ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FUZZY TOPOLOJİK VE CEBİRSEL YAPILARA FUNKTORYAL GEÇİŞ

Deniz Pınar SUNAOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

TEZ ONAYI

Deniz Pınar SUNAOĞLU tarafından hazırlanan "**Fuzzy Topolojik ve Cebirsel Yapılara Funktoryal Geçiş**" adlı tez çalışması 13/02/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Erdal GÜNER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Erdal GÜNER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Hakan EFE
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

13/02/2018

Deniz Pınar SUNAOĞLU

ÖZET

Doktora Tezi

FUZZY TOPOLOJİK VE CEBİRSEL YAPILARA FUNKTORYAL GEÇİŞ

Deniz Pınar SUNAOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde kategori ve funktor kavramları ele alınmış, ve bu kavramlara ilişkin tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde fuzzy kümeler ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde bir fuzzy topolojik uzayın esas grubu oluşturulmuştur. Fuzzy noktalı topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli fonksiyonlar kategorisinden, fuzzy esas gruplar ve grup homomorfizmleri kategorisine bir funktorun varlığı incelenmiştir.

Beşinci bölümde fuzzy eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar üzerinde fuzzy esas grupların demeti oluşturularak bu demet üzerinde fuzzy yükseltme teoremi verilmiştir.

Altıncı bölümde fuzzy nomlu lineer uzaylar incelenmiştir. Bu uzaylardan yola çıkarak bulunan kategoriler arasındaki funktoryal geçişler ele alınmıştır.

Yedinci bölümde ise genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Şubat 2018, 67 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kategori, funktor, fuzzy esas grup, fuzzy eğrisel iritbatlı toplojik uzay, fuzzy norm, fuzzy süreklilik, fuzzy lineer operatör

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

FUNCTORIAL PASSING TO FUZZY TOPOLOGICAL AND ALGEBRAIC STRUCTURES

Deniz Pınar SUNAOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erdal GÜNER

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is dedicated to introduction.

In the second chapter, the concepts of category and functor are emphasized, and definitions, theorems and examples related to these concepts are given.

In the third chapter, fuzzy sets and some properties are examined.

In the fourth chapter, the fundamental group of a fuzzy topological space has been formed. The existence of a functor on the category of fuzzy fundamental groups and group homomorphisms has been examined from the category of fuzzy pointed topological spaces and fuzzy continuous functions.

In the fifth chapter, fuzzy lifting theorem is given on this sheaf by forming a sheaf of fuzzy fundamental groups on fuzzy path connected topological spaces.

In the sixth chapter, fuzzy normed linear spaces are examined. Functorial transitions between the categories found by going out of these spaces are discussed.

In the seventh chapter, a general evaluation is made.

February 2018, 67 pages

Key Words: Category, functor, fuzzy fundamental group, fuzzy path connected topological space, fuzzy norm, fuzzy continuity, fuzzy linear operator

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, beni önerileriyle yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erdal GÜNER (Ankara Üniversitesi Matemetik Anabilim Dalı)'e, TİK üyelerim Sayın Prof. Dr. A.Duran TÜRKOĞLU (Gazi üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)' na ve Sayın Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER (Ankara Üniversitesi Matemetik Anabilim Dalı)'e, hayatımın her aşamasında bana destek olan, maddi manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan sevgili aileme, sonsuz sabrı ve sağduyusu için canım eşim Mustafa Erhan SUNAOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Deniz Pınar SUNAOĞLU
Ankara, Şubat 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

C	Kategori
$ob(C)$	C kategorisinin objeleri kümesi
$[A,B]_C$	C kategorisindeki $f:A\rightarrow B$ morfizmler
$MorC := \bigcup\limits_{(A,B)\in ob(C)\times ob(C)} [A,B]_C$	C kategorisinin morfizmleri kümesi
$\underline{Set}$	Kümeler kategorisi
C^*	Dual kategori
I^X	X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi
$p_{x_0}^{\lambda}$	Fuzzy nokta
τ_A	A üzerinde indirgenmiş fuzzy topoloji
Π_1	Fuzzy esas grup funktoru
$*$	Sürekli t-norm
$\|.\|$	Norm
N	Fuzzy norm
f_A	A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
$\Omega(X,p_\lambda)$	Kapalı fuzzy eğrilerin kümesi
$\Pi_1(X,p_\lambda)$	Fuzzy eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi
(X,p_λ)	Fuzzy noktalı topolojik uzay
(H,ψ)	Esas grupların fuzzy demeti

1. GİRİŞ

Bir kategori birbirileriyle ilişkili matematiksel nesneler sınıfının (örneğin grupların) özünü yakalamaya çalışır. Geleneksel olarak yapıldığı gibi tekil nesneler (gruplar) üzerine yoğunlaşmak yerine, bu nesneler arasındaki yapı muhafaza edici gönderimler (yani morfizimler) üzerine yoğunlaşır. Gruplar örneğinde bu gönderimler grup homomorfizmleridir. Bu şekilde farklı kategorileri funktorlar aracılığıyla ilişkilendirmek mümkündür. Funktorlar, bir kategorinin her nesnesini diğer kategorinin bir nesnesiyle ve bir kategorideki morfizmi diğerindeki bir morfizmle ilişkilendiren fonksiyonların bir genelleştirmesidir. Genellikle topolojik uzayın temel grubunu; yani X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere x_0 noktasındaki tüm kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi $\Pi(X, x_0)$ grubunu, oluşturan "doğal yapılar" funktorlar şeklinde ifade edilir. Bunun ötesinde, bu tip yapılar "doğal bir bağıntıya" sahiptir ve bir funktoru diğerine ilişkilendirme yolu olan doğal transformasyon konseptine olanak tanır.

Kategoriler, funktorlar ve doğal transformasyonlar Samuel Eilenberg ve Saunders MacLane tarafından 1945 yılında ortaya atılmıştır. Başlangıçta bu kavramlar, topolojide, özellikle cebirsel topolojide, geometrik ve sezgisel bir kavram olan homolojiden aksiyomatik bir yaklaşım olan homoloji teorisine geçişte önemli bir rol oynar. Başkalarının yanı sıra Ulam tarafından (ya da kendisine atfen), benzer düşüncelerin 1930'ların sonunda Polonya okulunda ortaya çıktığı iddia edilmiştir. Eilenberg/MacLane, kendi ifadelerine göre, bu kuramı geliştirirken doğal transformasyonları anlama çabasındaydılar. Bunu yapabilmek için funktorlar tanımlamak, funktorları tanımlamak için ise kategoriler tanımlamak gerekiyordu. Günümüzde bu kuram, matematiğin tüm alanlarında uygulanmaktadır. Burada inceleyeceğimiz kısım fuzzy teori ile ilgilidir.

Günlük hayatta rastgele kullandığımız birçok terim genellikle bulanık bir yapıya sahiptir. Bir şeyi tanımlarken, bir olayı açıklarken, komut verirken ve daha birçok durumda kullandığımız sözel veya sayısal ifadeler bulanıklık içerir. Bu terimlere örnek olarak , yaşlı, genç, uzun, kısa, sıcak, soğuk, ılık gibi daha pek çok sözel terim gösterilebilir. Bizler bir olayı anlatıp, bir durum karşısında karar verirken bu tür kesinlik ifade etmeyen terimler kullanırız. Kişinin yaş durumuna göre onun yaşlı, orta yaşlı, genç, çok yaşlı veya çok genç olduğunu söyleriz. Bütün bunlar insan beyninin belirsiz ve kesinlik içermeyen durumlarda nasıl davrandığına ve olayları nasıl değerlendirip, tanımlayıp, komut verdiğine dair birer örnektir. Bulanık mantığın ve bu mantık kurallarını kullanan bulanık küme teorisinin Lotfi A. Zadeh tarafından geliştirilip 1965 tarihli orijinal makalesinde yayınlanmasından sonra belirsizlik içeren sistemlerin incelenmesi yeni bir boyut kazanmıştır. Zadeh'e göre gerçek dünyada bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiler kesin olarak tanımlanamamaktadır. 1965 yılına kadar matematikte incelenen konuların önceden belirlenen kurallara kesin olarak uyup uymadıgı araştırılmış, bu incelemelerde her zaman bir kesinlik aranmıştır. Aristo mantığı üzerinde temellenen klasik küme teorisi, verilen bir alana ait tüm bireyleri incelenen özelliğe göre ikiye ayırır. Bu teoriye göre bir önerme belirlenen kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlıştır. Ancak yaşadığımız dünyada bir çok olay vardır ki kesin olarak doğru ya da yanlış olduğunu ifade etmek zordur. Bu sebeple klasik küme teorisi uygulamada esnek olmamaktadır. Bu problem, klasik mantığın kabulü olan var-yok çiftinin ara değerlerini tanımlamakla giderilebilir. Fuzzy küme bu karmaşıklığı azaltmak için doğru ile yanlışı birbirinden ayıran kesinliği ortadan kaldırmaktadır.

Fuzzy küme teorisi, klasik küme teorisine alternatif olarak ortaya atılmıştır. Zadeh'e göre gerçek dünyada bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiler kesin olarak tanımlanamamaktadır, çünkü herhangi bir elemanın kümeye ait olması durumu 1 ve ait olmaması durumu ise 0 değeriyle belirtilmektedir. Zadeh, bu fonksiyonu, elemanların kümeye ait olabilme durumuyla orantılı olarak genişletmiş, değer kümesini $[0, 1]$ kapalı aralığı olarak almış ve elemanların kümeye ait olma derecelerini bu kapalı aralığa yerleştirmiştir. Böylece elemanlar aldıkları üyelik dereceleriyle kümeye ait olurlar. Bir elemanın üyelik derecesinin 1'e daha yakın olması kümeye daha fazla ait olması anlamına gelir. Bu şekilde genişletilmiş fonksiyon ile karakterize edilen kümeye fuzzy küme denmiştir. Tam üye olma ve üye olmama durumu fuzzy kümede sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bu yüzden klasik küme kavramı fuzzy küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak görülebilir.

Bu tezde ilk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde kategori ve funktor kavramları üzerinde durulmuş, ve bu kavramlara ilişkin tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy kümeler ve bazı özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde bir fuzzy topolojik uzayın esas grubu oluşturularak, nesneleri fuzzy noktalı topolojik uzaylar ve morfizmleri fuzzy sürekli fonksiyonlar olan kategoriden, nesneleri fuzzy esas gruplar ve morfizmleri grup homomorfizmleri olan kategoriye bir funktorun varlığı incelenmiştir. Beşinci bölümde fuzzy eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar üzerinde fuzzy esas grupların demeti oluşturularak bu demet üzerinde fuzzy yükseltme teoremi tezde orjinal bir çalışma olarak verilmiştir. Altıncı bölümde ise fuzzy nomlu lineer uzaylar öncelikle incelenmiştir. Bu uzaylardan yola çıkarak bulunan kategoriler arasında yeni funktoryal geçişler elde edilmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1940 lardan sonra Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından temelleri atılan ve kısa sürede matematiğin diğer birçok dalında kullanım alanı bulan kategori teorisi, aynı tip objeler ve bunlar arasındaki dönüşümlerle ilgilidir.

Biraz daha ayrıntılı olarak, cümleler arasındaki fonksiyonların bileşkesinin birleşme özelliğine sahip olduğunu ve her bir cümle için bir birim fonksiyonu bulunduğunu biliyoruz. Burada daha genel olarak cümleler yerine objeler ve fonksiyonlar yerine morfizmler alındığında kategori kavramı elde edilmiş olur.

Önce kategori ve funktorların en genel tanımlarını verelim.

2.1 Kategorik Kavramlar

Her matematiksel disiplin için, öncelikle objeler ve sonrasında o objeleri tarif edebilmek için uygun dönüşümler tanımlarız. Bu yapı "kategori kavram" ile açıklanır.

Tanım 2.1 Bir C kategorisi şu şekilde oluşmaktadır:
1- Objelerin bir sınıfı $ob(C)$,
2- Objelerin her (A, B) çifti için ikili ayrık kümelerinin sınıfı $[A, B]_C$, ($[A, B]_C$ nin üyelerine A dan B ye morfizmler denir.)
3- Morfizmlerin bir kompozisyonu, yani; objelerin her (A, B, C) üçlüsü için

$$\begin{array}{ccc} [A,B]_C \times [B,C]_C & \to & [A,C]_C \\ (f,g) & \to & g \circ f \end{array}$$

dönüşümü vardır.
Bu dönüşüm aşağıdaki şartları sağlar.
$\mathbf{cat}_1$) (birleşme özelliği)
Eğer $f \in [A, B]_C$, $g \in [B, C]_C$ ve $h \in [C, D]_C$ ise $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dir.
$\mathbf{cat}_2$) (Birim eleman özelliği)
Her $A \in ob(C)$ için $B, C \in ob(C)$, $f \in [A, B]_C$ ve $g \in [C, A]_C$ olmak üzere $f \circ 1_A = f$ ve $1_A \circ g = g$ olacak biçimde $1_A \in [A, A]_C$ birimi (morfizmi) vardır (Preuss 1988).

Burada morfizmler fonksiyonlar ve morfizlerin bileşkesi ise fonksiyonların bileşkesi gibi yazılmasına rağmen bir kategorideki morfizmlerin her zaman bir fonksiyon olmadığına dikkat edelim.

Uyarı 2.1 **1-** $f \in [A, B]_C$ yerine $f : A \to B$ veya $A \xrightarrow{f} B$ yazarız. A ya f nin tanım kümesi, B ye değer kümesi denir.
2- a) 1_A birimi A tarafından tek olarak üretilir. Çünkü; eğer verilen özellikleri sağlayan bir 1_A^* morfizmi varsa $\mathbf{cat}_2$) den $1_A^* = 1_A \circ 1_A^* = 1_A$ elde edilir. Bu da 1_A nın tek olduğunu gösterir. Bu nedenle 1_A ya A nın birim morfizmi adı verilir.
b) Eğer $A \neq A'$ olacak şekilde $A, A' \in C$ ise, $1_A \neq 1_{A'}$ dür. Çünkü $[A, A]_C \cap [A', A']_C = \emptyset$ dir.
3- C nin bütün morfizmlerinin sınıfı

$$MorC = \bigcup_{(A,B) \in ob(C) \times ob(C)} [A, B]_C$$

ile gösterilir. Elemanlarına C-morfizmler denir.

Örnek 2.1 **1-** Kümeler ve dönüşümlerin kategorisi $\underline{Set}$ ile gösterilir. $ob(\underline{Set})$ bütün kümelerin sınıfı, ve $\forall A, B \in ob(\underline{Set})$ için $[A, B]_{\underline{Set}}$ A dan B ye dönüşümlerin kümesidir. Morfizmlerin bileşkesi dönüşümlerin bilinen bileşkesidir.
2- R-modüller ve R-lineer dönüşümlerin kategorisi $\underline{Mod_R}$ ile gösterilir. $ob(\underline{Mod_R})$ bütün R-modüllerin sınıfı ve $Mor\ \underline{Mod_R}$ bütün R-lineer dönüşümlerin sınıfıdır. Morfizmlerin bileşkesi ise dönüşümlerin bilinen bileşkesidir.
3- Topolojik uzaylar ve sürekli dönüşümlerin kategorisi $\underline{Top}$ ile gösterilir. Bu kategorinin objeleri topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve bileşke işlemi ise fonksiyonların bilinen bileşkesidir. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan böyle bir bileşke işlemi tanımlıdır.
4- Objeri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri ve bileşke işlemi ise grup homomorfizmlerinin bileşkesi olarak alındığında bir kategori elde edilir. Bu kategori $\underline{Grup}$ ile gösterilir.
5- Objeri halkalar, morfizmleri halka homomorfizmleri ve bileşke işlem ise halka homomorfizmlerinin bileşkesi olarak alındığında bir kategori elde edilir. Bu kategori $\underline{Ring}$ ile gösterilir.

6- Objeri topolojik gruplar, morfizmleri sürekli grup homomorfizmleri ve bileşke işlem ise sürekli grup homomorfizmlerinin bileşkesi olarak alındığında bir diğer kategori elde edilir. Bu kategori $\underline{TopGrup}$ ile gösterilir.
7- Bir F cismi üzerindeki vektör uzayların $\underline{Vekt}_F$ kategorisi elde edilebilir. Bu kategorinin objeleri vektör uzayları ve morfizmleri ise vektör uzayları arasındaki lineer dönüşümlerdir.

Tanım 2.2 C bir kategori olsun. C^* dual kategorisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:
(1) $ob(C^*) = ob(C)$
(2) $\forall A, B \in ob(C)$ için $[A,B]_{C^*} = [B,A]_C$ olmak üzere $f \in [B,A]_C$ ise $f^* \in [A,B]_{C^*}$
(3) C^* daki $\alpha \circ \beta$ kompozisyonu, C deki $\beta \circ \alpha$ kompozisyonu ile tanımlıdır.

Uyarı 2.2 $(C^*)^* = C$ dır.

Tanım 2.3 C ve S iki kategori olmak üzere;
i) $ob(S) \subseteq ob(C)$
ii) $\forall A, B \in ob(S)$ için $[A,B]_S \subseteq [A,B]_C$
iii) S kategorisindeki morfizmlerin kısmi bileşke işlemi, C kategorisindeki morfizmlerin kısmi bileşke işlemi ile aynıdır
iv) $\forall\ A \in ob(S)$ için S deki 1_A birim morfizmi, C deki birim morfizm ile aynıdır
şartları sağlanıyor ise, S kategorisine C kategorisinin bir alt kategorisi denir.

Tanım 2.4 S kategorisi C kategorisinin bir alt kategorisi olsun. Eğer $\forall A, B \in ob(S)$ obje çifti için $[A,B]_S = [A,B]_C$ ise S kategorisine dolu alt kategori, $ob(S) = ob(C)$ ise S ye geniş alt kategori denir.

Örnek 2.2 **1)** Her kategori kendisinin dolu bir alt kategorisidir.
2) Sonlu olan cümlelerin kategorisi $\underline{Set}$ kategorisinin dolu bir alt kategorisidir.
3) Abel grupların kategorisi, $\underline{Grup}$ kategorisinin dolu bir alt kategorisidir.
4) $\underline{Ring}_1$ birimli halkaların kategorisi, $\underline{Ring}$ kategorisinin dolu bir alt kategorisidir.

