

# A 308 Astrofizik II

Prof. Dr. Fehmi EKMEKÇİ

Ankara Üni. Fen Fak. Astronomi ve  
Uzay Bilimleri Bölümü

# Yararlanılacak Kaynaklar

- A. Kızılırmak, 1970, Astrofiziğe Giriş, Ege Üni. Fen Fak. Matbaası, Bornova-İzmir
- Lloyd Motz, Anneta Duven, 1974, Astronomide Temel Bilgiler, 4 Cilt, İ.Ü. Yayınları (Çeviri), Fen Fak. Basımevi-İST.
- Prof. Dr. Nüzhet Gökdoğan, 1978, Spektroskopiye Giriş, Fen Fak. Basımevi-İST.

# Yararlanılacak Kaynaklar (devam)

- Lawrence H. Aller, 1963, The Atmospheres of the Sun and Stars, The Ronald Press Comp. New York (A81250-523.7 ALL1963)
- Eva Novotny, 1973, Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors, Oxford Univ. Press. New York, London, Toronto
- Physics 7- Lectures & Homework : Introduction to Astronomy  
<http://cassfos02.ucsd.edu/physics/ph7/lectures.htm>

# Yararlanılacak Kaynaklar (devam)

- Index to Lectures – Astronomy 101/103

<http://instruct1.cit.cornell.edu/courses/astro101/>

- Astronomy 162 – Stars, Galaxies, and Cosmology

<http://csep10.phys.utk.edu/astr162/lect/index.html>

- Prof.Dr. Semanur Engin, Yıldız Atmosferleri Ders Notları

## 6. UYARTILMA, İYONLAŞMA VE AYRIŞMA

**Astrofizik, 1500 – 2000** dereceden **milyonlarca dereceye** kadar **sıcaklıktaki** maddelerin özellikleri **ile ilgilenir**. **İlk yaklaşım olarak ilgi**, durgun durum koşullarında toplanmıştır. Değişen yıldızların incelenmesinde değişimlerin her biri, bir durgun durum olarak ele alınabilecek bir dizi ayrı durum olarak ele alınır.

Bir durgun durumun bir ısı dengesi koşulunu sağlaması gerekmez. Bu özellik unutulmaması gereken önemli bir özelliktir. Bir yıldızın madde katmanlarından ışınımın geçişini gözönüne alalım. Durum zamanla değişmediği için, durgun bir durum olabilir, fakat kesin olarak bir denge değildir. Bir katmanın bir yanından öbür yanına erkenin akışı bir sıcaklık gradyenti gerektirir ; **denge koşullarında ise bir sıcaklık farkı olamaz**. Yine de, belirli atomik olayların hızı, ısı dengesindekiyle hemen hemen aynı olabilir ve sorunun ilk incelemesinde tam bir ısı dengesi için elde edilen değişik bağıntılar yararlı olacaktır.

# 6.1. Isı Dengesi

Gazlar ısı dengesi durumunda iseler, uyarılma, iyonlaşma ve ayrışma için denklemleri kolayca elde edilir. Isı dengesinde bulunan bir gazdaki olayların görünümüne bakacak olursak : Sıcaklık yeterli ise uyarılma söz konusudur. Duvarlarının sıcaklığı 5000 ya da 10000 °K sıcaklığında olan kuramsal bir kutu içindeki maddeyi göz önüne alalım. Bu kutu içindeki atomlar hızla hareket ederek birbirleriyle çarpışır (çarpışma ile uyarılma), erke soğurup tekrar yayınlar ve elektronlarını kaybedip yine yakalarlar. Her bir olayın, kendisinin karşıtıyla dengede bulunduğu bir durum elde edilir. Sözelimi bir elektronun bir atomla çarpışarak erkesini ona verip onu uyardığı bütün çarpışmalar, uyarılmış bir atomun yanından geçen bir elektrona erkesini verdiği (süperelastik çarpışma) durumların sayısıyla dengelenir. Ya da, sıcaklık yeterince yüksek ise iyonlaşma sözkonusu olup belli bir düzeydeki her iyonlaşma, eş düzeydeki elektron yakalamalarla dengelenir.

Bu düşünceleri, sayısal bir şekilde ve genel olarak şöyle belirtebiliriz :  $n$  den  $n''$  ye olan soğurmaların sayısı, ışınım yayınlarak  $n''$  den  $n$  ye atlayan atomların geçiş sayısına eşittir. Ya da,  $n$  den  $n''$  ye çarpışmayla olan uyarılmaların sayısı bunun tersi olan süperelastik çarpışmaların sayısına eşittir (Şekil 6.1).

$n \rightarrow n''$  soğurma ile olan geçişlerin sayısı  $n'' \rightarrow n$  salma ile geçişlerin sayısına eşitse ;

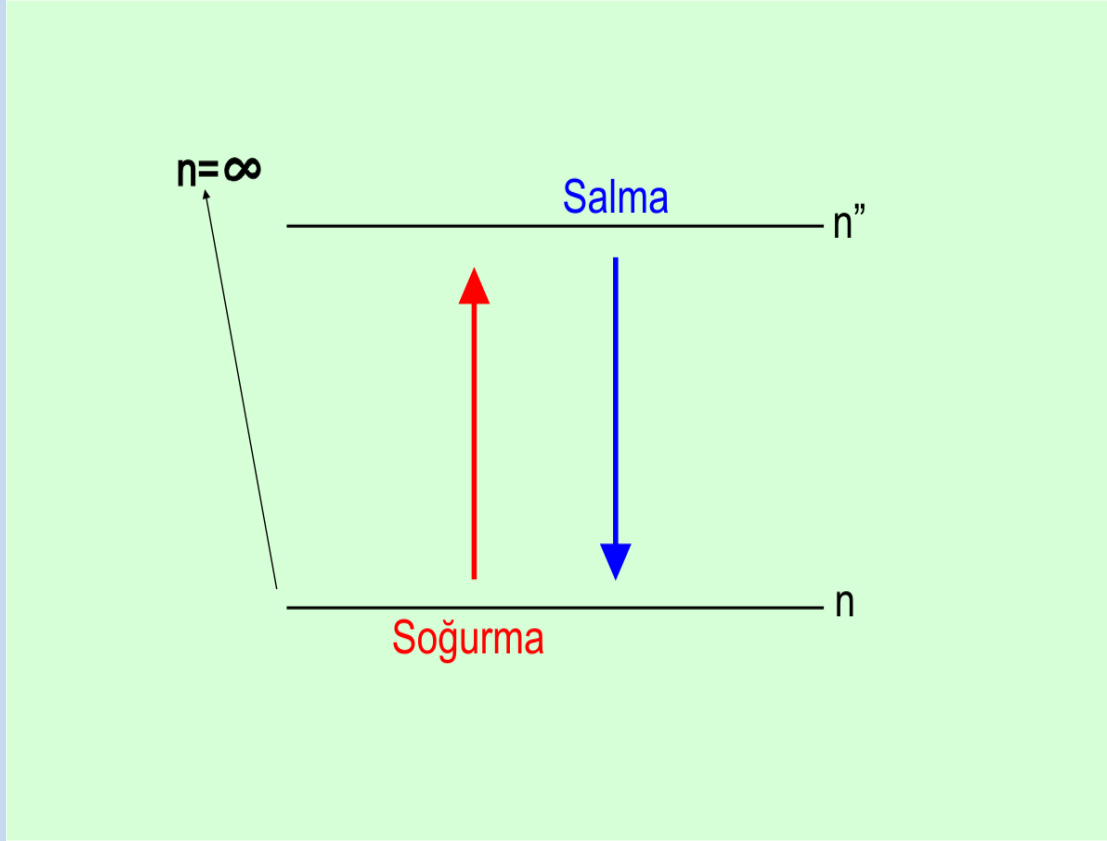
ya da

$n \rightarrow n''$  den çarpışma ile geçen atomların sayısı  $n'' \rightarrow n$  ye süperelastik çarpışma (sıyrarak çarpışma ile erke aktarma) ile geçen atomların sayısına eşitse ;

ya da

$n$  düzeyinden iyonlaşanların (iyonlaşan elektron sayısı) sayısı,  $n$  düzeyine yakalanan elektronların sayısına eşitse

**ISI DENGESİ** vardır denir.



Şekil 6.1. Isı dengesi koşulu altındaki atomik süreçler.

## 6.1. Isı Dengesi (Devamı)

$n$  düzeyinden olan **iyonlaşmaların sayısı**, aynı  $n$  düzeyindeki **elektron yakalamaları sayısına eşittir**. **Her bir olayın, kendisinin tersi olan olayla dengelendiği parçacık topluluğunun tam bir ISI DENGESİNDE olduğu söylenir**. Üzerinde önemle duracağımız **uyartılma ve iyonlaşma denklemleri, ISI DENGESİ koşulu ile geçerlidir**. Zira bu koşulun varsayımına dayanarak elde edilmişlerdir.

Her ne kadar **termodinamiğin astronomlarca kullanımı sınırlı ise de**, **maddenin makroskopik özellikleriyle ilgilenen termodinamik bize ısı dengesindeki maddeye ilişkin çok bilgi verir**. Daha kolay ve daha güçlü bir yöntem ise, **atomların sahip oldukları bilinen enerji düzeylerini kullanan İstatistik Mekanik'tir**. **İstatistik mekaniğin uygulanabilmesi, bir ısı dengesinin varlığını gerektirir ve atomlarla moleküllerin bir diğeriyle karşılıklı etkileştikleri varsayılır**. **Fakat bir atomdan diğere ne kadar enerji geçtiğine ilişkin ayrıntılı bilgiye gerek yoktur**.

**İstatistik mekanik, bize hızların Maxwell dağılımı, Planck Yasası (5. Bölüm), Boltzmann Yasası, İyonizasyon ve ayrışma eşitlikleri gibi önemli bağıntıların çıkarılmasını sağlar**.



## 6.2. Boltzmann (Uyartılma) Yasası

Temel bağıntılardan biri **Boltzmann Yasasıdır**. Bu yasa, herhangi bir **B** düzeyindeki atomların sayısı  $N_B$ , ve herhangi bir **A** düzeyindeki atomların sayısı  $N_A$  olmak üzere, **A** ve **B** düzeylerindeki **atomların göreceli sayılarının ısı dengesi koşulu altında**,

$$N_B / N_A = (g_B / g_A) \exp(-\chi_{AB} / kT) \dots\dots(1)$$

ile belirlendiğini söyler. Burada  $\chi_{AB} = E_B - E_A$  olup **A** ve **B** düzeyleri arasındaki **enerji farkı**,  $g_B = 2J_B + 1$  **üst enerji düzeyi için** ve  $g_A = 2J_A + 1$  **alt enerji düzeyi için** istatistik ağırlıklar ve **T** **ısı sıcaklığıdır**.  $J_B$  : **B** düzeyinin **toplam açısal momentum kuantum sayısı**,  $J_A$  : **A** düzeyinin **toplam açısal momentum kuantum sayısıdır**.

**ÖZEL DURUM** : Hidrojen için  $g$  istatistik ağırlıkları,  $n$ : Baş kuantum sayısı olmak üzere  $g = 2n^2$  ile verilir.

