MATEMATİK RÖNESANSINA İSLAM DÜNYASININ ETKİSİ

Yrd. Doç. Dr. Melek DOSAY

Ortaçağda en parlak dönemini yaşayan İslâm uygarlığına ait bilim eserleri XII. yüzyılda sistemi; ve yoğun tercüme faaliyetleri ile Avrupa'ya büyük ölçüde aktarılmıştı. "XII. yüzyıl Rönesansı" adı ile anılan bu dönem faaliyetlerinin hemen akabinde Latin Dünyasında özgün bilimsel çalışmalar başlamadı. Orijinal katkıların görülmesi genellikle Latinceye yapılan çevirilerin özümsenmesi ve eleştiri zihniyetinin oluşması sürecinin geçmesini beklemiştir. Cebir konusunda, bu adı taşıyan ilk kitabın yazarı Harezmi'nin *Cebir* kitabı XII. yüzyılda Latinceye tercüme edilen eserler arasında en başta gelenlerdendir. Ortaçağda Avrupa'da bu konuyu inceleyen ilk önemli matematikçi Leonardo Fibonacci XII. yüzyıl başlarında, Harezmi'nin *Cebir* kitabının etkisini açık biçimde yansıttığı *Lıber Abaci* adlı eserini kaleme almıştır. Bir başka incelemede* Fibonaeci'nin İslâm Dünyasından, özellikle Harezmi'den aldığı etkiler üzerinde ayrıntılı olarak durulmuştur. Burada, aynı etkinin Fibonacci'den sonra yaklaşık üçyüz yıllık bir kesintiyle Avrupa'da yeniden cebir konusunu canlandırıp ilerleten üç matematikçi, Pacioli, Cardano, ve Bombelli üzerindeki izlerini belirlemeye çalışacağız.

Pacioli 1494 yılında yayınlanan *Summa* adlı kitabında, XIV. ve XV. yüzyıllarda İtalyan abakistlerin başarılı çalışmalarından çok az söz ettiği için, Fibonacci ile Pacioli arasındaki yaklaşık üçyüz yıllık dönemde Avrupa'da cebir alanındaki çalışmaların durgun bir tempoda kaldığı sanılmıştır. Ancak son yıllarda yapılan araştırmalar durumun böyle olmadığını göstermiş, İtalya'da bu üçyüz yıllık dönem boyunca da özellikle ticari aritmetik (hesap) alanında önemli çalışmalar yapıldığını göstermeye yönelik incelemeler yoğunluk kazanmıştır[1].

* Bakınız; "Ortaçağ İslâm Cebirinin Latin Cebiri Üzerindeki Etkilerine Örnekler", *Bilim ve Felsefe Metinleri,* cilt 1, sayı 2.

1 Bakınız; R. Franci ve L. Toti Rigatelli, "Towards A History of Algebra From Leonardo of Pisa To Luca Pacioli", *Janus,* LXXII, 1-3,1985, s. 17-82; Warren Von Egmond "The Contributions of the Italian Renaissance to European Mathematics", *Symposia Mathematics,* cilt XXVII, Academic Press Landon and New York 1986, s. 63; Warren Von Egmond, "Pacioli'den Önce Avrupa'da Yüksek Dereceli Denklemlerin İncelenmesi", *Abstracts,* International Congress of History of Science, University of Califonia, Berkeley, 31 July-8 August 1985, Acts cilt 1 P. Md 3.

1500 yılı öncesinde Avrupa'da mevcut cebir bilgisi Chester'li Robert'ın yaptığı Harezmi Cebir'inin tercümesinin 1456 yılında Viyana'da Regiomontanus edisyonu, ve Fibonacci'nin *Liber Abacı* (1202) adlı kitabından ibaret idi. Bir de, Regiomontanus İtalya'ya gittikten sonra 1463-64 yılında Venedik'de keşfettiği Diophantos'un *Arithmetica* adlı kitabı vardı. İşte Avrupa'da matematiğin rönesansı sırasında bu iki gelenek ani ve hızlı bir gelişim geçirerek modern cebirsel analizin ortaya çıkışı ile neticelenmiştik. Bu geleneklerden ilki, yani Harezmi'nin *Cebir* kitabı XII. yüzyılda Latinceye tercüme edildikten sonra anlaşıldığına göre Fibonacci dışında XV. yüzyıla kadar Avrupa'da etkili olmamıştır. Bunu bize Cardano söylemektedir: "Aritmetik üzerine eser kaleme almış bütün Yunanlıları saymak uzun bir iştir. Yunanlılar kadar meşhur barbarlar da vardır, bunların arasında Planudes ve Nicolaus Rabda da vardır... Ve Arabistan'da cebir adlı sanatı kuran Harezmi vardı. Latinler arasında Leonardo Finobacci vardı... Finonacci'den sonra bu zayıf bilim yetersiz ya da başarısız biçimde intikal ederek Luca Pacioli'ye gelene kadar Allah'a kalmıştır."[3]