Tanım 2.5 Bir C kategorisinde bir $f : A \to B$ morfizmi verilsin. Eğer f morfizmi sağdan sadeleşme özelliğine sahip ise yani $g \circ f = h \circ f$ olacak şekilde g ve h morfizmleri için $g = h$ oluyorsa, f morfizmine bir epimorfizm denir.

Tanım 2.6 Bir C kategorisinde bir $f : A \to B$ morfizmi verilsin. Eğer f morfizmi soldan sadeleşme özelliğine sahip ise yani $f \circ g = f \circ h$ olacak şekilde g ve h morfizmleri için $g = h$ oluyorsa, f morfizmine bir monomorfizm denir.

Tanım 2.7 Monomorfizm ve epimorfizm olan morfizme bimorfizm denir.

Tanım 2.8 C bir kategori ve $f : A \to B$ de bu kategoride bir morfizm olsun. Eğer $g \circ f = 1_A$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ varsa f ye bir kesit denir.

Önerme 2.1 Bir C kategorisinde kesit olan bir morfizm monomorfizmdir.

İspat. $f : A \to B$ morfizmi bir kesit ise $g \circ f = 1_A$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ morfizmi vardır. Şimdi $f \circ h = f \circ k$ olsun. Buradan

$$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) \Rightarrow (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k \Rightarrow h = k$$

dır. O halde $f : A \to B$ morfizmi soldan sadeleştirmeli, yani bir monomorfizmdir. ■

Tanım 2.9 C bir kategori ve $f : A \to B$ de bu kategoride bir morfizm olsun. Eğer $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ varsa f ye bir dual kesit denir.

Önerme 2.2 Bir C kategorisinde dual kesit olan bir morfizm epimorfizmdir.

İspat. $f : A \to B$ morfizmi bir dual kesit ise $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ morfizmi vardır. Şimdi $h \circ f = k \circ f$ olsun. Buradan

$$(h \circ f) \circ g = (k \circ f) \circ g \Rightarrow h \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ g) \Rightarrow h = k$$

O halde $f : A \to B$ morfizmi bir epimorfizmdir. ■

Tanım 2.10 C bir kategori ve $(A, B) \in ob(C) \times ob(C)$ olacak biçimde $f \in [A, B]_C$ olsun. Eğer $g \circ f = 1_A$ ve $f \circ g = 1_B$ olacak biçimde $g \in [B, A]_C$ varsa, f e bir izomorfizm denir. Bir başka deyişle kesit ve dual kesit olan bir morfizme izomorfizm denir. Eğer $f \in [A, B]_C$ bir izomorfizm ise bu durumda A ve B ye izomorfiktirler denir ve $A \cong B$ ile gösterilir (Preuss 1988).

Uyarı 2.3 **1-** Yukarıda geçen g, f tarafından tek türlü üretilir (Eğer $g' \circ f = 1_A$ ve $f \circ g' = 1_B$ olacak biçimde $g' \in [B, A]_C$ ise, $g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = 1_A \circ g' = g'$ dür) ve f^{-1} ile gösterilir.
2- $\underline{Top}$ kategorisindeki bir izomorfizm bir homeomorfizm olduğunda, $\underline{Set}$ kategorisinde bir izomorfizm bijektif (1-1, örten) bir dönüşümdür.
3- Bütün C kategorileri için, $1_X : X \to X$ birimi $\forall X \in ob(C)$ için bir izomorfizmdir. Eğer $f : X \to Y$, C de bir izomorfizm ise, $f^{-1} : Y \to X$ de C de bir izomorfizmdir. Ek olarak, C deki iki izomorfizmin kompozisyonu da yine bir izomorfizmdir. Böylece $\cong \subset ob(C) \times ob(C)$, $ob(C)$ de bir denklik (eşdeğerlik) bağıntısıdır, denklik sınıflarına izomorfizm sınıfları denir (Preuss 1988).

2.2 Funktorlar ve Özellikleri

Bu bölümde kategorileri bir yapısal sınıf olarak ele alıp, bunlar arasında ”yapı koruyan fonksiyonları (funktorları)” tanımlayacağız. Daha sonra da funktorların bazı özelliklerini vereceğiz.

Tanım 2.11 C ve D birer kategori olmak üzere, C nin her bir A objesini D nin bir $F(A)$ objesine, C nin her bir $f : A \to B$ morfizmini ise D deki bir $F(f) : F(A) \to F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir F dönüşümüne C den D ye bir funktor veya kovaryant funktor denir. $F : C \to D$ ile gösterilir.
F_1) $\forall A \in ob(C)$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır.
F_2) $f, g \in MorC$ olmak üzere $f \circ g$ de C de tanımlı ise $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ dir (Mucuk 2010).

Tanım 2.12 C ve D birer kategori olmak üzere, C nin her bir A objesini D nin bir $F(A)$ objesine, C nin her bir $f : A \to B$ morfizmini ise D deki bir $F(f) : F(B) \to F(A)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir F dönüşümüne C den D ye bir kontravaryant funktor denir.
F_1') $\forall A \in ob(C)$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır.
F_2') $f, g \in MorC$ olmak üzere $f \circ g$ de C de tanımlı ise $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ dir (Mucuk 2010).

Örnek 2.3 **1-** $I : C \to C$ birim funktoru objeleri ve morfizmleri aynen kendilerine resmeden kovaryant funktordur.
2- Sabit Funktorlar: C ve D herhangi kategoriler ve $X \in ob(D)$ olsun. Herhangi $A \in ob(C)$ ve $f \in MorC$ için, $F(A) = X$ ve $F(f) = 1_X$ olmak üzere $F : C \to D$ kovaryant ve kontravaryant funktordur.
3- Unutkan (alttayatan-underlying) Funktorlar: C objeleri (X, τ) biçiminde topolojik uzaylar ve morfizmleri $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ biçiminde sürekli fonksiyonlar olan

bir topolojik kategori, $\underline{Set}$ kümeler ve dönüşümlerin kategorisi ve $F : C \rightarrow \underline{Set}$, $F((X,\tau)) = X$ ve $F(f) = f$ olsun. Bu bir kovaryant funktordur.
Benzer olarak

$$\begin{aligned} F &: \underline{Grup} \rightarrow \underline{Set} \\ F &: \underline{TopGrup} \rightarrow \underline{Grup} \\ F &: \underline{TopGrup} \rightarrow \underline{Top} \\ F &: \underline{Ring} \rightarrow \underline{Abel} \end{aligned}$$

gibi unutkan funktorlar tanımlanabilir.
4- $F : C \rightarrow C^*$, $F(X) = X$ ve $F(f) = f^*$ ile tanımlı dualleştiren funktor bir kontravaryant funktordur.

Tanım 2.13 C ve D birer kategori, $F : C \rightarrow D$ bir funktor olsun.
1) Eğer $\forall A, B \in ob(C)$ ve $\forall f, g \in [A,B]_C \ni f, g : A \rightarrow B$ için $F(A) = F(B)$ olduğunda $A = B$ ve $F(f) = F(g)$ olduğunda $f = g$ ise F birebir bir funktordur denir.
2) Eğer,
a) $\forall A' \in ob(D)$ için öyle bir $A \in ob(C)$ vardır ki $A' = F(A)$,
b) $\forall A, B \in ob(C)$ ve $\forall f' \in MorD \ni f' : F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmi içn öyle bir $f \in MorC \ni f : A \rightarrow B$ var olduğunda $f' = F(f)$ oluyorsa, $F : C \rightarrow D$ örten bir funktordur denir.
3) Eğer $F : C \rightarrow D$ birebir ve örten bir funktor ise F funktoru bir izomorfizmdir ve C ile D kategorileri izomorftur denir.

Önerme 2.3 C ve D birer kategori, $F : C \rightarrow D$ bir funktor olsun. Eğer $f \in [A,B]_C$ bir izomorfizm ise $F(f) \in [F(A), F(B)]_D$ de bir izomorfizmdir.

İspat. Eğer $f \in [A,B]_C$ bir izomorfizm ise $g \circ f = 1_A$ ve $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde bir $g \in [B,A]_C$ morfizmi vardır. F funktor olduğundan

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = 1_{F(A)}$$

ve

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = 1_{F(B)}$$

dir. O halde $F(f) \in [F(A), F(B)]_D$ de bir izomorfizmdir. ■

Örnek 2.4 $\underline{Top}_*$ noktalı topolojik uzayların kategorisi olsun. Herbir (X, x) noktalı uzayını $\Pi_1(X, x)$ temel grubuna ve noktalı uzaylar arasındaki sürekli bir $f : (X, x) \to (Y, y)$ fonksiyonunu ise

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x) & \xrightarrow{\Pi_1 f} & \Pi_1(Y, y) \\ [\alpha] & \to & [f(\alpha)] \end{array}$$

ile tanımlanan bir grup homomorfizmine dönüştüren

$$\Pi_1 : \underline{Top}_* \to \underline{Grup}$$

bir funktordur. Eğer (X, x) ve (Y, y) noktalı uzayları homeomorf ise $\Pi_1(X, x)$ ve $\Pi_1(Y, y)$ grupları da izomorftur.

Örnek 2.5 X bir cümle olmak üzere X üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların sınıfı $C(X)$ olsun. $f, g \in C(X)$ için

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

ile tanımlanan işlemlere göre $C(X)$ bir halkadır. Buna göre her X cümlesini $C(X)$ halkasına ve her bir $f : X \to Y$ fonksiyonunu ise

$$\begin{array}{ccccc} C(f) & : & C(Y) & \to & C(X) \\ & & g & \to & gf \end{array}$$

şeklinde tanımlanan bir halka morfizmine dönüştüren

$$C : \underline{Set} \to \underline{Ring}_1$$

bir kontravariant funktordur. Benzer olarak

$$C : \underline{Set} \to \underline{Grup}$$

funktoru elde edilebilir.

Önerme 2.4 $F : C \to D$ ve $G : D \to E$ funktorları verilsin. Her bir $A \in ob(C)$ için $(GF)(A) = G(F(A))$ ve C deki her bir $f : A \to B$ morfizmi için $(GF)(f) = G(F(f))$ olarak tanımlanan funktorların bileşkesi $GF : C \to E$ de bir funktordur (Mucuk 2010).

Tanım 2.14 $F : C_1 \to C_2$ bir funktor olsun.
1) $\forall A, B \in C_1$ ve $\forall f : F(A) \to F(B)$ için $F(g) = f$ olacak şekilde en az bir $g : A \to B$ dönüşümü varsa F ye dolu (full) funktor denir.
2) $\forall A, B \in C_1$ ve $f, g : A \to B$ dönüşümleri için $F(f) = F(g)$ olduğunda $f = g$ oluyorsa F ye düzenli (faithful) funktor denir.

Tanım 2.15 Bir C kategorisindeki morfizmlerin bir

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

diyagramı verilsin. Eğer başlangıç ve bitişleri aynı olan bileşke morfizmleri eşit ise yani

$$\beta \circ f = g \circ \alpha$$

ise bu diyagram değişmelidir.

Tanım 2.16 $F : C \to D$ funktoru ve $A, B \in ob(C)$ olmak üzere bir $f : A \to B$ morfizmi verilsin. Eğer $F(f) : F(A) \to F(B)$ için sağlanan bir özellik f için de sağlanırsa, F funktoru bu özelliğini yansıtıyor denir.

Tanım 2.17 $F : C \to D$ funktoru ve $A, B \in ob(C)$ olmak üzere bir $f : A \to B$ morfizmi verilsin. Eğer f için sağlanan bir özellik $F(f) : F(A) \to F(B)$ için de sağlanırsa, F funktoru bu özelliğini koruyor denir.

Teorem 2.1 Düzenli olan bir $F : C \to D$ funktoru monomorfizm, epimorfizm ve değişmeli diyagram olma özelliklerini yansıtır.

İspat. $F(f) : F(A) \to F(B)$ bir monomorfizm olsun. F bir funktor olduğundan eğer $f \circ h = f \circ k$ ise $F(f) \circ F(h) = F(f) \circ F(k)$ dır. Burada $F(f)$ bir monomorfizm olduğundan $F(h) = F(k)$ ve F düzenli olduğundan $h = k$ dır.
Epimorfizm olması benzer şekilde ispatlanabilir.
Değişmeli diyagram özelliği için

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{F(f)}{\to} & F(B) \\ F(h)\downarrow & & \downarrow F(g) \\ F(B) & \overset{F(k)}{\to} & F(C) \end{array}$$

değişmeli diyagramı göz önüne alınsın. Buradan

$$\begin{aligned} F(g) \circ F(f) &= F(k) \circ F(h) \\ F(g \circ f) &= F(k \circ h) \end{aligned}$$

olup F funktoru düzenli olduğundan

$$g \circ f = k \circ h$$

elde edilir. ■

Teorem 2.2 Dolu ve düzenli olan bir $F : C \to D$ funktoru izomorfizm olma özelliğini yansıtır.

İspat. Bir $f : A \to B$ morfizmi için $F(f) : F(A) \to F(B)$ bir izomorfizm ise $\theta \circ F(f) = 1_{F(A)}$ ve $F(f) \circ \theta = 1_{F(B)}$ olacak şekilde bir $\theta : F(B) \to F(A)$ morfizmi vardır. Fakat F dolu olduğundan $F(g) = \theta$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ morfizmi vardır. Buradan

$$\begin{aligned} F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) = 1_{F(A)} = F(1_A) \\ F(f \circ g) &= F(f) \circ F(g) = 1_{F(B)} = F(1_B) \end{aligned}$$

olup F funktoru düzenli olduğundan $g \circ f = 1_A$ ve $f \circ g = 1_B$ dır.
O halde $f : A \to B$ bir izomorfizmdir. ■

Tanım 2.18 Bir C kategorisinden D kategorisine tanımlı iki funktor $F : C \to D$ ve $G : C \to D$ olsun.

(1) $\eta : ob(C) \to MorD$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere (F, η, G) üçlüsüne F den G ye bir doğal dönüşüm veya funktor morfizma denir.

(i) Her $A \in ob(C)$ için $\eta(A) : F(A) \to G(A)$ bir C-morfizmdir. $\eta(A)$, genellikle ηA şeklinde gösterilir.

(ii) C -morfizm olan her $A \xrightarrow{f} B$ için,

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{\eta A}{\to} & G(A) \\ F(f)\downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \overset{\eta B}{\to} & G(B) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

(2) Her $A \in ob(C)$ için ηA bir D izomorfizma ise (F, η, G) doğal dönüşümüne doğal izomorfizma denir.

Uyarı 2.4 Bir $F : C \to D$ funktoru için her bir $A \in ob(C)$ objesini $1_{F(A)} : F(A) \to F(A)$ birim morfizmine eşleyerek bir $F \to F$ doğal dönüşümü elde edilir. Bu birim dönüşüm $1_F : F \to F$ olarak yazılır.

Örnek 2.6 $U : \underline{Top} \to \underline{Set} \ni (X, \tau) \to X$ unutkan funktor ile $D : \underline{Set} \to \underline{Top} \ni X \to (X, P(X))$ funktoru verilsin. $\eta : UD \to 1_{\underline{Set}}$ ve $\sigma : DU \to 1_{\underline{Top}}$ doğal dönüşümleri vardır. Burada $1_{\underline{Set}}$ ve $1_{\underline{Top}}$ birim funktorlardır.

Uyarı 2.5 C ve D iki kategori olsun. Objeleri C den D ye funktorlar ve morfizmleri ise doğal dönüşümler olan bir kategori oluşturmak mümkündür. Burada $\eta : F \to G$ ve $\sigma : G \to H$ doğal dönüşümlerinin bileşkesi $\forall A \in ob(C)$ için $(\sigma\eta)(A) = \sigma(A)\eta(A)$ olarak tanımlanır. Bu şekilde elde edilen kategori D^C şeklinde gösterilir.

Tanım 2.19 $F, G : C \to D$ funktorları verilsin. Eğer $\sigma\eta = 1_F$ ve $\eta\sigma = 1_G$ olacak şekilde $\eta : F \to G$ ve $\sigma : G \to F$ doğal dönüşümleri varsa F ve G funktorları izomorfturlar denir.

Teorem 2.3 $\eta : F \rightarrow G$ doğal dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktirler:

i) $\eta : F \rightarrow G$ bir doğal izomorfizmdir.

ii) $\sigma\eta = 1_F$ ve $\eta\sigma = 1_G$ olacak şekilde bir $\sigma : G \rightarrow F$ doğal dönüşümü vardır.

İspat. ($\Rightarrow$): $\eta : F \rightarrow G$ bir doğal izomorfizm ise $\forall A \in ob(C)$ için $\eta(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ bir izomorfizmdir. $\eta(A)$ nın tersi $\sigma(A) : G(A) \rightarrow F(A)$ olsun. Bu şekilde bir $\sigma : G \rightarrow F$ doğal dönüşüm vardır. $\forall A \in ob(C)$ için

$$\begin{aligned}(\sigma\eta)(A) &= 1_{F(A)} \\ (\eta\sigma)(A) &= 1_{G(A)}\end{aligned}$$

olduğundan $\sigma\eta = 1_F$ ve $\eta\sigma = 1_G$ olduğu elde edilir.

($\Leftarrow$): $\sigma\eta = 1_F$ ve $\eta\sigma = 1_G$ olacak şekilde bir $\sigma : G \rightarrow F$ doğal dönüşümü varsa $\forall A \in ob(C)$ için $\sigma(A)\eta(A) = 1_{F(A)}$ ve $\eta(A)\sigma(A) = 1_{G(A)}$ olduğundan $\eta(A)$ bir izomorfizm olup $\eta : F \rightarrow G$ bir doğal izomorfizmdir. ■

3. BAZI FUZZY TEMEL KAVRAMLAR

Fuzzy küme teorisi, klasik küme teorisine alternatif olarak ilk kez L.A. Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır. Zadeh'e göre gerçek dünyada bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiler kesin olarak tanımlanamamaktadır, çünkü herhangi bir elemanın kümeye ait olması durumu 1 ve ait olmaması durumu ise 0 değeriyle belirtilmektedir. Ancak Zadeh, çalışmasında bu fonksiyonu, elemanların kümeye ait olabilme durumuyla orantılı olarak genişletmiş, değer kümesini $[0,1]$ kapalı aralığı olarak almış ve elemanların kümeye ait olma derecelerini bu kapalı aralığa yerleştirmiştir. Böylece elemanlar aldıkları üyelik dereceleriyle kümeye ait olurlar. Bir elemanın üyelik derecesinin 1'e daha yakın olması kümeye daha fazla ait olması anlamına gelir. Bu şekilde genişletilmiş fonksiyon ile karakterize edilen kümeye fuzzy küme denmiştir.