(1) den

$$\log(N_B / N_A) = \log(g_B / g_A) - (\chi_{AB} / kT) \times 0.4343$$

Bu bağıntının kanıtı üzerinde burada durulmayacaktır. Bunu bir postulat gibi kabul edeceğiz. Eğer  $\chi$  eV biriminde ifade edilirse, bağıntı şu şekile yazılabilir :

$$\log(N_B / N_A) = - (5040.4 / T) \chi_{AB} + \log(g_B / g_A) \dots\dots(2)$$

Bu denklem **herhangi iki düzeydeki atomların sayı oranını** verir.

## 6.2. Boltzmann (Uyartılma) Yasası (Devamı)

Ancak bazı durumlarda herhangi bir düzeydeki atomların sayısının toplam atom sayısına oranı da gerekebilir. Kimi zaman  $r$  düzeyindeki atomların sayısının tüm düzeylerdeki atomların toplam sayısına oranını kullanmak isteriz.  $N_r$ ,  $r$  düzeyindeki atomların sayısı olmak üzere toplam atomlar  $N = \sum N_r$  dir. (1) denkleminde, atomların toplam sayısını birinci düzeydekiler türünden belirtebiliriz (Şekil 6.2).

$$N = (N_1/g_1) [g_1 + g_2 \exp(-\chi_{1,2}/kT) + g_3 \exp(-\chi_{1,3}/kT) + \dots] \\ = (N_1/g_1) B(T) \quad \dots\dots(3)$$

$N$ : Toplam atom sayısı ,  $B(T)$ : Bölünme fonksiyonu

Hidrojeninde olduğu gibi eğer,  $-\chi_{1,2} \gg 1 \text{ eV}$  ise, yaklaşık olarak  $B(T) \cong g_1$  alınır (sıcaklığa bağlı, yani  $T$  de uygun olmalı !).



## 6.2. Boltzmann (Uyartılma) Yasası(Devamı)

$T = 5000$  °K ise bu yaklaşımda hata %1 den küçük,  $T = 10000$  °K ise bu yaklaşımdaki hata 0.02 den küçük.  $T$  büyüdükçe (çok büyük) yukarıdaki varsayım geçerli olmamaktadır.

(3) den, Temel düzeydeki atomların sayısı  $N_1$ ,

$$N_1 = [g_1 / B(T)] N \dots\dots (4)$$

$i$  düzeyi için ise,

$$N_i / N = [g_i / B(T)] \exp(-\chi_i / kT) \dots\dots(5)$$

Bu son bağıntı, Boltzmann denkleminin çok daha genel biçimidir. Burada  $N$ , atomların toplam sayısını ve  $N_i$  ise  $i$  ninci uyartılmış düzeydeki atomların sayısını göstermektedir. Bu bağıntı, farklı uyartılmış düzeyler arasında atomların nasıl dağıldığını göstermektedir. Yüksek uyartılma düzeylerinin bolluğu, yakınlarındaki parçacıkların bozucu etkisinden etkilenir. Eğer  $P_i$ ,  $i$  uyartılmış düzeyindeki rahatsız edilmemiş atom için olasılığı gösterirse,  $B(T)$  bölünme fonksiyonu şu duruma gelir :

$$B(T) = \sum_i g_i P_i \exp(-\chi_i / kT)$$

Burada, iyonizasyon sınırı yaklaştıkça  $P_i$  olasılığı da sifıra yaklaşır. Böylece  $B(T)$  nin yakınsaması sağlanır.

## 6.2. Boltzmann (Uyartılma) Yasası(Devamı)

Eğer bozucu etkiler başlıca iyonlardan geliyorsa (Güneş ve sıcak yıldızlarda görüldüğü gibi), şöyle olur :

$$\ln P_i = - 1.33 \times 10^{-22} ( P_\varepsilon / Z^4 kT ) n^6$$

Burada  $n$ ,  $i$  ninci düzeyin baş kuantum sayısı,  $Z$  bozucu etkiye uğramış parçacıkların atomlarının çekirdeklerindeki yük ve  $P_\varepsilon$  elektron basıncıdır.

Bir örnek olarak,  $T = 6000, 8000, 10000, 15000$  ve  $20000$  °K sıcaklıklarda hidrojen için temel düzeydeki ve  $n = 2$  düzeyindeki göreceli bollukları karşılaştıralım :

Hidrojenin temel düzeyinin istatistik ağırlığı  $g_1 = 2n^2 = 2 \times 1^2 = 2$

ve  $n = 2$  düzeyi için ise,  $g_2 = 2n^2 = 2 \times 2^2 = 8$

dir. İkinci düzeyin uyartılma potansiyeli ise **10.15 eV** tur.

$$\begin{aligned} \log (N_2 / N_1) &= - (5040 / T) \times 10.15 + \log (8/2) \\ &= - (51160 / T) + 0.60 \end{aligned}$$

Buna göre elde edilen sonuçlar :

## 6.2. Boltzmann (Uyartılma) Yasası (Devamı)

Sıcaklık ( $^{\circ}\text{K}$ )	$\theta = 5040/T$	$N_2 / N_1$
6000	0.840	0.000 000 01
8000	0.630	.000 001 6
10000	0.504	.000 031
15000	0.336	.001 55
20000	0.252	.011

Sıcaklık artışıyla ikinci düzeydeki görelî atom sayısının hızlı artışına **dikkat ediniz**. Bunun anlamı ise, yani sıcaklığın artışı, tayfta Balmer çizgi yeğînlîklerinin artması demektir. Oysa yıldız tayflarında görünüm öyle olmuyor. 6000  $^{\circ}\text{K}$  den 10000  $^{\circ}\text{K}$  e doğru sıcaklıktaki bir artış için bir artma vardır ve bu A0 tayf türünde ( $\sim 10000$   $^{\circ}\text{K}$  de)  $H_{\alpha}$  ( H çizgilerinin Balmer serisi) yeğînlîği maksimum düzeyde olmaktadır. Ancak sıcaklığın daha da artmasıyla yıldız tayfında bu yeğînlîk bir düşme göstermektedir (azalmaktadır). Bunun nedeni ise, ikinci bir olayın (iyonlaşma olayı) varlığıdır.

## 6.3. Isı Dengesinden Sapmalar

Acaba yıldızlarda gerçekten bir ısı dengesi var mıdır ? **Şüphesiz yoktur**, ancak yıldız içerisinde tasarlanacak elemanter bir kabukta, karşılaştırılabilecek kadar ısı dengesi vardır diyebiliriz. **En dış kabukta ise ısı dengesi yoktur.** Yıldız atmosferlerinde ise, **incelenen olaylara kolaylık için ısı dengesinin var olduğu kabul edilir.** Boltzmann yasası, ısı dengesi için çıkarılmıştır. Ve bu koşullar tümüyle sağlandığında kesin olarak uygulanır. Böylesi bir dengeden gaz bulutsularının ve yıldız atmosferlerinin sapmalarından, birçok ilginç sorunlar ortaya çıkar.

Bir yıldız atmosferi durumunu gözönüne alalım. **Bir yanda yıldızın sıcak ve ışınım yapan katmanları**, öbür yanda ise boş uzay vardır. **Atmosfer bir durgun durum içinde olsa bile ısı dengesinde olamaz.** Bizim görebildiğimiz katmanların hemen altında koşullar, bir yerel **T sıcaklığındaki ısı dengesi koşullarına yaklaşır** ve Boltzmann yasası yürürlükte olur. **Yüzeye doğru ilerledikçe ısı dengesi varsayımı ortadan kalkar** ve bu bölgede yıldızların siyah çizgili **tayfı oluşur.**

## 6.3. Isı Dengesinden Sapmalar (Devamı)

İlk yaklaşımımızda Boltzmann ve iyonlaşma denklemini uyguluyoruz ve elde ettiğimiz sonuçları gözlemlerle karşılaştırırız. Atomların değişik enerji durumları ile iyonizasyon basamakları arasındaki dağılımıyla ilgilenildiğinde, ısı dengesinin varsayılması çok yararlı olacaktır. Burada temel soru, istatistik ve mekanikten elde edilen sonuçlar ve ısı dengesi varlığı varsayımının yardımıyla, yıldız tayflarının doğru bir açıklaması nasıl yapılabilir sorusudur.

Gaz bulutsuları, bize termodinamik ve istatistik mekaniğin biraz yardımcı olduklarını gösteren örnektir.

Eğer bunları uygulamaya kalkışırsak, bir takım uyumsuzluk ve çelişkilerle karşı karşıya kalırız. Gaz bulutsularının tayflarını açıklayabilmek için başka yol denenmelidir ; bu tayfların açıklamasını, ayrıntılı mekanizmalarda öngörülen fiziksel olaylar hipotezlerine dayamak zorundayız. Gaz bulutsuların tayflarındaki hidrojen ve helyumun parlak çizgilerinin yine elektronla birleşmeyi izleyen fotoiyonizasyonla üretildiklerine ilişkin kanıtlar vardır ; oysa yasaklanmış çizgilerin ise atomları en yakın kararsız düzeylere çıkaran çarpışmalardan ve bu durumdaki atomun tekrar temel düzeye inerken bir enerji kuantumu yayınladığına ilişkin belirtiler de vardır.



## 6.3. Isı Dengesinden Sapmalar (Devamı)

Bu koşullar altında, bir durgun durum için sağlanması gerekli iki tür bağıntı vardır :

- a) belli bir düzeyin bolluğunun aynı kalacağını belirleyen istatistik denge denklemleri,
- b) bir oylumdaki soğurulan tüm erkenin, salınan tüm erkeye eşit olduğunu belirten erkenin korunumu denklemi.

Isı dengesinden oldukça ayrılma koşulu altında bile kimi olaylar, sözde varmış gibi, sürecelecektir. Boltzmann eşitliği artık uygulanamayacak ve ışınım alanı bir zarftan sapacaktır ; fakat iyonlaşmış bir gaz içindeki iyon ve elektronların hız dağılımı,  $T$  sıcaklığındaki Maxwell dağılımına benzer kalacaktır.

