ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İKİ METRİĞE SAHİP BİR KÜME ÜZERİNDE SABİT NOKTA TEORİSİ

Tuğçe ALYILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

TEZ ONAYI

Tuğçe ALYILDIZ tarafından hazırlanan " **İki Metriğe Sahip Bir Küme Üzerinde Sabit Nokta Teorisi** " adlı tez çalışması 07/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Murat OLGUN

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. İshak ALTUN
Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Murat OLGUN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Mehmet ÜNVER
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

07/12/2018

Tuğçe ALYILDIZ

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ METRİĞE SAHİP BİR KÜME ÜZERİNDE SABİT NOKTA TEORİSİ

Tuğçe ALYILDIZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat OLGUN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde genelleştirilmiş F-büzülme ve α-geçişli dönüşüm kavramları hatırlatılarak ihtiyaç duyulacak bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Esas itibari ile orijinal sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümlerde verilmiştir.

Üçüncü bölümde iki metriğe sahip bir uzay üzerinde tek değerli dönüşümler için Wardowski ve Maia'nın teknikleri kullanılarak elde edilen sabit nokta sonuçları verilmiştir.
Alışılagelmiş sabit nokta teori çalışmalarından farklı olarak, uzayın bir metriğe göre tamlığının kabul edilmesinin yanı sıra dönüşümün diğer metriğe göre büzülme veya büzülme tipi olması kabul edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise bir önceki bölümde tek değerli dönüşümler için verilen sonuçlar küme değerli dönüşümler için incelenmiştir. Ayrıca iki metriğe sahip bir uzay üzerinde α-geçişli küme değerli dönüşümler için F-büzülme kavramı ile elde edilen sabit nokta sonucu verilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Aralık 2018, 47 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, tam metrik uzay, iki metrikli küme, genelleştirilmiş F-büzülme

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

FIXED POINT THEORY ON A SET WITH TWO METRICS

Tuğçe ALYILDIZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat OLGUN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some definitions and theorems concerning the generalized F-contraction and α-admissible mapping have been given.

The original results of this thesis are included in the third and fourth chapters.

In the third chapter, fixed point results for single valued mappings on a space with two metrics by considering the both Wardowski and Maia's techniques have been given.
Unlike the conventional fixed point theory studies, here it has been accepted that the mapping is contraction or contraction type according to the one metric when the space is complete for the other metric.

In the fourth chapter, the results for single valued mappings given in the previous chapter have been also proved for multivalued mappings in this chapter. Furthermore fixed point results for multivalued F-contraction by α-admissibility of a multivalued mappings on a space with two metrics have been given.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the results obtained.

December 2018, 47 pages

Key Words: Fixed point, complete metric space, set with two metrics, generalized F-contraction

TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında çalışmalarımı yönlendiren, bilgi ve tecrübesiyle yolumu aydınlatan ve benden desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımız esnasında öğrendiğim ve bundan sonra öğreneceğim bilgiler hayatım boyunca bana yol gösterecektir.

Araştırma sürecinde değerli bilgilerini benimle paylaşan ve yardımlarını benden esirgemeyen tez izleme kurulu üyeleri değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. İshak ALTUN (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen, akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle gelişmeme yardımcı olan değerli hocam Sayın Dr. Tuğba YURDAKADİM (Hitit Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e teşekkürü borç bilirim.

Bu tez "TÜBİTAK 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez ayrıca "BAP Ankara Üniversitesi" tarafından desteklenmiştir. Ankara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olan ve desteklerini benden esirgemeyen, hayatı daha da anlamlı kılan canım eşim Candaş ALYILDIZ'a, canım aileme ve tüm dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tuğçe ALYILDIZ
Ankara, Aralık 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
(X, d)	Metrik uzay
$d(x, y)$	x ile y arasındaki uzaklık
(X, ρ)	Metrik uzay
$\rho(x, y)$	x ile y arasındaki uzaklık
(X, τ)	Topolojik uzay
$\sup A$	A kümesinin en küçük üst sınırı (Supremum)
$\inf A$	A kümesinin en büyük alt sınırı (İnfimum)
$\max A$	A kümesinin en büyük elemanı (Maksimum)
$D(x, A)$	x noktasının A kümesine olan uzaklığı
$B(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\{x_n\}$	Dizi
$x_n \to x$	$\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar
$T : X \to X$	T, X kümesinden X kümesine bir dönüşüm
$\sum$	Toplam sembolü

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi matematiğin bir çok dalı ile ilişkilidir. Fonksiyonel analiz, genel topoloji, matematiksel analiz, operatör teori ve diferensiyel denklemler gibi bir çok alanda uygulamaları vardır.

Genel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Bunlardan birincisi, tam metrik uzay üzerinde büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teorisi, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt ve konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları 1910 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendi üzerine tanımlı sürekli her dönüşümün sabit noktasının varlığını kanıtlamıştır. 1930 yılında Brouwer'in teoremi Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara genişletilmiştir:

"X bir Banach uzayı ve C, X uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi ve $T : C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü C kümesi içinde bir sabit noktaya sahiptir (Schauder 1930)."

Tam metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları ise 1922 yılında Banach ile başlamıştır. Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini aşağıdaki şekilde ortaya koymaktadır:

"(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü $k \in [0, 1)$ olacak şekilde

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

büzülme şartını sağlasın. Bu durumda T dönüşümünün X uzayında bir tek sabit noktası vardır. Üstelik X uzayındaki herhangi bir başlangıç noktasından elde edilen

Picard iterasyonu T dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Banach 1922)."
Büzülme dönüşüm prensibi daha sonra bir çok araştırmacı tarafından genişletilmiş ve genelleştirilmiştir (Reich 1971, Hardy ve Rogers 1973, Ćirić 1974, Berinde 2007).

2012 yılında Wardowski büzülme dönüşüm prensibini de kapsayan F-büzülme kavramını ve elde ettiği sabit nokta sonuçlarını ifade ve ispat etmiştir. Samet vd. ise büzülme prensibini genelleştirerek α-geçişli dönüşümleri ifade edip bu dönüşümler ile ilgili elde ettikleri sabit nokta sonuçlarını vermiştir (Samet vd. 2012). Tek değerli çalışmaların dışında, 1969 yılında Nadler, Hausdorff metriğini kullanarak küme değerli büzülme kavramını verip büzülme dönüşüm prensibinin küme değerli versiyonunu ispatlamıştır. Diğer taraftan 1968 yılında Maia iki metriğe sahip bir küme üzerinde sabit nokta teoremi vermiştir.

"X boş olmayan bir küme, d ve ρ bu küme üzerinde iki metrik ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın:
(i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq \rho(x, y)$ gerçeklenir,
(ii) (X, d) bir tam metrik uzaydır,
(iii) $T : (X, d) \to (X, d)$ bir sürekli dönüşümdür,
(iv) $T : (X, \rho) \to (X, \rho)$ bir büzülme dönüşümüdür.
Bu durumda T dönüşümü X kümesinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Maia 1968)."

Daha sonra iki metriğe sahip bir küme üzerinde sabit nokta çalışmaları bir çok yazar tarafından yapılmıştır. Agarwal ve O'Regan 2000 yılında tek değerli dönüşümler için iki metriğe sahip bir küme üzerinde genelleştirilmiş büzülmeler ile sabit nokta teoremleri vermiştir. Benzer düşünce ile 2008 yılında Lazar, O'Regan ve Petruşel küme değerli dönüşümler için sabit nokta çalışmaları yapmıştır.

Bu tez çalışmasında ise iki metriğe sahip bir küme üzerinde önce tek değerli dönüşümler için daha sonra da küme değerli dönüşümler için F-büzülmeler ile birlikte yeni sabit nokta sonuçlarının elde edilmesi amaçlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde küme değerli dönüşümler, F-büzülmeler ve α-geçişli dönüşümlerden bahsedilecektir. Ayrıca bu kavramlara ilişkin verilen sabit nokta teoremlerinden söz edilecektir.

2.1 Küme Değerli Dönüşümler

Bu kısımda küme değerli dönüşüm, küme değerli dönüşümün sabit noktası, üstten ve alttan yarı süreklilik kavramları hatırlatılacaktır. Daha sonra küme değerli büzülme dönüşümü kavramı ile Nadler tarafından verilen sabit nokta teoremleri ifade edilecektir. Öncelikle aşağıdaki notasyonları verelim.

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere

- $P(X)$ ile X kümesinin boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfı,
- $B(X)$ ile X kümesinin boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfı,
- $C(X)$ ile X kümesinin boş olmayan tüm kapalı alt kümelerinin sınıfı,
- $CB(X)$ ile X kümesinin boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin sınıfı,
- $K(X)$ ile X kümesinin boş olmayan tüm kompakt alt kümelerinin sınıfı

  gösterilsin. Burada $K(X) \subseteq CB(X) \subseteq B(X)$ ve $K(X) \subseteq CB(X) \subseteq C(X)$ olacağı açıktır.

Tanım 2.1 X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $T \subseteq X \times Y$ ise T ye X kümesinden $P(Y)$ kümesine bir küme değerli dönüşüm denir. $T : X \to P(Y)$ ile gösterilir. $T : X \to P(Y)$ küme değerli dönüşümünün tersi

$$(x, y) \in T \Leftrightarrow (y, x) \in T^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. T, X kümesinden $P(Y)$ kümesine bir küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

$$Tx = \{y \in Y : (x, y) \in T\}$$

kümesine x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü denir. $A \subseteq X$ için

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx$$

kümesine A kümesinin T küme değerli dönüşümü altındaki görüntüsü denir.
$B \subseteq Y$ için

$$T^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} T^{-1}(y)$$

kümesine B kümesinin T altındaki ters görüntüsü denir.

Tanım 2.2 $T : X \to P(X)$ dönüşümü için $x_0 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa bu noktaya T dönüşümünün sabit noktası denir. T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi

$$F(T) = \{x \in X : x \in Tx\}$$

ile gösterilir.

