PLATON'UN ARİTMETİK FELSEFESİ*

Andres WEDBERG

Dr. Hüseyin Gazi TOPDEMİR**

Pozitif tam sayılar aritmetiğinin modern aksiyomatik gelişimi, bize bu aritmetiğin, tıpkı geometri gibi, iki ayrı boyutu olduğunu gösterdi. Bir taraftan, temel kavramları değişkenler olarak düşünülen soyut aritmetik vardır. Aritmetiğin belli bir aksiyomatizasyonundaki aksiyomlar, bu değişkenler üzerine belirli bir koşul yükler ve sözkonusu koşulu yerine getiren herhangi bir kavramlar öbeği, çıkarsanabilir bir aritmetiksel teoremin bu aynı değişkenler üzerine yüklediği koşulu da, zorunlu olarak yerine getirmelidir. Soyut pozitif tamsayılar aritmetiğini doğrulayan sınırsız sayıda pek çok farklı kavram öbekleri olduğunu biliyoruz. Bununla birlikte, öte yandan, doğrulayan bu kavram öbekleri arasında, tabiri caizse, ayrıcalıklı bir konumu işgal eden *bir* küme vardır. Ya da diğer bir deyişle, soyut aritmetiğin değişkenlerinin tikel kavramların yer değiştirilmesi suretiyle elde edilen uygulamalı aritmetik içinde ve geride kalan tüm kavram öbeklerinden ayrılan bir kavram öbeği vardır. Bir başka deyişle, bu, sayı saydığımız zaman, örneğin "burada 2 arabanın orada 3 arabanın var olduğu"nu ve "onların birlikte 5 araba ettiği"ni gözlemlediğimiz zaman, hem gündelik dilde ve hem de bilimde kullandığımız aritmetiktir. Normal, gündelik aritmetiğin "2+3=5" önermesindeki "2", "3", "5" sayıları, bu türden emprik sayısal önermelerdeki aynı anlama sahiptir. Matematiğin temellerini konu alan modern araştırmalar, hiçbir aksiyomatizasyonun, saymada kullanılan pozitif tam sayılarla ilgili bütün bir aritmetiksel doğruluğun bir parçasından daha fazlasını kapsayamayacağını göstermiştir. Tam aksiyomatizasyondan kaçınan bu özel uygulamalı aritmetiğe "doğal aritmetik" adını verelim.

Doğal aritmetiğin özüyle ilgili olarak, günümüz matematik felsefecileri arasında fikir birliği yoktur. David Hilbert'ten esinlenen For-

(*) Adı geçen yazarın 1955 yılında yayımlandığı *Plato's Philosophy Mathematics* (Stockholm, Almqvist) adlı kitabın beşinci bölümünün Türkçeye çevirisidir.

(**) A.Ü. D.T.C. Fakültesi.

malistler onu bir şekilde yararlı olsalar da, anlamsız formüllerden oluşan bir sistem olarak görür. Gottlob Frege ve Bertrand Russell'ı izleyen diğerleri ise, doğal aritmetiğin herhangi bir önermesini salt mantıksal terimlerle dile getirmenin olanaklı olduğunu düşünür. Onlar için doğal aritmetik saf mantığın ve dolayısıyle de analitik önermeler sisteminin bir parçasıdır. Son olarak sentetik apriori önermeler sistemi olarak Kantçı doğal aritmetik görüşü aralarında L.E.J. Brower'ın ön plana çıktığı sezgiciler tarafından hâlâ savunulmaktadır.