Bu bölümde fuzzy kümeleri en genel özellikleri ile vereceğiz.

Tanım 3.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $I = [0,1] \subset R$ kapalı aralık olmak üzere, X de bir A fuzzy kümesi, $f_A : X \to I$ fonksiyonu ile karakterize edilen

$$A = \{(x, f_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I$$

kümesine denir. Burada f_A ya A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu ve $f_A(x)$ değerine $x \in X$ noktasının üyelik derecesi denir.
Bundan sonra f_A yerine A, $f_A(x)$ yerine $A(x)$ kullanılacaktır. X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi I^X ile gösterilir. I^X kümesinin her elemanı X de bir fuzzy kümesidir; yani $f_A = A \in I^X$, X de bir fuzzy kümesidir.

Uyarı 3.1 x in A ya ait olma dercesi denen $f_A(x) \in I$ değerinin 1 e yaklaşması, x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir. Yalnızca 0 ve 1 değerini alan fuzzy kümeye crisp küme denir.

Tanım 3.2 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\forall x \in X$ için

$$\begin{array}{rcl} \alpha : X & \to & I \\ x & \to & \alpha(x) = \alpha \end{array}$$

$\alpha \in [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilen $\alpha \in I^X$ fuzzy kümesine sabit fuzzy kümesi denir.

Tanım 3.3 X kümesini karakterize eden $f_X : X \to [0,1]$, $\forall x \in X$ için $f_X(x) = 1$ fonksiyonu olarak alınırsa, X kümesi ; $X = \{(x,1) : x \in X\} = 1$ fuzzy kümesi olarak alınabilir. Benzer olarak $\emptyset$, $f_\emptyset : X \to [0,1]$, $\forall x \in X$ için $f_\emptyset(x) = 0$, fonksiyonu ile karakterize edilirse, $\emptyset = \{(x,0) : x \in X\} = 0$, fuzzy kümesi olarak alınabilir. Bu durumda her klâsik küme aynı zamanda bir fuzzy kümedir.

Tanım 3.4 $X \neq \emptyset$ bir küme ve A, X de bir fuzzy küme olmak üzere

$$SuppA = A_0 = \{x \in X : f_A(x) > 0\}$$

kümesine A fuzzy kümesinin desteği (Support) denir.

Uyarı 3.2 Fuzzy kümeler arasındaki işlemler tanımlanırken, klasik kümeler teorisindeki gösterimlerden farklı olarak sırasıyla, eşitlik $(=)$, kapsama $(\subset)$, birleşim $(\cup)$, kesişim $(\cap)$, tümleyen $(\prime)$ sembolleri yerine sırasıyla $=$, $\leq$, $\vee$, $\wedge$, ^{C} sembolleri kullanılacaktır.

Tanım 3.5 $X \neq \emptyset$ bir küme, A ile B, X de iki fuzzy küme olsun. Bu durumda
i. $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f_A(x) = f_B(x)$
ii. $A \leq B \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f_A(x) \leq f_B(x)$
iii. $A \vee B = C \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f_C(x) = max\{f_A(x), f_B(x)\}$
iv. $A \wedge B = D \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f_D(x) = min\{f_A(x), f_B(x)\}$
v. $A^C = E \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f_E(x) = 1 - f_A(x)$
şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.6 $I \neq \emptyset$ bir indis kümesi, $X \neq \emptyset$ bir küme, X de ki fuzzy kümelerin bir ailesi $\{A_i \in I^X : i \in I\}$ olsun. Bu durumda kesişim ve birleşim işlemlerinin genelleştirilmiş hali

a) $\bigvee\limits_{i \in I} A_i = C \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f_C(x) = \sup\limits_{i \in I}\{f_{Ai}(x)\}$

b) $\bigwedge\limits_{i \in I} A_i = D \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f_D(x) = \inf\limits_{i \in I}\{f_{Ai}(x)\}$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.7 $X \neq \emptyset$ bir küme, A ile B, X de iki fuzzy küme olmak üxere A ve B fuzzy kümelerinin farkı, $\forall x \in X$ için

$$A - B = A \wedge B^c \Leftrightarrow f_{A-B}(x) = min\{f_A(x), f_{B^c}(x)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.3 X kümesi üzerindeki herhangi bir fuzzy kümesi A olsun.

(i) $A \wedge A^c = \emptyset$ olmak zorunda değildir.

(ii) $A \vee A^c = X$ olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1 $X = \{a, b, c\}$ alalım ve X deki bir fuzzy kümesi $A = \{(a, 0.7), (b, 0.2), (c, 0.4)\}$ şeklinde tanımlansın.

Tümleyen tanımından $A^c = \{(a, 0.3), (b, 0.8), (c, 0.6)\}$ olur.

Birleşim ve kesişimin tanımı kullanılırsa

$A \vee A^c = \{(a, 0.7), (b, 0.8)(c, 0.6)\} \neq X$

ve

$A \wedge A^c = \{(a, 0.3), (b, 0.2), (c, 0.4)\} \neq \emptyset$

olur. Görüldüğü gibi $A \wedge A^c = \emptyset$ veya $A \vee A^c = X$ olmak zorunda değildir.

Tanım 3.8 $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\forall x \in X$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$x_t(y) = \begin{cases} t & , x = y \\ 0 & , x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlı x_t fuzzy alt kümesine fuzzy nokta denir.

Tanım 3.9 $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ kümeler, $g : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \leq X$ ve $B \leq Y$ fuzzy kümeler olsun. $g^{-1}(B)$, X de fuzzy kümesi olup, üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için

$$f_{g^{-1}(B)}(x) = f_B(g(x))$$

ve $g(A)$, Y de fuzzy küme olup, üyelik fonksiyonu $\forall y \in Y$ için $g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}$ olmak üzere

$$f_{g(A)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in g^{-1}(y)} \{f_A(x)\} & , g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , g^{-1}(y)) = \emptyset \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1 $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ kümeler, $g : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \leq X$ ve $B \leq Y$ fuzzy kümeler olsun. Bu durumda
a) $\forall B \in I^Y \Rightarrow g^{-1}(B^c) = [g^{-1}(B)]^c$
b) $\forall A \in I^X \Rightarrow g(A^c) \geq [g(A)]^c$
c) $\forall B_1, B_2 \in I^Y$ için $B_1 \leq B_2 \Rightarrow g^{-1}(B_1) \leq g^{-1}(B_2)$
d) $\forall A_1, A_2 \in I^X$ için $A_1 \leq A_2 \Rightarrow g(A_1) \leq g(A_2)$
e) $\forall B \in I^Y \Rightarrow g(g^{-1}(B)) \leq B$
f) $\forall A \in I^X \Rightarrow A \leq g^{-1}(g(A))$
dır (Terzioğlu 2008).

4. FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR VE ESAS GRUP

Bu bölümde fuzzy topolojik uzaylar ve esas grup kavramları incelenerek, fuzzy topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli fonksiyonlar kategorisinden fuzzy esas gruplar ve grup homomorfizmleri kategorisine bir funktorun varlığı gösterilmiştir.

Tanım 4.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve X deki fuzzy kümelerinin bir ailesi $\tau \leq I^X$ olsun. Eğer,

(ft$_1$) $X, \emptyset \in \tau$

(ft$_2$) $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ iken $\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} A_i \in \tau$

(ft$_3$) $\{A_i\}_{i \in J} \in \tau$ iken $\underset{i \in J}{\vee} A_i \in \tau$

şartları sağlanırsa τ ya X kümesi üzerinde bir fuzzy topolojisi, (X, τ) ikilisine fuzzy topolojik uzayı denir. τ nun her elemanına X de fuzzy açık küme, tümleyenine de fuzzy kapalı küme denir.

Tanım 4.2 A, X de bir fuzzy cümle ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. X de açık fuzzy kümelerin A ile arakesitlerinin oluşturduğu

$$\tau_A = \{A \cap U_j : \forall j \in J,\ U_j \in \tau, \}$$

A nın fuzzy alt cümleler ailesi, A üzerinde bir fuzzy topolojidir. τ_A ya A üzerinde indirgenmiş fuzzy topoloji veya τ dan indirgenen (rölatif) fuzzy topoloji denir. (A, τ_A) ikilisine de (X, τ) nun bir alt uzayı denir.

Teorem 4.1 (X, τ') topolojik uzay olsun. Bu durumda, $\tilde{\tau} = \{G : G,\ X$ de Fuzzy küme ve $SuppG \in \tau'\}$ ailesi X de fuzzy topolojidir. Bu fuzzy topolojiye τ' tarafından üretilen fuzzy topolojisi, $(X, \tilde{\tau})$ ikilisine de (X, τ') topolojik uzayı tarafından üretilen fuzzy topolojik uzay denir (Güner 2007).

Yani herhangi bir topolojik uzaya bir fuzzy topolojik uzay karşılık getirilebilir.

Tanım 4.3 (X, τ), $(Y, \tau^{'})$ iki fuzzy topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $(Y, \tau^{'})$ nun her açık fuzzy kümesinin f fonksiyonuna göre ters görüntüsü (X, τ) nun bir açık fuzzy kümesi oluyorsa, f fonksiyonuna fuzzy süreklidir denir.
X den Y ye bütün fuzzy sürekli fonksiyonların kümesi $FC(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım 4.4 (X, τ) fuzzy topolojik uzay ve A, B de X üzerinde iki fuzzy küme olsun. $A \leq H$, $B \leq G$ olmak üzere $H \wedge B = \emptyset, G \wedge A = \emptyset$ olacak şekilde $H, G \in \tau$ açık fuzzy kümeleri varsa A ile B ye ayrılmış fuzzy kümeler denir.

Tanım 4.5 (X, τ) fuzzy topolojik uzay ve A, B de X üzerinde iki fuzzy küme olsun. H ve G, (X, τ) fuzzy topolojik uzayında kapalı fuzzy kümeler olmak üzere $H \geq A$, $G \geq B$ ve $H \wedge B = \emptyset$ ve $G \wedge A = \emptyset$ ise A, B fuzzy kümelerine (X, τ) fuzzy topolojik uzayında Q-ayrılmış iki fuzzy küme denir.

Tanım 4.6 C, (X, τ) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy küme ve $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ kümeleri (C_0, τ_{C_0}) alt uzayının Q-ayrılmış iki fuzzy kümesi olsun. Eğer

$$A \vee B = C$$

ise, C kümesine fuzzy irtibatsız küme denir. Burada $C_0 = SuppC$ dir.

Teorem 4.2 (X, τ) ve $(Y, \tau^{'})$ iki fuzzy topolojik uzay olmak üzere $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^{'})$ fuzzy sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, A kümesi (X, τ) da fuzzy irtibatlı ise $f(A)$ da $(Y, \tau^{'})$ de fuzzy irtibatlıdır (Çoban 2011).

Tanım 4.7 (X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $A \leq X$ olsun. Eğer (A, τ_A) fuzzy alt uzayı irtibatlı bir fuzzy uzay ise, A ya (X, τ) fuzzy topolojik uzayının irtibatlı bir fuzzy alt kümesi denir.

Tanım 4.8 (X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $I = [0, 1]$ olsun. I üzerinde R nin alışılmış topolojisinden indirgenen topoloji U_I ve (I, U_I) topolojik uzayı tarafından üretilen fuzzy topolojik uzayı $(I, \tilde{U}_I)$ olmak üzere, eğer $\alpha : (I, \tilde{U}_I) \to (X, \tau)$ fuzzy sürekli fonksiyon ve $A(0) > 0$ ve $A(1) > 0$ şartlarını sağlayan A fuzzy kümesi $(I, \tilde{U}_I)$ da irtibatlı ise, bu durumda $\alpha(A)$ fuzzy kümesine (X, τ) da fuzzy eğri denir. Ayrıca, $(\alpha(0))_{A(0)} = \alpha(0_{A(0)})$ ve $(\alpha(1))_{A(1)} = \alpha(1_{A(1)})$ fuzzy noktalarına $\alpha(A)$ fuzzy eğrisinin sırasıyla başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 4.9 (X, τ) fuzzy topolojik uzay ve A, $(I, \tilde{U}_I)$ da fuzzy irtibatlı bir küme olsun. $A(0) > 0$ ve $A(1) > 0$ olmak üzere $\alpha : (I, \tilde{U}_I) \to (X, \tau)$ fuzzy sürekli fonksiyonu ile tanımlı $\alpha(A)$ fuzzy eğrisinin başlangıç ve bitim noktası eşit ise, yani $\alpha(0_{A(0)}) = \alpha(1_{A(1)})$ ise $\alpha(A)$ fuzzy eğrisine kapalı fuzzy eğri denir.

Tanım 4.10 (X, τ) fuzzy topolojik uzayında $\alpha(1_{A(1)}) = \beta(0_{B(0)})$ olacak şekilde $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$ fuzzy eğrileri verilsin. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\gamma(C) &= (\alpha(A)\beta(B))(x_{C(x)}) \\
&= \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \beta((2x-1)_{B(2x-1)}) & , \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı $\gamma : (I, \tilde{U}_I) \to (X, \tau)$ dönüşümü fuzzy süreklidir. $\gamma(C)$ de (X, τ) da bir fuzzy eğridir. $\gamma(C)$ fuzzy eğrisine $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$ fuzzy eğrilerinin çarpımı denir ve

$$\gamma(C) = \alpha(A)\beta(B)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 4.11 (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve A bu uzayda herhangi bir fuzzy küme olsun. Eğer herhangi $p_\lambda, q_\mu \in A$ fuzzy noktaları için A da başlangıç noktası p_λ bitiş noktası q_μ olan bir fuzzy eğri varsa, yani $\alpha : (I, \tilde{U}_I) \to (X, \tau)$ fuzzy sürekli fonksiyon ve $B(0) > 0$ ve $B(1) > 0$, $\alpha(B) \subset A$ olmak üzere $\alpha(0_{B(0)}) = p_\lambda$ ve

$\alpha(1_{B(1)}) = q_\mu$ olacak şekilde $(I, \tilde{U}_I)$ da fuzzy irtibatlı bir B fuzzy kümesi varsa, A ya (X, τ) da fuzzy eğrisel irtibatlıdır denir.

Uyarı 4.1 Bir A fuzzy kümesi (X, τ) fuzzy topolojik uzayında fuzzy eğrisel irtibatlı ise A kümesine (X, τ) da fuzzy irtibatlıdır.

Tanım 4.12 Başlangıç ve bitiş noktası p_λ olan bütün kapalı fuzzy eğrilerin kümesi $\Omega(X, p_\lambda)$ ile gösterilir. p_λ fuzzy noktasına bu eğriler için taban noktası denir.

Tanım 4.13 (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $\alpha, \beta : (I, \tilde{U}_I) \to (X, \tau)$, $\alpha(A), \beta(B) \in \Omega(X, p_\lambda)$ olsun. Eğer,

1)

$$\begin{aligned} F(x,0) &= \alpha(x_{A(x)}), \forall x \in I \\ F(x,1) &= \beta(x_{B(x)}), \forall x \in I \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} F(0,t) &= \alpha(0_{A(0)}) = \beta(0_{B(0)}) = p_\lambda, \forall t \in J \\ F(1,t) &= \alpha(1_{A(1)}) = \beta(1_{B(1)}) = p_\lambda, \forall t \in J \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $F = F(x,t) : (I, \tilde{U}_I) \times (J, \tilde{U}_J) \to (X, \tau)$ fuzzy sürekli dönüşümü varsa, bu durumda $\alpha(A)$, $\beta(B)$ fuzzy eğrilerine p_λ fuzzy noktasına göre fuzzy homotopturlar denir ve $\alpha(A) \underset{p_\lambda}{\sim} \beta(B)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.3 (X, τ) fuzzy topolojik uzay ve p_λ, X in sabit bir fuzzy noktası olarak verilsin. "$\underset{p_\lambda}{\sim}$" bağıntısı, $\Omega(X, p_\lambda)$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır (Terzioğlu, 2008).

Dolayısıyla "$\underset{p_\lambda}{\sim}$" bağıntısı $\Omega(X, p_\lambda)$ kümesi üzerinde denklik bağıntısı olduğundan $\Omega(X, p_\lambda)$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. $\alpha(A) \in \Omega(X, p_\lambda)$ fuzzy eğrisinin denklik sınıfı $[\alpha(A)]$ ile gösterilir. Burada $[\alpha(A)]$, $\alpha(A)$ ya p_λ da homotop olan tüm fuzzy eğrilerin oluşturduğu homotopi sınıfıdır.

Tanım 4.14 $\Omega(X, p_\lambda)$ kümesindeki tüm fuzzy eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi $\Pi_1(X, p_\lambda)$ ile gösterilir. Bu küme üzerindeki çarpım işlemi $\forall[\alpha(A)], [\beta(B)] \in \Pi_1(X, p_\lambda)$ için

$$[\alpha(A)].[\beta(B)] = [\alpha(A).\beta(B)]$$

şeklinde tanımlıdır.

Uyarı 4.2 $\Pi_1(X, p_\lambda)$ kümesi yukarıda tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir grup yapısı oluşturur. Bu gruba (X, τ) fuzzy topolojik uzayının p_λ fuzzy noktasındaki Fuzzy Esas Grubu denir.

Teorem 4.4 (X, τ) fuzzy eğrisel irtibatlı bir fuzzy topolojik uzay ve p_λ, $q_\mu \in X$ iki fuzzy nokta olsun. (X, τ) fuzzy topolojik uzayının p_λ fuzzy noktasındaki esas grubu q_μ fuzzy noktasındaki esas grubuna izomorftur. Yani,

$$\Pi_1(X, p_\lambda) \cong \Pi_1(X, q_\mu)$$

dir.

İspat. $\alpha(A) \in \Omega(X, p_\lambda)$ yani $\alpha(A)$, X de bir p_λ fuzzy noktasında bir fuzzy eğri olsun.
X fuzzy eğrisel irtibatlı olduğundan, X de başlangıç noktası p_λ, bitim noktası q_μ olan bir $\gamma(C)$ fuzzy eğrisi vardır.
Bu durumda $\gamma^{-1}(C)$, $\gamma(C)$ fuzzy eğrisinin tersi olmak üzere

$$\beta(B) = (\gamma^{-1}(C)\alpha(A))\gamma(C)$$

şeklinde tanımlanan $\beta(B)$, q_μ fuzzy noktasında bir fuzzy eğridir.
O halde $\alpha_1(E)$ ve $\alpha_2(F)$, p_λ da iki fuzzy eğri olmak üzere

$$\beta_1(G) = (\gamma^{-1}(C)\alpha_1(E))\gamma(C)$$

ve

$$\beta_2(H) = (\gamma^{-1}(C)\alpha_2(F))\gamma(C)$$

diyelim. Buradan

$$\begin{aligned} \alpha_1(E) \sim \alpha_2(F) &\Rightarrow \gamma^{-1}(C)\alpha_1(E) \sim \gamma^{-1}(C)\alpha_2(F) \\ &\Rightarrow (\gamma^{-1}(C)\alpha_1(E))\gamma(C) \sim (\gamma^{-1}(C)\alpha_2(F))\gamma(C) \\ &\Rightarrow \beta_1(G) \sim \beta_2(H). \end{aligned}$$

Benzer olarak $\beta(B)$, q_μ fuzzy noktasında bir fuzzy eğri olsun.

Bu durumda

$$\alpha(A) = (\gamma(C)\beta(B))\gamma^{-1}(C)$$

şeklinde tanımlanan $\alpha(A)$, p_λ fuzzy noktasında bir fuzzy eğridir.

Şimdi de $\beta_1(G)$ ve $\beta_2(H)$ q_μ da iki fuzzy eğri olmak üzere,

$$\alpha_1(E) = (\gamma(C)\beta_1(G))\gamma^{-1}(C)$$

ve

$$\alpha_2(F) = (\gamma(C)\beta_2(H))\gamma^{-1}(C)$$

diyelim.

$$\begin{aligned} \beta_1(G) \sim \beta_2(H) &\Rightarrow \gamma(C)\beta_1(G) \sim \gamma(C)\beta_2(H) \\ &\Rightarrow (\gamma(C)\beta_1(G))\gamma^{-1}(C) \sim (\gamma(C)\beta_2(H))\gamma^{-1}(C) \\ &\Rightarrow \alpha_1(E) \sim \alpha_2(F) \end{aligned}$$

dir.

Sonuç olarak $\Pi_1(X, p_\lambda)$ nın her bir $[\alpha(A)]$ fuzzy homotopi sınıfı, $\Pi_1(X, q_\mu)$ da bir tek $[\beta(B)]$ fuzzy homotopi sınıfını belirtir ve benzer olarak $\Pi_1(X, q_\mu)$ da her bir $[\beta(B)]$ fuzzy homotopi sınıfı, $\Pi_1(X, p_\lambda)$ da bir tek $[\alpha(A)]$ fuzzy homotopi sınıfını belirtir.

O halde

$$\phi([\alpha(A)]) = [\beta(B)] = [(\gamma^{-1}(C)\alpha(A))\gamma(C)]$$

şeklinde tanımlanan $\phi : \Pi_1(X, p_\lambda) \to \Pi_1(X, q_\mu)$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \phi([\alpha_1(E)])\phi([\alpha_2(F)]) &= [\beta_1(G)][\beta_2(H)] \\ &= [\beta_1(G)\beta_2(H)] \\ &= [(\gamma^{-1}(C)\alpha_1(E))\gamma(C)(\gamma^{-1}(C)\alpha_2(F))\gamma(C)] \\ &= [(\gamma^{-1}(C)(\alpha_1(E)\alpha_2(F)))\gamma(C)] \\ &= \phi([\alpha_1(E)\alpha_2(F)] \end{aligned}$$

olduğundan ϕ bir homomorfizmdir. Sonuç olarak,

$$\Pi_1(X, p_\lambda) \cong \Pi_1(X, q_\mu)$$

dir. ■

Uyarı 4.3 O halde, fuzzy eğrisel irtibatlı bir fuzzy topolojik uzayın herhangi iki fuzzy noktasındaki esas gruplar birbirine izomorftur. Dolayısıyla fuzzy eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar için esas grup taban noktadan bağımsızdır.

Teorem 4.5 (X, τ) ve $(Y, \tau^{'})$ iki fuzzy topolojik uzay p_λ, (X, τ) da bir fuzzy nokta ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^{'})$ fuzzy sürekli fonksiyon ve $f(p_\lambda) = (f(p))_\lambda = q_\mu \in (Y, \tau^{'})$ olsun. Bu durumda,

$$f^* : \Pi_1(X, p_\lambda) \rightarrow \Pi_1(Y, q_\mu)$$

bir homomorfizmdir.

İspat. $\alpha(A)$, $\beta(B)$ X de p_λ fuzzy noktasında fuzzy eğriler olsun.
$\gamma, \delta : (I, \tilde{U}_I) \rightarrow (Y, \tau^{'})$ fuzzy sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\gamma(x_{C(x)}) = f(\alpha(x_{A(x)}))$$

ve

$$\delta(x_{D(x)}) = f(\beta(x_{B(x)}))$$

şeklinde tanımlı olsun.
Bu durumda $\gamma(C)$ ve $\delta(D)$, Y de

$$f(p_\lambda) = (f(p))_\lambda = q_\mu$$

fuzzy noktasında kapalı fuzzy eğrilerdir.
Eğer $\alpha(A) \underset{p_\lambda}{\sim} \beta(B)$ ise; $\forall x \in I$ için

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= \alpha(x_{A(x)}) \\ F(x, 1) &= \beta(x_{B(x)}) \end{aligned}$$

ve $\forall x \in J$ için

$$\begin{aligned} F(0,t) &= \alpha(0_{A(0)}) = \beta(0_{B(0)}) = p_\lambda \\ F(1,t) &= \alpha(1_{A(1)}) = \beta(1_{B(1)}) = p_\lambda \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$F(x,t) : (I,\tilde{U}_I) \times (J,\tilde{U}_J) \to (X,\tau)$$

fuzzy sürekli fonksiyonu vardır.

Şimdi, $G(x,t) : (I,\tilde{U}_I) \times (J,\tilde{U}_J) \to (Y,\tau^{'})$ fonksiyonunu

$$G(x,t) = f(F(x,t))$$

şeklinde tanımlayalım.

Böylece G fuzzy sürekli bir fonksiyondur ve ayrıca $\forall x \in I$ ve $\forall t \in J$ için

$$\begin{aligned} G(x,0) &= f(F(x,0)) = f(\alpha(x_{A(x)}) = \gamma(x_{C(x)}), \\ G(x,1) &= f(F(x,1)) = f(\beta(x_{B(x)}) = \delta(x_{D(x)}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G(0,t) &= f(F(0,t)) = f(\alpha(0_{A(0)}) = \gamma(0_{C(0)}) = \delta(0_{D(0)}) = f(p_\lambda) = (f(p))_\lambda = q_\mu, \\ G(1,t) &= f(F(1,t)) = f(\alpha(1_{A(1)}) = \gamma(1_{C(1)}) = \delta(1_{D(1)}) = f(p_\lambda) = (f(p))_\lambda = q_\mu \end{aligned}$$

olup

$$\gamma(C) \underset{q_\mu}{\sim} \delta(D)$$

dir.

Sonuç olarak $f^* : \Pi_1(X,p_\lambda) \to \Pi_1(Y,q_\mu)$ tasviri

$$f^*([\alpha(A)]) = ([f(\alpha(A))])$$

şeklinde tanımlanırsa f^*, X de p_λ fuzzy noktasındaki fuzzy eğrilerin fuzzy homotopi sınıflarını, Y de $f(p_\lambda) = f(p)_\lambda = q_\mu$ fuzzy noktasındaki fuzzy eğrilerin homotopi sınıflarına götürür ve $[\alpha(A)]$ bir tek olarak $f^*([\alpha(A)])$ yı belirtir. Dolayısıyla f^*, $\Pi_1(X,p_\lambda)$ nın her bir elemanını $\Pi_1(Y,q_\mu)$ nın bir tek elemanına karşılık getirir. Sonuç olarak f^* iyi tanımlıdır.

Şimdi f^* nin bir homomorfizm olduğunu gösterelim.

$$\rho(x_{G(x)}) = (\alpha(A)\beta(B))(x_{E(x)}) = \begin{cases} \alpha((2x)_{A(2x)}) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta((2x-1)_{B(2x-1)}) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$f(\rho(x_{G(x)})) = \sigma(x_{H(x)}) = \begin{cases} f(\alpha((2x)_{A(2x)})) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(\beta((2x-1)_{B(2x-1)})) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} f^*([\alpha(A)])f^*([\beta(B)]) &= [f(\alpha(A))][f(\beta(B))] \\ &= [f(\alpha(A))f(\beta(B))] \\ &= [f(\alpha(A)\beta(B))] \\ &= f^*([\alpha(A)\beta(B)]) \end{aligned}$$

dir.

O halde $f^* : \Pi_1(X, p_\lambda) \to \Pi_1(Y, q_\mu)$ fonksiyonu bir homomorfizmdir. ■

Teorem 4.6 Fuzzy noktalı topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli fonksiyonlar kategorisinden, gruplar ve homomorfizmler kategorisine bir funktor vardır.

İspat. Fuzzy noktalı topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli fonksiyonlar kategorisindeki nesneler (X, p_λ) lar, fuzzy morfizmler ise $f(p_\lambda) = q_\mu$ şartını sağlayan fuzzy sürekli fonksiyonlardır. Her (X, p_λ) fuzzy noktalı topolojik uzayına, fuzzy esas grup adı verilen ve $\Pi_1(X, p_\lambda)$ ile gösterilen bir grup karşılık geldiğinden; $f : (X, p_\lambda) \to (Y, q_\mu)$ fuzzy morfizmine karşılık $f^* : \Pi_1(X, p_\lambda) \to \Pi_1(Y, q_\mu)$ homomorfizmi vardır. Bunu $f^* = \Pi_1(f)$ ile gösterirsek, Π_1 fuzzy noktalı topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli fonksiyonlar kategorisinden, gruplar ve homomorfizmler kategorisine

$$\begin{array}{ccccc} f & : & (X, p_\lambda) & \to & (Y, q_\mu) \\ \downarrow \Pi_1 & & & & \\ \Pi_1(f) & : & \Pi_1(X, p_\lambda) & \to & \Pi_1(Y, q_\mu) \end{array}$$

tabloda belirtildiği şekilde bir fuzzy fonktordur. Gerçekten,

1) $X = Y$ ve $f : 1_X : (X, p_\lambda) \to (X, p_\lambda)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcll} \Pi_1(1_X) = 1_X^* & : & \Pi_1(X, p_\lambda) & \to \Pi_1(X, p_\lambda) \\ & & [\alpha(A)] & \to 1_X^*([\alpha(A)]) = [1_X \circ \alpha(A)] = [\alpha(A)] \end{array}$$

yani,

$$\Pi_1(1_X) = 1_{\Pi_1(X, p_\lambda)}$$

olur. Buradan,

$$1_{\Pi_1(X, p_\lambda)} : \Pi_1(X, p_\lambda) \to \Pi_1(X, p_\lambda)$$

özdeş morfizmdir.

2) (X, p_λ), (Y, q_μ), (Z, r_θ) noktalı fuzzy topolojik uzaylar $f : (X, p_\lambda) \to (Y, q_\mu)$ ve $g : (Y, q_\mu) \to (Z, r_\theta)$ öyle ki

$$f(p_\lambda) = f(p)_\lambda = q_\mu$$

ve

$$g(q_\mu) = g(q)_\mu = r_\theta$$

şeklinde tanımlı iki morfizm olsunlar. $g \circ f : (X, p_\lambda) \to (Z, r_\theta)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} \Pi_1(f) & : & \Pi_1(X, p_\lambda) \to \Pi_1(Y, q_\mu) \\ \Pi_1(g) & : & \Pi_1(Y, q_\mu) \to \Pi_1(Z, r_\theta) \end{array}$$

ve

$$\Pi_1(g \circ f) : \Pi_1(X, p_\lambda) \to \Pi_1(Z, r_\theta)$$

dır.

Bu durumda, $\forall[\alpha(A)] \in \Pi_1(X, p_\lambda)$ için $(g \circ f) \circ \alpha$ ve $g \circ (f \circ \alpha)$ fonksiyonları fuzzy sürekli ve r_θ fuzzy noktasında kapalı fuzzy eğriler olup $(g \circ f) \circ \alpha = g \circ (f \circ \alpha)$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{array}{rcl} \Pi_1(g \circ f)([\alpha(A)]) & = & [(g \circ f)(\alpha(A))] \\ & = & [g \circ (f \circ \alpha(A))] \\ & = & (\Pi_1(g)) \circ ([(f \circ \alpha(A))]) \\ & = & (\Pi_1(g)) \circ ((\Pi_1(f))([\alpha(A)])) \\ & = & (\Pi_1(g) \circ \Pi_1(f))([\alpha(A)]) \end{array}$$

yani, $\Pi_1(g \circ f) = \Pi_1(g) \circ \Pi_1(f)$ bulunur.

Π_1 e fuzzy esas grup funktoru denir. $\blacksquare$

Önerme 4.1 (X, p_λ) ve (Y, q_μ) fuzzy noktalı topolojik uzayları homeomorf ise $\Pi_1(X, p_\lambda)$ ve $\Pi_1(Y, q_\mu)$ fuzzy esas grupları da izomorfturlar (Terzioğlu 2008).

5. FUZZY ÖRTÜ UZAYLARINDA YÜKSELTME PROBLEMİ

Bu bölümde H fuzzy demetinin X in bir fuzzy örtü uzayı olduğu ilk kez tarafımızdan gösterilerek, bu fuzzy demet için "fuzzy yükseltme teoremi" verilmiştir.

Tanım 5.1 F, (X,τ) fuzzy topolojik uzayı üzerinde bir fuzzy küme olsun. Eğer F nin a_λ, b_μ fuzzy noktaları için F de a_λ dan b_μ ye bir fuzzy eğri varsa F ye (X,τ) da fuzzy eğrisel irtibatlıdır denir. Eğer $F = X$ ise, (X,τ) ya fuzzy eğrisel irtibatlı topolojik uzay denir.

Tanım 5.2 X, $\tilde{X}$ iki fuzzy topolojik uzay ve $p : X \to \tilde{X}$ bir fuzzy sürekli dönüşüm olsun. Bir $U \subset X$ fuzzy kümesi fuzzy irtibatlı ve açık fuzzy küme ise, U kümesine p tarafından tamamen örtülüdür denir. Burada, $p^{-1}(U)$ nun her fuzzy bileşeni p tarafından U üzerinde fuzzy homeomorfik olarak resmedilen bir açık fuzzy kümedir. Eğer X in her bir fuzzy noktası tamamen örtülü bir U fuzzy kümesine sahipse $p : X \to \tilde{X}$ dönüşümüne bir fuzzy örtü dönüşümü, $\tilde{X}$ ya da X in bir fuzzy örtü uzayı denir.

Tanım 5.3 $X, \tilde{X}$ ve B fuzzy topolojik uzaylar, $p : X \to \tilde{X}$ bir fuzzy örtü dönüşümü ve $\varphi : B \to X$ herhangi bir fuzzy sürekli dönüşüm olsun. Eğer $\tilde{\varphi} : B \to \tilde{X}$ dönüşümü $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ olacak biçimde fuzzy sürekli ise, $\tilde{\varphi}$ ya φ nin bir fuzzy yükseltmesi denir.

Tanım 5.4 f, (X,τ_1) topolojik uzayından (Y,τ_2) topolojik uzayına 1-1 ve örten bir fonksiyon olmak üzere, eğer f fuzzy sürekli ve fuzzy açık ise f fonksiyonuna bir fuzzy homeomorfizm denir (Güner ve Balcı 2007).

Tanım 5.5 f, (X,τ_1) topolojik uzayından (Y,τ_2) topolojik uzayına lokal fuzzy homeomorfizm ise X e, Y üzerinde bir fuzzy demet denir.

X fuzzy eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve H_{a_λ} herhangi $a_\lambda \in X$ taban noktalı X in esas grubu, yani $H_{a_\lambda} = \Pi_1(X, a_\lambda)$ olsun. $X = (X, x_p)$ keyfi bir $x_p \in X$ fuzzy sabit noktası için noktalı fuzzy topolojik uzay olsun. $\forall a_\lambda \in X$ için bütün esas grupların ayrık birleşimlerini H ile gösterelim, yani $H = \underset{a_\lambda \in X}{\vee} H_{a_\lambda}$ olsun. H, X üzerinde bir kümedir ve herhangi $\sigma_{a_\lambda} = [\alpha(A)]_{a_\lambda} \in H_{a_\lambda} \subset H$ için $\psi : H \to X \ni \psi(\sigma_{a_\lambda}) = \psi([\alpha(A)]_{a_\lambda}) = a_\lambda$ dönüşümü üzerinedir.

Şimdi, $W \subset X$ bir açık fuzzy küme olsun. $\forall a_\lambda \in W$ için $s : W \to H \ni s(a_\lambda) = [\gamma^{-1}(H) * \alpha(A) * \gamma(G)]_{a_\lambda}$ dönüşümü tanımlansın. Burada $[\alpha(A)]_{x_p} \in H_{x_p}$ herhangi bir eleman ve $[\alpha(G)]$, H_{a_λ} ve H_{x_p} arasında bir izomorfizm tanımlayan, keyfi bir sabit fuzzy homotopi sınıfıdır. Dahası, $\psi \circ s = 1_W$ dur. W üzerinde tanımlanan s dönüşümlerinin tamamını $\Gamma(W, H)$ ile gösterelim.

Eğer B, X için bir fuzzy taban ise, $B^* = \{s(W) : W \in B, s \in \Gamma(W, H)\}$ da H için bir fuzzy tabandır. ψ ve s dönüşümleri bu topolojide fuzzy süreklidirler. Üstelik ψ lokal fuzzy topolojik dönüşümdür. Buradan (H, ψ), X üzerinde bir fuzzy demettir. (H, ψ) veya kısaca H ye X üzerinde "esas grupların fuzzy demeti" denir.

$H_{a_\lambda} = \Pi_1(X, a_\lambda)$ grubuna herhangi $a_\lambda \in X$ için H fuzzy demetinin sapı denir. Herhangi $W \subset X$ açık fuzzy kümesi için $\Gamma(W, H)$ nin bir s elemanına W üzerinde H fuzzy demetinin bir fuzzy kesiti denir. $\Gamma(W, H)$ kümesi noktalı çarpma işlemine göre grup olup H, X üzerindeki grupların bir fuzzy demetidir. Dolayısıyla, H bir cebirsel fuzzy demettir.

H fuzzy demeti aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $W \subset X$ bir açık fuzzy küme olsun. O halde, W üzerindeki bir fuzzy kesit X üzerindeki bir fuzzy kesite genişletilebilir.

2) H nin herhangi iki sapı birbirlerine izomorftur.

3) $W_1, W_2 \subset X$ herhangi iki açık fuzzy küme, $s_1 \in \Gamma(W_1, H)$ ve $s_2 \in \Gamma(W_2, H)$ olsun. Eğer herhangi $x_0 \in W_1 \cap W_2$ için $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ ise bütün $W_1 \cap W_2$ üzerinde $s_1 = s_2$ dir.

4) $W \subset X$ bir açık fuzzy küme ve $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H)$ olsun. Eğer herhangi $x_0 \in W$ için $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ ise bütün W üzerinde $s_1 = s_2$ dir.

Teorem 5.1 H, (X, x_p) esas gruplarının fuzzy demeti ve W, X de bir açık fuzzy küme olsun. O halde $H_{x_p} \cong \Gamma(W, H)$ dır.

İspat. $W \subset X$ bir açık fuzzy küme ve $s \in \Gamma(W, H)$ olsun. Bu durumda $\forall a_\lambda \in W$ için $s(a_\lambda) = [\gamma^{-1}(H) * \alpha(A) * \gamma(G)]_{a_\lambda}$ olacak biçimde bir tek $\sigma_{x_p} = [\alpha(A)]_{x_p} \subset H_{x_p}$ vardır. Dolayısıyla H_{x_p} nin her elemanı $\Gamma(W, H)$ de sadece bir elemana karşılık gelmektedir. Bu karşılık gelmeyi herhangi $\sigma_{x_p} \in H_{x_p}$ için $\Phi(\sigma_{x_p}) = s$ olacak biçimde $\Phi : H_{x_p} \to \Gamma(W, H)$ ile gösterelim. $\sigma^1_{x_p} = [\alpha_1(A_1)]_{x_p}$, $\sigma^2_{x_p} = [\alpha_2(A_2)]_{x_p}$ ve $\sigma^1_{x_p}, \sigma^2_{x_p}$ sırasıyla $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H)$ nın fuzzy kesitlerini tanımlasınlar. Buradan $\forall a_\lambda \in W$ için

$$s_1(a_\lambda) = [\gamma^{-1}(H) * \alpha_1(A_1) * \gamma(G)]_{a_\lambda}$$

ve

$$s_2(a_\lambda) = [\gamma^{-1}(H) * \alpha_2(A_2) * \gamma(G)]_{a_\lambda}$$

dir.

Üstelik $\sigma^1_{x_p} \neq \sigma^2_{x_p}$ ise, $s_1(a_\lambda) \neq s_2(a_\lambda)$ dır. Böylece Φ 1-1 dir. Ayrıca Φ nin tanımının bir sonucu olarak Φ örtendir. Dolayısıyla Φ bir bijeksiyondur. Üstelik, Φ bir homomorfizmdir. Çünkü, $\sigma^1_{x_p} = [\alpha_1(A_1)]_{x_p}$, $\sigma^2_{x_p} = [\alpha_2(A_2)]_{x_p}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sigma^1_{x_p} \cdot \sigma^2_{x_p} &= [\alpha_1(A_1)]_{x_p} \cdot [\alpha_2(A_2)]_{x_p} \\ &= [\alpha_1(A_1) * \alpha_2(A_2)]_{x_p} \end{aligned}$$

olup $\sigma^1_{x_p} \cdot \sigma^2_{x_p} \in H_{x_p}$ elemanı, $\forall a_\lambda \in W$ için

$$s(a_\lambda) = [\gamma^{-1}(H) * (\alpha_1(A_1) * \alpha_2(A_2)) * \gamma(G)]_{a_\lambda}$$

olacak biçimde bir $s \in \Gamma(W, H)$ fuzzy kesiti tanımlar.

Buradan $\forall a_\lambda \in W$ için,

$$\begin{aligned} s_1(a_\lambda) \cdot s_2(a_\lambda) &= [\gamma^{-1}(H) * \alpha_1(A_1) * \gamma(G)]_{a_\lambda} \cdot [\gamma^{-1}(H) * \alpha_2(A_2) * \gamma(G)]_{a_\lambda} \\ &= [\gamma^{-1}(H) * (\alpha_1(A_1) * \alpha_2(A_2)) * \gamma(G)]_{a_\lambda} \end{aligned}$$

dır.

Böylece,

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma^1_{x_p}\cdot\sigma^2_{x_p}) &= s\\ &= s_1\cdot s_2\\ &= \Phi(\sigma^1_{x_p})\cdot\Phi(\sigma^2_{x_p})\end{aligned}$$

dir. O halde Φ bir izomorfizmdir. ■

Teorem 5.1 in bir sonucu olarak; H_{x_p} sapının, W üzerindeki fuzzy kesitlerinin grubunu oluşturduğunu söyleyebiliriz. Özellikle, $W = X$ alırsak, H_{x_p} sapı X üzerindeki bütün fuzzy kesitlerin grubunu oluşturur.

Şimdi aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.1 H, X fuzzy topolojik uzayı üzerindeki esas grupların fuzzy demeti olsun. H_{a_λ}, $a_\lambda \in X$ fuzzy noktası üzerinde sap ve W bir açık fuzzy küme olsun. O halde, $H_{a_\lambda} \cong \Gamma(W,H)$ dır.

Bu sonuca göre, eğer $\sigma_{a_\lambda} \in H_{a_\lambda}$ herhangi bir eleman ve W, X in bir açık fuzzy kümesi ise $s(a_\lambda) = \sigma_{a_\lambda}$ olacak biçimde bir tek $s \in \Gamma(W,H)$ fuzzy kesiti vardır. $\psi\,|_{s(W)} : s(W) \to W$ bir fuzzy topolojik dönüşüm ve $s = (\psi\,|_{s(W)})^{-1}$ olduğundan

$$\psi^{-1}(W) = \bigvee_{i\in I} s_i(W),\ \ s_i \in \Gamma(W,H)$$

ve

$$\psi\,|_{s_i(W)} : s_i(W) \to W$$

bir fuzzy topolojik dönüşümdür. Böylece, W açık fuzzy kümesi ψ tarafından tamamen fuzzy örtülür. Dolayısıyla, ψ bir fuzzy örtü dönüşümü ve (H,ψ) de X in fuzzy örtü uzayıdır.

Şimdi, $b_\mu \in X$ herhangi bir fuzzy nokta ve $\gamma(C)$ başlangıç noktası b_μ olan bir fuzzy eğri olsun.

$$s\circ\gamma : I \to H$$

dönüşümü bir fuzzy sürekli dönüşümdür ve $\psi\circ(s\circ\gamma) = \gamma$ dır. Eğer $(s\circ\gamma)(b_\mu) = \rho_{b_\mu} \in H_{b_\mu}$ yazarsak; $s\circ\gamma$, H nin b_μ üzerindeki ρ_{b_μ} başlangıç noktasında tanımlı $\gamma(C)$ fuzzy eğrisinin bir fuzzy yükseltmesidir. $s \circ \gamma(C) = (s \circ \gamma)(C) = \gamma^*(C)$ yazılırsa, $\gamma^*(C)$ tektir, çünkü $\psi\big|_{s(X)} : s(X) \to X$ dönüşümü bir fuzzy homeomorfizmdir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.2 X fuzzy topolojik uzayı üzerindeki esas grupların fuzzy demeti (H, ψ), $b_\mu \in X$ herhangi bir fuzzy nokta ve $\gamma(C)$ başlangıç noktası b_μ olan X de bir fuzzy eğri olsun. Bu durumda $\gamma(C)$, $\forall \rho_{b_\mu} \in H_{b_\mu}$ için H_{b_μ} de başlangıç noktası ρ_{b_μ} olan bir tek $\gamma^*(C)$ yükseltmesine sahiptir.

Teorem 5.3 X fuzzy topolojik uzayı üzerindeki esas grupların fuzzy demeti (H, ψ), $\gamma_1^*(C_1)$ ve $\gamma_2^*(C_2)$ eğrileri H da başlangıç noktaları ρ_{b_μ} ve bitiş noktaları ρ_{c_η} olan fuzzy eğriler olsunlar. Bu durumda $\gamma_1^*(C_1)$ ve $\gamma_2^*(C_2)$ eğrileri H da fuzzy homotopik eğrilerdir ancak ve ancak $\psi \circ \gamma_1^*(C_1) = (\psi \circ \gamma_1^*)(C_1)$ ve $\psi \circ \gamma_2^*(C_2) = (\psi \circ \gamma_2^*)(C_2)$ eğrileri X de fuzzy homotopik eğrilerdir.

İspat. $(\Rightarrow)$: Eğer $\gamma_1^*(C_1)$ bir G fuzzy homotopisi tarafından $\gamma_2^*(C_2)$ ye fuzzy homotopik ise; $\psi \circ G$, $(\psi \circ \gamma_1^*)(C_1)$ ve $(\psi \circ \gamma_2^*)(C_2)$ arasında bir fuzzy homotopidir.
$(\Leftarrow)$: b_μ ve c_η, $(\psi \circ \gamma_1^*)(C_1)$ ve $(\psi \circ \gamma_2^*)(C_2)$ nin sırasıyla herhangi başlangıç be bitiş noktaları olsunlar. Şimdi,

$$H : (I, \tilde{\varepsilon}_I) \times (J, \tilde{\varepsilon}_J) \to (X, \tau)$$

$(\psi \circ \gamma_1^*)(C_1)$ ve $(\psi \circ \gamma_2^*)(C_2)$ arasında bir fuzzy homotopi olsun. Eğer $\rho_{b_\mu} \in H_{b_\mu}$ ise, $s(b_\mu) = \rho_{b_\mu}$ olacak biçimde bir tek $s \in \Gamma(X, H)$ fuzzy kesiti vardır.
Böylece,

$$(s \circ (\psi \circ \gamma_1^*))(C_1) = \gamma_1^*(C_1)$$

ve

$$(s \circ (\psi \circ \gamma_2^*))(C_2) = \gamma_2^*(C_2)$$

dir.

Buradan $s \circ H$, $\gamma_1^*(C_1)$ ve $\gamma_2^*(C_2)$ arasında bir fuzzy homotopidir. ■

Şimdi, H fuzzy demeti için "fuzzy yükseltme teoremi"ni verebiliriz.

Teorem 5.4 $X = (X, b_\mu)$ ve $Y = (Y, c_{\mu_1})$ fuzzy eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar olmak üzere (H, ψ), (X, b_μ) fuzzy noktalı topolojik uzayı üzerindeki esas grupların fuzzy demeti ve $\rho_{b_\mu} \in \psi^{-1}(b_\mu)$ herhangi bir fuzzy nokta olsun. Eğer

$$f : (Y, c_{\mu_1}) \to (X, b_\mu)$$

herhangi bir fuzzy sürekli dönüşüm ise f, $\psi \circ f = f^*$ olacak şekilde bir tek

$$f^* : (Y, c_{\mu_1}) \to (H, \rho_{b_\mu})$$

yükseltmesine sahiptir.

İspat. $f : (Y, c_{\mu_1}) \to (X, b_\mu)$ bir fuzzy sürekli dönüşüm olsun. O halde $f(c_{\mu_1}) = \rho_{b_\mu}$ dür. Eğer $\rho_{b_\mu} \in \psi^{-1}(b_\mu)$ herhangi bir fuzzy nokta ise, $s(b_\mu) = \rho_{b_\mu}$ olacak biçimde bir tek $s \in \Gamma(X, H)$ fuzzy kesiti vardır. Buradan,

$$s \circ f : (Y, c_{\mu_1}) \to (H, \rho_{b_\mu})$$

bir fuzzy sürekli dönüşümdür ve

$$\psi \circ (s \circ f) = f$$

dir.

Böylece $s \circ f$, f nin H a bir fuzzy yükseltmesidir. $s \circ f$ yerine f^* diyelim. O halde s fuzzy kesiti tek olduğundan, f^* da tektir. ■

Teorem 5.5 $X = (X, b_\mu)$ ve $Y = (Y, c_{\mu_1})$ fuzzy eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar, (H, ψ) (X, b_μ) fuzzy noktalı topolojik uzayı üzerindeki esas grupların fuzzy demeti ve $\rho_{b_\mu} \in \psi^{-1}(b_\mu)$ herhangi bir fuzzy nokta ve

$$f^*, g^* : (Y, c_{\mu_1}) \to (H, \rho_{b_\mu})$$

$\psi \circ f^* = \psi \circ g^*$ olacak şekilde herhangi iki fuzzy sürekli dönüşüm olsunlar. Bu durumda

$$f^* = g^*$$

dır.

İspat. Teoremin ispatı teorem 5.4 den elde edilir. ■

6. FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLAR KATEGORİSİ

Bir lineer uzay üzerinde fuzzy norm tanımı ilk olarak 1984 yılında Katsaras tarafından ortaya atılmış, daha sonra Felbin (1992), Cheng ve Mordeson (1994), Xiao ve Zhu (2002) tarafından da çeşitli fuzzy norm tanımları verilmiştir. 2003 yılında Bag ve Samanta fuzzy norm ve fuzzy normlu lineer uzay tanımlarını yeniden yapmışlardır. Bu bölümde fuzzy normlu lineer uzaylar incelenerek, fuzzy normlu lineer uzaylar üzerinde bir operatörün fuzzy sürekliliği ve fuzzy sürekliliğin farklı türlerinin tanımları ile fuzzy sınırlılık ve fuzzy sınırlılığın farklı türleri ve tanımları verilmiştir.

Biz bunları kullanarak; fuzzy normlu lineer uzaylar kategorisini oluşturup, fuzzy normlu lineer uzaylar ve fuzzy lineer dönüşümler kategorisinden vektör uzayları ve lineer dönüşümler kategorisine bir funktorun varlığını gösterdik.

6.1 Fuzzy Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 6.1 $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan $*$ işlemi

1) Birleşimli ve $\forall a, b \in [0,1]$ için $a * b = b * a$

2) Sürekli

3) $\forall a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$

4) $\forall a \leq c, b \leq d$ ve $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a * b \leq c * d$

şartlarını sağlarsa sürekli t-norm adını alır (Bag ve Samanta 2015)

Örnek 6.1 $a * b = ab$ (cebirsel çarpım) işlemi bir sürekli t-norm belirtir.

Örnek 6.2 $a * b = min\{a, b\}$ (standart arakesit) bir sürekli t-norm belirtir.

Örnek 6.3 $a * b = max\{a + b - 1, 0\}$ (sınırlı fark) ve $a * b = \begin{cases} a & , b = 1 \\ b & , a = 1 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$

işlemleri de sürekli t-norm belirtir.

Tanım 6.2 U reel vektör uzayı , $\|.\|$ ise U üzerinde $\forall x, y \in U$ için;

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlayan reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\|.\|$ ye U üzerinde bir norm, $(U, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 6.3 X lineer uzay, $*$ sürekli t-norm ve N de $X \times (0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy küme olmak üzere $\forall x, y \in X$ ve $\forall t, s > 0$ için,

1) $N(x, t) > 0$

2) $N(x, t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\forall c \neq 0$ için $N(cx, t) = N\left(x, \dfrac{t}{|c|}\right)$

4) $N(x, t) * N(y, s) \leq N(x + y, t + s)$

5) $N(x, .) : (0, \infty) \to [0, 1]$ sürekli

6) $\lim\limits_{t \to \infty} N(x, t) = 1$

şartlan sağlandığında N ye fuzzy norm, $(X, N, *)$ üçlüsüne fuzzy normlu lineer uzay denir (Saadati ve Vaezpour 2005).

Lemma 6.1 $(X, N, *)$ fuzzy normlu lineer uzay olsun. Bu durumda,

i) $N(x, t)$, t-ye bağlı olarak azalmayandır.

ii) $N(x - y, t) = N(y - x, t)$

iii) $N(x, t) = N(-x, t)$.

İspat. i) $t < s$, $k = s - t$ olsun.

$N(x, t) = N(x, t) * 1 = N(x, t) * N(0, k) \leq N(x, t + k) = N(x, s)$

$\Rightarrow N(x, t) \leq N(x, s)$

ii) $N(x - y, t) = N((-l)(y - x), t)$

$= N(y - x, \dfrac{t}{|-1|}) = N(y - x, t)$

iii) Eğer $t > 0$ ise $N(-x, t) = N(-1x, t) = N(x, \dfrac{t}{|-1|})$

ve

$t \leq 0$ ise $N(-x,t) = 0 = N(x,t)$ dır. $\blacksquare$

Tanım 6.4 U, F (kompleks sayılar veya reel sayılar) cismi üzerinde bir lineer uzay ve N, $U \times R$ (R-reel sayılar kümesi) nin bir fuzzy alt kümesi (yani $N : U \times R \to [0,1]$) olsun. Eğer $\forall x, u \in U$ ve $\forall c \in F$ için,

N1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $N(x,t) = 0$,

N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x,t) = 1 \Leftrightarrow x = \overline{0}$,

N3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(cx,t) = N(x, \dfrac{t}{|c|})$ eğer $c \neq 0$ ise

N4) $\forall t, s \in R$ için $N(x+u, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(u,t)\}$, (burada $*$ işlemi min fonksiyonu olarak alınmıştır.)

N5) $N(x,.)$, R de azalmayan bir fonksiyon ve $\lim\limits_{t \to \infty} N(x,t) = 1$.

