

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ÜÇ PARAMETREYE BAĞLI İKİ KATLI RADYAL ÇEKİRDEKLİ
SİNGÜLER İTEGRALLERİN SINIRSIZ BÖLGEDE
YAKINSAKLIĞI**

Gümrah UYSAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2016**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

15/04/2016

Gümrah UYSAL

ÖZET

Doktora Tezi

ÜÇ PARAMETREYE BAĞLI İKİ KATLI RADYAL ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRALLERİN SINIRSIZ BÖLGEDE YAKINSAKLIĞI

Gümrah UYSAL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş kısmı tezin ilk bölümünü oluşturmaktadır.

İkinci bölümün ilk kısmında temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmı ise karakteristik noktaların tanımlarına, özelliklerine ve bu noktaların oluşturduğu kümelerin aralarındaki kapsama bağıntılarına ayrılmıştır.

Üçüncü bölümün ilk kısmında lineer, konvolusyon tipli, radyal çekirdekli ve iki katlı singular integral operatör ailesinin $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna sürekli noktasında, d -noktasında, Lebesgue noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklıgı incelenmiştir. Bölümün ikinci kısmında ise aynı operatör ailesinin $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılık hızı incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında lineer, konvolusyon tipli, radyal çekirdekli ve iki katlı singüler integral operatör ailesinin $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna sürekli noktasında Lebesgue noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklıgı incelenmiştir. İkinci kısmında ise operatör ailesinin $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılık hızı incelenmiştir.

Son bölüm ise elde edilen sonuçların tartışımasına ayrılmıştır.

Nisan 2016, 112 sayfa

Anahtar Kelimeler: İki katlı singüler integral operatör ailesi, radyal çekirdek, noktasal yakınsaklılık, Lebesgue noktası, d -noktası, genelleştirilmiş Lebesgue noktası.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE CONVERGENCE OF DOUBLE SINGULAR INTEGRALS DEPENDING ON THREE PARAMETERS WITH A RADIAL KERNEL IN UNBOUNDED REGION

Gümrah UYSAL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

This thesis consists of five chapters.

Introduction part forms the first chapter of the thesis.

In the first part of the second chapter, main definitions and theorems are given. The second part of this chapter is devoted to the definitions and the properties of the characteristic points and inclusion relations between the sets which those points generate.

In the first part of the third chapter, the convergence of the family of linear and convolution type double singular integral operators with radial kernels at continuity point, d -point, Lebesgue point and generalized Lebesgue point of the function $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ is studied. In the second part of the chapter, the rate of pointwise convergence of the indicated integral operators at generalized Lebesgue point of the function $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ is investigated.

In the first part of the fourth chapter, the convergence of the family of linear and convolution type double singular integral operators with radial kernels at continuity point, Lebesgue point and generalized Lebesgue point of the function $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ is studied. In the second part of this chapter, the rate of pointwise convergence of the indicated integral operators at generalized Lebesgue point of the function $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ is investigated.

The last chapter is devoted to discussion of the obtained results.

April 2016, 112 pages

Key Words: Family of double singular integral operators, radial kernel, pointwise convergence, Lebesgue point, d -point, generalized Lebesgue point.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca sonsuz bilgi ve tecrübeyle bana yol gösteren ve ilham veren, araştırmalarımın her aşamasında sabrını ve yardımcılarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesine değerli katkılarda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ertan İBİKLİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tezin oluşturulma sürecine değerli katkı ve önerilerinden dolayı tez izleme kurulu üyeleri değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve Sayın Doç. Dr. İsmet YÜKSEL (Gazi Üniversitesi)'e teşekkürlerimi sunarım.

Tezin araştırma sürecine değerli katkılarda bulunan ve yardımcılarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Akif D. GADJIEV (Azerbaycan Bilimler Akademisi)'ne, Sayın Prof. Dr. Stanislaw SIUDUT (Krakow Pedagoji Üniversitesi)'a, Sayın Prof. Dr. Carlo BARDARO (Perugia Üniversitesi)'ya ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Muhsin MENEKŞE (Purdue Üniversitesi)'ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince daima yanımda olan, sabrını ve yardımcılarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ (Karabük Üniversitesi)'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Mine MENEKŞE YILMAZ (Gaziantep Üniversitesi)'a en içten duygularla teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan annem Vasfiye UYSAL'a, babam Remzi UYSAL'a ve kardeşim Güray UYSAL'a en içten duygularla minnet ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, beni destekleyen, yanımda olan ve cesaretlendiren ailem gibi gördüğüm dostlarımı en içten duygularla teşekkür ederim.

Gümrah UYSAL
Ankara, Nisan 2016

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	6
2.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	6
2.2 Karakteristik Noktalar ve Özellikleri.....	13
3. RADYAL ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN $L_1(\mathbb{R}^2)$ UZAYINDA NOKTASAL YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI	21
3.1 Operatör Ailesinin İyi Tanımlılığı	21
3.2 Operatör Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklılığı.....	24
3.3 Genelleştirilmiş Lebesgue Noktasında Yakınsaklık Hızı	85
4. RADYAL ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ AĞIRLIKLI UZAYINDA NOKTASAL YAKIN- SAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI	89
4.1 Operatör Ailesinin İyi Tanımlılığı	89
4.2 Operatör Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklılığı.....	91
4.3 Genelleştirilmiş Lebesgue Noktasında Yakınsaklık Hızı	100
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	106
KAYNAKLAR.....	108
ÖZGEÇMİŞ	112

SİMGELER DİZİNİ

$\langle a, b \rangle$	\mathbb{R} üzerinde açık, yarı açık veya kapalı bir aralık
$\langle a, b; c, d \rangle$	\mathbb{R}^2 üzerinde açık, yarı açık ya da kapalı bir bölge
$[a, b; c, d]$	\mathbb{R}^2 üzerinde kapalı bir bölge
$\bigvee_b^b (f(t)), \quad a \leq t \leq b$	f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki varyasyonu
$\bigvee_a^b \bigvee_c^d (h(t, s)), \quad a \leq t \leq b$ $c \leq s \leq d$	h fonksiyonunun $[a, b; c, d]$ bölgesindeki varyasyonu
$d_t g(t, s)$	g fonksiyonunun t değişkenine göre diferansiyeli
$d_t d_s g(t, s)$	g fonksiyonunun iki değişkene göre diferansiyeli İndis kümesi
Λ	\mathbb{R}^2 de integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_1(\mathbb{R}^2)$	$L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayında norm
$\ . \ _{L_1(\mathbb{R}^2)}$	\mathbb{R}^2 de ağırlıklı integrallenebilir fonksiyon uzayı
$L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$	$L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayında norm
$\ . \ _{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)}$	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1	$K_{0.1}(\sqrt{t^2 + s^2}) \varphi(t, s) = \frac{1}{0.4\pi} e^{\frac{-(t^2+s^2)}{0.4}}, -1 \leq t, s \leq 1$	104
Şekil 4.2	$\iint \frac{1}{0.4\pi} e^{\frac{-(t^2+s^2)}{0.4}} ds dt, -1 \leq t, s \leq 1$	104
Şekil 4.3	$L_{0.1}(f; x, y) = \frac{1}{5}y + x^2y, -1 \leq x, y \leq 1$	104
Şekil 4.4	$L_{0.01}(f; x, y) = \frac{1}{50}y + x^2y, -1 \leq x, y \leq 1$	105
Şekil 4.5	$L_{0.0001}(f; x, y) = \frac{1}{5000}y + x^2y, -1 \leq x, y \leq 1$	105
Şekil 4.6	$f(t, s) = t^2s, -1 \leq t, s \leq 1$	105

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	Radyal çekirdekli integral operatörün yaklaşım verileri	88
Çizelge 4.1	Radyal çekirdekli integral operatörün yaklaşım verileri	103

1. GİRİŞ

Yaklaşımalar teorisinin ortaya çıkışmasındaki ana nedenlerden biri uygulamada göz önüne alınan bazı fonksiyonların iyi özelliklere sahip olmamasıdır. Bu iyi özelliklerden bazıları süreklilik, basit fonksiyon olma, türevlenebilme ve integrallenebilme olarak verilebilir. Bu bağlamda düşünüldüğünde, verilen bir f fonksiyonunu, kendisinden daha iyi özellikleri olan fonksiyon dizileri ya da aileleri ile temsil etmenin mümkün olup olmadığı önemli bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu problemle ilgili olarak Weierstrass, 1885 yılında yaklaşımalar teorisinin esası kabul edilen teoremi ispatlamıştır. Bu teorem, reel sayıların kompakt bir alt aralığı üzerinde sürekli olan f fonksiyonuna, bu aralık üzerinde düzgün yakınsayan bir polinom dizisinin var olduğunu ifade etmektedir. Yaklaşım problemi, integrallenebilir fonksiyonlar sınıfında ele alındığında, bu sınıfın alınan bir fonksiyona integral operatör aileleri ile yaklaşmanın uygun olduğu görülmüştür.

Lebesgue noktası ve d -noktası kavramlarının temeli olan ve integrallenebilen bir fonksiyonun belirsiz integralinin türevinin hemen hemen her yerde kendisine eşit olduğunu ifade eden teorem Lebesgue (1904) tarafından verilmiştir. Ayrıca, bu çalışmada ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonların sağladıkları temel özellikler ile ilgili sonuçlar da verilmiştir. Bu çalışmadan sonra Fatou (1906), birim çember üzerinde Dirichlet probleminin çözümünü veren ve integral gösterimi

$$P_r(f; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - u) + r^2} \right) du, \quad r \in (0, 1), \quad \theta \in (-\pi, \pi) \quad (1.1)$$

birimde olan Poisson ifadesini Lebesgue integrali olarak göz önüne almış ve fonksiyonların temsili ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Lebesgue (1909), $H_n(t, x)$ operatörünün çekirdeği olmak üzere

$$L_n(f; x) = \int_a^b f(t) H_n(t, x) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in (a, b) \quad (1.2)$$

tipli genel bir lineer integral operatörü ve $H_n(t, x) = K_n(t - x)$ seçilmesi ile

$$L_n(f; x) = \int_a^b f(t)K_n(t - x)dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in (a, b) \quad (1.3)$$

biçiminde ifade edilen konvolusyon tipli lineer integral operatörü göz önüne alarak verilen bir fonksiyonun sürekli olduğu ve süreksiz olduğu noktalarda temsil edilme problemine ilişkin sonuçlar vermiştir. Aynı çalışmada

$$W_n(f; x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-n^2(t-x)^2}dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1.4)$$

biçiminde ifade edilen ve tüm reel eksende ısı denkleminin çözümü olan Gauss-Weierstrass integralinin özelliklerini de incelenmiştir. Lebesgue (1910) ölçüm ve integral teorisinin öğelerini çok katlı integraller için ifade etmiş ve 1904 makalesinde verdiği türevlenme teoremlerini çok katlı integraller için genelleştirmiştir. Fejer (1911) ise bir fonksiyonun Fourier serisinin n -inci kısmi toplamını ifade eden, fonksiyonların süreklilik noktalarında istenen yakınsaklılığı vermeyen ve integral gösterimi

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin \left[\left(\frac{2n+1}{2} \right) (t-x) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2}(t-x) \right]} dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 2\pi] \quad (1.5)$$

biçiminde olan Dirichlet integralini göz önüne almıştır. Aynı çalışmada bir fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamlarının aritmetik ortalamasının (Cesàro ortalaması) hesaplanması ile

$$F_n(f; x) = \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin \left[\frac{n}{2}(t-x) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2}(t-x) \right]} \right)^2 dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 2\pi] \quad (1.6)$$

biçiminde ifade edilen Fejer integral operatörü elde edilmiştir ve fonksiyonun sağladığı belli koşullara göre operatörün yakınsaklılığı ile ilgili sonuçlar da verilmiştir.

Ayrıca, karakteristik noktalarında fonksiyonların temsiline ilişkin problemin çalışma alanı, Fichtenholz (1918), Romanovskii (1932), Faddeev (1936), Gahariya (1951), Tandori (1954), Zygmund (1959), Butzer (1960), Mamedov (1963), Sikkema (1983) ve Bardaro (1984) tarafından (1.2) tipli integral operatörün çekirdeğinin belirli koşulları sağlayan bir dizi olarak alınması ve indis kümесinin \mathbb{N} yerine genel bir Λ

indis kümesi olarak alınması ile genişletilmiştir. Taberski (1962a) integrallenebilen fonksiyonlar sınıfındaki yaklaşım problemini iki parametreli bir integral ailesinin yaklaşım problemi olarak ifade ettikten sonra Gadjiev (1963, 1968) ve Rydzewska (1973) iki parametreye bağlı singüler integraller üzerine çalışmışlar ve integral operatör aileleri ile Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlara yakınsaklıla ilgili sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca, Nessel (1966), Stein (1970), Stein ve Weiss (1971), Neri (1971) ve Lenze (1989) tarafından çok değişkenli fonksiyonlara karakteristik noktalarında yaklaşımla ilgili sonuçlar verilmiştir. (1.2) tipli operatörlerin Lebesgue anlamında ölçülebilen fonksiyonlara noktasal yakınsaklılığı ile ilgili bazı teoremler, Mamedov (1955, 1963), Alexits (1960) ve aynı operatörün iki katlı bir genelleştirmesi için bazı teoremler Taberski (1976) tarafından verilmiştir.

Dirac (1958) δ -fonksiyonunu, tüm reel eksende integrali bir olan ve orijinde son-suza giden bir fonksiyon olarak karakterize etmiştir. Gauss-Weierstrass ve Poisson gibi yaklaşımda iyi sonuç veren çekirdekler limit pozisyonunda bu fonksiyon gibi bir davranış sergilediklerinden dolayı bu tip çekirdelere deltalal çekirdek de denilmektedir. Bu tip çekirdekler Fourier integral teorisinde olduğu kadar harmonik fonksiyonlar teorisi ve potansiyel teoride de büyük öneme sahiptir.

Natanson (1960) tarafından verilen ve literatürde Natanson lemma olarak bilinen lemma çeşitli fonksiyon uzaylarında araştırılan noktasal yakınsaklık problemlerinin çözümlerinde büyük öneme sahiptir. Üzerinde yapılan noktasal yakınsaklık probleminin gereksinimlerine göre bu lemmayı bazı genelleştirmeleri Taberski (1962a,b, 1964), Mamedov (1965a), Gadjiev (1968), Rydzewska (1974) ve Siudut (1990) tarafından verilmiştir.

Taberski (1962b, 1964) integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı üzerindeki yaklaşım problemi üç parametreye bağlı iki katlı bir singüler integral operatör ailesi:

$$L_\lambda(f; x, y) = \int_a^b \int_c^d f(t, s) H_\lambda(t - x, s - y) ds dt, \quad (x, y) \in [a, b; c, d] \quad (1.7)$$

yardımı ile vermiştir ve periyodik fonksiyonlara karakteristik noktalarda yakınsak-

likla ilgili teoremler ifade ve ispat etmiştir. Ayrıca, Labsker ve Gadjiev (1962), Lu (1966), Rydzewska (1974) ve Siudut (1988, 1989) (1.7) tipli ve benzer tipteki integral operatör aileleri için çeşitli yakınsaklık teoremleri ispatlamışlardır.

(1.7) denkleminde çekirdek fonksiyonu $H_\lambda(t-x, s-y) = K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right)$ olarak alındığında

$$L_\lambda(f; x, y) = \int_a^b \int_c^d f(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt, \quad (x, y) \in [a, b; c, d] \quad (1.8)$$

üç parametreye bağlı, lineer, konvolüsyon tipli, radyal çekirdekli ve iki katlı integral operatör ailesi elde edilir. Son yıllarda (1.8) tipli operatörün integrallenebilen fonksiyonlara karakteristik noktalarında yakınsaklılığı Yılmaz (2010), Yılmaz vd. (2011) ve Serenbay vd. (2014) tarafından çalışılmıştır.

Bu tezde,

$$L_\lambda(f; x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.9)$$

birimde ifade edilen, lineer, konvolüsyon tipli, radyal çekirdekli ve iki katlı integral operatör ailesi göz önüne alınmıştır.

Tezin birinci bölümünde integral operatör aileleri ile ilgili problemimizi çözerken yararlandığımız genel bilgiler yer almaktadır.

İkinci bölümün ilk kısmında temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmı ise karakteristik noktaların tanımlarına, bu noktaların özelliklerine ve aralarındaki ilişkilere ayrılmıştır.

Üçüncü bölümün ilk kısmında (1.9) denklemi ile verilen operatörün $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna süreklilik noktasında, d -noktasında, Lebesgue noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılığı incelenmiştir. Bölümün ikinci kısmında (1.9) ile verilen operatörün $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılık hızı araştırılmıştır.

Dördüncü bölümün ilk kısmında (1.9) denklemi ile verilen operatörün $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna süreklilik noktasında, Lebesgue noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılığı incelenmiştir. Bölümün ikinci kısmında ise (1.9) ile verilen operatörün $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklık hızı araştırılmıştır.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde temel tanımlar ve teoremlere ve fonksiyonların karakteristik noktalarıyla ilgili temel tanımlara yer verilecektir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 \mathbb{R}^2 üzerinde ölçülebilir ve

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dy dx < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm reel değerli fonksiyonlar uzayına \mathbb{R}^2 üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir ve $L_1(\mathbb{R}^2)$ ile gösterilir. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dy dx$$

birimde tanımlanır (Stein ve Weiss 1971).

Tanım 2.1.2 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} \right| dy dx < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm reel değerli fonksiyonlar uzayına \mathbb{R}^2 üzerinde ağırlıklı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir ve $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ ile gösterilir. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)} = \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} \right| dy dx$$

birimde tanımlanır (Taberski 1976).

Tanım 2.1.3 $Q(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olsun. Eğer $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \infty$ olmak üzere hemen hemen her yerde $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna karşılık $Q(x, y) = \Psi(\sqrt{x^2 + y^2})$ olacak

şekilde bir $\Psi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa, Q fonksiyonuna radyaldir denir (Bochner 1949, Nessel 1966).

Örnek 2.1.1 $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$Q(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

biçiminde verilen fonksiyona karşılık gelen Ψ fonksiyonu

$$\Psi(\sqrt{x^2 + y^2}) = e^{-(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Örnek 2.1.2 $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$Q(x, y) = x^2 + y^3$$

biçiminde verilen fonksiyon radyal bir fonksiyon değildir.

Teorem 2.1.1 (Fubini Teoremi) $x, y \in \mathbb{R}$ ve $f(x, y)$, \mathbb{R}^2 üzerinde iki değişkenli ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy \right) dx < \infty$$

koşulu sağlanıyor ise f fonksiyonu \mathbb{R}^2 üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dxdy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dx \right) dy \end{aligned}$$

gerçeklenir (Butzer ve Nessel 1971).

Tanım 2.1.4 $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$(1) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

$$(2) \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$$

koşullarını sağlayan fonksiyona δ -fonksiyonu (Dirac-delta fonksiyonu) denir. δ fonksiyonu, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

özellikine sahiptir (Dirac 1958).

Tanım 2.1.5 $\sigma > 0$ bir parametre ve $K_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\{K_\sigma(t)\}$ fonksiyon ailesine,

(A) her bir $\sigma > 0$ için $K_\sigma \in L_1(\mathbb{R})$

$$(B) \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} K_\sigma(t) dt \right) = 1$$

koşulları sağlandığı takdirde çekirdek denir. $K_\sigma(t)$ çekirdeğine,

(C) $\forall \sigma > 0$ için $\|K_\sigma\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq M$ (normun düzgün sınırlılığı)

$$(D) \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\sup_{\gamma \leq |t| < \infty} |K_\sigma(t)| \right) = 0, \quad \forall \gamma > 0$$

$$(E) \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma \leq |t|} |K_\sigma(t)| dt \right) = 0, \quad \forall \gamma > 0$$

koşulları sağlandığı takdirde ise yaklaşık birim denir (Butzer ve Nessel 1971).