Luca Pacioli 1445 yılında Perugia'nın yaklaşık kırk mil kuzeyinde küçük bir ticaret kasabası olan Sansepolcro'da doğmuş ve 1517 yılında yine aynı yerde ölmüştür[4]. En önemli eseri olan *Sununa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* (1494) iki kısma ayrılır. Birinci bölüm aritmetik ve cebir ile, ikinci bölüm ise geometri ile ilgilidir. Pacioli yararlandığı kaynakları eserin ithaf bölümünde belirtmektedir. Birinci bölüm için Fibonacci'nin *Liber Abaci'si,* Jordanus, Parma'lı Blasius, ve Prosdocimo de Beldomandi yararlandığı kimselerdir. Bu bölümde üzerinde durulan konu cebir aracılığıyla problem çözümüdür, genel bir denklem teorisi kurulması amaçlanmamıştır.

İkinci kısım, yani geometri bölümü kaynakları ise Fibonacci'nin *Practica Geometricae'*si ve Arşimet'tir[5]. Başka kaynaklara göre de Pacioli'nin istifade ettiği matematikçiler öncekilere ilâveten Euclid, Boethius, Sacrobosco[6], ve Batlamyos'dur[7]. Bu kaynaklardan ve eserden anlaşıldığına göre *Summa* orijinal bir eser olmayıp, derleme mahiyetinde bir kitaptır. Ancak, böyle olmasına rağmen XVI. yüzyıl matematikçileri tarafından yaygın biçimde kullanılmıştır. Cardano *Practica Arithmetica*

2 Paul Lawrence Rose, *The Italian Renaissance of Mathematics,* Geneve 1975, s. 143.
3 Girolamo Cardano, *Opera Omnia,* Lyons 1663, X, 118; Rose, s. 143.
4 *Dictionary of Scientific Biography,* cilt X, s. 269-271.
5 Rose, s. 144.
6 *DSB, s.* 270.
7 Smith, *History of Mathematics,* cilt 1, New York 1958, s. 253.

(1539) adlı kitabının bir bölümünü *Summa'daki* hataları düzeltmeye ayırmış, Pacioli'ye olan borcunu da takdir etmiştir. Tartaglia'nın *General Trattato de numeri et misure* (1556-1560) adlı kitabı *Summa* tarzındaydı. Bombelli *Cebir* kitabına giriş bölümünde, Pacioli'nin Fibonacci'den sonra cebir bilimine ışık tutmuş ilk matematikçi olduğunu söylemiştir. Pacioli, Summa'nın girişinde bu kitabın, eski ve modern filozofların kitaplarından matematiğin temellerini biraraya getirme teşebbüsü olduğunu söylemektedir. Summa'nın önemi, daha sonraki yüzyılda cebir alanında kaydedilecek ilerlemeler için bir çatı, bir iskelet oluşturmuş olmasıydı.

Bologna Üniversitesi Rönesans İtalya'sının en seçkin matematik okuluydu. Matematik hocalarıyla meşhur olmuştu. Parma'lı Pelacani (1378-82, 1387-88), Giovanni Aurispa (1392-1400), Domenico Maria Novara (1483-1504), ve Luca Gaurico (1506-07), Scipione dal Ferro (1496-1526) hocalarından bazılarıydı. Scipione dal Ferro (1465-1526) üçüncü derece denkleminin çözümünü keşfini yayınlamamış olmasına rağmen, ölümünden sonra Cardano, Ferrari ve Bombelli bu çözümden haberdar idiler, ve öğrencisi Antonio Maria Fior bu çözümü öğrenince en meşhur matematik yarışmalarından biri ortaya çıktı. 1535 yılında Venedik'de bir problem çözümü müsabakası düzenlendi, burada Fior çeşitli üçüncü derece denklem tiplerinin çözümü için Niccolo Tartaglia'ya meydan okudu. Neticede Tartaglia bir çözüm bulmayı başardı. Tartaglia'nın başarısını, Milano'da *Practica Arithmeticae* (1539) adli kitabını yayına hazırlayan Girolamo Cardano (1501-76) işitti, ve bu sırrı öğrenme umuduyla onu davet etti. Tartaglia daveti kabul etti, ancak bulduğu çözümü yaymayı ilkin reddetti. Ancak sonunda bulduğu çözümü yaınmlayıncaya kadar metodunun gizli kalması şartıyla Cardano'nun isteğine razı oldu. Cardano ise bekleyemedi ve çözümü 1545'de Nuremberg'de *Ars Magna* adlı kitabında sahibini zikrederek yayınladı[8].