Örnek 2.1 $X = [0, 1]$ olmak üzere $T : X \to P(X)$ dönüşümü $Tx = [x^5, x^3]$ olacak şekilde tanımlansın. O halde, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ noktaları bu dönüşümün sabit noktalarıdır.

Bu örnekten de anlaşılacağı gibi küme değerli bir dönüşümün birden fazla sabit noktası olabilir.

Örnek 2.2 $X = [0, 1]$ olmak üzere $T : X \to P(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{1\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ [0, 1] & , \quad x = \frac{1}{3} \\ [0, 1 - x] & , \quad \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} T(0) = \{1\} & , & T\left(\left(0, \frac{1}{5}\right)\right) = \{1\} \\ T\left(\frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] & , & T\left(\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)\right) = [0, 1] \\ T\left(\frac{1}{3}\right) = [0, 1] & , & T\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \left[0, \frac{2}{3}\right) \end{array}$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{3} \in T\left(\frac{1}{3}\right) = [0,1]$ olduğundan $\frac{1}{3}$, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Tanım 2.3 X ve Y iki metrik uzay ve $T : X \to P(Y)$ bir küme değerli dönüşüm olsun.

(i) Eğer Y kümesindeki her kapalı kümenin ters görüntüsü X kümesinde kapalı oluyorsa T dönüşümüne üstten yarı sürekli dönüşüm denir.

(ii) Eğer Y kümesindeki her açık kümenin ters görüntüsü X kümesinde açık oluyorsa T dönüşümüne alttan yarı sürekli dönüşüm denir.

(iii) Bir küme değerli dönüşüm üstten ve alttan yarı sürekli ise bu dönüşüme süreklidir denir.

Örnek 2.3 $T : [0,1] \to P([0,1])$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{4}{5}\right\} & , \quad 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right] & , \quad x = \frac{1}{3} \\ \left\{\frac{1}{5}\right\} & , \quad \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada her kapalı kümenin ters görüntüsü kapalıdır, ancak $U = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ açık kümesi için $T^{-1}(U) = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ olup açık değildir. Bu durumda T dönüşümü üstten yarı süreklidir fakat alttan yarı sürekli değildir.

Uyarı 2.1 T dönüşümünün

$$G(T) = \{(x,y) : x \in X, y \in Tx\}$$

grafiği, $X \times Y$ uzayının kapalı bir altkümesi ise T kapalı küme değerli bir dönüşümdür.

- T kapalı küme değerli dönüşüm ise kapalı değerlidir.
- T dönüşümü üstten yarı sürekli ve kapalı değerli ise kapalı küme değerlidir.
- Kapalı küme değerli bir dönüşüm üstten yarı sürekli olmayabilir.
- Üstten yarı sürekli bir dönüşüm kapalı değerli değilse kapalı küme değerli olmayabilir (Istrăţescu 1981, Hu ve Papageorgiou 1997).

Örnek 2.4 $T : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ dönüşümü $Tx = [0, 2)$ ile tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü üstten yarı süreklidir ancak kapalı küme değerli değildir.

Örnek 2.5 $T : [0, \infty) \to P([0, \infty))$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} [0, x] \cup \left\{\frac{1}{x}\right\} & , \quad x > 0 \\ \{0\} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T^{-1}(\mathbb{Z}^+) = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\} \cup \mathbb{Z}^+$ kapalı olmadığından T dönüşümü üstten yarı sürekli değildir ancak kapalı küme değerlidir.

Tanım 2.4 (X, d) bir metrik uzay, $A, B \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda

$$D(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

değerine x noktasının A kümesine olan uzaklığı denir.
$H : CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere her $A, B \in CB(X)$ için

$$H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} D(x, B), \sup_{y \in B} D(y, A)\right\}$$

$CB(X)$ üzerinde bir metrik tanımlar ve bu metrik Hausdorff metriği olarak bilinir.

Hausdorff metriğinin d metriğine bağlı olduğu aşağıdaki örnekte gösterilmiştir. Ayrıca, eğer (X, d) bir tam metrik uzay ise $(CB(X), H)$ ve $(K(X), H)$ metrik uzayları da tamdır.

Örnek 2.6 $X = \mathbb{R}$ üzerinde $d_1(x, y) = |x - y|$ ve

$$d_2(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

metrikleri ele alınsın. Bu durumda $A = [0, 1]$ ve $B = [4, 7]$ kümeleri için $H_1(A, B) = 6$ ve $H_2(A, B) = 1$ elde edilir. Burada her iki kümede d_1 ve d_2 metriğine göre kapalıdır.

Tanım 2.5 (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to CB(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$$

olacak şekilde bir $L \in [0, 1)$ sabiti varsa T dönüşümüne küme değerli büzülme dönüşümü adı verilir.

Teorem 2.1 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to CB(X)$ küme değerli bir büzülme dönüşümü olsun. O halde T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir (Nadler 1969).

Örnek 2.7 $X = [0, 1]$ kümesi alışılmış metrik ile göz önüne alınsın. $f : X \to X$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3} & , \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1 - \frac{x}{3} & , \quad x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

olmak üzere $T : X \to CB(X)$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \{0, f(x)\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda T bir küme değerli dönüşümdür. Ayrıca $F(T) = \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$ elde edilir.

Nadler'in bu sonucundan esinlenerek, son yıllarda küme değerli büzülmelerle ilgili sabit nokta sonuçları ortaya çıkmıştır (Daffer ve Kaneko 1995, Feng ve Liu 2006, Klim ve Wardowski 2007, Ćirić 2009, Kamran ve Kiran 2011, Du 2012, Mınak vd. 2013). Bunlarla ilgili olarak Reich bir çalışmasında aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.2 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to K(X)$ bir dönüşüm olsun. $\alpha : (0, \infty) \to [0, 1)$ fonksiyonu her $t \in (0, \infty)$ için

$$\limsup_{s \to t^+} \alpha(s) < 1$$

olacak şekilde her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Reich 1972).

Daha sonra Reich tarafından Teorem 2.2'de $K(X)$ yerine $CB(X)$ alınırsa T dönüşümünün sabit noktasının var olup olmayacağı problemi ortaya atılmıştır. Reich'in bu problemi üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Problemin çözümü tam olarak yapılamasa da Mizoguchi ve Takahashi tarafından α üzerindeki

$$\limsup_{s\to t^+} \alpha(s) < 1$$

şartının her $t \in [0,\infty)$ için sağlanması halinde $K(X)$ yerine $CB(X)$ alınabileceği gösterilmiştir.

Teorem 2.3 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to CB(X)$ bir dönüşüm olsun. $\alpha : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu her $t \in (0,\infty)$ için

$$\limsup_{s\to t^+} \alpha(s) < 1$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Mizoguchi ve Takahashi 1989).

Mizoguchi ve Takahashi'ya ait bu teoremin ispatı oldukça uzun ve karmaşıktır. Dolayısıyla bu teorem bir kaç yazar tarafından da farklı yollarla ispatlanmıştır. Daha basit ve anlaşılır olan ispat 2008 yılında Suzuki tarafından verilmiştir. Hatta, bu teoremin Nadler'in gerçek bir genelleştirmesi olduğu da gösterilmiştir (Suzuki 2008).

2.2 *F*-Büzülmeler

Bu kısımda öncelikli olarak tek değerli dönüşümler için F-büzülme kavramı hatırlatılıp daha sonra bu kavramın küme değerli versiyonu ve bu dönüşümler için elde edilmiş olan sabit nokta teoremleri verilecektir. Ayrıca genelleştirilmiş F-büzülmeler ve bu tip dönüşümler için verilmiş olan sabit nokta sonuçları ifade edilecektir.

2.2.1 Tek değerli dönüşümler için F-büzülmeler

Bu kısımda Wardowski tarafından tanımlanan ve bilinen büzülme kavramını da kapsayan F-büzülme kavramı incelenecektir. Ayrıca genelleştirilmiş F-büzülmeler ve bazı sabit nokta teoremleri de verilecektir.

$\mathcal{F}$ aşağıdaki şartları sağlayan tüm $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümlerinin ailesi olsun:

$(F1)$ F kesin artandır. Yani her $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ için

$$\alpha < \beta \text{ iken } F(\alpha) < F(\beta)$$

eşitsizliği sağlanır,

$(F2)$ Pozitif sayıların her $\{a_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$$

şartı sağlanır,

$(F3)$ $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır.

Tanım 2.6 (X, d) bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer $d(Tx, Ty) > 0$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T dönüşümüne bir F-büzülme adı verilir.

Farklı $F \in \mathcal{F}$ fonksiyonları (2.1) eşitsizliğinde dikkate alındığında literatürde iyi bilinen çeşitli F-büzülmeler elde edilir.

Örnek 2.8 $F_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_1(\alpha) = \ln \alpha$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F_1 \in \mathcal{F}$ olacağı açıktır. Eğer $T : X \to X$ dönüşümü bir F_1-büzülme ise o halde $Tx \neq Ty$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y) \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $d(Tx, Ty) = 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için (2.2) eşitsizliği de sağlanır. Böylece $L = e^{-\tau} < 1$ olduğundan T bir büzülme dönüşümüdür. Dolayısıyla her Banach büzülme dönüşümü $\tau = -\ln L > 0$ ve $F_1(\alpha) = \ln \alpha$ ile tanımlı F_1 dönüşümü için bir F-büzülmedir.

Örnek 2.9 $F_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_2(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F_2 \in \mathcal{F}$ olacağı açıktır. Eğer $T : X \to X$ dönüşümü bir F_2-büzülme ise o halde $Tx \neq Ty$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq e^{-\tau} \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 2.10 $F_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_3(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F_3 \in \mathcal{F}$ olacağı açıktır. Eğer $T : X \to X$ dönüşümü bir F_3-büzülme ise o halde $Tx \neq Ty$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{\left(1 + \tau \sqrt{(d(x, y))}\right)^2} d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 2.11 $F_4 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_4(\alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F_4 \in \mathcal{F}$ olacağı açıktır. Eğer $T : X \to X$ dönüşümü bir F_4-büzülme ise o halde $Tx \neq Ty$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$\frac{d(Tx, Ty)\,(d(Tx, Ty) + 1)}{d(x, y)\,(d(x, y) + 1)} \leq e^{-\tau}$$

eşitsizliği sağlanır.

Uyarı 2.2 $(F1)$ koşulundan ve (2.1) eşitsizliğinden her F-büzülme bir büzülebilir dönüşümdür. Yani T dönüşümü bir F-büzülme ise $d(Tx, Ty) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ sağlanır. Bu yüzden her F-büzülme dönüşümü süreklidir.

Uyarı 2.3 $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer her $\alpha > 0$ için $H_1(\alpha) \leq H_2(\alpha)$ ve $G = H_2 - H_1$ azalmayan bir dönüşüm ise bu durumda her H_1-büzülme bir H_2-büzülmedir. Gerçekten, Uyarı 2.2 gereğince $d(Tx, Ty) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$G(d(Tx, Ty)) \leq G(d(x, y))$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $d(Tx, Ty) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} \tau + H_2(d(Tx, Ty)) &\leq \tau + H_1(d(Tx, Ty)) + G(d(Tx, Ty)) \\ &\leq H_1(d(x, y)) + G(d(x, y)) \\ &= H_2(d(x, y)) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Banach ve Edelstein sabit nokta teoremlerinden, bir tam metrik uzay üzerinde her Banach büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktası ve bir kompakt metrik uzay üzerinde her büzülebilir dönüşümün bir tek sabit noktası olduğu iyi bilinmektedir. Banach'tan Edelstein sabit nokta teoremlerine geçerken dönüşüm sınıfları büzülme koşulu ile genişlerken uzayın yapısı sınırlanmıştır. Wardowski ise uzayın yapısını kısıtlamadan aşağıdaki sonucu ispatlamıştır.

Teorem 2.4 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü bir F-büzülme olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Wardowski 2012).

Örnek 2.8 ve Örnek 2.9'da tanımlanan F_1 ve F_2 dönüşümleri göz önüne alındığında her $\alpha > 0$ için $F_1(\alpha) < F_2(\alpha)$ ve $F_2 - F_1$ dönüşümü kesin artan olduğundan Uyarı 2.2 gereğince her büzülme dönüşümü (2.3) büzülme şartını sağlar. Bu ifadenin tersinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.12 $X = \left\{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi alışılmış metrik ile ele alınsın. Bu durumda (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T : X \to X$ dönüşümü

$$Tx_n = \begin{cases} x_1 & , \quad n = 1 \\ x_{n-1} & , \quad n > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Örnek 2.8'de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln \alpha$ için T dönüşümü bir F_1-büzülme değildir. Dolayısıyla bir büzülme dönüşümü değildir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{d(Tx_n, Tx_1)}{d(x_n, x_1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2} - 1}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n - 2}{n^2 + n - 2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan Örnek 2.9'da tanımlanan $F_2(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ için T dönüşümü $\tau = 1$ ile bir F_2-büzülmedir. Bunu gösterebilmek için aşağıdaki durumlar incelenmelidir. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(Tx_m, Tx_n) > 0 \Leftrightarrow (m > 2 \text{ ve } n = 1) \text{ veya } (m > n > 1)$$

olmalıdır.

Durum 1 $m > 2$ ve $n = 1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{d(Tx_m, Tx_1)}{d(x_m, x_1)} e^{d(Tx_m, Tx_1) - d(x_m, x_1)} &= \frac{x_{m-1} - 1}{x_m - 1} e^{x_{m-1} - x_m} \\
&= \frac{m^2 - m - 2}{m^2 + m - 2} e^{-m} \\
&< e^{-m} \\
&< e^{-1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Durum 2 $m > n > 1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{d(Tx_m, Tx_n)}{d(x_m, x_n)} e^{d(Tx_m, Tx_n) - d(x_m, x_n)} &= \frac{x_{m-1} - x_{n-1}}{x_m - x_n} e^{x_{m-1} - x_{n-1} - x_m - x_n} \\
&= \frac{m + n - 1}{m + n + 1} e^{n-m} \\
&< e^{n-m} \\
&\leq e^{-1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Literatürde Wardowski tarafından verilen teoremin bir çok genelleştirmesi vardır (Sgrio ve Vetro 2013, Cosentino ve Vetro 2014, Mınak vd. 2014, Altun vd. 2015, Mınak vd. 2015, Altun vd. 2016, Olgun vd. 2016).

Tanım 2.7 (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$$M(x,y) = \max \left\{ \begin{array}{c} d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \\ \frac{1}{2}[d(x,Ty) + d(y,Tx)] \end{array} \right\}$$

olmak üzere $d(Tx, Ty) > 0$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(M(x,y)) \tag{2.4}$$

olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ ve $\tau > 0$ mevcut ise T dönüşümüne genelleştirilmiş F-büzülme adı verilir (Mınak vd. 2014).

Aşağıdaki teoremde Wardowski ve Ćirić'in teknikleri kullanılarak F-büzülme kavramı genelleştirilmiştir.

Teorem 2.5 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü bir genelleştirilmiş F-büzülme olsun. Bu durumda T veya F sürekli ise T dönüşümü X kümesinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Mınak vd. 2014).

2.2.2 Küme değerli dönüşümler için F-büzülmeler

Bu kısımda Wardowski ve Nadler'in teknikleri kullanılarak 2015 yılında Altun vd. tarafından verilen F-büzülme dönüşümlerinin küme değerli versiyonu verilecektir. Ayrıca genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme kavramı ve bazı sabit nokta sonuçları hatırlatılacaktır.

Tanım 2.8 (X, d) bir metrik uzay, $F \in \mathcal{F}$ ve $T : X \to CB(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H(Tx, Ty) > 0$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(H(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T dönüşümüne küme değerli F-büzülme denir (Altun vd. 2015).

Örnek 2.8'de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln \alpha$ dönüşümü göz önüne alınırsa her küme değerli büzülme dönüşümü, bir küme değerli F-büzülme olur.

Teorem 2.6 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to K(X)$ küme değerli F-büzülme olsun. Bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Altun vd. 2015).

Burada her $x \in X$ için Tx kompakttır. F üzerine bir şart eklenerek Teorem 2.6'da $K(X)$ yerine $CB(X)$ alındığında da T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.7 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to CB(X)$ küme değerli F-büzülme olsun. Ayrıca F aşağıdaki şartı sağlarsa o zaman T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Altun vd. 2015).

$(F4)$ $\inf A > 0$ olacak şekilde her $A \subset (0, \infty)$ kümesi için

$$F(\inf A) = \inf F(A)$$

eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki örnek, küme değerli F-büzülme dönüşümü olup küme değerli büzülme dönüşümü olmayan dönüşümlerin varlığını göstermektedir.

Örnek 2.13 $X = \left\{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi alışılmış metrik ile birlikte ele alınsın. Bu durumda (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T : X \to K(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{x_1\} & , \quad x = x_1 \\ \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\} & , \quad x = x_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde T dönüşümü $F(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ ve $\tau = 1$ ile birlikte küme değerli F-büzülmedir. Ayrıca Teorem 2.6'nın diğer şartları da sağlandığından T dönüşümünün X kümesinde bir sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(Tx_n, Tx_1)}{d(x_n, x_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} = 1$$

olup T küme değerli büzülme dönüşümü değildir.

Tanım 2.9 (X,d) bir metrik uzay, $F \in \mathcal{F}$ ve $T : X \to CB(X)$ bir dönüşüm olsun.

$$M(x,y) = \max \left\{ \begin{array}{c} d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \\ \frac{1}{2}[D(x,Ty) + D(y,Tx)] \end{array} \right\}$$

olmak üzere $H(Tx,Ty) > 0$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(H(Tx,Ty)) \leq F(M(x,y))$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T dönüşümüne genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme denir (Acar vd. 2014).

Örnek 2.8'de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln \alpha$ dönüşümü göz önüne alınırsa her genelleştirilmiş küme değerli büzülme dönüşümü, bir genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme olur.

Teorem 2.8 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to K(X)$ genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme olsun. Eğer T veya F sürekli ise bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Acar vd. 2014).

Örnek 2.13'te T dönüşümü genelleştirilmiş küme değerli F-büzülmedir ancak genelleştirilmiş küme değerli büzülme değildir.

2.3 α-Geçişli Dönüşümler

Bu kısımda α-geçişli dönüşüm tanımı hatırlatılarak küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

Şimdi $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşullar göz önüne alınsın:

ψ_1) ψ azalmayan bir dönüşümdür,

ψ_2) Her $t \geq 0$ için $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ sağlanır,

ψ_3) Her $t > 0$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ gerçeklenir.

$\Psi = \{\psi : \psi_1$ ve ψ_3 sağlanır$\}$ ve $\Phi = \{\psi : \psi_1$ ve ψ_2 sağlanır$\}$ şeklinde alınırsa $\Psi \subseteq \Phi$ olacağı açıktır.

Lemma 2.1 Eğer $\psi \in \Phi$ ise bu durumda her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ gerçeklenir.

İspat. (ψ_2) koşulundan her $t > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ elde edilir. En az bir $t_0 > 0$ için $\psi(t_0) \geq t_0$ olsun. ψ dönüşümünün azalmayan olduğu dikkate alınırsa

$$t_0 \leq \psi(t_0) \leq \psi\left(\psi(t_0)\right) \leq \cdots \leq \psi^n(t_0) \leq \cdots$$

olacaktır. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$t_0 \leq \lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $t > 0$ için $\psi(t) < t$ gerçeklenir. ■

Lemma 2.2 Eğer $\psi \in \Phi$ ise bu durumda $\psi(0) = 0$ gerçeklenir.

İspat. $\psi(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\psi(0) = t_1 > 0$ yazılabilir. ψ dönüşümünün azalmayan olduğu dikkate alınırsa $\psi(0) \leq \psi(t_1)$ elde edilir. Buradan Lemma 2.1 gereğince

$$0 < t_1 = \psi(0) \leq \psi(t_1) < t_1$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $\psi \in \Phi$ iken $\psi(0) = 0$ gerçeklenir. ■

Lemma 2.3 Eğer $\psi \in \Phi$ ise bu durumda ψ, sıfır noktasında süreklidir.