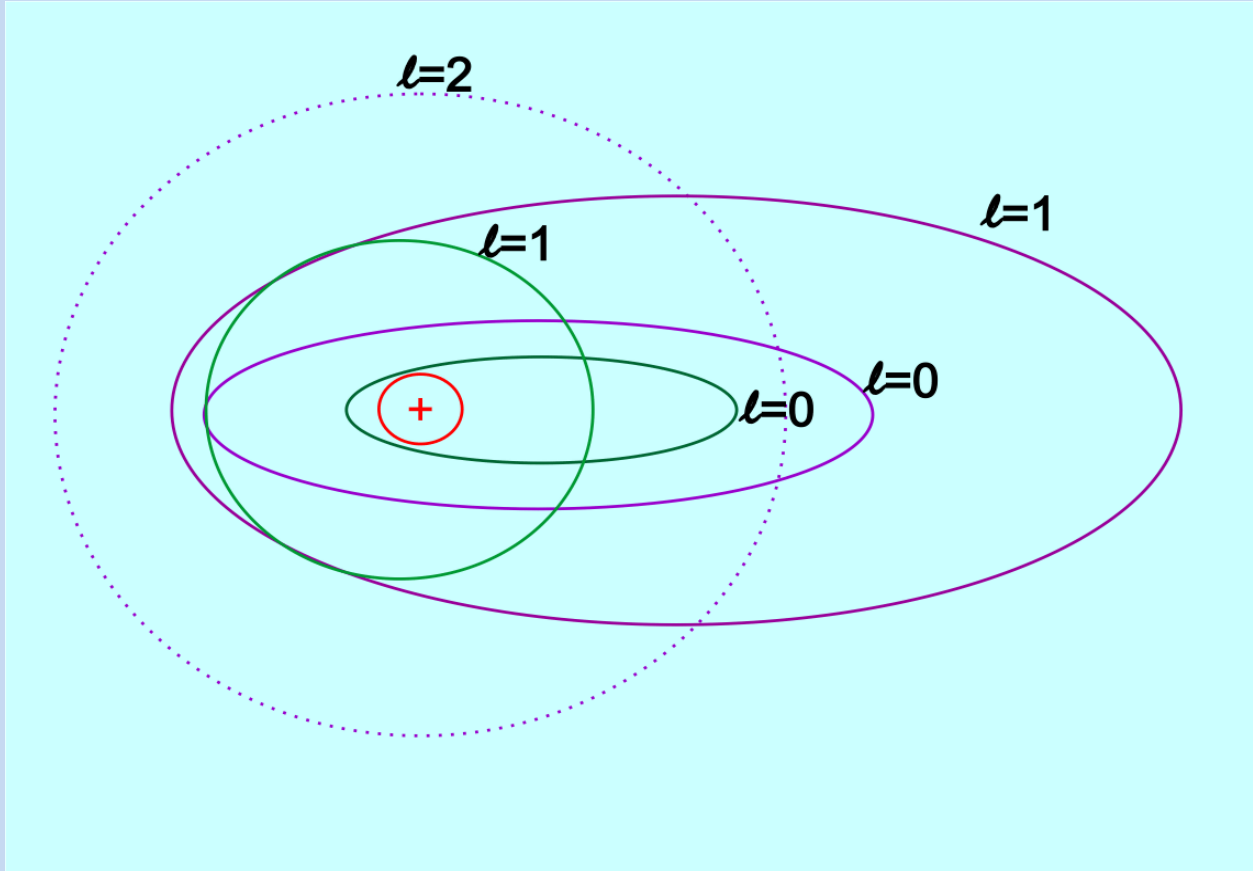
Yıldız atmosferi sorununda ısı dengesinden çok çok sapan durumlar vardır ve çok ayrıntılı incelemeler gereklidir. Güneş'in renk küre (**kromosfer**) ve taç küresinin (**korona**) bir çok özellikleri, ısı dengesiyle hiç bir şekilde açıklanamamaktadır.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi

Verilen belirli bir sıcaklık ve basınçta, yalnız değişik düzeylerdeki atomların görelî sayılarını değil, aynı zamanda nötr ve iyonlaşmış atomlarına göre sayılarını da bilmek önemlidir. Isı dengesinde atomlar, atomun iyonlaşma potansiyeline ve sıcaklığa bağı olarak belli bir hızla elektronlarını kaybedeceklerdir. Verilen bir sıcaklıkta kalsiyum atomları (iyonlaşma potansiyeli 6.09 eV), hidrojen atomlarına göre (iyonlaşma potansiyeli 13.54 eV) daha büyük bir hızla elektronlarını kaybedeceklerdir. Öte yandan, iyonların elektronlarını tekrar yakalayabilme hızı da elektron yoğunluğuna bağı olacaktır (ya da elektron basıncına ; çünkü  $P_{\epsilon} = N_{\epsilon} kT$  dir).

Saha, termodinamik düşüncelerle iyonlaşma denklemini çıkardı ve onun astrofizik sorunları için önemini gösterdi. Fakat, burada Menzel'in yolu olan daha basit bir çıkarma yolu izlenecektir.

Menzel'in yöntemi, kesikli düzeylere olduğu gibi sürekliliğe de, süreklilik için seçilmiş özel ağırlıklarla Boltzmann denkleminin uygulanmasıdır. Bohr modelindeki kesikli düzeyler eliptik yörüngelerle ve süreklilik düzeyleri ise hiperbolik yörüngelerle gösterilir (Şekil 6.3).

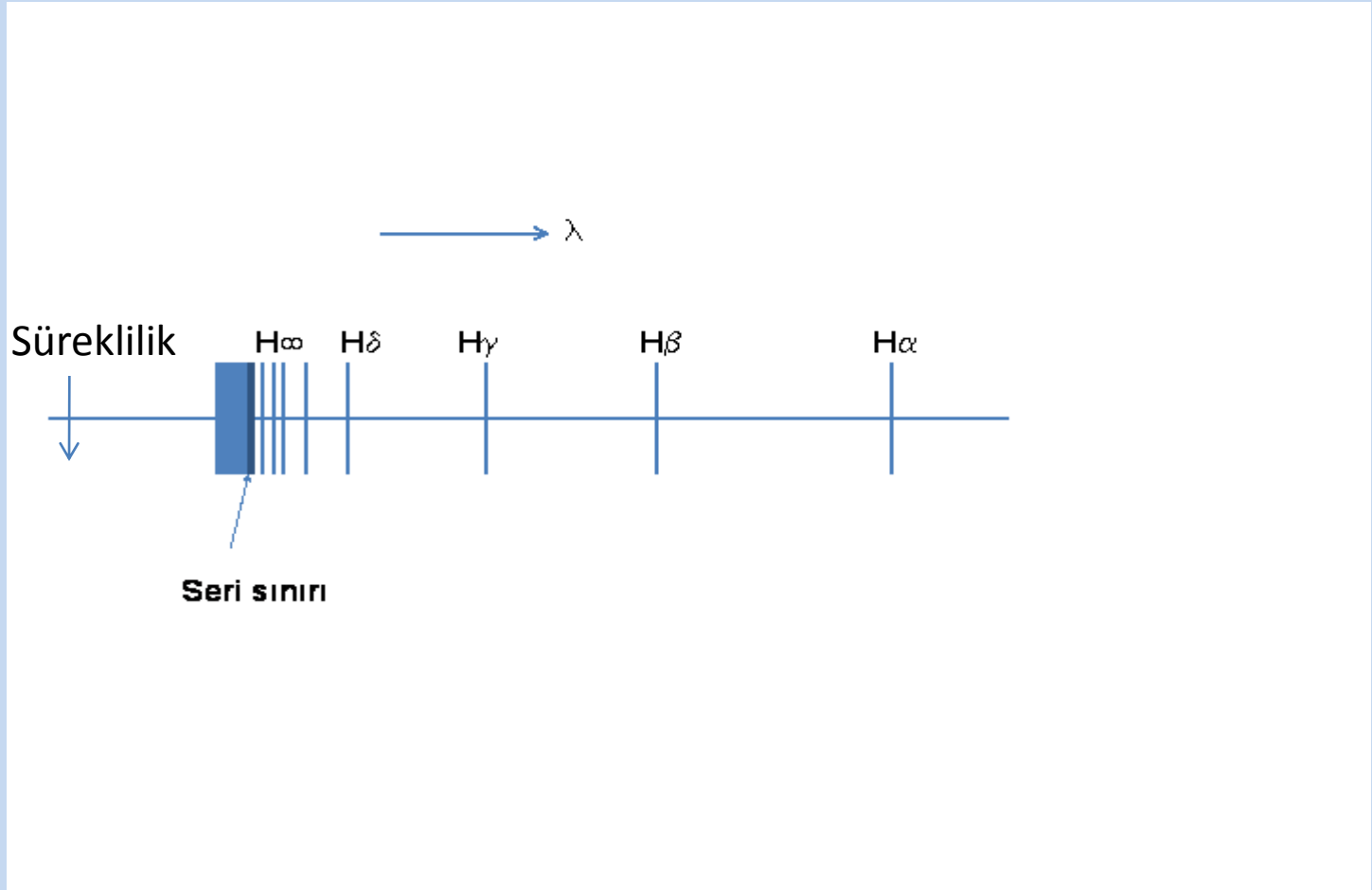


Şekil 6.3. Sommerfeld atom modeli ve elektron yörüngeleri.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

Bu görünüşe göre, nötr ve iyonlaşmış atomlar arasındaki ayrıcalık biraz yapaydır. Bunun anlamı, iyonlaşmış bir atomu, elektronu hiperbolik bir yörüngede bulunan bir nötr atom gibi düşünebiliriz. Buna göre Boltzmann denklemi iyonlaşmayı, uyarılma koşulları gibi iyi bir biçimde göstermeye yetenekli olacaktır.

Şekil 6.4 de bir yıldız tayfındaki Balmer serisinin görünümü verilmektedir. Şekilde görüleceği gibi sürekliliğin yeğinliği seri sınırında çok büyüktür ve seri sınırından uzaklaştıkça sürekliliğin yeğinliği azar azar düşer. Menzel'in kabulüne göre, süreklilik kesikli (kuantumlu) enerji düzeylerine karşılık gelir. Süreklilik için elektronların hiperbolik yörüngelerde olduğu varsayılır, öyle ki elektronların hiperbolik yörüngeye geçişleri sonucu süreklilik oluşur. O zaman iyonlaşmayı, eliptik bir yörüngeden hiperbolik bir yörüngeye bir geçiş olarak tasarlayabileceğimiz bir tür uyarılma sayabiliriz.



Şekil 6.4. Balmer serisini içeren tayf örneği.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

$\chi_0$  iyonlaşma erkesi bir elektronun serbest duruma geçmesi için verilmesi gerekli erke olduğundan, serbest elektronların toplam erkesi şöyle olur :

$$E = \chi_0 + (1/2) m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad \text{veya}$$
$$= \chi_0 + (1/2) m (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

ya da momentum cinsinden,

$$E = \chi_0 + (1/2m) (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) \quad \dots(6)$$

Boltzmann yasasını sürekliliğe uygulamadan önce, “ağırlıkları” sürekli erke düzeylerine uyarlamak gerekir. Kesikli düzeyler için istatistik ağırlıkların  $2J + 1$  olduğunu görmüştük. Ağırlık düzeneğinin, belirli düzeyler için kabul edilenlerle uygunluğunu koruyabilmek için, momentumları,  $P_1$  ile  $P_1+dP_1$  ...v.b. ve uzay konları  $q_1$  ile  $q_1+dq_1$  ...v.b. arasında olan  $dN$  serbest elektron için, ağırlıkları aşağıdaki gibi kabul etmemiz gerektiği gösterilebilir :

$$g_i = 2 g'_1 (dP_1 dP_2 dP_3 dq_1 dq_2 dq_3 / h^3) \quad \dots\dots\dots(7)$$

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

Burada  $g'_1$ , iyonlaşmış atomun temel düzeyinin istatistik ağırlığıdır ; 2 katsayısı **elektron spininin iki yönelebilmeye olasılığından** ortaya çıkar ve  $dP_1 \dots dq_3$  çarpanı ise  $h^3$  biriminde ifade edilmiş **evre uzayının** hacmidir. Eğer (6) ve (7) nolu denklemleri (1) de yerine koyarsak, yani  $\chi_{AB}$  yerine  $E$  ve  $g$  yerine  $g_i$  alarak,

$$dN_\varepsilon / N_{01} = (2g'_1 / g_{01}) [\exp(-\chi_o / kT) / h^3] \exp(-P^2 / 2mkT) dP_1 \dots dq_3 \dots (8)$$

elde edilir.  $N_{01}$  temel düzeydeki **nötr atomların sayısı** ve  $g_{01}$  ise temel düzeyin **istatistik ağırlığıdır**. Şimdi öyle bir boyutta  $V_o$  oylumu seçelim ki, onun en alçak düzeyinde **yalnızca bir iyonlaşmış atom** ve  $N_\varepsilon$  **elektron** bulunsun ve bu  $N$  **elektronun dN kadarının momentimleri**  $P_1$  ile  $P_1 + dP_1$  **v.b** arasında ve **konları da**  $q_1$  ile  $q_1 + dq_1$  **..v.b.** arasında bulunsun. **Eğer şu aşağıdaki bağıntıyı** kullanır,