Ars Magna, yalnızca cebire hasredilmiş ilk büyük Latin kitabıdır, burada kübik denklemlerin çözümü dahil dördüncü dereceye kadar cebirsel denklemler teorisi sistemli biçimde ileri sürülmüştür[9]. Cardano da cebiri geometrik bir konu olarak ele alma alışkanlığından kurtulamamıştı. Üçüncü ve dördüncüden yüksek dereceli denklemlerin çözümlenebilir olduğunu kabul etmez, çünkü bunlar tabiata, yani Euclid uzayına aykırıdır[10].

8 Rose, s. 145.
9 Smith, s. 297.
10 Rose, s. 146.

XVI. yüzyılın en büyük cebircisi Bologna'lı Rafael Bombelli (1526-72) XIII. yüzyıl başında Pisa'lı Leonardo'nun başlattığı hareketin son temsilcisi idi. Bombelli'nin 1572 yılında yayınladığı *Cebir* kitabı Rönesansda yayınlanmış en sistematik eserdi ve Cardano'nun *Ars Magna* adlı kitabının yerini alması hedeflenmişti. Bu kitap üç kısma ayrılmıştır: İlki aritmetiğe (üs ve köklerin tanımları ve bunlarla işlemler) ayrılmıştı. İkinci kitap cebir ile ilgilidir, bilinmeyen nicelik ve üslerin tanımı ile başlar, dördüncü dereceye kadar cebirsel denklemler incelenmiştir. Üçüncü kitap, cebirsel metodun uygulanmasını gösteren alıştırmalar ihtiva eder. İkiyüzyetmişiki problem ve çözümü vardır, bu problemlerin yüzkırküçü Diophantos'un *Arithmetica'sından* alınmıştır. Öncellerinin kitapları birçok uygulamalı aritmetik problemi ihtiva etmesine rağmen, Bombelli'nin Cebir'inde bu tür hiç problem bulunmaz. Onunkilerin hepsi soyut problemlerdir. Bombelli üçüncü kitabın girişinde, çağının pratik matematikçilerinden ayrıldığını, onların farklı bir amaç ile yazdığını, bilimsel olmaktan ziyade pratik olduklarını, kendisinin ise yüksek aritmetiği (veya cebiri) eskilerin yolundan öğretmek amacında olduğunu söyler[11].

Pacioli'nin *Summa* adlı kitabı tarihsel açıdan önemlidir, çünkü XVI. yüzyılın ilk yarısında İtalya'da genel bir matematik kitabı hizmetini görmüş ve etkisi diğer Avrupa ülkelerine de uzanmıştır. Cebir bölümünün başında İslâm geleneğini izleyerek, bu konuda üç tür nicelik olduğunu, bunların cosa (x), censo (x^2), ve certo numero (sabit sayı) olup, işlemlerde ortaya çıkan nicelikleri tanımak için başka bir terime ihtiyaç olmadığını belirtmektedir. İslâm Dünyasında incelenen altı tip cebir denkleminin üç yalın çeşitini örneklerle Pacioli şöyle vermektedir:

(1) $ax^2=bx$, bir niceliğin dört ile çarpımı karesine eşit çıkıyor. Nicelik x olsun, $x^2=4x$, $x=4$.

(2) $ax^2=c$, bir niceliğin karesinin beş ile çarpımı kırkbeş çıkıyor.

$x.x=x^2$, $x^2.5=5x^2=45$, $45:5=9=x^2$, $x=3$.

(3) $bx=c$, bir niceliğin üçte birinin beş ile çarpımı yirmi yapıyor.

$(x/3).5=x.1(2/3)=20$, $20:1(2/3)=12=x$[12]

11 S.A. Jayawardane, "The Influence of Practical Arithmetics on the Algebra of Rafael Bombelli", *Isis,* cilt 64, 1973, s. 510-14.

12 Pacioli, *Summa de Arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita,* 1523, s. 144-147.

Bombelli, $ax^2=bx$ denkleminin $ax=b$ denklemine indirgeneceğini, bunun için denklemin her iki tarafının x'e bölünmesini söylüyor. Verdiği örnek denklem $10x^2=40x$. $10x=40$ denklemine dönüşüyor[13].