şartları sağlanırsa N ye U da bir fuzzy norm denir (Bag ve Samanta 2003).

Bundan sonra (U,N) çifti bir fuzzy normlu lineer uzay olarak alınacaktır.

Uyarı 6.1 $x \in U$ ve $t \in R$ için N, U üzerinde bir fuzzy norm olsun. x in normu, t reel sayısı olmak üzere $N(x,t) \in [0,1]$ ile gösterilir.

Örnek 6.4 $(U, \|\|)$ normlu lineer uzay olsun. $a, b \in [0,1]$ için $a * b = a.b$ ve $\forall x \in U$ ve $t \in R$ olmak üzere

$$N(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x\|} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan, (U,N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır (Türkmen 2011).

Çözüm.

N1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $N(x,t)$ nin tanımından $N(x,t) = 0$ dır.

N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} N(x,t) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{t}{t + \|x\|} = 1 \\ &\Rightarrow \quad t = t + \|x\| \\ &\Rightarrow \quad \|x\| = 0 \end{aligned}$$

$x \in U$ ve U normlu uzay olduğundan $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.

Tersine,

$$\begin{aligned} x = 0 \;&\Rightarrow\; \|x\| = 0 \\ &\Rightarrow\; \frac{t}{t + \|x\|} = \frac{t}{t} = 1 \end{aligned}$$

dir.

N3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $c = 0$ ise

$$\begin{aligned} N(cx, t) &= N(0, t) \\ &= \frac{t}{t + \|0\|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve $c \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} N(cx, t) &= \frac{t}{t + \|cx\|} \\ &= \frac{t/\,|c|}{t/\,|c| + \|x\|} \\ &= N(x, t/\,|c|) \end{aligned}$$

bulunur.

N4) $\forall t, s \in R$ ve x,$u \in U$ için

$$N(x + u, t + s) \geq \min\{N(x, t), N(u, s)\}$$

olduğunu gösterelim.

a) $s + t < 0 \Rightarrow s < 0$ veya $t < 0$ dır. Bu durumda $N(u, s) = 0$ veya $N(x, t) = 0$ dır. Dolayısıyla $\min\{N(x, t), N(u, s)\} = 0 = N(x + u, t + s)$ bulunur.

b) $s + t = 0 \Rightarrow s = t = 0$ veya $s = -t$ olabilir.

$s = t = 0 \Rightarrow N(x + u, t + s) = \min\{N(x, t) = 0, N(u, s) = 0\} = 0$

$s = -t \Rightarrow N(x, t) = 0$ veya $N(u, s) = 0$ olacağından

$N(x + u, t + s) = 0 = \min\{N(x, t), N(u, s)\}$ dır.

c) $s + t > 0 \Rightarrow$

i) $s < 0 < t$

ii) $t < 0 < s$

iii) $0 < t < s$

iv) $0 < s < t$

durumları olacaktır.

i) ve ii) durumları için $N(u,s)=0$ veya $N(x,t)=0$ olacağından iki durum içinde $\min\{N(x,t),N(u,s)\}=0$ olacaktır.

Yani $N(x+u,t+s)\geq \min\{N(x,t),N(u,s)\}$ olacaktır.

iii) ve iv) durumları için ise $N(x,t)>N(u,s)$ veya $N(u,s)>N(x,t)$ durumlarından biri gerçekleşecektir.

Önce $N(x,t)>N(u,s)$ durumunu alalım.

$$\begin{aligned} N(x,t)>N(u,s) \quad &\Rightarrow \quad \frac{t}{t+\|x\|}>\frac{s}{s+\|u\|} \\ &\Rightarrow \quad \frac{t}{t+\|x\|}-\frac{s}{s+\|u\|}>0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{t\,\|u\|-s\,\|x\|}{(t+\|x\|)(s+\|u\|)}>0 \\ &\Rightarrow \quad t\,\|u\|-s\,\|x\|>0 \end{aligned}$$

bulunur.

$N(x,t)>N(u,s)$ olduğundan $\min\{N(x,t),N(u,s)\}=N(u,s)$ olacaktır.

Bu durumda $N(x+u,t+s)\geq \min\{N(x,t),N(u,s)\}=N(u,s)$ olup olmadığına bakalım.

$$\frac{t+s}{t+s+\|x+u\|}\geq \frac{t+s}{t+s+\|x\|+\|u\|}$$

eşitsizliğini kullanalım.

Buradan,

$$\frac{t+s}{t+s+\|x+u\|}-\frac{s}{s+\|u\|}=\frac{t\,\|u\|-s\,\|x\|}{(t+s+\|x+u\|)(s+\|u\|)}$$

olup $t\,\|u\|-s\,\|x\|>0$ olduğundan dolayı da

$$\frac{t\,\|u\|-s\,\|x\|}{(t+s+\|x+u\|)(s+\|u\|)}>0$$

dır.

Yani

$$\frac{t+s}{t+s+\|x+u\|}>\frac{s}{s+\|u\|}$$

dır.

Buradan

$$\frac{t+s}{t+s+\|x+u\|}>\frac{s}{s+\|u\|}$$

bulunur.

Benzer şekilde $N(u, s) > N(x, t)$ durumu da incelenerek,

$N(x + u, t + s) \geq \min\{N(x, t), N(u, s)\}$ olduğu gösterilebilir.

N5) $t_1 < t_2 \leq 0$ için

$$\begin{aligned} N(x, t_1) &= N(x, t_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

$0 < t_1 < t_2$ ise

$$\begin{aligned} N(x, t_1) - N(x, t_2) &= \frac{t_1}{t_1 + \|x\|} - \frac{t_2}{t_2 + \|x\|} \\ &= \frac{(t_1 - t_2)\,\|x\|}{(t_1 + \|x\|)(t_2 + \|x\|)} \end{aligned}$$

dır.

$t_1 < t_2$ olduğundan $N(x, t_1) - N(x, t_2) < 0$ bulunur.

Yani N, R de azalmayan bir fonksiyondur.

$\lim\limits_{t \to \infty} N(x, t)$ ifadesi için iki durum söz konusudur.

$x = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} N(x, t) &= \lim_{t \to \infty} \frac{t}{t + \|0\|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir.

$x \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} N(x, t) &= \lim_{t \to \infty} \frac{t}{t + \|x\|} \\ &= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{\|x\|}{t}} \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla her iki durum için de $\lim\limits_{t \to \infty} N(x, t) = 1$ dir.

Bu şartları sağladığından N, U da bir fuzzy norm ve (U, N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

Örnek 6.5 $(U, \|\|)$ normlu lineer uzay olmak üzere $N : U \times R \to [0, 1]$ fonksiyonu

$$N(x,t) = \begin{cases} 0 & , t \leq \|x\| \\ 1 & , t > \|x\| \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda N, U de bir fuzzy normdur ve (U, N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

Çözüm.

N1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $t \leq 0 \leq \|x\|$ olduğundan $N(x, t) = 0$ dır.

N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(x, t) = 1$ olsun. Dolayısıyla $t > \|x\|$ olmalıdır.
Bu durumda $t > 0$ olduğundan $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.
Şimdi de $x = 0$ alalım. Bu durumda $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $t > \|x\|$ olduğundan $N(x, t) = 1$ dir.

N3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ ve $c \neq 0$ için

$$\begin{aligned} N(cx,t) &= \begin{cases} 0 & , t \leq \|cx\| \\ 1 & , t > \|cx\| \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , t/|c| \leq \|x\| \\ 1 & , t/|c| > \|x\| \end{cases} \\ &= N(x, t/|c|) \end{aligned}$$

dir.

N4) $\forall t, s \in R$ ve $x, y \in U$ için

$$N(x + y, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\}$$

olduğunu gösterelim.

i) $N(x + y, s + t) = 0 \Rightarrow$

$$s + t \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

olduğundan,

a. $s \leq \|x\|$ ve $t \leq \|y\| \Rightarrow$

$$N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x,s) = 0, N(y,t) = 0\}$$

b. $s \leq \|x\|$ ve $t > \|y\| \Rightarrow$

$$N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x,s) = 0, N(y,t) = 1\}$$

c. $s > \|x\|$ ve $t \leq \|y\| \Rightarrow$

$$N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x,s) = 1, N(y,t) = 0\}$$

bulunur.

ii) $N(x+y, s+t) = 1 \Rightarrow$

$$\min\{N(x,s), N(y,t)\} \leq 1$$

olduğundan

$N(x+y, s+t) = 1 \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$ dir.

N5) Tanımdan dolayı $N(x,.)$, R de azalmayan bir fonksiyondur ve $\underset{t\to\infty}{lim} N(x,t) = 1$ dir.

Dolayısıyla N, U da bir fuzzy norm ve (U,N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

Teorem 6.1 (U,N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. Kabul edelim ki "**N6**) $\forall t > 0$, $N(x,t) > 0 \Rightarrow x = \overline{0}$" sağlansın. Bu durumda $\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\{\|.\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$, U üzerindeki normun artan ailesidir ve bu aileye U üzerinde α-norm denir.

İspat. Önce $\|x\|_\alpha$ nın klasik norm olduğunu gösterelim

i) $\forall x \in U$ ve $\forall \alpha \in (0,1)$ için, $\|x\|_\alpha \geq 0$

ii) $\forall \alpha \in (0,1)$, $\|x\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\forall \alpha \in (0,1)$ ve c skaleri için $\|cx\|_\alpha = |c| \, \|x\|_\alpha$

iv) $\forall \alpha \in (0,1)$, $\|x+y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha &= \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha\} + \inf\{s > 0 : N(y,s) \geq \alpha\} \\ &\geq \inf\{s+t > 0 : N(x+y, s+t) \geq \alpha\} \\ &= \|x+y\|_\alpha \end{aligned}$$

Şimdi artan aile olduğunu gösterelim.

$\alpha_1 \leq \alpha_2$ olsun.

$\|x\|_{\alpha_1} = \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha_1\}$ ve $\|x\|_{\alpha_2} = \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha_2\}$ olduğundan, $\inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha_1\} \leq \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha_2\}$ dır. Bu ise artan aile olduğunu gösterir. ■

Teorem 6.2 U lineer uzayında $\{\|\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ normun bir artan ailesi olsun. $N' : U \times R \to [0,1]$

$$N'(x,t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq t\} & ,(x,t) \neq 0 \\ 0 & ,(x,t) = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere N', U üzerinde bir fuzzy normdur (Bag ve Samanta 2005).

Yukarıdaki iki teorem, verilen bir fuzzy normdan klasik norm elde edilebileceğini ve klasik norm verildiğinde de fuzzy norm elde edilebileceğini gösterir.

Şimdi, (U,N) fuzzy normlu uzay olsun.

"**N7)** Sıfırdan farklı her bir x elemanı için $N(x,.)$, R de sürekli fonksiyon ve $\{t : 0 < N(x,t) < 1\}$ de kesin artandır" şartı sağlansın.

Lemma 6.2 (U,N) fuzzy normlu lineer uzayı N6 ve N7 şartlarını sağlasın ve $\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ olarak tanımlanan $\{\|.\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$, U normunun bir artan ailesi olsun. Bu durumda $x_0 \neq 0$ olacak biçimdeki $x_0 \in U$ için, $N(x_0, \|x_0\|_\alpha) \geq \alpha$, $\forall \alpha \in (0,1)$.

Lemma 6.3 (U,N) fuzzy normlu lineer uzayı N6 ve N7 şartlarını sağlasın ve $\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ olarak tanımlanan $\{\|.\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$, U normunun bir ailesi olsun. Bu durumda $x \neq 0$, $\alpha \in (0,1)$ ve $t' \in R$, $t' > 0$ için $\|x\|_\alpha = t' \Leftrightarrow N(x,t') = \alpha$ dır.

Teorem 6.3 (U, N) fuzzy normlu lineer uzayı N6 ve N7 şartlarını sağlasın. $\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0 : N(x,t) \geq \alpha\}$ ve $N' : U \times R \to [0,1]$ fonksiyonu

$$N'(x,t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1) : \|x\|_\alpha \leq t\} & ,(x,t) \neq 0 \\ 0 & ,(x,t) = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

i) $\{\|.\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ U üzerinde normun artan bir ailesidir.

ii) N', U üzerinde bir fuzzy normdur.

iii) $N = N'$ dır (Bag ve Samanta 2005).

Yani, bazı şartlar altında bir fuzzy norm yardımıyla yeni bir fuzzy norm oluşturabiliriz. Üstelik bu iki fuzzy norm birbirine eşit olabilir.

Tanım 6.5 U, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve N^*, $U \times R$ nin bir fuzzy alt kümesi (yani $N^* : U \times R \to [0,1]$) olsun. Eğer $\forall x, u \in U$, $\forall c \in F$ için,

N*1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $N^*(x,t) = 1$,

N*2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N^*(x,t) = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$,

N*3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N^*(cx,t) = N^*(x, \frac{t}{|c|})$, $(c \neq 0)$

N*4) $\forall t, s \in R$ için $N^*(x+u, s+t) \leq \max\{N^*(x,s), N^*(u,t)\}$, (burada $*$ işlemi max fonksiyonu olarak alınmıştır)

N*5) $N^*(x,.)$, R de artmayan bir fonksiyon ve $\lim\limits_{t\to\infty} N^*(x,t) = 0$.

şartları sağlanırsa N^* a, U da bir fuzzy antinorm denir.

(U, N^*) çiftine de bir fuzzy antinormlu lineer uzay denir.

Uyarı 6.2 Yukarıdaki şartlara ek olarak,

N*6) $\forall t > 0$, $N^*(x,t) < 1 \Rightarrow x = \overline{0}$

N*7) Sıfırdan farklı her bir x elemanı için, $N^*(x,.)$ R de sürekli fonksiyon ve $\{t : 0 < N^*(x,t) < 1\}$ de kesin artandır.

sağlansın. Bu durumda N^* a Bag-Samanta anlamında bir fuzzy antinorm denir.

Örnek 6.6 $(U, \|\|)$ normlu lineer uzay olmak üzere,
$N^* : U \times R \to [0,1]$ fonksiyonu

$$N(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\|x\|}{t+\|x\|} & , t > 0 \\ 1 & , t \leq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda N^*, U de bir fuzzy antinormdur.

Uyarı 6.3 N^*, U da bir fuzzy antinormdur ancak ve ancak $1 - N^*$, U da bir fuzzy normdur.

6.2 Fuzzy Normlu Lineer Uzaylar Kategorisi

Bu alt bölümde fuzzy normlu lineer uzaylar üzerinde bazı dönüşümler tanımlanarak bazı kategoriler oluşturulmuştur.

Bu alt bölüm boyunca U ile V aynı skaler cisim üzerinde vektör uzaylarını, (U, N_1) ile (V, N_2) de fuzzy normlu lineer uzayları gösterecektir.

Tanım 6.6 T, (U, N_1) den (V, N_2) ye bir dönüşüm ve $x_0 \in U$ olsun. Eğer $\forall x \in U$, $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$N_1(x - x_0, \delta) > 1 - \beta \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > 1 - \alpha$$

olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$, $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ bulunabiliyorsa, T ye $x_0 \in U$ da fuzzy süreklidir denir.
Eğer T, U nun her noktasında fuzzy sürekli ise, T ye U da fuzzy süreklidir denir.

Tanım 6.7 T, (U, N_1) den (V, N_2) ye dönüşümü verilsin. Eğer V deki her açık fuzzy kümenin ters görüntüsü U da açık oluyorsa T dönüşümüne fuzzy süreklidir denir.

Uyarı 6.4 (U, N) fuzzy normlu lineer uzay olmak üzere $B(x, \alpha, t) = \{y : N(x - y, t) > 1 - \alpha\}$ açık yuvarını içeren fuzzy kümeler açıktır.

Tanım 6.8 (U, N_1) ve (V, N_2) iki fuzzy normlu lineer uzay ve $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ dönüşümü verilsin.
$\forall x, y \in U$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

ve

$$T(ax) = aT(x)$$

sağlanıyorsa T ye lineer dönüşüm denir.

Teorem 6.4 (U, N_1) ve (V, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer dönüşüm olsun. T, U da fuzzy süreklidir ancak ve ancak T bir $x_0 \in U$ noktasında fuzzy süreklidir.

İspat. $(\Rightarrow)$ İspatın bu kısmı açıktır.
$(\Leftarrow)$ $y \in V$ herhangi bir eleman olsun. T nin y de fuzzy sürekli olduğunu göstereceğiz.
$\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ olsun. T x_0 da fuzzy sürekli olduğundan, $\forall x \in U$ için

$$N_1(x - x_0, \delta) > 1 - \beta$$

iken

$$N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > 1 - \alpha$$

olacak biçimde $\delta > 0$, $\beta \in (0, 1)$ vardır.
x yerine $x + x_0 - y$ yazarsak, $\forall x \in U$ için

$$N_1(x + x_0 - y - x_0, \delta) > 1 - \beta$$

olduğunda

$$N_2(T(x + x_0 - y) - T(x_0), \varepsilon) > 1 - \alpha$$

yani

$$N_1(x-y,\delta) > 1-\beta$$

olduğunda

$$N_2(T(x)-T(y),\varepsilon) > 1-\alpha$$

elde edilir.

Böylece T, $y \in V$ de fuzzy süreklidir.

O halde T, U üzerinde süreklidir. ■

Teorem 6.5 Fuzzy normlu lineer uzaylar üzerindeki her birim fuzzy fonksiyon fuzzy süreklidir.

İspat. $\forall\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$ için $\exists\delta = \delta(\alpha,\varepsilon) = \varepsilon > 0$, $\beta = \beta(\alpha,\varepsilon) \in (0,1)$ var $\ni \alpha > \beta$ ve $x_0 \in U$ için

$$N_1(x-x_0,\delta) > 1-\beta$$

olduğunda

$$\begin{aligned} N_2(T(x)-T(x_0),\varepsilon) &= N_2(T(x-x_0),\varepsilon) \\ &= N_2((x-x_0),\varepsilon) \\ &> 1-\beta \\ &> 1-\alpha \end{aligned}$$

Böylece T, $x_0 \in U$ da fuzzy süreklidir.

x_0 noktası U da keyfi bir nokta olduğundan, T her noktada fuzzy süreklidir. ■

Tanım 6.9 T, (U,N_1) den (V,N_2) ye bir dönüşüm ve $x_0 \in U$ olsun. Eğer $\forall x \in U$, $\forall\varepsilon > 0$ için

$$N_2(T(x)-T(x_0),\varepsilon) \geq N_1(x-x_0,\delta)$$

olacak şekilde $\exists\delta > 0$ var ise, T ye $x_0 \in U$ da kuvvetli fuzzy süreklidir denir.