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 \chi^2) d\chi = \sqrt{\pi} / 2\alpha$$

ve  $dN$  yi  $V_o$  **oylumu** üzerinden **momentimlere göre** integre edilirse,

$$N_\varepsilon / N_{01} = (2g'_1 / g_{01}) [\exp(-\chi_o / kT) / h^3] \int_{-\infty}^\infty \int \int \exp(-P^2 / 2mkT) dP_1 dP_2 dP_3 \int \int \int dq_1 dq_2 dq_3$$

ve,

$$N_\varepsilon / N_{01} = [ 2 (2\pi mkT)^{3/2} / h^3 ] (g'_1 / g_{01}) \exp(-\chi_o / kT) V_o \dots \dots \dots (9)$$

elde edilir.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

$V_0$ ,  $N'_1 V_0 = 1$  koşuluyla hesaplandığından ve,

$$N_{01} = g_{01} (N_0 / B_0) ; N'_1 = N_1 g'_1 / B(T)$$

olduğundan [burada  $N_0$ ,  $\text{cm}^3$  deki nötr atomların toplam sayısı,  $N_1$   $\text{cm}^3$  deki bir kez iyonlaşmış atomların toplam sayısı ve  $N'_1$  temel düzeydeki  $\text{cm}^3$  deki iyonlaşmış (1 kez iyonlaşmış) atomların sayısıdır], (9) iyonlaşma denklemi,

$$N_1 N_\varepsilon / N_0 = [(2\pi m k T)^{3/2} / h^3] [2B_1(T) / B_0(T)] \exp(-\chi_0 / kT) \dots(10)$$

biçimine girer. Burada,

$B_1(T)$  : 1 kez iyonlaşmış atomlar için bölünme fonksiyonu

$B_0(T)$  : Nötr atomların bölünme fonksiyonu dur.

Bu tür bir denklemin bir kezden fazla iyonlaşmalar için de gerekli olduğu kolayca gösterilebilir. Gerçekten de verilen herhangi bir koşul altında yalnızca iki iyonlaşma düzeyi, sözgelimi  $q$  nuncu ve  $(q+1)$  inci baskındır. Bu nedenle,

$$N_{q+1} N_\varepsilon / N_q = [(2\pi m k T)^{3/2} / h^3] [2B_{q+1}(T) / B_q(T)] \exp(-\chi_q / kT) \dots(11)$$

yazılabilir. Burada  $N_q$ ,  $q$  nuncu  $N_{q+1}$ ,  $(q+1)$  inci iyonlaşma düzeyindeki atomların sayıları ve  $\chi_q$  ise atomu  $q$  nuncu iyonlaşma düzeyinden  $(q+1)$  inci iyonlaşma düzeyine iyonlaştırmak için gerekli erkedir.



## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

Özetle,

$N_q$  :  $q$  kez iyonlaşmış atom sayısı

$N_{q+1}$  :  $q+1$  kez iyonlaşmış atom sayısı

$\chi_q$  :  $q$  kez iyonlaşmış atomun bir kez daha iyonlaşması için gereken erkektir.

Bir çok sorunda elektron yoğunluğu yerine elektron basıncını almak daha uygun olur. (10) denkleminde

$P_\varepsilon = N_\varepsilon kT \rightarrow N_\varepsilon = P_\varepsilon / kT$  koyarak,

$$N_1 P_\varepsilon / N_0 = [(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2} / h^3] [2B_1(T) / B_0(T)] \exp(-\chi_0 / kT) \dots(12)$$

elde edilir, ve benzer şekilde,

$$N_{q+1} P_\varepsilon / N_q = [(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2} / h^3] [2B_{q+1}(T) / B_q(T)] \exp(-\chi_q / kT)$$

olacaktır. Sayısal hesaplamalar için logaritmik yazım şekli çok uygun olur :

$$\log ( N_1 P_\varepsilon / N_0 ) = - (5040 / T) I + 2.5 \log T - 0.48 + \log [2B_1(T) / B_0(T)] \dots(13)$$

(0.48 : sabitlerin sayı değeridir). Burada  $I$  , elektronvolt (eV) olarak iyonlaşma potansiyeli (erkesi) ;  $P_\varepsilon$  ,  $\text{dyn/cm}^2$  olarak elektron basıncı ;  $N_1 \text{ cm}^3$  deki iyonlaşmış atomların sayısı ;  $N_0 \text{ cm}^3$  deki nötr atomların sayısı ;  $B_1(T)$  iyonlaşmış atomların bölünme fonksiyonu ve  $B_0(T)$  de nötr atomların bölünme fonksiyonudur.  $B$  ler sıcaklığın fonksiyonu olarak atom (ya da demir için) bir terim çizelgesi yardımıyla hesaplanabilir (Bkz. Çizelge 1).

Element	İyonlaşma Potansiyeli			log [ 2 B( s+1 ; T) / B( s ; T) ]			
	Simge	(eV)					
		I	II	III	s = 0	s = 1	s = 2
Hidrojen	H	13,54			0,00		
Helyum	He	24,48	54,17	-	0,60	0,00	
Lityum	Li	5,37	75,31		-0,13		
Karbon	C	11,20	24,28	47,67	0,10	-0,48	0,60
Azot	N	14,49	29,49	47,24	0,62	0,13	-0,48
Oksijen	O	13,56	35,00	54,71	-0,05	0,65	0,13
Neon	Ne	21,47	40,91	64,1	1,06	0,48	-0,05
Sodyum	Na	5,12	47,10		-0,16	1,08	
Mağnezyum	Mg	7,61	14,97	79,9	0,52	-0,01	
Alüminyum	Al	5,96	18,75	28,33	-0,50	-0,60	
Silisyum	Si	8,11	16,27	33,32	0,06	-0,48	0,60
Fosfor	P	10,9	19,57	30,03	0,54	0,13	-0,48
Kükürt	S	10,31	23,3	34,9	0,01	0,65	0,13
Klor	Cl	12,9	23,70	39,7	0,47	-0,05	
Potasyum	K	4,32	31,7	46	-0,44	1,08	0,48
Kalsiyum	Ca	6,09	11,82	51,00	0,44	-0,25	1,08
Krom	Cr	6,74	16,6		0,12	0,55	
Mangan	Mn	7,40	15,6		0,36	0,23	
Demir	Fe	7,86	16,16	30,48	0,40	0,30	
Kobalt	Co	7,84	17,1		0,25		
Nikel	Ni	7,61	18,4		-0,12		
Bakır	Cu	7,69	20,18		-0,15		
Çinko	Zn	9,35	17,89		0,60		
Stronsiyum	Sr	5,67	10,98		0,32	-0,30	

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

Uyartılma ve iyonlaşma denklemleri ısı dengesinin varlığı koşulu ile geçerlidir.

$\chi_B > \chi_A$  olmak üzere

A dan B ye geçiş  $N_A$  (soğurma) ile

B den A ya geçiş  $N_B$  (salma) ile orantılıdır.

Bu denklemler (uyartılma), ısı dengesinde A dan B ye geçen atomların sayısının, B den A ya geçenlere eşit olduğunu belirtirler.

İyonlaşma sayısı  $N_0$  ile orantılıdır. Elektron yakalama sayısı da  $N_1 \times N_\varepsilon$  ile orantılıdır. Ve bu iki sayı belli bir sıcaklık için dengededir.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

### ÖRNEKLER :

1<sup>o</sup>) Eğer Güneş atmosferinin sıcaklığı  $T = 5700$  K ve elektron basıncı  $P_e = 30$  dyn / cm<sup>2</sup> ise, Güneş atmosferinde alüminyumun ne kadar kısmı nötrdür ?

### Çözüm :

Alüminyumun ilk iyonlaşma potansiyeli  $5.96$  eV ve  $[2 B_1(T) / B_0(T)] = 0.32$  dir (Çizelge 1 den).

İyonlaşma denklemi ;

$$\log (N_1 / N_0) = - (5040 / T) I + 2.5 \log T - 0.48 + \log [2 B_1(T) / B_0(T)] - \log P_e$$

$$T = 5700 \text{ K} , I = 5.96 \text{ eV} , P_e = 30 \text{ dyn / cm}^2 ,$$

$$\log [2 B_1(T) / B_0(T)] = -0.50 \text{ değerleri ile,}$$

$$\begin{aligned} \log (N_1 / N_0) &= - (5040 / 5700) 5.96 + 2.5 \log 5700 - 0.48 - 0.5 - \log 30 \\ &= 1.68 \Rightarrow N_1 / N_0 = 47.7 \text{ dir. Ya da,} \end{aligned}$$

$$N_1 / N = N_1 / (N_0 + N_1 + N_2 + \dots) \Rightarrow N_1 / N = N_1 / (N_0 + N_1) \text{ alınabilir.}$$

İstlenen  $N_0 / (N_0 + N_1) = ?$  idi.

$$N_1 / N_0 = 47.7 \Rightarrow 1 + (N_1 / N_0) = 48.7 \Rightarrow (N_0 + N_1) / N_0 = 48.7$$

$$N_0 / (N_0 + N_1) = 1 / 48.7 = 0.0205 \text{ bulunur.}$$

Başka bir deyişle tüm atomların % 2.1 'i nötr geriye kalanlar iyonlaşmış durumdadırlar.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

Geriye kalanlar,

$$1 - [N_0 / (N_0 + N_1)] = 1 - 0.0205 \cong 0.98 \text{ ya da}$$

$$N_0 / N_1 = 1 / 47.7 \Rightarrow 1 + (N_0 / N_1) = 1 + (1/47.7) \Rightarrow (N_0 + N_1) / N_1 = 48.7 / 47.7 \text{ ve}$$

$$N_1 / (N_0 + N_1) = 47.7 / 48.7 = 0.98 \text{ bulunur.}$$

Alüminyumun **ikinci iyonlaşma potansiyeli 18.75 eV** olduğundan, **alüminyum atomlarından boşlanabilecek bir kısmı ancak ikinci bir elektronunu kaybetmiş olacaktıdır.**

$$\begin{aligned} \log (N_2 / N_1) &= - (5040 / 5700) 18.75 + 2.5 \log 5700 - 0.48 - 0.60 - \log 30 \\ &= -9.746 \end{aligned}$$

dan  $N_2 / (N_1 + N_2) = 1.79 \times 10^{-10}$  nin **boşlanabilecek kadar**

**düşük olduğu** görülebilir.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

2°) **Sirius**'un atmosferinde  $T = 10000$  K ve  $P = 200$  dyn / cm<sup>2</sup> ise, bu koşullar altında **kalsiyum** atomlarından **ne kadar kısmı bir kez iyonlaşmış** durumdadır ?