Örnek 2.1.3 $K_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$K_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

biçiminde verilen Gauss-Weierstrass çekirdeği

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} K_n(x) dx \right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} n e^{-n^2 x^2} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

özelliklerini sağladığından dolayı deltal bir çekirdektir.

Örnek 2.1.4 $K_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ olmak üzere

$$K_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2}$$

biçiminde verilen Gauss-Weierstrass çekirdeği yaklaşık birimdir.

Örnek 2.1.5 $K_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$K_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin[(\frac{2n+1}{2})t]}{\sin(\frac{1}{2}t)}, & t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus \langle 0, 2\pi \rangle \end{cases}$$

biçiminde ifade edilen Dirichlet tipli çekirdeğin yaklaşık birim olmadığını gösterelim.

$n \rightarrow \infty$ iken

$$\int_{\mathbb{R}} |K_n(t)| dt \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{(k+1)\pi} \rightarrow \infty$$

olduğundan Dirichlet tipli çekirdeğin normu düzgün sınırlı değildir ve bu takdirde yaklaşık birim de değildir.

Tanım 2.1.6 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ bir küme, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ve $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Ω üzerinde

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \frac{f(\rho)}{h(\rho)} = l < \infty, \quad h(\rho) \neq 0$$

eşitliği $f(\rho) = O(h(\rho))$ ile ve

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \frac{f(\rho)}{h(\rho)} = 0, \quad h(\rho) \neq 0$$

eşitliği ise $f(\rho) = o(h(\rho))$ ile gösterilir (Murray 1984).

Tanım 2.1.7 $D = [a, b; c, d]$ olmak üzere f ve g fonksiyonları bu bölge üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. D bölgesinin bir parçalanması

$$p = \left\{ \begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{m-1} < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_{n-1} < y_n = d \end{array} \right\}$$

biçiminde verilsin. Ayrıca, $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\Delta g(x_i, y_j)$ ifadesi

$$\Delta g(x_i, y_j) = g(x_{i-1}, y_{j-1}) - g(x_{i-1}, y_j) - g(x_i, y_{j-1}) + g(x_i, y_j)$$

biçiminde verilsin. ξ_i ve η_j reel sayıları $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ve $y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j$ eşitsizliklerini gerçekleyen reel sayılar olmak üzere

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta g(x_i, y_j)$$

toplamlı ifade edilsin. \mathcal{P} , D bölgesinin mümkün olan tüm parçalanmalarının ailesi olsun. Bir p parçalanmasının normu

$$\|p\| = \text{maks} \left\{ \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

biçiminde hesaplansın. Eğer D bölgesinin mümkün olan tüm $p \in \mathcal{P}$ parçalanmalarının normu sıfır yaklaştırıldığında S toplamı için

$$\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta g(x_i, y_j) = l$$

sonlu limiti var ise f fonksiyonu g fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integralenebilirdir ve bu integral

$$(\mathbf{RS}) \int_a^b \int_c^d f(x, y) d_x d_y g(x, y)$$

biçiminde gösterilir (Fréchet 1910, Clarkson 1933, Taberski 1964).

Tanım 2.1.8 $D = [a, b; c, d]$ olmak üzere \mathcal{P} , D bölgesinin mümkün olan tüm parçalanmalarının ailesi olsun. $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun D bölgesi üzerindeki toplam salınımı

$$V_D(g) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\Delta g(x_i, y_j)| \right\}$$

biçiminde ifade edilir ve

$$V_D(g) = \bigvee_{a=c}^b \bigvee_{c}^d (g)$$

ile gösterilir. Eğer $V_D(g)$ ifadesi D bölgesinin mümkün olan tüm $p \in \mathcal{P}$ parçaları dikkate alındığı durumda düzgün sınırlı ise g fonksiyonu D bölgesi üzerinde sınırlı salmamlıdır denir (Clarkson ve Adams 1933, Taberski 1964, Lenze 1989, Ghorpade ve Limaye 2010, Jawarneh ve Noorani 2011).

Tanım 2.1.9 $D = [a, b; c, d]$ ve $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ koşulunu sağlayan her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ için

$$g(x_1, y_1) - g(x_2, y_1) - g(x_1, y_2) + g(x_2, y_2) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, g fonksiyonu D üzerinde (ikili) monoton artandır; eğer

$$g(x_1, y_1) - g(x_2, y_1) - g(x_1, y_2) + g(x_2, y_2) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, g fonksiyonu D üzerinde (ikili) monoton azalandır (Taberski 1964, Lenze 1989, Ghorpade ve Limaye 2010).

Örnek 2.1.6 $f : [-1, 1; -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & x + y \geq 0 \\ -2x - 5, & x + y < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. f fonksiyonu $[-1, 1; -1, 1]$ üzerinde ikili monoton değildir.

Gerçekten de, $x_1 = 0 < 1 = x_2$ ve $y_1 = 0 < 1 = y_2$ için

$$\Delta f(x_1, y_1) = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)$$

$$= f(0, 0) + f(1, 1) - f(1, 0) - f(0, 1)$$

$$= 1 > 0$$

elde edilir. Ayrıca, $x_1 = -1 < 0 = x_2$ ve $y_1 = 0 < 1 = y_2$ için

$$\Delta f(x_1, y_1) = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)$$

$$= f(-1, 0) + f(0, 1) - f(-1, 1) - f(0, 0)$$

$$= -2 < 0$$

olduğundan, f ikili monoton degildir.

Lemma 2.1.1 $D = [a, b; c, d]$ olsun. Eğer $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu D üzerinde ikili monoton artan bir fonksiyon ise bu takdirde g fonksiyonu D üzerinde sınırlı salınımlıdır ve

$$\bigvee_{a \quad c}^{b \quad d}(g) = g(a, c) - g(b, c) - g(a, d) + g(b, d)$$

gerçeklenir. Benzer şekilde, eğer $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu D üzerinde ikili monoton azalan bir fonksiyon ise bu takdirde g fonksiyonu D üzerinde sınırlı salınımlıdır ve

$$\bigvee_{a \quad c}^{b \quad d}(g) = -g(a, c) + g(b, c) + g(a, d) - g(b, d)$$

gerçeklenir (Taberski 1964, Ghorpade ve Limaye 2010).

Hobson (1921) tarafından iki katlı integraler için ifade edilen kısmi integrasyon teoreminin bir analogu Taberski (1964) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.1.2 D üzerinde $y = c$, $y = d$ için $\langle a, b \rangle$ aralığı içinde ve $x = a$, $x = b$ için $\langle c, d \rangle$ aralığı içinde f fonksiyonu, g fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrallenebilir olsun. Bu takdirde, g fonksiyonu D üzerinde f fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned} (\textbf{RS}) \int_a^b \int_c^d g(x, y) d_x d_y f(x, y) &= (\textbf{RS}) \int_a^b \int_c^d f(x, y) d_x d_y g(x, y) \\ &\quad + \int_a^b f(x, c) d_x g(x, c) - \int_a^b f(x, d) d_x g(x, d) \\ &\quad + \int_c^d f(a, y) d_y g(a, y) - \int_c^d f(b, y) d_y g(b, y) \\ &\quad + f(a, c) g(a, c) - f(b, c) g(b, c) \\ &\quad - f(a, d) g(a, d) + f(b, d) g(b, d). \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Taberski 1964).

Teorem 2.1.3 f fonksiyonu, $D = [a, b; c, d]$ dikdörtgeni üzerinde Lebesgue integrallenebilir ve g fonksiyonu D üzerinde sınırlı salınımlı olsun. Ayrıca, g fonksiyonunun

$$V_{[a,b]}(g) := \bigvee_{\substack{a \\ d}}^b (g(x, v)), \quad c \leq v \leq d$$

$$V_{[c,d]}(g) := \bigvee_{\substack{c \\ a}}^d (g(u, y)), \quad a \leq u \leq b$$

biçiminde tanımlanan salınımları D üzerinde düzgün sınırlı olsun. Bu takdirde, g fonksiyonu D üzerinde

$$F(x, y) = (\mathbf{L}) \int_a^x \int_c^y f(t, s) ds dt$$

fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrallenebilirdir ve $fg \in L_1(D)$ olmak üzere

$$(\mathbf{RS}) \int_a^b \int_c^d g(x, y) d_x d_y F(x, y) = (\mathbf{L}) \int_a^b \int_c^d g(x, y) f(x, y) dy dx$$

gerçeklenir (Taberski 1964).

2.2 Karakteristik Noktalar ve Özellikleri

Bu kısımda integrallenebilen fonksiyonların karakteristik noktalarının tanımlarına, özelliklerine ve aralarındaki kapsama bağıntısına yer verilecektir. Literatüre bakıldığında, bu noktaların tanımlarının problemin çerçevesine ve ele alınan fonksiyon sınıfının niteliğine bağlı olarak verildiği görülmüştür. Bu noktaların bazı tanımları Natanson (1940), Gahariya (1951), Taberski (1962a, 1964), Mamedov (1963, 1965b, 1967), Gadzhiev (1968), Stein (1970), Butzer ve Nessel (1971), Rydzewska (1973, 1974), Bardaro (1984), Siudut (1988, 1989, 1994), Yılmaz (2010) ve Serenbay vd. (2014) tarafından verilmiştir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.2.1 $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu D üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h > 0$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt = 0$$

koşulunun sağlandığı $x_0 \in D$ noktasına f fonksiyonunun Lebesgue noktası denir (Natanson 1940).

Örnek 2.2.1 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{1}{1+t^2} - 1 \right| dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \arctan(h)}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $x_0 = 0$ noktası verilen fonksiyon için bir Lebesgue noktasıdır.

Örnek 2.2.2 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \in (0, 1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |e^{-t} - 0| dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-e^{-h} + 1}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan, $x_0 = 0$ Lebesgue noktası değildir. Bu nokta aynı zamanda bir süreklilik noktası da değildir.

Örnek 2.2.3 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1 + \cos(t), & t \in (0, 1] \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |1 + \cos(t) - 0| dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \sin(h)}{h} \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan, verilen fonksiyonun tanım aralığında tek süreksizlik noktası olan $x_0 = 0$ bu fonksiyonun Lebesgue noktasıdır.

Tanım 2.2.2 $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu D üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h > 0$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt = 0$$

koşulunun sağlandığı $x_0 \in D$ noktasına f fonksiyonunun d -noktası denir (Butzer ve Nessel 1971).

Örnek 2.2.4 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 2t \sin(\frac{1}{t}) - \cos(\frac{1}{t}), & t \in (0, 1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h [f(t) - f(0)] dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left[2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) - 0 \right] dt \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan, $x_0 = 0$ verilen fonksiyonun d -noktası olur. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) - 0 \right| dt \\ &= \infty\end{aligned}$$

olduğundan, $x_0 = 0$ verilen fonksiyonun Lebesgue noktası degildir.

Tanım 2.2.3 $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu D üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h > 0$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha+1}} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

koşulunun sağlandığı $x_0 \in D$ noktasına f fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir (Mamedov 1963, 1965b).

Örnek 2.2.5 $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t \in (0, 1] \\ 0, & t \in [-1, 1] \setminus (0, 1] \end{cases}$$

birimde tanımlansın. Bu takdirde $\alpha = \frac{1}{4}$ için

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{4}+1}} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{4}+1}} \int_0^h |te^{-t} - 0| dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $x_0 = 0$ verilen fonksiyonun genelleştirilmiş Lebesgue noktasıdır.

Tanım 2.2.4 $D = \langle -\pi, \pi \rangle$ olmak üzere f fonksiyonu 2π periyotlu ve D üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h > 0$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha+1}} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt = 0, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

koşulunun sağlandığı $x_0 \in D$ noktasına f fonksiyonunun genelleştirilmiş d -noktası denir (Gadjiev 1968).

Gadjiev (1968), Natanson (1960) tarafından verilen lemmannın bir genelleştirmesini belirli özelliklere sahip bir μ fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Bu μ fonksiyonunun tanımı kullanılarak sıradaki karakterizasyon verilmiştir.

Tanım 2.2.5 $D = \langle -\pi, \pi \rangle$ olmak üzere f fonksiyonu 2π periyotlu ve D üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h > 0$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(h)} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt = 0$$

koşulunun sağlandığı $x_0 \in D$ noktasına f fonksiyonunun μ -genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir. Burada, μ fonksiyonu $\langle 0, \pi \rangle$ aralığı üzerinde artan, mutlak sürekli ve $\mu(0) = 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur (Rydzewska 1973).

Örnek 2.2.6 $D = \langle -\pi, \pi \rangle$ olmak üzere 2π periyotlu f fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \in (0, \pi) \\ 0, & t \in D \setminus (0, \pi) \end{cases}$$

birimde tanımlansın. Bu takdirde $\mu(h) = \sqrt{h}$ için

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^h |f(t) - f(0)| dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^h |e^{-t} - 0| dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-e^{-h} + 1}{\sqrt{h}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $x_0 = 0$ verilen fonksiyonun μ -genelleştirilmiş Lebesgue noktasıdır.

Tanım 2.2.6 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lebesgue anlamında lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h, k > 0$ için

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hk} \int_{x_0}^{x_0+hy_0+k} \int_{y_0}^{y_0+h} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt = 0$$

eşitliğinin sağlandığı $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktasına f fonksiyonunun Lebesgue noktası denir (Gahariya 1951).

Tanım 2.2.7 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lebesgue anlamında lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h, k > 0$ için

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hk} \int_{x_0}^{x_0+hy_0+k} \int_{y_0}^{y_0+h} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt = 0$$

eşitliğinin sağlandığı $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktasına f fonksiyonunun d -noktası denir (Taberski 1964, Siudut 1994).

Taberski (1964) ve Gadjiev (1968) tarafından elde edilen sonuçlar dikkate alınarak aşağıdaki karakterizasyonlar verilmiştir.

Tanım 2.2.8 $D = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ olmak üzere f fonksiyonu her bir değişkenine göre 2π periyotlu ve D üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h, k > 0$ için

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\mu(h,k)} \int_{x_0}^{x_0+hy_0+k} \int_{y_0}^{ } [f(t,s) - f(x_0, y_0)] ds dt = 0$$

koşulunun sağlandığı $(x_0, y_0) \in D$ noktasına f fonksiyonunun μ -genelleştirilmiş d -noktası denir. Burada, μ fonksiyonu

$$\mu(h, k) = \int_0^h \int_0^k \vartheta(t, s) ds dt > 0$$

olmak üzere, ϑ fonksiyonu $[0, \pi; 0, \pi]$ üzerinde negatif olmayan ve Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyondur (Rydzewska 1974).

Tanım 2.2.9 $D = \langle -a, a; -b, b \rangle$ olmak üzere f fonksiyonu D üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h, k > 0$ için

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\mu_1(h) \mu_2(k)} \int_{x_0}^{x_0+hy_0+k} \int_{y_0}^{ } |f(t,s) - f(x_0, y_0)| ds dt = 0$$

koşulunun sağlandığı $(x_0, y_0) \in D$ noktasına f fonksiyonunun μ -genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir. Burada, μ_1 ve μ_2 fonksiyonları sırasıyla $\langle -a, a \rangle$ ve $\langle -b, b \rangle$ üzerinde tanımlı, artan, mutlak sürekli ve $\mu_1(0) = \mu_2(0) = 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlardır (Serenbay vd. 2014).

Görüldüğü üzere Lebesgue noktası, d -noktası ve bu noktaların genelleştirmelerinin tanımları fonksiyonun integrallenebildiği kümeye göre değişik formlarda verilebilmektedir. Ayrıca, Gadjiev (1968) μ fonksiyonunu özel olarak $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$\mu(t) = t^{\alpha+1}$ biçiminde seçenek Tanım 2.2.4'ü elde etmiştir. Bu takdirde Tanım 2.2.3, Tanım 2.2.4 ve Tanım 2.2.9 dikkate alınarak aşağıdaki tanım elde edilebilir.

Tanım 2.2.10 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lebesgue anlamında lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $h, k > 0$ için

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{h^{\alpha+1}k^{\beta+1}} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t,s) - f(x_0, y_0)| ds dt = 0, \quad 0 \leq \alpha, \beta < 1$$

eşitliğinin sağlandığı $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktasına f fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir.

Tanım 2.2.10'da $\alpha = \beta$ ve $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu özel olarak her bir değişkenine göre 2π periyotlu ve $\langle -\pi, \pi; -\pi, \pi \rangle$ üzerinde integrallenebilir olarak alınırsa Yılmaz (2010) tarafından verilen genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımı elde edilir.

Örnek 2.2.7 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(t, s) = \begin{cases} te^{-(t+s)}, & (t, s) \in \langle 0, 1; 0, 1 \rangle \\ 0, & (t, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \langle 0, 1; 0, 1 \rangle \end{cases}$$

olsun. Orijin, $\alpha = \frac{1}{4}$ ve $\beta = \frac{1}{2}$ için verilen fonksiyonun genelleştirilmiş Lebesgue noktasıdır.

Teorem 2.2.1 \mathbb{R}^2 uzayının hemen hemen her noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun Lebesgue noktasıdır (Neri 1971).

f fonksiyonunun tüm Lebesgue noktalarının kümesi $L(f)$ ve tüm d -noktalarının kümesi $D(f)$ ile gösterilirse

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt$$

eşitsizliği her bir Lebesgue noktasının aynı zamanda d -noktası olduğunu gösterir (Siudut 1994). Bu takdirde

$$L(f) \subset D(f)$$

kapsama bağıntısı sağlanır. Eğer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun süreklilik noktası ise o zaman $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki

$$\sqrt{(t - x_0)^2 + (s - y_0)^2} < \delta \text{ olduğunda } |f(t, s) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

olur. Bu ise $0 < h, k < \delta$ olmak üzere

$$\frac{1}{hk} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hk} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t, s) - (x_0, y_0)| ds dt = 0$$

elde edilir. Bu takdirde $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun süreklilik noktası aynı zamanda bu fonksiyonun Lebesgue noktasıdır (Neri 1971). Süreklik noktalarının kümesi $C(f)$ ile gösterilirse

$$C(f) \subset L(f) \subset D(f)$$

kapsama bağıntısı elde edilir.

3. RADYAL ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN $L_1(\mathbb{R}^2)$ UZAYINDA NOKTASAL YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI

Bu bölümde, A sınıfı adı verilen bir çekirdek sınıfı tanımlanacaktır. Daha sonra (1.9) denklemi ile verilen $L_\lambda(f; x, y)$ operatör ailesinin belirli koşullar altında $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayına sürekli bir dönüşüm olduğu gösterilecektir. Ardından $L_\lambda(f; x, y)$ singüler integral operatör ailesinin, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun süreklilik noktasında, $d-$ noktasında, Lebesgue noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılığı incelenecaktır. Ayrıca, genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsamanın hızı araştırılacaktır.

3.1 Operatör Ailesinin İyi Tanımlılığı

Bu kısımda bir çekirdek sınıfı tanımlanacak ve (1.9) denklemi ile verilen $L_\lambda(f; x, y)$ operatör ailesinin belirli koşullar altında $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayına sürekli bir dönüşüm olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.1.1 (A Sınıfı) $\Lambda \subseteq \mathbb{R}_0^+$ bir indis kümesi ve λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için (t, s) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak \mathbb{R}^2 üzerinde ölçülebilir ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu, aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde, A sınıfına aittir denir:

a. $\left\| K_\lambda \left(\sqrt{(.)^2 + (.)^2} \right) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \leq M < \infty, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$

b. $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left| \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) dsdt - 1 \right| = 0.$

c. $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left(\sup_{\xi \leq \sqrt{t^2 + s^2}} K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) \right) = 0, \quad \forall \xi > 0.$

d. $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left(\iint_{\xi \leq \sqrt{t^2 + s^2}} K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) dsdt \right) = 0, \quad \forall \xi > 0.$

- e. $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için, $(-\infty, 0]$ üzerinde t değişkeninin bir fonksiyonu olarak monoton artan ve $[0, \infty)$ üzerinde monoton azalan bir fonksiyondur. $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu, $(-\infty, 0]$ üzerinde s değişkeninin bir fonksiyonu olarak monoton artan ve $[0, \infty)$ üzerinde monoton azalan bir fonksiyondur. Ayrıca, $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için, $[0, \infty) \times [0, \infty)$ ve $(-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$ üzerinde (t, s) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ikili monoton artan ve benzer şekilde, $[0, \infty) \times (-\infty, 0]$ ve $(-\infty, 0] \times [0, \infty)$ üzerinde (t, s) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ikili monoton azalan bir fonksiyondur.

Ayrıca, $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} K_\lambda(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}) = \begin{cases} 0, & (t, s) \neq (x, y) \\ \infty, & (t, s) = (x, y) \end{cases}$$

singülerlik koşulunu sağlamaktadır.

Örnek 3.1.1 $\Lambda = (0, \infty)$, $\lambda_0 = \infty$ ve $K_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere

$$K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) = \frac{\lambda^2}{\pi} e^{-\lambda^2(t^2+s^2)}$$

birimindeki iki değişkenli Gauss-Weierstrass çekirdeği verilsin.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) ds dt &= \frac{\lambda^2}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda^2(t^2+s^2)} ds dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan A sınıfının (a) ve (b) koşulları sağlanmış olur. Ayrıca,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{\pi} e^{-\lambda^2(t^2+s^2)} = 0, \quad \forall \sqrt{t^2 + s^2} \in [\delta, \infty), \quad \delta > 0$$

ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \iint_{\delta \leq \sqrt{t^2 + s^2}} \frac{\lambda^2}{\pi} e^{-\lambda^2(t^2+s^2)} ds dt = 0, \quad \forall \sqrt{t^2 + s^2} \in [\delta, \infty), \quad \delta > 0$$

olarak bulunmuş olup A sınıfının (c) ve (d) koşulları da böylece doğrulanmış olur.

Ayrıca, (e) koşulu Tanım 2.1.9 ile kolaylıkla gösterilebilir.

Diger taraftan,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{\pi} e^{-\lambda^2((t-x)^2 + (s-y)^2)} = \begin{cases} 0, & (t, s) \neq (x, y) \\ \infty, & (t, s) = (x, y) \end{cases}$$

oldugundan singulerlik koşulu sağlanmaktadır.

Theorem 3.1.1 Eğer $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfından ise bu takdirde

$$L_\lambda(f; x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}\right) ds dt, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

biciminde verilen radyal çekirdekli ve konvolusyon tipli singüler integral operatör ailesi $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayına sürekli bir dönüşümüdür.

İspat. $L_\lambda(f; x, y)$ operatörü lineer oldugundan, bu operatörün $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayına dönüşüm yapan sınırlı bir operatör olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunun için

$$\|L_\lambda\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L_\lambda(f; x, y)\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}}{\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}}$$

normunun sınırlı olduğu gösterilecektir. Teorem 2.1.1 (Fubini Teoremi) gereği

$$\begin{aligned} \|L_\lambda(f; x, y)\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}\right) ds dt \right| dy dx \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \left| f(t, s) K_\lambda\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}\right) \right| ds dt \right) dy dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} |f(t, s)| K_\lambda\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}\right) dy dx \right) ds dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} |f(t, s)| \left(\iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}\right) dy dx \right) ds dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} |f(t, s)| \left(\iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda\left(\sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}\right) dy dx \right) ds dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $x - t = u \Rightarrow dx = du$ ve $y - s = v \Rightarrow dy = dv$ değişken değiştirmesi ile

$$\iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) dydx = \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) dvdu$$

elde edilir. Elde edilenler düzenlenliğinde ve A sınıfının (a) koşulu dikkate alındığında

$$\begin{aligned} \|L_\lambda(f; x, y)\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(t, s)| \left(\iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) dvdu \right) dsdt \\ &\leq M \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

olduğundan, $L_\lambda(f; x, y)$, $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_1(\mathbb{R}^2)$ uzayına sürekli bir dönüşümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

3.2 Operatör Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklılığı

Teorem 3.2.1 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfından olsun. Eğer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun süreklilik noktası ise bu takdirde

$$\lim_{(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)} L_\lambda(f; x, y) = f(x_0, y_0)$$

gerçeklenir.

İspat. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun süreklilik noktası olsun. Ayrıca, $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ olsun. A sınıfının (b) koşulundan

$$\begin{aligned} &|L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| \\ &= \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) dsdt \right. \\ &\quad \left. + f(x_0, y_0) \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) dsdt - f(x_0, y_0) \right| \end{aligned}$$

$$\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

$$+ |f(x_0, y_0)| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - 1 \right| \\ = I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)$$

yazılabilir. B_δ kümesi $B_\delta := \{(t, s) : \sqrt{(t-x_0)^2 + (s-y_0)^2} < \delta, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\}$ biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$I_1(x, y, \lambda) = \left\{ \iint_{B_\delta} + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ = I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)$$

yazılabilir. Burada, $I_{12}(x, y, \lambda)$ integrali için

$$I_{12}(x, y, \lambda) \leq \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \\ + |f(x_0, y_0)| \iint_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) ds dt$$

olduğundan, son eşitsizlikte A sınıfının (c) ve (d) koşulları sırasıyla göz önüne alındığında $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir.

$I_{11}(x, y, \lambda)$ integralini inceleyelim. Hipotez gereği, $f(t, s)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki

$$\sqrt{(t-x_0)^2 + (s-y_0)^2} < \delta \text{ olduğunda } |f(t, s) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu takdirde

$$I_{11} = \iint_{B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ \leq \varepsilon \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ \leq \varepsilon M$$

elde edilir. Yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ için $\lambda \rightarrow \lambda_0$ iken $I_{11}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir. $I_2(x, y, \lambda)$ integrali için ise (b) koşulundan

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} I_2(x, y, \lambda) &= |f(x_0, y_0)| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) ds dt - 1 \right| \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Şimdi, sıradaki teoremin ispatında kullanacağımız bazı lemmaları ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.2.1 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfının (e) koşulunu sağlaması. Ayrıca, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$$\left| \int_{x_0-hy_0-k}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| < \varepsilon h k, \quad 0 < h, k \leq \delta \quad (3.1)$$

eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

i) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned}&\left| \int_{x_0-\delta y_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta y_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |x-x_0| |y-y_0| \\ &\quad + 2\varepsilon |y-y_0| \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda(|t-x|) dt + 2\varepsilon |x-x_0| \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda(|s-y|) ds\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

ii) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\left| \int_{x_0-\delta y_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |y - y_0| \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda (|t - x|) dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşenir.

iii) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |x - x_0| \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda (|s - y|) ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşenir.

iv) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşenir.

İspat. Lemma 3.2.1'in (i) ifadesini ispatlayalım. Kabul edelim ki $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olsun. Diğer taraftan,

$$I_{12}^1 (x, y, \lambda) := \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

olmak üzere $E(t, s)$ fonksiyonu

$$E(t, s) := \int_t^{x_0} \int_s^{y_0} [f(u, v) - f(x_0, y_0)] dv du$$

biçiminde tanımlansın.

(3.1) eşitsizliği göz önüne alırsa $0 < x_0 - t \leq \delta$ ve $0 < y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|E(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t) (y_0 - s) \quad (3.2)$$

yazılabilir. Teorem 2.1.3 gereği aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}) & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &= (\mathbf{RS}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s E(t, s). \end{aligned}$$

Riemann-Stieltjes integraline, Teorem 2.1.2 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanıp ardından ifade mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütüllürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &= \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s E(t, s) \right| \\ &\leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |E(t, s)| \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |E(t, y_0 - \delta)| \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{y_0-\delta}^{y_0} |E(x_0 - \delta, s)| \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + |E(x_0 - \delta, y_0 - \delta)| K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) ile verilen eşitsizlik dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (x_0 - t) (y_0 - s) \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t) \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \delta \int_{y_0 - \delta}^{y_0} (y_0 - s) \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s - y)^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına $t = u + x$ ve $s = v + y$ ardından da $u = t$ ve $v = s$ değişken değiştirmeleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^1(x, y, \lambda)| & \leq \varepsilon \int_{x_0 - x - \delta}^{x_0 - x} \int_{y_0 - y - \delta}^{y_0 - y} (x_0 - t - x) (y_0 - s - y) \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{x_0 - x - \delta}^{x_0 - x} (x_0 - t - x) \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{y_0 - y - \delta}^{y_0 - y} (y_0 - s - y) \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + s^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2})$ fonksiyonu (u, v) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak göz önüne alındığında

$$A_1(t, s) := \begin{cases} \bigvee_{x_0 - x - \delta}^t \bigvee_{y_0 - y - \delta}^s (K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2})) , & x_0 - x - \delta < t \leq x_0 - x \\ & y_0 - y - \delta < s \leq y_0 - y \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A_2(t) & := \begin{cases} \bigvee_{x_0 - x - \delta}^t \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right) , & x_0 - x - \delta < t \leq x_0 - x \\ 0, & t = x_0 - x - \delta \end{cases} \\
A_3(s) & := \begin{cases} \bigvee_{y_0 - y - \delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + v^2} \right) \right) , & y_0 - y - \delta < s \leq y_0 - y \\ 0, & s = y_0 - y - \delta \end{cases}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan salının fonksiyonları elde edilir. Bu fonksiyonlar son eşitsizlikte dikkate alınarak ifade büyütültürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (x_0 - t - x)(y_0 - s - y) |d_t d_s A_1(t, s)| \\ &+ \varepsilon \delta \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x) |d_t A_2(t)| \\ &+ \varepsilon \delta \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0 - s - y) |d_s A_3(s)| \\ &+ \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $A_1(t, s)$ tanım kümesinde ikili monoton artan, $A_2(t)$ monoton artan ve $A_3(s)$ monoton artandır. Böylece

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (x_0 - t - x)(y_0 - s - y) d_t d_s A_1(t, s) \\ &+ \varepsilon \delta \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x) d_t A_2(t) \\ &+ \varepsilon \delta \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0 - s - y) d_s A_3(s) \\ &+ \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} A_1(t, s) ds dt \\ &+ \varepsilon \delta \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} A_2(t) dt + \varepsilon \delta \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} A_3(s) ds \\ &+ \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \\ &= \varepsilon (i_1 + \delta i_2 + \delta i_3 + \delta^2 i_4) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi i_1 integralini göz önüne alalım. Kolaylıkla görülebilir ki i_1 integrali

$$\begin{aligned} i_1 &= \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y-\delta}^0 + \int_0^{x_0-x-y_0-y} \int_0^y + \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{0-y-\delta}^{y_0-y} + \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^0 \right\} A_1(t, s) ds dt \\ &= i_{11} + i_{12} + i_{13} + i_{14} \end{aligned}$$

birimde yazılabilir. $A_1(t, s)$ fonksiyonunun açık ifadesi $i_{11} - i_{14}$ integrallerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} i_{11} &= \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_{y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) \right] ds dt, \\ i_{12} &= \int_0^{x_0-x-y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 + \bigvee_0^t \bigvee_0^s \right\} \left(K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) \right] ds dt \\ &\quad + \int_0^{x_0-x-y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 \bigvee_0^s + \bigvee_0^t \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 \right\} \left(K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) \right] ds dt, \\ i_{13} &= \int_{x_0-x-\delta}^{y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 + \bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_0^s \right\} \left(K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) \right] ds dt, \end{aligned}$$

ve

$$i_{14} = \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 \bigvee_{y_0-y-\delta}^s + \bigvee_0^t \bigvee_{y_0-y-\delta}^s \right\} \left(K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) \right] ds dt$$

eşitlikleri elde edilir.

Sıradaki integral olan i_2 integralinin hesaplanmasına geçelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} i_2 &= \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} A_2(t) dt \\ &= \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 + \int_0^{x_0-x} \right\} A_2(t) dt \\ &= i_{21} + i_{22} \end{aligned}$$

yazılabilir. $A_2(t)$ fonksiyonunun açık ifadesi i_{21} ve i_{22} integrallerinde yerine yazılırsa

$$i_{21} = \int_{x_0-x-\delta}^0 \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^t \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right) \right] dt$$

ve

$$i_{22} = \int_0^{x_0-x} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 + \bigvee_0^t \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right) \right] dt$$

elde edilir.

Son olarak i_3 integralinin hesaplanmasına geçelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} i_3 &= \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} A_3(s) ds \\ &= \left\{ \int_{y_0-y-\delta}^0 + \int_0^{y_0-y} \right\} A_3(s) ds \\ &= i_{31} + i_{32} \end{aligned}$$

yazılabilir. $A_3(s)$ fonksiyonunun açık ifadesi i_{31} ve i_{32} integrallerinde yerine yazılırsa

$$i_{31} = \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\bigvee_{y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] ds$$

ve

$$i_{32} = \int_0^{y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 + \bigvee_0^s \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] ds$$

elde edilir.

Yukarıda açılımları verilen her bir integralde A sınıfının (e) koşulu ve Lemma 2.1.1

dikkate alınarak $i_1 + \delta i_2 + \delta i_3 + \delta^2 i_4$ toplamı hesaplandığında

$$\begin{aligned}
|I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon (i_1 + \delta i_2 + \delta i_3 + \delta^2 i_4) \\
&= \varepsilon \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y-\delta}^0 + \int_0^{x_0-x} \int_0^{y_0-y} \right\} K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) ds dt \\
&\quad - \varepsilon \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_0^{y_0-y} + \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^0 \right\} K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) ds dt \\
&\quad + 2\varepsilon \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_0^{y_0-y} - \int_0^{x_0-x} \int_0^{y_0-y} \right\} K_\lambda(|t|) ds dt \\
&\quad + 2\varepsilon \left\{ \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^0 - \int_0^{x_0-x} \int_0^{y_0-y} \right\} K_\lambda(|s|) ds dt \\
&\quad + 4\varepsilon K_\lambda(0) (y_0 - y) (x_0 - x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin sağ tarafı mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütüldüğünde

$$\begin{aligned}
|I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}) ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |y_0 - y| |x_0 - x| \\
&\quad + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda(|t - x|) dt + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda(|s - y|) ds
\end{aligned}$$

birimindeki istenen eşitsizliğe ulaşılır. Lemma 3.2.1'in (ii)-(iv) ifadeleri aynı yöntemle ispatlanabilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.2.2 $K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2})$ fonksiyonu A sınıfının (e) koşulunu sağlaması. Ayrıca, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| < \varepsilon h k, \quad 0 < h, k \leq \delta \quad (3.3)$$

eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

i) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \quad + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

ii) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |x_0 - x| |y_0 - y| \\ & \quad + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda(|s - y|) ds + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iii) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iv) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda(|s-y|) ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşenir.

İspat. Lemma 3.2.2'nin (i) ifadesini ispatlayalım. Kabul edelim ki $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olsun. Diğer taraftan,

$$I_{12}^2(x, y, \lambda) := \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

olmak üzere $V(t, s)$ fonksiyonu

$$V(t, s) := \int_{x_0}^t \int_s^{y_0} [f(u, v) - f(x_0, y_0)] dv du$$

biçiminde tanımlansın.

(3.3) eşitsizliği göz önüne alınırsa $0 < t - x_0 \leq \delta$ ve $0 < y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|V(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0) (y_0 - s) \quad (3.4)$$

yazılabilir. Teorem 2.1.3 gereği aşağıdaki eşitlik gerçekleşenir:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{L}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &= (\mathbf{RS}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s [-V(t, s)]. \end{aligned}$$

Riemann-Stieltjes integraline, Teorem 2.1.2 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanıp ardından ifade mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütüllürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^2(x, y, \lambda)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s [-V(t, s)] \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |V(t, s)| \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |V(t, y_0 - \delta)| \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\
& + \int_{y_0-\delta}^{y_0} |V(x_0 + \delta, s)| \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\
& + |V(x_0 + \delta, y_0 - \delta)| K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4) ile verilen eşitsizlik dikkate alımlırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^2(x, y, \lambda)| & \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (t - x_0) (y_0 - s) \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t - x_0) \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{y_0-\delta}^{y_0} (y_0 - s) \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına $t = u + x$ ve $s = v + y$, ardından da $u = t$ ve $v = s$ değişken değiştirmeleri uygulanırısa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^2(x, y, \lambda)| & \leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (t + x - x_0) (y_0 - s - y) \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t + x - x_0) \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0 - s - y) \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + s^2} \right) \right| \\
& + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2})$ fonksiyonu (u, v) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak

dikkate alınarak

$$B_1(t, s) := \begin{cases} \bigvee_t^{x_0-x+\delta} \bigvee_{y_0-y-\delta}^s (K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2})) , & x_0 - x \leq t < x_0 - x + \delta \\ & y_0 - y - \delta < s \leq y_0 - y \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$B_2(t) := \begin{cases} \bigvee_t^{x_0-x+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right) , & x_0 - x \leq t < x_0 - x + \delta \\ 0, & t = x_0 - x + \delta \end{cases}$$

$$B_3(s) := \begin{cases} \bigvee_{y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + v^2} \right) \right) , & y_0 - y - \delta < s \leq y_0 - y \\ 0, & s = y_0 - y - \delta \end{cases}$$

birimindeki salınım fonksiyonları tanımlanabilir. Bu fonksiyonlar son eşitsizlikte dikkate alınarak ifade büyütülürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (t + x - x_0)(y_0 - s - y) |d_t d_s B_1(t, s)| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t + x - x_0) |d_t B_2(t)| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0 - s - y) |d_s B_3(s)| \\ &\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $B_1(t, s)$ tanım kümesinde ikili monoton azalan, $B_2(t)$ monoton azalan ve $B_3(s)$ monoton artandır. Böylece

$$\begin{aligned} |I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq -\varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (t + x - x_0)(y_0 - s - y) d_t d_s B_1(t, s) \\ &\quad - \varepsilon \delta \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t + x - x_0) d_t B_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \delta \int_{y_0 - y - \delta}^{y_0 - y} (y_0 - s - y) d_s B_3(s) \\
& + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0 - x}^{x_0 - x + \delta} \int_{y_0 - y - \delta}^{y_0 - y} B_1(t, s) ds dt \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0 - x}^{x_0 - x + \delta} B_2(t) dt + \varepsilon \delta \int_{y_0 - y - \delta}^{y_0 - y} B_3(s) ds \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \\
&= \varepsilon (j_1 + \delta j_2 + \delta j_3 + \delta^2 j_4)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi j_1 integralini göz önüne alalım. Kolaylıkla görülebilir ki j_1 integrali

$$\begin{aligned}
j_1 &= \left\{ \int_{x_0 - x}^{x_0 - x + \delta} \int_{y_0 - y - \delta}^0 + \int_{x_0 - x}^{x_0 - x + \delta} \int_0^{y_0 - y} \right\} B_1(t, s) ds dt \\
&= j_{11} + j_{12}
\end{aligned}$$

birimde yazılabilir. $B_1(t, s)$ fonksiyonunun açık ifadesi j_{11} ve j_{12} integrallerinde yerine yazılırsa

$$j_{11} = \int_{x_0 - x}^{x_0 - x + \delta} \int_{y_0 - y - \delta}^0 \left[\bigvee_t^{x_0 - x + \delta} \bigvee_{y_0 - y - \delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] ds dt$$

ve

$$j_{12} = \int_{x_0 - x}^{x_0 - x + \delta} \int_0^{y_0 - y} \left[\left\{ \bigvee_t^{x_0 - x + \delta} \bigvee_{y_0 - y - \delta}^0 + \bigvee_t^{x_0 - x + \delta} \bigvee_0^s \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] ds dt$$

elde edilir.

Diger taraftan j_2 integrali için

$$\begin{aligned} j_2 &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} B_2(t) dt \\ &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \left[\bigvee_{t=x_0-y-\delta}^{x_0-x+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right) \right] dt \end{aligned}$$

yazılabilir.

Son olarak j_3 integrali için

$$\begin{aligned} j_3 &= \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} B_3(s) ds \\ &= \left\{ \int_{y_0-y-\delta}^0 + \int_0^{y_0-y} \right\} B_3(s) ds \\ &= \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\bigvee_{y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] ds \\ &\quad + \int_0^{y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 + \bigvee_0^s \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] ds \end{aligned}$$

yazılabilir.

Yukarıda açılımları verilen her bir integralde A sınıfının (e) koşulu ve Lemma 2.1.1 dikkate alınarak $j_1 + \delta j_2 + \delta j_3 + \delta^2 j_4$ toplamı hesaplandığında

$$|I_{12}^2(x, y, \lambda)| \leq \varepsilon (j_1 + \delta j_2 + \delta j_3 + \delta^2 j_4)$$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^0 K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) ds dt - \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_0^{y_0-y} K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_0^{y_0-y} K_\lambda(|t|) ds dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Eşitsizliğin sağ tarafı mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütülürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) dt \end{aligned}$$

birimindeki istenen eşitsizliğe ulaşılır. Lemma 3.2.2'nin (ii) – (iv) ifadeleri aynı yöntemle ispatlanabilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.2.3 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfının (e) koşulunu sağlaması. Ayrıca, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$$\left| \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+k} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| < \varepsilon h k, \quad 0 < h, k \leq \delta \quad (3.5)$$

eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

i) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s-y|) ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

ii) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iii) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |x_0 - x| |y_0 - y| \\ & \quad + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) ds + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda(|t - x|) dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iv) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \quad + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda(|t - x|) dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Lemma 3.2.3'ün (i) ifadesini ispatlayalım. Kabul edelim ki $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olsun. Diğer taraftan,

$$I_{12}^3(x, y, \lambda) := \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

olmak üzere $R(t, s)$ fonksiyonu

$$R(t, s) := \int_t^{x_0} \int_{y_0}^s [f(u, v) - f(x_0, y_0)] dv du$$

biçiminde tanımlansın.

(3.5) eşitsizliği göz önüne alımlısa $0 < x_0 - t \leq \delta$ ve $0 < s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|R(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t) (s - y_0) \quad (3.6)$$

yazılabilir. Teorem 2.1.3 gereği aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{L}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &= (\mathbf{RS}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s [-R(t, s)]. \end{aligned}$$

Riemann-Stieltjes integraline, Teorem 2.1.2 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanıp ardından ifade mutlak değer ile büyütültürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &= \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s [-R(t, s)] \right| \\ &\leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |R(t, s)| \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |R(t, y_0 + \delta)| \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{y_0}^{y_0+\delta} |R(x_0 - \delta, s)| \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + |R(x_0 - \delta, y_0 + \delta)| K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.6) ile verilen eşitsizlik dikkate alımlısa

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (x_0 - t) (s - y_0) \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t) \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0+\delta} (s - y_0) \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına $t = u + x$ ve $s = v + y$, ardından da $u = t$ ve $v = s$ değişken değiştirmeleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (x_0 - t - x)(s + y - y_0) \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x) \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s + y - y_0) \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + s^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2})$ fonksiyonu (u, v) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak dikkate alınarak

$$\begin{aligned} C_1(t, s) &:= \begin{cases} \bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_{s}^{y_0-y+\delta} (K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2})), & x_0 - x - \delta < t \leq x_0 - x \\ & y_0 - y \leq s < y_0 - y + \delta \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ C_2(t) &:= \begin{cases} \bigvee_{x_0-x-\delta}^t (K_\lambda(\sqrt{u^2 + (y_0 - y + \delta)^2})), & x_0 - x - \delta < t \leq x_0 - x \\ 0, & t = x_0 - x - \delta \end{cases} \\ C_3(s) &:= \begin{cases} \bigvee_s^{y_0-y+\delta} (K_\lambda(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + v^2})), & y_0 - y \leq s < y_0 - y + \delta \\ 0, & s = y_0 - y + \delta \end{cases} \end{aligned}$$

büçümdeki salınınm fonksiyonları tanımlanabilir. Bu fonksiyonlar son eşitsizlikte dikkate alınarak ifade büyütüllürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (x_0 - t - x)(s + y - y_0) |d_t d_s C_1(t, s)| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x) |d_t C_2(t)| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s + y - y_0) |d_s C_3(s)| \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon \delta \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s+y-y_0) |d_s C_3(s)| \\ + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x-\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. $C_1(t, s)$ tanım kümesinde ikili monoton azalan, $C_2(t)$ monoton artan ve $C_3(s)$ monoton azalandır. Böylece

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq -\varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (x_0-t-x)(s+y-y_0) d_t d_s C_1(t, s) \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0-t-x) d_t C_2(t) \\ &\quad - \varepsilon \delta \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s+y-y_0) d_s C_3(s) \\ &\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x-\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizliğe kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} C_1(t, s) ds dt \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} C_2(t) dt + \varepsilon \delta \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} C_3(s) ds \\ &\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x-\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \\ &= \varepsilon (k_1 + \delta k_2 + \delta k_3 + \delta^2 k_4) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi k_1 integralini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} k_1 &= \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} + \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \right\} C_1(t, s) ds dt \\ &= k_{11} + k_{12} \end{aligned}$$

yazılabilir. $C_1(t, s)$ fonksiyonunun açık ifadesi k_{11} ve k_{12} integrallerinde yerine yazılırsa

$$k_{11} = \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_s^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] ds dt$$

ve

$$k_{12} = \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 \bigvee_s^{y_0-y+\delta} + \bigvee_0^t \bigvee_s^{y_0-y+\delta} \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] ds dt$$

edilir.

Sıradaki integral olan k_2 integralinin hesaplanmasına geçelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} k_2 &= \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} C_2(t) dt \\ &= \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 + \int_0^{x_0-x} \right\} C_2(t) dt \\ &= \int_{x_0-x-\delta}^0 \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^t \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right) \right] dt \\ &\quad + \int_0^{x_0-x} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 + \bigvee_0^t \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right) \right] dt \end{aligned}$$

yazılabilir.

Son olarak k_3 integrali için

$$\begin{aligned} k_3 &= \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} C_3(s) ds \\ &= \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\bigvee_s^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] ds \end{aligned}$$

yazılabilir.

Yukarıda açılımları verilen her bir integralde A sınıfının (e) koşulu ve Lemma 2.1.1 dikkate alınarak

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s-y|) ds \end{aligned}$$

birimindeki istenen eşitsizlik elde edilir. Lemma 3.2.3'ün (ii)-(iv) ifadeleri aynı yöntemle ispatlanabilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.2.4 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfının (e) koşulunu sağlaması. Ayrıca, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+hy_0+k} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| < \varepsilon h k, \quad 0 < h, k \leq \delta \quad (3.7)$$

eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

i) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

ii) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s-y|) ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iii) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \quad + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iv) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |x_0 - x| |y_0 - y| \\ & \quad + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) dt + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Lemma 3.2.4'ün (*i*) ifadesini ispatlayalım. Kabul edelim ki $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olsun. Diğer taraftan,

$$I_{12}^4(x, y, \lambda) := \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

olmak üzere $G(t, s)$ fonksiyonu

$$G(t, s) := \int_{x_0}^t \int_{y_0}^s [f(u, v) - f(x_0, y_0)] dv du$$

biçiminde tanımlansın.

(3.7) eşitsizliği göz önüne alırsa $0 < t - x_0 \leq \delta$ ve $0 < s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|G(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0) (s - y_0) \quad (3.8)$$

yazılabilir. Teorem 2.1.3 gereği aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}) & \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &= (\mathbf{RS}) \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s G(t, s). \end{aligned}$$

Riemann-Stieltjes integraline, Teorem 2.1.2 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanıp ardından ifade mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütülsürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s G(t, s) \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} |G(t, s)| \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(t, y_0 + \delta)| \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{y_0}^{y_0+\delta} |G(x_0 + \delta, s)| \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + |G(x_0 + \delta, y_0 + \delta)| K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.8) ile verilen eşitsizlik dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} (t - x_0) (s - y_0) \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t - x_0) \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon \delta \int_{y_0}^{y_0 + \delta} (s - y_0) \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s - y)^2} \right) \right| \\ + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right)$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına $t = u + x$ ve $s = v + y$, ardından da $u = t$ ve $v = s$ değişken değiştirmeleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0 - x}^{x_0 - x + \delta} \int_{y_0 - y}^{y_0 - y + \delta} (t + x - x_0) (s + y - y_0) \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0 - x}^{x_0 - x + \delta} (t + x - x_0) \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0 - y}^{y_0 - y + \delta} (s + y - y_0) \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + s^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2})$ fonksiyonu (u, v) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak dikkate alınarak

$$D_1(t, s) := \begin{cases} \bigvee\limits_{t=x_0-x}^{x_0-x+\delta} \bigvee\limits_{s=y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2}) \right), & x_0 - x \leq t < x_0 - x + \delta \\ & y_0 - y \leq s < y_0 - y + \delta \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$D_2(t) := \begin{cases} \bigvee\limits_{t=x_0-x}^{x_0-x+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right), & x_0 - x \leq t < x_0 - x + \delta \\ 0, & t = x_0 - x + \delta \end{cases}$$

$$D_3(s) := \begin{cases} \bigvee\limits_{s=y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + v^2} \right) \right), & y_0 - y \leq s < y_0 - y + \delta \\ 0, & s = y_0 - y + \delta \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan salınım fonksiyonları elde edilebilir. Bu fonksiyonlar son eşit-

sizlikte dikkate alınarak ifade büyütülürse

$$\begin{aligned}
|I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (t+x-x_0)(s+y-y_0) |d_t d_s D_1(t, s)| \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t+x-x_0) |d_t D_2(t)| \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s+y-y_0) |d_s D_3(s)| \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $D_1(t, s)$ tanım kümesinde ikili monoton artan, $D_2(t)$ monoton azalan ve $D_3(s)$ monoton azalandır. Böylece

$$\begin{aligned}
|I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (t+x-x_0)(s+y-y_0) d_t d_s D_1(t, s) \\
&\quad - \varepsilon \delta \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t+x-x_0) d_t D_2(t) \\
&\quad - \varepsilon \delta \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s+y-y_0) d_s D_3(s) \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} D_1(t, s) ds dt \\
&\quad + \varepsilon \delta \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} D_2(t) dt + \varepsilon \delta \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} D_3(s) ds \\
&\quad + \varepsilon \delta^2 K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \\
&= \varepsilon (h_1 + \delta h_2 + \delta h_3 + \delta^2 h_4)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi h_1 integralini hesaplayalım. Bu takdirde

$$h_1 = \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} D_1(t, s) ds dt$$

yazılabilir. $D_1(t, s)$ fonksiyonunun açık ifadesi yerine yazılırsa

$$h_1 = \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\bigvee_t^{x_0-x+\delta} \bigvee_s^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] ds dt$$

elde edilir.

Diğer taraftan h_2 integrali için

$$\begin{aligned} h_2 &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} D_2(t) dt \\ &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \left[\bigvee_t^{x_0-x+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right) \right] dt \end{aligned}$$

yazılabilir.

Son olarak h_3 integrali için

$$\begin{aligned} h_3 &= \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} D_3(s) ds \\ &= \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\bigvee_s^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] ds \end{aligned}$$

yazılabilir.

Yukarıda açılımları verilen her bir integralde A sınıfının (e) koşulu ve Lemma 2.1.1 dikkate alınarak

$$|I_{12}^4(x, y, \lambda)| \leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

birimdeki istenen eşitsizlik elde edilir. Lemma 3.2.4'ün (ii) – (iv) ifadeleri aynı yöntemle ispatlanabilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.2 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfından olsun. Eğer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun d -noktası ise bu takdirde

$$\begin{aligned} & 2|y - y_0| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) dt + 2|x - x_0| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) ds \\ & + 4K_\lambda(0)|x - x_0||y - y_0| \end{aligned} \quad (3.9)$$

fonksiyonunun $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken sınırlı kaldığı (x, y, λ) noktalar kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L_\lambda(f; x, y) = f(x_0, y_0)$$

gerçeklenir.

Ispat. Kabul edelim ki $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ olsun. $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumlarını göz önüne alalım. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun d -noktası ise bu takdirde verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0-k}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| < \varepsilon h k \\ & \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| < \varepsilon h k \\ & \left| \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+k} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| < \varepsilon h k \\ & \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] ds dt \right| < \varepsilon h k \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $\delta > 0$ bulunabilir. Burada, $0 < h, k \leq \delta$ dir. A sınıfının (b) koşulundan

$$\begin{aligned} & [L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)] \\ & = \left[\iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}) ds dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f(x_0, y_0) \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
& - f(x_0, y_0) \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - f(x_0, y_0) \Big] \\
& = \iint_{\mathbb{R}^2} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
& + f(x_0, y_0) \left[\iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - 1 \right] \\
& = I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. İhtiyaç duyacağımız kümeler olan B_δ ve Q_δ kümeleri sırasıyla

$$B_\delta := \left\{ (t, s) : \sqrt{(t-x_0)^2 + (s-y_0)^2} < \delta, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

biçiminde ve

$$Q_\delta := \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta, y_0 + \delta \rangle$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde $I_1(x, y, \lambda)$ integrali için

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus Q_\delta} + \iint_{Q_\delta} \right\} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $|I_{11}(x, y, \lambda)|$ integrali için

$$\begin{aligned}
|I_{11}(x, y, \lambda)| &\leq \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&\leq \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \\
&\quad + |f(x_0, y_0)| \iint_{\substack{\delta \\ \sqrt{2}}} \sqrt{t^2+s^2} K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) ds dt
\end{aligned}$$

olduğundan (c) ve (d) koşulları sırasıyla göz önüne alındığında, $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{11}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir.

Şimdi $I_{12}(x, y, \lambda)$ integralini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} I_{12}(x, y, \lambda) &= \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \right\} [f(t, s) - f(x_0, y_0)] \\ &\quad \times K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &= I_{12}^1(x, y, \lambda) + I_{12}^2(x, y, \lambda) + I_{12}^3(x, y, \lambda) + I_{12}^4(x, y, \lambda) \end{aligned}$$

yazılabilir. Her bir integralde sırasıyla Lemma 3.2.1-Lemma 3.2.4'ün (i) ifadeleri dikkate alındığı takdirde $|I_{12}(x, y, \lambda)|$ integrali için

$$\begin{aligned} |I_{12}(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) dt + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s-y|) ds \quad (3.10) \\ &\quad + 4\varepsilon K_\lambda(0) |y_0 - y| |x_0 - x| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. A sınıfının (a) koşulu ve (3.9) hipotezinden $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir. Son olarak A sınıfının (b) koşulundan $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ olur.

Teorem 3.2.2, $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ kabullerinin $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumları için ispatlanmıştır. Diğer durumlarda da, Lemma 3.2.1-Lemma 3.2.4'ün (ii) – (iv) ifadeleri ayrı ayrı, yukarıdaki ispatta olduğu gibi kullanılarak (3.10) eşitsizliği elde edilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Şimdi sıradaki teoremlerin ispatlarında kullanacağımız bazı lemmaları ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.2.5 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfının (e) koşulunu sağlaması. Ayrıca, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$$\int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0-k}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1}, \quad 0 < h, k \leq \delta \quad (3.11)$$

eşitsizliği $0 \leq \alpha, \beta < 1$ ve her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

i) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s-y_0|^\beta ds dt \\ & \quad + 2\varepsilon (\beta+1) |x-x_0|^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda (|s-y|) |s-y_0|^\beta ds \\ & \quad + 2\varepsilon (\alpha+1) |y-y_0|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda (|t-x|) |t-x_0|^\alpha dt \\ & \quad + 4\varepsilon K_\lambda (0) |x-x_0|^{\alpha+1} |y-y_0|^{\beta+1} \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

ii) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s-y_0|^\beta ds dt \\ & \quad + 2\varepsilon (\alpha+1) |y-y_0|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda (|t-x|) |t-x_0|^\alpha dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iii) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \quad + 2\varepsilon (\beta+1) |x-x_0|^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda (|s-y|) |s-y_0|^\beta ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iv) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s-y_0|^\beta ds dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Lemma 3.2.5'in (*i*) ifadesini ispatlayalım. Kabul edelim ki $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olsun. Diğer taraftan,

$$I_{12}^1 (x, y, \lambda) := \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

olmak üzere $E(t, s)$ fonksiyonu

$$E(t, s) := \int_t^{x_0} \int_s^{y_0} |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dv du$$

biçiminde tanımlansın.

(3.11) eşitsizliği göz önüne alınırsa $0 < x_0 - t \leq \delta$ ve $0 < y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|E(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t)^{\alpha+1} (y_0 - s)^{\beta+1} \quad (3.12)$$

yazılabilir. Teorem 2.1.3 gereği aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}) & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &= (\mathbf{RS}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s E(t, s). \end{aligned}$$

Riemann-Stieltjes integraline, Teorem 2.1.2 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanıp ardından ifade mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütülürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &= \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s E(t, s) \right| \\ &\leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |E(t, s)| \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |E(t, y_0 - \delta)| \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{y_0-\delta}^{y_0} |E(x_0 - \delta, s)| \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + |E(x_0 - \delta, y_0 - \delta)| K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.12) ile verilen eşitsizlik dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (x_0 - t)^{\alpha+1} (y_0 - s)^{\beta+1} \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha+1} \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (y_0 - s)^{\beta+1} \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına $t = u + x$ ve $s = v + y$ ardından da $u = t$ ve $v = s$ değişken değiştirmeleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} (y_0 - s - y)^{\beta+1} \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right| \\ &+ \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\ &+ \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0 - s - y)^{\beta+1} \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + s^2} \right) \right| \\ &+ \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.2.1'in ispatında kullanılan $A_1(t, s)$, $A_2(t)$ ve $A_3(s)$ salımım fonksiyonları son eşitsizlikte dikkate alınarak ifade büyütüllürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} (y_0 - s - y)^{\beta+1} |d_t d_s A_1(t, s)| \\ &+ \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} |d_t A_2(t)| \\ &+ \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0 - s - y)^{\beta+1} |d_s A_3(s)| \\ &+ \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $A_1(t, s)$ tanım kümesinde ikili monoton artan, $A_2(t)$ monoton artan ve $A_3(s)$ monoton artandır. Böylece

$$|I_{12}^1(x, y, \lambda)| \leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} (y_0 - s - y)^{\beta+1} d_t d_s A_1(t, s)$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} d_t A_2(t) \\
& + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0 - s - y)^{\beta+1} d_s A_3(s) \\
& + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon (\alpha + 1) (\beta + 1) \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} A_1(t, s) (x_0 - t - x)^\alpha \\
&\quad \times (y_0 - s - y)^\beta ds dt \\
& + \varepsilon \delta^{\beta+1} (\alpha + 1) \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} A_2(t) (x_0 - t - x)^\alpha dt \\
& + \varepsilon \delta^{\alpha+1} (\beta + 1) \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} A_3(s) (y_0 - s - y)^\beta ds \\
& + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \\
& = \varepsilon ((\alpha + 1) (\beta + 1) i_1 + \delta^{\beta+1} (\alpha + 1) i_2 + \delta^{\alpha+1} (\beta + 1) i_3 + \delta^{\alpha+\beta+2} i_4)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi i_1 integralini ele alalım. Kolayca görülebilir ki i_1 integrali

$$\begin{aligned}
i_1 &= \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y-\delta}^0 + \int_0^{x_0-x} \int_0^{y_0-y} \right\} A_1(t, s) (x_0 - t - x)^\alpha (y_0 - s - y)^\beta ds dt \\
& + \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_0^{y_0-y} + \int_0^{x_0-x} \int_0^{y_0-y-\delta} \right\} A_1(t, s) (x_0 - t - x)^\alpha (y_0 - s - y)^\beta ds dt \\
& = i_{11} + i_{12} + i_{13} + i_{14}
\end{aligned}$$

birimde yazılabilir. $A_1(t, s)$ fonksiyonunun açık ifadesi $i_{11} - i_{14}$ integrallerinde yerine yazılırsa

$$i_{11} = \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_{y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] (x_0 - t - x)^\alpha \\ \times (y_0 - s - y)^\beta ds dt,$$

$$i_{12} = \int_0^{x_0-x-y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 + \bigvee_{0}^t \bigvee_{0}^s + \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 \bigvee_{0}^s + \bigvee_{0}^t \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 \right\} \right. \\ \times \left. \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] (x_0 - t - x)^\alpha (y_0 - s - y)^\beta ds dt,$$

$$i_{13} = \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_0^{y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 + \bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_{0}^s \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] \\ \times (x_0 - t - x)^\alpha (y_0 - s - y)^\beta ds dt$$

ve

$$i_{14} = \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^0 \bigvee_{y_0-y-\delta}^s + \bigvee_{0}^t \bigvee_{y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] \\ \times (x_0 - t - x)^\alpha (y_0 - s - y)^\beta ds dt$$

eşitlikleri elde edilir.

İkinci olarak i_2 integralinin hesaplanması geçelim. $A_2(t)$ fonksiyonunun açık ifadesi i_2 integralinde yerine yazılırsa

$$i_2 = \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} A_2(t) (x_0 - t - x)^\alpha dt \\ = \int_{x_0-x-\delta}^0 \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^t \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right) \right] (x_0 - t - x)^\alpha dt \\ + \int_0^{x_0-x} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 + \bigvee_{0}^t \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right) \right] \\ \times (x_0 - t - x)^\alpha dt$$

elde edilir.

Son olarak i_3 integralinin hesaplanması geçelim. $A_3(s)$ fonksiyonunun açık ifadesi i_3 integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} i_3 &= \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} A_3(s) (y_0 - s - y)^\beta ds \\ &= \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\bigvee_{y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] (y_0 - s - y)^\beta ds \\ &\quad + \int_0^{y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 + \bigvee_0^s \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] \\ &\quad \times (y_0 - s - y)^\beta ds \end{aligned}$$

elde edilir.

Elde edilen ifadeler A sınıfının (e) koşulu ve Lemma 2.1.1 dikkate alınarak düzenlenliğinde

$$\begin{aligned} |I_{12}^1(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon (\alpha + 1) (\beta + 1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) \\ &\quad \times |x_0 - t|^\alpha |y_0 - s|^\beta ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |y_0 - y|^{\beta+1} |x_0 - x|^{\alpha+1} \\ &\quad + 2\varepsilon (\alpha + 1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda(|t - x|) |x_0 - t|^\alpha dt \\ &\quad + 2\varepsilon (\beta + 1) |x_0 - x|^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda(|s - y|) |y_0 - s|^\beta ds \end{aligned}$$

birimindeki istenen eşitsizliğe ulaşılır. Lemma 3.2.5'in (ii) – (iv) ifadeleri aynı yöntemle ispatlanabilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.2.6 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfının (e) koşulunu sağlaması. Ayrıca, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1}, \quad 0 < h, k \leq \delta \quad (3.13)$$

eşitsizliği $0 \leq \alpha, \beta < 1$ ve her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

i) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s-y_0|^\beta ds dt + 2\varepsilon |y_0-y|^{\beta+1} (\alpha+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) |t-x_0|^\alpha dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

ii) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s-y_0|^\beta ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |x-x_0|^{\alpha+1} |y-y_0|^{\beta+1} \\ & \quad + 2\varepsilon |x-x_0|^{\alpha+1} (\beta+1) \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda(|s-y|) |s-y_0|^\beta ds \\ & \quad + 2\varepsilon |y-y_0|^{\beta+1} (\alpha+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) |t-x_0|^\alpha dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iii) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s-y_0|^\beta ds dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iv) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s-y_0|^\beta ds dt + 2\varepsilon |x-x_0|^{\alpha+1} (\beta+1) \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda(|s-y|) |s-y_0|^\beta ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Ispat. Lemma 3.2.6'nın (*i*) ifadesini ispatlayalım. Kabul edelim ki $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olsun. Diğer taraftan,

$$I_{12}^2(x, y, \lambda) := \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

olmak üzere $V(t, s)$ fonksiyonu

$$V(t, s) := \int_{x_0}^t \int_s^{y_0} |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dv du$$

biçiminde tanımlansın.

(3.13) eşitsizliği göz önüne alınırsa $0 < t - x_0 \leq \delta$ ve $0 < y_0 - s \leq \delta$ iken

$$|V(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0)^{\alpha+1} (y_0 - s)^{\beta+1} \quad (3.14)$$

yazılabilir. Teorem 2.1.3 gereği aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{L}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & = (\mathbf{RS}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s [-V(t, s)]. \end{aligned}$$

Riemann-Stieltjes integraline, Teorem 2.1.2 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanıp ardından ifade mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütülürse

$$\begin{aligned}
|I_{12}^2(x, y, \lambda)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s [-V(t, s)] \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} |V(t, s)| \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |V(t, y_0 - \delta)| \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\
&\quad + \int_{y_0-\delta}^{y_0} |V(x_0 + \delta, s)| \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\
&\quad + |V(x_0 + \delta, y_0 - \delta)| K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) ile verilen eşitsizlik dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (t-x_0)^{\alpha+1} (y_0-s)^{\beta+1} \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha+1} \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0} (y_0-s)^{\beta+1} \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına $t = u + x$ ve $s = v + y$, ardından da $u = t$ ve $v = s$ değişken değiştirmeleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (t+x-x_0)^{\alpha+1} (y_0-s-y)^{\beta+1} \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right| \\
&\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon\delta^{\alpha+1}\int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y}(y_0-s-y)\left|d_sK_\lambda\left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2+s^2}\right)\right|\\+\varepsilon\delta^{\alpha+\beta+2}K_\lambda\left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2+(y_0-y-\delta)^2}\right)$$

elde edilir. Lemma 3.2.2'nin ispatında tanımlanan salınım fonksiyonları son eşitsizlikte dikkate alınarak ifade büyütülürse

$$\begin{aligned}|I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (t+x-x_0)^{\alpha+1} (y_0-s-y)^{\beta+1} |d_t d_s B_1(t, s)| \\&\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} |d_t B_2(t)| \\&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0-s-y)^{\beta+1} |d_s B_3(s)| \\&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda\left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2+(y_0-y-\delta)^2}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $B_1(t, s)$ tanım kümesinde ikili monoton azalan, $B_2(t)$ monoton azalan ve $B_3(s)$ monoton artandır. Böylece

$$\begin{aligned}|I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq -\varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (t+x-x_0)^{\alpha+1} (y_0-s-y)^{\beta+1} d_t d_s B_1(t, s) \\&\quad - \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} d_t B_2(t) \\&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} (y_0-s-y)^{\beta+1} d_s B_3(s) \\&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda\left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2+(y_0-y-\delta)^2}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}|I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon (\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} B_1(t, s) (t+x-x_0)^\alpha \\&\quad \times (y_0-s-y)^\beta ds dt\end{aligned}$$

$$+\varepsilon\delta^{\beta+1}(\alpha+1)\int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta}B_2(t)(t+x-x_0)^\alpha dt \\ +\varepsilon\delta^{\alpha+1}(\beta+1)\int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y}B_3(s)(t+x-x_0)^\beta ds$$

$$+\varepsilon\delta^{\alpha+\beta+2}K_\lambda\left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2+(y_0-y-\delta)^2}\right)$$

$$=\varepsilon\left((\alpha+1)(\beta+1)j_1+\delta^{\beta+1}(\alpha+1)j_2+\delta^{\alpha+1}(\beta+1)j_3+\delta^{\alpha+\beta+2}j_4\right)$$

elde edilir.

Şimdi j_1 integralini göz önüne alalım. j_1 integrali

$$j_1 = \left\{ \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^0 + \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_0^{y_0-y} \right\} B_1(t, s)(t+x-x_0)^\alpha (y_0-s-y)^\beta ds dt \\ = j_{11} + j_{12}$$

birimde yazılabilir. $B_1(t, s)$ fonksiyonunun açık ifadesi j_{11} ve j_{12} integrallerinde yerine yazılırsa

$$j_{11} = \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\bigvee_{t=0}^{x_0-x+\delta} \bigvee_{s=y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2+v^2} \right) \right) \right] (t+x-x_0)^\alpha \\ \times (y_0-s-y)^\beta ds dt$$

ve

$$j_{12} = \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_0^{y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{t=0}^{x_0-x+\delta} \bigvee_{s=y_0-y-\delta}^s + \bigvee_{t=0}^{x_0-x+\delta} \bigvee_{s=0}^s \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2+v^2} \right) \right) \right] \\ \times (t+x-x_0)^\alpha (y_0-s-y)^\beta ds dt$$

elde edilir.

İkinci olarak j_2 integralini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} j_2 &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} B_2(t) (t+x-x_0)^\alpha dt \\ &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \left[\bigvee_t^{x_0-x+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y - \delta)^2} \right) \right) \right] (t+x-x_0)^\alpha dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak j_3 integralini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} j_3 &= \int_{y_0-y-\delta}^{y_0-y} B_3(s) (y_0 - s - y)^\beta ds \\ &= \left\{ \int_{y_0-y-\delta}^0 + \int_0^{y_0-y} \right\} B_3(s) (y_0 - s - y)^\beta ds \\ &= \int_{y_0-y-\delta}^0 \left[\bigvee_{y_0-y-\delta}^s \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] (y_0 - s - y)^\beta ds \\ &\quad + \int_0^{y_0-y} \left[\left\{ \bigvee_{y_0-y-\delta}^0 + \bigvee_0^s \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] (y_0 - s - y)^\beta ds \end{aligned}$$

elde edilir.

Elde edilen ifadeler A sınıfının (e) koşulu ve Lemma 2.1.1 dikkate alınarak düzenlenliğinde

$$\begin{aligned} |I_{12}^2(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon(\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ &\quad \times |y_0 - s|^\beta ds dt + 2\varepsilon(\alpha+1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) |t-x_0|^\alpha dt \end{aligned}$$

birimindeki istenen eşitsizliğe ulaşılır. Lemma 3.2.6'nın (ii) – (iv) ifadeleri aynı yöntemle ispatlanabilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.2.7 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfının (e) koşulunu sağlaması. Ayrıca, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$$\int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1}, \quad 0 < h, k \leq \delta \quad (3.15)$$

eşitsizliği $0 \leq \alpha, \beta < 1$ ve her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

i) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |x_0 - t|^\alpha \\ & \quad \times |s - y_0|^\beta ds dt + 2\varepsilon (\beta+1) |x_0 - x|^{\alpha+1} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) |s - y_0|^\beta ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

ii) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |x_0 - t|^\alpha \\ & \quad \times |s - y_0|^\beta ds dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iii) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon(\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |x_0 - t|^\alpha \\
&\quad \times |s - y_0|^\beta ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |x_0 - x|^{\alpha+1} |y_0 - y|^{\beta+1} \\
&\quad + 2\varepsilon(\beta+1) |x_0 - x|^{\alpha+1} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) |s - y_0|^\beta ds \\
&\quad + 2\varepsilon(\alpha+1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda(|t - x|) |x_0 - t|^\alpha dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iv) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&\leq \varepsilon(\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |x_0 - t|^\alpha \\
&\quad \times |s - y_0|^\beta ds dt + 2\varepsilon(\alpha+1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_\lambda(|t - x|) |x_0 - t|^\alpha dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Lemma 3.2.7'nin (i) ifadesini ispatlayalım. Kabul edelim ki $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olsun. Diğer taraftan,

$$I_{12}^3(x, y, \lambda) := \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

olmak üzere $R(t, s)$ fonksiyonu

$$R(t, s) := \int_t^{x_0} \int_{y_0}^s |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dv du$$

biçiminde tanımlansın.

(3.15) eşitsizliği göz önüne alınırsa $0 < x_0 - t \leq \delta$ ve $0 < s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|R(t, s)| \leq \varepsilon (x_0 - t)^{\alpha+1} (s - y_0)^{\beta+1} \quad (3.16)$$

yazılabilir. Teorem 2.1.3 gereği aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{L}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &= (\mathbf{RS}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s [-R(t, s)]. \end{aligned}$$

Riemann-Stieltjes integraline, Teorem 2.1.2 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanıp ardından ifade mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütülürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &= \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s [-R(t, s)] \right| \\ &\leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |R(t, s)| \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |R(t, y_0 + \delta)| \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \int_{y_0}^{y_0+\delta} |R(x_0 - \delta, s)| \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + |R(x_0 - \delta, y_0 + \delta)| K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.16) ile verilen eşitsizlik dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (x_0 - t)^{\alpha+1} (s - y_0)^{\beta+1} \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha+1} \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (s - y_0)^{\beta+1} \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına $t = u + x$ ve $s = v + y$, ardından da $u = t$ ve $v = s$ değişken değiştirmeleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} (s + y - y_0)^{\beta+1} \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s + y - y_0)^{\beta+1} \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + s^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.2.3'ün ispatında tanımlanan salınım fonksiyonları son eşitsizlikte dikkate alınarak ifade büyütüllürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} (s + y - y_0)^{\beta+1} |d_t d_s C_1(t, s)| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} |d_t C_2(t)| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s + y - y_0)^{\beta+1} |d_s C_3(s)| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $C_1(t, s)$ tanım bölgesinde ikili monoton azalan, $C_2(t)$ monoton artan ve $C_3(s)$ monoton azalandır. Böylece

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq -\varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} (s + y - y_0)^{\beta+1} d_t d_s C_1(t, s) \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0 - t - x)^{\alpha+1} d_t C_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s+y-y_0)^{\beta+1} d_s C_3(s) \\
& + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x-\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} C_1(t, s) (x_0-t-x)^\alpha \\
&\quad \times (s+y-y_0)^\beta ds dt + \varepsilon (\alpha+1) \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} C_2(t) (x_0-t-x)^\alpha dt \\
&\quad + \varepsilon (\beta+1) \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} C_3(s) (s+y-y_0)^\beta ds \\
&\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x-\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \\
&= \varepsilon ((\alpha+1)(\beta+1)k_1 + (\alpha+1)\delta^{\beta+1}k_2 + (\beta+1)\delta^{\alpha+1}k_3 + \delta^{\alpha+\beta+2}k_4)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi k_1 integralini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
k_1 &= \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} C_1(t, s) (x_0-t-x)^\alpha (s+y-y_0)^\beta ds dt \\
&\quad + \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} C_1(t, s) (x_0-t-x)^\alpha (s+y-y_0)^\beta ds dt \\
&= k_{11} + k_{12}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $C_1(t, s)$ fonksiyonunun açık ifadesi k_{11} ve k_{12} integrallerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \int_{x_0-x-\delta}^0 \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^t \bigvee_{s=y}^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] (x_0-t-x)^\alpha \\
&\quad \times (s+y-y_0)^\beta ds dt
\end{aligned}$$

ve

$$k_{12} = \int_0^{x_0-x} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 \bigvee_s^{y_0-y+\delta} + \bigvee_0^t \bigvee_s^{y_0-y+\delta} \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] \\ \times (x_0 - t - x)^\alpha (s + y - y_0)^\beta ds dt$$

elde edilir.

Diğer taraftan k_2 integrali için

$$k_2 = \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} C_2(t) (x_0 - t - x)^\alpha dt \\ = \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^0 + \int_0^{x_0-x} \right\} C_2(t) (x_0 - t - x)^\alpha dt \\ = \int_{x_0-x-\delta}^0 \left[\bigvee_{x_0-x-\delta}^t \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right) \right] (x_0 - t - x)^\alpha dt \\ + \int_0^{x_0-x} \left[\left\{ \bigvee_{x_0-x-\delta}^0 + \bigvee_0^t \right\} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right) \right] (x_0 - t - x)^\alpha dt$$

yazılabilir.

Son olarak k_3 integrali için

$$k_3 = \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} C_3(s) (s + y - y_0)^\beta ds \\ = \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\bigvee_s^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x - \delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] (s + y - y_0)^\beta ds$$

yazılabilir.

Elde edilen ifadeler A sınıfının (e) koşulu ve Lemma 2.1.1 dikkate alınarak düzenlen-

lendiginde

$$\begin{aligned} |I_{12}^3(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon(\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |x_0 - t|^\alpha \\ &\quad \times |s - y_0|^\beta ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon(\beta+1) |x_0 - x|^{\alpha+1} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) |s - y_0|^\beta ds \end{aligned}$$

biçimindeki istenen eşitsizlik elde edilmiş olur. Lemma 3.2.7'nin (ii) – (iv) ifadeleri aynı yöntemle ispatlanabilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.2.8 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfının (e) koşulunu sağlaması. Ayrıca, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$$\int_{x_0}^{x_0+h y_0+k} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1}, \quad 0 < h, k \leq \delta \quad (3.17)$$

eşitsizliği $0 \leq \alpha, \beta < 1$ ve her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

i) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\leq \varepsilon(\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t - x_0|^\alpha \\ &\quad \times |s - y_0|^\beta ds dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

ii) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\leq \varepsilon(\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t - x_0|^\alpha \end{aligned}$$

$$\times |s - y_0|^\beta ds dt + 2\varepsilon (\beta + 1) |x_0 - x|^{\alpha+1} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) |s - y_0|^\beta ds$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iii) $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha + 1) (\beta + 1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t - x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s - y_0|^\beta ds dt + 2\varepsilon (\alpha + 1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) |t - x_0|^\alpha dt \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iv) $0 < x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y - y_0 < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ & \leq \varepsilon (\alpha + 1) (\beta + 1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t - x_0|^\alpha \\ & \quad \times |s - y_0|^\beta ds dt + 4\varepsilon K_\lambda(0) |x_0 - x|^{\alpha+1} |y_0 - y|^{\beta+1} \\ & \quad + 2\varepsilon (\alpha + 1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) |t - x_0|^\alpha dt \\ & \quad + 2\varepsilon (\beta + 1) |x_0 - x|^{\alpha+1} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) |s - y_0|^\beta ds \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Lemma 3.2.8'in (i) ifadesini ispatlayalım. Kabul edelim ki $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ olsun. Diğer taraftan,

$$I_{12}^4(x, y, \lambda) := \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt$$

olmak üzere $G(t, s)$ fonksiyonu

$$G(t, s) := \int_{x_0}^t \int_{y_0}^s |f(u, v) - f(x_0, y_0)| dv du$$

biçiminde tanımlansın.

(3.17) eşitsizliği göz önüne alınırsa $0 < t - x_0 \leq \delta$ ve $0 < s - y_0 \leq \delta$ iken

$$|G(t, s)| \leq \varepsilon (t - x_0)^{\alpha+1} (s - y_0)^{\beta+1} \quad (3.18)$$

yazılabilir. Teorem 2.1.3 gereği aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{L}) \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &= (\mathbf{RS}) \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s G(t, s). \end{aligned}$$

Riemann-Stieltjes integraline, Teorem 2.1.2 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulandıktan ifade mutlak değer fonksiyonu yardımıyla büyütülsürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) d_t d_s G(t, s) \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} |G(t, s)| \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &+ \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(t, y_0 + \delta)| \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \right| \\ &+ \int_{y_0}^{y_0+\delta} |G(x_0 + \delta, s)| \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &+ |G(x_0 + \delta, y_0 + \delta)| K_\lambda \left(\sqrt{(x_0 - x + \delta)^2 + (y_0 - y + \delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.18) ile verilen eşitsizlik dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta y_0+\delta} \int_{y_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha+1} (s-y_0)^{\beta+1} \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha+1} \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0}^{y_0+\delta} (s-y_0)^{\beta+1} \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (s-y)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına $t = u + x$ ve $s = v + y$, ardından da $u = t$ ve $v = s$ değişken değiştirmeleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta y_0-y+\delta} \int_{y_0-y}^{x_0-\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} (s+y-y_0)^{\beta+1} \left| d_t d_s K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x}^{x_0-\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} \left| d_t K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y}^{y_0-\delta} (s+y-y_0)^{\beta+1} \left| d_s K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + s^2} \right) \right| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.2.4'ün ispatı için tanımlanan salınınm fonksiyonları son eşitsizlikte dikkate alınarak ifade büyütülürse

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta y_0-y+\delta} \int_{y_0-y}^{x_0-\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} (s+y-y_0)^{\beta+1} |d_t d_s D_1(t, s)| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x}^{x_0-\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} |d_t D_2(t)| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y}^{y_0-\delta} (s+y-y_0)^{\beta+1} |d_s D_3(s)| \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $D_1(t, s)$ tanım kümesinde ikili monoton artan, $D_2(t)$ monoton azalan ve $D_3(s)$ monoton azalandır. Böylece

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} (s+y-y_0)^{\beta+1} d_t d_s D_1(t, s) \\ &\quad - \varepsilon \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} (t+x-x_0)^{\alpha+1} d_t D_2(t) \\ &\quad - \varepsilon \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} (s+y-y_0)^{\beta+1} d_s D_3(s) \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} D_1(t, s) (t+x-x_0)^\alpha \\ &\quad \times (s+y-y_0)^\beta ds dt \\ &\quad + \varepsilon (\alpha+1) \delta^{\beta+1} \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} D_2(t) (t+x-x_0)^\alpha dt \\ &\quad + \varepsilon (\beta+1) \delta^{\alpha+1} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} D_3(s) (s+y-y_0)^\beta ds \\ &\quad + \varepsilon \delta^{\alpha+\beta+2} K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \\ &= \varepsilon ((\alpha+1)(\beta+1) h_1 + (\alpha+1) \delta^{\beta+1} h_2 + (\beta+1) \delta^{\alpha+1} h_3 + \delta^{\alpha+\beta+2} h_4) \end{aligned}$$

elde edilir.

İlk olarak h_1 integralini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$h_1 = \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} D_1(t, s) (t+x-x_0)^\alpha (s+y-y_0)^\beta ds dt$$

yazılabilir. $D_1(t, s)$ fonksiyonunun açık ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} h_1 &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\bigvee_t^{x_0-x+\delta} \bigvee_s^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right) \right) \right] (t+x-x_0)^\alpha \\ &\quad \times (s+y-y_0)^\beta ds dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan h_2 integrali için

$$\begin{aligned} h_2 &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} D_2(t) (t+x-x_0)^\alpha dt \\ &= \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \left[\bigvee_t^{x_0-x+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{u^2 + (y_0-y+\delta)^2} \right) \right) \right] (t+x-x_0)^\alpha dt \end{aligned}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde h_3 integrali için

$$\begin{aligned} h_3 &= \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} D_3(s) (s+y-y_0)^\beta ds \\ &= \int_{y_0-y}^{y_0-y+\delta} \left[\bigvee_s^{y_0-y+\delta} \left(K_\lambda \left(\sqrt{(x_0-x+\delta)^2 + v^2} \right) \right) \right] (s+y-y_0)^\beta ds \end{aligned}$$

yazılabilir.

Elde edilen ifadeler A sınıfının (e) koşulu ve Lemma 2.1.1 dikkate alınarak düzenlenliğinde

$$\begin{aligned} |I_{12}^4(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon (\alpha+1) (\beta+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t-x_0|^\alpha \\ &\quad \times |s-y_0|^\beta ds dt \end{aligned}$$

biçimindeki istenen eşitsizlik elde edilir. Lemma 3.2.8'in (ii) – (iv) ifadeleri aynı yöntemle ispatlanabilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.3 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfından olsun. Eğer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun Lebesgue noktası ise bu takdirde

$$2|y - y_0| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) dt + 2|x - x_0| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) ds + 4K_\lambda(0)|x - x_0||y - y_0| \quad (3.19)$$

fonksiyonunun $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken sınırlı kaldığı (x, y, λ) noktalar kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L_\lambda(f; x, y) = f(x_0, y_0)$$

gerçeklenir.

İspat. Kabul edelim ki $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ olsun. $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumlarını dikkate alalım. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun Lebesgue noktası ise bu takdirde verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0-k}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h k$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h k$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h k$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h k$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $\delta > 0$ bulunabilir. Burada, $0 < h, k \leq \delta$ dir. A sınıfının (b) koşulundan

$$|L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| = \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}) ds dt \right|$$

$$\begin{aligned}
& + f(x_0, y_0) \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
& - f(x_0, y_0) \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - f(x_0, y_0) \Big| \\
& \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
& + |f(x_0, y_0)| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - 1 \right| \\
& = I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. B_δ kümeleri

$$B_\delta := \left\{ (t, s) : \sqrt{(t-x_0)^2 + (s-y_0)^2} < \delta, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} + \iint_{B_\delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Şimdi $I_{11}(x, y, \lambda)$ integralini göz önüne alalım. $I_{11}(x, y, \lambda)$ integrali için

$$\begin{aligned}
I_{11}(x, y, \lambda) &\leq \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \\
&+ |f(x_0, y_0)| \iint_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) ds dt
\end{aligned}$$

olduğundan, (c) ve (d) koşulları sırasıyla göz önüne alındığında, $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{11}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir.

İkinci olarak $I_{12}(x, y, \lambda)$ integralini göz önüne alalım. $I_{12}(x, y, \lambda)$ integrali için

$$\begin{aligned}
I_{12}(x, y, \lambda) &\leq \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| \\
&\times K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt
\end{aligned}$$

$$= I_{12}^1(x, y, \lambda) + I_{12}^2(x, y, \lambda) + I_{12}^3(x, y, \lambda) + I_{12}^4(x, y, \lambda)$$

yazılabilir. Lemma 3.2.5-Lemma 3.2.8'in (i) ifadelerinde $\alpha = \beta = 0$ durumu sırasıyla her bir integralde göz önüne almırsa $|I_{12}(x, y, \lambda)|$ integrali için

$$\begin{aligned} |I_{12}(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + 2\varepsilon |y_0 - y| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) dt \\ &\quad + 2\varepsilon |x_0 - x| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s-y|) ds \\ &\quad + 4\varepsilon K_\lambda(0) |y_0 - y| |x_0 - x| \end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilir. A sınıfının (a) koşulu ve (3.19) hipotezinden $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir. Son olarak A sınıfının (b) koşulundan $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ olur.

Teorem 3.2.3, $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ kabullerinin $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumları için ispatlanmıştır. Diğer durumlarda da, Lemma 3.2.5-Lemma 3.2.8'in (ii) – (iv) ifadeleri ayrı ayrı yukarıdaki ispatta olduğu gibi kullanılarak (3.20) eşitsizliği elde edilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.4 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A sınıfından olsun. Eğer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası ise bu takdirde

$$\begin{aligned} &(\alpha + 1)(\beta + 1) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) |t - x_0|^\alpha |s - y_0|^\beta ds dt \\ &+ 2(\beta + 1) |x - x_0|^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) |s - y_0|^\beta ds \\ &+ 2(\alpha + 1) |y - y_0|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) |t - x_0|^\alpha dt \\ &+ 4K_\lambda(0) |x - x_0|^{\alpha+1} |y - y_0|^{\beta+1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

fonksiyonunun $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken sınırlı kaldığı (x, y, λ) noktalar kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L_\lambda(f; x, y) = f(x_0, y_0)$$

gerçeklenir.

İspat. Kabul edelim ki $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ olsun. $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumlarını göz önüne alalım. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası ise bu takdirde verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0-k}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1} \\ & \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1} \\ & \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1} \\ & \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $\delta > 0$ bulunabilir. Burada, $0 < h, k \leq \delta$ dir. A sınıfının (b) koşulundan

$$\begin{aligned} & |L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| \\ &= \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right. \\ &\quad + f(x_0, y_0) \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad \left. - f(x_0, y_0) \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - f(x_0, y_0) \right| \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |f(x_0, y_0)| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - 1 \right| \\
& = I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. B_δ kümesi

$$B_\delta = \left\{ (t, s) : \sqrt{(t-x_0)^2 + (s-y_0)^2} < \delta, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} + \iint_{B_\delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Şimdi $I_{11}(x, y, \lambda)$ integralini göz önüne alalım. $I_{11}(x, y, \lambda)$ integrali için

$$\begin{aligned}
I_{11}(x, y, \lambda) &\leq \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \\
&\quad + |f(x_0, y_0)| \iint_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) ds dt
\end{aligned}$$

olduğundan, (c) ve (d) koşulları sırasıyla göz önüne alındığında, $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{11}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir.

İkinci olarak $I_{12}(x, y, \lambda)$ integralini göz önüne alalım. $I_{12}(x, y, \lambda)$ integrali için

$$\begin{aligned}
I_{12}(x, y, \lambda) &\leq \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \right\} |f(t, s) - f(x_0, y_0)| \\
&\quad \times K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&= I_{12}^1(x, y, \lambda) + I_{12}^2(x, y, \lambda) + I_{12}^3(x, y, \lambda) + I_{12}^4(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 3.2.5-Lemma 3.2.8'in (i) ifadeleri sırasıyla her bir integralde göz

önüne alımlısa, $|I_{12}(x, y, \lambda)|$ integrali için

$$\begin{aligned}
|I_{12}(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon (\alpha + 1) (\beta + 1) \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) |t - x_0|^\alpha \\
&\quad \times |s - y_0|^\beta ds dt \\
&+ 2\varepsilon (\beta + 1) |x - x_0|^{\alpha+1} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} K_\lambda (|s - y|) |s - y_0|^\beta ds \tag{3.22} \\
&+ 2\varepsilon (\alpha + 1) |y - y_0|^{\beta+1} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} K_\lambda (|t - x|) |t - x_0|^\alpha dt \\
&+ 4\varepsilon K_\lambda (0) |x - x_0|^{\alpha+1} |y - y_0|^{\beta+1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.21) hipotezi dikkate alındığı takdirde $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir. Son olarak A sınıfının (b) koşulundan $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ olur.

Teorem 3.2.4, $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ kabullerinin $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumları için ispatlanmıştır. Diğer durumlarda da, Lemma 3.2.5-Lemma 3.2.8'in (ii) – (iv) ifadeleri ayrı ayrı yukarıdaki ispatta olduğu gibi kullanılarak (3.22) eşitsizliği elde edilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

3.3 Genelleştirilmiş Lebesgue Noktasında Yakınsaklık Hızı

Teorem 3.3.1 Kabul edelim ki Teorem 3.2.4'ün hipotezleri sağlanınsın. Ayrıca, $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda, \delta, x, y) &= (\alpha + 1) (\beta + 1) \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) |x_0 - t|^\alpha \\
&\quad \times |y_0 - s|^\beta ds dt + 4K_\lambda (0) |x_0 - x|^{\alpha+1} |y_0 - y|^{\beta+1} \\
&+ 2(\alpha + 1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} K_\lambda (|t - x|) |x_0 - t|^\alpha dt
\end{aligned}$$

$$+2(\beta+1)|x_0-x|^{\alpha+1}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}K_\lambda(|s-y|)|y_0-s|^\beta ds$$

olmak üzere her $\xi > 0$ için aşağıdaki koşullar sağlanınsın:

- i. Bazı $\delta > 0$ sayıları için $\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} \Delta(\lambda, \delta, x, y) = 0$.
- ii. $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $\left| \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) ds dt - 1 \right| = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$.
- iii. $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $\sup_{\xi \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$.
- iv. $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $\iint_{\xi \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) ds dt = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$.

Bu takdirde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası olduğunda $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken

$$|L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 3.2.4'ün hipotezleri gereği

$$\begin{aligned} & |L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq \varepsilon(\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}) |x_0-t|^\alpha \\ & \quad \times |y_0-s|^\beta ds dt + 2\varepsilon(\alpha+1) |y_0-y|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) |x_0-t|^\alpha dt \\ & \quad + 2\varepsilon(\beta+1) |x_0-x|^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s-y|) |y_0-s|^\beta ds \\ & \quad + 4\varepsilon K_\lambda(0) |x_0-x|^{\alpha+1} |y_0-y|^{\beta+1} + |f(x_0, y_0)| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) ds dt - 1 \right| \\ & \quad + \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} + |f(x_0, y_0)| \iint_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) ds dt \end{aligned}$$

elde edilir. Sırasıyla (i)-(iv) koşulları göz önüne alındığında

$$|L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$$

olduğu görülür. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Örnek 3.3.1 $\Lambda = (0, \infty)$, $\lambda_0 = 0$ ve $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) = \frac{1}{4\pi\lambda} e^{-\frac{(t^2+s^2)}{4\lambda}}$ olsun. Ayrıca, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ noktası f fonksiyonunun Lebesgue noktası olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \delta, x, y) &= \int_{-\delta}^{+\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{1}{4\pi\lambda} e^{-\frac{((t-x)^2+(s-y)^2)}{4\lambda}} ds dt + \frac{1}{\pi\lambda} |x| |y| \\ &\quad + |y| \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{1}{2\pi\lambda} e^{-\frac{(t-x)^2}{4\lambda}} dt + |x| \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{1}{2\pi\lambda} e^{-\frac{(s-y)^2}{4\lambda}} ds \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu integral hesaplandığı takdirde ise

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \delta, x, y) &= \frac{1}{\pi\lambda} |x| |y| + \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi}} \left(\operatorname{Erf}\left(\frac{(\delta-y)}{2\sqrt{\lambda}}\right) + \operatorname{Erf}\left(\frac{(\delta+y)}{2\sqrt{\lambda}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\operatorname{Erf}\left(\frac{\delta-x}{2\sqrt{\lambda}}\right) + \operatorname{Erf}\left(\frac{\delta+x}{2\sqrt{\lambda}}\right) \right) \left(\operatorname{Erf}\left(\frac{\delta-y}{2\sqrt{\lambda}}\right) + \operatorname{Erf}\left(\frac{\delta+y}{2\sqrt{\lambda}}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi}} \left(\operatorname{Erf}\left(\frac{(\delta-x)}{2\sqrt{\lambda}}\right) + \operatorname{Erf}\left(\frac{(\delta+x)}{2\sqrt{\lambda}}\right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, Erf fonksiyonu $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ eşitliği ile tammlıdır. Şimdi $\delta > 0$ sayılarını bulmak için $(x, y, \lambda) \rightarrow (0, 0, 0)$ iken $\Delta(\lambda, \delta, x, y) \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\delta = o(\sqrt{\lambda})$ ve $|x| = |y| = o(\sqrt{\lambda})$ olduğunda

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (0,0,0)} \Delta(\lambda, \delta, x, y) = 0$$

olduğu görülür. Toplumdaki ilk terimden dolayı $\Delta(\lambda, \delta, x, y) = O(\lambda^c)$, $c > \frac{1}{2}$ yazılıbilir. Benzer hesaplamalarla (ii)-(iv) koşulları gösterilebilir. Bu takdirde

$$|L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| = o(\lambda^c), \quad c > \frac{1}{2}$$

sonucuna ulaşılır.

Çizelge 3.1 Radyal çekirdekli integral operatörün yaklaşım verileri

λ	x	y	$L_\lambda(f; x, y)$	$f(x_0, y_0)$	$ L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0) $
0.1	0.1	0.1	0.704154	1	0.295846
0.09	0.09	0.09	0.726587	1	0.273413
0.08	0.08	0.08	0.750265	1	0.249735
0.07	0.07	0.07	0.775291	1	0.224709
0.06	0.06	0.06	0.801783	1	0.198217
0.05	0.05	0.05	0.829868	1	0.170132
0.04	0.04	0.04	0.859694	1	0.140306
0.03	0.03	0.03	0.891423	1	0.108577
0.02	0.02	0.02	0.92524	1	0.074759

Çizelge 3.1'de, Örnek 3.3.1'de yakınsaklık hızı incelenen operatörün, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(t, s) = e^{-(t^2 + s^2)}$$

biçiminde verilen fonksiyona $(x_0, y_0) = (0, 0)$ noktasında yaklaşımıyla ilgili nümerik hesaplamalar verilmiştir.

4. RADYAL ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ AĞIRLIKLI UZAYINDA NOKTASAL YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI

Bu bölümde A_φ sınıfı adı verilen bir çekirdek sınıfı tanımlanacaktır. Daha sonra (1.9) denklemi ile verilen $L_\lambda(f; x, y)$ operatör ailesinin belirli koşullar altında $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayına sürekli bir dönüşüm olduğu gösterilecektir. Ardından $L_\lambda(f; x, y)$ singüler integral operatör ailesinin, $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun süreklilik noktasında, Lebesgue noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılığı incelenecik ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsamanın hızı araştırılacaktır.

4.1 Operatör Ailesinin İyi Tanımlılığı

Bu kısımda öncelikle kullanacağımız çekirdek sınıfı tanımlanacak ve daha sonra (1.9) denklemi ile verilen $L_\lambda(f; x, y)$ operatör ailesinin belirli koşullar altında $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayına sürekli bir dönüşüm olduğu gösterilecektir.

Tanım 4.1.1 (A_φ Sınıfı) $\Lambda \subseteq \mathbb{R}_0^+$ bir indis kümesi ve λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için (t, s) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak \mathbb{R}^2 üzerinde ölçülebilir ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu \mathbb{R}^2 nin her sınırlı alt bölgesinde sınırlı olsun ve

$$\varphi(x + t, y + s) \leq \varphi(x, y)\varphi(t, s), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

eşitsizliğini gerçeklesin. $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu, aşağıdaki koşulları sağladığını takdirde, A_φ sınıfına aittir denir:

a. $\left\| \varphi K_\lambda \left(\sqrt{(.)^2 + (.)^2} \right) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \leq N < \infty, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$

b. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, φ fonksiyonunun istenilen karakteristik noktası olmak üzere

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} \left| \frac{1}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) ds dt - 1 \right| = 0.$$

- c. $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \sup_{\xi \leq \sqrt{t^2+s^2}} [\varphi(t, s) K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2})] = 0, \forall \xi > 0.$
- d. $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \iint_{\xi \leq \sqrt{t^2+s^2}} \varphi(t, s) K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) ds dt = 0, \forall \xi > 0.$
- e. $K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2})$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için, $(-\infty, 0]$ üzerinde t değişkeninin bir fonksiyonu olarak monoton artan ve $[0, \infty)$ üzerinde monoton azalan bir fonksiyondur. $K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2})$ fonksiyonu, $(-\infty, 0]$ üzerinde s değişkeninin bir fonksiyonu olarak monoton artan ve $[0, \infty)$ üzerinde monoton azalan bir fonksiyondur. Ayrıca, $K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2})$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için, $[0, \infty) \times [0, \infty)$ ve $(-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$ üzerinde (t, s) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ikili monoton artan ve benzer şekilde, $[0, \infty) \times (-\infty, 0]$ ve $(-\infty, 0] \times [0, \infty)$ üzerinde (t, s) değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ikili monoton azalan bir fonksiyondur.

Ayrıca, $K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2})$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} K_\lambda(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}) = \begin{cases} 0, & (t, s) \neq (x, y) \\ \infty, & (t, s) = (x, y) \end{cases}$$

singülerlik koşulunu sağlamaktadır.

Örnek 4.1.1 $\Lambda = (0, \infty)$, $\lambda_0 = \infty$ ve $K_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere

$$K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2}) = \frac{\lambda^2}{\pi} e^{-\lambda^2(t^2+s^2)}$$

birimindeki iki değişkenli Gauss-Weierstrass çekirdeği verilsin. $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\varphi_1(t, s) = (1 + |t|)(1 + |s|)$ ve $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\varphi_2(t, s) = e^{t+s}$ yukarıdaki koşulları sağlayan ağırlık fonksiyonlarına örnek olarak verilebilir.

Teorem 4.1.1 Eğer $K_\lambda(\sqrt{t^2+s^2})$ fonksiyonu A_φ sınıfından ise bu takdirde

$$L_\lambda(f; x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}) ds dt, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

birimde verilen radyal çekirdekli, konvolüsyon tipli singüler integral operatör ailesi $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayına sürekli bir dönüşümüdür.

Ispat. $L_\lambda(f; x, y)$ operatörü lineer olduğundan $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayından $L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ uzayına dönüşüm yapan sınırlı bir operatör olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$\|L_\lambda\|_\varphi = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L_\lambda(f; x, y)\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)}}{\|f\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)}}$$

normunun sınırlı olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.1.1 ve A_φ sınıfının özelliklerinden faydalansırsa

$$\begin{aligned} \|L_\lambda(f; x, y)\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\varphi(x, y)} \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right| dy dx \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\varphi(x, y)} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} |f(t+x, s+y)| K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) ds dt \right) dy dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(t+x, s+y)}{\varphi(x, y)} \right| dy dx \right) ds dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(t+x, s+y)}{\varphi(x, y)} \right| \frac{\varphi(t+x, s+y)}{\varphi(t+x, s+y)} dy dx \right) ds dt \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(t+x, s+y)}{\varphi(t+x, s+y)} \right| \frac{\varphi(x, y) \varphi(t, s)}{\varphi(x, y)} dy dx \right) ds dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \varphi(t, s) ds dt \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(t+x, s+y)}{\varphi(t+x, s+y)} \right| dy dx \\ &\leq N \|f\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

birimindeki eşitsizlik elde edilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

4.2 Operatör Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklılığı

Teorem 4.2.1 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A_φ sınıfından olsun. Eğer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ ve φ fonksiyonlarının süreklilik noktası ise bu takdirde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L_\lambda(f; x, y) = f(x_0, y_0)$$

gerçeklenir.

İspat. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun süreklilik noktası olsun. Ayrıca, $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ olsun. A_φ sınıfının (b) koşulundan

$$\begin{aligned}
& |L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| \\
&= \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) ds dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) ds dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) ds dt - f(x_0, y_0) \right| \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) ds dt \\
&\quad + \left| \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) ds dt - \varphi(x_0, y_0) \right| \\
&= I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. B_δ kümesi, $B_\delta = \{(t, s) : \sqrt{(t - x_0)^2 + (s - y_0)^2} < \delta, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\}$ biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} + \iint_{B_\delta} \right\} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) \\
&\quad \times K_\lambda \left(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \right) ds dt \\
&= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) eşitsizliği $I_{11}(x, y, \lambda)$ integralinde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} I_{11}(x, y, \lambda) &\leq \varphi(x, y) \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2 + s^2}} \left[\varphi(t, s) K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) \right] \|f\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad + \left| \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(x, y) \iint_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2 + s^2}} \varphi(t, s) K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) ds dt \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte (c) ve (d) koşulları sırasıyla göz önüne alındığında, $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{11}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir.

Şimdi $I_{12}(x, y, \lambda)$ integralini inceleyelim. $\frac{f}{\varphi}$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki

$$\sqrt{(t - x_0)^2 + (s - y_0)^2} < \delta \text{ olduğunda } \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu takdirde (4.1) eşitsizliği ile birlikte

$$\begin{aligned} I_{12}(x, y, \lambda) &= \iint_{B_\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) \\ &\quad \times K_\lambda(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}) ds dt \\ &\leq \varepsilon \varphi(x, y) \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t - x, s - y) K_\lambda(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}) ds dt \\ &\leq \varepsilon \varphi(x, y) \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(u, v) K_\lambda(\sqrt{u^2 + v^2}) dv du \\ &\leq \varepsilon \varphi(x, y) N \end{aligned}$$

elde edilir.

Hipoteze göre φ fonksiyonu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktasında sürekli olduğundan, yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ için $\lambda \rightarrow \lambda_0$ iken $I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir. $I_2(x, y, \lambda)$ integrali için ise (b) koşulundan,

$$\lim_{(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)} \left| \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda(\sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2}) ds dt - \varphi(x_0, y_0) \right| = 0$$

elde edilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.2 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A_φ sınıfından olsun. Eğer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ ve φ fonksiyonlarının Lebesgue noktası ise bu takdirde

$$\begin{aligned} & \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right. \\ & + 2|y_0 - y| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) dt + 2|x_0 - x| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) ds \\ & \left. + 4K_\lambda(0)|y_0 - y||x_0 - x| \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

fonksiyonunun $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken sınırlı kaldığı (x, y, λ) noktalar kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L_\lambda(f; x, y) = f(x_0, y_0)$$

gerçeklenir. Burada, B_δ kümesi

$$B_\delta = \left\{ (t, s) : \sqrt{(t - x_0)^2 + (s - y_0)^2} < \delta, \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

birimde tanımlıdır.

İspat. Kabul edelim ki $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ olsun. $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumlarını dikkate alalım. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun Lebesgue noktası ise bu takdirde verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0-k}^{y_0} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| ds dt < \varepsilon h k$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| ds dt < \varepsilon h k$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+k} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| ds dt < \varepsilon h k$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| ds dt < \varepsilon h k$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $\delta > 0$ bulunabilir. Burada, $0 < h, k \leq \delta$ dir. A_φ sınıfının (b) koşulundan

$$\begin{aligned}
& |L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| \\
= & \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right. \\
& + \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
& \left. - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - f(x_0, y_0) \right| \\
\leq & \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
& + \left| \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - \varphi(x_0, y_0) \right| \\
= & I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) \\
&\quad \times K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&+ \iint_{B_\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&= I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) eşitsizliği ve φ fonksiyonunun sınırlılığı $I_{11}(x, y, \lambda)$ integralinde dikkate alınırısa

$$\begin{aligned}
I_{11}(x, y, \lambda) &\leq \varphi(x, y) \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2 + s^2}} \left[\varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right] \|f\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)} \\
&+ \left| \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(x, y) \iint_{\substack{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2 + s^2}}} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) ds dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca, (c) ve (d) koşulları sırasıyla göz önüne alındığında ise $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{11}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ olur.

$I_{12}(x, y, \lambda)$ integralini göz önüne alalım. $I_{12}(x, y, \lambda)$ integrali için

$$\begin{aligned}
I_{12}(x, y, \lambda) &\leq \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \right. \\
&\quad \times K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&+ \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&+ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&+ \left. \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right\} \\
&= \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \{ I_{12}^1(x, y, \lambda) + I_{12}^2(x, y, \lambda) + I_{12}^3(x, y, \lambda) + I_{12}^4(x, y, \lambda) \}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 3.2.5-Lemma 3.2.8'in (i) ifadeleri için $\alpha = \beta = 0$ durumu sırasıyla her bir integralde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}(x, y, \lambda)| &\leq \varepsilon \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right. \\
&+ 2|y_0 - y| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t - x|) dt + 2|x_0 - x| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s - y|) ds \\
&+ 4|y_0 - y||x_0 - x| K_\lambda(0) \} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.2) hipotezi dikkate alındığı takdirde $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir. Son olarak A_φ sınıfının (b) koşulundan $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ olur.

Teorem 4.2.2, $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ kabulleninin $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumları için ispatlanmıştır. Diğer durumlarda da, Lemma

3.2.5-Lemma 3.2.8'in (ii) – (iv) ifadeleri ayrı ayrı, yukarıdaki ispatta olduğu gibi kullanılarak (4.3) eşitsizliği elde edilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.3 $K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})$ fonksiyonu A_φ sınıfından olsun. Eğer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ ve φ fonksiyonlarının genelleştirilmiş Lebesgue noktası ise bu takdirde

$$\begin{aligned} & \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \left\{ (\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right. \\ & \quad \times |t-x_0|^\alpha |s-y_0|^\beta ds dt \\ & \quad + 2(\beta+1) |x-x_0|^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s-y|) |s-y_0|^\beta ds \\ & \quad + 2(\alpha+1) |y-y_0|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) |t-x_0|^\alpha dt \\ & \quad \left. + 4K_\lambda(0) |x-x_0|^{\alpha+1} |y-y_0|^{\beta+1} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

fonksiyonunun $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken sınırlı kaldığı (x, y, λ) noktalar kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} L_\lambda(f; x, y) = f(x_0, y_0)$$

gerçeklenir. Burada, B_δ kümesi

$$B_\delta = \left\{ (t, s) : \sqrt{(t-x_0)^2 + (s-y_0)^2} < \delta, \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

biçiminde tanımlıdır.

İspat. Kabul edelim ki $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ olsun. $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumlarını dikkate alalım. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası ise bu takdirde verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_{x_0-hy_0-k}^{x_0} \int_{y_0-k}^{y_0} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1} \\
& \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+k} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1} \\
& \int_{x_0}^{x_0+hy_0+k} \int_{y_0}^{y_0+k} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| ds dt < \varepsilon h^{\alpha+1} k^{\beta+1}
\end{aligned}$$

esitsizlikleri sağlanacak şekilde $\delta > 0$ bulunabilir. Burada $0 < h, k \leq \delta$ dir. A_φ sınıfının (b) koşulundan,

$$\begin{aligned}
& |L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| \\
= & \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right. \\
& + \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
& \left. - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - f(x_0, y_0) \right| \\
\leq & \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
& + \left| \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt - \varphi(x_0, y_0) \right| \\
= & I_1(x, y, \lambda) + I_2(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, \lambda) &= \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) \\
&\quad \times K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
&+ \iint_{B_\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\
= & I_{11}(x, y, \lambda) + I_{12}(x, y, \lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) eşitsizliği ve φ fonksiyonunun sınırlılığı $I_{11}(x, y, \lambda)$ integralinde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} I_{11}(x, y, \lambda) &\leq \varphi(x, y) \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} \left[\varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) \right] \|f\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad + \varphi(x, y) \left| \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \iint_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2+s^2}} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{t^2+s^2} \right) ds dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca, (c) ve (d) koşulları sırasıyla göz önüne alındığında ise $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{11}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir. $I_{12}(x, y, \lambda)$ integrali için ise

$$\begin{aligned} I_{12}(x, y, \lambda) &\leq \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \right. \\ &\quad \times K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left| \frac{f(t, s)}{\varphi(t, s)} - \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) ds dt \right\} \\ &= \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \{ I_{12}^1(x, y, \lambda) + I_{12}^2(x, y, \lambda) + I_{12}^3(x, y, \lambda) + I_{12}^4(x, y, \lambda) \} \end{aligned}$$

yazılabilir. Sırasıyla Lemma 3.2.5-Lemma 3.2.8'in (i) ifadeleri her bir integralde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} |I_{12}(x, y, \lambda)| &\leq \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \varepsilon \left\{ (\alpha+1)(\beta+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right. \\ &\quad \times |t-x_0|^\alpha |s-y_0|^\beta ds dt \\ &\quad + 2(\beta+1) |x-x_0|^{\alpha+1} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K_\lambda(|s-y|) |s-y_0|^\beta ds \\ &\quad + 2(\alpha+1) |y-y_0|^{\beta+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_\lambda(|t-x|) |t-x_0|^\alpha dt \\ &\quad \left. + 4K_\lambda(0) |x-x_0|^{\alpha+1} |y-y_0|^{\beta+1} \right\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.4) hipotezi dikkate alındığı takdirde $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_{12}(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ elde edilir. Son olarak A_φ sınıfının (b) koşulundan $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $I_2(x, y, \lambda) \rightarrow 0$ olur.

Teorem 4.2.3, $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < |y_0 - y| < \frac{\delta}{2}$ kabullerinin $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ ve $0 < y_0 - y < \frac{\delta}{2}$ durumları için ispatlanmıştır. Diğer durumlarda da, Lemma 3.2.5- Lemma 3.2.8'in (ii) – (iv) ifadeleri ayrı ayrı, yukarıdaki ispatta olduğu gibi kullanılarak (4.5) eşitsizliği elde edilir. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

4.3 Genelleştirilmiş Lebesgue Noktasında Yakınsaklık Hızı

Teorem 4.3.1 Kabul edelim ki Teorem 4.2.3'ün hipotezleri sağlanın. Ayrıca, $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \delta, x, y) = & \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \left\{ (\alpha + 1)(\beta + 1) \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right. \\ & \times |x_0 - t|^\alpha |y_0 - s|^\beta ds dt \\ & + 2(\alpha + 1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} K_\lambda(|t - x|) |x_0 - t|^\alpha dt \\ & + 2(\beta + 1) |x_0 - x|^{\alpha+1} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} K_\lambda(|s - y|) |y_0 - s|^\beta ds \\ & \left. + 4K_\lambda(0) |x_0 - x|^{\alpha+1} |y_0 - y|^{\beta+1} \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere her $\xi > 0$ için aşağıdaki koşullar sağlanın:

- i. Bazı $\delta > 0$ sayıları için $\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (x_0,y_0,\lambda_0)} \Delta(\lambda, \delta, x, y) = 0$.
- ii. $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $\left| \frac{1}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) ds dt - 1 \right| = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$.
- iii. $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $\sup_{\xi \leq \sqrt{t^2 + s^2}} [\varphi(t, s) K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2})] = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$.
- iv. $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken $\iint_{\xi \leq \sqrt{t^2 + s^2}} \varphi(t, s) K_\lambda(\sqrt{t^2 + s^2}) ds dt = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$.

Bu takdirde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ ve φ fonksiyonlarının genelleştirilmiş Lebesgue noktası olduğunda $(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0)$ iken

$$|L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 4.2.3'ün hipotezleri altında

$$\begin{aligned} & |L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \\ & \sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) \varepsilon \left\{ (\alpha + 1)(\beta + 1) \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} K_\lambda \left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \right. \\ & \times |x_0 - t|^\alpha |y_0 - s|^\beta ds dt + 2(\alpha + 1) |y_0 - y|^{\beta+1} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} K_\lambda(|t-x|) |x_0 - t|^\alpha dt \\ & + 2(\beta + 1) |x_0 - x|^{\alpha+1} \int_{y_0 - \delta}^{y_0 + \delta} K_\lambda(|s-y|) |y_0 - s|^\beta ds \\ & \left. + 4K_\lambda(0) |x_0 - x|^{\alpha+1} |y_0 - y|^{\beta+1} \right\} \\ & + |f(x_0, y_0)| \left| \frac{1}{\varphi(x_0, y_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) ds dt - 1 \right| \\ & + \varphi(x, y) \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2 + s^2}} \left[\varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right] \|f\|_{L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)} \\ & + \varphi(x, y) \left| \frac{f(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)} \right| \iint_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2 + s^2}} K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) ds dt \end{aligned}$$

elde edilir. Sırasıyla (i)-(iv) koşulları göz önüne alındığında

$$|L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| = o(\Delta(\lambda, \delta, x, y))$$

olduğu görülür. Bu takdirde ispat tamamlanır. ■

Örnek 4.3.1 $\Lambda = (0, \infty)$, $\lambda_0 = 0$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\varphi(t, s) = (1 + |t|)(1 + |s|)$ ve

$$K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) = \frac{1}{4\pi\lambda} e^{-\frac{(t^2+s^2)}{4\lambda}}$$

olsun. Ayrıca, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ noktası f fonksiyonunun Lebesgue noktası olsun. Bu takdirde $\sup_{(t,s) \in B_\delta} \varphi(t, s) = 1 + m_\delta$ denirse

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda, \delta, x, y) &= (1 + m_\delta) \left\{ \frac{1}{\pi\lambda} |x| |y| + \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi}} \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{(\delta - y)}{2\sqrt{\lambda}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{(\delta + y)}{2\sqrt{\lambda}} \right) \right) \right. \\ &= \frac{1}{4} \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{\delta - x}{2\sqrt{\lambda}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{\delta + x}{2\sqrt{\lambda}} \right) \right) \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{\delta - y}{2\sqrt{\lambda}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{\delta + y}{2\sqrt{\lambda}} \right) \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi}} \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{(\delta - x)}{2\sqrt{\lambda}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{(\delta + x)}{2\sqrt{\lambda}} \right) \right) \right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, Erf fonksiyonu

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

eşitliği ile verilir. $\delta > 0$ sayıları için $(x, y, \lambda) \rightarrow (0, 0, 0)$ iken $\Delta(\lambda, \delta, x, y) \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\delta = o(\sqrt{\lambda})$ ve $|x| = |y| = o(\sqrt{\lambda})$ olduğunda

$$\lim_{(x,y,\lambda) \rightarrow (0,0,0)} \Delta(\lambda, \delta, x, y) = 0$$

olduğu görülür. Bu takdirde toplamdaki ilk terimden dolayı $\Delta(\lambda, \delta, x, y) = O(\lambda^c)$, $c > \frac{1}{2}$ yazılabilir. Benzer hesaplamalarla

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup_{\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{t^2 + s^2}} \varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) &= \left(1 + \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8\lambda}) \right) e^{-\frac{(-1 + \sqrt{1 + 8\lambda})^2}{16\lambda}} \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(x, y, \lambda) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) \text{ iken } \sup_{\xi \leq \sqrt{t^2 + s^2}} \left[\varphi(t, s) K_\lambda \left(\sqrt{t^2 + s^2} \right) \right] = o(\lambda^c), \quad c > \frac{1}{2}$$

yazılabilir. (ii) ve (iv) koşulları benzer şekilde gösterilebilir.

Bu takdirde

$$|L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0)| = o(\lambda^c), \quad c > \frac{1}{2}$$

sonucuna ulaşılır.

Çizelge 4.1 Radyal çekirdekli integral operatörün yaklaşım verileri

λ	x	y	$L_\lambda(f; x, y)$	$f(x_0, y_0)$	$ L_\lambda(f; x, y) - f(x_0, y_0) $
0.1	0.1	0.1	0.021000	0	0.021000
0.09	0.09	0.09	0.016929	0	0.016929
0.08	0.08	0.08	0.013312	0	0.013312
0.07	0.07	0.07	0.010143	0	0.010143
0.06	0.06	0.06	0.007416	0	0.007416
0.05	0.05	0.05	0.005125	0	0.005125
0.04	0.04	0.04	0.003264	0	0.003264
0.03	0.03	0.03	0.001827	0	0.001827
0.02	0.02	0.02	0.000808	0	0.000808
0.01	0.01	0.01	0.000201	0	0.000201

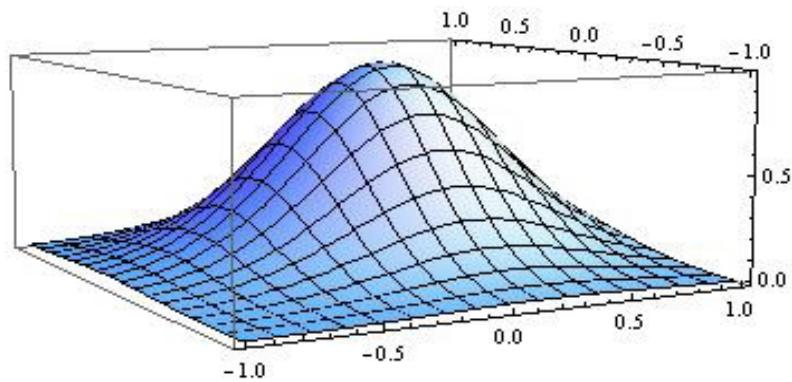
$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(t, s) = t^2s$ olsun. Burada $(x_0, y_0) = (0, 0)$ noktası f fonksiyonunun süreklilik noktası olup aynı zamanda Lebesgue noktasıdır. Çizelge 4.1'de operatörün f fonksiyonuna $(x_0, y_0) = (0, 0)$ noktasında yaklaşımıyla ilgili nümerik sonuçlar verilmiştir.

Teorem 4.3.1'in (iii) ve (iv) koşullarının grafiksel yorumu şekil 4.1 ve şekil 4.2 ile verilmiştir. Burada, $\lambda = 0.1$ olup grafikler $-1 \leq t, s \leq 1$ durumu için çizdirilmiştir.

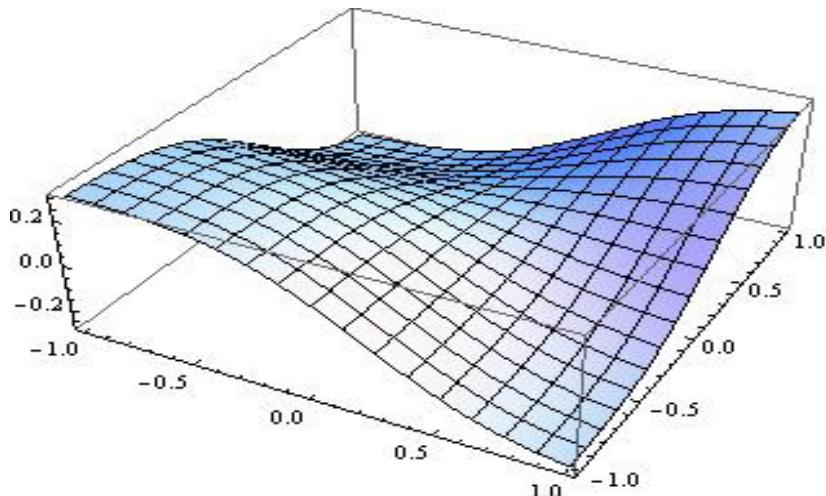
Ayrıca, $f(t, s) = t^2s$ fonksiyonuna radyal çekirdekli integral operatör uygulandığında

$$L_\lambda(f; x, y) = 2\lambda y + yx^2$$

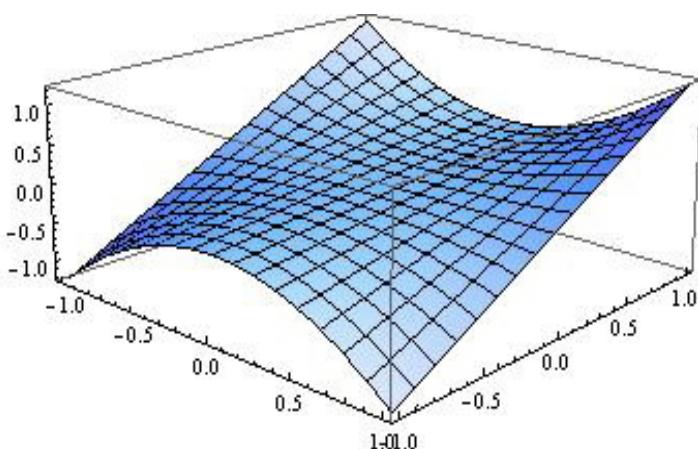
elde edilir. Bu takdirde sırasıyla $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.01$ ve $\lambda = 0.0001$ değerleri için şekil 4.3-şekil 4.5 elde edilir. Şekil 4.6 ise fonksiyonun orijinal grafiğidir.



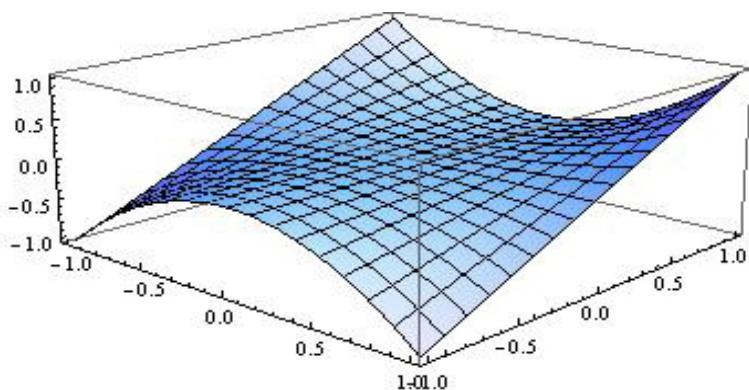
Şekil 4.1 $K_{0.1}(\sqrt{t^2 + s^2}) \varphi(t, s) = \frac{1}{0.4\pi} e^{\frac{-(t^2+s^2)+(t+s)}{0.4}}$, $-1 \leq t, s \leq 1$



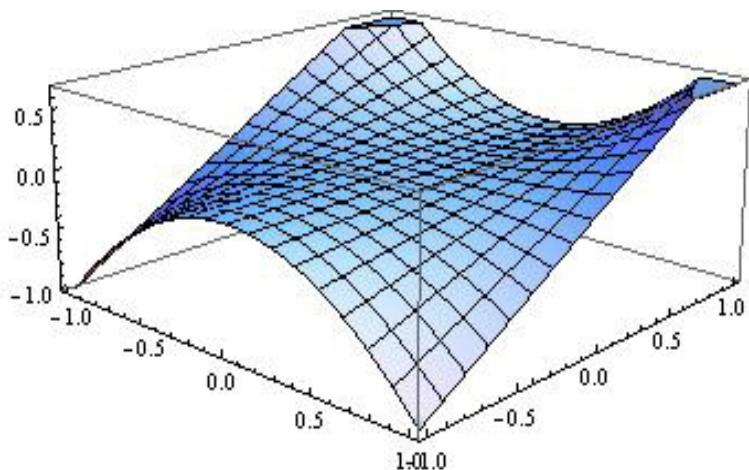
Şekil 4.2 $\iint \frac{1}{0.4\pi} e^{\frac{-(t^2+s^2)+(t+s)}{0.4}} ds dt$, $-1 \leq t, s \leq 1$



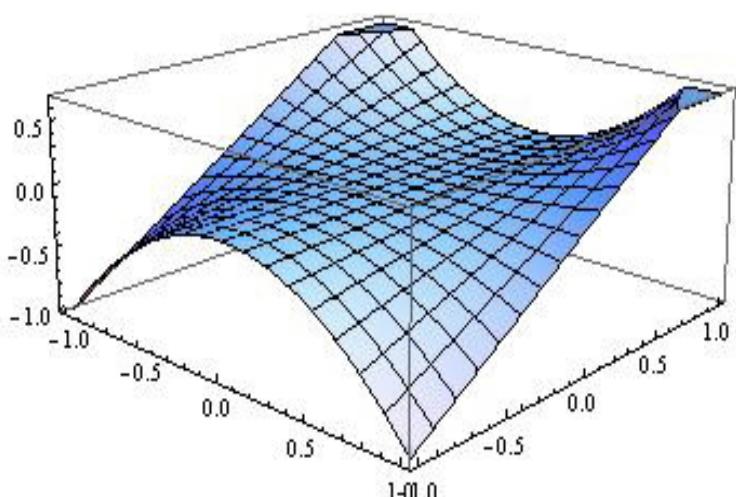
Şekil 4.3 $L_{0.1}(f; x, y) = \frac{1}{5}y + x^2y$, $-1 \leq x, y \leq 1$



Sekil 4.4 $L_{0.01}(f; x, y) = \frac{1}{50}y + x^2y, -1 \leq x, y \leq 1$



Sekil 4.5 $L_{0.0001}(f; x, y) = \frac{1}{5000}y + x^2y, -1 \leq x, y \leq 1$



Sekil 4.6 $f(t, s) = t^2s, -1 \leq t, s \leq 1$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Üçüncü bölümün ilk kısmında Taberski (1964) tarafından verilen üç parametreye bağlı lineer, konvolüsyon tipli iki katlı singular integral operatör ailesinin çekirdeği radyal olarak alınarak elde edilen operatörün $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna süreklilik noktasında, d -noktasında, Lebesgue noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılığı incelenmiştir. Bölümün ikinci kısmında ise ilk kısmında noktasal yakınsaklılığı incelenen operatörün $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklık hızı incelenmiştir. Ayrıca, sonuçlar Mathematica 7 yardımıyla elde edilen nümerik hesaplamalarla desteklenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında Taberski (1964) tarafından verilen üç parametreye bağlı lineer, konvolüsyon tipli iki katlı singular integral operatör ailesinin çekirdeği radyal olarak alınarak elde edilen operatör ailesinin $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna süreklilik noktasında Lebesgue noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklılığı incelenmiştir. Bölümün ikinci kısmında ise operatör ailesinin $f \in L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Lebesgue noktasında yakınsaklık hızı incelenmiştir. Ayrıca, sonuçlar Mathematica 7 yardımıyla elde edilen nümerik hesaplamalarla ve grafiklerle desteklenmiştir.

Singüler integral operatörler matematik, fizik mühendislik ve tıp gibi alanlarda geniş uygulama alanına sahiptir. Ayrıca, iki katlı konvolüsyon tipli singüler integral operatörler Fourier analiziyle dolayısıyla da tipta çok kullanılan manyetik rezonans görüntüleme (MRI) cihazlarının çalışma prensibi ile yakından ilgilidir. Bu tezde özel olarak radyal tipte çekirdeğe sahip singüler integral operatör ailesi dikkate alınmıştır. Literatüre bakıldığından radyal tipte çekirdeklerin en sık kullanılan çekirdeklerden biri olduğu kolaylıkla görülebilir. Gauss-Weierstrass çekirdeği bu tipteki çekirdeklere verilebilecek en iyi örneklerden biridir. Fonksiyonların karakteristik noktalarda temsiline ilişkin problem pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Tek değişkenli, 2π periyotlu ve integrallenebilen fonksiyonlara karakteristik noktalarında yaklaşımda öne çıkan bazı çalışmalar Taberski (1962a), Gadjiev (1968) ve Rydzevska

(1973) tarafından verilmiştir. İki değişkenli, her bir değişkenine göre 2π periyotlu ve integrallenebilen fonksiyonlara karakteristik noktalarında yaklaşımda öne çıkan bazı çalışmalar ise Taberski (1964), Taberski (1962b) ve Rydzewska (1974) tarafından verilmiştir. Bu tezde dikkate alınan integral operatör ise son yıllarda Yılmaz (2010) ve Serenbay vd. (2014) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalarda sırasıyla iki değişkenli, her bir değişkenine göre 2π periyotlu ve integrallenebilen fonksiyonlara ve keyfi bir $\langle -a, a; -b, b \rangle$ bölgesinde integrallenebilen fonksiyonlara karakteristik noktalarında yaklaşımla ilgili sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, ağırlıklı anlamda Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlara karakteristik noktalarında yaklaşımla ilgili öne çıkan bazı çalışmalar ise Alexits (1960), Mamedov (1963) ve Taberski (1976) tarafından verilmiştir. Dolayısıyla, yukarıda ifade edilen sebeplerden ötürü bu tezde elde edilen sonuçların singüler integral teorisinin hem teori hem de uygulama alanına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Alexits, G. 1960. Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 307 p., Budapest.
- Bardaro, C. 1984. On approximation properties for some classes of linear operators of convolution type. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 33; 329-356.
- Bochner, S. and Chandrasekharan, K. 1949. Fourier Transforms. Vol. 19, Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 219 p., Princeton.
- Butzer, P.L. 1960. Representation and approximation of functions by general singular integrals I_α and I_β . *Indag. Math.*, 22; 1-24.
- Butzer, P.L. and Nessel, R.J. 1971. Fourier Analysis and Approximation. Vol. 1, Academic Press, 553 p., New York, London.
- Clarkson, J.A. 1933. On double Riemann-Stieltjes integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39 (12); 929-936.
- Clarkson, J.A. and Adams, C. R. 1933. On definitions of bounded variation for functions of two variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35 (4); 824-854.
- Dirac, P.A.M. 1958. The Principles of Quantum Mechanics (4th ed.). Oxford Univ. Press, 314 p., London.
- Faddeev, D.K. 1936. On the representation of summable functions by means of singular integrals at Lebesgue points. *Mat. Sbornik*, 1 (43), no. 3; 351-368.
- Fatou, P. 1906. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.*, 30 (1); 335-400.
- Fejer, L. 1911. Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 28; 63-104.
- Fichtenholz, G.M. 1918. Theory of depending on parameter primary definite integrals (in Russian). Ph. D. Thesis, St. Petersburg State Univ., Research Institute of Mathematics and Mechanics, St. Petersburg.
- Fréchet, M.R. 1910. Extension au cas des intégrals multiples d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 10 (4); 241-256.
- Gadjiev, A.D. 1963. On the speed of convergence of a class of singular integrals (in Russian). *Izv. Akad. Nauk Azerbaïdžan. SSR Ser. Fiz.-Mat. Tehn. Nauk*, no. 6; 27-31.
- Gadjiev, A.D. 1968. The order of convergence of singular integrals which depend on two parameters. In: Special Problems of Functional Analysis and Their Applications to the Theory of Differential Equations and the Theory of Functions. Izdat. Akad. Nauk Azerbaïdžan. SSR., 40-44, Bakü.

- Gahariya, K.K. 1951. The representation of a function of two variables at Lebesgue points by singular double integrals. *Soobščeniya Akad. Nauk Gruzin SSR.* (in Russian), 12; 257-264.
- Ghorpade, S.R. and Limaye, B.V. 2010. *A Course in Multivariable Calculus and Analysis*. Springer, 475 p., New York.
- Hobson, E.W. 1921. *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*. Vol. 1, Cambridge University Press, 671 p., England.
- Jawarneh, Y. and Noorani, M.S.M. 2011. Inequalities of Ostrowski and Simpson type for mappings of two variables with bounded variation and applications. *Transylv. J. Math. Mech.*, 3 (2): 81–94.
- Labsker, L.G. and Gadzhiev, A.D. 1962. On some classes of double singular integrals (in Russian). *Izv. Akad. Nauk Azerbaidžan. SSR Ser. Fiz.-Mat. Tehn. Nauk*, no. 4; 37–54.
- Lebesgue, H. 1904. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, 138 p., Paris.
- Lebesgue, H. 1909. Sur les intégrales singulières. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 3*, 1; 25-117.
- Lebesgue, H. 1910. Sur l'intégration des fonctions discontinues. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 27; 361–450.
- Lenze, B. 1989. On multidimensional Lebesgue-Stieltjes convolution operators. In: *Multivariate approximation theory, IV* (Oberwolfach, 1989), Internat. Ser. Numer. Math., 90, Birkhäuser, 225-232, Basel.
- Lu, S. 1966. Double singular integrals and linear summation of Fourier series. *Acta Math. Sinica* 16; 314–327 (in Chinese); translated as *Chinese Math. Acta*, 8; 334–347.
- Mamedov, R.G. 1955. Weighted approximation in the space $L_p(-\infty, \infty)$ (in Russian). *Trudy Azerbaidžan. Gos. Ped. Inst. Lenin.*, 2; 154–158.
- Mamedov, R.G. 1963. On the order of convergence of m-singular integrals at generalized Lebesgue points and in the space $L_p(-\infty, \infty)$ (in Russian). *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, 27 (2); 287-304.
- Mamedov, R.G. 1965a. A generalization of an inequality of I. P. Natanson and the order of convergence of singular integrals (in Russian). *Azerbaidžan. Gos. Univ. Učen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, no. 5; 24–33.
- Mamedov, R.G. 1965b. A study of orders of convergence of one-dimensional and multidimensional singular integrals. In: *Studies in Theory of Differential Equations and Theory of Functions* (in Russian). Izdat. Akad. Nauk Azerbaidžan. SSR, 92-108, Bakü.

- Mamedov, R.G. 1967. Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yaklaşması. Azerbaycan Devlet Neşriyatı, 216 s., Bakü.
- Murray, J.D. 1984. Asymptotic Analysis (2nd ed.). Applied Mathematical Sciences 48. Springer-Verlag, 164 p., New York.
- Natanson, I.P. 1940. Sur un procédé de sommation des intégrales de Fourier. Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S., 7 (49); 313–320.
- Natanson, I.P. 1960. Theory of Functions of a Real Variable. Vol. 2. Translated from the Russian by Leo F. Boron. Frederick Ungar Pub. Co., 265 p., New York.
- Neri, U. 1971. Singular Integrals. Notes for a course given at the Univ. of Maryland, College Park Md., 1967. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 200. Springer-Verlag, 272 p., Berlin, New York.
- Nessel, R.J. 1966. Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables, III, radial kernels. Indag. Math., 29. Ser. A., 65-73.
- Romanovskii, P.I. 1932. Quelques considérations sur la théorie des intégrales singulières. Math. Zeitschrift, 34; 35-49.
- Rydzewska, B. 1973. Approximation des fonctions par des intégrales singulières ordinaires. Fasc. Math., 7; 71-81.
- Rydzewska, B. 1974. Approximation des fonctions de deux variables par des intégrales singulières doubles. Fasc. Math., 8; 35-45.
- Serenbay, S.K., Dalmanoğlu, Ö. and İbikli, E. 2014. On convergence of singular integral operators with radial kernels. In: Approximation Theory XIV: San Antonio 2013, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 83, Springer, 295-308, Cham.
- Sikkema, P.C. 1983. Approximation with convolution operators depending on two parameters. In: Approximation Theory, IV (College St., Tex.). Academic Press, 679-684, New York.
- Siudut, S. 1988. On the convergence of double singular integrals. Comment. Math., 28; 143-146.
- Siudut, S. 1989. A theorem of Romanovskii type for double singular integrals. Comment. Math., 28; 355-359.
- Siudut, S. 1990. Generalizations of Natanson's lemma. Comment. Math. Prace Mat., 29 (2); 277–286.
- Siudut, S. 1994. Some remarks on double singular integrals. Comment. Math. Prace Mat., 34; 173–181.
- Stein, E.M. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, 287 p., New Jersey.

- Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton University Press, 334 p., New Jersey.
- Taberski, R. 1962a. Singular integrals depending on two parameters. Prace Math., 7; 173-179.
- Taberski, R. 1962b. Some theorems on double integrals over rectangles. Ann. Polon. Math., 11; 209-216.
- Taberski, R. 1964. On double integrals and Fourier series. Ann. Polon. Math., 15; 97-115.
- Taberski, R. 1976. On double singular integrals. Comment. Math. Prace Mat., 19 (1); 155–160.
- Tandori, K. 1954. Über die konvergenz singularer integrale. Acta Sci. Math., 15; 223-230.
- Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen veränderlichen. Sitzungsberichte der Kniglich Previschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 633-639 and 789-805.
- Yılmaz, M.M. 2010. Üç parametreye bağlı iki katlı singüler integrallerin yakınsaklılığı. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 78 s., Ankara.
- Yılmaz, M.M., Serenbay, S.K. and İbikli, E. 2011. On singular integrals depending on three parameters. Appl. Math. Comput., 218 (3); 1132-1135.
- Zygmund, A. 1959. Trigonometric Series, I. Cambridge University Press, 747 p., London.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gümrah UYSAL

Doğum Yeri : Adapazarı

Doğum Tarihi : 29/10/1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Şehit Yüzbaşı Halil İbrahim Sert Lisesi (Y. D. A.) (2002)

Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans : Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik
Anabilim Dalı (2010)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Karabük Üniversitesi (2009-)

Yayınları:

SCI-E Yayınlar

Uysal, G., Yılmaz, M.M., İbikli, E. A study on pointwise approximation by double singular integral operators. *J. Inequal. Appl.* 2015:94, 1-10.

Hakemli Dergiler

Uysal, G., Yılmaz, M.M., Some theorems on the approximation of non-integrable functions via singular integral operators. *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 18 (2015), no. 2, 241-251.

Uysal, G., İbikli, E., Further results on approximation by double singular integral operators with radial kernels. *J. Pure Appl. Math. Adv. Appl.* 14 (2015), no. 2, 151–166.