İspat. $\psi \in \Phi$ olsun. Bu durumda Lemma 2.2 gereğince $\psi(0) = 0$ gerçeklenir. Şimdi $t_n \to 0$ alınsın. $\psi(t_n) \to \psi(0) = 0$ olduğu gösterilmelidir. $t_n \to 0$ olduğundan $t_n \to 0^+$ olur ki bu ise her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq t_n$ demektir. ψ dönüşümünün azalmayan olduğu dikkate alınırsa

$$0 = \psi(0) \leq \psi(t_n) \leq t_n$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\psi(t_n) \to \psi(0) = 0$$

bulunur. O halde $\psi \in \Phi$ iken ψ, sıfır noktasında süreklidir. ∎

Örnek 2.14 $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere $\psi(t) = \lambda^2 t$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Psi$ olacağı açıktır.

Örnek 2.15 $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{4} & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{t}{3} - \frac{1}{15} & , \quad \frac{1}{2} < t \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Psi$ olduğu açıktır.

Tanım 2.10 X boş olmayan bir küme, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ oluyorsa T dönüşümüne α-geçişli dönüşüm denir (Samet vd. 2012).

Örnek 2.16 $X = [0, \infty)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \ln x$ ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} e^{x-y} & , \quad x \geq y \\ 0 & , \quad x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa T dönüşümü α-geçişlidir.

Örnek 2.17 $X = (0, \infty)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \ln x$ ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 3 & , \quad x \geq y \\ 0 & , \quad x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa T dönüşümü α-geçişlidir.

Tanım 2.11 (X, τ) bir topolojik uzay, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon ve $\{x_n\}$, X kümesinde bir dizi, $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x$ iken $\alpha(x_n, x) \geq 1$ şartı sağlanıyorsa α fonksiyonu (B) özelliğine sahiptir denir (Samet vd. 2012).

Şimdi α-geçişli küme değerli dönüşümler ve bu dönüşümlerden elde edilen sabit nokta teoremleri incelenecektir.

Tanım 2.12 (X, d) bir metrik uzay, $T : X \to P(X)$ bir küme değerli dönüşüm, $\psi \in \Psi$ ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y)H(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne küme değerli α-ψ-büzülme,

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \inf\{\alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty\}$$

olmak üzere

$$\alpha_*(Tx, Ty)H(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne küme değerli α_*-ψ-büzülme dönüşümü denir (Asl vd. 2012).

Tanım 2.13 X boş olmayan bir küme, $T : X \to P(X)$ bir dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun.

a) Eğer her $x \in X$ ve $y \in Tx$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ olduğunda her $z \in Ty$ için $\alpha(y, z) \geq 1$ oluyorsa T dönüşümü α-geçişli küme değerli dönüşüm olarak adlandırılır,

b) Eğer her $x \in X$ ve $y \in Tx$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ olduğunda $\alpha_*(Tx, Ty) \geq 1$ oluyorsa T dönüşümü α_*-geçişli küme değerli dönüşüm olarak adlandırılır (Asl vd. 2012).

Açıkça görülüyor ki, α_*-geçişli küme değerli dönüşüm aynı zamanda bir α-geçişli küme değerli dönüşümdür. Ancak aşağıdaki örnek bu önermenin tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir (Mınak vd. 2013).

Örnek 2.18 $X = [-1, 1]$ kümesi ele alınsın. $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad x \neq y \end{cases}$$

ve $T : X \to P(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{-x\} & , \quad x \notin \{-1, 0\} \\ \{0, 1\} & , \quad x = -1 \\ \{1\} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x = -1$ ve $y = 0 \in Tx = \{0, 1\}$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ olmasına rağmen $\alpha_*(Tx, Ty) = \alpha_*(\{0, 1\}, \{1\}) = 0$ olur. Dolayısıyla T dönüşümü bir α_*-geçişli küme değerli dönüşüm değildir. Ancak T dönüşümü α-geçişli küme değerli dönüşümdür. Gerçekten de aşağıdaki durumlar T dönüşümünün α-geçişli dönüşüm olduğunu gösterir:

1) $x = 0$ ise $y = 1$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dir. Ayrıca $z = -1 \in Ty = \{-1\}$ için $\alpha(y, z) \geq 1$ elde edilir.

2) $x = -1$ ise $y \in \{0, 1\}$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dir. Ayrıca her $z \in Ty$ için $\alpha(y, z) \geq 1$ elde edilir.

3) $x \notin \{-1, 0\}$ ise $y = -x$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dir. Ayrıca $z = x \in Ty = \{x\}$ olduğundan $\alpha(y, z) \geq 1$ elde edilir.

Bu dönüşümlerle ilgili aşağıdaki sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Teorem 2.9 (X, d) bir tam metrik uzay, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon, $\psi \in \Psi$ kesin artan bir fonksiyon ve $T : X \to CB(X)$ α-geçişli ve küme değerli α-ψ-büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer T sürekli veya α, (B) özelliğine sahip ise bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Mohammadi vd. 2013).

Teorem 2.10 (X, d) bir tam metrik uzay, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon, $\psi \in \Psi$ kesin artan bir fonksiyon ve $T : X \to CB(X)$ α_*-geçişli ve küme değerli α_*-ψ-büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer T sürekli veya α, (B) özelliğine sahip ise bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Asl vd. 2012).

Durmaz ve Altun 2016 yılında α-geçişli küme değerli dönüşümler için F-büzülme kavramı ile elde ettikleri sabit nokta teoremini ifade ve ispat etmiştir.

Tanım 2.14 (X, d) bir metrik uzay, $T : X \to CB(X)$ ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ iki dönüşüm olsun.

$$T_\alpha = \{(x, y) : \alpha(x, y) \geq 1 \text{ ve } H(Tx, Ty) > 0\} \subset X \times X$$

kümesi tanımlansın. $F \in \mathcal{F}$ verildiğinde, her $(x, y) \in T_\alpha$ için

$$\tau(d(x, y)) + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir $\tau : (0, \infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonu varsa T dönüşümüne bir küme değerli (α, F)-büzülme denir (Durmaz ve Altun 2016).

Burada τ fonksiyonu, T dönüşümünün büzülme çarpanı olarak adlandırılır.

Teorem 2.11 (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \to K(X)$ α-geçişli ve τ büzülme çarpanı ile küme değerli bir (α, F)-büzülme olsun. Her $s \geq 0$ için

$$\liminf_{t \to s^+} \tau(t) > 0 \tag{2.6}$$

ve $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer T dönüşümü kapalı küme değerli dönüşüm veya α, (B) özelliğine sahip ise bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Durmaz ve Altun 2016).

3. İKİ METRİĞE SAHİP BİR KÜME ÜZERİNDE TEK DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde öncelikli olarak Agarwal ve O'Regan tarafından verilen iki metriğe sahip bir küme üzerinde genelleştirilmiş büzülmeler için sabit nokta teoremleri incelenip daha sonra iki metriğe sahip bir küme üzerinde F-büzülmeler için elde edilen sonuçlar verilecektir.

3.1 İki Metriğe Sahip Bir Küme Üzerinde Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda iki metriğe sahip bir küme üzerinde tek değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilecektir. Burada, alışılmış sabit nokta teori çalışmalarından farklı olarak, bir metrik üzerinde büzülme dönüşümü alınırken diğer metrik üzerinde uzayın tamlığı kabul edilmektedir.

(X, ρ) bir metrik uzay ve d, X üzerinde bir diğer metrik olsun. $x_0 \in X$ ve $r > 0$ iken

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

ve $\overline{B(x_0, r)}^{\rho}$, $B(x_0, r)$ açık yuvarının ρ-kapanışını belirtsin.

Aşağıda $d \not\geq \rho$ şeklinde verilen notasyon bazı $x, y \in X$ için $d(x, y) \not\geq \rho(x, y)$ anlamına gelmektedir.

Tanım 3.1 (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta$ iken $\rho(Tx, Ty) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa T dönüşümüne düzgün süreklidir denir.

Teorem 3.1 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde bir diğer metrik, $x_0 \in X$, $r > 0$ ve $T : \overline{B(x_0, r)}^{\rho} \to X$ bir dönüşüm olsun. $x, y \in \overline{B(x_0, r)}^{\rho}$ için

$$d(Tx, Ty) \leq qM(x, y) \tag{3.1}$$

olacak şekilde $q \in (0,1)$ mevcut olsun ve aşağıdaki üç özellik sağlansın:

(i) $d(x_0, Tx_0) < (1-q)r$

(ii) $d \ngeq \rho$ ise $T : (B(x_0, r), d) \to (X, \rho)$ düzgün sürekli

(iii) $d \neq \rho$ ise $T : \left(\overline{B(x_0, r)}^{\rho}, \rho\right) \to (X, \rho)$ sürekli

Bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Yani, $x = Tx$ olacak şekilde $x \in \overline{B(x_0, r)}^{\rho}$ vardır (Agarwal ve O'Regan 2000).

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.1'in bir genelleştirmesidir.

Teorem 3.2 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde bir diğer metrik, $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için (3.1) eşitsizliği sağlanacak şekilde $q \in (0,1)$ mevcut olsun ve aşağıdaki iki özellik sağlansın:

(a) $d \ngeq \rho$ ise $T : (X, d) \to (X, \rho)$ düzgün sürekli

(b) $d \neq \rho$ ise $T : (X, \rho) \to (X, \rho)$ sürekli

Bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Agarwal ve O'Regan 2000).

3.2 İki Metriğe Sahip Bir Küme Üzerinde F-Büzülmeler için Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda iki metriğe sahip bir küme üzerinde tek değerli dönüşümler için Wardowski ve Maia tarafından verilen teknikleri kullanarak sabit nokta sonuçları elde edeceğiz. Burada $F \in \mathcal{F}$ fonksiyonlarını sürekli olarak ele alacağız.

Teorem 3.3 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde bir diğer metrik, $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $F \in \mathcal{F}$ ve $d(Tx, Ty) > 0$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y))$$

olacak şekilde $\tau > 0$ mevcut olsun. Ayrıca

$$\text{eğer } d \ngeq \rho \text{ ise } T : (X, d) \to (X, \rho) \text{ düzgün sürekli} \tag{3.2}$$

ve

$$\text{eğer } d \neq \rho \text{ ise } T : (X, \rho) \to (X, \rho) \text{ sürekli} \tag{3.3}$$

olsun. Bu durumda T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta ve $\{x_n\}, X$ kümesinde $n \in \{1, 2, ...\}$ için $x_n = Tx_{n-1}$ ile tanımlı bir dizi olsun. Eğer $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ olacak şekilde $n_0 \in \{0, 1, 2, ...\}$ varsa $Tx_{n_0} = x_{n_0}$ elde edilir. Böylece T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Şimdi her $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ ve $d_n = d(x_{n+1}, x_n)$ alalım. Bu durumda her $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ için $d_n > 0$ olur. Hipotezden

$$\begin{aligned} F(d_n) &= F(d(x_{n+1}, x_n)) = F(d(Tx_n, Tx_{n-1})) \\ &\leq F(M(x_n, x_{n-1})) - \tau \\ &= F\left(\max\left\{\begin{array}{c} d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1}), \\ \frac{1}{2}d(x_{n-1}, x_{n+1}) \end{array}\right\}\right) - \tau \\ &\leq F(\max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1})\} - \tau \\ &= F(\max\{d_{n-1}, d_n\}) - \tau \end{aligned} \tag{3.4}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer bazı $n \in \{1, 2, ...\}$ için $d_n \geq d_{n-1}$ ise, bu durumda (3.4) eşitsizliğinden $F(d_n) \leq F(d_n) - \tau$ elde edilir ki $\tau > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu sebeple her $n \in \{1, 2, ...\}$ için $d_n < d_{n-1}$ ve (3.4) eşitsizliğinden

$$F(d_n) \leq F(d_{n-1}) - \tau$$

gerçeklenir. Böylece

$$\begin{aligned} F(d_n) &\leq F(d_{n-1}) - \tau \\ &\leq (F(d_{n-2}) - \tau) - \tau \\ &\vdots \\ &\leq F(d_0) - n\tau \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. (3.5) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} F(d_n) = -\infty$ elde ederiz. Dolayısıyla $(F2)$ koşulundan

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

buluruz. $(F3)$ koşuluyla birlikte

$$\lim_{n\to\infty} d_n^k F(d_n) = 0$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ vardır. (3.5) eşitsizliğinden her $n \in \{1, 2, ...\}$ için

$$d_n^k F(d_n) - d_n^k F(d_0) \leq -d_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.6}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.6) eşitsizliğini kullanarak ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} n d_n^k = 0$$

buluruz. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için $n d_n^k \leq 1$ olacak şekilde $n_1 \in \{1, 2, ...\}$ vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$d_n \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{3.7}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\{x_n\}$ dizisinin d metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $m > n \geq n_1$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ alalım.

(3.7) eşitsizliği ile metrik için üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= d_n + d_{n+1} + ... + d_{m-1} \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} d_j \leq \sum_{j=n}^{\infty} d_j \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^{1/k}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ buluruz. Böylece $\{x_n\}$ dizisi (X, d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin ρ metriği ile birlikte de bir Cauchy dizisi olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $d \geq \rho$ ise bu durum önemsizdir. O halde $d \ngeq \rho$ durumunu gözönüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. (3.2) özelliğinden $x, y \in X$ ve $d(x, y) < \delta$ iken

$$\rho(Tx, Ty) < \varepsilon \tag{3.8}$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ bulunur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ olduğundan her $n, m \geq N$ için

$$d(x_n, x_m) < \delta \tag{3.9}$$

olacak şekilde $N \in \{1, 2, ...\}$ vardır. (3.8) ve (3.9) eşitsizliklerinden her $n, m \geq N$ için

$$\rho(x_{n+1}, x_{m+1}) = \rho(Tx_n, Tx_m) < \varepsilon$$

elde ederiz ve böylece $\{x_n\}$ dizisi ρ metriğine göre bir Cauchy dizisi olur. (X, ρ) bir tam metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $\rho(x_n, x) \to 0$ ile $x \in X$ vardır.

Şimdi x noktasının T dönüşümünün sabit noktası olup olmadığını araştıralım.
Eğer $d \neq \rho$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho(x, Tx) \\ &\leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, Tx) \\ &= \rho(x, x_n) + \rho(Tx_{n-1}, Tx) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alınarak ve (3.3) özelliği kullanılarak $\rho(x, Tx) = 0$ buluruz. Böylece x, T dönüşümünün bir sabit noktası olur.
Şimdi $d = \rho$ ve $x \neq Tx$ olduğunu kabul edelim. Böylece her $n_k \geq n_0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisi vardır (eğer olmasaydı, her $n \geq n_1$ için $x_n \to Tx$ olduğundan $x_n = Tx$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ var olacaktı. $x \neq Tx$ olduğundan bu bir çelişkidir). Her $n_k \geq n_0$ için $d(Tx_{n_k}, Tx) > 0$ olduğundan (2.4) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \tau + F(d(x_{n_k+1}, Tx)) &= \tau + F(d(Tx_{n_k}, Tx)) \\ &\leq F(M(x_{n_k}, x)) \\ &= F\left(\max\left\{\begin{array}{c} d(x_{n_k}, x), d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), \\ d(x, Tx), \\ \frac{1}{2}\left[d(x_{n_k}, Tx) + d(x, x_{n_k+1})\right] \end{array}\right\}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.
$k \to \infty$ için limit alınarak ve F fonksiyonunun sürekliliği kullanılarak

$$\tau + F(d(x, Tx)) \leq F(d(x, Tx))$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla x, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 3.1 Eğer Teorem 3.3'de $d = \rho$ alınırsa bu durumda Teorem 2.5 sağlanır.

Uyarı 3.2 Eğer Teorem 3.3'de $F(\alpha) = \ln \alpha$ seçilirse bu durumda Teorem 3.2 sağlanır.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.3 kullanılarak kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 3.1 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde bir diğer metrik, $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $F \in \mathcal{F}$ (F dönüşümünün sürekliliği olmaksızın) ve $d(Tx, Ty) > 0$ eşitsizliğini sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))$$

olacak şekilde $\tau > 0$ mevcut olsun. Ayrıca (3.2) ve (3.3) özellikleri sağlansın. Bu durumda T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki örnek Uyarı 3.1'in gerçeklendiğini göstermektedir.

Örnek 3.1 $X = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ ve $d(x, y) = \rho(x, y) = |x - y|$ alalım. Dolayısıyla (X, ρ) bir tam metrik uzaydır. $T : X \to X$ dönüşümünü

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^2} & , \quad x = \frac{1}{n^2} \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d(Tx, Ty)}{M(x, y)} = 1$$

olduğundan (3.1) eşitsizliğini sağlayan $q \in (0, 1)$ bulanamaz. Böylece Teorem 3.2 bu örnek için geçerli değildir.

Şimdi

$$F(\alpha)=\begin{cases}\frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}} & , \quad 0<\alpha<e^2 \\ \alpha-e^2+\frac{2}{e} & , \quad \alpha\geq e^2\end{cases}.$$

biçiminde tanımlayalım. F fonksiyonunun sürekli ve $F\in\mathcal{F}$ olduğu kolayca görülebilir. $\tau=\ln 2$ ile birlikte T dönüşümünün genelleştirilmiş F-büzülme olduğu da görülebilir.

Bunun için öncelikle

$$\sup_{x,y\in X} d(x,y)=1<e^2$$

olduğunu dikkate alalım.

Her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)>0\Rightarrow \ln 2+F(d(Tx,Ty))\leq F(M(x,y)) \tag{3.10}$$

olacak şekilde $\tau=\ln 2$ ile birlikte T dönüşümü genelleştirilmiş F-büzülmedir.

Bunu göstermek için, her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)>0\Rightarrow \ln 2+F(d(Tx,Ty))\leq F(d(x,y))$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Her $x,y\in X$ için

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \left[d(Tx,Ty)>0\Rightarrow d(Tx,Ty)^{\frac{1}{\sqrt{d(Tx,Ty)}}}d(x,y)^{-\frac{1}{\sqrt{d(x,y)}}}\leq\frac{1}{2}\right]\\ &\Leftrightarrow \left[|Tx-Ty|>0\Rightarrow |Tx-Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|Tx-Ty|}}}|x-y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}}\leq\frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

olduğunu gösterelim.

Şimdi, eğer $m > n$ için $x = \frac{1}{n^2}$ ve $y = \frac{1}{m^2}$ ise

$$\begin{aligned}
|Tx - Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|Tx-Ty|}}} |x - y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} &= \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(m+1)^2}}}} \times \\
&\quad \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}}}} \\
&= \left(\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 (m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2 - (n+1)^2}}} \times \\
&\quad \left(\frac{m^2 - n^2}{n^2 m^2}\right)^{-\frac{nm}{\sqrt{m^2 - n^2}}} \\
&= \left(\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 (m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2 - (n+1)^2}}} \times \\
&\quad \left(\frac{m^2 - n^2}{n^2 m^2} \frac{m+n+2}{m+n+2}\right)^{-\frac{nm}{\sqrt{m^2 - n^2}}} \\
&= \left(\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 (m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2 - (n+1)^2}}} \times \\
&\quad \left(\begin{array}{c} \frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 (m+1)^2} \times \\ \frac{(m+n)(n+1)^2 (m+1)^2}{(m+n+2) n^2 m^2} \end{array}\right)^{-\frac{nm}{\sqrt{m^2 - n^2}}} \\
&= \left(\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 (m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2 - (n+1)^2}} - \frac{nm}{\sqrt{m^2 - n^2}}} \times \\
&\quad \left(\frac{(m+n+2) n^2 m^2}{(m+n)(n+1)^2 (m+1)^2}\right)^{\frac{nm}{\sqrt{m^2 - n^2}}}
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan

$$\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 (m+1)^2} \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2 - (n+1)^2}} - \frac{nm}{\sqrt{m^2 - n^2}} \geq 1$$

ve

$$\frac{(m+n+2) n^2 m^2}{(m+n)(n+1)^2 (m+1)^2} < 1$$

olduğundan

$$|Tx - Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|Tx-Ty|}}} |x - y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} \leq \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini buluruz. Böylece (3.10) eşitsizliği sağlanır.

Eğer $x = \frac{1}{n^2}$ ve $y = 0$ ise

$$
\begin{aligned}
|Tx - Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|Tx-Ty|}}} |x-y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} &= \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right|^{\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right|}}} \left|\frac{1}{n^2}\right|^{-\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{1}{n^2}\right|}}} \\
&= \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}} \\
&= \frac{n^{2(n+1)}}{(n+1)^{2(n+1)}} \frac{1}{n^2} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2(n+1)} \frac{1}{n^2} \\
&\le \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece bu durumda da (3.10) eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.3'ün tüm koşulları sağlandığından T dönüşümünün X kümesinde bir sabit noktası olduğunu elde ederiz.

Aşağıdaki örnek Teorem 3.3'ün, Teorem 2.5'in gerçek bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.2 $X = \left\{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi, $\rho(x, y) = |x - y|$ ve

$$
d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 + |x-y| & , \quad x \neq y \end{cases}
$$

metriklerini ele alalım. Dolayısıyla (X, ρ) bir tam metrik uzaydır. $T : X \to X$ dönüşümünü

$$
Tx = \begin{cases} x_1 & , \quad x = x_1 \\ x_{n-1} & , \quad x = x_n, n \geq 2 \end{cases}
$$

olacak şekilde tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
\sup_{n>1} \frac{d(Tx_n, Tx_1)}{M(x_n, x_1)} &= \sup_{n>1} \frac{1 + |x_{n-1} - x_1|}{\max\left\{\begin{array}{c} 1 + |x_n - x_1|, 1 + |x_n - x_{n-1}|, 1, \\ \frac{1}{2}\left[1 + |x_n - x_1| + 1 + |x_n - x_{n-1}|\right] \end{array}\right\}} \\
&= \sup_{n>1} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\max\left\{\frac{n(n+1)}{2}, 1+n, 1, \frac{n^2}{2}\right\}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olduğundan (3.1) eşitsizliğini sağlayan $q \in (0,1)$ bulanamaz. Böylece Teorem 3.2 bu örnek için uygulanamaz.

Şimdi $\alpha > 0$, $F(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ ve $\tau = 1$ için Teorem 3.3'ün büzülme koşulu $d(Tx, Ty) > 0$ olmak üzere

$$\frac{d(Tx,Ty)}{M(x,y)} e^{d(Tx,Ty)-M(x,y)} \leq e^{-1}$$

eşitsizliği olur. Burada $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(Tx_m, Tx_n) > 0 \Leftrightarrow (m > 2 \text{ ve } n = 1) \text{ veya } (m > n > 1)$$

durumlarını inceleyelim. O halde aşağıdaki iki durumu göz önüne almalıyız.

Durum 1 $m > 2$ ve $n = 1$ ise

$$\begin{aligned} \frac{d(Tx_m,Tx_1)}{M(x_m,x_1)} e^{d(Tx_m,Tx_1)-M(x_m,x_1)} &= \frac{m-1}{m+1} e^{-m} \\ &< e^{-1} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Durum 2 $m > n > 1$ ise

$$\begin{aligned} \frac{d(Tx_m,Tx_n)}{M(x_m,x_n)} e^{d(Tx_m,Tx_n)-M(x_m,x_n)} &= \frac{d(x_{m-1},x_{n-1})}{M(x_m,x_n)} e^{d(x_{m-1},x_{n-1})-M(x_m,x_n)} \\ &= \frac{1 + \frac{(m-n)(m+n-1)}{2}}{1 + \frac{(m-n)(m+n-1)}{2}} e^{n-m} \\ &< e^{-1} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece Teorem 3.3'ün büzülme koşulu sağlanır. Diğer taraftan $d \geq \rho$ olduğundan (3.2) koşulu sağlanır ve τ_ρ diskre topoloji olduğundan (3.3) koşulu da sağlanır. Sonuç olarak Teorem 3.3, T dönüşümünün X kümesinde bir sabit noktası olduğunu garanti eder.

4. İKİ METRİĞE SAHİP BİR KÜME ÜZERİNDE KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde öncelikle Lazar, O'Regan ve Petruşel tarafından verilen iki metriğe sahip bir küme üzerinde genelleştirilmiş küme değerli büzülmeler için sabit nokta teoremleri incelenecektir. Ayrıca iki metriğe sahip bir küme üzerinde küme değerli F-büzülmeler ve α-geçişli dönüşümler için elde edilen sonuçlar verilecektir.

İlk olarak iki metriğe sahip bir küme üzerinde küme değerli dönüşümler için verilen sabit nokta sonuçlarını ifade edelim.

(X, d) bir metrik uzay ve ρ, X üzerinde bir diğer metrik olsun. $x_0 \in X$ ve $r > 0$ iken

$$B_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

ve $\overline{B_d(x_0, r)}^{\rho}$, $B_d(x_0, r)$ açık yuvarının ρ-kapanışını belirtsin.

Teorem 4.1 X boştan farklı bir küme, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ mevcut olsun. X üzerinde d ile ρ iki metrik ve $T : \overline{B_\rho(x_0, r)}^{d} \to P(X)$ küme değerli dönüşüm olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlansın:

(i) (X, d) bir tam metrik uzay
(ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \leq c\rho(x, y)$ olacak şekilde $c > 0$ mevcut
(iii) $d \neq \rho$ ise $T : \overline{B_\rho(x_0, r)}^{d} \to P(X^d)$ kapalı
(iv) $d = \rho$ ise $T : \overline{B_d(x_0, r)}^{d} \to C(X^d)$
(v) $\forall x, y \in \overline{B_\rho(x_0, r)}^{d}$ için $H_\rho(Tx, Ty) \leq \alpha M_\rho(x, y)$ olacak şekilde $\alpha \in [0, 1)$ mevcut
(vi) $D_\rho(x_0, Tx_0) < (1 - \alpha)r$

Bu durumda $x^* \in Tx^*$ olacak şekilde $x^* \in \overline{B_\rho(x_0, r)}^{d}$ vardır. Yani T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Lazar vd. 2008).

4.1 F-Büzülmeler için Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda iki metriğe sahip bir küme üzerinde genelleştirilmiş küme değerli F-büzülmeler için sabit nokta sonuçları elde edeceğiz.

Lemma 4.1 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve A, X kümesinin kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda $d(x, a) = D(x, A)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır.

Teorem 4.2 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde bir diğer metrik, $T : X \to K_d(X)$ genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme olsun. Her bir $x, y \in X$ için

$$\rho(x, y) \leq cd(x, y) \tag{4.1}$$

olacak şekilde $c > 0$ mevcut olsun. Eğer T kapalı küme değerli dönüşüm (ρ metriğine göre) ise, bu durumda T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ alalım. Her $x \in X$ için Tx boştan farklı olduğundan $x_1 \in Tx_0$ seçebiliriz. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise x_1, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır ve böylece ispat tamamlanır.

$x_1 \notin Tx_1$ alalım. Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1, Tx_1) > 0$ olur. Diğer taraftan, $(F1)$ koşulundan ve $D(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$ olduğundan

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1))$$

eşitsizliğini elde ederiz. T dönüşümü genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme olduğundan

$$\begin{aligned}
F(D(x_1, Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(M(x_0, x_1)) - \tau \qquad (4.2)\\
&= F\left(\max\left\{\begin{array}{c} d(x_0, x_1), D(x_0, Tx_0), D(x_1, Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0, Tx_1) + D(x_1, Tx_0)\right] \end{array}\right\}\right) - \tau \\
&\leq F\left(\max\left\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1), \frac{1}{2}D(x_0, Tx_1)\right\}\right) - \tau \\
&\leq F\left(\max\left\{\begin{array}{c} d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[d(x_0, x_1) + D(x_1, Tx_1)\right] \end{array}\right\}\right) - \tau \\
&= F\left(\max\left\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1)\right\}\right) - \tau
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Eğer $d(x_0, x_1) \leq D(x_1, Tx_1)$ ise

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(D(x_1, Tx_1)) - \tau$$

eşitsizliğini elde ederiz ki $\tau > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(d(x_0, x_1)) - \tau$$

eşitsizliğini buluruz. Tx_1 kompakt olduğundan Lemma 4.1 gereğince $d(x_1, x_2) = D(x_1, Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Böylece (4.2) koşulundan

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(d(x_0, x_1)) - \tau$$

olur. Bu şekilde devam edilirse $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak şekilde X kümesinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_n, x_{n-1})) - \tau \tag{4.3}$$

olur. Eğer $x_{n_0} \in Tx_{n_0}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa x_{n_0}, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin Tx_n$ olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = d(x_n, x_{n+1})$ ile tanımlayalım. Her n için $a_n > 0$ olduğundan ve (4.3) eşitsizliğini kullanarak

$$F(a_n) \leq F(a_{n-1}) - \tau \leq F(a_{n-2}) - 2\tau \leq ... \leq F(a_0) - n\tau \tag{4.4}$$

elde ederiz. (4.4) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ olur. Dolayısıyla $(F2)$ koşulundan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

buluruz. $(F3)$ koşuluyla birlikte

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

olacak şekilde $k \in (0, 1)$ vardır. (4.4) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \leq -a_n^k n\tau \leq 0 \tag{4.5}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.5) eşitsizliğinde limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^k = 0$$

olur. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için $na_n^k \leq 1$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{4.6}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\{x_n\}$ dizisinin d metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $m > n \geq n_1$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ alalım. (4.6) eşitsizliğini ve metrik için üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= a_n + a_{n+1} + ... + a_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} a_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

buluruz.

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi (X, d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

(4.1) eşitsizliğinden $\{x_n\}$ dizisi aynı zamanda (X, ρ) metrik uzayında da bir Cauchy dizisidir. (X, ρ) bir tam metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $\rho(x_n, x) \to 0$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.

T kapalı küme değerli bir dönüşüm (ρ metriğine göre) ise $(x_n, x_{n+1}) \to (x, x)$ olduğundan $x \in Tx$ elde edilir. Dolayısıyla, T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 4.1 Eğer Teorem 4.2'de $d = \rho$ alınırsa bu durumda Teorem 2.8 sağlanır.

Sonuç 4.1 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde (4.1) koşulunu sağlayan bir diğer metrik ve $T : X \to K_d(X)$ küme değerli F-büzülme olsun. Eğer

T kapalı küme değerli dönüşüm (ρ metriğine göre) ise bu durumda T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

Uyarı 4.2 Teorem 4.2'de her $x \in X$ için Tx kompakttır. Burada aklımıza şöyle bir soru gelebilir: $T : X \to CB_d(X)$ genelleştirilmiş küme değerli bir F-büzülme iken T dönüşümü bir sabit noktaya sahip midir? Aşağıdaki örnek bu sorunun cevabının olumsuz olduğunu göstermektedir.

Örnek 4.1 $X = [0,1]$, ρ alışılmış metrik ve

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 + |x-y| & , \quad x \neq y \end{cases}$$

metriğini ele alalım. Bu durumda (X,ρ) bir tam metrik uzaydır ve her $x, y \in X$ için $\rho(x,y) \leq d(x,y)$ olduğu açıktır. τ_d diskre topoloji olduğundan X kümesinin tüm alt kümeleri kapalı ve hatta sınırlıdır. Dolayısıyla X kümesinin tüm alt kümeleri d metriğine göre kapalı ve sınırlıdır.
Q, X'in bütün rasyonel sayılarının kümesi olmak üzere $T : X \to CB_d(X)$ dönüşümünü

$$Tx = \begin{cases} Q & , \quad x \in X \backslash Q \\ X \backslash Q & , \quad x \in Q \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece T dönüşümünün sabit noktası yoktur.
Şimdi

$$F(\alpha) = \begin{cases} \ln \alpha & , \quad \alpha \leq 1 \\ \alpha & , \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

olacak şekilde $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Buradan $F \in \mathcal{F}$ olduğu görülebilir. Şimdi T dönüşümünün genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme olduğunu yani her $x, y \in X$ için $\tau = 1$ ile birlikte

$$H(Tx,Ty) > 0 \Rightarrow 1 + F(H(Tx,Ty)) \leq F(M(x,y))$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.
$H(Tx,Ty) > 0$ ise $\{x,y\} \cap Q$ kümesi tek elemanlıdır. Böylece $H(Tx,Ty) > 0$

eşitsizliğini sağlayan $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) &= H(Q, X \backslash Q) \\ &= 1 \\ &< 1 + |x - y| \\ &= d(x, y) \\ &\leq M(x, y) \end{aligned}$$

ve buradan

$$1 + F(H(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y))$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi F üzerine $(F4)$ şartını ekleyerek, Teorem 4.2'de $K_d(X)$ yerine $CB_d(X)$ alabiliriz.

$\mathcal{F}_*$ ile $(F1) - (F4)$ koşullarını sağlayan tüm F fonksiyonların kümesi ifade edilsin. Bu durumda $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}$ olacağı açıktır.

Teorem 4.3 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde (4.1) koşulunu sağlayan bir diğer metrik, $T : X \to CB_d(X)$ dönüşümü $F \in \mathcal{F}_*$ ile genelleştirilmiş küme değerli bir F-büzülme olsun. Eğer T kapalı küme değerli dönüşüm (ρ metriğine göre) ise bu durumda T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ alalım. Her $x \in X$ için Tx boştan farklı olduğundan $x_1 \in Tx_0$ seçebiliriz. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise x_1, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır ve böylece ispat tamamlanır.
$x_1 \notin Tx_1$ alalım. Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1, Tx_1) > 0$ olur. Diğer taraftan, $(F1)$ koşulundan ve $D(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$ olduğundan

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1))$$

eşitsizliğini elde ederiz. T genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme olduğundan

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(M(x_1, x_0)) - \tau \tag{4.7}$$

buluruz. $(F4)$ koşulundan ve $D(x_1, Tx_1) > 0$ olduğundan

$$F(D(x_1, Tx_1)) = \inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1, y))$$

yazabiliriz. O halde (4.7) eşitsizliğinden

$$\inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1, y)) \leq F(M(x_1, x_0)) - \tau < F(M(x_1, x_0)) - \frac{\tau}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece yukarıdaki eşitsizlikten

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(M(x_1, x_0)) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır.

Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise istenilen elde edilir ve ispat tamamlanır. Aksi takdirde, benzer yolla

$$F(d(x_2, x_3)) \leq F(M(x_2, x_1)) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ elde edebiliriz.

Bu şekilde devam edildiğinde her $n = 1, 2, 3, ...$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(M(x_n, x_{n-1})) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde X kümesinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde ederiz.

İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.2'nin ispatında olduğu gibi tamamlanabilir. ■

Uyarı 4.3 $(F1)$ şartını sağlayan sağdan sürekli her F fonksiyonu $(F4)$ koşulunu sağlar.

4.2 α-Geçişli Dönüşümler için Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda iki metriğe sahip bir küme üzerinde α-geçişli küme değerli F-büzülmeler için sabit nokta sonuçları elde edeceğiz.

Teorem 4.4 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde (4.1) koşulunu sağlayan bir diğer metrik, $T : X \to K_d(X)$ bir α-geçişli ve (2.6) koşulunu sağlayan τ büzülme çarpanı ile küme değerli bir (α, F)-büzülme olsun. Ayrıca $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ mevcut olsun. Bu durumda T kapalı küme değerli dönüşüm (ρ metriğine göre) ise veya α, (B) özelliğine sahip ise T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T dönüşümünün sabit noktaya sahip olmadığını kabul edelim. Bu durumda her $x \in X$ için $D(x, Tx) > 0$ olur. x_0 ve x_1 hipotezde ifade edildiği gibi alınırsa $H(Tx_0, Tx_1) > 0$ bulunur. Böylece $(x_0, x_1) \in T_\alpha$ olduğundan x_0 ve x_1 için (2.5) eşitsizliğini kullanabiliriz. $(F1)$ koşulundan

$$\begin{aligned} F(D(x_1, Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq F(d(x_1, x_0)) - \tau(d(x_1, x_0)) \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Tx_1 kompakt olduğundan Lemma 4.1 gereğince $d(x_1, x_2) = D(x_1, Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Böylece (4.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} F(d(x_1, x_2)) &\leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq F(d(x_1, x_0)) - \tau(d(x_1, x_0)) \end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz. Aynı zamanda T, α-geçişli dönüşüm olduğundan $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ yazabiliriz.

Benzer şekilde $x_2 \in Tx_1$ için $H(Tx_1, Tx_2) > 0$ olur. Böylece $(x_1, x_2) \in T_\alpha$ olduğundan x_1 ve x_2 için (2.5) eşitsizliğini kullanabiliriz. O halde

$$\begin{aligned} F(D(x_2, Tx_2)) &\leq F(H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq F(d(x_2, x_1)) - \tau(d(x_2, x_1)) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Tx_2 kompakt olduğundan $d(x_2, x_3) = D(x_2, Tx_2)$ olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} F(d(x_2, x_3)) &\leq F(H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq F(d(x_2, x_1)) - \tau(d(x_2, x_1)) \end{aligned}$$

yazabiliriz. O halde $(x_n, x_{n+1}) \in T_\alpha$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_n, x_{n-1})) - \tau(d(x_n, x_{n-1})) \tag{4.9}$$

eşitsizliğini sağlayan $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak şekilde X kümesinde bir $\{x_n\}$ dizisi bulabiliriz.

Her $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $\gamma_n = d(x_n, x_{n+1})$ ile ifade edelim. Bu durumda her n için $\gamma_n > 0$ olur ve (4.9) eşitsizliğinden $\{\gamma_n\}$ azalan olup yakınsak bir dizidir.

(2.6) koşulundan her $n > n_0$ için $\tau(\gamma_n) > \delta$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\delta > 0$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} F(\gamma_n) &\leq F(\gamma_{n-1}) - \tau(\gamma_{n-1}) \qquad (4.10) \\ &\leq F(\gamma_{n-2}) - \tau(\gamma_{n-1}) - \tau(\gamma_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq F(\gamma_0) - \tau(\gamma_{n-1}) - \tau(\gamma_{n-2}) - \cdots - \tau(\gamma_0) \\ &\leq F(\gamma_0) - \tau(\gamma_{n-1}) - \tau(\gamma_{n-2}) - \cdots - \tau(\gamma_{n_0}) \\ &\leq F(\gamma_0) - (n - n_0)\delta \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Yukarıdaki eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

buluruz. $(F2)$ koşulundan

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

elde ederiz. $(F3)$ koşuluyla birlikte

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k F(\gamma_n) = 0 \tag{4.11}$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ vardır. (4.10) eşitsizliğinden her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} \gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) &\leq \gamma_n^k \left[F(\gamma_0) - (n-n_0)\delta\right] - \gamma_n^k F(d_0) \\ &= -\gamma_n^k (n-n_0)\delta \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizlik (4.11) ifadesinde dikkate alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma_n^k = 0$$

olur. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için $n\gamma_n^k \leq 1$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\{x_n\}$ dizisinin d metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $m > n \geq n_1$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ alalım. Metrik için üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

buluruz.

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi (X, d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

(4.1) eşitsizliğinden $\{x_n\}$ dizisi aynı zamanda (X, ρ) metrik uzayında da bir Cauchy dizisidir. (X, ρ) bir tam metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $\rho(x_n, x) \to 0$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.

T kapalı küme değerli bir dönüşüm (ρ metriğine göre) ise $(x_n, x_{n+1}) \to (x, x)$ olduğundan $x \in Tx$ elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi α'nın (B) özelliğine sahip olduğunu kabul edelim.

$\rho(x_n, x) \to 0$ ve $D(x, Tx) > 0$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $D(x_{n+1}, Tx) > 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

(2.5) eşitsizliğinden ve $(F1)$ koşulundan her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} F(D(x_{n+1}, Tx)) &\leq F(H(Tx_n, Tx)) \\ &\leq F(d(x_n, x)) - \tau(d(x_n, x)) \end{aligned}$$

ve

$$D(x_{n+1}, Tx) \leq d(x_n, x)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Buradan $n \to \infty$ için limit alırsak $D(x, Tx) = 0$ buluruz ve bu bir çelişkidir. O halde T dönüşümünün X kümesinde bir sabit noktası vardır.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 4.4 $F \in \mathcal{F}_*$ ile Teorem 4.4'de $K_d(X)$ yerine $CB_d(X)$ alabiliriz.

Teorem 4.5 (X, ρ) bir tam metrik uzay ve d, X kümesi üzerinde (4.1) koşulunu sağlayan bir diğer metrik, $T : X \to CB_d(X)$ bir α-geçişli ve (2.6) koşulunu sağlayan τ büzülme çarpanı ve $F \in \mathcal{F}_*$ ile birlikte küme değerli bir (α, F)-büzülme olsun. Ayrıca $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ mevcut olsun. Bu durumda T kapalı küme değerli dönüşüm (ρ metriğine göre) ise T dönüşümü X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 4.4'ün ispatındaki gibi başlayalım. $(F4)$ koşulunu göz önüne alarak

$$F(D(x_1, Tx_1)) = \inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1, y))$$

eşitliğini yazabiliriz.

Böylece

$$\begin{aligned} F(D(x_1, Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq F(d(x_1, x_0)) - \tau(d(x_1, x_0)) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve buradan

$$\begin{aligned} \inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1, y)) &\leq F(d(x_1, x_0)) - \tau(d(x_1, x_0)) \\ &< F(d(x_1, x_0)) - \frac{\tau(d(x_1, x_0))}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. O halde

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \frac{\tau(d(x_1, x_0))}{2}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır.

İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.4'ün ispatındaki gibi tamamlanabilir. ∎

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında literatürdeki bilgiler kullanılarak bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak iki metriğe sahip bir küme üzerinde tek değerli dönüşümler için genelleştirilmiş F-büzülmeler ile sabit nokta sonuçları verilmiştir. Elde edilen bu sonuçların literatürdeki bazı sabit nokta teoremlerinden daha genel olduğunu gösteren örnekler verilmiştir. Daha sonra iki metriğe sahip bir küme üzerinde tek değerli dönüşümler için elde edilen teoremler, küme değerli dönüşümler için de elde edilmiştir. İki metriğe sahip bir küme üzerinde küme değerli dönüşümler için önce F-büzülmeler ile sonra α-geçişli dönüşümler ile ilgili sabit nokta teoremleri verilmiştir. Bu teoremlere ilişkin sonuçlar ve örnekler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar literatüre yeni sonuçlar kattığı ve farklı bir bakış açısı sunduğu için büyük önem arz etmektedir.

KAYNAKLAR

Acar, Ö., Durmaz, G. and Mınak, G. 2014. *Generalized multivalued F-contractions on complete metric spaces.* Bull. Iranian Math. Soc., 40 (6), 1469-1478.

Agarwal, R. P. and O'Regan, D. 2000. *Fixed point theory for generalized contractions on spaces with two metrics.* J. Math. Anal. Appl., 248, 402-414.

Altun, I., Durmaz, G., Mınak, G. and Romaguera, S. 2016. *Multivalued almost F-contractions on complete metric spaces.* Filomat, 30 (2), 441-448.

Altun, I., Mınak, G. and Dağ, H. 2015. *Multivalued F-contractions on complete metric spaces.* J. Nonlinear Convex Anal., 16(4), 659-666.

Asl, J. H., Rezapour, S. and Shahzad, N. 2012. *On fixed points of α-ψ-contractive multifunctions.* Fixed Point Theory Appl., 212, 6 pages.

Banach, S. 1922. *Sur les operations dans les ensembles abstraits et laur application aux equations itegrales.* Fundam. Math., 3, 133-181.

Berinde, V. 2007. *Iterative Approximation of Fixed Points.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Brouwer, L. E. J. 1910. *Über ein eindeutige, stetige transformationen von Flächen in sich.* Math. Ann., 69, 176-180.

Brouwer, L. E. J. 1912. *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.* Math. Ann., 71, 97-115.

Ćirić, Lj. B. 1974. *A generalization of Banach's contraction principle.* Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.

Ćirić, Lj. B. 2003. *Fixed Point Theory, Contraction Mapping Principle.* Faculty of Mechanical Enginearing, University of Belgrade, Beograd.

Ćirić, Lj. B. 2009. *Multivalued nonlinear contraction mappings.* Nonlinear Anal., 71 (7-8), 2716-2723.

Cosentino, M. and Vetro, P. 2014. *Fixed point results for F-contractive mappings of Hardy-Rogers-type.* Filomat, 28 (4), 715-722.

Daffer, P. Z. and Kaneko, H. 1995. *Fixed points of generalized contractive multivalued mappings.* J. Math. Anal. Appl., 192, (2), 655-666.

Du, W. S. 2012. *On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps.* Topology Appl., 159 (1), 49-56.

Durmaz, G. and Altun, I. 2016. *Fixed point results for α-admissible multivalued F-contractions.* Miskolc Math. Notes, 17 (1), 187-199.

Edelstein, M. 1962. *On fixed and periodic points under contractive mappings.* J. Lond. Math. Soc., 37, 74-75.

Feng, Y. and Liu, S. 2006. *Fixed point theorems for multivalued contractive mappings and Caristi type mappings.* J. Math. Anal. Appl., 317 (1), 103-112.

Hardy, G. E. and Rogers, T. D. 1973. *A generalization of a fixed point theorem of Reich.* Canad. Math. Bull., 16, 201-206.

Hu, S. and Papageorgiou, N. S. 1997. *Handbook of Multivalued Analysis. Volume I: Theory, 1st ed.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Istrăţescu, V. I. 1981. *Fixed Point Theory: An Introduction, 1st ed.* Springer, The Netherlands.

Kamran, T. and Kiran, Q. 2011. *Fixed point theorems for multivalued mappings obtained by altering distances.* Math. Comput. Modelling, 54 (11-12), 2772-2777.

Klim, D. and Wardowski D. 2007. *Fixed point theorems for setvalued contractions in complete metric spaces.* J. Math. Anal. Appl., 334 (1), 132-139.

Lazăr, T., O'Regan, D. and Petruşel, A. 2008. *Fixed points and homotopy results for Ćirić-type multivalued operators on a set with two metrics.* Bull. Iranian Math, Soc., 45 (1), 67-73.

Maia, M. G. 1968. *Un'obsservazione sullu contrazioni metriche.* Rend. Sem. Mat. Uni. Padova, 40, 139-143.

Mınak, G., Acar, Ö. and Altun, I. 2013. *Multivalued pseudo-Picard operators and fixed point results.* J. Func. Spaces Appl., 827453, 7 pages.

Mınak, G., Helvacı, A. and Altun, I. 2014. *Ćirić type generalized F-contractions on complete metric spaces and fixed point results.* Filomat, 28 (6), 1143-1151.

Mınak, G., Olgun, M. and Altun, I. 2015. *A new approach to fixed point theorems for multivalued contractive maps.* Carpathian J. Math., 31 (2), 241-248.

Mizoguchi, N. and Takahashi, W. 1989. *Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces.* J. Math. Anal. Appl., 141 (1), 177-188.

Mohammadi, B., Rezapour, S. and Shahzad, N. 2013. *Some results on fixed points of α-ψ-Ćirić generalized multifunctions.* Fixed Point Theory Appl., 24, 10 pages.

Nadler, S. B. 1969. *Multi-valued contraction mappings.* Pacific J. Math., 30, 475-488.

Olgun, M., Mınak, G. and Altun, I. 2016. *A new approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorems.* J. Nonlinear Convex Anal., 17 (3), 579-587.

Reich, S. 1971. *Kannan's fixed point theorem.* Boll. Un. Math. Ital., 4 (4), 1-11.

Reich, S. 1972. *Fixed points of contractive functions.* Boll. Un. Math. Ital., 4 (5), 26-42.

Samet, B., Vetro, C. and Vetro, P. 2012. *Fixed points theorems for α-ψ-contractive type mappings.* Nonlinear Anal., 75, 2154-2165.

Schauder, J. 1930. *Der Fixpunktsatz in Funktionenräumen.* Studia Math., 2, 171-182.

Sgrio, M. and Vetro, C. 2013. *Multi-valued F-contractions and the solution of certain functional and integral equations.* Filomat, 27 (7), 1259-1268.

Suzuki, T. 2008. *Mizoguchi-Takahashi's fixed point theorem is a real generalization of Nadler's.* J. Math. Anal. Appl., 340 (1), 752-755.

Wardowski, D. 2012. *Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces.* Fixed Point Theory Appl., 94, 6 pages.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğçe ALYILDIZ

Doğum Yeri : Seyhan

Doğum Tarihi : 16/03/1989

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Ahmet Kurttepeli Lisesi (YDA) (2003-2007)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü (2007-2011)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (2012-2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

- Ankara Üniversitesi Elmadağ Meslek Yüksek Okulu (2012-2013)
- Ankara Üniversitesi Gama Meslek Yüksek Okulu (2013-2014)

Yayınları:

- **Olgun, M., Alyıldız, T., Biçer, Ö. and Altun, İ.,** Fixed point results for F-contractions on space with two metrics, Filomat, (2017) 31:17, 5421-5426.

- **Olgun, M., Alyıldız, T., Biçer, Ö. and Altun, İ.,** Maia type fixed point results for multivalued F-contractions (submitted).