**Çözüm :**

**Kalsiyum** için [Çizelge 1](#) den ;

$I = 6.09$  eV ve  $\log [2B_1(T) / B_0(T)] = 0.44$  ;  $\theta = 5040 / T$  ;  $\theta I = 3.07$  ,  $2.5 \log T = 10.00$

$T = 10000$  K ,  $\log P_\epsilon = 2.30$  değerleri ile,

$$\begin{aligned}\log (N_1 / N_0) &= - \theta I + 2.5 \log T - 0.48 + \log [2B_1(T) / B_0(T)] - \log P_\epsilon \\ &= - 3.07 + 10.00 - 0.48 + 0.44 - 2.30 \\ &= 4.59 \Rightarrow N_1 / N_0 = 10^{4.5} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

**Başka bir değişle nötr kalsiyum atomu yok denecek kadar azdır.**

**Kalsiyum atomlarının belki iki kez iyonlaştıklarını düşünebiliriz.** O zaman **iyonlaşma denklemini bir kez daha uygulamak gerekir.** **Kalsiyumun ikinci iyonlaşma potansiyeli 11.82 eV**,  $\log [2B_2(T) / B_1(T)] = - 0.25$  ve  $\theta I = 5.95$  dir. **Bu değerleri kullanarak,**

$$\begin{aligned}\log (N_2 / N_1) &= - 5.95 + 10.00 - 0.48 - 0.25 - 2.30 \\ &= 1.02 \Rightarrow N_2 / N_1 = 10.5 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

**Buradan,**  $N_1 / (N_1 + N_2) = 1 / 11.5 = 0.087$  ya da **% 9** nun **bir kez iyonlaşmış kaldığını** ve **geri kalanların iki kez iyonlaştığını** buluruz.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

3°)  $\lambda 4481$  deki Mg II nin yeğın çift çizgisi  $3^2D$  düzeyinden  $4^2F$  düzeyine geçişlerden ortaya çıkar.  $P_\epsilon = 100 \text{ dyn / cm}^2$  ve  $T = 7200 \text{ K}$  için  $\lambda 4481$  'i soğurabilecek magnezyum atomlarının oranını hesaplayınız.

**Çözüm :**

$3^2D \rightarrow 4^2F$  için söz konusu olayda iki durum vardır. Bunlar hem iyonlaşma ve hem de istenen düzeye kadar olan uyarılmadır !!!

Bu geçişin (çizginin)  $3^2D$  alt teriminin uyarılma potansiyeli  $\chi = 8.83 \text{ eV}$  ve bu terimin istatistik ağırlığı,

$3^2D : D \rightarrow L = 2 ; (2S+1) = 2 \Rightarrow S = 1 / 2$  ve  $J = 3/2 , 5/2$

bulunur. Yani  $3^2D$  ikili düzeyi  $^2D_{3/2}$  ,  $^2D_{5/2}$  düzeylerinden oluşmaktadır. O halde istatistik ağırlığı,  $g(3^2D) = 2J + 1$  den

$g(3^2D) = g(^2D_{3/2}) + g(^2D_{5/2})$  olup ;  $g(^2D_{3/2}) = 2 (3/2) + 1 = 4$  ,

$g(^2D_{5/2}) = 2 (5/2) + 1 = 6$  ;  $g(3^2D) = 4 + 6 = 10$  bulunur.

Magnezyumun temel düzeyi  $^2S_{1/2}$  dir.  $S_{1/2}$  temel teriminin istatistik ağırlığı ise,  $J = 1/2$  olup  $g(^2S_{1/2}) = 2 (1/2) + 1 = 2$  dir.

## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

$T = 7200$  K idi. O zaman,

$$\log [N(3^2D) / N(3^2S)] = - (5040 / T) \chi + \log [g(^2D) / g(^2S)] ,$$

$$\begin{aligned} \theta = 0.7 \text{ ile, } \log [ N(3^2D) / N(3^2S) ] &= - 0.7 \times 8.83 + \log (10 / 2) \\ &= - 5.47 \text{ elde edilir ve buradan,} \\ N(3^2D) / N(3^2S) &= 10^{-5.47} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

İyonlaşma için ise,  $T = 7200$  K ya da  $\theta = 0.7$  , Magnezyumun birinci iyonlaşma potansiyeli  $7.61$  eV ve ikinci iyonlaşma potansiyeli  $14.97$  eV olmak üzere, Mg I için durum,

$$\begin{aligned} \log [2B_1(T) / B_0(T)] &= + 0.52 \text{ olmak üzere} \\ \log (N_1 / N_0) &= - 0.7 \times 7.61 + 2.5 \log 7200 - 0.48 + 0.52 - \log 100 \\ &= 2.35 \Rightarrow N_1 / (N_0 + N_1) = 0.996 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Yani, Magnezyumun % 99.6 sının en az bir kez iyonlaştığı sonucuna varırız. İkinci kez iyonlaşma önemli midir ?

$$\log [2B_2(T) / B_1(T)] = - 0.01 \text{ değeri ile } \log (N_2 / N_1) = - 3.28 \text{ bulunur.}$$

Yani Mg III atomlarının oranı boşlanabilecek düzeydedir. O halde,  $3^2D$  düzeyine uyarılmış olanların tüm magnezyum atomlarına oranı ya da  $\lambda 4481$  çizgisini soğurma yeteneği,

$$N(3^2D) / N(\text{Toplam}) = 0.996 \times 10^{-5.47} = 3.4 \times 10^{-6}$$

olacaktır ki bu, Mg atomlarından  $\lambda 4481$  'i soğurabileceklerin oranıdır.



## 6.4. İyonlaşma Denklemi (Devamı)

4<sup>o</sup>) **Uyartılma** ve **iyonlaşma** denklemlerini kullanarak ve  $P_{\varepsilon} = 130$  dyn / cm<sup>2</sup> **ortalama basıncını** (**Anakol yıldızları için ortalama elektron basıncı**) kullanarak **Balmer çizgilerini soğurabilecek Hidrojen atomlarının oranının sıcaklığa göre değişimini** elde ederek **grafiğini** çiziniz.

**Çözüm için yol gösterme :**

$N_{02} \rightarrow$  2. **düzeydeki atom sayısı**

$N_0 \rightarrow$  **Nötr atom sayısı**

$N_1 \rightarrow$  **1 kez iyonlaşmış atom sayısı**

olmak üzere, **sıcaklığa** bağlı olarak  $N_{02} / (N_0 + N_1) = ?$

**değerleri ile**

$$\log [N_{02} / (N_0 + N_1)] - \theta (= 5040 / T)$$

**grafiği çizilecektir (ÖDEV).**

## 6.5. Uyarılma (Boltzmann) ve İyonlaşma Denklemlerinin Bileşkesi

Sıcak yıldızlarda ve Güneş'in renk küresinde gözlenen temel gazların çizgileri temel düzeyden çok iyonlaşma sınırına daha yakın olan yüksek düzeylerden ortaya çıkmaktadır. Çoğu kez, iyonlaşmış atomların toplam sayısının ( $N_1$ ),  $r$  ninci düzeydeki nötr atomlara oranını verecek biçimde, Boltzmann ve iyonlaşma denklemlerini birleştirmek yararlı olur.

Uyarılma denklemi,

$$N_{0,r} / N_0 = [g_{0,r} / B_0(T)] \exp(-\chi_r / kT) \dots(5)$$

ve iyonlaşma denklemi,

$$(N_1 / N_0) P_\varepsilon = [(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2} / h^3] [2B_1(T) / B_0(T)] \exp(-\chi_0 / kT) \dots(12)$$

idi.  $B_0(T) = B(T)$  ve  $\chi_0 = I$  dir.

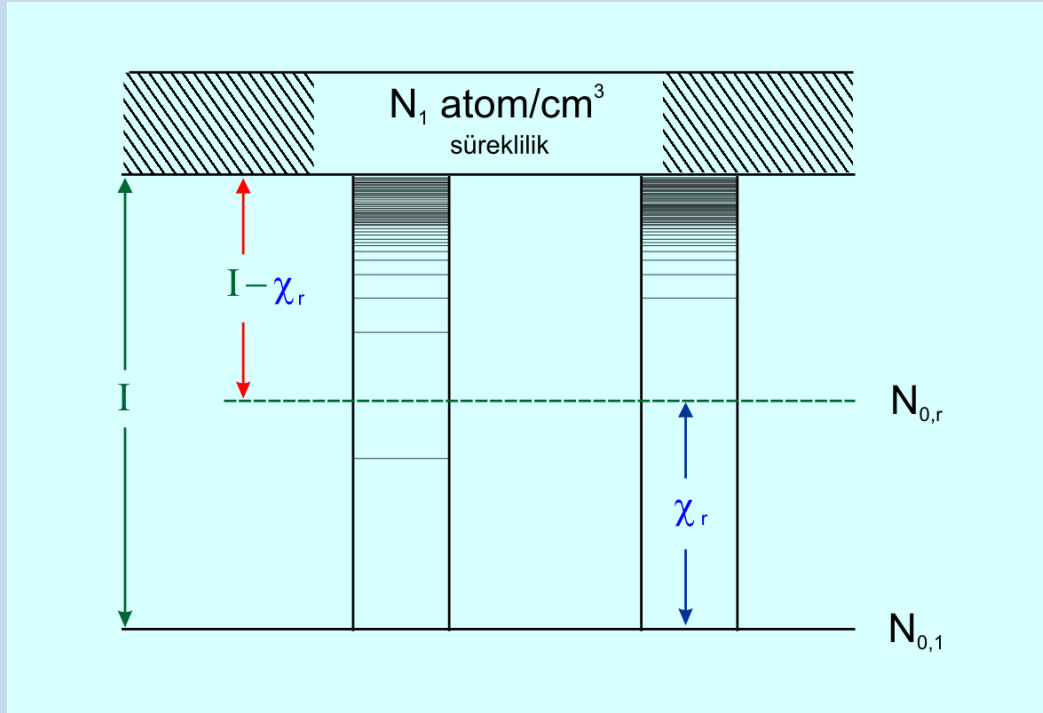
Eğer (12) eşitliğini, (5) eşitliği ile verilen Boltzmann denklemine bölersek,

$$N_1 P_\varepsilon / N_{0,r} = [(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2} 2B_1(T) / h^3 g_{0,r}] \exp[-(I - \chi_r) / kT] \dots(14)$$

bağıntısı elde edilir. Bu denklem uyarılma ve iyonlaşma denklemlerinin bileşkesidir. Bu bağıntı,  $r$  ninci düzeydeki atomların sayısını bir kez iyonlaşmış atomların toplam sayısına bağlar. Burada iyonlaşma potansiyeli  $I$  ile ve  $r$  ninci uyarılma potansiyeli de  $\chi_r$  ile gösterilmektedir.

## 6.5. Uyarılma (Boltzmann) ve İyonlaşma Denklemlerinin Bileşkesi (Devamı)

Bu bağıntıyı herhangi bir iyonlaşma basamağı için genelleştirebiliriz. Temel gazlar için ( $I - \chi_r$ ) nin sayısal değeri  $I$  ya da  $\chi_r$  den çok daha küçük olduğundan ; Boltzmann düzeltmesi temel düzeydeki sayıyla  $r$  ninci düzeydeki sayıyı bağlamaya çalıştığımız zamankinden çok daha küçüktür. Hidrojenin 2 ci düzeyi için ; ( $I - \chi_2$ ) alınır (Bkz. Şekil 6.5).



