{x_n\}$ | Dizi |
| $x_n \to x$ | $\{x_n\}$ dizisi $x$ noktasına yakınsar |
| $x \in Ty$ | $x$, $Ty$ kümesinin elemanıdır |
| $R : V \to U$ | $R$, $V$ kümesinden $U$ kümesine bir dönüşüm |
| $G : U \to V$ | $G$, $U$ kümesinden $V$ kümesine bir dönüşüm |
| $D(x, A)$ | $x$ noktasının A kümesine olan uzaklığı |
| $\delta(A, B)$ | $\sup\{D(x, B) : x \in A\}$ |
| $\widetilde{\delta}(A, B)$ | $A$ ile $B$ kümeleri arasındaki en uzak mesafe |
| $\bigcup$ | Birleşim |
| $\bigcap$ | Kesişim |
| $\sum$ | Toplam sembolü |

# 1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, boştan farklı bir $X$ kümesinin elemanlarını aynı kümenin farklı elemanlarına gönderen bir dönüşümün en az bir noktayı sabit bırakması ile ilgili teoremlerin geneline verilen addır. Bu teoremler, bir sabit noktasının var olduğu koşulları incelediğinden matematiğin fonksiyonel analiz, genel topoloji, operatör teori gibi dallarıyla ilişkili olduğu kadar fizik, ekonomi ve mühendislik gibi pek çok alanda da kullanılmaktadır.

Sabit nokta teori çalışmaları 1910 yılında normlu uzaylarda Brouwer ile başlayıp, 1922 yılında Banach'ın tam metrik uzaylarda büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teoremini ortaya koymasıyla iki yönde gelişmeye başlamıştır.

Brouwer, $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendi üzerine tanımlı sürekli her dönüşümün bir sabit noktası olduğunu söylerken, Kakutani bu teoremin sonsuz boyutlu uzaylarda sağlanmadığını gösteren örneği $(l_2, \|.\|_2)$ Hilbert uzayını bu uzaydaki kapalı birim yuvar ile birlikte düşünerek ve $T : K \to K$ dönüşümünü

$$Tx = \{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_1, x_2, ..., x_{n,...}\}$$

biçiminde tanımlayarak vermiştir. 1930 yılında Schauder bu teoriyi sonsuz boyutlu uzaylar için aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

" $X$ bir Banach uzayı ve $K$, $X$ uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi olsun. $T : K \to K$ sürekli bir dönüşüm ise $T$ dönüşümü $K$ kümesinde en az bir sabit noktaya sahiptir (Schauder 1930)."

Diğer taraftan Banach, tam metrik uzaylarda bir dönüşümün sabit noktasının varlığını, tekliğini ve nasıl bulunacağını aşağıdaki teoremle ispat etmiştir:

" $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq cd(x, y)$ olacak biçimde bir $c \in [0, 1)$ var ise $T$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Üstelik bu uzaydaki herhangi bir başlangıç noktasından başlayan Picard iterasyonu bu sabit noktaya yakınsar (Banach 1922)."

Geçmişten günümüze büzülme dönüşümü prensibi bir çok araştırmacı tarafından geliştirilerek tam metrik uzaylarda kendi üzerine tanımlı dönüşümler ile önemli sonuçlar elde edilmiştir ( Reich 1971, Ćirić 1974, Berinde 2007). Bunların yanısıra tek değerli kümeler üzerinde tanımlı büzülme dönüşümleri ile verilen sabit nokta çalışmaları, 1969 yılında Nadler tarafından Hausdorff metriği kullanılarak küme değerli büzülme dönüşümleri ile verilen sabit nokta teoremlerine genelleştirilmiştir. Küme değerli büzülme dönüşümleri kullanılarak yapılan sabit nokta çalışmalarına daha sonraki yıllarda bir çok yazar katkıda bulunmuştur ( Feng ve Liu 2006, Klim ve Wardowski, Altun vd 2015).

1981 yılında Brain Fisher, iki tam metrik uzay arasında iki farklı büzülme dönüşümü tanımlayarak hem bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını hem de dönüşümlerin birbirleriyle olan ilişkilerini aşağıdaki teorem ile ortaya koymuştur:

"$(X, d)$ ve $(Y, \rho)$ tam metrik uzaylar, $T : X \to Y$ ve $S : Y \to X$ iki dönüşüm olsun. Her $x \in X$ , $y \in Y$ ve $0 \leq c < 1$ için $T$ ve $S$ dönüşümleri

$$d(Sy, STx) \leq c \max\{d(x, Sy), d(x, STx), \rho(y, Tx)\} \tag{1}$$

$$\rho(Tx, TSy) \leq c \max\{\rho(y, Tx), \rho(y, TSy), d(x, Sy)\} \tag{2}$$

eşitsizliklerini sağlasın. O halde $ST$ bir tek $z \in X$ sabit noktasına ve $TS$ bir tek $w \in Y$ sabit noktasına sahiptir. Dahası $Tz = w$ ve $Sw = z$ eşitlikleri sağlanır (Fisher 1981)."

Daha sonra birçok yazar bu çalışmayı farklı büzülme dönüşümleri kullanarak genelleştirmiş ve ilişkili sabit nokta teorisinin gelişimine katkıda bulunmuştur (Namdeo vd 1994, Jain vd 1996, Namdeo vd 1998, Hamaizia ve Aliouche 2013).

Brian Fisher 1981 yılında $\delta-$uzaklığı ile verilen küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremini aşağıdaki biçimde ifade etmiştir:

" $(X, d)$ tam metrik uzay ve $F : X \to B(X)$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\delta(Fx, Fy) \leq c \max\{\delta(x, Fx), \delta(y, Fy), \delta(x, Fy), \delta(y, Fx), \delta(x, y)\}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $c \in [0,1)$ var olsun. Eğer $F$ dönüşümü $B(X)$ üzerinde tanımlı ise bu durumda $F$ bir tek sabit noktaya sahiptir. Dahası $Fz = \{z\}$ elde edilir (Fisher 1981)."

Ardından Brian Fisher ve Duran Türkoğlu tarafından $\delta-$ uzaklığı kullanılarak iki tam metrik uzay arasında tanımlı iki ilişkili büzülme dönüşümü için bir sabit nokta teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Diğer taraftan Wardowski 2012 yılında tanımladığı $F-$büzülme dönüşümleri ile Banach sabit nokta teoremini farklı bir teknikle ispat ederek yeni çalışmaların önünü açmıştır (Wardowski 2012).

Bu tez çalışmasında iki metrik uzay üzerinde tanımlı bir takım tek değerli ilişkili büzülme dönüşümleri $F-$büzülme dönüşümü ile genelleştirilip, ardından Hausdorff metriği kullanılarak küme değerli ilişkili sabit nokta teoremleri, bu teoremlerde kullanılan dönüşümler arasındaki ilişki ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ifade ve ispat edilecektir.

# 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tek değerli ilişkili büzülme dönüşümlerinden, küme değerli dönüşümlerden ve $F-$ büzülmelerden bahsedilerek bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

## 2.1 İlişkili Dönüşümler

Bu kısımda ilişkili dönüşümlerin tanımı ve bazı ilişkili sabit nokta teoremleri verilecektir.

İlk olarak ilişkili dönüşümün nasıl tanımlandığı hatırlatılsın:

**Tanım 2.1** $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ iki metrik uzay olsun.
(i) $R : V \to U$ ve $G : U \to V$ iki dönüşüm,
(ii) $Rv = u$ ve $Gu = v$
olacak şekilde $v \in V$ ve $u \in U$ varsa $R$ ve $G$ dönüşümleri ilişkili dönüşümlerdir denir.

İlişkili dönüşümler üzerinde çalışan Brain Fisher, bu dönüşümlerin sabit noktaya sahip olup olmadıklarını ve aralarındaki ilişkiyi ispatsız olarak vereceğimiz aşağıdaki teoremlerle ifade etmiştir.

**Teorem 2.1** (Fisher 1981)$(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ metrik uzayları tam olsun.
(i) $R : V \to U$ ve $G : U \to V$ iki dönüşüm olsun.
(ii) Her $v \in V$ , $u \in U$ ve $0 \leq c < 1$ için

$$\sigma(GRv, Gu) \leq c \max\{\sigma(Gu, v), \sigma(GRv, v), \rho(u, Rv)\} \tag{2.1}$$

ve

$$\rho(RGu, Rv) \leq c \max\{\rho(Rv, u), \rho(u, RGu), \sigma(v, Gu)\} \tag{2.2}$$

eşitsizlikleri sağlansın.
O halde $GR$ bir tek $z \in V$ ve $RG$ bir tek $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Dahası $Rz = w$ ve $Gw = z$ eşitlikleri sağlanır .

**Teorem 2.2** (Fisher 1982)$(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ iki tam metrik uzay olsun.
(i) $G : V \to U$ sürekli dönüşümü ve $R : U \to V$ dönüşümü ele alınsın.
(ii) Her $v, v' \in V$ , $u, u' \in U$ ve $0 \leq c < 1$ için

$$\sigma(RGv, RGv') \leq c \max\{\sigma(v, v'), \sigma(RGv, v), \sigma(v', RGv'), \rho(Gv, Gv')\}$$

ve

$$\rho(GRu, GRu') \leq c \max\{\rho(u, u'), \rho(u, GRu), \rho(u', GRu'), \sigma(Ru, Ru')\}$$

eşitsizlikleri sağlansın.
Bu durumda $RG$ bir tek $z \in V$ ve $GR$ bir tek $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Dahası $Gz = w$ ve $Rw = z$ eşitlikleri sağlanır.

## 2.2 Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda küme değerli dönüşümlere ilişkin bir takım kısaltmalar, küme değerli dönüşümlerin tanımı ve örnekleri verilip ardından Nadler tarafından ispatlanan küme değerli sabit nokta teoremi ifade edilecektir. Ayrıca Hausdorff metriği ve bu metriğe ilişkin bazı özellikler incelenecektir.

Öncelikle küme değerli dönüşümlerde kullanılacak $V$ uzayının alt kümelerinin sınıfları tanıtılsın.
"$(V, \sigma)$ bir metrik uzay olsun.

1. $P(V)$ ile $V$ in boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfı,

2. $B(V)$ ile $V$ in boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfı,

3. $C(V)$ ile $V$ in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerinin sınıfı,

4. $K(V)$ ile $V$ in boş olmayan tüm kompakt alt kümelerinin sınıfı ve

5. $CB(V)$ ile $V$ in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin sınıfı gösterilsin."

Genel olarak bir küme değerli dönüşümün tanımı

"$V$ ve $U$ boş olmayan iki küme olmak üzere $R \subseteq V \times U$ ise

$R : V \to P(U)$ dönüşümüne bir küme değerli dönüşüm denir."

biçiminde verilmektedir.

Bir $R$ dönüşümünün her $v \in V$ için görüntü kümesi "$Rv = \{u \in U : (v, u) \in R\}$"

şeklinde ifade edilir.

$A$ Kümesinin $R$ Küme Değerli Dönüşümü Altındaki Görüntüsü:

$A \subseteq V$ için $R(A) = \bigcup_{v \in A} Rv$ ile gösterilir.