Platon zamanında aritmetik henüz aksiyomatik bir biçim almış değildi ve Platon soyut aritmetik hakkında hiçbir şey bilmiyordu. Bir filozof olarak onun "açıklamaya çalıştığı aritmetik" bütünüyle bizim doğal aritmetik adını verdiğimiz aritmetikten ibaretti. Platon için aritmetiğin önermelerinin tam tamına diğer bilimsel önermeler kadar anlamlı olduğu apaçık birşeydi. Dahası o, doğal aritmetiğin mutlak doğruluğundan hiçbir zaman ciddi olarak kuşku duymadı. Mantıksal bir realist olarak da, Platon "1", "2", "3", ... vb. sayıların belirli soyut gerçeklikleri, örneğin pozitif tam sayıların kendilerini gösterdiği konusunda ikna olmuştu. Platon'u asıl ilgilendiren şey, Pozitif tam sayıların, "ne türden soyut gerçeklikler olduğu" sorusuyla belirlenen problemdi. Bu problem üzerinde düşünme, bizim yorumumuz doğruysa eğer, onu biri Matematiksel sayılar kuramı ve diğeri ise İdeal Sayılar kuramı olmak üzere iki farklı kuram ortaya koymaya götürdü.

Platon'un aritmetik felsefesi, onun geometri felsefesine, çok büyük bir koşutluk sergiler görünür. Platon'un görüşlerinin önemine ya da onu bu görüşleri ileri sürmeye götüren motivlerin neler olduğuna ilişkin derin ve ayrıntılı bir analize girişmeksizin, aritmetiğin özü üzerine, benim Platon'a atfedilebileceğine inandığım, belirli önermeleri sıralayacağım.

I- Biri "popüler" ve diğeri de "felsefî" bir disiplin olmak üzere iki tür aritmetik vardır. (i) Popüler aritmetik, duyusal nesneler hakkında savlar ileri sürer: O, "iki ordu, iki öküz, iki çok büyük şey, iki çok küçük şey" gibi şeylerden sözeder[1]. Popüler geometri gibi, popüler aritmetik de en iyi durumda yaklaşık bir doğruluk değerine sahiptir. (ii) Diğer taraftan, felsefî aritmetik, ruhu soyut sayı hakkında akıl yürütmeye zorlar ve gözle görülebilir, elle tutulabilir cisimlerin sayılarını ele almayı reddeder[2]. Felsefî aritmetiğin önermeleri mutlak bir doğruluğa sahiptir.

1 *Philebus* 56 d-e. Krş. *Devlet* 525 b-d. *Yasalar* 819 a-c.
2 *Devlet* 525 d. Krş. *Theaetetus* 195 d- 196 b.

II- Aristoteles'in "Matematiksel Sayılar" adını verdiği buna karşın Platon'un "İdeal Sayılar" dediği İdeal aritmetiksel varlıkların iki türü vardır.

II- (A) Matematiksel sayılar şu özelliklerle karekterize edilir:

(1) Bu sayılar belirli ideal "birimler" den ya da "1'ler"den meydana gelir. N matematiksel sayısı bu türden birimlerin N kümesidir: 2, ikinin bir kümesidir, 3, üçün bir kümesidir v.b.

(2) Böyle ideal birimlerden ya da 1'lerden sınırsız bir miktar varolur.

(3) İdeal birimler arasında hiçbir farklılık yoktur: Böyle iki birim birbirlerinden bütünüyle ayırdedilemezdir.

(4) İdeal bir birim, bir parçalar ya da bileşenler ya da karekteristikler çokluğu içermez: Böyle bir birimi hangi bakış açısında alırsak alalım o, bir ve yalnızca Bir'dir.

(5) Her Matematiksel sayı için sonsuz sayıda kopya vardır. Sonsuz sayıdaki ideal birimlerden N sayıda birimi sonsuz sayıda seçenek içinde seçebiliriz. Her seçim bize N Matematiksel Sayısının bir tasarımını verir.

(6) İlkel ya da temel aritmetiksel kavramlar basit küme kuramsal kavramlardır.

(Matematiksel Sayılar öğretisi içinde toplama, çarpma ve eşitlik gibi temel kavramların tam olarak nasıl yorumlandığı konusunda bir takım kuşkular olabilir. Toplamayla ilgili olarak Platon ve Aristoteles' in dili çoğu zaman, iki Matematiksel Sayıyı toplamanın yalnızca onların küme kuramsal toplamını ortaya koymak olduğu izlemini yaratır.

(7) Matematiksel Sayılar aritmetik tarafından incelenen sayılardır. Aritmetiğin kavramları onlar için ve yalnızca onlar için tanımlanır.

(II)- (B) İdeal Sayılar aşağıdaki özelliklerle karekterize edilirler:

(1) Onlar, ideadırlar, yani (Birlik) İkilik, Üçlük v.b.g. idealarıdır.

(2) İdealar olarak İdeal Sayılar basit entite ya da varlıklardır.

(3) Özellikle, bunlar Matematiksel Sayılar gibi birim kümeleri değillerdir.

(4) Daha önceden belirtildiği gibi, aritmetiğin küme kuramsal türden olan kavramları, İdeal Sayılar için tanımlanmaz. Öyleyse, aritmetiğin önermeleri İdeal Sayılarla ilgili değildir. Örneğin, 2 3=5 denklemi yalnızca, 2 ve 3 Matematiksel Sayılarının toplamının 5 Matema-

tiksel Sayısını doğurduğunu söyler; o, aritmetiksel toplamın kendisi disi için tanımlanmamış olduğu İdeal Sayılara ilişkin olarak hiçbir şey söylemez. Aynı şekilde, 2 < 5 aritmetiksel önermesi yalnızca 2 ve 5 Matematiksel Sayıları için geçerlidir. İdeal Sayılar için < (küçüktür) ilişkisi tanımlanmamıştır.

(5) Bununla birlikte, (1), 2, 3, ... diye düzenlenen İdeal Sayılar arasında, kendisiyle onların Matematiksel Sayılar dizisine koşut olan bir seri içinde düzenlendikleri, bir öncelik ilişkisi vardır.

(6) İdeal Sayıların araştırılması genel İdealar kuramının, yani Diyalektiğin işidir.

III. Matematiksel sayılar, ideal sayılarla duyusal şeyler ya da duyusal şeylerin toplamları arasındaki "ara nesneler"dir. Aristo' dan kaynaklanan bu formülasyon, aşağıdaki şemada somutlaşan önermeleri ifade ediyor görünür.

IV. Platon'un ara matematiksel sayılara inanma en azından

İdeal Sayılar

Yetkin Örnekleme — Yetkin Olmayan Örnekleme

Matematiksel Sayılar –Yetkin Olmayan– Duyusal Benzer Şeylerin Toplamları

kısmen, onun ara geometrik nesneler öğretisini benimseme nedenlerine, tabii ki onu bilinçli olarak uyguladıysa eğer, benzerdir. Platon aritmetiğin önermelerinin doğru olduğundan ancak, Aristo'nun sözlerinden alıntı yapacak olursak, onların duyusal şeyler için doğru olmadığından emindi[3]. Şu halde onlar başka bir şey için doğru olmalıdırlar ve aritmetiğin önermelerinin kendileri için doğru olduğu bu şeyler Matematiksel Sayılardır.

Sanırım, bu argümanın mantığı aşağıda olduğu gibi daha açık hale getirilebilir:

1. Aritmetik doğrudur.

3 *Metafizik* 1090 a 35–37.

2. Aritmetiğin doğruluğu tamamen Birlik, İkilik v.b. idealarından yani İdeal Sayılardan gerçek anlamda pay alan nesnelerin var oluşunu gerektirir.

3. Duyular dünyasında ideal sayıların yetkin örnekleri yoktur. Öyleyse;

4. İdeal sayıların yetkin örnekleri duyular dünyasının dışında bir yerde var olur. İdeal Sayıların bu yetkin ideal örnekleri matematiksel sayılardır.

V. Felsefi geometri gibi, felsefi aritmetik de ezeli ve ebedi varlık dünyasıyla ilgilenir. Platon'un çağdaş geometride kullanılan "saçma" dil hakkında[4] söyledikleri şu halde aritmetik dilini de kapsayacak şekilde düşünülmüş olmalıdır. Biz, aritmetikte, sözcüğün tam ve gerçek anlamı içinde konuşulduğunda, iki sayıyı birbirine "ekleyip" ve bu şekilde onların toplamlarını meydana getirmeyiz: İki sayının toplamının ezeli ve ebedi bir varoluşu vardır; ve biz zihnin gözünü söz konusu toplama doğru yöneltebiliriz. Demek ki, Aristo'nun *Fizik* adlı eserinde yer alan aktüel aritmetiksel sonsuz sayıntısına ilişkin eleştirisi, muhtemelen Platoncu bir öğretiye ilişkin bir eleştiri olarak düşünülmüştür. Aristo'ya göre sayı dizisi yalnızca bize verilen sayı her ne olursa olsun, bizim daima daha büyük bir sayı **meydana getirebilmemiz** anlamında sonsuzdur[5]. Bu, tamı tamına *Devlet* diyalogunun yazarının, yani Platon'un eleştireceği uygun olmayan aritmetiksel dil türüdür. O, öyle görünmektedir ki, bunun yerine, verilen her sayı için daha büyük bir sayının **var olduğunu** dile getirecekti. Platon'un geometri felsefesindeki, bizim birer öneri olarak sunduğumuz VI. ve VII. tezlerin onun aritmetik felsefesinde benzerleri vardır.

VI. Felsefi aritmetik, kendilerini kanıtlamaksızın doğru kabul ettiği belli varsayımlardan (aksiyonlar) yola çıkan tümdengelimsel bir bilimdir.

VII. Bu varsayımlar Diyalektik tarafından ilk ilke, başka bir deyişle, iyi ideası temeli üzerinde doğru kılınırlar.

Benim birer öneri olarak sunduğum I ve VII oldukça geniş bir çerçeve içinde Platon'un aritmetik felsefesinin, en olasılıklı recontsrüksiyonu olduğuna inandığım şeyi oluşturur. Bu tezler kendimizi Platon'un düşüncesini anlamış kimseler olarak görmezden önce çözülmek durumunda olan bir dizi problem doğurur.

4 *Devlet* 527 a.
5 Krş. *Fizik* 207 b, 2-15.

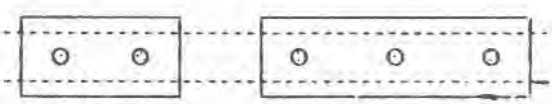
a) Birbirine koşut iki sayı türü bulunduğu sayıntısı temelsiz görünmektedir. İdeal Sayılar **birlik, ikilik, üçlük** vb. idealarıdır. Eğer bir kimse idealar kuramının temsil ettiği türden bir mantıksal realizm kabul ederse, o kimse bu İdeal Sayıların bir postula olarak öne sürülmesini de kabul edebilir. Fakat niçin Platon buna ek olarak matematiksel sayıları da varsayar? Bunun açık bir nedeni daha önce II, (B), (4)'de belirtilmişti: Platon'un görüşüne göre aritmetiğin kavramları İdeal Sayılar için tanımlanmaz. Ancak bu kez Platon'un niçin söz konusu görüşü savunduğu sorusu ortaya çıkar.

b) Kendilerinden Matematiksel Sayıların meydana geldiği ideal birimler ne tür varlıklardır? Onlarla ilgili en temel bilgi, bunların birbirlerinden ayırdedilemez oldukları ve onlardan her birinin parçalarını özsel bir çarpım olmaksızın, mutlak olarak "Bir" olduğudur. Bu betimleme en azından muğlak ve karanlıktır. Platon, bu birimlere niçin ve ne anlamda böylesi nitelikler yükledi?

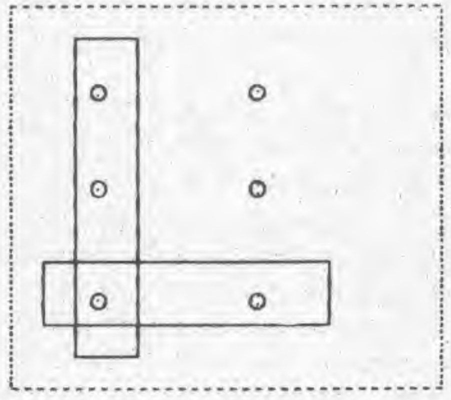
c) Diğer soru II, (A), (6)'yla ilgilidir. Platon toplama, çarpma ve eşitlik gibi aritmetiksel kavramları tam olarak nasıl anladı? O buna uygun olarak, örneğin "2+3=5" gibi aritmetiksel bir önermeyi nasıl yorumladı?

d) Niçin Platon yalnızca matematiksel sayıların İdeal Sayılardan gerçek anlamda pay aldığını düşünmeye eğimliydi? Örneğin 2 Matematiksel Sayısı İkilik ideasını temsil etmek bakımından, diyelim ki Sokrates ve Protogoras'tan oluşan çiftten (ikili) niçin iyi bir konumdadır. Geometri söz konusu olduğundan Platon'un Euclidci idealarını duyusal nesnelerde tam anlamıyla ve doğru bir biçimde örneklenmediklerini dile getirdiğini görmek kolaydır. Söz konusu sav apaçık olgulara ilişkin bir gözlemi kaydeder görünür. Oysa buna karşılık gelen aritmetikle ilgili sav, bir saçmalık olarak görünür.

İşe II. ve III. sorularla başlayalım. Platon, temel aritmetiksel kavramları, onları tanımlamaksızın, oldukça kuşkulu bir biçimde sezgisel olarak anladı. Eğer, biz, Yunan matematikçilerinin yaptığı gibi, birimleri noktalar ile gösterirsek, 2 ve 3 sayılarını sürekli doğrular tarafından sınırlanmış iki nokta kümesi olarak düşünebiliriz:



Bu durumda, 2'nin ve 3'ün toplamı noktalı çizgi içinde kalan küme olarak düşünülebilir. Aşağıdaki şekil benzer bir biçimde, bu sayıların çarpımını gösterir:



Bu Euclid'in toplama ve çarpmayı işte bu şekilde anladığı, (Krş. *Elementler*, kitap VII, tanım 15), ve Platon'un bundan farklı bir biçimde düşündüğüne inanmak için hiçbir neden yoktur. Biz bu sezgisel düşüncelerin işaret ettiği tanımları daha açık hale getirmeye çalışabiliriz. Çünkü, sınırsız sayıda çok matematiksel 2'ler, 3'ler vb. olduğundan biz "2", "3" . . . sayılarının, 2'lerin, 3'lerin . . . . her hangi birini muğlak bir biçimde gösterdiğini düşünürüz. 2+3=5 gibi bir ifadeyi, biz "2"'nin ve "3"'ün toplamının sayısal olarak 5 ettiğinin ifadesi olarak yorumlayacağız. Verilen bir sayısal eşitlik (birimlerin sayısının aynı olduğu) ilişkisini, biz m+n toplamını, ortak hiçbir birimi bulunmayan, n'e eşit bir küme ile m'e eşit bir kümenin birleştirilmesiyle elde edilmiş bir küme olarak tanımlayabiliriz. m ile n'nin çarpımının sonucu da, benzer şekilde m'deki her bir birimin n'ye eşit bir küme ile bağlılaşımı ve hiçbir ortak birimi olmayan bu iki kümeden oluşturulan n-sayılı kümelerinin birleştirilmesiyle elde edilen bir küme olarak açıklanabilir. (Tanımların şüpheli oluşu zararsızdır. Çünkü kümelerin spesifik seçimleri aritmetiksel ifadelerin doğruluk değeriyle ilgili değildir.)

Eğer bu açıklama Platon'un görüşüne uygunsa, o haklı olarak, birimlerin, aşağıdaki anlamda, ayırdedilemez olduğunu söyler. 2+3=5 gibi bir ifadenin doğruluk değeri, 2, 3 ve 5 sayılarını belirtmemizi sağlayan, ikili, üçlü ve beşli birimlerle aynı kalır. Eğer böyle bir ifade her ne olursa olsun doğruysa, bu ifade içerisinde, birimlerin farklı n-sayılı kümelerinin ifade ettiği, aynı "n" sayısının farklı oluşumuna izin versek bile, o doğru olur. Bundan dolayı, aritmetiğin bu görüş noktasında, bir birimi diğerinden ya da sayısal olarak eşit olan birimlerin bir kümesini diğerinden ayırt edecek hiç bir şey yoktur. Aritmetiğin, sınırsız sayıda pek çok farklı birimlerin varlığını gerektirdiği doğrudur. Fakat bir birimle diğeri arasındaki bütün farkın, bu fark aritmetik terimlerle ifade edilebilir olanın ötesine düşsede, (varsayıların temel aritmetiksel vokabülerin toplama, çarpma ve eşitlik için sayılar ve simgelerden ibaret olduğu söylenebilir.)

Her ne kadar, ben yukarıdaki açıklamanın Platon'un görüşünün makul bir rasyonalizasyonu olduğuna inanıyorsam da, kuşkusuz ki, bu da bir rasyonalizasyondur. Çünkü Platon belirsiz bir değişkenin net bir tanımını yapmamış ve onun matematiksel sayılarla ilgili aritmetik yorumu da oldukça belirsiz kalmıştır. Çünkü o formelleşmiş bir aritmetiksel dili gerçekleştirememiştir; belirgin bir aritmetiksel terimle ifade edebilme ya da aritmetiğin görüş noktasından ayırt edilemez olma kavramına sahip olamamıştır. Ben onun, daha sonraki düşüncesi ve "mutlak ayırdedilemezlik" arasındaki farkı bütünüyle kavradığından ve aynı zamanda, son derece çok olan birimlerin, tek özdeş bir "bir"in değişik pek çok görünümleri olduğuna dikkat ettiğinden şüpheliyim. Birimlerin 2 n-sayılı kümeleri aynı şekilde tek bir özdeş n'in belirtisi olarak görünecektir. Ve bizim daha önceki toplama ve çarpma tanımlarımız daha kolay (fakat saçma) tanımlamalara yönelik bir bozulmaya uğrayacaktır: $m+n$, m ve n'nin birleştirilmesiyle elde edilmiş bir kümedir; $m \times n$, m'deki birimlerin pek çok kere m'deki birimlerin n'e bağlanmasıyla elde edilmiş bir kümedir. $2+3=5$ ifadesi kısaca şu anlama gelir: "2 ve 3'ün birleştirilmesiyle elde edilmiş bir küme 5 kümesidir". Platon'un dili (özellikle *Phaedo*'nda), aynı şekilde Aristo'nun da, onun aritmetiksel ifadeleri bu yalınlaştırılmış fakat mistik bir tarz içerisinde yorumlama eğiliminde olduğunu göstermektedir. Yalınlaştırılmış ifade biçimi, tam tersine, mutlak anlamda, birimlerin ayırt edilemezliğinin olanaksızlığını gerektirecektir. Eğer, a ve b gibi iki birim için, n, $n+1$ ile aynı anda meydana gelen b ile artırıldığı kadar a ile de artırılırsa, o zaman a ve b arasında herhangi bir fark olamaz. Sanırım, Platon'un kendi birimlerini en azından kısmen, ayırt edilemez kabul etmesi mümkündür. Çünkü o, kendi matematiksel sayı kuramının gereksinim duyduğu aritmetiksel kavramların tanımlarını (dâha önce belirtilen) belirlemekte başarısız olmuştur.

ARAŞTIRMA

JOURNAL OF THE DEPARTMENTS OF PHILOSOPHY,
PSYCHOLOGY, SOCIOLOGY FACULTY OF LETTERS,
ANKARA UNIVERSITY

Vol. XV
1994

Adres (Address): Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi
Felsefe-Sosyoloji-Psikoloji Bölümleri
06100 Ankara, Türkiye

Fiyatı : 110.000 TL.