Şekil 6.5. ( $I - \chi_2$ ) farkı.

**ÖRNEK :** Balmer çizgilerinin yeşilliklerinden bulunduğuna göre 10 Lac'ın atmosferindeki ikinci düzeydeki hidrojen atomlarının sayısı  $\text{antilog}(15.80)$  dir.  $T = 29600 \text{ }^\circ\text{K}$  ve  $\log P_\varepsilon = 2.80$  olduğuna göre, iyonlaşmış hidrojen atomlarının ( $N_1$ ) sayısını bulunuz.

**Çözüm :** Hidrojen için  $I = 13.54 \text{ eV}$  ,  $\chi_2 = 10.15 \text{ eV}$   
 $g_2 = 2n^2 = 2 \times 2^2 = 8$  ve  $B_1(T) = 1$  olmak üzere  $T = 29600 \text{ }^\circ\text{K}$  ,  $\log P_\varepsilon = 2.8$  değerleri ile (14) denkleminin aşağıdaki logaritmik ifadesinden;

$$\log (N_1 / N_{0,2}) = - (5040 / T)(I - \chi_r) + 2.5 \log T - 0.48 + \log [2B_1(T) / g_2] - \log P_\varepsilon$$

$$\text{hesaplama yapılırsa, } \log (N_1 / N_{0,2}) = 6.72 \text{ ve } \log N_1 = 6.72 + 15.8$$
$$\log N_1 = 22.52 \quad \text{bulunur.}$$

iyonlaşma denkleminin bir uygulaması, hidrojen atomlarından çok azının nötr durumda olduğunu göstermektedir.

## 6.6. İyonlaşma Kuramının Denetleri

**A.S. King**, Mount Wilson Gözlemevi'nde iyonlaşma kuramının laboratuvar denemelerini yapmayı başardı. Ca ya da Mg gibi toprak alkali metaller çok düşük iyonlaşma potansiyellerine sahiptirler. Bu elementlerin atomlarının bir kısmı bir elektrik fırınıyla elde edilebilecek sıcaklıklarda bile iyonlaşabilir. İyonlaşma denklemi,

$$N_1 P_\epsilon / N_0 = [(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2} / h^3] [2B_1(T) / B_0(T)] \exp(-I / kT) \dots (12)$$

idi. King, sıcaklık arttıkça Ca'un (Ca II)  $\lambda 3933$  (H çizgisi) çizgisinin Ca I'in  $\lambda 4226$  olan rezonans çizgisine yeğlilik oranının, kurama uygun olarak arttığını bulmuştur. Sıcaklık arttıkça H ve K ( $\lambda 3968$ ) çizgilerinin yeğlilikleri  $\lambda 4226$  çizgisinin yeğliliğine göre artmaktadır. Acaba  $P_\epsilon$  nun ne gibi bir etkisi vardır ?

Bir başka deneyde sıcaklık sabit tutuldu ve az miktarda Sezyum eklendi (Cs elementini Ca ile birlikte fırına koyarak hızlı iyonlaşma sağlanır). Sezyumun iyonlaşması elektron basıncı  $P_\epsilon$  nu arttırdı ve iyonizasyonu ve bu nedenle de  $\lambda 3933$  ün yeğliliğini azalttı ( $N_1 / N_0$  'ı azalttı). King, bu deneylerde elektron basıncını ölçemedi ; bu nedenle de kuramın nicesel bir doğrulaması yapılamadı.

[ Cs için  $I = 4$  eV (çok küçük) ; Ca için  $I = 6.09$  eV ]

İyonlaşma olaylarının astrofizik görünüşleri çok fazladır. Göze çarpan başka ve belirgin örnek Güneş lekelerinde görülmektedir. Çevresini saran ışık küre yüzeyinden  $\Delta T \cong 1200$  °K daha soğuk olan Güneş lekeleri güzel bir görünüm sağlarlar. Alkaliler ve toprak alkali elementler ışık kürede tümüyle iyonlaşmış duruma gelirler ; oysa daha soğuk olan lekelerde nötr çizgiler büyük çapta kuvvetlendirilirler. Lekede yöresine göre, iyonlaşmış atomların sayısında bir azalma görülür. Dolayısıyla gözlenen Ca II nin H ve K çizgi yeğliliklerinde bir azalma görülür.

# 7. TAYF SIRASI

**İyonlaşma kuramının sonuçları : Tayf sınıfını nicel olarak açıklamıştır.**

**Örnek :** Güneş'te  $T = 5700 \text{ }^\circ\text{K}$  de Mg 'un  $N_1 / N_0$  oranının  $\sim 30$  olduğu yani 100 Mg atomun 97 si Mg II ve 3 tanesi de Mg I olduğu saptanmıştır. Başka bir deyimle Mg II çizgilerinin yeğinliklerinin Mg I çizgi yeğinliklerine oranı çok büyüktür.

Mg için  $I = 7.61 \text{ eV}$

Al için  $I = 5.96 \text{ eV}$

Ca için  $I = 6.09 \text{ eV}$

Magnezyum için olan bu durum, **iyonlaşma potansiyelleri 5.96 eV ve 6.09 eV olan Alüminyum ve Kalsiyum durumları ile benzerdir.** Yani

Mg II / Mg I 'den Mg II yeğinliği > Mg I yeğinliği

Al II ve Al I  $\Rightarrow$  Al II yeğinliği > Al I yeğinliği

Ca II ve Ca I  $\Rightarrow$  Ca II yeğinliği > Ca I yeğinliği dir.

**Benzer şekilde düşük  $I(\text{eV})$ 'lı elementlerin çizgileri Mg da olduğu gibi Güneş sıcaklığında en yeğın çizgiler** olarak görülür. **Sirius'da**  $T = 10000 \text{ }^\circ\text{K}$  de Ca gözlenecek olursa  $N_2 > N_1$  olduğu görülür. Yani **Ca III çizgilerinin yeğinlikleri Ca II çizgileri yeğinliklerine göre daha baskındır.**

Görüldüğü gibi, bu gibi hesaplarla **herhangi bir yıldızda (tayfında) belli bir element için egemen olan çizgiler saptanabilir.**

**İyonlaşma kuramının en büyük başarısı, tayf sıralamasını bir sıcaklık sıralaması olarak açıklamasıdır.** Soğuk yıldızlardan sıcak yıldızlara doğru gidildiğinde nötr elementlerin çizgileri yavaş yavaş zayıflar ve yerlerini **iyonlaşmış elementlerin çizgileri alırlar.** **Kalsiyum** buna iyi bir örnektir.

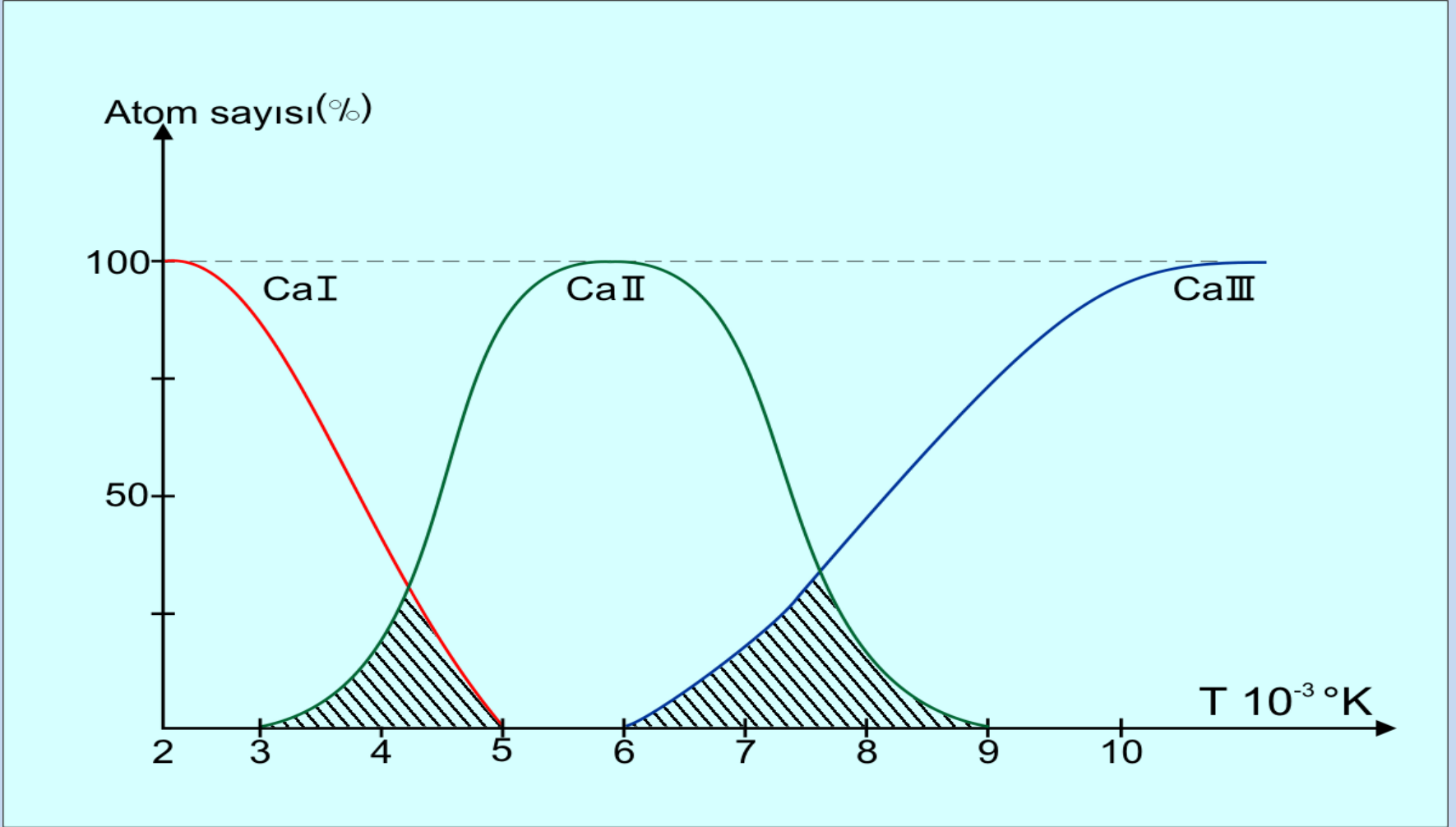
## 7. TAYF SIRASI (Devamı)

En soğuk yıldızlarda, **kalsiyum** çoğunlukla nötrdür ve  $\lambda 4227$  rezonans çizgisi çok yeğindir (bkz. Şekil 7.1). Biraz daha sıcak yıldızlarda **iyonlaşma** belirgin olmaya başlar,  $\lambda 4227$  zayıflar ve **iyonlaşmış kalsiyumun H ve K çizgileri giderek kuvvetlenir** ve **G tayf sınıfında en baskın** duruma gelir. **Oldukça yüksek sıcaklıklarda kalsiyum iki kez iyonlaşmış** duruma gelir ve **H, K çizgileri kaybolur**. **Uyartılmış düzeylerden ortaya çıkan çizgilerle ilgilendiğimizde, iyonlaşma ve Boltzmann denklemlerinin her ikisini birden uygulamalıyız**. **Sıcaklık arttıkça bu çizgilerin yeğinlikleri, onları soğurabilecek atomların sayısı arttığı için artar** ; fakat **daha sonra atomlar iyonlaşmaya başladıkça zayıflar**.

**Ca** için **iyonlaşmanın sıcaklığa göre değişim grafiği Şekil 7.1 de gösterilmektedir**. Görüldüğü gibi **belli bir sıcaklıkta ancak iki iyonlaşma düzeyi baskın** olarak bulunabilir. Sözelimi **7000 °K için Ca II** ile **Ca III'ün her ikisi de vardır (taralı alanlar)**. Demek ki **herhangi bir element için belli bir sıcaklıkta en çok iki iyonlaşma durumu baskın** olabilir.

**G ve F tayf türünde olan yıldızlarda Ca II , Mg II , Al II çizgileri hakimdir**.

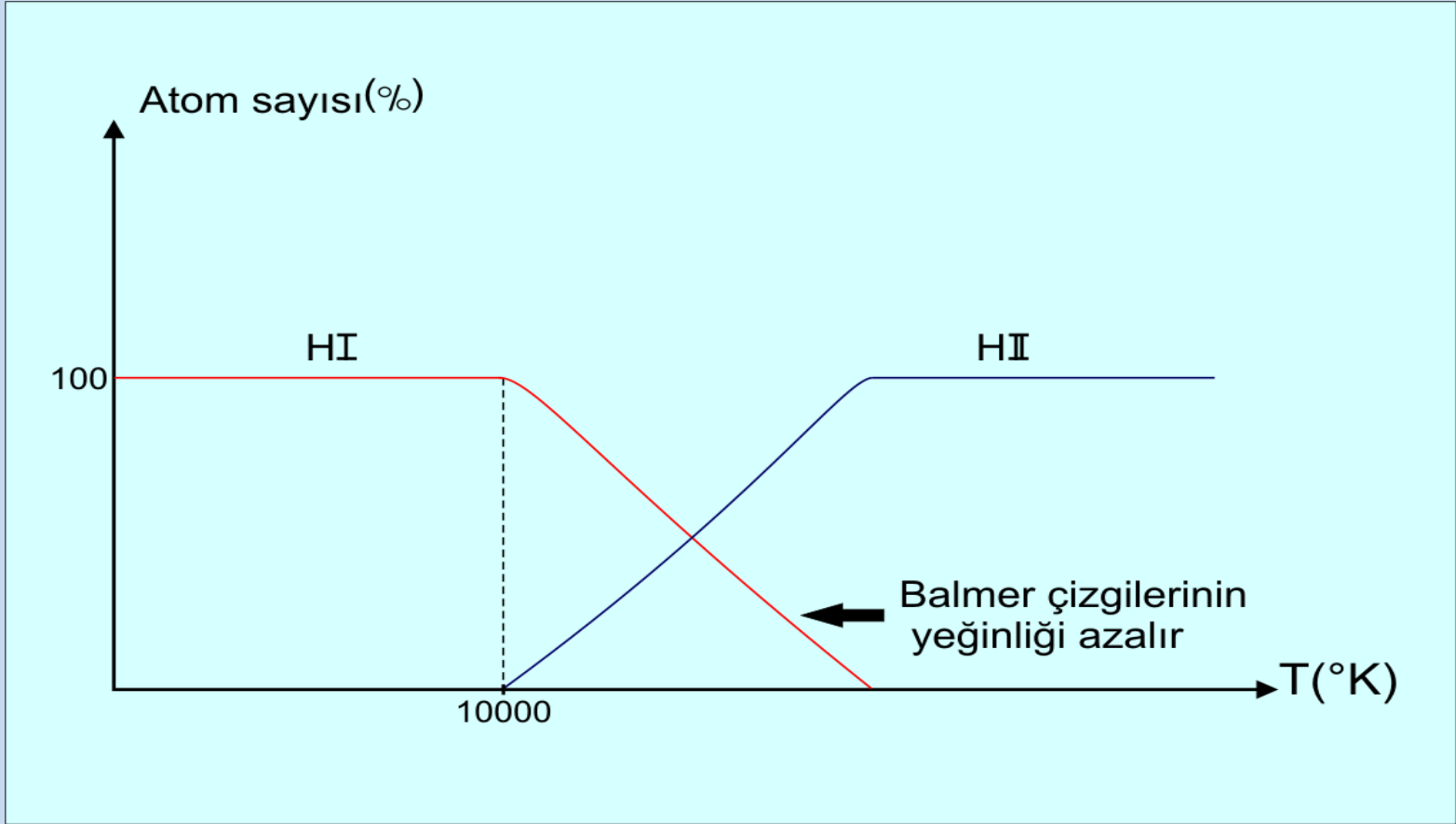
Benzer olarak **hidrojen çizgilerinin özellikleri, çok iyi bir örnektir**. **Balmer çizgileri ikinci düzeyden daha yüksek düzeylere geçişlerden oluştuğundan, bir hidrojen atomu bir Balmer çizgisini soğurmadan önce ikinci düzeye uyartılmalıdır**. **Düşük sıcaklıklarda ikinci düzeydeki hidrojen atomlarının sayısı boşlanabilecek kadardır ; fakat bu sayı sıcaklık arttıkça hızla artar**. Bu sonuca uygun olarak **hidrojen çizgilerinin M tayf türünden K, G, F ve A ya doğru gidildiğinde sürekli olarak yeğinliği artar ve A tayf sınıfında maksimum yeğinliğe ulaşırlar**. **Bundan sonra sıcaklık artışıyla Balmer çizgilerinin yeğinlikleri azalır ; çünkü iyonlaşma nötr hidrojen atomlarının sayısını hızla düşürür**. Her ne kadar **A0 yıldızlarında yüzde bir hidrojen atomu nötr kalabilmişse de, bu yıldızlarda Balmer çizgileri yine de görülür**.



Şekil 7.1. Ca için sıcaklığa bağlı iyonlaşma durumları.



Hidrojen için uyarılma ve iyonlaşmanın sıcaklıkla değişimi, bir grafik olarak Şekil 7.2 de verilmektedir.

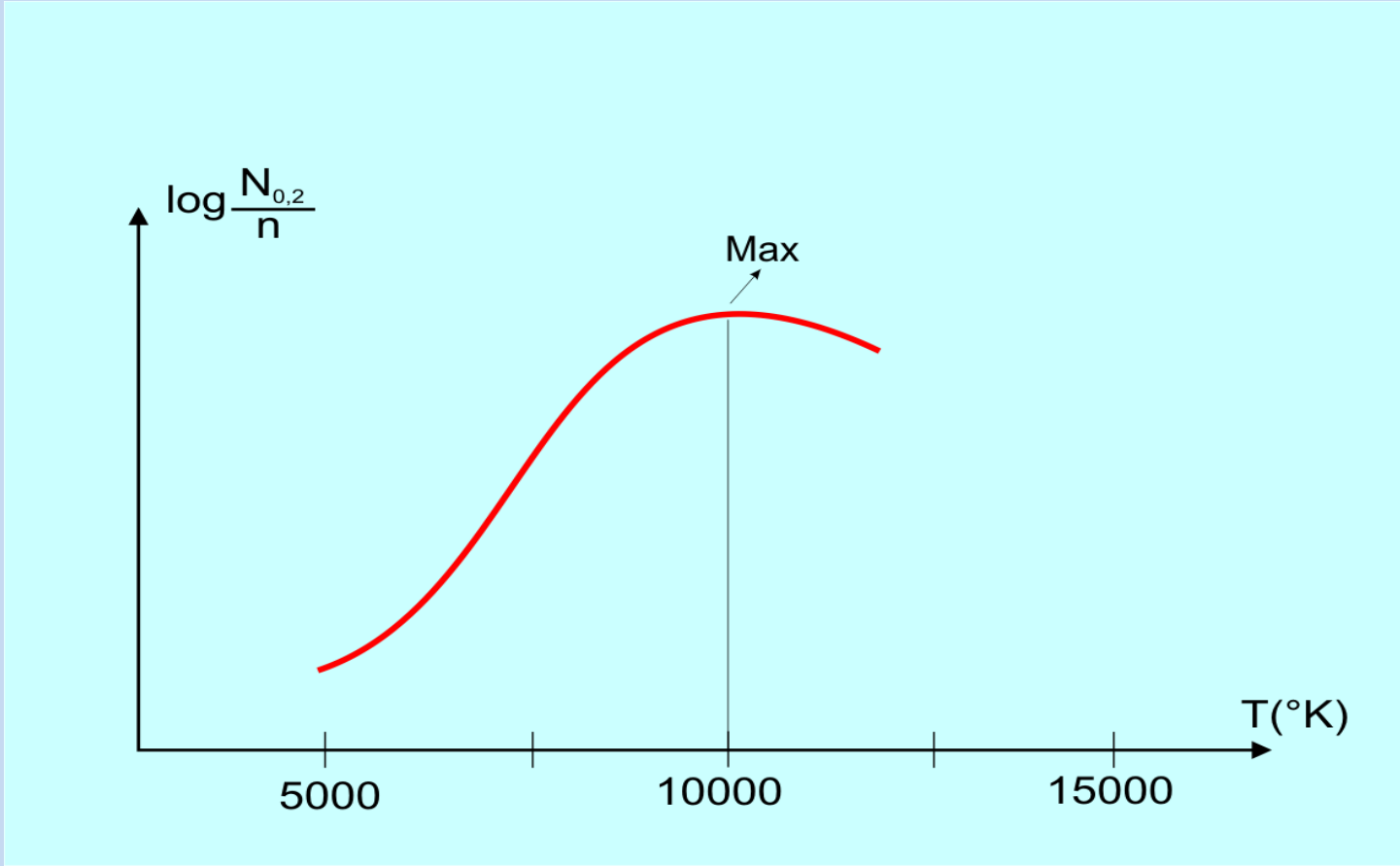


Şekil 7.2. Hidrojenin sıcaklığa bağlı iyonlaşma durumu.

## 7. TAYF SIRASI (Devamı)

$T = 10000$  °K den büyük sıcaklıklarda **Balmer çizgilerinin** yeğinliklerinin azalmasının nedeni **iyonlaşmanın varlığıdır**. Uyarılma ve **iyonlaşma** gözönüne alındığında yeğinliğin azaldığı görülür (Şekil [7.3](#)). **A0** dan **daha sıcak** yıldızlarda, **metaller bir çok kez iyonlaşmış duruma gelirler** ve onların **rezonans çizgileri görsel bölgede** gözlenemeyen tayfın moröte bölgesine düşerler. **Diğer çizgiler çok yüksek düzeylerle ilgilidir ve çok zayıftır**. İkinci **iyonlaşma düzeyinden sonra Si** dan **daha ağır atomların** çizgileri çok zayıf olmakta ve bu nedenle gözlenmesi çok zor olmaktadır.

**B** yıldızlarında, **hidrojen** çizgileriyle birlikte **Helyum** çizgileri **tayfta en belirgin çizgiler durumuna geçerler**. **O** yıldızları **çok sıcak olup** bunlarda **hemen hemen tüm hidrojen iyonlaşmış** ve hatta **helyum iki kez iyonlaşmıştır**, **O, N, C** ve **Ne** gibi hafif elementler, **farklı iyonlaşma düzeylerinde** baskındırlar.