Benzer biçimde

$B$ Kümesinin $R$ Küme Değerli Dönüşümü Altındaki Ters Görüntüsü:

$B \subseteq V$ için $R^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} R^{-1}(y)$ ile gösterilir.

Küme değerli dönüşümler için sabit nokta tanımı

"$R : V \to P(V)$ dönüşümü için $v_0 \in Rv_0$ olacak biçimde bir $v_0 \in V$ varsa bu noktaya $R$ küme değerli dönüşümün bir sabit noktası denir. $R$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi

$$F(R) = \{v \in V : v \in Rv\}$$

ile gösterilir."

biçiminde verilmiştir.

**Örnek 2.1** $A = [0, 1]$ olmak üzere $R : A \to P(A)$ dönüşümü

$$R\alpha = \begin{cases} \{1\}, & 0 \leq \alpha < \frac{1}{4} \\ [0, 1], & \alpha = \frac{1}{4} \\ [0, 1 - \alpha], & \frac{1}{4} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O halde

$$\begin{array}{ccc} R(0) = \{1\} & , & R(\frac{1}{4}) = [0, 1] \\ R(\frac{1}{2}) = [0, \frac{1}{2}] & , & R(\frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \\ R(1) = \{0\} & , & R(\frac{3}{4}) = [0, \frac{1}{4}] \end{array}$$

olduğu açıktır. Burada $\frac{1}{4} \in R(\frac{1}{4})$ ve $\frac{1}{2} \in R(\frac{1}{2})$ olduğundan $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{2}$, $R$ dönüşümünün birer sabit noktasıdır.

**Tanım 2.2** $(V, \sigma)$ bir metrik uzay, $v \in V$ ve $A, B \subseteq V$ olsun. Bu durumda

(i) $D(A,B) = \inf\{\sigma(a,b) : a \in A, b \in B\}$ ifadesine $A$ ile $B$ kümeleri arasındaki uzaklık denir.

(ii) Eğer $A = \{a\}$ ise $D(a,B) = \inf\{\sigma(a,b) : b \in B\}$ ifadesine $a$ noktasının $B$ kümesine uzaklığı, $B = \{b\}$ ise $D(A,b) = \inf\{\sigma(a,b) : a \in A\}$ ifadesine $b$ noktasının $A$ kümesine uzaklığı denir.

**Teorem 2.3** $(V, \sigma)$ bir metrik uzay ve boştan farklı $A$, $B$ kümeleri $X$ uzayının alt kümeleri olsun. Eğer $A$ kümesi kompakt ise $D(s,B) = D(A,B)$ olacak şekilde bir $s \in A$ noktası vardır.

**Sonuç 2.1** $(V, \sigma)$ bir metrik uzay, $A$ kümesi $X$ in boştan farklı kompakt bir alt kümesi olsun. O halde her $x \in X$ için $\sigma(x,a) = D(x,A)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır.

Şimdi $\delta$ ve Hausdorff uzaklıkları verilsin:

"$(V, \sigma)$ bir metrik uzay, $A, B \in P(V)$ için

$$\begin{aligned} \delta(A,B) &= \sup\{D(x,B) : x \in A\} \\ &= \sup_{x \in A}\{\inf_{y \in B} \sigma(x,y)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H(A,B) &= \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} \\ &= \max\{\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \sigma(x,y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \sigma(x,y)\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır."

**Örnek 2.2** Pozitif reel sayılar kümesi alışılmış metrik ile düşünülsün. $E = [1,2]$ ve $F = [5, \infty)$ kümeleri için

$$\delta(E,F) = 4, \quad \delta(F,E) = \infty$$

olduğundan

$$H(E,F) = \max\{\delta(E,F), \delta(F,E)\} = \infty$$

elde edilir. Burada $\delta$ ve $H$ fonksiyonlarının $P(V) \times P(V)$ üzerinde reel değerli fonksiyonlar olmadığı görülmektedir.

**Uyarı 2.1** Eğer $E, F \in B(X)$ ise bu durumda $\delta$ ve $H$ fonksiyonları birer reel değerli fonksiyon olur.

Burada $\delta$ reel değerli fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:
"$(V, \sigma)$ bir metrik uzay, $E, F, G \in B(V)$ olsun. Bu durumda

1. $\delta(E, F) = 0 \iff E \subseteq \bar{F}$
2. $F \subseteq G \Longrightarrow \delta(E, G) \leq \delta(E, F)$
3. $\delta(E \cup F, G) = \max\{\delta(E, G), \delta(F, G)\}$
4. $\delta(E, F) \leq \delta(E, G) + \delta(G, F)$

özellikleri sağlanır."

**Örnek 2.3** $V = \mathbb{R}^+$ kümesi alışılmış metrik ile düşünülsün. $E = [1, 2]$ ve $F = (2, 4)$ kümeleri için

$$\delta(E, F) = 1, \quad \delta(F, E) = 2$$

olduğundan

$$H(E, F) = \max\{\delta(E, F), \delta(F, E)\} = 2$$

bulunur.

**Uyarı 2.2** $\delta(A, B) \neq \delta(B, A)$ olduğu yukarıdaki örnekten açıktır. Yani $\delta$ simetrik değildir.

**Örnek 2.4** $\sigma$ alışılmış metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, \sigma)$ uzayı ele alınsın. $E = [2, 3]$ ve $F = (2, 3)$ kümeleri için

$$\delta(E, F) = \delta(F, E) = 0$$

olup

$$H(E, F) = \max\{\delta(E, F), \delta(F, E)\} = 0$$

elde edilir. O halde $H(E, F) = 0$ olmasına rağmen $E$ ve $F$ kümeleri birbirinden farklıdır. Bu ise $B(V) \times B(V)$ üzerinde tanımlı reel değerli $H$ fonksiyonunun bir metrik olmadığını gösterir.

**Önerme 2.1** $(V, \sigma)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda $H$, $CB(V)$ üzerinde bir metriktir. $H : CB(V) \times CB(V) \to \mathbb{R}$ tanımlı metriğe Hausdorff metriği denir.

$(V, \sigma)$ bir tam metrik uzay olmak üzere $(CB(V), H)$ ile $(K(V), H)$ metrik uzayları tamdır. Ayrıca Hausdorff metriğinin $\sigma$ metriğine bağlı olduğu aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

**Örnek 2.5** $V = \mathbb{R}$ üzerinde $\sigma_1(x, y) = |x - y|$ ve

$$\sigma_2(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

metriklerini gözönüne alalım. Bu durumda $E = [0, 1]$, $F = [3, 6]$ kümeleri $\sigma_1$ ve $\sigma_2$ metriklerine göre kapalı ve sınırlıdır. Ayrıca $H_1(E, F) = 5$ ve $H_2(E, F) = 1$ elde edilir.

**Lemma 2.1** $A$,$B \in CB(V)$ olsun. Bir $a \in A$ ve her $\varepsilon$ pozitif reel sayısına karşılık

$$\sigma(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon$$

olacak şekilde $B$ kümesinde bir $b$ elemanı vardır.

**İspat.** $a \in A$ için

$$D(a, B) = \inf\{\sigma(a, y) : y \in B\}$$

yazılır. İnfimum tanımından her $\varepsilon$ pozitif reel sayısı için

$$\sigma(a, b) \leq D(a, B) + \varepsilon$$

sağlanacak şekilde $B$ kümesinde bir $b$ elemanı vardır. Diğer taraftan

$$D(a, B) \leq \delta(A, B) \leq H(A, B)$$

eşitsizliği gerçeklendiğinden

$$\sigma(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ bulunur. ■

**Lemma 2.2** $A$,$B \in CB(V)$ ve $a \in A$ olsun. Öyleyse her $q > 1$ için

$$\sigma(a, b) \leq qH(A, B)$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

**İspat.** (i) Eğer $H(A, B) = 0$ ise $A = B$ gerçeklenir. O halde $b = a$ olarak alınırsa her $q > 1$ için

$$\sigma(a, b) \leq qH(A, B)$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.
(ii) $H(A, B) > 0$ olsun. Öyleyse

$$\varepsilon = (q - 1)H(A, B) > 0$$

olarak seçilirse Lemma 2.1 gereğince her $q > 1$ için

$$\begin{aligned} \sigma(a, b) &\leq H(A, B) + \varepsilon \\ &= H(A, B) + (q - 1)H(A, B) \\ &= qH(A, B) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. ■

**Tanım 2.3** $(V, \sigma)$ bir metrik uzay, $R : V \to CB(V)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in V$ için

$$H(Rx, Ry) \leq c\sigma(x, y)$$

olacak şekilde bir $c \in (0, 1)$ sabiti varsa $R$ dönüşümüne küme değerli büzülme dönüşümü denir.

**Teorem 2.4** (Nadler 1969)$(V, \sigma)$ metrik uzay ve $R : V \to CB(V)$ küme değerli dönüşüm olsun. O halde $R$ dönüşümü $V$ kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

**Örnek 2.6** $\sigma$ alışılmış metriği $V = [0,1]$ kümesi ile ele alınsın. $R : V \to CB(V)$ dönüşümü her $x \in V$ için

$$Rx = \begin{cases} [\frac{1-x}{4}, \frac{1-x}{3}] & ; \quad 0 \leq x < 1) \\ \{1\} & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $(V, \sigma)$ uzayı bir tam uzay olup, $R$ dönüşümü küme değerli bir dönüşümdür. Bu örnekte Nadler'in büzülme dönüşümü sağlanmaz fakat $x = \frac{1}{4}$ ve $x = 1$, $R$ dönüşümünün birer sabit noktasıdır. O halde küme değerli dönüşümler için sabit nokta tek olmak zorunda değildir.

## 2.3 F-Büzülmeler

Bu kısımda ilk olarak tek değerli dönüşümler için F-büzülme tanımı verilecektir. Daha sonra bu kavram küme değerli dönüşümlere genelleştirilerek genelleştirilmiş F-büzülmeler ve bu dönüşümler için sabit nokta teoremleri ifade edilecektir.

### 2.3.1 Tek değerli dönüşümler için F-büzülmeler

Wardowski tarafından F-büzülme dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

"$\mathcal{F}$ aşağıdaki şartları sağlayan bütün $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümlerinin ailesi olsun.

**(F1)** F kesin artandır. Yani her $a, b \in (0, \infty)$ için $a < b$ iken $F(a) < F(b)$ gerçeklenir.

**(F2)** Pozitif sayıların her $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ olmasıdır.

**(F3)** $\lim_{a\to 0^+} a^k F(a) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır."

**Tanım 2.4** $(V, \sigma)$ bir metrik uzay, $R : V \to V$ bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer $\sigma(Rx, Ry) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in V$ için

$$\tau + F(\sigma(Rx, Ry)) \leq F(\sigma(x, y)) \tag{2.3}$$

olacak şekilde bir $\tau$ pozitif reel sayısı varsa $R$ dönüşümüne bir $F-$büzülme adı verilir.

Bu tanım sayesinde literatürde de iyi bilinen bazı büzülme dönüşümlerinin uygun $F \in \mathcal{F}$ fonksiyonları seçilerek birer $F-$büzülme oldukları görülmektedir.

**Örnek 2.7** a) $F_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_1(a) = \ln(a)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $F_1 \in \mathcal{F}$ olup $R : V \to V$ dönüşümünün bir $F_1-$büzülme olması durumunda $\sigma(Rx, Ry) > 0$ şartını gerçekleyen her $x, y \in V$ için

$$\sigma(Rx, Ry) \leq e^{-\tau}\sigma(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır.

b) Diğer taraftan $\sigma(Rx, Ry) = 0$ olacak biçimdeki her $x, y \in V$ için yukarıda verilen eşitsizlik sağlanır. Böylece $R$ dönüşümü $L = e^{-\tau}$ ile bir Lipschitz dönüşümüdür. $L = e^{-\tau} < 1$ olduğundan $R$ dönüşümü bir büzülme dönüşümüdür.

O halde her büzülme dönüşümü $F_1(a) = \ln(a)$ ile birlikte bir $F_1$ büzülmedir.

**Örnek 2.8** $F_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_2(a) = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $F_2 \in \mathcal{F}$ olup $R : V \to V$ dönüşümünün bir $F_2-$büzülme olması durumunda $\sigma(Rx, Ry) > 0$ şartını gerçekleyen her $x, y \in V$ için

$$\sigma(Rx, Ry) \leq (1 + \tau\sqrt{\sigma(x, y)})^{-2}\sigma(x, y)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

**Uyarı 2.3** (F1) koşulu ve (2.3) eşitsizliğini sağlayan her $F-$büzülme dönüşümü büzülebilir olduğundan $\sigma(x, y) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in V$ için $\sigma(Rx, Ry) < \sigma(x, y)$ gerçeklenir. Buradan her $F$-büzülme dönüşümünün sürekli olduğu söylenir.

Tüm bu bilgiler ışığında 2012 yılında Wardowski aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

**Teorem 2.5** (Wardowski 2012)$(V, \sigma)$ metrik uzayı tam, $R : V \to V$ dönüşümü bir $F-$büzülme olsun. O halde $R$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Üstelik herhangi bir $x_0 \in V$ için $\{R^n x_0\}$ dizisi $R$ dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

**Örnek 2.9** $X = \{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\sigma$ alışılmış metriği ile birlikte bir tam uzaydır. $R : X \to X$ dönüşümü

$$Rx_n = \begin{cases} x_1, & n = 1 \\ x_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$$

biçimine tanımlansın. $F(\alpha) = \ln \alpha$ alındığında $R$ dönüşümü bir $F-$büzülme değildir. Dolayısıyla $R$ dönüşümü bir büzülme dönüşümü değildir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(Rx_n, Rx_1)}{\sigma(x_n, x_1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n - 2}{n^2 + n - 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $F(a) = a + \ln a$ olmak üzere her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(Rx_m, Rx_n) > 0 \Leftrightarrow (m > 2 \text{ ve } n = 1) \text{ veya } (m > n > 1)$$

durumları incelensin.

**Durum 1:** $m > 2$ ve $n = 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(Rx_m, Rx_1)}{\sigma(x_m, x_1)} e^{\sigma(Rx_m, Rx_1) - \sigma(x_m, x_1)} &= \frac{x_{m-1} - 1}{x_m - 1} e^{x_{m-1} - x_m} \\ &= \frac{m^2 - m - 2}{m^2 + m - 2} \\ &< e^{-1} \end{aligned}$$

bulunur.

**Durum 2:** $m > n > 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(Rx_m, Rx_n)}{\sigma(x_m, x_n)} e^{\sigma(Rx_m, Rx_n) - \sigma(x_m, x_n)} &= \frac{x_{m-1} - x_{n-1}}{x_m - x_n} e^{x_{m-1} - x_m - x_{n-1} - x_n} \\ &= \frac{m + n - 1}{m + n + 1} e^{n-m} \\ &< e^{-1} \end{aligned}$$

bulunur.

O halde $R$ dönüşümü $F(a) = a + \ln a$ ile birlikte bir $F-$büzülmedir.

### 2.3.2 Küme değerli dönüşümler için F-büzülmeler

Bu kısımda Wardowski ve Nadler'in teknikleri kullanılarak Altun vd. tarafından 2015 yılında ispatlanan küme değerli dönüşümler için $F-$büzülmeler hatırlatılacaktır. Daha sonra genelleştirilmiş küme değerli $F-$büzülmeler ve bazı örnekler verilecektir.

**Tanım 2.5** (Altun vd. 2015)$(V, \sigma)$ bir metrik uzay ve $T : V \to CB(V)$ bir dönüşüm olsun. $F \in \mathcal{F}$ olmak üzere $H(Rx, Ry) > 0$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in V$ için

$$\tau + F(H(Rx, Ry)) \leq F(\sigma(x, y)) \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa $R$ dönüşümüne küme değerli $F-$büzülme denir.

**Teorem 2.6** (Altun vd. 2015)$(V, \sigma)$ metrik uzayı tam olsun. $R : V \to K(V)$ dönüşümü küme değerli $F-$büzülme olsun. Öyleyse $R$ dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

**Uyarı 2.4** $F$ dönüşümü aşağıdaki $(F4)$ şartını sağlarsa Teorem 2.6 de $K(V)$ yerine $CB(V)$ alındığında $R$ dönüşümü bir sabit noktaya sahip olacaktır.

**(F4)** $\inf A > 0$ olacak şekilde her $A \subset (0, \infty)$ kümesi için

$$F(\inf A) = \inf F(A) \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanır.

(F1)-(F4) şartlarını sağlayan tüm $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümlerinin ailesi $\mathcal{F}_*$ ile gösterilir.

Aşağıdaki örnek küme değerli $F-$büzülme dönüşümlerinin, küme değerli dönüşümlerin bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

**Örnek 2.10** $V = \{x_n = \dfrac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi alışılmış metrik ile gözönüne alınsın. O halde $(V, \sigma)$ bir tam metrik uzaydır.
$R : V \to K(V)$ dönüşümü

$$Rx = \begin{cases} \{x_1\}; & x = x_1 \\ \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}; & x = x_n \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $R$ dönüşümü $F(a) = a + \ln a$ ve $\tau = 1$ ile birlikte küme değerli $F-$büzülmedir.

Yukarıdaki teoremden $R$ dönüşümü $V$ kümesinde bir sabit noktaya sahiptir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(Rx_n, Rx_1)}{\sigma(x_n, x_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} = 1$$

olduğundan $R$ küme değerli büzülme dönüşümü değildir.

# 3. İKİ METRİK UZAY ÜZERİNDE TANIMLI F-BÜZÜLMELER İÇİN İLİŞKİLİ SABİT NOKTA TEOREMİ

Bu bölümde ilk olarak Brain Fisher ve arkadaşları tarafından verilen iki metrik uzay üzerinde tanımlı bir ilişkili sabit nokta teoremi hatırlatılacak, ardından iki metrik uzay üzerinde tanımlı $F-$büzülmeler için bir ilişkili sabit nokta teoremi verilerek bir takım sonuçlar elde edilecektir.

**Teorem 3.1** (Namdeo vd 1994)$(V,\sigma)$ ve $(U,\rho)$ tam metrik uzayları verilsin. $R : V \to U$ ve $G : U \to V$ iki dönüşüm olsun.
Her $v \in V$ , $u \in U$ ve $0 \leq c < 1$ için

$$\sigma(Gu, GRv) \leq c\phi(v,u) \tag{3.1}$$

$$\rho(Rv, RGu) \leq c\psi(v,u) \tag{3.2}$$

sağlansın. $g(v,u) \neq 0 \neq h(v,u)$ olmak üzere

$$\phi(v,u) = \frac{f(v,u)}{g(v,u)}, \qquad \psi(v,u) = \frac{f(v,u)}{h(v,u)}$$

biçiminde verilsin.
Burada $f$, $g$ ve $h$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} f(v,u) &= \max\left\{ \begin{array}{c} \sigma(Gu,v)\rho(u,Rv), \sigma(GRv,v)\rho(u,RGu), \\ \sigma(GRv,Gu)\rho(u,Rv) \end{array} \right\} \\ g(v,u) &= \max\{\sigma(GRv,v), \rho(u,RGu), \sigma(v,Gu)\} \\ h(v,u) &= \max\{\sigma(GRv,v), \rho(u,RGu), \rho(u,Rv)\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır. O halde $GR$ bir tek $z \in V$ sabit noktasına ve $RG$ bir tek $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Dahası $Rz = w$ ve $Gw = z$ eşitlikleri sağlanır.

**Teorem 3.2** $(V,\sigma)$ ve $(U,\rho)$ tam metrik uzayları verilsin. $R : V \to U$ ve $G : U \to V$ iki dönüşüm olsun. Her $v \in V$ ve $u \in U$ için

$$\sigma(GRv, Gu) > 0 \Rightarrow \tau + F(\sigma(GRv, Gu)) \leq F(\phi(v,u)) \tag{3.3}$$

$$\rho(RGu, Rv) > 0 \Rightarrow \tau + F(\rho(RGu, Rv)) \leq F(\psi(v,u)) \tag{3.4}$$

sağlanacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ ve $\tau > 0$ varolsun. Burada

$$g(v,u) \neq 0 \neq h(v,u)$$

olmak üzere $\phi$ ve $\psi$ fonksiyonları Teorem 3.1 deki gibi tanımlansın. O halde $GR$ bir tek $z \in V$ ve $RG$ bir tek $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Ayrıca $Rz = w$ ve $Gw = z$ eşitlikleri gerçeklenir.

**İspat.** $x \in V$ herhangi bir nokta olsun. $\{x_n\} \subset V$ ve $\{y_n\} \subset U$ dizileri

$$(GR)^n x = x_n, \qquad R(GR)^{n-1} x = y_n$$

biçiminde tanımlansın. Kısalık adına $n = 1, 2, 3...$ için

$$\alpha_n = \sigma(x_n, x_{n+1}) \quad \text{ve} \quad \beta_n = \rho(y_n, y_{n+1})$$

olsun. Eğer bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ veya $y_{n_0+1} = y_{n_0}$ gerçekleniyorsa bu durumda ispat tamamlanır. Gerçekten, $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ iken $(GR)^{n_0+1}x = (GR)^{n_0}x$ ve dolayısıyla $(GR)(GR)^{n_0}x = (GR)^{n_0}x$ bulunur. Böylece $(GR)^{n_0}x := z$ biçiminde tanımlanırsa $z$, $GR$ dönüşümünün bir sabit noktası olur. Ayrıca $Rx_{n_0+1} = Rx_{n_0}$ ve dolayısıyla $R(GR)^{n_0+1}x = R(GR)^{n_0}x$ olup $R(GR)^{n_0}x := w$ biçiminde tanımlanırsa $RG$ dönüşümünün bir sabit noktası $w$ olarak elde edilir. Benzer şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $y_{n_0+1} = y_{n_0}$ kabul edilerek aynı sonuç elde edilir.

Şimdi her $n$ doğal sayısı için $x_n \neq x_{n+1}$ ve $y_n \neq y_{n+1}$ olduğu kabul edilsin. O halde

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sigma(x_n, x_{n+1}) \\ &= \sigma(GRx_n, Gy_n) > 0 \end{aligned}$$

olup (3.3) eşitsizliğinden

$$F(\sigma(GRx_n, Gy_n)) \leq F(\phi(x_n, y_n)) - \tau$$

ve buradan

$$F(\alpha_n) \leq F(\beta_n) - \tau \tag{3.5}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \beta_n &= \rho(y_n, y_{n+1}) \\ &= \rho(RGy_n, Rx_{n-1}) > 0 \end{aligned}$$

olup (3.4) eşitsizliğinden

$$F(\rho(RGy_n, Rx_{n-1})) \leq F(\psi(x_{n-1}, y_n)) - \tau$$

ve dolayısıyla

$$F(\beta_n) \leq F(\alpha_{n-1}) - \tau \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} F(\alpha_n) &\leq F(\beta_n) - \tau \leq F(\alpha_{n-1}) - 2\tau \qquad (3.7) \\ &\leq ... \leq F(\alpha_0) - 2n\tau \leq F(\beta_0) - (2n+1)\tau \end{aligned}$$

bulunur.

Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} F(\beta_n) = -\infty$ bulunur.

(F2) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \tag{3.8}$$

elde edilir.

(F3) şartından

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^k F(\alpha_n) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n^k F(\beta_n) = 0 \tag{3.9}$$

sağlanacak şekilde $k \in (0, 1)$ vardır.

Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için (3.7) eşitsizliği

$$\alpha_n^k F(\alpha_n) \leq \alpha_n^k [F(\alpha_{n-1}) - 2\tau] \leq ... \leq \alpha_n^k [F(\alpha_0) - 2n\tau]$$

biçiminde yazılırsa

$$\alpha_n^k F(\alpha_n) - \alpha_n^k F(\alpha_0) \leq -2\alpha_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınıp (3.8) ve (3.9) eşitlikleri kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^k n = 0 \tag{3.11}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.7) eşitsizliğinden

$$\beta_n^k F(\beta_n) - \beta_n^k F(\beta_0) \leq -\beta_n^k (2n+1)\tau \leq 0 \tag{3.12}$$

yazılıp son durumda $n \to \infty$ için limit alınıp (3.8) ve (3.9) eşitlikleri kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)\beta_n^k = \lim_{n\to\infty} n\beta_n^k = 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.11) ifadesinden her $n \geq n_1$ için $n\alpha_n^k \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ bulunur. Benzer biçimde (3.13) eşitsizliğinden her $n \geq n_2$ için $n\beta_n^k \leq 1$ olacak biçimde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 = maks\{n_1, n_2\}$ olarak tanımlanırsa her $n > n_0$ için

$$\alpha_n^k \leq \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \beta_n^k \leq \frac{1}{n} \tag{3.14}$$

yazılır.

Şimdi $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin sırasıyla $X$ ve $Y$ uzaylarında birer Cauchy dizisi oldukları gösterilsin. $m > n > n_0$ olacak şekilde her $m, n \in \mathbb{N}$ için (3.14) eşitsizlikleri ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \sigma(x_n, x_m) &\leq \sum_{t=n}^{m} \alpha_t \\ &< \sum_{t=n}^{\infty} \alpha_t \leq \sum_{t=n}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{k}}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

ve

$$\begin{aligned} \rho(y_n, y_m) &\leq \sum_{t=n}^{m} \beta_t \\ &< \sum_{t=n}^{\infty} \beta_t \leq \sum_{t=n}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{k}}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

yazılır. $\sum_{t=1}^{\infty} t^{-\frac{1}{k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ve $\{y_n\}$ dizilerinin sırasıyla $V$ ve $U$ uzaylarında birer Cauchy dizisi olduğu bulunur. $V$ ve $U$ uzayları tam uzaylar olduğundan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sırasıyla $z \in V$ ve $w \in U$ limitlerine sahiptir.

Sabit noktanın varlığını ve dönüşümler arasındaki ilişkiyi göstermek için kabul edelim ki $z \neq GRz$ ve $w \neq RGw$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iki durum meydana gelir:

**Durum 1:** $z = Gw$ ve $w = Rz$ olsun. O halde $w = RGw$ ve $z = GRz$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

**Durum 2:** $z \neq Gw$ veya $w \neq Rz$ olsun.

Eğer $z \neq Gw$ ise bu durumda $\sigma(Gw, x_{n(k)+1}) > 0$ olacak biçimde $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n(k)}\}$ altdizisi vardır. Dolayısıyla (3.3) eşitsizliğinden

$$F(\sigma(Gw, GRx_{n(k)})) \leq F(\phi(x_{n(k)}, w)) - \tau \tag{3.17}$$

bulunur. Burada $\phi(x_{n(k)}, w) = \dfrac{f(x_{n(k)}, w)}{g(x_{n(k)}, w)}$ dır. $\phi$ fonksiyonunda $k \to \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{k\to\infty} g(x_{n(k)}, w) = \lim_{k\to\infty} \max \left\{ \begin{array}{c} \sigma(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}), \\ \rho(w, RGw), \\ \sigma(x_{n(k)}, Gw) \end{array} \right\} > 0$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)}, w) &= \lim_{k\to\infty} \max \left\{ \begin{array}{c} \sigma(x_{n(k)}, Sw)\rho(w, Tx_{n(k)}), \\ \sigma(x_{n(k)}, STx_{n(k)})\rho(w, TSw), \\ \sigma(Sw, STx_{n(k)})\rho(w, Tx_{n(k)}) \end{array} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lim\limits_{k\to\infty} \phi(x_{n(k)}, w) = 0$ bulunur. Son durumda (3.17) ve (F2) kullanılarak $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma(Gw, GRx_{n(k)}) = 0$ ve böylece $Gw = z$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Eğer $w \neq Rz$ alınırsa benzer çelişki elde edilir. O halde $z = GRz$ veya $w = RGw$ olmalıdır. Eğer $z = GRz$ ise $z$, $GR$ dönüşümünün ve $Rz$ ise $RG$ dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Benzer şekilde eğer $w = RGw$ ise $w$, $RG$ dönüşümünün ve $Gw$ de $GR$ dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Son olarak sabit noktanın tekliğini ispatlamak için kabul edelim ki $z$ ve $z'$, $GR$ dönüşümünün iki farklı sabit noktası olsun. O halde

$$\begin{aligned} \phi(z', Rz) &= \frac{f(z', Rz)}{g(z', Rz)} \\ &= \rho(Rz, Rz') \end{aligned} \tag{3.18}$$

ve

$$\begin{aligned} \psi(z', Rz) &= \frac{f(z', Rz)}{h(z', Rz)} \\ &= \sigma(z, z'). \end{aligned} \tag{3.19}$$

bulunur. Bulunan ifadeler (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinde kullanılırsa

$$F(\sigma(GRz, GRz') \leq F(\sigma(z, z')) - 2\tau \tag{3.20}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $GR$ dönüşümü $V$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. ■

Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

**Sonuç 3.1** Teorem 3.1 gerçeklenir.

**İspat.** Teorem 3.2 de $F(\alpha) = \ln \alpha$ alınırsa ispat tamamlanır. ■

**Sonuç 3.2** $(V, \sigma)$ tam metrik uzayı ve $R : V \to V$ dönüşümü ele alınsın. $F \in \mathcal{F}$ olmak üzere

$$\sigma(Ru, R^2v) > 0 \Rightarrow \tau + F(\sigma(Ru, R^2v)) \leq F(\phi(v, u)) \tag{3.21}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $\tau > 0$ varolsun.
Burada $v, u \in V$ için $\max\{\sigma(v, R^2v), \sigma(u, R^2u), \sigma(v, Ru)\} > 0$ olup

$$\phi(x, y) = \frac{\max\left\{\begin{array}{c} \sigma(v, Ru)\sigma(u, Rv), \\ \sigma(v, R^2v)\sigma(u, R^2u), \\ \sigma(Ru, R^2v)\sigma(u, Rv) \end{array}\right\}}{\max\{\sigma(v, R^2v), \sigma(u, R^2u), \sigma(v, Ru)\}}$$

biçiminde tanımlansın. O halde $R$ dönüşümü $V$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Teorem 3.2 de $V = U$, $\sigma = \rho$ ve $R = G$ alınırsa ispat tamamlanır. ■

**Sonuç 3.3** $(V, \sigma)$ bir tam metrik uzay olsun. $R : V \to V$ dönüşümü için

$$\sigma(u, Rv) > 0 \Rightarrow \tau + F(\sigma(u, Rv)) \leq F(\phi(v, u)) \tag{3.22}$$

$$\sigma(Rv, Ru) > 0 \Rightarrow \tau + F(\sigma(Rv, Ru)) \leq F(\psi(v, u)) \tag{3.23}$$

eşitsizliklerini sağlanacak biçimde $F \in \mathcal{F}$ ve $\tau > 0$ olsun. Burada her $u, v \in V$ için

$$g(v, u) \neq 0 \neq h(v, u),$$

ve

$$\phi(v,u) = \frac{f(v,u)}{g(v,u)}, \quad \psi(v,u) = \frac{f(v,u)}{h(v,u)}$$

olup $f$, $g$ ve $h$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}
f(v,u) &= \max\{\sigma(v,u)\sigma(u,Rv), \sigma(v,Rv)\sigma(u,Ru), \sigma^2(u,Rv)\} \\
g(v,u) &= \max\{\sigma(v,Rv), \sigma(u,Ru), \sigma(v,u)\} \\
h(v,u) &= \max\{\sigma(v,Rv), \sigma(u,Ru), \sigma(u,Rv)\}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Öyleyse $R$ dönüşümü $V$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

**İspat.** Teorem 3.2 de $V = U$, $\sigma = \rho$ ve $G = I$ (özdeşlik dönüşümü) alınırsa ispat tamamlanır. ■

**Örnek 3.1** $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıları ve $I$ irrasyonel sayıları göstermek üzere $V = \mathbb{Q}$ ve $U = I$ alınsın. $V$ üzerinde ayrık metrik ile $U$ üzerinde tanımlı

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x = y \\ |x-y|+1 & ; \ x \neq y \end{cases}$$

metriği birlikte düşünülsün. $(V,\sigma)$ ve $(U,\rho)$ uzaylarının birer tam metrik uzay oldukları açıktır.

Şimdi $R : V \to U$ ve $G : U \to V$ dönüşümleri sırasıyla $Rx = \sqrt{2}$ ve $Gy = 0$ biçiminde tanımlansın. Her $x \in V$ ve $y \in U$ için

$$\sigma(Gy, GRx) = 0 = \rho(Rx, RGy)$$

olup (3.3) ve (3.4) şartları her $F \in \mathcal{F}$ ve $\tau > 0$ için sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.1 den $GR$ dönüşümü bir $z \in V$ ve $RG$ dönüşümü bir $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $Rz = w$ ve $Gw = z$ eşitlikleri sağlanır.

# 4. İKİ METRİK UZAY ÜZERİNDE TANIMLI KÜME DEĞERLİ İLİŞKİLİ DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde öncelikle $\widetilde{\delta}-$metriği ile verilen küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri hatırlatılacak ardından bir takım örnekler verilecektir. Daha sonra B. Fisher tarafından 1982 de verilen ilişkili sabit nokta teoremi, Hausdorff metriği düşünülerek küme değerli dönüşümlere genelleştirilip ilişkili küme değerli dönüşümler ve ilişkili küme değerli $F-$büzülmeler ifade ve ispat edilecektir.

## 4.1 $\widetilde{\delta}-$Metriği İle Verilen Küme Değerli İlişkili Dönüşümler

Bu kısımda öncelikle $\widetilde{\delta}-$metriğinin özellikleri verilecek daha sonra Brain Fisher ve Duran Türkoğlu tarafından ispatlanan iki metrik uzay üzerinde tanımlı küme değerli ilişkili sabit nokta teoremi hatırlatılacaktır.

"$(V, \sigma)$ bir metrik uzay olsun ve $B(V)$, $V$ in boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerini göstersin. $A, B \in B(V)$ olmak üzere

$$\widetilde{\delta}(A, B) = \sup\{\sigma(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

biçiminde tanımlansın. Eğer $A = \{a\}$ ise $\widetilde{\delta}(A, B) = \widetilde{\delta}(a, B)$ olacaktır. Bunun yanında $B = \{b\}$ ise $\widetilde{\delta}(A, B) = \sigma(a, b)$ yazılabilir.
Tanım gereği $\widetilde{\delta}(A, B) = \widetilde{\delta}(B, A) \geq 0$ ve $\widetilde{\delta}(A, B) \leq \widetilde{\delta}(A, C) + \widetilde{\delta}(C, B)$ eşitsizliklerinin sağlandığı açıktır.
Ayrıca $B(V)$ uzayındaki bir $\{A_n : n = 1, 2, ...\}$ dizisi

**(i)** $a \in A$ noktası yakınsak bir $\{a_n \in A_n : n = 1, 2, ...\}$ dizisinin limitidir."

**(ii)** Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon$, $\varepsilon$ yarıçaplı ve merkezi $A$ kümesi içinde olan bütün açık yuvarların birleşimini göstersin. Her $n > N$ için $A_n \subset A_\varepsilon$ olacak biçimde bir $N$ doğal sayısı vardır.

şartlarını sağlarsa bir $A \in B(V)$ kümesine yakınsaktır, bu durumda $A$ kümesi $\{A_n\}$ dizisinin limitidir.

**Lemma 4.1** $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ dizileri sırasıyla $A$ ve $B$ sınırlı kümelerine yakınsayan $(V,\sigma)$ tam metrik uzayının sınırlı tüm alt kümelerinin dizisi olsunlar. Bu durumda $\{\widetilde{\delta}(A_n,B_n)\}$ dizisi $\widetilde{\delta}(A,B)$ ye yakınsaktır.

Şimdi $R : V \to B(V)$ bir dönüşüm olsun. $V$ uzayındaki her $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in V$ noktasına yakınsarken $B(V)$ uzayındaki her $\{Rx_n\}$ dizisi $\{Rx\} \subset B(V)$ elemanına yakınsarsa $R$ dönüşümüne süreklidir denir.

**Teorem 4.1** (Fisher ve Türkoğlu 2000)$(V,\sigma_1)$ ve $(U,\sigma_2)$ iki tam metrik uzay olsun. $R : V \to B(U)$ ve $G : U \to B(V)$ dönüşümleri $c \in (0,1)$ olmak üzere her $v,v' \in V$ ve $u,u' \in U$ için

$$\widetilde{\delta}_1(GRx,GRx') \leq c\max\{\sigma_1(v,v'),\widetilde{\delta}_1(v,GRv),\widetilde{\delta}_1(v',GRv'),\widetilde{\delta}_2(Rv,Rv')\} \quad (4.1)$$
$$\widetilde{\delta}_2(RGy,RGy') \leq c\max\{\sigma_2(u,u'),\widetilde{\delta}_2(u,RGu),\widetilde{\delta}_2(u',RGu'),\widetilde{\delta}_1(Gu,Gu')\} \quad (4.2)$$

eşitsizliklerini sağlasın. Eğer $R$ dönüşümü sürekli ise $GR$ ve $RG$ dönüşümleri sırasıyla bir tek $z \in V$ ve $w \in U$ sabit noktasına sahiptir.

**Sonuç 4.1** $(V,\sigma_1)$ ve $(U,\sigma_2)$ iki tam metrik uzay olsun. $T : V \to U$ sürekli dönüşümü ve $S : U \to V$ dönüşümü $c \in (0,1)$ olmak üzere her $v,v' \in V$ ve $u,u' \in U$ için

$$\sigma_1(STv,SRv') \leq c\max\{\sigma_1(v,v'),\sigma_1(STv,v),\sigma_1(v',STv'),\sigma_2(Tv,Tv')\} \quad (4.3)$$
$$\sigma_2(TSy,TSy') \leq c\max\{\sigma_2(u,u'),\sigma_2(TSu,u),\sigma_2(u',TSu'),\sigma_1(Su,Su')\} \quad (4.4)$$

eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda $ST$ dönüşümü bir tek $z \in V$ ve $TS$ dönüşümü bir tek $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $Tz = w$ ve $Sw = z$ bulunur.

**Teorem 4.2** (Fisher ve Türkoğlu 2000)$(V,\sigma_1)$ ve $(U,\sigma_2)$ iki kompakt metrik uzay olsun. $R : V \to B(U)$ ve $G : U \to B(V)$ sürekli dönüşümleri her $v,v' \in V$ ve $u,u' \in U$ için sağ tarafı pozitif değerlere sahip olan aşağıdaki eşitsizlikleri sağlasın.

$$\widetilde{\delta}_1(GRv,GRv') < \max\{\sigma_1(v,v'),\widetilde{\delta}_1(v,GRv),\widetilde{\delta}_1(v',GRv'),\widetilde{\delta}_2(Rv,Rv')\} \quad (4.5)$$
$$\widetilde{\delta}_2(RGu,RGu') < \max\{\sigma_2(u,u'),\widetilde{\delta}_2(u,RGu),\widetilde{\delta}_2(u',RGu'),\widetilde{\delta}_1(Gu,Gu') \quad (4.6)$$

O halde $RG$ dönüşümü bir tek $z \in V$ ve $GR$ dönüşümü bir tek $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $RGz = \{z\}$ ve $GRw = \{w\}$ eşitlikleri sağlanır.

**Sonuç 4.2** $(V, \sigma_1)$ ve $(U, \sigma_2)$ iki kompakt metrik uzay olmak üzere $T : V \to U$ ve $S : U \to V$ sürekli dönüşümleri her $v, v' \in V$ ve $u, u' \in U$ için sağ tarafı pozitif değerlere sahip olan aşağıdaki eşitsizlikleri sağlasın.

$$\sigma_1(STv, STv') < \max\{\sigma_1(v, v'), \sigma_1(STv, v), \sigma_1(v', STv'), \sigma_2(Tv, Tv')\} \quad (4.7)$$

$$\sigma_2(TSu, TSu') < \max\{\sigma_2(u, u'), \sigma_2(TSu, u), \sigma_2(u', TSu'), \sigma_1(Su, Su') \quad (4.8)$$

O halde $ST$ dönüşümü bir tek $z \in V$ ve $TS$ dönüşümü bir tek $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $Tz = w$ ve $Sw = z$ bulunur.

## 4.2 Hausdorff Metriği ile Verilen Küme Değerli İlişkili Dönüşümler

Bu kısımda Hausdorff metriği ile iki metrik uzay üzerinde tanımlanan ilişkili küme değerli büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarının varlığı ve bu dönüşümlerin ilişkili küme değerli $F-$büzülmelere genelleştirilmesi verilecektir. Ardından iki metrik uzay üzerinde tanımlı küme değerli dönüşümler için bir takım sonuçlar ifade ve ispat edilecektir.

**Teorem 4.3** $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ iki tam metrik uzay olsun. $R : V \to CB(U)$ ve $G : U \to CB(V)$ dönüşümleri $0 < c < 1$ olmak üzere her $v \in V$ , $u \in U$, $r \in Rv$ ve $s \in Gu$ için

$$H_1(Gu, Gr) \leq c \max\{D_1(v, Gu), D_1(v, Gr), \rho(u, r)\} \quad (4.9)$$

$$H_2(Rv, Rs) \leq c \max\{D_2(u, Rv), D_2(u, Rs), \sigma(v, s)\} \quad (4.10)$$

eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda $GR$ dönüşümü bir $z \in V$ ve $RG$ dönüşümü bir $w \in U$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik bu dönüşümler arasında $w \in Rz$ ve $z \in Gw$ ilişkisi elde edilir.

**İspat.** $x_0 \in V$ alalım. Her $x \in V$ ve $y \in U$ için $Gy$ ve $Rx$ boş olmadığından $y_1 \in Rx_0$ ve $x_1 \in Gy_1$ seçebiliriz. Eğer $x_1 \in GRx_1$ ve $y_1 \in RGy_1$ ise bu durumda $x_1$ ve $y_1$ sırasıyla $GR$ ve $RG$ dönüşümlerinin sabit noktaları olur.

Şimdi kabul edelim ki $x_1 \notin GRx_1$ veya $y_1 \notin RGy_1$ olsun ve $qc < 1$ olacak şekilde $q > 1$ alınsın.

Lemma 2.2 den

$$\rho(y_1, y_2) \leq qH_2(Rx_0, Rx_1) \tag{4.11}$$

olacak şekilde bir $y_2 \in Rx_1$ vardır. (4.11) ve (4.10) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\rho(y_1, y_2) &\leq qH_2(Rx_0, Rx_1) \\
&\leq qc \max\{D_2(y_1, Rx_0), D_2(y_1, Rx_1), \sigma(x_0, x_1)\} \\
&\leq qc \max\{H_2(Rx_0, Rx_1), \sigma(x_0, x_1)\} \\
&\leq qc\sigma(x_0, x_1) \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

bulunur.

Benzer biçimde Lemma 2.2 den

$$\sigma(x_1, x_2) \leq qH_1(Gy_1, Gy_2) \tag{4.13}$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Gy_2$ vardır. (4.9) ve (4.13) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1, x_2) &\leq qH_1(Gy_1, Gy_2) \\
&\leq qc \max\{D_1(x_1, Gy_1), D_1(x_1, Gy_2), \rho(y_1, y_2)\} \\
&\leq qc \max\{H_1(Gy_1, Gy_2), \rho(y_1, y_2)\} \\
&= qc\rho(y_1, y_2) \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Genelliği kaybetmeksizin Lemma 2.2 ve (4.10) eşitsizliğinden $qc \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned}
\rho(y_n, y_{n+1}) &\leq qH_2(Rx_{n-1}, Rx_n) \\
&\leq qc \max\{D_2(y_n, Rx_{n-1}), D_2(y_n, Rx_n), \sigma(x_{n-1}, x_n)\} \\
&\leq qc \max\{H_2(Rx_{n-1}, Rx_n), \sigma(x_{n-1}, x_n)\} \\
&\leq qc\sigma(x_{n-1}, x_n) \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

sağlanacak şekilde bir $y_{n+1} \in Rx_n$ bulunur.

Benzer şekilde Lemma 2.2 ve (4.9) eşitsizliğinden $qc \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} \sigma(x_n, x_{n+1}) &\leq qH_1(Gy_n, Gy_{n+1}) \\ &\leq qc \max\{D_1(x_n, Gy_n), D_1(x_n, Gy_{n+1}), \rho(y_n, y_{n+1})\} \\ &\leq qc \max\{H_1(Gy_n, Gy_{n+1}), \rho(y_n, y_{n+1})\} \\ &= qc\rho(y_n, y_{n+1}) \end{aligned} \tag{4.16}$$

olacak şekilde bir $x_{n+1} \in Gy_{n+1}$ bulunur. (4.15) ve (4.16) eşitsizliklerinden $qc \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} \rho(y_n, y_{n+1}) &\leq qH_2(Rx_{n-1}, Rx_n) \\ &\leq qc\sigma(x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq (qc)^{n+1}\sigma(x_0, x_1) \end{aligned} \tag{4.17}$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma(x_n, x_{n+1}) &\leq (qc).\rho(y_n, y_{n+1}) \\ &\leq (qc)^2\sigma(x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq (qc)^{n+2}\sigma(x_0, x_1) \end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitsizlikleri bulunur.

(4.17) ve (4.18) eşitsizliklerinde $n \to \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{4.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_{n+1}) = 0 \tag{4.20}$$

elde edilir.

Şimdi $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin sırasıyla $V$ ve $U$ uzaylarında birer Cauchy dizisi oldukları gösterilsin. $m > n$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için (4.18) ve üçgen eşitsizliğinden $qc \in (0,1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sigma(x_n, x_m) &\leq \sum_{t=n}^{m-1} \sigma(x_t, x_{t+1}) \\
&\leq \sum_{t=n}^{m-1} (qc)^{t+2} \sigma(x_0, x_1) \\
&\leq \sigma(x_0, x_1) \sum_{t=n}^{\infty} (qc)^{t+2}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{t=-2}^{\infty} (qc)^{t+2}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisinin $V$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. Benzer şekilde (4.17) eşitsizliği kullanılarak $\{y_n\}$ dizisinin $U$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu bulunur. $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ tam uzaylar olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = w$ olacak biçimde $z \in V$ ve $w \in U$ vardır.

Şimdi dönüşümlerin arasındaki ilişkiyi göstermek için $z \notin Gw$ veya $w \notin Rz$ olduğu kabul edilsin. Eğer $z \notin Gw$ ise her $n > n_0$ için $D_1(Gw, x_{n+1}) > 0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla (4.9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
D_1(Gw, x_{n+1}) &\leq H_1(Gw, Gy_{n+1}) \\
&\leq c \max\{D_1(x_n, Gw), D_1(x_n, Gy_{n+1}), \rho(w, y_{n+1})\} \\
&\leq c \max\{D_1(x_n, Gw), d(x_n, x_{n+1}), \rho(w, y_{n+1})\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$D_1(Gw, z) \leq c D_1(z, Gw)$$

çelişkisi elde edilir. Öyleyse $z \in Gw$ olmalıdır. Eğer $w \notin Rz$ ise (4.10) eşitsizliği kullanılarak benzer çelişki elde edilir. Dolayısıyla $w \in Rz$ olmalıdır.
O halde $z \in Gw \subseteq GRz$ ve $w \in Ru \subseteq RGw$ olup $z$ ve $w$ sırasıyla $GR$ ve $RG$ dönüşümlerinin sabit noktalarıdır.
Bu ise ispatı tamamlar. ■

**Tanım 4.1** $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ iki metrik uzay, $R : V \to CB(U)$ ve $G : U \to CB(V)$ iki dönüşüm olsun. Eğer *her* $v \in V$ , $u \in U$, $r \in Rv$ ve $s \in Gu$ için

$$H_1(Gu, Gr) > 0 \Longrightarrow \tau + F(H_1(Gu, Gr)) \leq F(M_1(v, u)) \tag{4.21}$$

$$H_2(Rv, Rs) > 0 \Longrightarrow \tau + F(H_2(Rv, Rs)) \leq F(M_2(v, u)) \tag{4.22}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde bir $F \in \mathcal{F}$ *ve* $\tau > 0$ varsa $T$ ve $S$ dönüşümlerine küme değerli ilişkili $F$-büzülmeler denir. Burada $M_1(x, y)$ ve $M_2(x, y)$

$$\begin{aligned} M_1(v,u) &= \max\{D_1(v,Gu), D_1(v,Gr), \rho(u,r)\} \\ M_2(v,u) &= \max\{D_2(u,Rv), D_2(u,Rs), \sigma(v,s)\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Küme değerli ilişkili $F-$büzülmelerin sabit noktalarının varlığına ilişkin teoremi vermeden önce bir takım bilgiler hatırlatılacaktır:

$X$ ve $Y$ iki metrik uzay ve $T : X \to P(Y)$ dönüşümü göz önüne alınsın. Kapalı (açık) kümelerin $T$ dönüşümü altındaki ters görüntüsü kapalı (açık) ise bu dönüşüm üstten yarısüreklidir (alttan yarısüreklidir) denir. Eğer bir küme değerli dönüşüm üstten ve alttan yarısürekli ise süreklidir denir. Eğer $T : X \to P(Y)$ dönüşümü üstten yarı sürekli ve $x_n \to x$, $y_n \to y$ ve $y_n \in Tx_n$ olacak şekilde $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sırasıyla $X$ ve $Y$ uzaylarında iki dizi ise bu durumda $y \in Tx$ dir.

**Teorem 4.4** $(V,\sigma)$ ve $(U,\rho)$ iki tam metrik uzay, $R : V \to K(U)$ ve $G : U \to K(V)$ iki küme değerli ilişkili $F$-büzülme olsun. Eğer $R$ ve $G$ üstten yarısürekli veya $F$ sürekli ise bu durumda $GR$ ve $RG$ dönüşümleri sırasıyla $z \in V$ ve $w \in U$ sabit noktalarına sahiptir. Üstelik $w \in Rz$ ve $z \in Gw$ elde edilir.

**İspat.** $x_0 \in V$ olsun. Her $x \in V$ ve $y \in U$ için $Gy$ ve $Rx$ boş olmadığından $y_1 \in Rx_0$ ve $x_1 \in Gy_1$ seçebiliriz. $Rx_1$ kompakt olduğundan

$$\rho(y_1, y_2) = D_2(y_1, Rx_1)$$

olacak şekilde bir $y_2 \in Rx_1$ vardır.
Eğer $D_2(y_1, Rx_1) = 0$ ise bu durumda $y_1 \in Rx_1 \subset RGy_1$ ve $x_1 \in Gy_1 \subset GRx_1$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.
Şimdi $D_2(y_1, Rx_1) > 0$ olsun. (F1) şartından ve (4.22) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} F(D_2(y_1,Rx_1)) &\leq F(H_2(Rx_0,Rx_1)) \\ &\leq F(M_2(x_0,y_1)) - \tau \\ &\leq F(\sigma(x_0,x_1)) - \tau. \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ vardır. Dolayısıyla Sonuç 2.1 den

$$F(\rho(y_1, y_2)) \leq F(H_2(Rx_0, Rx_1)) < F(\sigma(x_0, x_1)) - \tau \tag{4.23}$$

elde edilir. Benzer biçimde $Gy_2$ kompakt olduğundan

$$\sigma(x_1, x_2) = D_1(x_1, Gy_2)$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Gy_2$ vardır.

Eğer $D_1(x_1, Gy_2) = 0$ ise bu durumda $x_1 \in Gy_2 \subset GRx_1$ ve $y_2 \in Rx_1 \subset RGy_2$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi $D_1(x_1, Gy_2) > 0$ olsun. (F1) şartından ve (4.21) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} F(D_1(x_1, Gy_2)) &\leq F(H_1(Gy_1, Gy_2)) \\ &\leq F(M_1(x_1, y_1)) - \tau \\ &\leq F(\rho(y_1, y_2)) - \tau. \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ vardır. Dolayısıyla Sonuç 2.1 kullanılarak

$$F(\sigma(x_1, x_2)) \leq F(H_1(Gy_1, Gy_2)) \leq F(\rho(y_1, y_2)) - \tau \tag{4.24}$$

bulunur.

Genelliği kaybetmeksizin (4.23) ve (4.24) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} F(\sigma(x_n, x_{n+1})) &\leq F(\rho(y_n, y_{n+1})) - \tau \\ &\leq F(\sigma(x_{n-1}, x_n) - 2\tau \\ &\vdots \\ &\leq F(\rho(y_1, y_2)) - (2n-1)\tau \\ &\leq F(\sigma(x_0, x_1)) - 2n\tau. \end{aligned} \tag{4.25}$$

sağlanacak biçimde bir $\tau > 0$ vardır. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Gy_n$ ve $y_{n+1} \in Rx_n$ olacak biçimde $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri inşa edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınıp (F2) özelliği kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_{n+1}) = 0.$$

elde edilir. Kısalık adına $n = 0, 1..$ için $\alpha_n = \sigma(x_n, x_{n+1})$ ve $\beta_n = \rho(y_n, y_{n+1})$ olsun. (F3) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^k F(\alpha_n) = 0$$

olacak biçimde bir $k \in (0,1)$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için (4.25) eşitsizliğinden

$$\alpha_n^k F(\alpha_n) - \alpha_n^k F(\alpha_0) \leq -2\alpha_n^k n\tau \leq 0 \tag{4.26}$$

bulunur. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n^k = 0 \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.27) den her $n > n_1$ için $n\alpha_n^k \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$\alpha_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}} \tag{4.28}$$

yazılır.

Benzer biçimde her $n \in \mathbb{N}$ için (4.25) eşitsizliğinden

$$\beta_n^k F(\beta_n) - \beta_n^k F(\beta_1) \leq -2\beta_n^k (n-1)\tau \leq 0$$

bulunup $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^k (n-1) = 0 \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) ifadesinden her $n > n_2$ için $(n-1)\beta_n^k \leq 1$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$\beta_n \leq \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{k}}} \tag{4.30}$$

yazılır.

$\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin sırasıyla $V$ ve $U$ uzaylarında birer Cauchy dizisi olduğunu gösterilsin. $m > n > n_0$ olacak şekilde her $m, n \in \mathbb{N}$ için (4.28) ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sigma(x_n, x_m) &\leq \sum_{t=n}^{m-1} \sigma(x_t, x_{t+1}) \\
&= \sum_{t=n}^{m-1} \alpha_t \\
&\leq \sum_{t=n}^{m-1} \frac{1}{t^{\frac{1}{k}}}
\end{aligned}$$

yazılır. $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{k}}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi $(V, \sigma)$ uzayında bir Cauchy dizisi olarak bulunur. Benzer biçimde (4.30) ve üçgen eşitsizliğinden $\{y_n\}$ dizisi $(U, \rho)$ uzayında bir Cauchy dizisi olarak bulunur. $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ birer tam metrik uzay olduklarından $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ Cauchy dizileri sırasıyla $z \in V$ ve $w \in U$ elemanlarına yakınsar.

Şimdi dönüşümler arasındaki ilişkiyi ispatlamak için $R$ ve $G$ dönüşümlerinin üstten yarısürekli olduğu kabul edilsin. Bu durumda $x_n \in Gy_n$, $y_{n+1} \in Rx_n$, $x_n \to z$ ve $y_n \to w$ olup $z \in Gw$ ve $w \in Rz$ elde edilir.

Şimdi $F$ fonksiyonunun sürekliliği kabul edilsin ve $z \notin Gw$ veya $w \notin Rz$ gerçeklensin. Eğer $z \notin Gw$ ise bu durumda $n_0 > n$ için $D_1(Gw, x_{n+1}) > 0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısyla (4.21) eşitsizliği ve (F1) den

$$\begin{aligned}
F(D_1(Gw, x_{n+1})) &\leq F(H_1(Gw, Gy_{n+1})) \\
&\leq F(M_1(x_n, w)) - \tau \\
&\leq F(\max\{\rho(w, y_{n+1}), D_1(x_n, Gy_{n+1}), D_1(x_n, Gw)\}) - \tau \\
&\leq F(\max\{\rho(w, y_{n+1}), \sigma(x_n, x_{n+1}), D_1(x_n, Gw)\}) - \tau
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınıp $F$ fonksiyonunun sürekliliği kullanılırsa

$$F(D_1(Gw, z)) \leq F(D_1(z, Gw)) - \tau$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda $z \in Gw$ elde edilir. Eğer $w \notin Rz$ ise bu durumda benzer çelişki bulunarak $w \in Rz$ elde edilir.
O halde $z \in Gw \subseteq GRz$ ve $w \in Rz \subseteq RGw$ olup $z$ ve $w$ sırasıyla $GR$ ve $RG$ dönüşümlerinin birer sabit noktası olur.
Bu ise ispatı tamamlar.

■

**Örnek 4.1** $V = [0, 1]$ ve $U = [-1, 0]$ metrik uzaylarını $\sigma = \rho$

$$\sigma(v, u) = \begin{cases} 0 & , \quad v = u \\ \\ |v - u| + 1 & , \quad v \neq u \end{cases} .$$

metriği ile birlikte düşünelim. $Q$ ve $I$ sırasıyla rasyonel ve irrasyonel sayıları göstermek üzere $R : V \to P(U)$ ve $G : U \to P(V)$ dönüşümleri

$$Rv = \begin{cases} Q_U & , \quad v \in I_V \\ \\ I_U & , \quad v \in Q_V \end{cases} \text{ ve } Gu = \begin{cases} I_V & , \quad u \in I_U \\ \\ Q_V & , \quad u \in Q_U \end{cases},$$

biçiminde tanımlansın. Burada $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ uzayları tam metrik uzaylardır. Üstelik $\tau_\sigma$ ve $\tau_\rho$ ayrık topoloji olduklarından $V$ ve $U$ uzayının her sonsuz alt kümesi kapalıdır fakat kompakt değildir. Bu durum $R$ ve $G$ dönüşümlerinin üstten yarısürekli olduğunu gösterir. Dahası $V$ ve $U$ uzayları sınırlı olup $Rv$ ve $Gu$ kümeleri kapalı ve sınırlıdır.

Şimdi $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(\alpha) = \begin{cases} \ln \alpha & , \quad \alpha \leq 1 \\ \\ \alpha & , \quad \alpha > 1 \end{cases},$$

biçiminde tanımlansın. O halde $F \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_*$ olduğu açıktır. Şimdi (4.21) ve (4.22) eşitsizliklerinin $\tau = 1$ için sağlandığı gösterilsin. Eğer $v \in V$, $u \in U$, $r \in Rv$ ve $H_1(Gu, Gr) > 0$ ise, $v \in I_V$ ve $u \in I_U$ veya $v \in Q_V$ ve $u \in Q_U$ dır. Bu durumda aşağıdaki iki durum düşünülebilir:

**Durum 1:** $v \in I_V$ ve $u \in I_U$ olsun. O halde tüm $r \in Rv = Q_U$ için
$H_1(Gu, Gr) = 1 > 0$ ve

$$\begin{aligned} \tau + F(H_1(Gu, Gr)) &= 1 + F(1) = 1 \\ &< 1 + |u - r| = \rho(u, r) \\ &= F(\rho(u, r)) = F(M_1(v, u)) \end{aligned}$$

bulunur.

**Durum 2:** $v \in Q_V$ ve $u \in Q_U$ olsun. O halde tüm $r \in Rv = I_U$ için
$H_1(Gu, Gr) = 1 > 0$ ve

$$\begin{aligned} \tau + F(H_1(Gu, Gr)) &= 1 + F(1) = 1 \\ &< 1 + |u - r| = \rho(u, r) \\ &= F(\rho(u, r)) = F(M_1(v, u)) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.21) eşitsizliği sağlanır. Benzer biçimde (4.22) eşitsizliğinin sağlandığı da gösterilir. Sonuç olarak $Rv$ ve $Gu$ kümelerinin kompaktlığı dışında Teorem 4.4 ün tüm şartları sağlanır. Fakat $RG$ ve $GR$ dönüşümleri sabit noktaya sahip değillerdir.

**Uyarı 4.1** Teorem (4.4) de $\mathcal{F}_*$ kümesi düşünülerek $Rv$ ve $Gu$ kümeleri üzerindeki kompaktlık şartı kaldırılıp yerine kümelerin kapalı ve sınırlı olması şartı eklenilebilir.

**Tanım 4.2** $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ iki metrik uzay, $R : V \to CB(U)$ ve $G : U \to CB(V)$ iki dönüşüm olsun. Bu durumda $F \in \mathcal{F}_*$ olmak üzere $v \in V$, $u \in U$, $r \in Rv$ ve $s \in Gu$ için

$$H_1(Gu, Gr) > 0 \Longrightarrow \tau + F(H_1(Gu, Gr)) \leq F(M_1(v, u)) \tag{4.31}$$

$$H_2(Rv, Rs) > 0 \Longrightarrow \tau + F(H_2(Rv, Rs)) \leq F(M_2(v, u)) \tag{4.32}$$

olacak biçimde bir $\tau > 0$ varsa $R$ ve $G$ dönüşümlerine genelleştirilmiş küme değerli ilişkili $F$-büzülmeler denir. Burada

$$\begin{aligned} M_1(v, u) &= \max\{D_1(v, Gu), D_1(v, Gr), \rho(u, r)\} \\ M_2(v, u) &= \max\{D_2(u, Rv), D_2(u, Rs), \sigma(v, s)\}. \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır.

**Teorem 4.5** $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ metrik uzayları tam uzay, $T : V \to CB(U)$ ve $G : U \to CB(V)$ dönüşümleri $F \in \mathcal{F}_*$ ile genelleştirilmiş küme değerli ilişkili $F$-büzülmeler olsun. Eğer $R$ ve $G$ üstten yarısürekli veya $F$ sürekli ise, bu durumda $GR$ ve $RG$ dönüşümleri sırasıyla birer $z \in V$ ve $w \in U$ sabit noktalarına sahiplerdir. Üstelik $w \in Rz$ ve $z \in Gw$ gerçeklenir.

**İspat.** $x_0 \in V$ alalım. Her $x \in V$ ve $y \in U$ için $Gy$ ve $Rx$ boş olmadığından $y_1 \in Rx_0$ ve $x_1 \in Gy_1$ seçilebilir.

Eğer $D_2(y_1, Rx_1) = 0$ ise bu durumda $y_1 \in Rx_1$ olur.

Dolayısıyla $y_1 \in Rx_1 \subset RGy_1$ ve $x_1 \in Gy_1 \subset GRx_1$ elde edilir. Bu ise $x_1$ ve $y_1$ in sırasıyla $GR$ ve $RG$ dönüşümlerinin sabit noktası olduğunu gösterir.

Şimdi $D_2(y_1, Rx_1) > 0$ olsun. $D_2(y_1, Rx_1) \leq H_2(Rx_0, Rx_1)$ olup (F1) den

$$\begin{aligned} F(D_2(y_1, Rx_1)) &\leq F(H_2(Rx_0, Rx_1)) \\ &\leq F(M(x_0, y_1)) - \tau \\ &\leq F(\sigma(x_0, x_1)) - \tau \end{aligned} \tag{4.33}$$

bulunur. (F4) özelliğinden

$$F(D_2(y_1, Rx_1)) = \inf_{y \in Rx_1} F(\rho(y_1, y)) \leq F(\sigma(x_0, x_1)) - \tau \tag{4.34}$$

yazılır. (4.34) dan

$$F(\rho(y_1, y_2)) \leq F(\sigma(x_0, x_1)) - \tau. \tag{4.35}$$

olacak biçimde bir $y_2 \in Rx_1$ vardır.

Benzer biçimde $D_1(x_1, Gy_2) = 0$ ise $x_1 \in Gy_2$ bulunur.

Dolayısıyla $x_1 \in Gy_2 \subset GRx_1$ ve $y_2 \in Rx_1 \subset RGy_2$ elde edilir. Bu ise $x_1$ ve $y_2$ in sırasıyla $GR$ ve $RG$ dönüşümlerinin sabit noktası olduğunu gösterir.

Şimdi $D_1(x_1, Gy_2) > 0$ olsun. $D_1(x_1, Gy_2) \leq H_1(Gy_1, Gy_2)$ olup (F1) den

$$\begin{aligned} F(D_1(x_1, Gy_2)) &\leq F(H_1(Gy_1, Gy_2)) \\ &\leq F(M(x_1, y_1)) - \tau \\ &\leq F(\rho(y_1, y_2)) - \tau \end{aligned} \tag{4.36}$$

bulunur. (F4) özelliğinden

$$F(D_1(x_1, Gy_2)) = \inf_{x \in Gy_2} F(\sigma(x_1, x)) \leq F(\rho(y_1, y_2)) - \tau \tag{4.37}$$

yazılır. (4.37) den

$$F(\sigma(x_1, x_2) \leq F(\rho(y_1, y_2)) - \tau. \tag{4.38}$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Gy_2$ vardır.

Genelliği kaybetmeksizin her $n \in \mathbb{N}$ için (4.35) ve (4.38) eşitsizlikleri düşünülerek

$$\begin{aligned} F(\sigma(x_n, x_{n+1})) &\leq F(\rho(y_n, y_{n+1})) - \tau \\ &\leq F(\sigma(x_{n-1}, x_n)) - 2\tau \\ &\vdots \\ &\leq F(\rho(y_1, y_2)) - (2n-1)\tau \\ &\leq F(\sigma(x_0, x_1)) - 2n\tau. \end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınıp (F2) özelliği kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_{n+1}) = 0$$

elde edilir.

Şimdi $n = 0, 1, ...$ için $\alpha_n = \sigma(x_n, x_{n+1})$ olsun. (F3) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^k F(\alpha_n) = 0$$

olacak biçimde bir $k \in (0, 1)$ vardır. (4.39) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n^k F(\alpha_n) - \alpha_n^k F(\alpha_0) \leq -2\alpha_n^k n\tau \leq 0. \tag{4.40}$$

eşitsizliği sağlanır. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n^k = 0 \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.41) den her $n > n_1$ için $n\alpha_n^k \leq 1$ olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ve

$$\alpha_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}. \tag{4.42}$$

elde edilir.

Şimdi $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $m > n > n_0$ olacak biçimde $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. (4.42) eşitsizliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\sigma(x_n, x_m) &\leq \sum_{t=n}^{m-1} \sigma(x_t, x_{t+1}) \\ &= \sum_{t=n}^{m-1} \alpha_t \\ &\leq \sum_{t=n}^{m-1} \frac{1}{t^{\frac{1}{k}}}.\end{aligned}$$

bulunur. $\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{k}}}$ serisinin yakınsaklığında $\{x_n\}$ dizisi $(V, \sigma)$ uzayında bir Cauchy dizisi olarak bulunur. Benzer işlemler yapılarak $\{y_n\}$ dizisinin $(U, \rho)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu bulunur. $(V, \sigma)$ ve $(U, \rho)$ tam olduklarından $n \to \infty$ için $x_n \to z$ ve $y_n \to w$ olacak biçimde bir $z \in V$ ve $w \in U$ vardır.

$R$ ve $G$ dönüşümleri arasındaki ilişkiyi ispatlamak için kabul edelim ki $R$ ve $G$ üstten yarısürekli dönüşümler olsun. Bu durumda $x_n \in Gy_n$, $y_{n+1} \in Rx_n$, $x_n \to z$ ve $y_n \to w$ olup $z \in Gw$ ve $w \in Rz$ bulunur.

Şimdi $F$ sürekli ve $z \notin Gw$ veya $w \notin Rz$ olsun. Eğer $z \notin Gw$ ise bu durumda $n_0 > n$ için $D_1(Gw, x_{n+1}) > 0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla (4.31) eşitsizliği ve (F1) özelliğinden

$$\begin{aligned} F(D_1(Gw, x_{n+1})) &\leq F(H_1(Gw, Gy_{n+1})) \\ &\leq F(M_1(x_n, w)) - \tau \\ &\leq F(\max\{D_1(x_n, Gw), D_1(Gy_{n+1}, x_n), \rho(y_{n+1}, w)\}) - \tau \\ &\leq F(\max\{D_1(x_n, Gw), \sigma(x_n, x_{n+1}), \rho(w, y_{n+1})\}) - \tau \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınıp $F$ fonksiyonunun sürekliliği kullanılırsa

$$F(D_1(Gw, z)) \leq F(D_1(z, Gw)) - \tau$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $z \in Gw$ olmalıdır. Diğer taraftan eğer $w \notin Rz$ ise benzer çelişki elde edilerek $w \in Rz$ bulunur.
Tüm bu bilgiler ışığında $z \in Gw \subseteq GRz$ ve $w \in Rz \subseteq RGw$ olup $z$ ve $w$ sırasıyla $GR$ ve $RG$ dönüşümlerinin birer sabit noktası olduğu bulunur.

■

**Uyarı 4.2** $F(\alpha) = \ln \alpha$ alınarak her küme değerli ilişkili büzülmenin bir küme değerli ilişkili $F-$büzülme olduğu söylenebilir.

**Sonuç 4.3** $(V, \sigma)$ tam metrik uzay ve $R : V \to K(V)$ verilsin. Her $x,\ y \in V$ ve $r \in Rx$ için

$$H(Ry, Rr) > 0 \Longrightarrow \tau + F(H(Ry, Rr)) \leq F(M(x, y))$$

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Burada $F \in \mathcal{F}$, $\tau > 0$ ve

$$M(x, y) = \max\{D(x, Ry), D(x, Rr), \sigma(y, r)\}$$

dır. Eğer $R$ dönüşümü üstten yarısürekli veya $F$ sürekli ise, $R^2$ dönüşümü $V$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

**Sonuç 4.4** $(V, \sigma)$ bir tam metrik uzay olsun. $H(Ry, Rr) > 0$ koşulunun olması durumunda $R : V \to CB(V)$ dönüşümü her $x$, $y \in V$ ve $r \in Rx$ için

$$\tau + F(H(Ry, Rr)) \leq F(M(x, y))$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $F \in \mathcal{F}_*$, $\tau > 0$ ve

$$M(x, y) = \max\{D(x, Ry), D(x, Rr), \sigma(y, r)\}$$

dır. Eğer $R$ dönüşümü üstten yarısürekli veya $F$ sürekli ise, $R^2$ dönüşümü $V$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

# 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında literatürdeki bazı sabit nokta çalışmaları gözönüne alınarak orjinal sonuçlar elde edilmiştir. Öncelikle tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı tek değerli ilişkili dönüşümlerin Wardowski'nin tekniği ile yeni sonuçları doğurduğu gösterilmiştir. Bir ilişkili dönüşümün F-büzülme altında bir genelleştirilmesi elde edilip Banach sabit nokta teorisi farklı bir açıdan ele alınmış, iterasyon dizileri ise iki farklı uzay üzerinde tanımlanabilmiştir. Elde edilen sonuçların daha önce literatüre kazandırılan bir ilişkili sabit nokta teoreminin genelleştirilmesi olduğu verilen örneklerle gösterilmiştir. Tek değerli sabit nokta çalışmalarının yanı sıra Nadler'in çalışmaları göz önüne alınarak küme değerli ilişkili dönüşümler tanımlanmıştır. Dönüşümlerin birbiri arasındaki ilişki, sabit noktalarının varlığı ve tekliği konuları hem tek değerli ilişkili sabit nokta teoreminde hem de küme değerli ilişkili sabit nokta teoremlerinde ele alınmış ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, literatürdeki sabit nokta teori çalışmalarına farkı bir bakış açısı sunarak bu çalışmaların kullanım alanını genişletmesi sebebiyle büyük önem arz etmektedir.

## KAYNAKLAR


Aliouche, A., Fisher, B., 2005. *A related fixed point theorem for two pairs of mappings on two complete metric spaces.* Hacet. J. Math. Stat., 34, 39-45.

Altun, I., Durmaz, G., Mınak, G., Romaguera, S., 2016. *Multivalued almost F-contractions on complete metric spaces.* Filomat 30(2), 441-448.

Altun, I., Mınak, G., Dağ, H., 2015. *Multivalued F-contractions on complete metric spaces.* J. Nonlinear Convex Anal., 16(4), 659-666.

Banach, S. 1922. *Sur les operations dans les ensemles abstraits et laur application aux equations itegrals.* Fundam. Math., 3, 133-181.

Berinde, V. 2007. *Iterative approximation of fixed points.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Ćirić, Lj. B. 1974. *A generalization of Banach's contraction principle.* Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.

Feng, Y. and Liu, S. 2006. *Fixed point theorems for multivalued contractive mappings and Caristi type mappings.* J. Math. Anal. Appl., 317 (1), 103-112.

Fisher, B., 1981. *Fixed points on two metric spaces.* Glas. Math. Ser. III 16 (36), 333-337.

Fisher, B., 1981. *Set valued mappings on metric spaces.* Fundamenta Mathematicae vol. 112 no:2, 141-145.

Fisher, B., 1982. *Related fixed points on two metric spaces.* Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10, 17-26.

Fisher, B., Türkoğlu, D., 2000. *Related fixed points for set valued mappings on two metric spaces.* Internat. J. Math. & Math. Sci. vol. 23 No. 3 205-210.

Hamaizia, T., Aliouche, A., 2013. *Related fixed point on two metric spaces.* Palestine Journal of Mathematics vol. 2 (1) 100-103.

Imdad, M., Gubran, R., Arif, M., Gopal, D., 2017. *An observation on $\alpha-$type F-contractions and some ordered -theoretic fixed point results.* Math. Sci. 11(3), 247-255.

Jain, R.K., Sahu, H. K., Fisher, B., 1996. *Related fixed point theorems for three metric spaces.* Novi Sad J. Math. 26 (1), 11-17.

Klim, D., Wardowski D., 2007. *Fixed point theorems for set valued contractions in complete metric spaces.* J. Math. Anal. Appl., 334 (1), 132-139.

Mınak, G., Helvacı, A. and Altun, I., 2014. *Ciric type generalized $F$-contractions on complete metric spaces and fixed point results.* Filomat 28 (6), 1143-1151.

Mınak, G. Olgun, M. and Altun, I., 2015. *A new approach to fixed point theorems for multivalued contractive maps.* Carpathian Journal of Mathematics 31 (2), 241-248.

Nadler, S., B. 1969. *Multivalued contraction mappings.* Pacific J. Math., 30, 475-488.

Namdeo, R.K., Gupta, D. and Fisher, B., 1994. *A related fixed point theorem on two metric spaces.* Punjab University Journal of Mathematics 27, 109-112.

Namdeo, R.K., Jain, S. and Fisher, B., 2013. *A related fixed point theorem for two pairs of mappings on two complete metric spaces.* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 32, 7-11.

Namdeo, R.K., Tiwari, N.K., Fisher, B., Taş, K., 1998. *Related fixed point theorems on two complete and compact metric spaces.* Internat. J. Math. & Math Sci. vol. 21 No:3 559-564.

Olgun, M. Mınak, G. and Altun, I., 2016. *A new approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorems.* Journal of Nonlinear Convex Analysis 17 (3), 579-587.

Piri, H. and Kumam, P., 2014. *Some fixed point theorems concerning $F$-contraction in complete metric spaces.* Fixed Point Theory and Applications 2014, 210.

Reich, S. 1971. *Kannan's fixed point theorem.* Boll. Un. Math. Ital., 4,(4),1-11.

Schauder, J. 1930. *Der Fixpunktsatz in Funktionenräumen.* Studia Math., 2, 171-182.

Sgrio, M. and Vetro, C., 2013. *Multi-valued $F$-contractions and the solution of certain functional and integral equations.* Filomat 27 (7), 1259-1268.

Singh, D., Joshi, V., Imdad, M. and Kumam, P., 2017. *Fixed point theorems via generalized $F$-contractions with applications to functional equations occurring in dynamic programming*, Journal of Fixed Point Theory and Applications 19 (2), 1453-1479.

Wardowski, D., 2012. *Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces.* Fixed Point Theory and Applications 2012, 94.

Wardowski, D and Dung, N.V., 2014. *Fixed points of $F$-weak contractions on complete metric spaces.* Demonstratio Mathematica 47 (1), 146-155, 2014.

Vetro, F., 2016. *$F$-contractions of Hardy-Rrogers type and application to multistage decision processes.* Nonlinear Analysis Modellling and Control 21 (4), 531-546.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Özge BİÇER ÖDEMİŞ

**Doğum Yeri** : Keçiören

**Doğum Tarihi** : 28/03/1989

**Medeni Hali** : Evli

**Yabancı Dili** : İngilizce

**Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):**

**Lise** : Güzelbahçe 60. Yıl Anadolu Lisesi (2007)

**Lisans** : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü (2007-2012)

**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (2012-2014)

**Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:** İstanbul Medipol Üniversitesi (2017-halen)

**Yayınları:** **Olgun, M., Biçer, Ö., Alyıldız, T., Altun, I.**, A related fixed point theorem for F- contractions on two metric spaces, Hacet. J. Math. Stat. Vol. 48 (1) (2019), 150-156.

**Olgun, M., Biçer, Ö., Alyıldız, T., Altun, I.,** Some related fixed point theorems for multivalued mappings on two metric spaces (submitted).