İslâm Dünyası cebircileri bu denklem tipinin çözümünü, $a=1$ olmak üzere $x=b$ olarak veriyorlar. Aynı "$x=b:a$, eğer $a=1$ ise $x=b$' dir" açıklaması Pacioli'de görülmektedir. Leonardo Fibonacci de *Practica Geometride* adlı kitabında bu denklem tipi için $x^2=4x$ örneğini vermiştir. Pacioli'nin bu örneği aynen Fibonacci'den aldığı düşünülebilir. Bombelli'nin ise kendinden önce toplanan bilgi birikiminden yararlanarak bu denklem tipinin çözümünü genelleştirerek kurala bağladığı sonucuna varmak makul gibi görünmektedir.

$ax^2=c$ denklem tipi için Bombelli'nin verdiği örnekler şöyle: $9x2=81$, $2x2=12$, $x^2+\sqrt{12}=4$, $\sqrt{2x^2+5}=5$.

Bu denklem tipinin çözümü karekök alma işleminden ibaret olup, $a=1$ değil ise önce $a=1$'e dönüştürmek gerekmektedir. İslâm Dünyası matematikçilerini, özellikle de Harezmi, Abu Kamil ve Kereci'yi izleyen Fibonacci'nin bu denklem tipi için verdiği örneği de Pacioli aynen almıştır.

$bx=c$ tipi yalın denklemi için İslâm geleneğini muhafaza eden Pacioli $x=c:b$ çözüm formülünü veriyor. Aynı çözüm yolunu izleyen Bombelli'nin verdiği örnekler şöyle:

$4x=20$, $16-2x=8$, $6x+12=\sqrt{300}$, $\sqrt{3x-8}=5$, $4x=\sqrt{\sqrt{320}+8}$ $\sqrt{4x}=8$, $4x+2=\sqrt{8+\sqrt{2}}$. Görüldüğü gibi Bombelli'deki örnekler döneminin en kompleks denklemleridir.

Katışık denklemler adıyla anılan $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=bx$, $ax^2=bx+c$ denklem tiplerinin çözümleri İslâm Dünyasında yerleşmiş, belirli kurallara bağlanmıştı. $a=1$ olmak üzere $x^2+bx=c$ tipinin çözüm formülü $x=\sqrt{(b/2)^2+c}-b/2$, $bx+e=x^2$ tipinin çözüm formülü $x=\sqrt{(b/2)^2+c}+(b/2)$, ve $x^2+c=bx$ tipininki $x=(b/2)\mp\sqrt{(b/2)^2-c}$ idi.

Pacioli $ax^2+bx=c$ tipi için $x^2+x=12$ denklemini örnek veriyor. Bu denklemin analitik çözümünü şöyle buluyor: $b:2=1:2$, $(1/2)^2=1/4$, $12+(1/4)=12(1/4)$, $x=\sqrt{12(1/4)}-1/2=3$.

13 Bombelli, *L'Algebra,* Opera di Rafael Bombelli da Bologna, Feltrinelli Editore, Milano 1966, s. 183-272.

14 *Hieronymus Cardanus, Opera Omnia,* Friedrich Frommann Verlag, C. 4, Stuttgart-Bad Cannstatt 1966, s. 229-231 (Fraksimile- Neudruck der Ausgabe Lyon 1663).

Bu çözüm, $x=\sqrt{(b/2)^2+c}-(b/2)$ formülüne göre bulunan çözümdür. İslâm Dünyası cebircileri de bu denklemleri analitik olarak bu formüle göre bu biçimde çözüyorlardı. Cardano[14] ve Bombelli de aynı biçimde analitik olarak bu denklemleri çözmüşlerdir. Cardano'nun örnek denklemi $144=10x+x^2$'dir. Bu denklemin çözümünü, $5.5=25$, $144+25=169$, $\sqrt{169}=13$, $13-5=8=x$ olarak bulmuştur.

Bombelli ise $ax^2+bx=c$ denklem tipinin iki çözüm yolu olduğunu söylemektedir. Birinci yol $x=\sqrt{(b/2a)^2+(c/a)}-(b/2a)$ formülüdür. Bu çözüm yolu için şu Örneği vermekte: $2x2+12x=32$, $x2+6x=16$, $(b/2)=6/2=3$, $32=9$, $(b/2)2+c=9+16=25$, $\sqrt{25}=5$, $5-3=2=x$. Bu denklem için önerdiği ikinci bir yol da şöyledir:

$x^2+6x=16$, $(x+3)^2=x^2+6x+9=25$, $x+3=5$, $x=2$.

Bombelli'nin önerdiği ikinci çözüm yolu $x=[\sqrt{(b/2)^2+ac}-(b/2)](1/a)$ formülüne göre çözümdür. Bu formülün bir önceki formülün eşdeğeri olduğu görülmektedir. Bu yol için verdiği örnek şöyledir:

$3x2+6x=24$, $3.24=72$, $(6/2)=3$, $3.3=9$, $72+9=81$, $\sqrt{81}=9$, $9-3=6$, $(6/3)=2=x$.

Bombelli'nin $ax^2+bx=c$ denklem tipi için verdiği diğer örnekler de şöyle:

(1) $2x^2+16x=40$, $x^2+8x=20$, $(x+4)^2=x^2+8x+16=36$, $(x+4)2=62$, $x+4=6$, $x=2$

(2) $x+2=\sqrt{2x^2+8x}$, $2x^2+8x=x^2+4x+4$, $2x^2+4x=x^2+4$ $x^2+4x=4$, $x=\sqrt{8}-2$

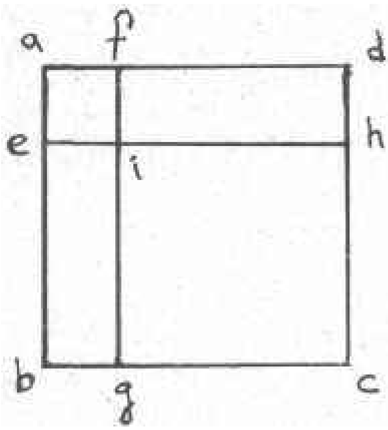
(3) $4x+8-\sqrt{128+8x^2}=0$, $4x+8=\sqrt{128+8x^2}$, $16x2+64x+64=128+8x^2$, $8x^2+64x+64=128$, $8x^2+64x=64$, $x^2+8x=8$, $x=\sqrt{24}-4$

(4) $4+\sqrt{24-20x}=2x$, $\sqrt{24-20x}=4x^2-16x+16$, $4x^2+20x+16=24+16x$, $4x^2+4x+16=24$, $4x^2+4x=8$, $x^2+x=2$, $x=1$

(5) $x^2+x\sqrt{8}+2x=20$, $(x+\sqrt{2}+1)^2=x^2+x\sqrt{8}+2x+\sqrt{8}=23+\sqrt{8}$, $x+\sqrt{2}+1=\sqrt{23+\sqrt{8}}$, $x=\sqrt{23+\sqrt{8}}-\sqrt{2}-1$.

Görüldüğü gibi kompleks ifadeler düzenlenerek $ax^2+bx=c$ biçimine dönüştürülmekte, bundan sonra çözüm bulunmaktadır.

Pacioli de İslâm Dünyası matematikçilerinde olduğu gibi katışık denklemler için geometrik izahlar vermektedir:

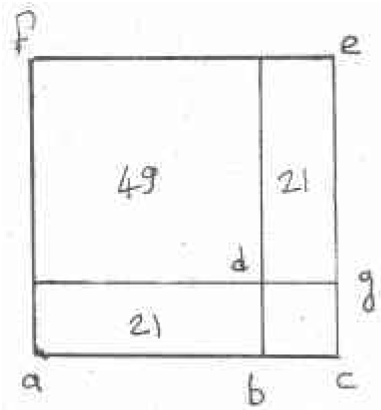


"abcd dörtgeninin kenarları beşden büyük olsun. ab üzerinde be=5, ad üzerinde fd=5, bc üzerinde cg=5, ve cd üzerinde ch=5 olacak şekilde e, f, g, h noktaları işaretlenir. af, ae, dh ve bg doğru parçalarının değeri bilinmeyendir. e ve h noktaları ile f ve g noktaları birleştirilir. abcd dörtgeni dik ve eşkenarlı olduğundan ad=ab'dir. Eşitlerden eşitler çıkarıldığında kalanlar da eşit olacağından ae=fi ve ae=af'dir. Böylece fe ve gh yüzeyleri dik açık ve eşkenar dörtgenler olur. Aradığımız kare ef karesidir. Çünkü bu karenin bütün kenarları bilinmeyendir (hipotezden). bi=eb.ei, eb=5, ei=x, ve id=fi.fd, fd=5=eb, burdan bi=5x=id olur. Böylece üç yüzeyimiz olur. Bir tanesi aranan ef karesi, diğer ikisi de bi ve id yüzeyleridir, ikisi birlikte 10x eder. Hipotezden bu üç yüzeyin toplamı 39'dur. Söz konusu bu üç yüzeye 25 ekleniyor, ki bu da kenarları beş olan gh karesidir. Böylece hepsi 64 eder, bu, büyük abcd karesinin alanıdır. Bunun kökü ab=8'dir. ab—be=8—5=3=ea=x bulunur.

Euclid'in *Elementler* I, 4'e göre, bir doğru parçası ikiye bölünürse, bu bölümlerin oluşturduğu yüzeyin iki katı ve bölümlerin karesi, bütün doğru parçasının karesine eşittir. Böylece, $x^2+10x+5.5$ ifadesine sahip oluruz. ab kenarı ikiye bölündüğünden, $(eb)^2=gh$ ve $(ea)^2=ef$, bi ve id dörtgenleri toplamı $(ab)^2$ olur. ef+bi+id+gh=ac. Bu karenin kökü ab'dir. ab—eb=ea=x'dir.

Pacioli'nin bu geometrik çözüm için verdiği şekil ve izahatlar Fibonacci'nin çözüm ve şeklinin tamamıyla aynıdır. x2+10x=39 denklemi de Ortaçağın tipik denklemi olup, Harezmi ve Abû Kâmil de bu örneği vermişlerdir. Pacioli'nin çözüm yolu Leonardo'nun da izlediği Ortaçağ cebircilerinin çözümüne bütünüyle uymakta. Euclid geometrisinden yararlanılması bakımından da Abu Kamil'in gayet iyi bilindiği anlaşılmaktadır.

Gardano'nun $ax^2+bx=c$ tipi denklemler için verdiği geometrik çözüm örneği şöyle: $x^2+6x=91$



$fd+6x=91$ olsun. $db=dg=3=6:2$

$db.ab=ad=3x=de$ (Elementler II, tanım)

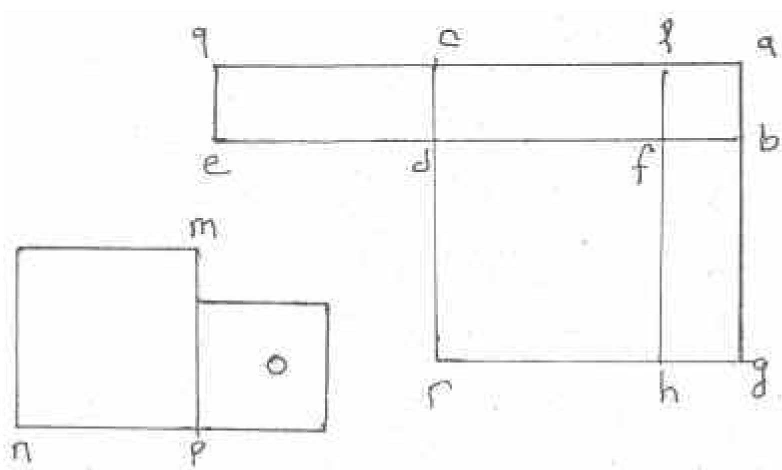
$ad+de=6x$, $cd=9$, $bd=3$,

$(ac)^2=100$, $ac=10$,

$ac-bc=10-3=7=ab$.

Görüldüğü gibi Cardano'nun geometrik çözüm yolu da İslâm matematikçilerininkinden farklı olmayıp, tam kareye tamamlama yöntemine dayanmaktadır. $x^2+6x+9=91+9=100$ bulunarak çözüm elde edilmektedir.

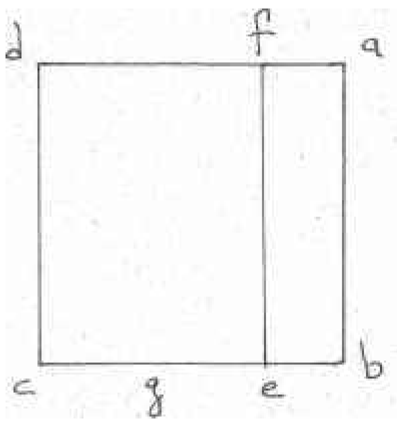
Bombelli $ax^2+bx=c$ tipi denklem için $x^2+6x=16$ denklemini örnek olarak veriyor:



abfl$=x^2$ olsun. feq$=6x=$npm, lf$=x$, fe$=6$ olacak. Çünkü feq$=6x$, npm$=16=c$. feq paralelkenarı cd ile iki eşit kısma bölünür. fd$=$de$=3$, bfhg$=$cde, aghfdc gnomonu$=$abeq$=$npm$=16$. Bu gnomon ile fhdr karesinin toplanmasıyla acrg karesi tamamlanır. fhdr$=9$, çünkü fd$=3$

ve $fh=fe/2=3$ olduğunu biliyoruz. $fhdr=0$ olsun. $npm+0=25=agrc$, $gr=5$, $hr=3$, $gh=2=x$ olacak, çünkü $hg=x$'dir. Bu ispat $x=\sqrt{(b/2)^2+c}-(b/2)$ formülüne dayanmaktadır.

$ax^2=bx+c$ tipi denklem için Pacioli'nin örnek denklemi $x+12=x^2$. Formülü uygulayarak $x=\sqrt{12(1/4)}+(1/2)=4$ olarak çözümü buluyor. Pacioli'nin geometrik çözümü açıkladığı örnek denklemi Fibonacci'nin örneği olup $x^2=10x+39$ denklemidir:



$5^2+39=64$, $\sqrt{64}+5=x$, $df=10=ce$ olsun. $ef=ab=x$, $ed=fe.ce=10.x=10x$'dir. $fb=39=eb.ef$, $ef=bc$, $be.bc=39$, $eb.bc+(ge)^2=(gb)^2$ (Elementler II, 6). $39+25=64=(gb)^2$, $gb=8$, $gb+cg=8+5=13=x$

Pacioli'nin bu çözüm yolu Pısa'lı Leonardo'nun çözümüne tamamiyle uymaktadır. Her ikisi de İslâm Dünyası matematikçilerinden Abû Kamil'in açık etkisini yansıtmaktadır.

Cardano'nun $x^2=bx+c$ tipi için verdiği örnekler şöyle:

(1) $x^2=10x+144$

$5.5=25$, $25+144=169$, $\sqrt{169}=13$, $13+5=18=x$

(2) $x^2=(2/3)x+11$

$(1/3).(1/3)=1/9$, $(1/9)+11=11(1/9)$, $\sqrt{11(1/9)}=3(1/3)$

$3(1/3)+(1/3)=3(2/3)=x$

(3) $x^2=10x=6$

$5.5=25$, $25+6=31$, $x=\sqrt{31}+5$

(4) $x^2=x\sqrt{12}+22$

$\sqrt{3}.\sqrt{3}=3$, $22+3=25$, $\sqrt{25}=5$, $5+\sqrt{3}=x$

(5) $x^2 = x\sqrt{12+\sqrt{\sqrt{10}}}$

$\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$, $3+\text{-}\sqrt{^3\sqrt{10}}$, **x** $= \sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{^3\sqrt{10}}}$

Bombelli'nin $ax^2 = bx + c$ tipi için örnekleri:

(1) $x2 = 12x + 11$

$12:2=6$, $62=36$, $36+11=47$, $x=\sqrt{47}+6$

(2) $4x^2 = 8x + 18$

$4.18=72$, $72+16=88$, $x = [4+\sqrt{88}]\ (1/4) = \sqrt{5\ (1/2)} + 1$

(3) $x^2 — \sqrt{8}\ \ x=6$

$x^2 — \sqrt{8}\ x + 2 = 8$, $x — \sqrt{2} = \sqrt{8}$ $x = \sqrt{8}+\sqrt{2} = \sqrt{18}$

Bombelli ve Cardano'nun geometrik ispatları daha öncekilerden farklıdır. Bilgi birikimi artışıyla paralel olarak geometrik şekiller de kompleksleşmektedir.

$ax^2 + c = bx$ tipi için Pacioli'nin örneği şöyle: "Bir sayının beş ile çarpımı bu sayının karesi ve dört toplamını veriyor.

$x^2 + 4 = 5x$, $(5/2)^2 = 25/4$, $(25/4) — 4 = 2(1/4)$, $x_1 = \sqrt{2(1/4)} = 4$, $x_2 = 2(1/2) - \sqrt{2(1/4)}$

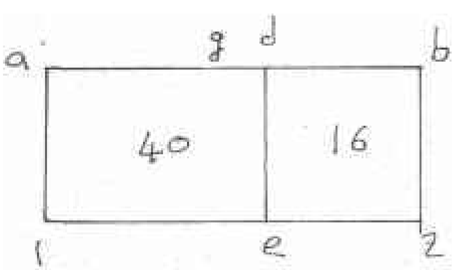
Bu denklem tipi için çözüm şartı $c < (b/2)^2$ dir. Pacioli'nin diğer örnekleri:

(1) $x^2 + 40 = 14x$

$14/2=7$, $7^2=49$, $49—40=9$, $7—3=4=x$, $x^2=16$, $7+3=10=x$, $x^2=100$

$c > (b/2)^2$ durumunda çözümün imkânsız olduğunu söylüyor. Örneğin, $x^2 + 7 = 5x$ denklemini çözmek imkânsızdır. Çünkü $(b/2)^2 = 6\ (1/4) < 7$'dir.