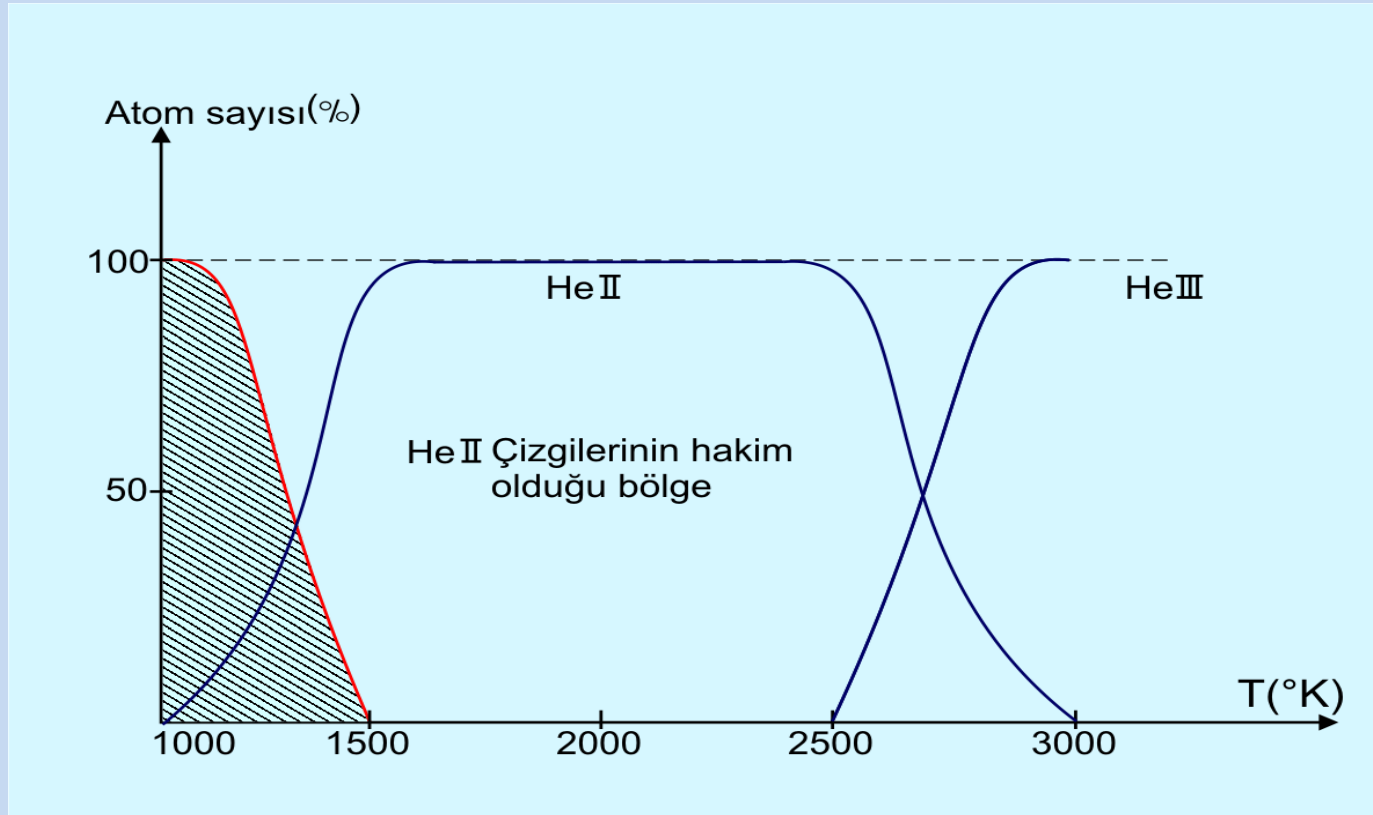


Şekil 7.3. Balmer serisi çizgilerinin sıcaklığa bağlı yeğlilik değışim grafiği.

Helyum için uyarılma ve iyonlaşmanın sıcaklığa göre değişimi Şekil 7.4 de gösterilmektedir.

O ve B yıldızlarında parlak çizgiler sıkça görülür. Kimi yıldızlarda ise hem parlak ve hem de karanlık çizgiler beraberce görülürler. Genellikle parlak çizgiler yıldızı saran kabuklarda oluşurlar. Özellikle M sınıfından uzun dönemli değişenler başta olmak üzere çok soğuk yıldızlar da sıkça parlak çizgiler gösterirler.

( A. Kızırmak, 1970, Astrofiziğe Giriş, sayfa 117 deki Şekil 4-10 ile verilen grafik incelensin !!!  
Belli sıcaklıklarda yeğin olan çizgiler gösterilmektedir. )



Şekil 7.4. Helyum için sıcaklığa bağlı iyonlaşma durumu.

# 7.1. Yıldızların Tayf Sınıflaması

Çok sayıda yıldızların tayfları topluca incelendiğinde onların birbirinden farklı görünümlere sahip oldukları görülür. Bununla beraber tayflar arasında az ya da çok benzerlikler de vardır. Onun için onları benzerliklerine göre gruplara ayırmak mümkündür. Örneğin, H çizgileri keskin olanlar bir grupta, H ve He çizgileri aynı alanlar bir grupta, metal çizgileri üstün olanları da başka bir grupta toplamak mümkündür. Bu şekilde yapılan işleme genel olarak “SINIFLAMA” denir. Bu işlemlerde E.C. Pickering, Mrs. Fleming (Miss Maury), Miss Cannon ve Mrs. Mayall’ın çalışmaları olmuş ve böylece 391000 yıldızın tayfları sınıflara ayrılmıştır. Bu çalışmalar Harvard Gözlemevi’nde yapılmıştır.

# HARVARD SINIFLAMASI

R --- N

|

Q, P, W, O, B, A, F, G, K, M, L, T

|

S

O B A F G K M

-----

**Temel 6 Sınıf**

# Geleneksel Tekerlemeler

1.

Oh **B**e **A** **F**ine [**G**uy/**G**al/**G**irl] **K**iss **M**e  
(**R**ight **N**ow [**S**mack / **S**weetheart])

2.

Ohe **B**egone, **A** **F**riend's **G**onna **K**iss **M**e  
(**R**ight **N**ow **S**mack)

3.

Only **B**oys **A**cccepting **F**eminism **G**et **K**issed **M**eaningfully

# Harvard Sınıflaması (devamı)

“O” dan sonraki sınıflara giren yıldız sayısı çok fazladır ve onlar da kendi aralarında farklılıklar gösterirler. Bundan dolayı bu gibi sınıflardan her biri kendi içinde 10 bölüğe ayrılır ki onlara da “**Tayf Türü**” denir. Her bir **tür**, ait olduğu sınıf harfinin sağına 0, 1, 2, ..., 9 gibi sayılardan biriyle belirtilir. Örneğin **A0, B5, G8, K2, ...** gibi.

Yıldızların ya da yıldız topluluklarının daha genel sınıf özelliği sözkonusu olduğu zaman, yukarıda verilen sınıf sırası, aşağıda verildiği gibi üç büyük gruba ayrılır :

**Ön sınıflar** ; **Q** dan **F0** türüne kadar,

**Orta sınıflar** ; **F0** dan **G5** türüne kadar,

**Geri sınıflar** ; **G5** den sonrakiler.

Kimi yıldızlar belirli birer **tayf türlerine** girdikten başka, ayrıca **özel durumlar** gösterirler. Bu durumlar **tayf türü** harfinin **önüne** ya da **arkasına** **sembolik harfleri** yazarak belirtilir (bkz. Kızıllık, A., 1970, **Astrofiziğe Giriş**, sayfa **114**).

Örneğin **öne yazılan semboller** ;

**cA2** , **c** : soğurma çizgileri çok keskin ve **salt parlaklığı** yüksek (  $\alpha$  **Cyg** gibi)

**gM0** , **g** : **salt parlaklığı** yüksek dev yıldız (  $\beta$  **And** gibi)

**dB7** , **d** : **salt parlaklığı** düşük cüce yıldız (  $\alpha$  **Leo** gibi)

**Arda yazılan semboller** ;

**B7e** , **e** : beklenmeyen **salma çizgisi** var (  $\beta$  **Lyr** gibi )

**B9pe** , **p** : tayfta **ayrı bir özellik** (**pecularity**) var ( **GY And / HR 465** gibi)



# Harvard Sınıflaması (devamı)

## Erken Tayf Türleri :

B0	A0	G0
B1	A1	G1
B2	A2	G2
B3	A3	G3
B4	A4	G4

## Geç Tayf Türleri :

B5	A5	G5
B6	A6	G6
B7	A7	G7
B8	A8	G8
B9	A9	G9

} TAYF SINIFI

A Tayf Türünde **Balmer serisi çizgileri** yoğundur. Ara sınıflar **Balmer serisi çizgilerinin yeğinliklerine göre** sınıflandırılmıştır.

Genellikle **F** tayf türünden itibaren yıldızlar **iki Tayf türü Grubuna** ayrılır:

O B A F G K M L T

Erken Tayf Türü ← I → Geç Tayf Türü

## Harvard Sınıflaması (devamı)

### TAYF SINIFLARININ GENEL ÖZELLİKLERİ :

Çizelge 2 de verilen **Tayf sınıflarının** genel özelliklerinden görüleceği gibi **yıldızların tayflarında**, maddenin bolluğuna, sıcaklığa ve **iyonlaşma** (**elektron basıncı**) basıncına bağlı olarak **H** ve **He** azalma göstermektedir.

**SONUÇ** : **Tayf Sıralaması**, **bir sıcaklık sıralaması**, dolayısıyla bir renk sıralamasıdır.

## ÇİZELGE 2: TAYF SINIFLARININ GENEL ÖZELLİKLERİ

Sınıf	Başlıca Tayf Çizgileri	Örnek	N (m > 6.25)
<b>Q</b>	Novalar ; hızlı tayf değişimi	-	-
<b>P</b>	Gaz bulutları ; H ; HeI, II ve O II nin salma çizgileri ve bantları	-	-
<b>W</b>	Wolf-Rayet Yıldızları ; (Anakola gelmek üzere olan yıldızlardır) 1) WN : tayflarında (N : Azot çizgileri) He I, II ; N III, IV, V 'in çizgileri 2) WC : (C : Karbon çizgileri) He I, II ; C II, III, IV ; O II, III, IV çizgileri	$\gamma$ Vel	5
<b>O</b>	H ; He I, II ; O II, III ve N II, III çizgileri	$\xi$ Pup $\zeta$ Ori	20
<b>B</b>	Nötr H ve He, N II, O II ve birkaç metalin iyon çizgileri	t Ori $\beta$ Ori (Rigel) $\alpha$ Vir (Spica)	696
<b>A</b>	H serisi max ; Ca II (H ve K), iyonlaşmış metal çizgileri zayıf	$\alpha$ CMa(Sirius) $\alpha$ Cyg (Deneb)	1885
<b>F</b>	Ca II çok yeğın, H çizgileri daha zayıf metal çizgileri daha bol	$\alpha$ CMi (Procyon) $\alpha$ Car (Conopus)	720
<b>G</b>	H çizgileri sönük, