KOMPLEKS ANALİZ

(MAT 472) DERS NOTLARI

Prof. Dr. AYHAN ŞERBETÇİ

GİRİŞ

Kompleks düzlemde bir bölgede meydana gelen bir fiziksel problem, örneğin kararlı durum sıcaklıkları, elektrostatik, ideal sıvı akışı vs., bazı koşulların sağlanması durumunda bir harmonik fonksiyon ile ifade edilebilmektedir. Verilen bir bölgede harmonik olan ve bölgenin sınırı üzerinde bazı koşulları sağlayan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonunu bulma problemine Dirichlet problemi adı verilir.

Eğer iki reel değişkenli ve reel değerli bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde harmonik ise bu durumda $\phi(x,y)$ nin D de bir $\psi(x,y)$ harmonik eşleniği vardır. Bu durumda $F(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$ analitik fonksiyonuna kompleks potansiyel adı verilir. $F(z)$ kompleks potansiyelinin bir çok fiziksel yorumu vardır. Örneğin sıvı akışında $\phi(x,y)=sabit$ denklemi eşpotansiyellere ve $\psi(x,y)=sabit$ denklemi akıntı doğrularına karşılık gelirler ve bunlar birbirini dik keserler.

Konform dönüşüm bir bölgedeki açıları yön ve büyüklük bakımından koruyan bir analitik fonksiyondur. Bir konform dönüşüm ile z-düzleminde bir D bölgesindeki problemin çözümünün kolayca elde edilebilmesi için bu bölge w-düzlemindeki bir G bölgesine dönüştürülür. Bu durumda eğer bir bire-bir konform dönüşüm $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ve $\phi(x,y)$, D de harmonik bir fonksiyon ise ters dönüşüm ile elde edilen $\Phi(u,v)=\phi[x(u,v),y(u,v)]$ fonksiyonu da G de harmoniktir. Yani, konform dönüşüm altında Laplace denklemi ve sınır koşulları değişmez kalır. Böylece D deki bir sınır değer problemi $w=f(z)$ konform dönüşümü ile G üzerinde yeni bir sınır değer problemine karşılık getirilmiş olur. Problemin çözümü bu bölgelerden birisinde elde edildiğinde diğeri üzerindeki çözüm ters dönüşüm ile kolayca elde edilir.

Burada incelenmiş olan konform dönüşüm teknikleri ile çözülebilen fiziksel problemler (kararlı durum ısı akışı, elektrostatik ve ideal sıvı akışı) gerçek hayattaki uygulamalardır ve çözümleri üç-boyutlu kartezyen uzayda verilir. Böyle problemler genellikle üç değişkenli Laplace denklemi, üç-boyutlu vektör fonksiyonlarının curl ve divergensini içerir. Kompleks analiz x ve y değişkenlerini içerdiğinden, xy-düzlemine dik eksen boyunca koordinatlı noktalarda çözümün değişmediği özel durumu göz önüne alınmaktadır.

Bu ders notu, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü dördüncü sınıf öğrencilerine okutulmakta olan bir yarı yıllık Kompleks Analiz dersi için hazırlanmıştır. Bunun için özellikle Mathews, J.H. and Howell, R.W. [2] ve Özkın, İ.K. [3] nın kitaplarından geniş ölçüde yararlanılmıştır.

Prof.Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Ankara, 2015

0. ÖN BİLGİLER

0.1. Analitik Fonksiyonlar

Tanım 0.1.1. D kompleks düzlemde bir bölge ve f, D üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer bir $z_0 \in D$ için

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa bu durumda f ye z_0 da diferensiyellenebilirdir denir. Bu limite f nin z_0 daki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 0.1.2. D kompleks düzlemde bir bölge ve f, D üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer bir $z_0 \in D$ için $f'(z_0)$ mevcut ve z_0 ın bir komşuluğundaki her noktada $f'(z)$ türevi varsa bu durumda f ye z_0 da analitiktir denir. Eğer f D nin her noktasında analitik ise veya eşdeğer olarak f D nin her noktasında diferensiyellenebilir ise bu durumda f ye D de analitik denir

Tanım 0.1.3. D kompleks düzlemde bir bölge ve f, D üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer bir $z_0 \in D$ için f, z_0 da analitik değil fakat z_0 ın her komşuluğundaki en az bir noktada analitik ise bu durumda z_0 a f nin bir singüler noktası denir. Eğer f, bir z_0 singüler noktasının bir komşuluğunda bulunan her noktada analitik ise z_0 a ayrık singüler nokta adı verilir.

Tanım 0.1.4. C kompleks düzlemin tamamında analitik olan bir fonksiyona tam fonksiyon denir.

Teorem 0.1.5. Eğer $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise bu durumda reel değerli u ve v fonksiyonları D bölgesinde harmoniktir. Yani, u ve v nin D de sürekli birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri vardır ve burada ikinci kısmi türevler için

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Laplace denklemi sağlanır.

Teorem 0.1.6. Eğer D kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge ve $u(x, y)$ D de harmonik bir fonksiyon ise bu durumda $u(x, y)$ nin D de daima bir $v(x, y)$ harmonik eşleniği vardır. Yani öyle bir $v(x, y)$ reel değerli fonksiyonu bulunabilir ki $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu D de analitiktir.

0.2. Konform Dönüşümler

Tanım 0.2.1. $w = f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer f, z_0 dan geçen yönlendirilmiş eğriler arasındaki açıları yön ve büyüklük bakımından koruyorsa bu durumda $w = f(z)$ dönüşümüne z_0 da konformdur denir.

Teorem 0.2.2. $w = f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ ise bu durumda f, z_0 da konformdur.

Örnek 0.2.3. $f(z) = e^Z$ dönüşümü kompleks düzlemin tamamında konformdur.

Çözüm. $\forall z \in C$ için $f'(z) = e^Z \neq 0$ olduğu açıktır. Çünkü $e^Z = e^x \cos y + ie^x \sin y = 0$ olması durumunda aynı anda $\cos y = \sin y = 0$ olması gerekir ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla f kompleks düzlemin tamamında konformdur. Örneğin birbirini dik kesen $x = a$ *ve* $y = b$ doğrularının görüntüleri de dik kesişirler:

$$z = x + iy \xrightarrow{e^Z} e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = \rho e^{i\phi}$$
$$(x, y) \longrightarrow (\rho, \phi) = (e^x, y)$$

olduğundan $\rho = e^x$, $\phi = y$ *den* $x = a \Rightarrow \rho = e^a$, $y = b \Rightarrow \phi = b$ (yani, orijin merkezli e^a yarıçaplı çember ve orijinden çıkan pozitif reel eksen ile *b* açısı yapan ışın) elde edilir. $\rho = e^a$ ve $\phi = b$ arasındaki açı diktir, çünkü merkezden çıkan bir ışın ile çemberi kestiği noktadaki teğet doğrusu birbirine dik olur.

Örnek 0.2.4. $w = f(z) = \sin z$ dönüşümü $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y \in R$ düşey şeridini bire-bir ve konform olarak $u \leq -1,\ v = 0$ ve $u \geq 1,\ v = 0$ ışınları boyunca kesilmiş *w*-düzlemi üzerine dönüştürür.

Çözüm. $u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ denkleminden

$$u = \sin x \cosh y$$
$$v = \cos x \sinh y$$

dir. Buradan $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, $y \in R$ olmak üzere $x = a$ doğrularının görüntüleri odakları $(\pm 1,0)$ olan $\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1$ hiperbolleridir. $x = a$ doğrusunun görüntüsü *a* pozitif iken hiperbolün sağ dalı ve *a* negatif iken hiperbolün sol dalıdır. $x = 0$ doğrusunun görüntüsü *v*-eksenidir (Benzer düşünceyle $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y = b$ yatay doğru parçaları odakları $(\pm 1,0)$ olan $\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$ elipsleri üzerine dönüşür. $y = b$ doğru parçasının görüntüsü *b* pozitif iken elipsin üst yarısı ve *b* negatif iken elipsin alt yarısıdır). Verilen şerit üzerinde $f'(z) = \cos z \neq 0$ olduğundan dönüşüm konformdur.

Örnek 0.2.5. Ters sinüs fonksiyonunun esas değeri olan $w = f(z) = Arc\sin z$ fonksiyonu: $x + iy = \sin w = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v$ den $\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1$ dir. Eğer u sabit kabul edilirse bu denklem xy-düzleminde odakları $(\pm 1,0)$ olan hiperbol gösterir. Odaklara olan uzaklıklar farkı $2\sin u$ dur. Dolayısıyla hiperbol üzerinde bulunan bir (x, y) noktası için

$$2\sin u = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

denklemi sağlanır. Buradan

$$u(x, y) = Arc\sin\left[\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2}\right]$$

elde edilir. Bu denklemde kullanılan fonksiyon için $-\frac{\pi}{2} < Arc\sin t < \frac{\pi}{2}$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Benzer düşünceyle $\frac{x^2}{\cosh^2 v} + \frac{y^2}{\sinh^2 v} = 1$ denkleminde v sabit kabul edildiğinde odakları $(\pm 1,0)$ ve büyük eksen uzunluğu $2\cosh v$ olan elips elde edilir. Dolayısıyla elips üzerinde bulunan bir (x, y) noktası için

$$2\cosh v = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

denklemi sağlanır. Buradan

$$v(x, y) = (\operatorname{sgn} y) Arc\cosh\left[\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2}\right]$$

elde edilir.

Örnek 0.2.4. de z ve w nin rollerini değiştirdiğimizde görürüz ki $w = Arc\sin z$ fonksiyonu $x \le -1,\ y = 0$ ve $x \ge 1,\ y = 0$ ışınları boyunca kesilmiş z-düzlemini bire-bir ve konform olarak $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ v \in R$ düşey şeridi üzerine dönüştürür. Ayrıca, $w = Arc\sin z$ dönüşümü altında $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminin $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ v > 0$ yarı sonsuz şeridine ve $\operatorname{Im} z < 0$ alt yarı-düzleminin $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ v < 0$ yarı sonsuz şeridine dönüştüğü kolayca görülebilir.

Örnek 0.2.6. $w = \log z = \ln|z| + i\arg z$ fonksiyonu $r = a$ ve $r = b$ çemberleri arasındaki halka bölgeyi w-düzlemindeki $\ln a < u < \ln b$ sonsuz şeridi üzerine dönüştürür.

Çözüm.

$$z = re^{\theta i} \xrightarrow{\log z} u + iv = \ln r + i\theta$$

$$(r, \theta) \longrightarrow (u, v) = (\ln r, \theta)$$

olduğundan $a < r < b \Rightarrow \ln a < u < \ln b$, $v = \theta \in R$ sonsuz düşey şeridi elde edilir.

Tanım 0.2.7. D_1 ve D_2 kompleks düzlemde iki bölge olsun. Eğer bir $f : D_1 \to D_2$ birebir ve üzerine konform dönüşümü varsa bu durumda D_1 ve D_2 ye konform eşdeğerdir denir.

Teorem 0.2.8. (Riemann Dönüşüm Teoremi) Eğer $G(\neq C)$ kompleks düzlemin basit bağlantılı bir alt bölgesi ise bu durumda G, D birim dairesine konform eşdeğerdir.

Tanım 0.2.9. a, b, c, d kompleks sabitler ve $ad \neq bc$ olmak üzere $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki bir dönüşüme kesirli lineer dönüşüm veya Mobiüs dönüşümü denir. Bir kesirli lineer dönüşüm, çemberler ve doğruları yine çemberler ve doğrulara dönüştürür.

Teorem 0.2.10. Bir $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ kesirli lineer dönüşümü $C - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ den $C - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ üzerine bir birebir ve konform dönüşümdür.

Örnek 0.2.11. $w = \dfrac{i(1-z)}{1+z}$ kesirli lineer dönüşümü $|z| < 1$ birim diskini $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzlemine dönüştüren bir bire-bir konform dönüşümdür.

Çözüm. Gerçekten,

$$w = \frac{i(1-z)}{1+z} \Rightarrow |z| = \left|\frac{-w+i}{w+i}\right| < 1 \Rightarrow |-w+i| < |w+i| \Rightarrow |-u+i(-v+1)| < |u+i(v+1)| \Rightarrow v > 0$$

Yani, $\operatorname{Im} w > 0$ elde edilir. Verilen bölgede $w'(z) \neq 0$ olduğundan dönüşüm konformdur.
Ayrıca,

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i\frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2} \qquad (0.2)$$

$$z = \frac{-w+i}{w+i} = \frac{-u^2-v^2+1}{u^2+(1+v)^2} + i\frac{2u}{u^2+(1+v)^2} = x + iy$$

denirse bu durumda (0.2) denklemine göre $y > 0, 1 - x^2 - y^2 = 0$ üst yarım çemberi üzerinde bulunan $z = x + iy$ noktaları pozitif u-ekseni üzerine dönüşür. Benzer şekilde alt yarı çember negatif u-ekseni üzerine dönüşür.

1. LAPLACE DENKLEMİNİN DEĞİŞMEZLİĞİ VE HARMONİK FONKSİYONLAR İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

1.1. Laplace Denkleminin Değişmezliği

Aşağıdaki teorem uygun bir konform dönüşüm altında Laplace denkleminin nasıl değişmez kaldığını göstermektedir.

Teorem 1.1.1. (Laplace denkleminin değişmezliği) $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ z-düzlemindeki bir D bölgesini w-düzlemindeki bir G bölgesine dönüştüren birebir ve üzerine bir konform dönüşüm olsun. Eğer $\phi(x,y)$ D üzerinde sürekli birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ise bu durumda $z = f^{-1}(w)$ ters dönüşümü yardımıyla $\phi(x,y)$ fonksiyonu

$$\Phi(u,v) = \phi[x(u,v), y(u,v)] \qquad \text{ve} \qquad \begin{array}{l} \Phi = \phi \circ f^{-1} \\ \Phi \circ f = \phi \end{array}$$

bileşke fonksiyonuna dönüşür. Bu fonksiyon G üzerinde sürekli ikinci kısmi türevlere sahiptir ve $\phi(x,y) = \Phi[u(x,y), v(x,y)]$ sağlanır. Bu durumda Laplace denklemi değişmez kalır. Yani,

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \Leftrightarrow \Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0$$

dır.

İspat. $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ birebir ve üzerine olduğundan $z = f^{-1}(w)$ ters dönüşümü vardır.

$$\left.\begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\}$$

$$\Phi(u,v) = \phi[x(u,v), y(u,v)] \Leftrightarrow \phi(x,y) = \Phi[u(x,y), v(x,y)]$$

dir. $\phi(x,y) = \Phi[u(x,y), v(x,y)]$ denkleminden $\phi_x = \Phi_u u_x + \Phi_v v_x$ ve $\phi_y = \Phi_u u_y + \Phi_v v_y$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= \left(u_x^{\,2} + u_y^{\,2}\right)\Phi_{uu} + \left(v_x^{\,2} + v_y^{\,2}\right)\Phi_{vv} + 2\left(u_x v_x + u_y v_y\right)\Phi_{uv} \\ &\quad + \left(u_{xx} + u_{yy}\right)\Phi_u + \left(v_{xx} + v_{yy}\right)\Phi_v \end{aligned}$$

$f = u + iv$ analitik olduğundan $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır ve $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $v_{xx} + v_{yy} = 0$ yani u ile v D de harmoniktir. Ayrıca,

$$f'(z) = u_x + iv_x \quad \Leftrightarrow \quad u_x^{\,2} + u_y^{\,2} = v_x^{\,2} + v_y^{\,2} = |f'(z)|^2$$

dir. Buradan

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = \left| f'(z) \right|^2 \left(\Phi_{uu} + \Phi_{vv} \right)$$

elde edilir. *f*, *D* de konform olduğundan $f'(z) \neq 0$ dır dolayısıyla Laplace denklemi konform dönüşüm altında değişmez kalır.

Örnek 1.1.2. $\phi(x, y) = xy + 1$ fonksiyonu ve $w = u + iv = Log\ z$ dönüşümünü göz önüne alalım. $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde $Log\ z$ esas logaritma fonksiyonu Teorem 1.1.1 in şartlarını sağlar. Bu fonksiyonun tersi

$$x + iy = e^w = e^u \left(\cos v + i \sin v \right)$$

dir. Böylece,

$$x = e^u \cos v \quad \text{ve} \quad y = e^u \sin v$$

dir. Φ bileşke fonksiyonu

$$\Phi(u, v) = \left(e^u \cos v \right) \left(e^u \sin v \right) + 1 = e^{2u} \cos v \sin v + 1$$

dir. $w = Log\ z$ altında $\operatorname{Im} z > 0$ ın görüntüsü $-\infty < u < \infty$, $0 < v < \pi$ şeridid ir. Kolayca gösterilebilir ki $\phi(x, y)$ üst yarı-düzlemde ve $\Phi(u, v)$ de şeritte harmoniktir.

Örnek 1.1.3. $\phi(x, y) = Arc \tan \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 1}$ fonksiyonunun $|z| < 1$ de harmonik olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f(z) = \dfrac{i + z}{i - z}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşüm $|z| < 1$ birim dairesini $\operatorname{Re} w > 0$ sağ yarı-düzlemi üzerine bir bire-bir konform dönüşümdür.

$$f(z) = \frac{i + z}{i - z} = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y - 1)^2} - i \frac{2x}{x^2 + (y - 1)^2} = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

$\Phi(u, v) = Arc \tan \dfrac{v}{u} = Arg\ (u + iv)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} w > 0$ da harmoniktir. Buradan,

$$\phi(x, y) = \Phi\left[u(x, y), v(x, y) \right] = Arc \tan \frac{v(x, y)}{u(x, y)} = Arc \tan \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1}$$

fonksiyonu Laplace denkleminin değişmezliğinden dolayı harmonik olur.

1.2. Belirli Sınır Koşullarını Sağlayan Bir Harmonik Fonksiyonun Bulunması

Örnek 1.2.1. $a \le \operatorname{Re} z \le b$ düşey şeridinde harmonik olan bir $u(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki $x=a$ ve $x=b$ düşey doğruları üzerinde sırasıyla $u(a,y)=U_1$ ve $u(b,y)=U_2$ sınır değerlerini alsın.

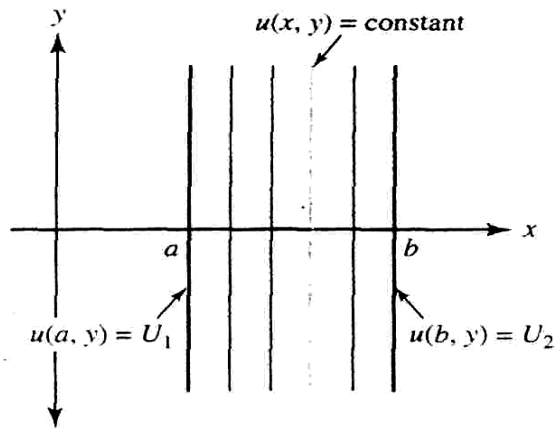
Çözüm: Sezgisel olarak $u(x,y)$ nin sadece x in bir fonksiyonu olduğunu ve $x=x_0$ biçimindeki düşey doğruları boyunca sabit değerler aldığını düşünürüz.
Yani,
$u(x,y)=P(x)$, $a \le x \le b$, $y \in R$ dir ve $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$ Laplace denklemi $P''(x)=0$ olmasını gerektirir. Buradan m ve n sabit olmak üzere

$$P(x)=mx+n$$

dir. $u(a,y)=P(a)=U_1$ ve $u(b,y)=P(b)=U_2$ sınır koşullarının sağlanabilmesi için

$$u(x,y)=U_1+\frac{U_2-U_1}{b-a}(x-a)$$

olmalıdır.



Şekil 1

Not: Eğer bir eğri boyunca bir ϕ harmonik fonksiyonu sabit kalırsa bu eğriye ϕ nin düzey eğrisi denir. xy-düzlemindeki bir $\phi(x,y)=C$ düzey eğrisi bir $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ konform dönüşümü altında uv-düzleminde

$$\Phi[(u(x,y),v(x,y)]=C$$

düzey eğrisine dönüşür. Bu durumda özel olarak xy-düzlemindeki bir bölge üzerinde ϕ nin sabit bir değer aldığı herhangi sınır parçası, kendisine uv-düzleminde karşılık gelen öyle bir eğriye dönüşür ki, bu eğri boyunca Φ nin değeri sabit kalır. Yani, ilk problemdeki $\phi=C$

koşulu, dönüştürülmüş problem üzerine taşınır. Daha açık olarak bir konform dönüşüm ile ϕ üzerindeki sınır koşulları değişmez kalır.

Örnek 1.2.2. $0 < Arg\, z < \alpha$, $(\alpha \le \pi)$ daire kesmesinde harmonik olan bir $\psi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\psi(x,0) = C_1 \quad , \qquad x > 0$$
$$\psi(x, y) = C_2 \, , \qquad \theta = \alpha, \;\; \mathrm{r} > 0$$

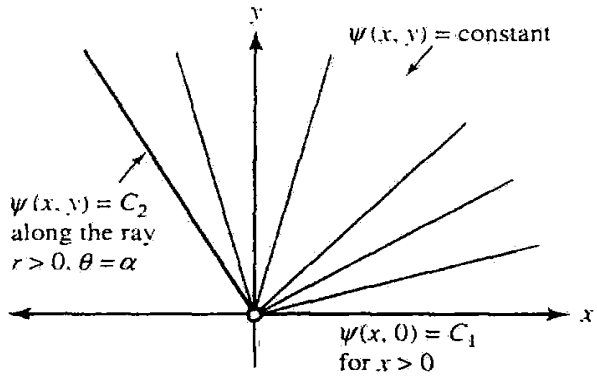
sınır değerlerini alsın.

Çözüm. $Arg\, z$ fonksiyonu verilen daire kesmesinde harmoniktir ve orijinden çıkan ışınlar boyunca sabittir (Şekil 2). a ve b reel sabitler olmak üzere bir çözümün

$$\psi(x, y) = a + b\, Arg\, z$$

olduğunu görürüz. Sınır koşullarından $\psi(x, y) = C_1 + \dfrac{C_2 - C_1}{\alpha} Arg\, z$

olduğu ortaya çıkar.



Şekil 2

Ek. $\alpha_1 < Arg\, z < \alpha_2$, $(0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \pi)$ daire kesmesinde harmonik olan bir $\psi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\psi(x,0) = C_1 \quad , \qquad \theta = \alpha_1, \;\; \mathrm{r} > 0$$
$$\psi(x, y) = C_2 \, , \qquad \theta = \alpha_2, \;\; \mathrm{r} > 0$$

sınır değerlerini alsın.

Cevap. $\psi(x, y) = C_1 + \dfrac{C_2 - C_1}{\alpha_2 - \alpha_1}(Argz - \alpha_1)$.

Örnek 1.2.3. $1<|z|<R$ halkasında harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

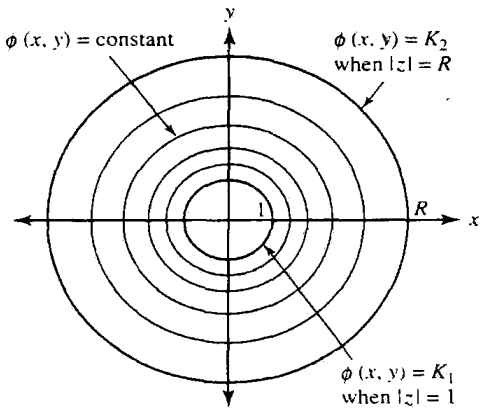
$$|z|=1 \quad \text{iken} \quad \phi(x,y)=K_1$$
$$|z|=R \quad \text{iken} \quad \phi(x,y)=K_2$$

sınır değerlerini alsın.

Çözüm. Örnek 1.2.2 dekine benzer düşünce ile, $\ln|z|$, $z\neq 0$ için harmoniktir. Buradan

$$\phi(x,y)=K_1+\frac{K_2-K_1}{\ln R}\ln|z|$$

bulunur. Şekil 3 de görüldüğü gibi $\phi(x,y)=sabit$ düzey eğrileri iç içe çemberlerdir.



Şekil 3

Ek. $0<R_1<|z|<R_2$ halkasında harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$|z|=R_1 \quad \text{iken} \quad \phi(x,y)=K_1$$
$$|z|=R_2 \quad \text{iken} \quad \phi(x,y)=K_2$$

sınır değerlerini alsın.

Cevap. $\phi(x,y)=K_1+\dfrac{K_2-K_1}{\ln R_2-\ln R_1}(\ln|z|-\ln R_1)$.

1.3. Dirichlet Problemi

D kompleks düzlemde bir bölge olsun ve D nin sınırının uç uca birleştirilmiş parçalı düzgün eğrilerden oluştuğunu kabul edelim. Dirichlet problemi, D de harmonik ve D nin sınırı üzerinde belirli değerleri alan bir ϕ fonksiyonu bulma problemidir.

Örnek 1.3.1. Gösteriniz ki

$$\Phi(u,v)=\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{v}{u-u_0}=\frac{1}{\pi}Arg\,(w-u_0)$$

fonksiyonu $\operatorname{Im} w>0$ üst yarı-düzleminde harmoniktir ve

$$u>u_0 \quad \text{için} \quad \Phi(u,0)=0$$
$$u<u_0 \quad \text{için} \quad \Phi(u,0)=1$$

sınır koşullarını sağlar.

Çözüm. $g(w)=\frac{1}{\pi}Log\,(w-u_0)=\frac{1}{\pi}\ln|w-u_0|+\frac{i}{\pi}Arg\,(w-u_0)$

fonksiyonu $\operatorname{Im} w>0$ üst yarı-düzleminde analitiktir ve dolayısıyla onun imajiner kısmı olan $\frac{1}{\pi}Arg\,(w-u_0)$ fonksiyonu harmoniktir.

Not: Burada $Arc\tan t$ fonksiyonu değer kümesi $0<Arc\tan t<\pi$ olan ters tanjant fonksiyonunu gösterir ve $Arc\tan(\pm\infty)=\frac{\pi}{2}$ dir. Böylece,

$$\Phi(u,v)=\frac{1}{\pi}Arc\tan\left(\frac{v}{u-u_0}\right)$$

çözümünü elde ederiz.

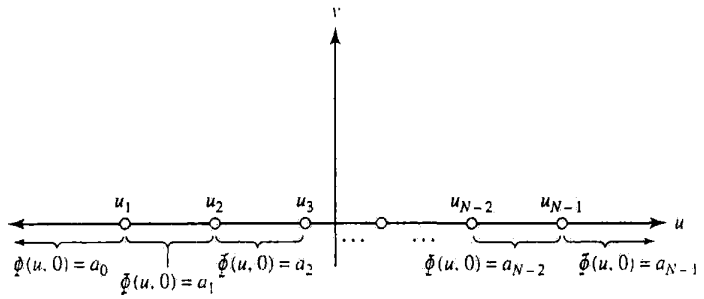
Teorem 1.3.2. (Üst yarı-düzlem için N-değer Dirichlet problemi) $u_1,u_2,...u_{N-1}$ $N-1$ tane reel sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}\Phi(u,v)&=a_{N-1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k-1}-a_k)\,Arg\,(w-u_k)\\&=a_{N-1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k-1}-a_k)\,Arc\tan\frac{v}{u-u_k}\end{aligned}\qquad(1.1)$$

fonksiyonu $\operatorname{Im} w>0$ üst yarı-düzleminde harmoniktir ve

$$\Phi(u,0)=a_0 \quad , \quad u<u_1$$
$$\Phi(u,0)=a_k \quad , \quad u_k<u<u_{k+1} \quad , \quad k=1,2,...,N-2$$
$$\Phi(u,0)=a_{N-1} \quad , \quad u>u_{N-1}$$

sınır koşullarını sağlar.



Şekil 4

İspat: (1.1) denklemindeki toplamın her bir terimi $\operatorname{Im} w>0$ da harmonik olduğundan Φ de burada harmoniktir. Φ nin belirtilen sınır koşullarını sağladığını göstermek için j yi sabit tutalım ve $u_j<u<u_{j+1}$ diyelim. Örnek 1.3.1 den

$$\frac{1}{\pi}Arg\left(u-u_k\right)=0 \quad , \quad k\le j \qquad \text{ve}$$
$$\frac{1}{\pi}Arg\left(u-u_k\right)=1 \quad , \quad k>j$$

dir. Bu denklemleri (1.1) denkleminde yerine yazarsak, $u_j<u<u_{j+1}$ için

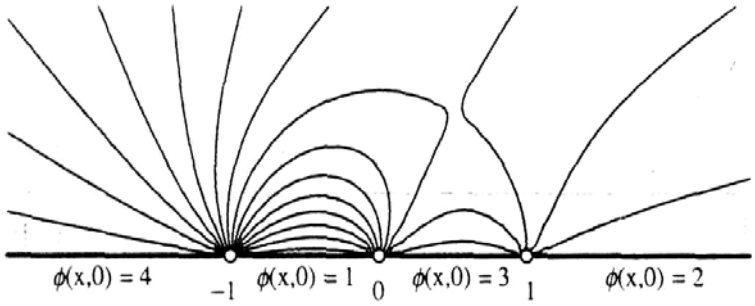
$$\begin{aligned}\Phi(u,0)&=a_{N-1}+\sum_{k=1}^{j}\left(a_{k-1}-a_k\right)(0)+\sum_{k=j+1}^{N-1}\left(a_{k-1}-a_k\right)(1)\\&=a_{N-1}+\left(a_{N-2}-a_{N-1}\right)+...+\left(a_{j+1}-a_{j+2}\right)+\left(a_j-a_{j+1}\right)\\&=a_j\end{aligned}$$

elde edilir. $u<u_1$ ve $u>u_{N-1}$ için

$$u<u_1 \quad \Rightarrow \frac{1}{\pi}Arg\left(u-u_k\right)=1 \quad (\forall k)$$
$$u>u_{N-1} \Rightarrow \frac{1}{\pi}Arg\left(u-u_k\right)=0 \quad (\forall k)$$

olduğu göz önüne alınarak kalan sınır koşullarının sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Örnek 1.3.3. $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan öyle bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz ki aşağıdaki Şekil 5 de belirtilen sınır koşullarını sağlasın.



Şekil 5

Çözüm. Bu, $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde bir 4-değer Dirichlet problemidir. z -düzlemi için (1.1) denklemi

$$\phi(x,y) = a_3 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{3}(a_{k-1} - a_k)\,Arg\,(z - x_k)$$

olur. $a_0 = 4, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2$ ve $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ değerlerini bu denklemde yerine yazarsak

$$\phi(x,y) = 2 + \frac{4-1}{\pi}Arg\,(z+1) + \frac{1-3}{\pi}Arg\,(z-0) + \frac{3-2}{\pi}Arg\,(z-1)$$

$$= 2 + \frac{3}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x+1} - \frac{2}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x} + \frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-1}$$

elde ederiz.

Örnek 1.3.4. $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\phi(x,0) = 1 \;,\; |x| < 1$$
$$\phi(x,0) = 0 \;,\; |x| > 1$$

sınır koşulları sağlansın.

Çözüm. Bu, 3-değer Dirichlet problemidir, $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0$ ve $x_1 = -1, x_2 = 1$ dir. (1.1) denkleminden istenen fonksiyon

$$\phi(x,y) = 0 + \frac{0-1}{\pi}Arg\,(z+1) + \frac{1-0}{\pi}Arg\,(z-1)$$

$$= -\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x+1} + \frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-1}$$

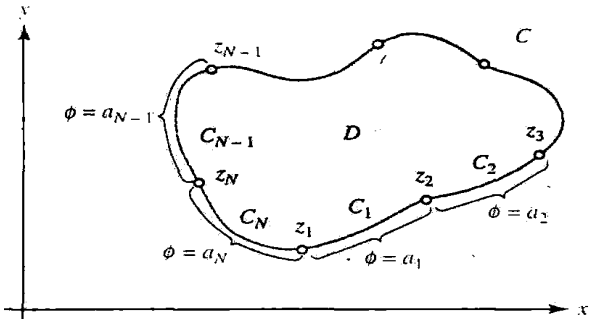
biçimindedir.

1.4. Basit İrtibatlı Bir Bölge İçin N-Değer Dirichlet Problemi

D basit irtibatlı bir bölge, C D nin sınırı olan basit kapalı çevre ve $z_1, z_2, \ldots, z_N$ C üzerinde bulunan ve pozitif yönde sıralanmış N tane nokta olsun. $k = 1,2,\ldots,N-1$ için C nin z_k ve z_{k+1} noktaları arasındaki parçasını C_k ile ve z_N ile z_1 arasındaki parçasını C_N ile gösterelim. Son olarak, $a_1, a_2, \ldots, a_N$ reel sabitler olsun. "D de harmonik ve $D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_N$ üzerinde sürekli bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulmak istiyoruz öyle ki

$$\begin{aligned}
&\phi(x,y) = a_1, \quad z = x+iy \in C_1 \\
&\phi(x,y) = a_2, \quad z = x+iy \in C_2 \\
&\quad\vdots \\
&\phi(x,y) = a_N, \quad z = x+iy \in C_N
\end{aligned}$$

sınır koşulları sağlanır."



Şekil 6

ϕ yi bulmak için bir yöntem D yi $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzlemine dönüştüren bir $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ konform dönüşümü bulmaktır öyle ki bu dönüşüm ile N tane $z_1, z_2, \ldots, z_N$ noktaları w-düzleminde u-ekseni boyunca $k = 1,2,\ldots,N-1$ için $u_k = f(z_k)$ noktalarına ve z_N de $u_N = +\infty$ üzerine dönüşür.

Laplace denkleminin değişmezliği teoremini kullanırsak $w = f(z)$ konform dönüşümü ile $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzleminde yeni bir N-değer Dirichlet problemi elde edilir. Eğer $a_0 = a_N$ denirse bu durumda D deki Dirichlet probleminin yukarıda verilen sınır koşullarını sağlayan çözümü

$$\begin{aligned}
\phi(u,v) &= a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\left(a_{k-1} - a_k\right) Arg\left(f(z) - u_k\right) \\
&= a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\left(a_{k-1} - a_k\right) Arc\tan\frac{v(x,y)}{u(x,y) - u_k}
\end{aligned}$$

dir. Bu yöntem, D yi $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzlemine dönüştüren bir konform dönüşümün bulunabilmesine bağlıdır. Riemann dönüşüm teoremi böyle bir konform dönüşümün varlığını garanti eder.

Örnek 1.4.1. $|z| < 1$ birim diskinde harmonik olan ve

$$\phi(x, y) = 0,\ z = x + iy = e^{i\theta},\ 0 < \theta < \pi$$
$$\phi(x, y) = 1,\ z = x + iy = e^{i\theta},\ \pi < \theta < 2\pi$$

sınır koşullarını sağlayan bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz.

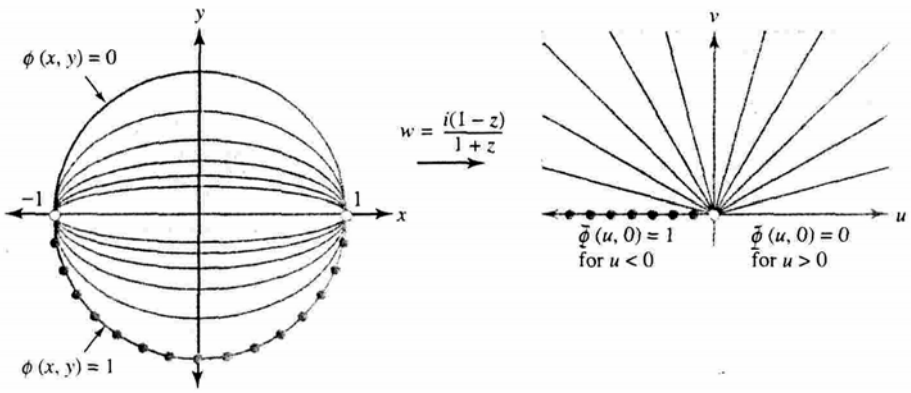
Çözüm. Örnek 0.2.10 da gösterildiği gibi

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i\frac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} \tag{1.2}$$

fonksiyonu $|z| < 1$ birim diskini $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzlemine dönüştüren bir bire-bir konform dönüşümdür. (1.2) denklemine göre $y > 0,\ 1 - x^2 - y^2 = 0$ üst yarım çemberi üzerinde bulunan $z = x + iy$ noktaları pozitif u-ekseni üzerine dönüşür. Benzer şekilde alt yarı çember negatif u-ekseni üzerine dönüşür. Ayrıca, $w = f(z)$ konform dönüşümü ile yeni bir Dirichlet problemi ortaya çıkar: " $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan ve

$$\Phi(u,0) = 0,\ u > 0$$
$$\Phi(u,0) = 1,\ u < 0$$

sınır koşullarını sağlayan bir $\Phi(u, v)$ fonksiyonu bulunuz".



Şekil 7

Örnek 1.3.1 deki sonucu ve (1.2) denklemini kullanırsak

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} Arc\tan\frac{v(x, y)}{u(x, y)} = \frac{1}{\pi} Arc\tan\frac{1 - x^2 - y^2}{2y}$$

elde ederiz.

Örnek 1.4.2. $H: \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1$ üst yarı-diskinde harmonik olan ve

$$\phi(x, y) = 0, \quad z = x + iy = e^{i\theta},\ 0 < \theta < \pi$$
$$\phi(x,0) = 1, \quad -1 < x < 1$$

sınır koşullarını sağlayan bir ϕ fonksiyonu bulunuz.

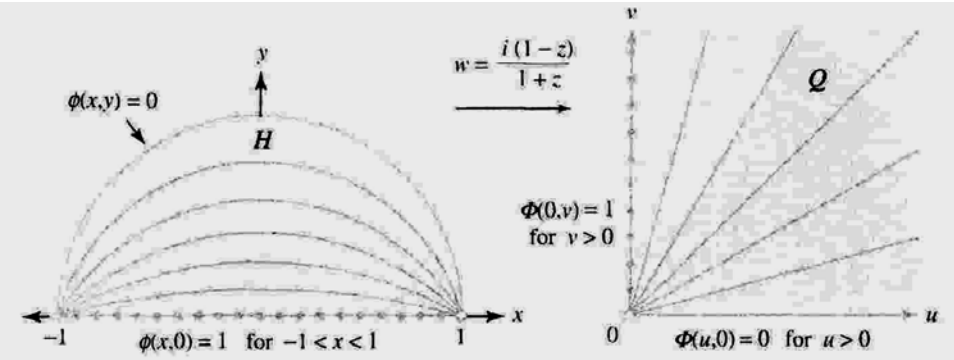
Çözüm. $w = u + iv = \dfrac{i(1-z)}{1+z}$ dönüşümü H yarı-diskini $Q: u > 0,\ v > 0$ birinci bölgesi üzerine dönüştürür. $y = 0,\ -1 < x < 1$ doğru parçası üzerinde bulunan $z = x + iy$ noktaları da pozitif v-ekseni üzerine dönüşür. Şimdi Q daki yeni Dirichlet problemi "Q da harmonik olan ve

$$\Phi(u,0) = 0,\ u > 0$$
$$\Phi(0, v) = 1,\ v > 0$$

sınır koşullarını sağlayan bir $\Phi(u, v)$ fonksiyonu bulunuz" şeklindedir. Bu durumda önceki kesimdeki Örnek 1.2.2 deki $\Phi(u, v)$ fonksiyonunun bulunması yöntemi ile

$$\Phi(u, v) = 0 + \frac{1-0}{\pi/2} Arg\ w = \frac{2}{\pi} Arg\ w = \frac{2}{\pi} Arc \tan \frac{v}{u}$$

elde edilir.



Şekil 8

H daki Dirichlet probleminin çözümü, (1.2) den

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\pi} Arc \tan \frac{v(x, y)}{u(x, y)} = \frac{2}{\pi} Arc \tan \frac{1 - x^2 - y^2}{2y}$$

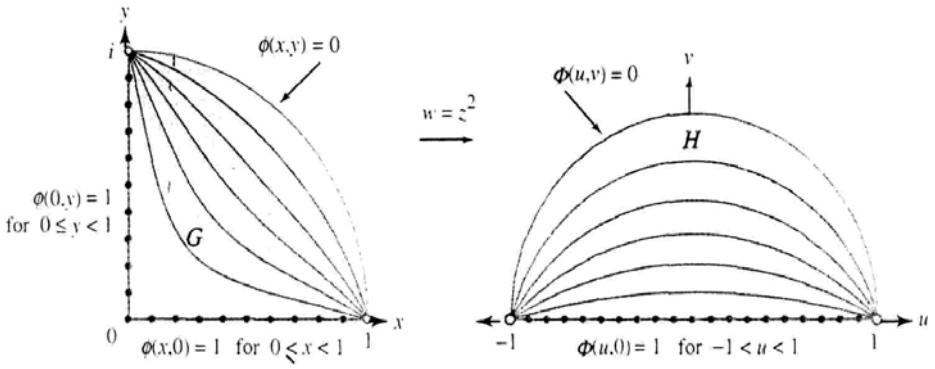
olur.

Örnek 1.4.3. $G: x>0,\ y>0,\ |z|<1$ çeyrek diskinde harmonik olan ve

$$\phi(x,y)=0,\ z=x+iy=e^{i\theta},\ 0<\theta<\pi/2$$
$$\phi(x,0)=1,\quad 0\le x<1$$
$$\phi(0,y)=1,\quad 0\le y<1$$

sınır koşullarını sağlayan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz.

Çözüm. $w=u+iv=z^2=x^2-y^2+i2xy$ fonksiyonu çeyrek diski $H: v>0$, $|w|<1$ üst yarı diskinin üzerine dönüştürür. H daki yeni Dirichlet problemi Şekil 9 da gösterilmiştir.



Şekil 9

Örnek 1.4.2 deki sonuçtan H daki $\Phi(u,v)$ çözümü

$$\Phi(u,v)=\frac{2}{\pi}Arc\tan\frac{1-u^2-v^2}{2v}$$

dir. $w=z^2$ den $u^2+v^2=\left(x^2+y^2\right)^2$ ve $2v=4xy$ dir, buradan G deki ϕ çözümü

$$\phi(x,y)=\frac{2}{\pi}Arc\tan\frac{1-\left(x^2+y^2\right)^2}{4xy}$$

bulunur.

1.5. Üst Yarı-Düzlem İçin Poisson İntegral Formülü

$\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzlemi için Dirichlet problemi; üst yarı-düzlemde harmonik ve $\phi(x,0) = u(x)$ sınır değerlerine sahip olan bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulmaktır, burada $u(x)$ bir reel değişkenli ve reel-değerli fonksiyondur.

Teorem 1.5.1. (Poisson İntegral Formülü) $u(t)$, her $t \in R$ için parçalı sürekli ve sınırlı, reel-değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\phi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)dt}{(x-t)^2 + y^2} \tag{1.3}$$

fonksiyonu $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmoniktir ve u sürekli iken

$$\phi(x,0) = u(x)$$

sınır değerine sahiptir.

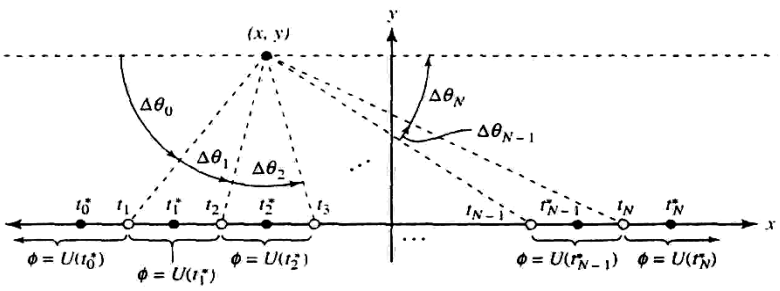
İspat. (1.3) denklemini N-değer Dirichlet probleminin sonuçlarından belirlemek kolaydır. $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ x-ekseni boyunca yerleştirilmiş N tane noktayı göstersin. $t_0^* < t_1^* < \cdots < t_N^*$, $k = 1,2,\ldots,N$ için $t_{k-1}^* < t_k < t_k^*$ olacak biçimde seçilmiş $N+1$ tane nokta olsun. Bu durumda N-değer Dirichlet probleminden

$$\phi(x, y) = u(t_N^*) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \left[u(t_{k-1}^*) - u(t_k^*)\right] Arg\,(z - t_k)$$

fonksiyonu üst yarı-düzlemde harmoniktir ve

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= u(t_0^*) \quad , \quad x < t_1 \\
\phi(x,0) &= u(t_k^*) \quad , \quad t_k < x < t_{k+1} \\
\phi(x,0) &= u(t_N^*) \quad , \quad x > t_N
\end{aligned}$$

sınır değerlerini alır.



Şekil 10

Bir kompleks sayının argümentinin özelliklerini kullanırsak

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\pi}u\left(t_0^*\right)Arg\left(z-t_1\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}u\left(t_k^*\right)Arg\left(\frac{z-t_{k+1}}{z-t_k}\right)+\frac{1}{\pi}u\left(t_N^*\right)\left[\pi-Arg\left(z-t_N\right)\right]$$

yazabiliriz. Buradan ϕ değeri (ağırlık anlamında)

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N}u\left(t_k^*\right)\Delta\theta_k$$

ile verilir, burada $k=0,1,\ldots,N$ için $\Delta\theta_k$ açıları toplamı π dir. Bu, yukarıda Şekil 10 da gösterilmiştir.

$$\theta=Arg\left(z-t\right)=Arc\tan\frac{y}{x-t}\quad,\quad d\theta=\frac{ydt}{\left(x-t\right)^2+y^2}$$

değişken değişimi yapılırsa

$$\phi(x,y)=\frac{y}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{u\left(t_k^*\right)\Delta t_k}{\left(x-t_k^*\right)^2+y^2}$$

elde edilir. Bu Riemann toplamının limiti

$$\phi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u\left(t\right)dt}{\left(x-t\right)^2+y^2}$$

genelleştirilmiş integrali olur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

Örnek 1.5.2. $\operatorname{Im}z>0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\phi(x,0)=1\quad,\quad -1<x<1$$
$$\phi(x,0)=0\quad,\quad |x|>1$$

sınır değerlerine sahip olsun.

Çözüm. Poisson integral formülünden

$$\phi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(x-t\right)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ydt}{\left(x-t\right)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-t}\Bigg|_{t=-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-1}-\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x+1}$$

elde edilir. Burada $\int \frac{ydt}{(x-t)^2+y^2} = \int \frac{\frac{y}{(x-t)^2}}{1+\left(\frac{y}{x-t}\right)^2} dt$ integrali

$u = \frac{y}{x-t} \Rightarrow du = \frac{y}{(x-t)^2} dt = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u = \arctan \frac{y}{x-t}$ değişken değişimi ile hesaplanmıştır.

Örnek 1.5.3 $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\phi(x,0) = x \quad , \quad -1 < x < 1$$
$$\phi(x,0) = 0 \quad , \quad |x| > 1$$

sınır değerlerine sahip olsun.

Çözüm. Poisson integral formülünden

$$\phi(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{tdt}{(x-t)^2+y^2} = \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(x-t)(-1)dt}{(x-t)^2+y^2} + \frac{x}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{ydt}{(x-t)^2+y^2}$$
$$= \frac{y}{2\pi}\ln\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} + \frac{x}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x-1} - \frac{x}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x+1}$$

elde edilir. $\phi(x,y)$ fonksiyonu üst yarı-düzlemde harmoniktir. $\phi(x,0)$ fonksiyonu reel eksen üzerinde $x = \pm 1$ de süreksizliğe sahiptir.

Örnek 1.5.4. $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\phi(x,0) = x \quad , \quad |x| < 1$$
$$\phi(x,0) = -1 \quad , \quad x < -1$$
$$\phi(x,0) = 1 \quad , \quad x > 1$$

sınır değerlerine sahip olsun.

Çözüm. N-değer Dirichlet problemindeki yöntemi kullanarak

$$v(x,y) = 1 - \frac{1}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x+1} - \frac{1}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x-1}$$

fonksiyonunu buluruz. Bu fonksiyon üst yarı-düzlemde harmonik ve $|x| < 1$ için $v(x,0) = 0$, $x < -1$ için $v(x,0) = -1$ ve $x > 1$ için $v(x,0) = 1$ sınır değerlerine sahiptir. Bu fonksiyon Örnek 1.5.3 de bulunan fonksiyona eklendiğinde

$$\phi(x,y)=1+\frac{y}{2\pi}\ln\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}+\frac{x-1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-1}-\frac{x+1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x+1}$$

buluruz.

2. İKİ BOYUTLU MATEMATİKSEL MODELLER

2.1. Genel Bilgiler

Şimdi konform dönüşüm teknikleri ile çözülebilen kararlı durum ısı akışı, elektrostatik ve ideal sıvı akışı ile ilgili problemleri göz önüne alacağız. Konform dönüşüm, bir bölgedeki problemin çözümünün kolayca elde edilebilmesi için bu bölgeyi diğer bir bölgeye dönüştürür. Bizim çözümlerimiz sadece x ve y iki değişkenli olduğundan modelin geçerliliği için önce temel bir kabul yapmalıyız.

Burada inceleyeceğimiz fiziksel problemler gerçek hayattaki uygulamalardır ve çözümleri üç-boyutlu kartezyen uzayda verilir. Böyle problemler genellikle üç değişkenli Laplace denklemi, üç-boyutlu vektör fonksiyonlarının curl ve divergens ini içerir. Kompleks analiz x ve y değişkenlerini içerdiğinden, xy düzlemine dik eksen boyunca koordinatlı noktalarda çözümün değişmediği özel durumu göz önüne alacağız. Kararlı durum ısı akışı ve elektrostatik için, bu demektir ki T sıcaklığı veya V potansiyeli sadece x ve y ile değişir. Böylece ideal sıvı akışı için z-düzlemine paralel herhangi bir düzlemde sıvı hareketi aynıdır. "z-düzlemindeki eğri çizimleri z-düzlemine dik sonsuz silindire karşılık gelen çapraz kesitler olarak yorumlanır ". Bir sonsuz silindir bir uzun fiziksel silindirin limit durumudur, böylece bizim vereceğimiz matematiksel model "yeteri kadar uzun bir fiziksel silindiri içeren üç boyutlu problemin uç noktalardaki etkisi ihmal edilmek koşulu ile geçerlidir.

Önceki kısımlarda harmonik fonksiyonlar için $\phi(x,y)$ çözümlerinin nasıl bulunacağını göstermiştik. Uygulamalar için $\{\phi(x,y)=K_1 : K_1 \textit{ bir reel sabit}\}$ düzey eğrileri ailesini ve $\psi(x,y)$ harmonik eşlenik fonksiyonu ve onun $\{\psi(x,y)=K_2 : K_2 \textit{ bir reel sabit}\}$ düzey eğrileri ailesini göz önüne almamız gereklidir. $F(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$ analitik fonksiyonuna **kompleks potansiyel** adını vereceğiz.

Aşağıdaki teorem düzey ailelerinin ortogonalliği ile ilgilidir. Bu teoremi göz önüne alacağımız fiziksel uygulamalarla ilgili fikirleri geliştirmek için kullanacağız.

Teorem 2.1.1. (Düzey eğrilerinin ortogonal aileleri) $\phi(x,y)$ bir D bölgesinde harmonik, $\psi(x,y)$ onun harmonik eşleniği ve $F(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$ kompleks potansiyel olsun. Bu durumda $\{\phi(x,y)=K_1\}$ ve $\{\psi(x,y)=K_2\}$ düzey eğrileri aileleri ortogonaldir. Yani, $\phi(x,y)=K_1$ ve $\psi(x,y)=K_2$ eğrileri (a,b) de kesişiyorsa ve eğer $F'(a+ib)\neq 0$ ise bu durumda bu iki eğri dik kesişirler.

İspat. $\phi(x,y)=K_1$ bir düzlem eğrisinin bir kapalı denklemi olduğundan (a,b) noktasında hesaplanan $grad\phi$ gradiyent vektörü (a,b) de eğriye diktir. Bu vektör

$$N_1 = \phi_x(a,b)+i\phi_y(a,b)$$

ile verilir. Benzer biçimde N_2 vektörü

$$N_2 = \psi_x(a,b) + i\psi_y(a,b)$$

ile tanımlanır ve bu vektör (a,b) de $\psi(x,y) = K_2$ eğrisine diktir. Cauchy-Riemann denklemlerini kullanırsak N_1 ile N_2 nin iç çarpımı

$$\begin{aligned} N_1.N_2 &= \phi_x(a,b).\psi_x(a,b) + \phi_y(a,b).\psi_y(a,b) \\ &= -\phi_x(a,b)\phi_y(a,b) + \phi_y(a,b)\phi_x(a,b) = 0 \end{aligned}$$

dır. Buna ek olarak $F'(a,b) \neq 0$ olduğundan

$$\phi_x(a,b) + i\psi_x(a,b) \neq 0$$

olur. Cauchy-Riemann denklemleri ve $\phi_x(a,b) \neq 0$, $\psi_x(a,b) \neq 0$ olması, hem N_1 ve hem de N_2 nin sıfırdan farklı olduğunu gösterir. Böylece, $N_1.N_2 = 0$ olması, N_1 in N_2 ye dik olmasını gerektirir. Dolayısıyla bu eğriler ortogonaldir. Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ kompleks potansiyeli birçok fiziksel yorumlara sahiptir. Örneğin; kabul edelim ki kararlı durum sıcaklığında bir problem çözmüş olalım. Bu durumda aynı sınır koşulları ile elektrostatikte izotermalleri eşpotansiyel eğrileri ve ısı akış doğrularını akı doğruları olarak yorumlayarak bir benzer probleme çözüm bulabiliriz. Buradan "ısı akışı ve elektrostatik direkt olarak birbirine karşılık gelir" diyebiliriz.

Bir sıvı akışı problemini çözmüş olalım. Bu durumda sıvı akışında eşpotansiyelleri izotermaller ve akı doğrularını ısı akış doğruları olarak yorumlayarak benzer bir probleme çözüm bulabiliriz. Aşağıdaki tabloda düzey eğrileri ailelerinin değişik yorumları ve aileler arasındaki eşlemeler özetlenmiştir.

Fiziksel Olaylar	$\phi(x,y) = sabit$	$\psi(x,y) = sabit$
Isı akışı	İzotermaller	Isı akış doğruları
Elektrostatik	Eşpotansiyel eğrileri	Akı doğruları
Sıvı akışı	Eşpotansiyeller	Akıntı doğrular
Yerçekimi alanı	Yerçekimi potansiyeli	Kuvvet doğruları
Manyetizm	Potansiyel	Kuvvet doğruları
Difüzyon	Konsantrasyon	Akış doğruları
Elastisite	Gerilim fonksiyonu	Şiddet doğruları
Elektrik akımı	Potansiyel	Akış doğruları

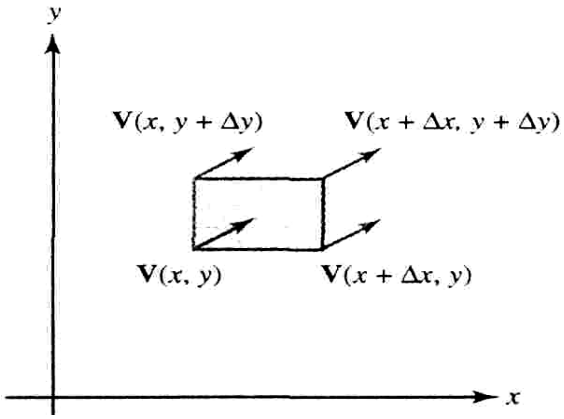
2.2. Kararlı Durum Sıcaklıkları

Isı iletimi teorisinde ısının sıcaklığın azaldığı yöne doğru aktığı kabul edilir. Diğer bir kabul de ısının bir yüzey alanı boyunca akarken, zaman oranı ile yüzey alanına dik yöndeki sıcaklık gradiyentinin bileşeninin orantılı olmasıdır. Eğer $T(x, y)$ sıcaklığı zamandan bağımsız ise, bu durumda (x, y) noktasındaki ısı akışı

$$V(x, y) = -K\ grad\ T(x, y) = -K\left[T_x(x, y) + iT_y(x, y)\right]$$

vektörü ile verilir, burada K ortamın ısı iletkenliğidir ve sabit olduğu kabul edilir. Eğer Δs uzunluğunun düz-doğru parçasını Δz ile gösterirsek bu durumda bir birimlik zaman aralığında akan ısı miktarı $V.N\Delta s$ dir, burada N, doğru parçasına dik birim vektördür.

Eğer bölgede üretilen ya da yok edilen termal enerjinin bulunmadığını kabul edersek, bu durumda Δx ve Δy uzunlukları tarafındaki yönlü herhangi bir küçük dikdörtgen boyunca akan ısının net miktarı özdeş olarak sıfırdır. Bu $T(x, y)$ nin bir harmonik fonksiyon olduğunu gösterir.



Şekil 11

Aşağıdaki düşünce $T(x, y)$ nin Laplace denklemini sağladığını göstermek için sıkça kullanılır. $V.N\Delta s$ ifadesini kullanarak şekildeki dikdörtgenin sağ kenarının dışına ısı akışının miktarı yaklaşık olarak

$$\begin{aligned} V\ N_1\Delta s_1 &= -K\left[T_x(x+\Delta x, y) + iT_y(x+\Delta x, y)\right].(1+0i)\Delta y \\ &= -K\,T_x(x+\Delta x, y)\Delta y \end{aligned}$$

ve sol kenarın dışına ısı akışının miktarını da

$$\begin{aligned} V.N_2\Delta s_2 &= -K\left[T_x(x, y) + iT(x, y)\right].(-1+0i)\Delta y \\ &= K\,T_x(x, y)\Delta y \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Bu iki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$-K\left[\frac{T_x(x+\Delta x, y)-T_x(x, y)}{\Delta x}\right]\Delta x\,\Delta y \cong -K\,T_{xx}(x, y)\Delta x\,\Delta y$$

buluruz. Benzer şekilde üst ve alt kenarlar dışına ısı akış miktarı için

$$-K\left[\frac{T_y(x, y+\Delta y)-T_y(x, y)}{\Delta y}\right]\Delta x\,\Delta y \cong -K\,T_{yy}(x, y)\Delta x\,\Delta y$$

buluruz. Bu iki denklemdeki miktarlar toplanırsa dikdörtgenin dışına net ısı akışı yaklaşık olarak

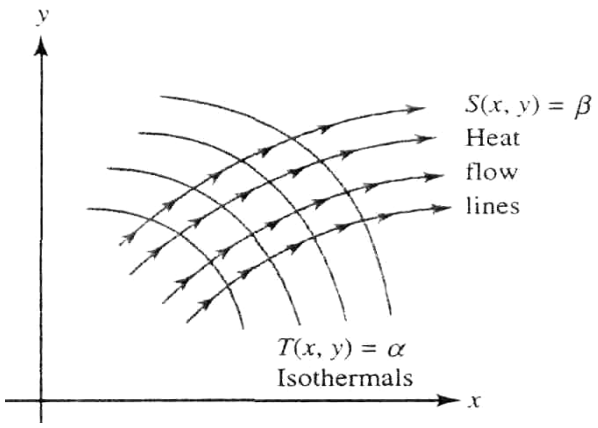
$$-K\left[T_{xx}(x, y)+T_{yy}(x, y)\right]\Delta x\,\Delta y = 0$$

denklemi ile verilir. Bu da $T(x, y)$ nin Laplace denklemini sağladığını ve dolayısıyla bir harmonik fonksiyon olduğunu gösterir.

Eğer $T(x, y)$ nin tanımlandığı bölge basit bağlantılı bölge ise, bu durumda bir $S(x, y)$ harmonik eşlenik fonksiyonu vardır ve

$$F(z) = T(x, y) + iS(x, y)$$

bir analitik fonksiyondur. $T(x, y) = K_1$ eğrilerine izotermaller denir ve bunlar aynı sıcaklıktaki noktaları birleştiren doğrulardır. $S(x, y) = K_2$ eğrilerine ısı akış doğruları denir ve bu eğriler boyunca yüksek sıcaklıktaki noktalardan düşük sıcaklıktaki noktalara ısı akışı olduğu düşünülür. Kararlı durum sıcaklıkları için sınır değer problemleri Dirichlet problemi olarak göz önüne alınabilir, burada $T(x, y)$ harmonik fonksiyonunun değeri (x, y) noktasındaki sıcaklık olarak yorumlanır.



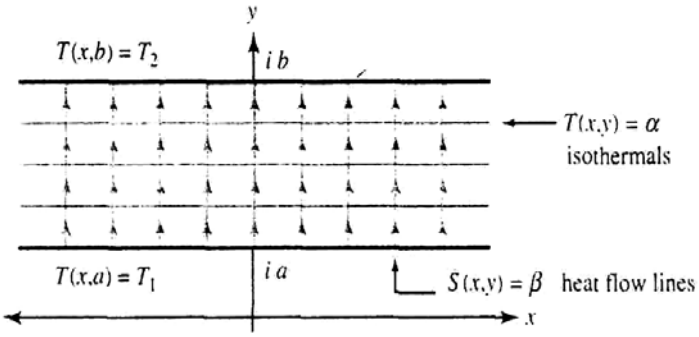
Şekil 12

Örnek 2.2.1. İki paralel düzlemin z-düzlemine dik ve sırasıyla, $y=a$ ve $y=b$ yatay doğrularından geçtiğini ve bu düzlemler üzerinde sıcaklığın $T(x,a)=T_1$ ve $T(x,b)=T_2$ değerlerinde sabit tutulduğunu kabul edelim. Bu durumda T nin

$$T(x,y)=T_1+\frac{T_2-T_1}{b-a}(y-a)$$

ile verilebileceğini gösteriniz.

Çözüm. $y=y_0$ doğrusundan geçen düzlem üzerindeki tüm noktalarda sıcaklığın sabit olduğunu kabul edebiliriz. Buradan $T(x,y)=t(y)$ dir, burada $t(y)$ sadece y nin bir fonksiyonudur. Laplace denklemi $t''(y)=0$ olmasını gerektirir ve Örnek 1.2.1 deki yöntem ile $T(x,y)$ çözümünü bulabiliriz.



Şekil 13

$T(x,y)=\alpha$ izotermallerinin yatay doğrular olduğu kolayca görülür. Eşlenik harmonik fonksiyon

$$S(x,y)=\frac{T_1-T_2}{b-a}x$$

dir ve $S(x,y)=\beta$ ısı akış doğruları, yatay doğrular arasındaki düşey doğru parçalarıdır. Eğer $T_1>T_2$ ise bu durumda Şekil 13 de görüldüğü gibi ısı $y=a$ dan geçen düzlemden $y=b$ den geçen düzleme bu doğru parçaları boyunca akar.

Örnek 2.2.2. $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı-düzlemindeki her bir noktada $T(x,y)$ sıcaklığını bulunuz öyle ki x-ekseni boyunca sıcaklık

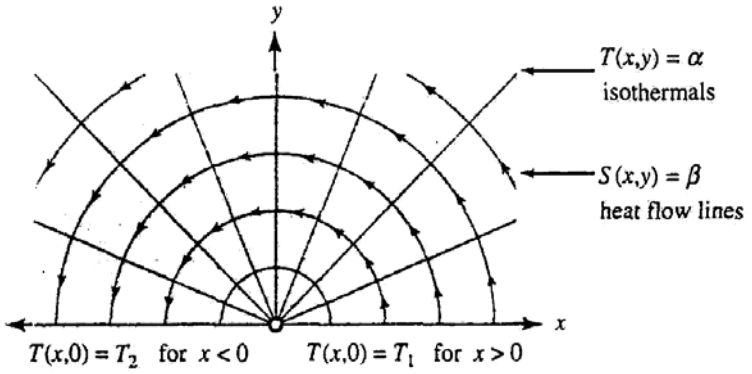
$$T(x,0)=T_1 \quad , \quad x>0$$
$$T(x,0)=T_2 \quad , \quad x<0$$

olsun.

Çözüm. $T(x,y)$ bir harmonik fonksiyon olduğundan, bu problem bir Dirichlet problemi örneğidir. Örnek 1.2.2 den

$$T(x,y)=T_1+\frac{T_2-T_1}{\pi}Arg\ z$$

olduğu görülür.



Şekil 14

$T(x,y)=\alpha$ izotermali orijinden çıkan ışınlardır. Eşlenik harmonik fonksiyon

$$S(x,y)=\frac{1}{\pi}(T_1-T_2)\ln|z|$$

dir ve $S(x,y)=\beta$ ısı akış doğruları orijin merkezli yarım çemberlerdir (Şekil 14). Eğer $T_1>T_2$ ise, bu durumda ısı yarım çemberler boyunca saat yönünün ters yönünde akar.

Örnek 2.2.3. $H:\operatorname{Im} z>0$, $|z|<1$ üst yarım diskindeki her bir noktadaki $T(x,y)$ sıcaklığını bulunuz öyle ki bu sıcaklık, sınır üzerindeki noktalarda

$$T(x,y)=100 \quad , \quad x+iy=z=e^{i\theta} \quad , \ 0<\theta<\pi$$
$$T(x,0)=50 \quad , \ -1<x<1$$

koşullarını sağlasın.

Çözüm. Örnek 1.4.2 de belirtildiği gibi

$$w=u+iv=\frac{i(1-z)}{1+z}=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

fonksiyonu H yarım diskini $Q: u > 0$, $v > 0$ birinci bölge üzerine birebir konform olarak dönüştürür. Buradan yeni problemimiz : "$T^*(u,v)$ sıcaklığını bulunuz öyle ki

$$T^*(u,0) = 100 \ , \ u > 0$$
$$T^*(0,v) = 50 \ , \ v > 0$$

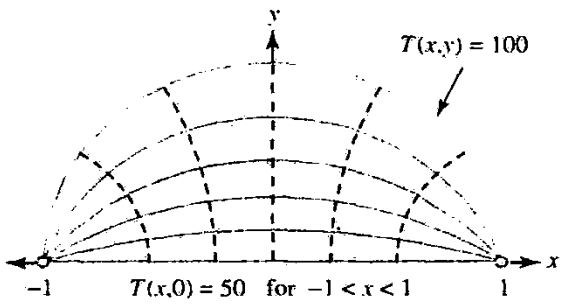
sınır koşulları sağlansın" biçiminde olacaktır. Örnek 1.2.2 den $T^*(u,v)$ harmonik fonksiyonu

$$T^*(u,v) = 100 + \frac{50-100}{\pi/2} Arg\, w = 100 - \frac{100}{\pi} Arc \tan \frac{v}{u}$$

olarak elde edilir. O halde

$$T(x,y) = 100 - \frac{100}{\pi} Arc \tan \frac{1-x^2-y^2}{2y}$$

dir. $T(x,y) = C$ izotermalleri Şekil 15 de görüldüğü gibi ± 1 noktalarından geçen çemberlerdir.



Şekil 15

2.3. Sınırı Üzerinde Yalıtılmış Bir Parça Olan Bölgelerdeki Sıcaklıklar

Bu kesimde sınırı C_1, C_2 ve C_3 gibi uç uca birleştirilmiş üç eğriden oluşan basit irtibatlı bir D bölgesinin içinde $T(x,y)$ kararlı durum sıcaklık fonksiyonunu bulma problemini inceleyeceğiz. Burada C_1 boyunca $T(x,y)=T_1$, C_2 boyunca $T(x,y)=T_2$ dir ve bölge C_3 boyunca yalıtılmıştır. C_3 boyunca ısı akışının sıfır olması

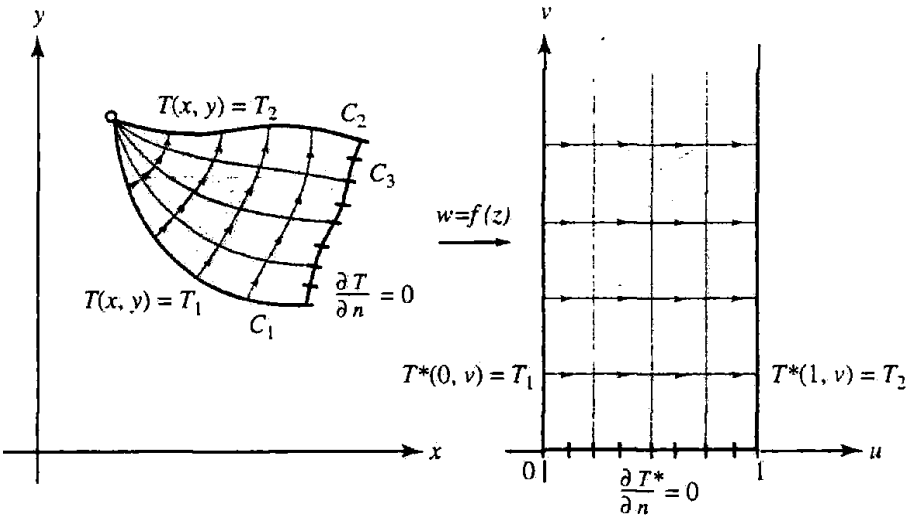
$$V(x,y)N(x,y) = -K\,N(x,y)\,grad\,T(x,y) = 0$$

olmasını gerektirir, burada $N(x,y)$, C_3 e diktir. Böylece ısı akışının yönü sınırın bu parçasına paralel olmalıdır. Başka bir deyişle, C_3 bir $S(x,y) = sabit$ ısı akış doğrusunun bir parçası olmalı ve $T(x,y) = sabit$ izotermallerini dik olarak kesmelidir.

Bu problemi, D den $G: 0 < u < 1$, $v > 0$ yarı-sonsuz şeridi üzerine bir

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

konform dönüşümü bularak çözebiliriz öyle ki C_1 eğrisinin görüntüsü $u = 0$, $v > 0$ ışınıdır, C_2 eğrisinin görüntüsü $u = 1$, $v > 0$ ile verilen ışınıdır ve termal olarak yalıtılmış C_3 eğrisi u ekseninin termal olarak yalıtılmış $0 < u < 1$ parçası üzerine dönüştürülür.



Şekil 16

G deki yeni problem $T^*(u,v)$ kararlı durum sıcaklık fonksiyonunu bulma problemidir öyle ki

$$T^*(0,v) = T_1 \quad , \quad v > 0$$
$$T^*(1,v) = T_2 \quad , \quad v > 0$$

sınır koşulları sağlanır. Sınırın bir parçasının yalıtılmış olma koşulu matematiksel olarak $T^*(u,v)$ nin normal türevinin sıfır olması ile ifade edilebilir. Yani,

$$\frac{\partial T^*}{\partial n} = T_v^*(u,0) = 0$$

dir, burada n, doğru parçasına dik bir koordinat ölçüsüdür. Kolayca görülür ki

$$T^*(u,v) = T_1 + (T_2 - T_1)u$$

fonksiyonu G bölgesi için aranan sıcaklık fonksiyonunun şartlarını sağlar. Dolayısıyla, D deki çözümü $w = f(z)$ den

$$T(x,y) = T_1 + (T_2 - T_1)u(x,y)$$

olarak buluruz. $T(x,y) = sabit$ izotermalleri ve onların $w = f(z)$ altındaki görüntüleri yukarıda Şekil 16 da gösterilmiştir.

Örnek 2.3.1. $D: \operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzlemi için $T(x,y)$ kararlı durum sıcaklığını bulunuz öyle ki

$$T(x,0) = 1 \ , \ x > 1$$
$$T(x,0) = -1 \ , \ x < -1$$
$$\frac{\partial T}{\partial n} = T_y(x,0) = 0 \ , \ -1 < x < 1$$

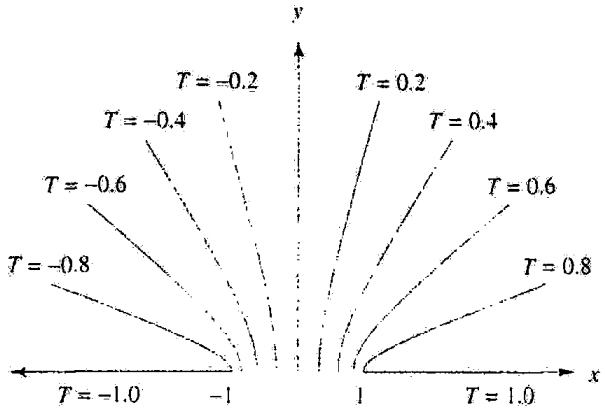
sınır koşulları sağlansın.

Çözüm. Örnek 0.2.4 den bilinmektedir ki $w = Arc\sin z$ dönüşümü D yi $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$ yarı-sonsuz şeridi üzerine dönüştürür, burada yeni problem $T^*(u,v)$ kararlı durum sıcaklığını bulmaktır öyle ki

$$T^*\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = 1 \quad , \ v > 0$$
$$T^*\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = -1 \ , \ v > 0$$
$$\frac{\partial T^*}{\partial n} = T_v^*(u,0) = 0 \ , \ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$

sınır koşulları sağlanır. Örnek 1.2.1 in sonucunu kullanarak kolayca $T^*(u,v) = \frac{2}{\pi}u$ çözümünü bulabiliriz. Dolayısıyla D deki çözüm

$$T(x,y)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}(Arc\sin z)=\frac{2}{\pi}Arc\sin\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2}$$



Şekil 17

Burada $Arc\sin t$, $-\frac{\pi}{2}<Arc\sin t<\frac{\pi}{2}$ değerlerine sahip olan ters sinüs fonksiyondur. Bu durumda $T(x,y)$ sıcaklığı

$$T(x,0)=-1 \quad , \quad x<-1$$
$$T(x,0)=1 \quad , \quad x>1$$
$$T_y(x,0)=0 \quad , \quad -1<x<1$$

sınır koşullarını sağlar.

2.4. İki Boyutlu Elektrostatik

Bir iki boyutlu elektrostatik alan, yüklü tellerin, tabakaların ve z-düzlemine dik silindirik iletkenlerin bir sistemi ile üretilir. Teller, tabakalar ve silindirler öyle uzun kabul edilir ki uç noktalardaki etkiler ihmal edilebilir. Bu kabul ile bir $E(x, y)$ elektrik alanını (x, y) noktasına yerleştirilmiş bir birimlik elektrik yüküne etki eden kuvvet olarak yorumlanabilir. Elektrostatik çalışmalarında $E(x, y)$ vektör alanının konservatif olarak elektrostatik potansiyel denilen bir $\phi(x, y)$ fonksiyonundan türetilebildiği bilinmekte ve bu,

$$E(x, y) = -grad\ \phi(x, y) = -\phi_x(x, y) - i\phi_y(x, y)$$

olarak ifade edilebilmektedir.

Eğer D bölgesi içinde yükün olmadığını ek olarak kabul edersek, bu durumda elektrostatik alanlar için Gauss kanunu gerektirir ki D de bulunan herhangi bir küçük dikdörtgen etrafında alınan $E(x, y)$ nin dış normal bileşeninin eğri integrali özdeş olarak sıfırdır. $\phi(x, y)$ yerine $T(x, y)$ alınarak kararlı durum sıcaklığı için benzer düşünce kullanılabilir. Görülür ki eğri integralinin değeri

$$-\left[\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y)\right]\Delta x\, \Delta y$$

dir ve bu sıfırdır, böylece $\phi(x, y)$ nin harmonik olduğu ortaya çıkar. $\psi(x, y)$, $\phi(x, y)$ nin harmonik eşleniği ise $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ kompleks potansiyeldir.

$\phi(x, y) = K_1$ eğrilerine eşpotansiyel eğrileri ve $\psi(x, y) = K_2$ eğrilerine de akı doğruları adı verilir. Eğer bir küçük test yüküne $E(x, y)$ alanının etkisi altında hareket etme izni verilirse, bu durumda bu yük bir akı doğrusu boyunca gezecektir. $\phi(x, y)$ potansiyel fonksiyonu için sınır değer problemleri matematiksel olarak kararlı durum ısı akışındaki ile aynıdır ve bunlar harmonik fonksiyonu $\phi(x, y)$ olan Dirichlet probleminin uygulamasıdır.

Örnek 2.4.1. İki paralel iletken düzlemi göz önüne alalım öyle ki bunlar z düzlemine dik ve $x = a$ ile $x = b$ doğrularından geçsinler ve sırasıyla U_1 ve U_2 potansiyellerde tutulmuş olsunlar. Bu durumda Örnek 1.2.1 den elektrik potansiyeli

$$\phi(x, y) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{b - a}(x - a)$$

biçimindedir.

Örnek 2.4.2. $r = a$ ve $r = b$ sonsuz silindirleri arasındaki bölgedeki, sırasıyla U_1 ve U_2 potansiyellerinde tutulan, $\phi(x, y)$ elektrik potansiyelini bulunuz.

Çözüm. Örnek 0.2.5 de gösterildiği gibi $w = \log z = \ln|z| + i \arg z$ fonksiyonu $r = a$ ve $r = b$ çemberleri arasındaki halka bölgeyi w-düzlemindeki $\ln a < u < \ln b$ sonsuz şeridi üzerine dönüştürür. Sonsuz şeritteki $\phi(u, v)$ potansiyeli her v için

$$\Phi(\ln a, v) = U_1 \quad \text{ve} \quad \Phi(\ln b, v) = U_2$$

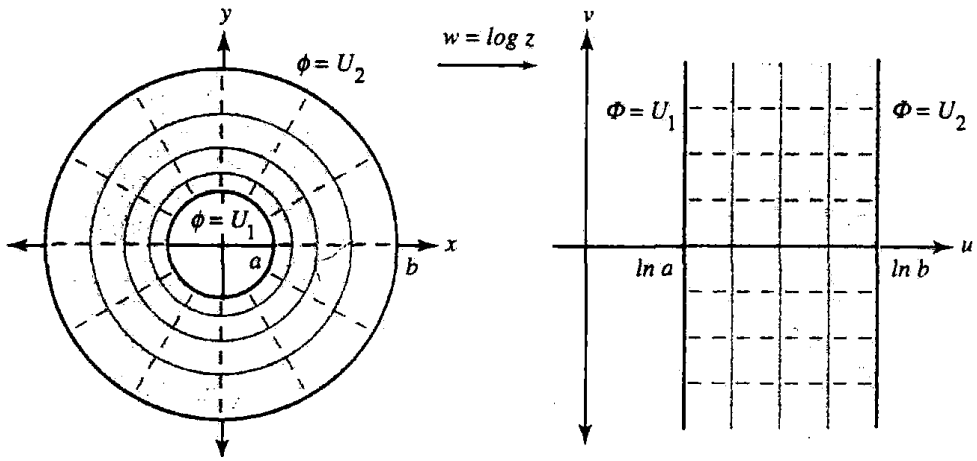
sınır değerlerine sahiptir. Yukarıdaki Örnek 2.4.1 i kullanırsak

$$\Phi(u, v) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{\ln b - \ln a}(u - \ln a)$$

elektrik potansiyelini elde ederiz. $u = \ln|z|$ olduğundan

$$\phi(x, y) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{\ln b - \ln a}(\ln|z| - \ln a)$$

dir. $\phi(x, y) = sabit$ eşpotansiyelleri orijin merkezli eşmerkezli çemberlerdir ve akı doğruları orijinden çıkan ışın parçalarıdır. Eğer $U_2 < U_1$ ise, bu durum aşağıda Şekil 18 de gösterilmiştir.



Şekil 18

Örnek 2.4.3. z-düzlemine dik ve $x < -1, y = 0$ ve $x > 1, y = 0$ ışınlarından geçen yüklü iki yarı düzlem tarafından üretilen $\phi(x, y)$ elektrik potansiyelini bulunuz. Burada düzlemler sabit

$$\phi(x,0) = -300 \quad , \quad x < -1$$
$$\phi(x,0) = 300 \quad , \quad x > 1$$

potansiyellerinde tutulmaktadır.

Çözüm. Örnek 0.2.4 de gösterildiği gibi $w = Arc\sin z$ fonksiyonu $x < -1, y = 0$ ve $x > 1, y = 0$ ışınları boyunca kesilmiş z-düzleminden $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ düşey şeridi üzerine bir bire-bir konform dönüşümdür. Şimdi şerit üzerindeki yeni sınır değer problemi "$\forall v$ için

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = -300 \quad \text{ve} \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = 300$$

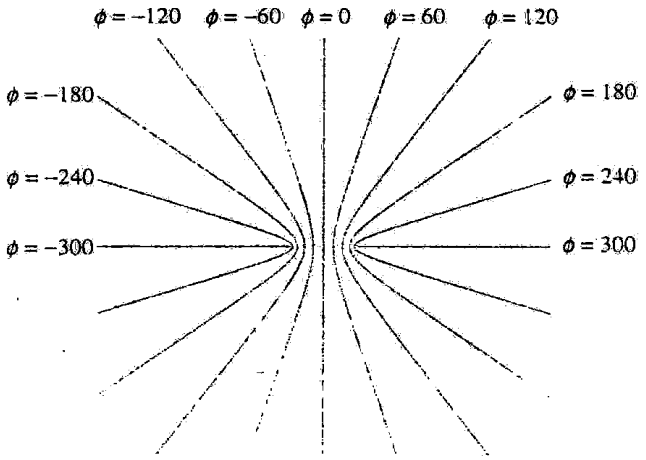
sınır değerlerine sahip bir $\Phi(u, v)$ potansiyeli bulunuz" biçiminde olacaktır. Örnek 1.2.1 den

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{u}, \mathrm{v}) &= -300 + \frac{300 - (-300)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}\left(\mathrm{u} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -300 + \frac{600}{\pi}\mathrm{u} + \frac{600}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{600}{\pi}\mathrm{u} = \frac{600}{\pi}\mathrm{Re\,w}\end{aligned}$$

dir. z-düzlemindeki çözüm

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \frac{600}{\pi}\mathrm{Re}\left(Arc\sin z\right) \\ &= \frac{600}{\pi} Arc\sin\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2}\end{aligned}$$

dir. Eşpotansiyellerin bir kısmı Şekil 19 da gösterilmiştir.



Şekil 19

Örnek 2.4.4. $D:|z|<1$ diskinde

$$\phi(x,y)=80 \quad , \quad z=x+iy\in C_1=\left\{z=e^{i\theta}\ :\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\phi(x,y)=0 \quad , \quad z=x+iy\in C_2=\left\{z=e^{i\theta}\ :\ \frac{\pi}{2}<\theta<2\pi\right\}$$

sınır koşullarını sağlayan $\phi(x,y)$ elektrik potansiyelini bulunuz.

Çözüm. $w=S(z)=\dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1}$ dönüşümü D den $\operatorname{Im} w>0$ üst yarı-düzlemi üzerine bir birebir konform dönüşümdür öyle ki C_1 negatif u-ekseni üzerine ve C_2 de pozitif u-ekseni üzerine dönüştürülür. Üst yarı-düzlemdeki $\Phi(u,v)$ potansiyeli yeni

$$\Phi(u,0)=80 \quad , \quad u<0$$
$$\Phi(u,0)=0 \quad , \quad u>0$$

sınır koşullarını sağlar ve

$$\Phi(u,v)=\frac{80}{\pi}Argw=\frac{80}{\pi}Arc\tan\frac{v}{u} \qquad (2.1)$$

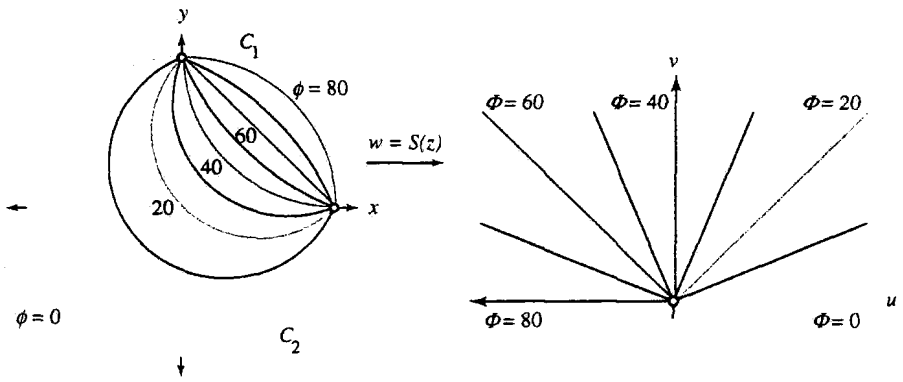
ile verilir. Bir doğrudan hesaplama ile

$$u+iv=S(z)=\frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1+i\left(1-x^2-y^2\right)}{(x-1)^2+y^2}$$

olduğu görülür. (2.1) denkleminden, istenen çözüm

$$\phi(x,y)=\frac{80}{\pi}Arc\tan\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+(y-1)^2-1}$$

biçimindedir. Üst yarı-düzlemdeki $\Phi(u,v)=\alpha$ düzey eğrisi orijinden çıkan bir ışındır ve birim diskteki $\phi(x,y)=\alpha$ ön görüntüsü 1 ve i noktalarından geçen bir çember yayıdır. Bir kısım düzey eğrileri Şekil 20 de gösterilmiştir.



Şekil 20

2.5. İki Boyutlu Sıvı Akışı

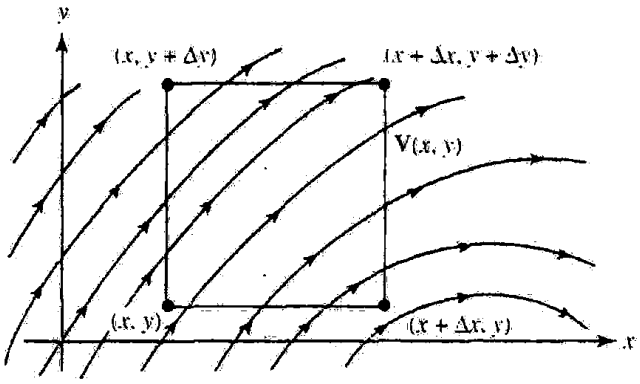
Kabul edelim ki kompleks düzlem üzerinde bir sıvı akmaktadır ve $z = x + iy$ noktasında bu sıvının hızı

$$V(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) \qquad (2.2)$$

hız vektörü ile verilmektedir. Hızın zamandan bağımsız ve $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ bileşenlerinin sürekli kısmi türevlere sahip olmasını isteriz. (2.2) denklemindeki vektör alanının divergensi

$$divV(x, y) = p_x(x, y) + q_y(x, y)$$

ile verilir ve $z = x + iy$ noktası civarında uzaklaşan hız alanının büyüklüğünün ölçüsüdür. Biz sadece divergensi sıfır olan sıvı akışlarını göz önüne alacağız. Bu koşul herhangi bir basit kapalı çevre boyunca net akışın özdeş olarak sıfır olması biçiminde daha kesin olarak karakterize edilir.



Şekil 21

Eğer Şekil 21 de gösterilen küçük dikdörtgenin dışındaki akışı göz önüne alırsak, bu durumda dışarı doğru akış oranı $V(x, y)$ nin dikdörtgenin kenarlarında elde edilmiş olan dış normal bileşenin eğri integraline eşittir. Dış normal bileşen alt kenar üzerinde $-q$, sağ kenar üzerinde p, üst kenar üzerinde q ve sol kenar üzerinde $-p$ ile verilir. Sonuçlanan net akış integre edilip sıfıra eşitlendiğinde

$$\int_y^{y+\Delta y} [p(x + \Delta x, t) - p(x, t)]dt - \int_x^{x+\Delta x} [q(t, y + \Delta y) - q(t, y)]dt = 0$$

sağlanır. Hem p, hem de q sürekli diferensiyellenebilirdir. Böylece ortalama değer teoremini kullanırsak

$$\begin{aligned} p(x + \Delta x, t) - p(x, t) &= p_x(x_1, t)\Delta x \\ q(t, y + \Delta y) - q(t, y) &= q_y(t, y_2)\Delta y \end{aligned} \qquad (2.3)$$

elde ederiz, burada $x < x_1 < x + \Delta x$ ve $y < y_2 < y + \Delta y$ dir. (2.3) denklemindeki ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazar ve her iki tarafı $\Delta x \Delta y$ ile bölersek

$$\frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} p_x(x_1, t)dt + \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} q_y(t, y_2)dt = 0$$

buluruz. Bu denklemi ve integraller için ortalama değer teoremini kullanırsak

$$p_x(x_1, y_1) + q_y(x_2, y_2) = 0$$

elde ederiz, burada $y < y_1 < y + \Delta y$ ve $x < x_2 < x + \Delta x$ dir. Bu denklemde $\Delta x \to 0$ ve $\Delta y \to 0$ alınırsa

$$p_x(x, y) + q_y(x, y) = 0$$

olur ki buna süreklilik denklemi denir. $\mathrm{V}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{p}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \mathrm{iq}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ vektör alanının curl ü

$$|\, curl\, V(x, y)| = q_x(x, y) - p_y(x, y)$$

büyüklüğüne sahiptir ve bir nokta civarında vektör alanının nasıl döndüğünün bir göstergesidir. (x, y) noktasında bir "sıvı elementi" nin aniden donduğunu ve daha sonra yavaş yavaş sıvılaştığını düşünelim. Sıvı elementi

$$\frac{1}{2} q_y(x, y) - \frac{1}{2} p_x(x, y) = \frac{1}{2} |\, curl\, V(x, y)|$$

ile verilen bir açısal hız ile dönecektir.

Biz sadece curl ü sıfır olan sıvı akışları ile ilgileneceğiz. Bu tür sıvı akışlarına irrotasyonel sıvı akışı denir. Bu koşul herhangi bir basit kapalı çevre boyunca $V(x, y)$ nin teğetsel bileşeninin eğri integralinin özdeş olarak sıfır olması biçiminde daha kesin olarak karakterize edilir. Eğer yukarıdaki Şekil 23 deki dikdörtgeni göz önüne alırsak teğetsel bileşen alt kenar üzerinde p, sağ kenar üzerinde q, üst kenar üzerinde $-p$ ve sol kenar üzerinde $-q$ ile verilir. Sonuçlanan sirkülasyon integrali hesaplanıp sıfıra eşitlendiğinde

$$\int_y^{y+\Delta y} [q(x + \Delta x, t) - q(x, t)]dt + \int_x^{x+\Delta x} [p(t, y + \Delta y) - p(t, y)]dt = 0$$

sağlanır. Önceki gibi, ortalama değer teoremini uygular ve her iki tarafı $\Delta x \Delta y$ ile bölersek

$$\frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} q_x(x_1, t)dt + \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} p_y(t, y_2)dt = 0$$

denklemini buluruz. $q_x(x_1, y_1) - p_y(x_2, y_2) = 0$ eşitliğini elde etmek için bu türden denklemli integraller için ortalama değeri kullanabiliriz. $\Delta x \to 0$ ve $\Delta y \to 0$ alındığında $q_x(x, y) - p_y(x, y) = 0$ sağlanır. $p_x(x, y) + q_y(x, y) = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa $f(z) = p(x, y) - iq(x, y)$ fonksiyonunun Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığı ve bir analitik fonksiyon olduğu görülür. Eğer $f(z)$ nin antitürevini $F(z)$ ile gösterirsek, bu durumda

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

olur ki bu, akışın kompleks potansiyelidir ve

$$\overline{F'(z)} = \phi_x(x, y) - i\psi_x(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) = V(x, y)$$

özelliğine sahiptir. $\phi_x = p$ ve $\phi_y = q$ olduğundan

$$grad\phi(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) = V(x, y)$$

dir, böylece $\phi(x, y)$ akış için hız potansiyelidir ve $\phi(x, y) = K_1$ eğrilerine eşpotansiyeller denir. $\psi(x, y)$ fonksiyonuna akıntı fonksiyonu denir. $\psi(x, y) = K_2$ eğrilerine akıntı doğruları denir ve sıvı partiküllerinin eğrilerini tanımlar. Bu sonucu açıklamak için, $\psi(x, y) = K$ nın türevini alırız ve bir teğet vektörün eğiminin $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\psi_x(x, y)}{\psi_y(x, y)}$ ile verildiğini buluruz. $\psi_y = \phi_x$ olduğunu da göz önüne alırsak eğriye teğet olan vektörü

$$T = \phi_x(x, y) - i\psi_x(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) = V(x, y)$$

olarak buluruz. Bu incelemelerde dikkati çeken fikir "Eğer $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ bir analitik fonksiyon ise, bu durumda $\{\psi(x, y) = K_2\}$ eğrilerinin ailesi bir sıvı akışının akıntı doğrularını gösterir" dir.

Bir ideal sıvı akışı için sınır koşulu V nin sıvıyı içeren sınır eğrisine paralel olmasıdır (sıvı kabın duvarlarına paralel olarak akar). Başka bir deyişle, eğer $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ denklemi akış için kompleks potansiyel ise bu durumda sınır eğrisi bir K sabiti için $\psi(x, y) = K$ ile verilmelidir. Yani, sınır eğrisi bir akıntı doğrusu olmalıdır.

Teorem 2.5.1. (Akışın değişmezliği) $F_1(w) = \phi(u, v) + i\psi(u, v)$ w-düzlemindeki bir G bölgesinde bir sıvı akışı için kompleks potansiyeli göstersin, burada hız

$$V_1(u, v) = \overline{F_1'(w)}$$

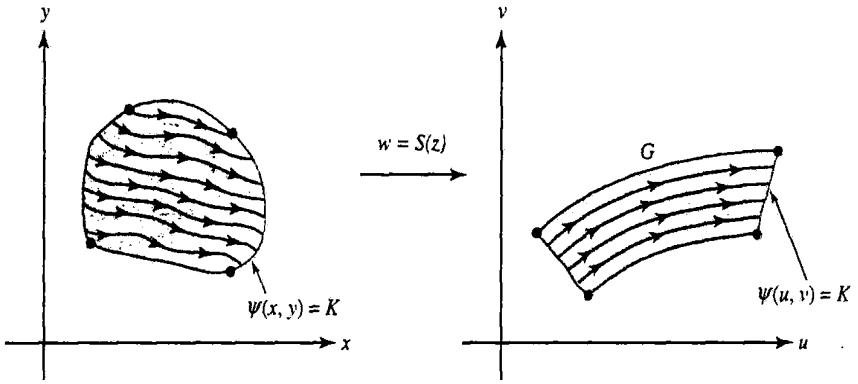
dir. Eğer $w = S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu z-düzlemindeki bir D bölgesinden G üzerine bir birebir konform dönüşüm ise bu durumda

$$F_2(z) = F_1(S(z)) = \Phi[u(x, y), v(x, y)] + i\Psi[u(x, y), v(x, y)]$$

bileşke fonksiyonu D deki bir sıvı akışı için kompleks potansiyeldir, burada hız

$$V_2(u,v) = \overline{F_2'(z)}$$

dir. Bu durum Şekil 22 de gösterilmektedir.



Şekil 22

İspat. $F_1(w)$ nin analitik olduğu açıktır. Analitik fonksiyonların bileşkesi de analitik olduğundan, $F_2(z)$ D deki bir sıvı akışı için istenen kompleks potansiyeldir. $\phi(x,y) = \Phi[u(x,y), v(x,y)]$ ve $\psi(x,y) = \Psi[u(x,y), v(x,y)]$ fonksiyonları D deki akış için sırasıyla, yeni hız potansiyeli ve akıntı fonksiyonudur.

z-düzlemindeki bir $\psi(x,y) = K$ akıntı doğrusu veya doğal sınır eğrisi $w = S(z)$ dönüşümü ile w-düzleminde bir $\Psi(u,v) = K$ akıntı doğrusu veya doğal sınır eğrisi üzerine dönüştürülür. z-düzlemindeki bir D bölgesi içindeki bir akışı bulmak için bir yöntem D w-düzlemindeki akışı bilinen bir G bölgesi üzerine konform olarak dönüştürmektedir.

Bir düzgün ρ yoğunluklu ideal sıvı için $p(x,y)$ sıvı basıncı ve $|V(x,y)|$ hızı Bernoulli denkleminin aşağıdaki özel durumu ile ilgilidir.

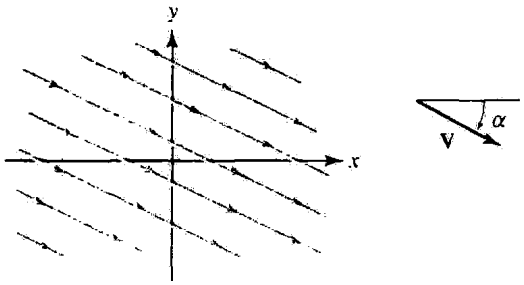
$$\frac{p(x,y)}{\rho} + \frac{1}{2}|V(x,y)| = sabit$$

Hız en düşük olduğunda basıncın en büyük olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 2.5.2. $F(z)=(a+ib)z$ kompleks potansiyeli sırasıyla $\phi(x,y)=ax-by$ ve $\psi(x,y)=bx+ay$ hız potansiyeli ve akıntı fonksiyonuna sahiptir ve kompleks düzlemin tamamında bir

$$V(x,y)=\overline{F'(z)}=a-ib$$

düzgün paralel hıza sahiptir. Akıntı doğruları $bx+ay=sabit$ denklemi ile verilen paralel doğrulardır ve Şekil 23 de gösterildiği gibi bir $\alpha=-Arc\tan\left(\frac{b}{a}\right)$ açısı ile eğimlidir.

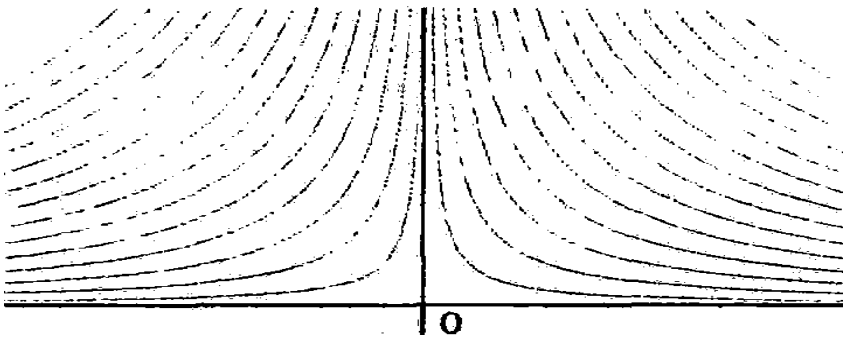


Şekil 23

Örnek 2.5.3. A bir pozitif reel sayı olmak üzere $F(z)=\frac{A}{2}z^2$ kompleks potansiyelini göz önüne alalım. Hız potansiyeli ve akıntı fonksiyonu sırasıyla

$$\phi(x,y)=\frac{A}{2}\left(x^2-y^2\right) \qquad \text{ve} \qquad \psi(x,y)=Axy$$

ile verilir. $\psi(x,y)=sabit$ akıntı doğruları koordinat eksenleri boyunca asimptotlu bir hiperboller ailesi oluşturur. $V=A\bar{z}$ hız vektörü $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı-düzleminde sıvı akıntı doğruları boyunca aşağı doğru akar ve Şekil 24 de gösterilen biçimde x ekseni boyunca dışarı doğru bir duvar karşısındaymış gibi yayılır.



Şekil 24

Örnek 2.5.4. Kompleks düzlemde soldan sağa doğru $|z| = 1$ birim çemberi etrafında bir ideal sıvı akışı için kompleks potansiyeli bulunuz.

Çözüm. $w = S(z) = z + \frac{1}{z}$ konform dönüşümünün $D = \{z : |z| < 1\}$ bölgesini $-2 \le u \le 2$, $v = 0$ doğru parçası boyunca kesilmiş w-düzlemi üzerine birebir ve üzerine olarak dönüştürmesi gerçeğini kullanırız. w-düzleminde bu kesite paralel bir düzgün yatay akış için kompleks potansiyel $F_1(w) = Aw$ dir, burada A bir pozitif reel sayıdır. w-düzlemindeki akış için akıntı fonksiyonu $\Psi(u,v) = Av$ dir öyle ki $\Psi(u,v) = 0$ akıntı doğrusu boyunca kesit vardır.

$F_2(z) = F_1(S(z))$ bileşke fonksiyonu D bölgesindeki sıvı akışını belirler, burada kompleks potansiyel $A > 0$ olmak üzere $F_2(z) = A\left(z + \frac{1}{z}\right)$ dir. $F_2(z)$ yi ifade etmek için kutupsal koordinatları kullanabiliriz.

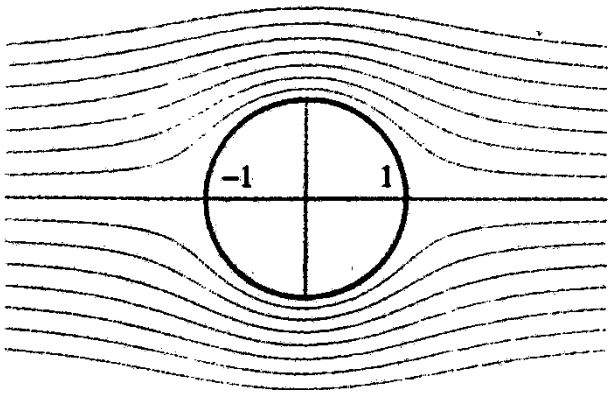
$$F_2(z) = F_2(re^{i\theta}) = A\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + iA\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

dır. $\psi(r,\theta) = A\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$ akıntı doğrusu x ekseni boyunca

$$r > 1 \ , \ \theta = 0 \quad \text{ve} \quad r > 1 \ , \ \theta = \pi$$

ışınlarından ve $r - \frac{1}{r} = 0$ eğrisinden, ki bu $r = 1$ birim çemberidir, oluşur. Böylece birim çember sıvı akışı için bir sınır eğrisi olarak göz önüne alınabilir.

$F_2(z) = A\left(z + \frac{1}{z}\right) \approx Az$ yaklaşımı z nin büyük değerleri için geçerlidir. Böylece bu akış ile orijinden uzak noktalarda $|V| = A$ hızına sahip bir düzgün yatay akışı yaklaştırabiliriz. $\psi(x,y) = sabit$ akıntı doğruları ve bunların $w = S(z) = z + \frac{1}{z}$ dönüşümü altında $\Psi(u,v) = sabit.u$ görüntüleri Şekil 25 de gösterilmiştir.



Şekil 25

KAYNAKLAR

1. Hahn, L. S. and Epstein, B. (1996), Classical Complex Analysis, Jones And Bartlett Publishers, Boston.

2. Mathews, J.H. and Howell, R.W. (2001), Complex Analysis, Jones And Bartlett Publishers, Boston

3. Özkın, İ.K. (1989), Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Ders Notları, Ankara.

4. Saff, E.B. and Snider, A.D. (2000), Fundamentals of Complex Analysis with Applications, Prentice Hall, NJ.

PROBLEMLER

Laplace Denkleminin Değişmezliği ve Dirichlet Problemi

For each exercise, find a solution $\phi(x, y)$ of the Dirichlet problem in the domain indicated that takes on the prescribed boundary values.

1. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the horizontal strip $1 < \operatorname{Im}(z) < 2$ and has the boundary values

$$\phi(x,1) = 6, \quad \text{for all } x, \qquad \text{and} \qquad \phi(x,2) = -3, \quad \text{for all } x.$$

2. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the sector $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/3$ and has the boundary values

$$\phi(x,y) = 2, \quad \text{for } \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3}, \qquad \text{and} \qquad \phi(x,0) = 1, \quad \text{for } x > 0.$$

3. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the annulus $1 < |z| < 2$ and has the boundary values

$$\phi(x,y) = 5, \quad \text{when } |z| = 1, \qquad \text{and} \qquad \phi(x,y) = 8, \quad \text{when } |z| = 2.$$

4. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the upper half-plane $\operatorname{Im}(z) > 0$ and has the boundary values

$$\phi(x,0) = 1, \quad \text{for } -1 < x < 1, \qquad \text{and} \qquad \phi(x,0) = 0, \quad \text{for } |x| > 1.$$

5. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the upper half-plane $\operatorname{Im}(z) > 0$ and has the boundary values

$$\phi(x,0) = 3, \quad \text{for } x < -3, \qquad \text{and} \qquad \phi(x,0) = 7, \quad \text{for } -3 < x < -1;$$
$$\phi(x,0) = 1, \quad \text{for } -1 < x < 2, \qquad \text{and} \qquad \phi(x,0) = 4, \quad \text{for } x > 2.$$

6. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the first quadrant $x > 0$, $y > 0$ and has the boundary values

$$\phi(0,y) = 0, \quad \text{for } y > 1, \qquad \text{and} \qquad \phi(0,y) = 1, \quad \text{for } 0 < y < 1;$$
$$\phi(x,0) = 1, \quad \text{for } 0 \le x < 1, \qquad \text{and} \qquad \phi(x,0) = 0, \quad \text{for } x > 1.$$

7. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the unit disk $|z| < 1$ and has the boundary values

$$\phi(x,y) = 0, \quad \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi;$$
$$\phi(x,y) = 5, \quad \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

8. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the unit disk $|z| < 1$ and has the boundary values

$$\phi(x,y) = 8, \quad \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi;$$
$$\phi(x,y) = 4, \quad \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

9. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the upper half-disk $y > 0$, $|z| < 1$ and has the boundary values

$$\phi(x,y) = 5, \quad \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi;$$
$$\phi(x,0) = -5, \quad \text{for } -1 < x < 1.$$

10. Find the function $\phi(x, y)$ that is harmonic in the portion of the upper half-plane $\operatorname{Im}(z) > 0$ that lies outside the circle $|z| = 1$ and has the boundary values

$$\phi(x,y) = 1, \quad \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi;$$
$$\phi(x,0) = 0, \quad \text{for } |x| > 1.$$

Hint: Use the mapping $w = -1/z$ and the result of Example 10.9.

11. Find the function $\phi(x,y)$ that is harmonic in the quarter-disk $x > 0$, $y > 0$, $|z| < 1$ and has the boundary values

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= 3, && \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}; \\ \phi(x,0) &= -3, && \text{for } 0 \le x < 1; \\ \phi(0,y) &= -3, && \text{for } 0 < y < 1. \end{aligned}$$

12. Find the function $\phi(x,y)$ that is harmonic in the unit disk $|z| < 1$ and has the boundary values

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= 1, && \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}; \\ \phi(x,y) &= 0, && \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Üst Yarı-düzlem İçin Poisson İntegral Formülü

1. Use Poisson's integral formula to find the harmonic function $\phi(x,y)$ in the upper half-plane that takes on the boundary values

$$\begin{aligned} \phi(t,0) &= U(t) = 0, && \text{for } t < 0; \\ \phi(t,0) &= U(t) = t, && \text{for } 0 < t < 1; \\ \phi(t,0) &= U(t) = 0, && \text{for } 1 < t. \end{aligned}$$

2. Use Poisson's integral formula to find the harmonic function $\phi(x,y)$ in the upper half-plane that takes on the boundary values

$$\begin{aligned} \phi(t,0) &= U(t) = 0, && \text{for } t < 0; \\ \phi(t,0) &= U(t) = t, && \text{for } 0 < t < 1; \\ \phi(t,0) &= U(t) = 1, && \text{for } 1 < t. \end{aligned}$$

3. Use Poisson's integral formula for the upper half-plane to conclude that

$$\phi(x,y) = e^{-y}\cos x = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t \, dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

4. Use Poisson's integral formula for the upper half-plane to conclude that

$$\phi(x,y) = e^{-y}\sin x = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t \, dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

5. Show that the function $\phi(x,y)$ given by Poisson's integral formula is harmonic by applying Leibniz's rule, which permits you to write

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\right] dt.$$

6. Let $U(t)$ be a real-valued function that satisfies the conditions for Poisson's integral formula for the upper half-plane. If $U(t)$ is an even function so that $U(-t) = U(t)$, then show that the harmonic function $\phi(x,y)$ has the property $\phi(-x,y) = \phi(x,y)$.

7. Let $U(t)$ be a real-valued function that satisfies the conditions for Poisson's integral formula for the upper half-plane. If $U(t)$ is an odd function so that for all t $U(-t) = -U(t)$, then show that the harmonic function $\phi(x,y)$ has the property $\phi(-x,y) = -\phi(x,y)$.

Kararlı Durum Sıcaklıkları

1. Show that $H(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ satisfies Laplace's equation $H_{xx} + H_{yy} + H_{zz} = 0$ in three-dimensional Cartesian space but that $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *does not* satisfy equation $h_{xx} + h_{yy} = 0$ in two-dimensional Cartesian space.

2. Find the temperature function $T(x,y)$ in the infinite strip bounded by the lines $y = -x$ and $y = 1-x$ that satisfies the following boundary values (shown in Figure 10.22).

$$T(x,-x) = 25, \quad \text{for all } x;$$
$$T(x,1-x) = 75, \quad \text{for all } x.$$

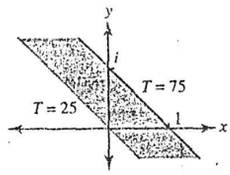


Figure 10.22

3. Find the temperature function $T(x,y)$ in the first quadrant $x > 0$, $y > 0$ that satisfies the following boundary values (shown in Figure 10.23).

$$T(x,0) = 10, \quad \text{for } x > 1,$$
$$T(x,0) = 20, \quad \text{for } 0 < x < 1,$$
$$T(0,y) = 20, \quad \text{for } 0 \le y < 1,$$
$$T(0,y) = 10, \quad \text{for } y \geqslant 1.$$

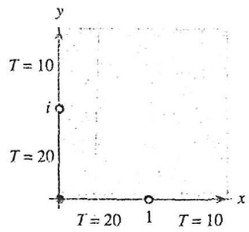


Figure 10.23

4. Find the temperature function $T(x,y)$ inside the unit disk $|z| < 1$ that satisfies the following boundary values (shown in Figure 10.24). *Hint:* Use $w = \dfrac{i(1-z)}{1+z}$.

$$T(x,y) = 20, \quad \text{for } x+iy = z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2};$$
$$T(x,y) = 60, \quad \text{for } x+iy = z = e^{i\theta}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

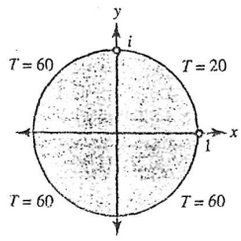


Figure 10.24

5. Find the temperature function $T(x, y)$ in the semi-infinite strip $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$ that satisfies the following boundary values (shown in Figure 10.25).

$$T\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 100, \qquad \text{for } y > 0;$$
$$T(x,y) = 0, \qquad \text{for } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$
$$T\left(\frac{-\pi}{2}, y\right) = 100, \qquad \text{for } y > 0.$$

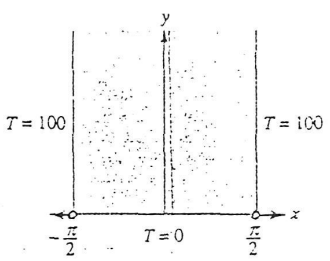


Figure 10.25

6. Find the temperature function $T(x, y)$ in the domain $r > 1$, $0 < \theta < \pi$ that satisfies the following boundary values (shown in Figure 10.26). *Hint:* $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$.

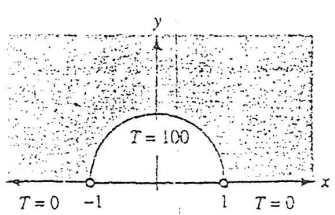


Figure 10.26

$$T(x,0) = 0, \qquad \text{or } x > 1;$$
$$T(x,0) = 0, \qquad \text{for } x < -1;$$
$$T(x,y) = 100, \qquad \text{if } z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

7. Find the temperature function $T(x, y)$ in the domain $1 < r < 2$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ that satisfies the following boundary conditions (shown in Figure 10.27).

$$T(x,y) = 0, \qquad \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2};$$
$$T(x,y) = 50, \qquad \text{for } x + iy = z = 2e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2};$$
$$\frac{\partial T}{\partial n} = T_y(x,0) = 0, \qquad \text{for } 1 < x < 2;$$
$$\frac{\partial T}{\partial n} = T_x(0,y) = 0, \qquad \text{for } 1 < y < 2.$$

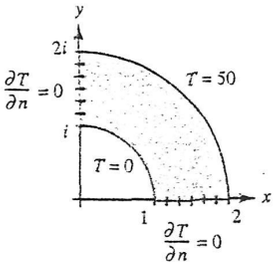


Figure 10.27

8. Find the temperature function $T(x, y)$ in the domain $0 < r < 1$, $0 < \text{Arg}z < \alpha$ that satisfies the following boundary conditions (shown in Figure 10.28). *Hint*: Use $w = \text{Log}z$.

$$
\begin{aligned}
T(x,0) &= 100, && \text{for } 0 < x < 1;\\
T(x,y) &= 50, && \text{for } x + iy = z = re^{i\alpha}, \quad 0 < r < 1;\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= 0, && \text{for } x + iy = z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \alpha.
\end{aligned}
$$

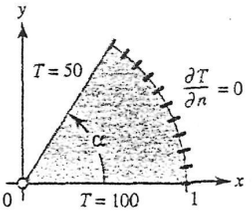


Figure 10.28

9. Find the temperature function $T(x, y)$ in the first quadrant $x > 0$, $y > 0$ that satisfies the following boundary conditions (shown in Figure 10.29).

$$
\begin{aligned}
T(x,0) &= 100, && \text{for } x > 1;\\
T(0,y) &= -50, && \text{for } y > 1;\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= T_y(x,0) = 0, && \text{for } 0 < x < 1;\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= T_x(0,y) = 0, && \text{for } 0 < y < 1.
\end{aligned}
$$

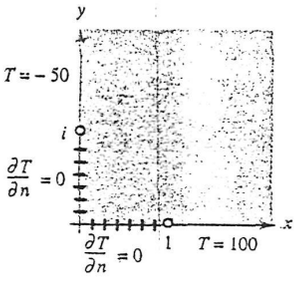


Figure 10.29

10. Find the temperature function $T(x, y)$ in the infinite strip $0 < y < \pi$ that satisfies the following boundary conditions (shown in Figure 10.30). *Hint*: Use $w = e^z$.

$$
\begin{aligned}
T(x,0) &= 50, && \text{for } x > 0;\\
T(x,\pi) &= -50, && \text{for } x > 0;\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= T_y(x,0) = 0, && \text{for } x < 0;\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= T_y(x,\pi) = 0, && \text{for } x < 0.
\end{aligned}
$$

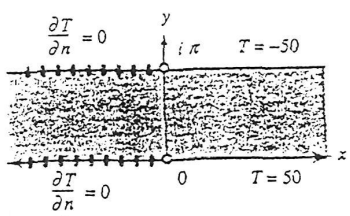


Figure 10.30

11. Find the temperature function $T(x, y)$ in the upper half-plane $\mathrm{Im}(z) > 0$ that satisfies the following boundary conditions (shown in Figure 10.31).

$$
\begin{aligned}
T(x,0) &= 100 && \text{for } 0 < x < 1;\\
T(x,0) &= -100 && \text{for } -1 < x < 0;\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= T_y(x,0) = 0 && \text{for } x > 1;\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= T_y(x,0) = 0 && \text{for } x < -1.
\end{aligned}
$$

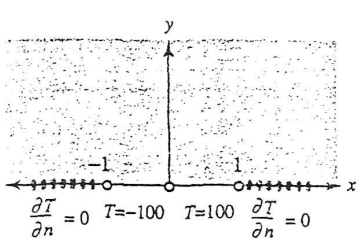


Figure 10.31

12. Find the temperature function $T(x, y)$ in the first quadrant $x > 0$, $y > 0$ that satisfies the following boundary conditions (shown in Figure 10.32).

$$
\begin{aligned}
T(x,0) &= 50, && \text{for } x > 0;\\
T(0,y) &= -50, && \text{for } y > 1;\\
\frac{\partial T}{\partial n} &= T_x(0,y) = 0, && \text{for } 0 < y < 1.
\end{aligned}
$$

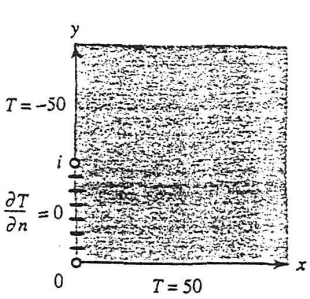


Figure 10.32

13. For the temperature function

$$T(x,y) = 100 - \frac{100}{\pi}\text{Arctan}\frac{1-x^2-y^2}{2y}$$

in the upper half-disk $|z| < 1$, $\text{Im}(z) > 0$, show that the isothermals $T(x,y) = \alpha$ are portions of circles that pass through the points $+1$ and -1, as illustrated in Figure 10.33.

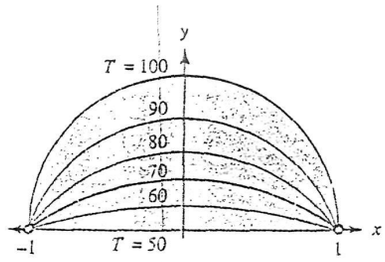


Figure 10.33

14. For the temperature function

$$T(x,y) = \frac{300}{\pi}\text{Re}(\text{Arcsin}z)$$

in the upper half-plane $\text{Im}(z) > 0$, show that the isothermals $T(x,y) = \alpha$ are portions of hyperbolas that have foci at the points ± 1, as illustrated in Figure 10.34.

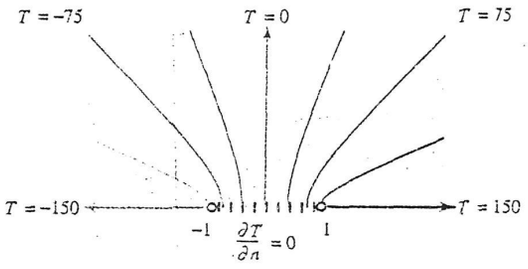


Figure 10.34

15. Find the temperature function in the portion of the upper half-plane $\text{Im}(z) > 0$ that lies inside the ellipse

$$\frac{x^2}{\cosh^2 2} + \frac{y^2}{\sinh^2 2} = 1$$

and satisfies the following boundary conditions (shown in Figure 10.35). *Hint:* Use $w = \text{Arcsin } z$.

$$T(x,y) = 80 \quad \text{for } (x,y) \text{ on the ellipse,}$$
$$T(x,0) = 40 \quad \text{for } -1 < x < 1,$$
$$\frac{\partial T}{\partial n} = T_y(x,0) = 0 \quad \text{when } 1 < |x| < \cosh 2.$$

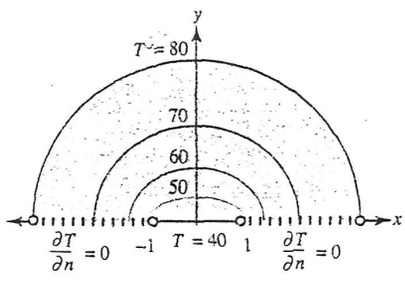


Figure 10.35

İki Boyutlu Elektrostatik

1. Find the electrostatic potential $\phi(x,y)$ between the two coaxial cylinders $r = 1$ and $r = 2$ that has the boundary values shown in Figure 10.39:

$$\phi(x,y) = 100 \qquad \text{when } |z| = 1,$$
$$\phi(x,y) = 200, \qquad \text{when } |z| = 2.$$

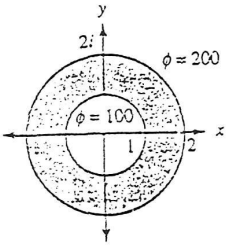


Figure 10.39

2. Find the electrostatic potential $\phi(x,y)$ in the upper half-plane $\text{Im}(z) > 0$ that satisfies the boundary values shown in Figure 10.40:

$$\phi(x,0) = 100, \qquad \text{for } x > 1;$$
$$\phi(x,0) = 0, \qquad \text{for } -1 < x < 1;$$
$$\phi(x,0) = -100, \qquad \text{for } x < -1.$$

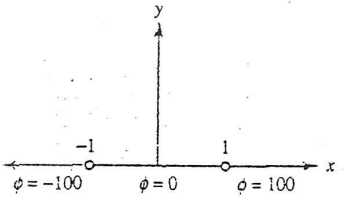


Figure 10.40

3. Find the electrostatic potential $\phi(x,y)$ in the crescent-shaped region that lies inside the disk $|z-2| < 2$ and outside the circle $|z-1| = 1$ that satisfies the following boundary values (shown in Figure 10.41).

$$\phi(x,y) = 100, \qquad \text{for } |z-2| = 2, \quad z \neq 0,$$
$$\phi(x,y) = 50, \qquad \text{for } |z-1| = 1, \quad z \neq 0.$$

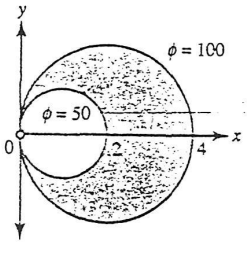


Figure 10.41

4. Find the electrostatic potential $\phi(x,y)$ in the semi-infinite strip $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$ that has the boundary values shown in Figure 10.42:

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \qquad \text{for } y > 0;$$
$$\phi(x,0) = 50, \qquad \text{for } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$
$$\phi\left(\frac{-\pi}{2}, y\right) = 100, \qquad \text{for } y > 0.$$

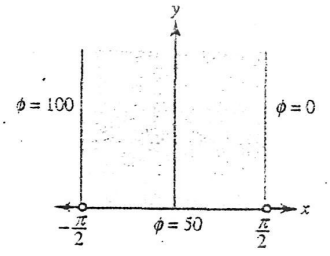


Figure 10.42

5. Find the electrostatic potential $\phi(x, y)$ in the domain D in the half-plane $\mathrm{Re}(z) > 0$ that lies to the left of the hyperbola $2x^2 - 2y^2 = 1$ and satisfies the following boundary values (shown in Figure 10.43).

$$\begin{aligned} \phi(0,y) &= 50, && \text{for all } y; \\ \phi(x,y) &= 100, && \text{when } 2x^2 - 2y^2 = 1. \end{aligned}$$

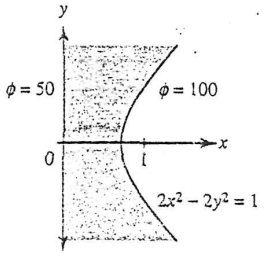


Figure 10.43

6. Find the electrostatic potential $\phi(x, y)$ in the infinite strip $0 < x < \pi/2$ that satisfies the following boundary values (shown in Figure 10.44). *Hint*: Use $w = \sin z$.

$$\begin{aligned} \phi(0,y) &= 100, && \text{for } y > 0; \\ \phi\left(\frac{\pi}{2},y\right) &= 0, && \text{for all } y; \\ \phi(0,y) &= -100, && \text{for } y < 0. \end{aligned}$$

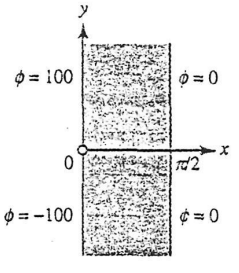


Figure 10.44

7. Consider the conformal mapping $w = S(z) = \dfrac{2z - 6}{z + 3}$.

(a) Show that $S(z)$ maps the domain D that is the portion of the right half-plane $\mathrm{Re}(z) > 0$ that lies exterior to the circle $|z - 5| = 4$ onto the annulus $1 < |w| < 2$.

(b) Find the electrostatic potential $\phi(x, y)$ in the domain D that satisfies the boundary values shown in Figure 10.45:

$$\begin{aligned} \phi(0,y) &= 100, && \text{for all } y; \\ \phi(x,y) &= 200, && \text{when } |z - 5| = 4. \end{aligned}$$

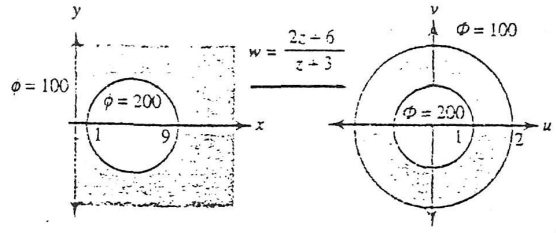


Figure 10.45

8. Consider the conformal mapping $w = S(z) = \dfrac{z-10}{2z-5}$.

   (a) Show that $S(z)$ maps the domain D that is the portion of the disk $|z| < 5$ that lies outside the circle $|z-2| = 2$ onto the annulus defined by $1 < |w| < 2$.

   (b) Find the electrostatic potential $\phi(x, y)$ in the domain D that satisfies the boundary values shown in Figure 10.46.

   $\phi(x,y) = 100, \quad$ when $|z| = 5$;

   $\phi(x,y) = 200, \quad$ when $|z-2| = 2$.

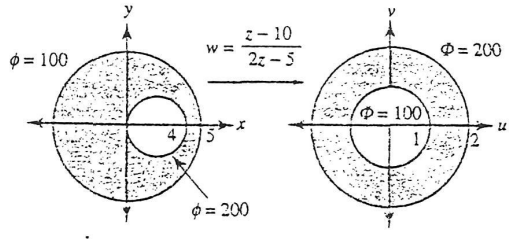


Figure 10.46

İki Boyutlu Sıvı Akışı

1. Consider the ideal fluid flow for the complex potential $F(z) = A\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, where A is a positive real number.

   (a) Show that the velocity vector at the point $(1, \theta)$, $z = re^{i\theta}$ on the unit circle is given by $\mathrm{V}(1,\theta) = A(1 - \cos 2\theta - i \sin 2\theta)$.

   (b) Show that the velocity vector $\mathrm{V}(1, \theta)$ is tangent to the unit circle $|z| = 1$ at all points except -1 and $+1$. *Hint*: Show that $\mathrm{V} \cdot \mathrm{P} = 0$, where $\mathrm{P} = \cos\theta + i \sin\theta$.

   (c) Show that the speed at the point $(1, \theta)$ on the unit circle is given by $|\mathrm{V}| = 2A\,|\sin\theta|$ and that the speed attains the maximum of $2A$ at the points $\pm i$ and is zero at the points ± 1. Where is the pressure the greatest?

2. Show that the complex potential $F(z) = ze^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{z}$ determines the ideal fluid flow around the unit circle $|z| = 1$, where the velocity at points distant from the origin is given approximately by $\mathrm{V} \approx e^{i\alpha}$; that is, the direction of the flow for large values of z is inclined at an angle α with the x axis, as shown in Figure 10.53.

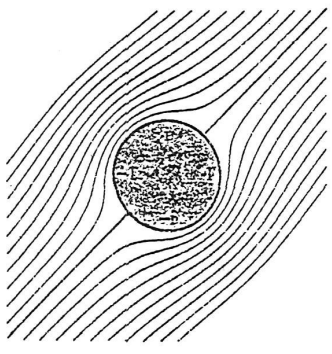


Figure 10.53

3. Consider the ideal fluid flow in the channel bounded by the hyperbolas $xy = 1$ and $xy = 4$ in the first quadrant, where the complex potential is given by $F(z) = \frac{A}{2}z^2$ and A is a positive real number.

   (a) Find the speed at each point, and find the point on the boundary at which the speed attains a minimum value.

   (b) Where is the pressure greatest?

4. Show that the stream function is given by $\psi(r, \theta) = Ar^3 \sin 3\theta$ for an ideal fluid flow around the angular region $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ indicated in Figure 10.54. Sketch several streamlines of the flow. *Hint:* Use the conformal mapping $w = z^3$.

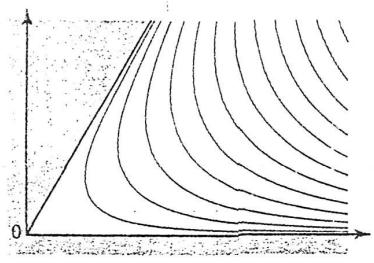


Figure 10.54

5. Consider the ideal fluid flow, where the complex potential is

$$F(z) = Az^{3/2} = Ar^{3/2}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right), \qquad \text{for } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

   (a) Find the stream function $\psi(r, \theta)$.

   (b) Sketch several streamlines of the flow in the angular region $0 < \theta < \frac{4\pi}{3}$ indicated in Figure 10.55.

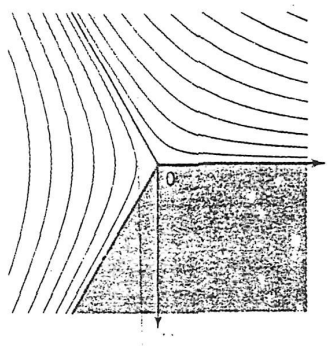


Figure 10.55

6. Consider the complex potential $F(z) = A\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$

(a) Let $A > 0$. Show that $F(z)$ determines an ideal fluid flow around the domain $r > 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ indicated in Figure 10.56, which shows the flow around a circle in the first quadrant. *Hint:* Use the conformal mapping $w = z^2$.

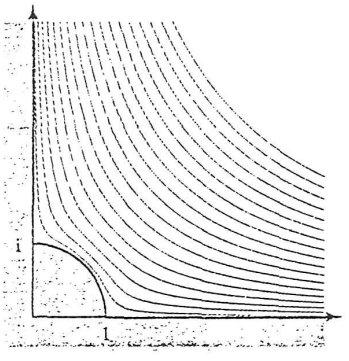


Figure 10.56

(b) Show that the speed at the point $z = e^{i\theta}$ on the quarter-circle $r = 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ is given by $V = 4\,A\,|\sin 2\theta|$.

(c) Determine the stream function for the flow and sketch several streamlines.

7. Show that $F(z) = \sin z$ is the complex potential for the ideal fluid flow inside the semi-infinite strip $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$ indicated in Figure 10.57. Find the stream function.

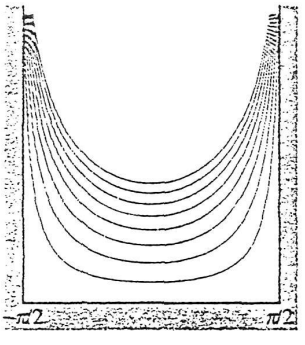


Figure 10.57

8. Let $w = S(z) = \frac{1}{2}\left[z + \left(z^2 - 4\right)^{1/2}\right]$ denote the branch of the inverse of $z = w + \dfrac{1}{w}$ that is a one-to-one mapping of the z plane slit along the segment $-2 \leq x \leq 2$, $y = 0$ onto the domain $|w| > 1$. Use the complex potential $F_2(w) = we^{-i\alpha} + \left(e^{i\alpha}/w\right)$ in the w plane to show that the complex potential $F_1(z) = z\cos\alpha - i\left(z^2 - 4\right)^{1/2}\sin\alpha$ determines the ideal fluid flow around the segment $-2 \leq x \leq 2$, $y = 0$, where the velocity at points distant from the origin is given by $\mathbf{V} \approx e^{i\alpha}$, as shown in Figure 10.58.

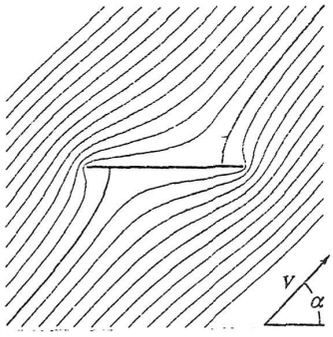


Figure 10.58

9. Consider the complex potential $F(z) = -i\text{Arcsin}z$

(a) Show that $F(z)$ determines the ideal fluid flow through the aperture from -1 to $+1$, as indicated in Figure 10.59.

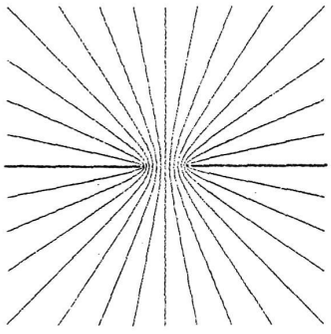


Figure 10.59

(b) Show that the streamline $\psi(x, y) = c$ for the flow is a portion of the hyperbola $\dfrac{x^2}{\sin^2 c} - \dfrac{y^2}{\cos^2 c} = 1$.

CEVAPLAR
(Tek numaralı sorular için)

Section 10.2, Invariance of Laplace's Equation and the Dirichlet Problem: page 399

1. $\phi(x,y) = 15 - 9y$.

3. $\phi(x,y) = 5 + \frac{3}{\ln 2}\ln|z|$.

5. $\phi(x,y) = 4 - \frac{4}{\pi}\text{Arg}\,(z+3) + \frac{6}{\pi}\text{Arg}\,(z+1) - \frac{3}{\pi}\text{Arg}\,(z-2)$.
$\phi(x,y) = 4 - \frac{4}{\pi}\text{Arctan}\frac{y}{x+3} + \frac{6}{\pi}\text{Arctan}\frac{y}{x+1} - \frac{3}{\pi}\text{Arctan}\frac{y}{x-2}$.

7. $\phi(x,y) = \frac{5}{\pi}\text{Arctan}\frac{1-x^2-y^2}{2y}$.

9. $\phi(x,y) = 5 - \frac{20}{\pi}\text{Arg}\frac{i(1-z)}{1+z} = 5 - \frac{20}{\pi}\text{Arctan}\frac{1-x^2-y^2}{2y}$.

11. $\phi(x,y) = 3 - \frac{12}{\pi}\text{Arg}\frac{i-iz^2}{1+z^2} = 3 - \frac{12}{\pi}\text{Arctan}\frac{1-(x^2+y^2)^2}{4xy}$.

Section 10.3, Poisson's Integral Formula for the Upper Half Plane: page 405

1. $\phi(x,y) = \frac{y}{2\pi}\ln\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} + \frac{x-1}{\pi}\text{Arctan}\frac{y}{x-1} - \frac{x+1}{\pi}\text{Arctan}\frac{y}{x+1} + 1$.

3. Both $e^y\cos x$ and $e^{-y}\cos x$ are harmonic in the upper half plane and satisfy the boundary conditions. Also, $\lim_{y\to\infty} e^{-y}\cos x = 0$. It can be show that the Poisson integral formula defines a bounded function in the upper half plane, therefore the desired solution is $\phi(x,y) = e^{-y}\cos x$.

5. Apply Leibniz's rule $\phi_{xx}+\phi_{yy} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right]dt$. The term in brackets in the integrand is $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{y}{(x-t)^2+y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{y}{(x-t)^2+y^2} = \frac{2(3t^2y-6txy+3x^2y-y^3)}{((x-t)^2+y^2)^3} + \frac{2(-3t^2y+6txy-3x^2y+y^3)}{((x-t)^2+y^2)^3} = 0$. Hence the integrand vanishes and $\phi_{xx}(x,y)+\phi_{yy}(x,y) = 0$ which implies that $\phi(x,y)$ is harmonic.

7. $\phi(-x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(t)\,dt}{(-x-t)^2+y^2} = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(t)\,dt}{(x+t)^2+y^2} = \frac{y}{\pi}\int_{\infty}^{-\infty}\frac{U(-t)\,(-1)dt}{(x-t)^2+y^2}$
$= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(-t)\,dt}{(x-t)^2+y^2} = -\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2} = -\phi(x,y)$

Section Section 10.5, Steady State Temperatures: page 417

1. For $H(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, we get $H_{xx}+H_{yy}+H_{zz} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{-x^2+2y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$, and for $h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ we have $h_{xx}+h_{yy} = \frac{2x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} + \frac{-x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \neq 0$.

3. $T(x,y) = 10 + \frac{10}{\pi}\text{Arctan}\frac{2xy}{x^2-y^2-1} - \frac{10}{\pi}\text{Arctan}\frac{2xy}{x^2-y^2+1}$.

5. $T(x,y) = 100 + \frac{100}{\pi}\text{Arctan}(\sin z + 1) - \frac{100}{\pi}\text{Arctan}(\sin z - 1)$.

7. $T(x,y) = \frac{50}{\ln 2}\ln|z|$.

9. $T(x,y) = 25 + \frac{150}{\pi}\text{Re}(\text{Arcsin} z^2)$.

11. $T(x,y) = \frac{200}{\pi}\text{Re}(\text{Arcsin}\frac{1}{z})$.

13. Isothermals are $T(x,y) = k$. The equation $100 - \frac{100}{\pi}\arctan\frac{1-x^2-y^2}{2y} = k$ can be manipulated to yield $c = \tan\frac{\pi}{100}(100-k) = \frac{1-x^2-y^2}{2y}$ which is better recognized as the circle $x^2 + (y+c)^2 = 1 + c^2$.

15. $T(x,y) = 40 + 20\text{Im}(\text{Arcsin} z)$.

Section 10.6, Two-Dimensional Electrostatics: page 428

1. $\phi(x,y) = 100 + \frac{100}{\ln 2}\ln|z|$.

3. $\phi(x,y) = 150 - \frac{200x}{x^2+y^2}$.

5. $\phi(x,y) = 50 + \frac{200}{\pi}\text{Re}(\text{Arcsin} z)$.

7. (a) $w = S(z) = \frac{2z-6}{z+3}$, (b) $\phi(x,y) = 200 - \frac{200}{\ln 2}\ln\left|\frac{2z-6}{z+3}\right|$.

Section 10.7, Two-Dimensional Fluid Flow: page 440

1. (a) $V(r,\theta) = A\overline{\left(1 - \frac{1}{e^{2i\theta}}\right)} = A\overline{\left(1 - e^{-2i\theta}\right)} = A(1 - \cos 2\theta - i\sin 2\theta)$, (c) $z = 1$ and $z = -1$.

3a. Speed $= A|\overline{z}|$. The minimum speed is $A|1-i| = A\sqrt{2}$.

3b. The maximum pressure in the channel occurs at the point $1+i$.

5a. $\Psi(r,\theta) = Ar^{3/2}\sin\frac{3\theta}{2}$.