Eğer T, U nun her noktasında kuvvetli fuzzy sürekli ise, T ye U da kuvvetli fuzzy süreklidir denir.

Tanım 6.10 T, (U, N_1) den (V, N_2) ye bir dönüşüm ve $x_0 \in U$ olsun. Eğer $\forall x \in U$, $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$N_1(x - x_0, \delta) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq \alpha$$

olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ var ise T ye $x_0 \in U$ da zayıf fuzzy süreklidir denir. Eğer T, U nun her noktasında zayıf fuzzy sürekli ise T ye U da zayıf fuzzy süreklidir denir.

Lemma 6.4 T, (U, N_1) den (V, N_2) ye dönüşümü kuvvetli fuzzy sürekli ise, zayıf fuzzy süreklidir (Bag ve Samanta 2005).

Tanım 6.11 T, (U, N_1) den (V, N_2) ye bir dönüşüm ve $x_0 \in U$ olsun. Eğer $\forall n$ için $x_n \in U$ olacak biçimde $\forall \{x_n\}_n$ dizisi için $x_n \to x_0$ iken $T(x_n) \to T(x_0)$ oluyorsa, yani $\forall t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} N_1(x_n - x_0, t) = 1 \Rightarrow \underset{n\to\infty}{lim} N_2(T(x_n) - T(x_0), t) = 1$$

ise T ye $x_0 \in U$ da dizisel fuzzy süreklidir denir.
Eğer T, U nun her noktasında dizisel fuzzy sürekli ise T ye U da dizisel fuzzy süreklidir denir.

Teorem 6.6 (U, N_1) ve (V, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ ye bir dönüşüm olsun. Eğer T kuvvetli fuzzy sürekli ise, T dizisel fuzzy süreklidir (Türkmen 2011).

İspat. Önce T, $x_0 \in U$ noktasında kuvvetli fuzzy sürekli olsun.
O halde her bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x \in U$ için,

$$N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x - x_0, \delta) \qquad (i)$$

olacak şekilde $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ vardır.

$\{x_n\}$, U da $x_n \to x_0$ olmak üzere bir dizi olsun. Buradan $\forall t > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} N_1(x_n - x_0, t) = 1 \qquad (ii)$$

dır.

Buradan (i) den dolayı $n = 1, 2, \ldots$ için $N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) \geq N_1(x_n - x_0, \delta)$ yazabiliriz.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) \geq \lim\limits_{n\to\infty} N_1(x_n - x_0, \delta)$

$\Rightarrow$(ii) den dolayı $\lim\limits_{n\to\infty} N_2(T(x_n) - T(x_0), \varepsilon) = 1$.

ε istenildiği kadar küçük pozitif sayı olduğunda $T(x_n) \to T(x_0)$ dır. ■

Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir. Şimdi dizisel fuzzy sürekli T dönüşümünün, kuvvetli fuzzy sürekli olmadığına dair bir örnek verelim.

Örnek 6.7 $(X = R, \|\|)$ normlu lineer uzayında $\forall x \in R$ için $\|x\| = |x|$ olsun. $N_1, N_2 : X \times R \to [0, 1]$ fonksiyonları $k > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$N_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + |x|} & , \forall x \in X, t > 0 \\ 0 & , \forall x \in X, t \leq 0 \end{cases}$$

$$N_2(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + k\,|x|} & , \forall x \in X, t > 0 \\ 0 & , \forall x \in X, t \leq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (X, N_1) ve (X, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylardır.

Şimdi

$$T(x) = \frac{x^4}{1 + x^2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$x_n \in X$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \to x_0$ olsun.

Bu durumda $\forall t > 0$ için, $\lim\limits_{n\to\infty} N_1(x_n - x_0, t) = 1$ dir.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t}{t + |x_n - x_0|} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} N_2(T(x_n)-T(x_0),t) &= \frac{t}{t+k\left|\dfrac{x_n^4}{1+x_n^2}-\dfrac{x_0^4}{1+x_0^2}\right|} \\ &= \frac{t\,|1+x_n^2|\,|1+x_0^2|}{t\,|1+x_n^2|\,|1+x_0^2|+k\,|x_n-x_0|\,|(x_n+x_0)(x_n^2+x_0^2)+x_n^2x_0^2(x_n+x_0)|} \end{aligned}$$

dır.

O halde $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0$ için $N_2(T(x_n)-T(x_0),t)=1$ bulunur.

$\Rightarrow (X,N_2)$ de $T(x_n)\to T(x_0)$ dır. Dolayısıyla T dizisel süreklidir.

T nin kuvvetli sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall x\in X$ için $N_2(T(x)-T(x_0),\varepsilon)\geq N_1(x-x_0,\delta)$ olacak şekilde $\exists\delta>0$ vardır.

$$\begin{aligned} N_2\left(\frac{x^4}{1+x^2}-\frac{x_0^4}{1+x_0^2},\varepsilon\right) &\geq N_1(x-x_0,\delta) \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon+k\left|\dfrac{x^4}{1+x^2}-\dfrac{x_0^4}{1+x_0^2}\right|} &\geq \frac{\delta}{\delta+|x-x_0|} \\ \frac{\varepsilon\,|1+x^2|\,|1+x_0^2|}{\varepsilon\,|1+x^2|\,|1+x_0^2|+k\,|x^4+x^4x_0^2-x_0^4-x_0^4x^2|} &\geq \frac{\delta}{\delta+|x-x_0|} \\ \delta &\leq \frac{\varepsilon\,|1+x^2|\,|1+x_0^2|}{k\,|x+x_0|\,|x^2(1+x_0^2)+x_0^2|},\ (x\neq x_0) \end{aligned}$$

$\forall x(\neq x_0)\in X$ için eğer $\delta\leq\dfrac{\varepsilon\,|1+x^2|\,|1+x_0^2|}{k\,|x+x_0|\,|x^2(1+x_0^2)+x_0^2|}$ eşitsizliğini sağlayan $\exists\delta>0$ varsa T nin x_0 da sürekli olur.

Buradan $\delta_1=\inf\left|\dfrac{(1+x^2)(1+x_0^2)}{(x+x_0)(x^2(1+x_0^2)+x_0^2)}\right|\ni x\in X,\ x\neq x_0$ alınırsa $\delta=\dfrac{\varepsilon}{k}\delta_1$ dır.

Dolayısıyla $\delta\leq\dfrac{\varepsilon\,|1+x^2|\,|1+x_0^2|}{k\,|x+x_0|\,|x^2(1+x_0^2)+x_0^2|}$ eşitsizliği vardır. Fakat $\delta_1=0$ olması mümkün değildir. Bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak, T kuvvetli fuzzy sürekli değildir.

Teorem 6.7 (U,N_1) ve (V,N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T:(U,N_1)\to(V,N_2)$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

T fuzzy süreklidir ancak ve ancak T dizisel fuzzy süreklidir.

Tanım 6.12 (U, N_1) ve (V, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in U$ ve $t > 0$ için

$$N_2(T(x), t) > mN_1(x, t)$$

olacak şekilde $0 < m < 1$ sayısı var ise, T fuzzy sınırlıdır denir (Saadati ve Park 2006).

Uyarı 6.5 Dikkat edilecek olursa, (U, N_1) ve (V, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere, fuzzy sınırlı lineer operatörlerin kümesi olan $SL(U, V)$ kümesi

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)x &= T_1(x) + T_2(x), \; x \in U \\ (\alpha T)x &= \alpha T(x), \alpha \in \mathbb{R}, \; x \in U \end{aligned}$$

işlemleri altında bir vektör uzayı oluşturur (Thoubaan 2011).

Üstelik bu vektör uzayı yapısı ile birlikte bir fuzzy normlu uzay elde edilir.

Tanım 6.13 $SL(U, V)$, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $SL(U, V)$ üzerinde bir fuzzy norm $A = \{(T, t), N(T, t)) : (T, t) \in SL(U, V) \times \mathbb{R}^+\}$ formunun bir objesi olsun. N fuzzy normu, $SL(U, V) \times \mathbb{R}^+$ nin fuzzy alt kümesi olmak üzere $T_1, T_2 \in SL(U, V)$ ve $c \in K$ için

N1) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $N(T, t) > 0$,

N2) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(T, t) = 1 \Leftrightarrow T = \overline{0}$,

N3) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N(cT, t) = N(T, \frac{t}{|c|})$, $(c \neq 0)$

N4) $\forall t, s \in R$ için $N(T_1 + T_2, s + t) \geq \min\{N(T_1, s), N(T_2, t)\}$, (burada $*$ işlemi min fonksiyonu olarak alınmıştır.)

N5) $N(T, .)$, R de azalmayan bir fonksiyon ve $\lim\limits_{t \to \infty} N(T, t) = 1$

özelliklerini sağlasın. Bu durumda $(SL(U, V), A)$ ikilisine operatör fuzzy normlu lineer uzay denir.

Örnek 6.8 $(SL(U,V), \|.\|)$ bir normlu lineer uzay olmak üzere

$$N(T,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t+\|T\|} & ,\forall T \in SL,\ t>0 \\ 0 & ,\forall T \in SL,\ t \leq 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan $A = \{(T,t), N(T,t)) : (T,t) \in SL(U,V) \times \mathbb{R}^{+}\}$ bir operatör fuzzy normlu lineer uzaydır.

Tanım 6.14 (U, N_1) ve (V, N_2) iki fuzzy normlu lineer uzay ve $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in U$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$N_2(T(x), t) \geq N_1(x, \frac{t}{M})$$

olacak şekilde $\exists M \in \mathbb{R}^{+}$ var ise, T ye U da kuvvetli fuzzy sınırlıdır denir (Bag ve Samanta 2005).

Örnek 6.9 Sıfır ve özdeşlik operatörleri kuvvetli fuzzy sınırlıdır.

Örnek 6.10 $(X, \|\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $N_1, N_2 : X \times R \to [0,1]$ ve α_1 ile α_2 iki sabit reel sayı $\ni \alpha_1 > \alpha_2$ olmak üzere

$$N_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t+\alpha_1 \|x\|} & ,t>0 \\ 0 & ,t \leq 0 \end{cases}$$

ve

$$N_2(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t+\alpha_2 \|x\|} & ,t>0 \\ 0 & ,t \leq 0 \end{cases}$$

fonksiyonları verilsin.

Burada N_1 ve N_2 nin fuzzy norm olduğu hemen elde edilir.

$T : (X, N_1) \to (X, N_2)$ operatörünü $r(\neq 0) \in R$ sabit olmak üzere $T(x) = rx$ olarak tanımlarsak, T bir lineer operatördür.

T nin kuvvetli fuzzy sınırlı bir operatör olduğunu gösterelim.

Bir M pozitif sayısı $M \geq |r|$ olacak şekilde seçilirse, $\forall x \in X$ ve $\forall t \in R$ için $N_2(T(x),t) \geq N_1(x, \dfrac{t}{M})$ olduğu gösterilebilir.

Gerçekten; $\forall x \in X$ ve $M \geq |r|$ için $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ olacak biçimde $\alpha_1 M \geq \alpha_2 |r|$ vardır.

Buradan, $\alpha_1 M \|x\| \geq \alpha_2 |r| \|x\|$ elde edilir.

$\Rightarrow \forall t > 0$ için $t + \alpha_1 M \|x\| \geq t + \alpha_2 |r| \|x\|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{t + \alpha_2 |r| \|x\|} \geq \dfrac{1}{t + \alpha_1 M \|x\|}$

$\Rightarrow \forall t > 0$ için $\dfrac{t}{t + \alpha_2 |r| \|x\|} \geq \dfrac{t}{t + \alpha_1 M \|x\|}$

$\Rightarrow \forall t > 0$ için $\dfrac{t}{t + \alpha_2 |r| \|x\|} \geq \dfrac{\frac{t}{M}}{\frac{t}{M} + \alpha_1 \|x\|}$

$\Rightarrow \forall t > 0$ ve $\forall x \in X$ için $N_2(T(x),t) \geq N_1(x, \dfrac{t}{M})$ bulunur.

Benzer şekilde $t \leq 0$ için de kuvvetli fuzzy sınırlılık gösterilebilir.

Dolayısıyla, T kuvvetli fuzzy sınırlı lineer operatördür.

Tanım 6.15 (U, N_1) ve (V, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in U$ ve $\forall t \in R$ için

$$N_1(x, \frac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x),t) \geq \alpha$$

olacak şekilde $\exists M_\alpha > 0 \ni \forall \alpha \in (0,1)$ var ise, T ye zayıf fuzzy sınırlı denir.

Teorem 6.8 (U, N_1) ve (V, N_2) fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Eğer T kuvvetli fuzzy sınırlı ise, T zayıf fuzzy sınırlıdır.

İspat. T kuvvetli fuzzy sınırlı olsun.

O halde $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$ için $N_2(T(x),t) \geq N_1(x, \dfrac{t}{M})$ olacak şekilde $\exists M > 0$ vardır.

Buradan $N_1(x, \dfrac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha$ olacak şekilde $\forall \alpha \in (0,1)$ için $\exists M_\alpha (= M) > 0$ varlığını söyleyebiliriz.

Dolayısıyla $N_2(T(x),t) \geq \alpha$ olur.

Böylece T zayıf fuzzy sınırlıdır. $\blacksquare$

Şimdi yukarıda verilen teoremin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 6.11 $(X, \|\|)$ bir normlu lineer uzay olmak üzere $N_1, N_2 : X \times R \to [0,1]$ için

$$N_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 - \|x\|^2}{t^2 + \|x\|^2} & , t > \|x\| \\ 0 & , t \leq \|x\| \end{cases}$$

ve

$$N_2(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x\|} & , \forall x \in X, t > 0 \\ 0 & , \forall x \in X, t \leq 0 \end{cases}$$

şekilnde tanımlı N_1 ve N_2 fuzzy normları verilsin.

$T : (X, N_1) \to (X, N_2)$ lineer operatörü $\forall x \in X$ için $T(x) = x$ olarak seçilirse, T nin zayıf fuzzy sınırlı bir operatör iken kuvvetli fuzzy sınırlı olmadığını gösterelim.

$\forall \alpha \in (0,1)$ için $M_\alpha = \dfrac{1}{1-\alpha}$ seçilirse $t > \|x\|$ ve $t \leq \|x\|$ durumlarının her ikisi için de $N_1(x, \dfrac{t}{M_\alpha}) \geq \alpha \Rightarrow N_2(T(x), t) \geq \alpha$ elde edilir.

Böylece T zayıf fuzzy sınırlıdır.

Şimdi T nin kuvvetli fuzzy sınırlı olmadığını gösterelim.

$t > \|x\|$, $x \neq 0$ için

$$N_2(T(x), t) \geq N_1(x, \frac{t}{M}) \Leftrightarrow \frac{t}{t + \|x\|} \geq \frac{t^2 - M^2 \|x\|^2}{t^2 + M^2 \|x\|^2}$$

Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa $t \to \infty$ iken $M = \infty$ sonucuna ulaşılır.

Böylece T kuvvetli fuzzy sınırlı değildir.

Teorem 6.9 (U, N_1) ve (V, N_2), N7 şartını sağlayan fuzzy normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda, T fuzzy süreklidir ancak ve ancak T fuzzy sınırlıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: T için iki durum vardır:

$T = 0$ icin ispat açıktır.

$T \neq 0$ olsun. Bu durumda $\|T\| \neq 0$ olup T fuzzy sınırlı olsun.

Herhangi bir $x_0 \in U$ için $\varepsilon > 0, \alpha \in (0,1)$ verildiğinde $\delta = \delta(\alpha,\varepsilon)$, $\beta = \beta(\alpha,\varepsilon) \in (0,1)$ vardır öyle ki, T lineer olduğundan her $x \in U$ için,

$$N_1(x - x_0, \delta) > 1 - \beta$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\delta}{\beta + \|x - x_0\|} > 1 - \beta$$

$\Rightarrow$

$$\|x - x_0\| < \frac{\delta\beta}{1-\beta}$$

dır. Şimdi,

$$\frac{\delta\beta}{1-\beta} = \frac{\varepsilon\alpha}{\|T\|(1-\alpha)}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(x_0)\| &= \|T(x - x_0)\| \\
&< \|T\| \|x - x_0\| \\
&\leq \|T\| \frac{\varepsilon\alpha}{\|T\|(1-\alpha)} \\
&= \frac{\varepsilon\alpha}{(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\|T(x) - T(x_0)\|(1-\alpha) + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon\alpha < 0$$

ve

$$\|T(x) - T(x_0)\|(1-\alpha) - \varepsilon + \varepsilon(1-\alpha) < 0$$

dır.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(1-\alpha)(\|T(x) - T(x_0)\| + \varepsilon) < \varepsilon$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|T(x) - T(x_0)\|} > (1-\alpha)$$

elde edilir. Bu durumda ise

$$N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > (1-\alpha)$$

sonucuna ulaşılır. $x_0 \in (U, N_1)$ keyfi olduğundan T süreklidir.

$(\Rightarrow)$: T, keyfi $x_0 \in U$ noktasında sürekli olsun.

Bu durumda $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $N_1(x - x_0, \delta) > 1 - \beta$ için $N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > 1 - \alpha$ olacak şekilde $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon)$, $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ vardır.

Herhangi bir $y \neq 0 \in (U, N_1)$ alınsın.

$$x = x_0 + \frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|} y$$

ise

$$x - x_0 = \frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|} y$$

olacaktır. T sürekli olduğundan,

$N_2(T(x) - T(x_0), \varepsilon) > 1 - \alpha$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|T(x) - T(x_0)\|} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|T(x - x_0)\|} \\
&= \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \left\| T\left(\frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|} y\right) \right\|} \\
&= \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|T(y)\| \frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|}}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\|T(y)\| \frac{\delta\beta}{(1-\beta)\|y\|} < \frac{\varepsilon\alpha}{(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \|T(y)\| < \frac{\varepsilon\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\delta\beta} \|y\|$$

bulunur.