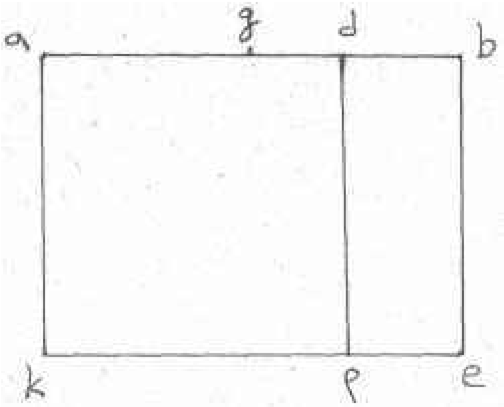
Geometrik çözüme gelince, $x^2 + 40 = 14x$



ab=14 olsun, ve g noktasından iki eşit kısma, d noktasından da eşit olmayan iki kısma bölünsün. ad ve db üzerine bir dikdörtgen ve bir eşkenar dörtgen çizilir. db üzerindeki kare aranan karedir. zi=ab olacak şekilde ez uzatılır. zb aranan karenin, yani dz'nin köküdür. az=14x'dir. az=ab.bz, bz=x ve ab=14'dür.

$ae=40=de.da=ab.da$, $db.da+(dg)^2=(gb)^2$ Elementler II, 5'e göre. $40+(dg)2=49$, $gb=7$ idi, $(gd)^2=9$, $gd+ga=3+7=10=ad=x$, $7-3=4=db$, $dz=16$, $dz+ae=16+40=56=14x=14.4=56$

İkinci çözüm:



al karesi lb yüzeyine komşudur. Bu da hipotezden 40'dır. $ld.db=ad.db$, $ld=ad$, $kb=14x$, $ab.ad=kb$, $ab=14$, $ad=x$, $kb=x^2+40=db.ad$, ab, g noktasından iki eşit kısma bölünürse, $ag=7$ olacak. $(ag)^2=49$ olur.

$(ag)^2-lb=49-40=9=(gd)^2$, $gd=3$, $gd+ag=ad=10=x$'dir.

Cardano'nun $ax^2+c=bx$ tipi için verdiği örnekler şöyle:

(1) $x^2+16=10x$

$5.5=25$, $25-16=9$, $\sqrt{9}=3$, $5+3$, $x=8$, $x=2$

(2) $x^2+6=10x$

$5.5=25$, $25-6=19$, $x_1=5+\sqrt{9}$, $x_2=5-\sqrt{19}$

Bombelli'nin örnekleri ise şöyle:

(1) $x^2+12=8x$, $8:2=4$, $42=16$, $16-12=4$, $\sqrt{4}=2$, $x_1=4+2=6$

$x_2=4-2=2$

(2) $x^2+20=8x$

$(b/2)2=16$, $16-20=-4$, $\sqrt{-4}=di-2$, $x_1=4+di-2$, $x_2=4-di\text{-}2$

Burada, görüldüğü gibi imajiner kök örneği ile karşılaşmaktayız. Bombelli ayrıca bu denklem tipinin $bx=c$ tipine dönüştürülebileceğini söylüyor. Örneğin, $x^2+12=8x$, $x^2-8x+12=0$, $(x-4)^2=x^2-8x+16$, $x^2-8x+16=4$, $x-4=2$, $x_1=6$, $(4-x)^2=x^2-8x+16$, $4-x=2$, $x_2=2$

Sonuç olarak, matematik rönesansının hazırlayıcıları Pacioli, Cardano ve Bombelli'nin cebirlerinde Leonardo Fibonacci aracılığıyla dolaylı İslâm Dünyası cebirinin etkisi büyük ölçüde görülmektedir. Özellikle Pacioli'de denklemlerin analitik ve geometrik çözümlerinde Harezmi cebirinden farklı bir yenilik olmadığı görülmektedir. Ancak Cardano ve Bombelli ile birlikte cebirde artık yeni bir gelişim dönemi başlamaktadır. İleri bir sembolizm ile genel denklem teorisi üçüncü ve dördüncü derece denklemleri de kapsamına almak üzere oluşturulmuştur. Geometrik ispatlarda, Abu Kamil Şuca'ın yaygınlaştırdığı Euclid geometrisini kullanma geleneğini devam ettirmişler, geometrik ispat şekillerini geliştirmişlerdir.