$m = \dfrac{\varepsilon\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\delta\beta}$ şeklinde seçilirse $\|T(y)\| < m\|y\|$ olduğundan $\dfrac{t}{t + \|T(y)\|} > m\dfrac{t}{t + \|y\|}$ yazılabilir.

Dolayısıyla $N_2(T(y), t) > rN_1(y, t)$ elde edilir.

Böylece T fuzzy sınırlı operatördür. ■

Teorem 6.10 (U, N_1) ve (V, N_2) iki fuzzy normlu lineer uzay ve $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda,

(i) Eğer T bir $x_0 \in U$ noktasında kuvvetli fuzzy sürekli ise T, U da kuvvetli fuzzy süreklidir.

(ii) T kuvvetli fuzzy süreklidir ancak ve ancak T kuvvetli fuzzy sınırlıdır (Bag ve Samanta 2005).

Teorem 6.11 (U, N_1) ve (V, N_2) iki fuzzy normlu lineer uzay ve $T : (U, N_1) \to (V, N_2)$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda,

(i) Eğer T bir $x_0 \in U$ noktasında zayıf fuzzy sürekli ise T, U da zayıf fuzzy süreklidir.

(ii) T zayıf fuzzy süreklidir ancak ve ancak T zayıf fuzzy sınırlıdır (Bag ve Samanta 2005).

Şimdi fuzzy normlu lineer uzaylar ve fuzzy lineer dönüşümler kategorisinden vektör uzayları ve lineer dönüşümler kategorisine bir funktorun var olduğunu göstereceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 6.16 A ve B sırasıyla F cismi üzerinde tanımlı U, V vektör uzaylarının fuzzy alt uzayları ve $K : A \to B$ ye bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x_t, y_h \in A$ fuzzy noktalar, $\lambda, \alpha \in F$ ve $t, h \in [0, 1]$ için

$$K(\lambda x_t, \alpha y_h) \geq \min\{K(x_t), K(y_h)\}$$

sağlanırsa, $K : A \to B$ ye fuzzy alt uzay üzerinde bir fuzzy lineer dönüşüm denir.

Teorem 6.12 A ve B sırasıyla F cismi üzerinde tanımlı U, V vektör uzaylarının fuzzy alt uzayları olsunlar. $K : A \to B$ bir fuzzy lineer dönüşümdür ancak ve ancak $T : U \to V$ vektör uzayları üzerinde bir lineer dönüşümdür.

İspat. $(\Rightarrow)$ $K : A \to B$ bir fuzzy lineer dönüşüm olduğundan $\forall x_{t_1}, y_{t_2} \in A$ ve $\lambda, \alpha \in F$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$ için $K(\lambda x_{t_1}, \alpha y_{t_2}) \geq \min\{K(x_{t_1}), K(y_{t_2})\}$ dır.

$T : U \to V$ vektör uzayları üzerinde bir lineer dönüşüm olduğunu göstermek için $\forall\ x, y \in U$ ve $\lambda, \alpha \in F$ olmak üzere $T(\lambda x + \alpha y) = \lambda T(x) + \alpha T(y)$ olduğunu göstermeliyiz.

$x_{t_1}, y_{t_2} \in A$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$ olduğundan $K(x_{t_1}) = T(x)$, $K(y_{t_2}) = T(y)$ olacak şekilde $x, y \in U$ vardır.

Buradan $x = T^{-1}(K(x_{t_1}))$ ve $y = T^{-1}(K(y_{t_2}))$ dır.

$$\begin{aligned}
T(\lambda x + \alpha y) &= T(\lambda x) + T(\alpha y) \\
&= T(\lambda T^{-1}(K(x_{t_1}))) + T(\alpha T^{-1}(K(y_{t_2}))) \\
&= \lambda T(T^{-1}(K(x_{t_1}))) + \alpha T(T^{-1}(K(y_{t_2}))) \\
&= \lambda K(x_{t_1}) + \alpha K(y_{t_2}) \\
&= \lambda T(x) + \alpha T(y)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\forall\ x, y \in U$ ve $\lambda, \alpha \in F$ için $T(\lambda x + \alpha y) = \lambda T(x) + \alpha T(y)$ dir.
Böylece $T : U \to V$ vektör uzayları üzerinde bir lineer dönüşümdür.
$(\Leftarrow)$ $T : U \to V$ vektör uzayları üzerinde bir lineer dönüşüm olduğundan, $\forall\ x, y \in U$ ve $\lambda, \alpha \in F$ için $T(\lambda x + \alpha y) = \lambda T(x) + \alpha T(y)$ dir.
$K : A \to B$ bir fuzzy lineer dönüşüm olduğunu göstermek için $\forall x_{t_1}, y_{t_2} \in A$ ve $\lambda, \alpha \in F$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ için $K(\lambda x_{t_1}, \alpha y_{t_2}) \geq \min\{K(x_{t_1}), K(y_{t_2})\}$ olduğunu göstermeliyiz.
$\lambda, \alpha \in F$ ve $x_{t_1}, y_{t_2} \in A$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ olmak üzere $K(x_{t_1}) = T(x)$, $K(y_{t_2}) = T(y)$ için $x = T^{-1}(K(x_{t_1}))$ ve $y = T^{-1}(K(y_{t_2}))$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
K(\lambda x_{t_1}, \alpha y_{t_2}) &= K(\lambda x_{t_1}) + K(\alpha y_{t_2}) \\
&= K(\lambda K^{-1}(T(x))) + K(\alpha K^{-1}(T(y))) \\
&= \lambda K(K^{-1}(T(x))) + \alpha K(K^{-1}(T(y))) \\
&= \lambda T(x) + \alpha T(y) \\
&= \lambda K(x_{t_1}) + \alpha K(y_{t_2}) \\
&\geq K(x_{t_1}) + K(y_{t_2})
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $K(\lambda x_{t_1}, \alpha y_{t_2}) \geq K(x_{t_1})$ ve $K(\lambda x_{t_1}, \alpha y_{t_2}) \geq K(y_{t_2})$ dır. Böylece $\forall x_{t_1}, y_{t_2} \in A$ ve $\lambda, \alpha \in F$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ için $K(\lambda x_{t_1}, \alpha y_{t_2}) \geq \min\{K(x_{t_1}), K(y_{t_2})\}$ dır. O halde $K : A \to B$ bir fuzzy lineer dönüşümdür. ∎

Teorem 6.13 A, B, C sırasıyla F cismi üzerinde tanımlı U, V, W vektör uzaylarının fuzzy alt uzayları ve $K : A \to B$, $G : B \to C$ fuzzy lineer dönüşümler olsunlar. Bu durumda $G \circ K : A \to C$ de bir fuzzy lineer dönüşümdür.

İspat. K ve G fuzzy lineer dönüşümler olmak üzere,
$\forall x_{t_1}, y_{t_2} \in A$ ve $\lambda, \alpha \in F, t_1, t_2 \in [0,1]$ için $K(\lambda x_{t_1} + \alpha y_{t_2}) = \sup\{\inf\{\lambda, K(x_{t_1}), \alpha, K(y_{t_2})\}$
$\forall z_{t_3}, u_{t_4} \in B$ ve $\lambda, \alpha \in F, t_3, t_4 \in [0,1]$ için $G(\lambda z_{t_3} + \alpha u_{t_4}) = \sup\{\inf\{\lambda, G(z_{t_3}), \alpha, G(u_{t_4})\}$,
ve
$\forall a_{t_5}, b_{t_6} \in A, \forall t_5, t_6 \in [0,1]$ için $K(x_{t_1}) = z_{t_3}, K(y_{t_2}) = u_{t_4}, G(z_{t_3}) = a_{t_5}, G(u_{t_4}) = b_{t_6}$
olsun.
$G \circ K : A \to C$ nin fuzzy lineer dönüşüm olduğunu göstermek için, $a_{t_5}, b_{t_6} \in A$ $(a, b \in U$ ve $t_5, t_6 \in [0,1])$, $\forall\ \lambda, \alpha \in F$ olsun.
Buradan

$$
\begin{aligned}
G \circ K(\lambda a_{t_5} + \alpha b_{t_6}) &= G(K(\lambda a_{t_5} + \alpha b_{t_6})) \\
&\geq G(\min\{K(a_{t_5}), K(b_{t_6})\}) \\
&= G(\min\{z_{t_3}, u_{t_4}\}) \\
&= \min\{G(z_{t_3}), G(u_{t_4})\} \\
&= \min\{G(K(x_{t_1})), G(K(y_{t_2}))\} \\
&= \min\{G \circ K(a_{t_5}), G \circ K(b_{t_6})
\end{aligned}
$$

dır. Dolayısıyla $G \circ K : A \to C$ bir fuzzy lineer dönüşümdür. ■

Teorem 6.14 Fuzzy normlu lineer uzaylar ve fuzzy lineer dönüşümler kategorisinden, vektör uzayları ve lineer dönüşümler kategorisine bir funktor vardır.

İspat. FN_L fuzzy normlu lineer uzaylar ve lineer dönüşümler kategorisini göstermek üzere; FN_L nin objeleri fuzzy normlu lineer uzaylar kümesi $ob(FN_L)$ ile, FN_L nin morfizmleri olan fuzzy lineer dönüşümlerin kümesi ise $MorFN_L$ ile verilsin. Bu kategori cat_1 ve cat_2 yi sağlar.
VU vektör uzayları ve lineer dönüşümler kategorisini göstermek üzere; VU nin objeleri olan vektör uzayları kümesi $ob(VU)$ ile, VU nin morfizmleri olan lineer dönüşümlerin kümesi ise $\forall U_1, U_2 \in ob(VU)$ için $[U_1, U_2]_{VU} \in MorVU$ ile verilsin. Bu kategori de cat_1 ve cat_2 yi sağlar.
Şimdi FN_L kategorisinden VU kategorisine bir funktoryal geçiş olduğunu gösterelim.

Öncelikle VU ve FN_L kategoriler olmak üzere FN_L nin her bir (U_1, N_1) objesini VU nin bir U_1 objesine, FN_L nin her bir $T_1 : (U_1, N_1) \to (U_2, N_2)$ morfizmini ise VU daki bir $f_1 : U_1 \to U_2$ morfizmine dönüştüren ve funktor olma şartları sağlayan bir F dönüşümü FN_L den VU ya bir funktordur. Bu funktoru $F : FN_L \to VU$ ile gösterelim.

$$\boxed{(U_1, N_1) \xrightarrow{T_1} (U_2, N_2) \xrightarrow{T_2} (U_3, N_3)} \quad \Rightarrow \quad FN_L$$

$$\downarrow F$$

$$\boxed{U_1 \xrightarrow{f_1} U_2 \xrightarrow{f_2} U_3} \quad \Rightarrow \quad VU$$

Burada $F(U_1, N_1) = U_1$, $F(U_2, N_2) = U_2$, $F(U_3, N_3) = U_3$, ve $f_1 = F(T_1)$, $f_2 = F(T_2)$ olup, funktor şartları sağlanır. Bu F funktoru FN_L nin objelerinin norm özelliğini, morfizmlerinin ise fuzzy özelliğini unutturur. ■

Benzer şekilde aşağıdaki bazı funktorları da verebiliriz.

Sonuç 6.1 Fuzzy normlu lineer uzaylar ve fuzzy sürekli fonksiyonlar kategorisinden, vektör uzayları ve lineer dönüşümler kategorisine bir funktor vardır.

Sonuç 6.2 Fuzzy normlu lineer uzaylar ve fuzzy sınırlı fonksiyonlar kategorisinden, vektör uzayları ve lineer dönüşümler kategorisine bir funktor vardır.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde önce, bir fuzzy topolojik uzayın esas grubu oluşturularak, fuzzy noktalı topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli fonksiyonlar kategorisinden, fuzzy esas gruplar ve grup homomorfizmleri kategorisine bir funktorun varlığı ele alınmıştır. Daha sonra fuzzy eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar üzerinde fuzzy esas grupların demeti bizim tarafımızdan oluşturularak, bu demet üzerinde fuzzy yükseltme teoremi verilmiştir. En son kısımda fuzzy normlu lineer uzaylar ve fuzzy normlu lineer uzaylar arasındaki bazı dönüşümleri kullanarak oluşturduğumuz kategoriler ile klasikte bildiğimiz kategoriler arasında bir funktoryal geçiş bulmaya çalıştık. Fuzzy yapılı kategorilerle, fuzzy yapılı olmayan kategoriler arasında bir funktoryal geçişin var olduğunu göstedik.

KAYNAKLAR

Bag, T. and Samanta, S.K. 2003. *Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces.* J. Fuzzy Math., 11 (3); 687–705.

Bag, T. and Samanta, S.K. 2005. *Fuzzy Bounded Linear Operators.* Fuzzy Sets and Systems, 151; 513-547.

Bag, T. and Samanta, S.K. 2008. *A Comparative Study of Fuzzy Norms on a Linear Spaces.* Fuzzy Sets and Systems, 159; 673-684.

Bag,T. and Samanta, S.K.2015. *Operator's Fuzzy Norm and Some Properties.* Fuzzy Information and Engineering, 7; 151-164.

Balcı, S. 1978. *Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu.* Yüksek Lisans Tezi, Ankara Ünv. Fen Bil. Enst., 1-96.

Battor, A.H. and AL-Budarub, A.T.H. 2012. *Fuzzy Linear Transformations.* Journal of Kerbala University, 10 (1); 58-69.

Chang, C.L. 1968. *Fuzzy Topological Space.* J.Math.Anal.Appl., 24; 182-190.

Cheng, S.C. and Mordeson, J.N. 1994. *Fuzzy Linear Operator and Fuzzy Normed Linear Spaces.* Bull. Calcutta Math. Soc., 86; 429–436.

Çoban, M. 2011. *Fuzzy Homotopi ve Uygulamaları.* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniv. Fen. Bil. Enst.; 1-93.

Das, N.R. and Das, P. 1999. *Fuzzy Topology Generated by Fuzzy Norm.* Fuzzy Sets and Systems, 107; 349-354.

Felbin, C. 1992. *Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Space.* Fuzzy Sets and Systems, 48 (2); 239-248.

Foster, D.H. 1979. *Fuzzy Topological Groups.* J. Math. Anal. Appl., 67; 549-564.

Gir, A. 2011. *Fuzzy Normlu Lineer Uzaylar ve Süreklilik.* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniv. Fen. Bil. Enst.; 1-85.

Güner, E. and Balcı, S. 2006. *Some Results on the Fuzzy Sheaf of the Fundamental Groups Over Fuzzy Topological Spaces.* Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 55(1); 47-55.

Guner, E. 2007. *Fuzzy Contractibility.* Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series. A1. 56 (2); 11-16.

Güner, E. and Balcı, S. 2007. *On the Fuzzy Sheaf of the Fundamental Groups.* Taiwanese Journal of Math., 11 (4); 1057-1062.

Jebril, I. and Samanta, T.K. 2010. *Fuzzy Antinormed Linear Space.* Journal of Mathematics and Technology, 1 (1); 66-77.

Katsaras, A.K. and Liu, D.B. 1977. *Fuzzy Vector Spaces and Fuzzy Topological Vector Spaces.* J. Math. Anal. Appl., 58; 135-146.

Liu, Y.M. and Luo, M.K. 1998. *Fuzzy Topology.* World Scientific Publishing, Singapore.

Mucuk, O. 2010. *Topoloji ve Kategori.* Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Nadaban, S. 2015. *Fuzzy Continuous Mappings in Fuzzy Normed Linear Spaces.* International Journal Of Computers Communications and Control, 10 (6); 834-842.

Palaniappan, N. 2005. *Fuzzy Topology.* Alpha Science International Ltd., United.Kingdom.

Preuss, G. 1988. *Theory of Topological Structures- An Approach to Categorical Topology.* D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Saadati, R. and Vaezpour, S.M., 2005. *Some Results on Fuzzy Banach Spaces.* J. Appl.Math & Computing, 17 (1-2); 475-484.

Saadati, R. and Park, J.H., 2006. *On The Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces*, Chaos, Solitions and Fractals, 27; 331–344.

Sadeqı, I. and Kıa,F.S., 2007. *Fuzzy Normed Linear Spaces and Its Topological Structure*, Chaos, Solitions and Fractals, 40; 2576-2589.

Saheli, M. 2015. *A Comparative Study of Fuzzy Norms of Linear Operators on a Fuzzy Normed Linear Spaces.* Journal of Mathematical Modelling, 2 (2); 217-234.

Terzioğlu, T. 2008. *Fuzzy Topolojik Uzaylarında Homotopi Gruplarının Karakterizasyonu.* Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniv. Fen. Bil. Enst.; 1-51.

Türkmen, M.R. 2011. *Fuzzy Normlu Uzaylarda Operatörler.* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniv. Fen. Bil. Enst.; 1-62.

Thoubaan, M.G. 2011. *Operator Fuzzy Normed Linear Space.* Al-Mustansiriyah J. Sci, 22 (7); 53-66.

Wuyts, P. 1987. *Fuzzy Paths and Connectedness.* Fuzzy Sets and Systems, 24 (1); 127-128.

Zadeh, L.A. 1965. *Fuzzy Sets.* Inform. and Control, 8; 336-353.

Zheng, C.Y. 1982. *On Connectedness of Fuzzy Topological Spaces.* Fuzzy Mathematics, 3; 59-66.

Zheng, C.Y. 1984. *Fuzzy Paths and Fuzzy Connectedness.* Fuzzy Sets and Systems, 14 (3); 273-280.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Deniz Pınar SUNAOĞLU

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 01/05/1986

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce, Almanca

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Ankara Anadolu Lisesi (Almanca) (2004)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü (2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

1) Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi, Fen Fakültesi (2009-2010)
2) Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi (2010-...)

Yayınları:

Uluslararası Hakemli Dergi:

1) **Sunaoğlu, D. P**. and Güner, E. 2017. On Fuzzy Normed Spaces Category. European Internatıonal Journal of Science and Technology. Vol 6, no.9, 51-71.
2) Poşpoş, P., Ekmekci, N. and **Sunaoğlu, D. P**. 2013. Complex Torsions and Holomorphic Helices. Konuralp Journal of Mathematics. Vol.1, no.1, 8-17.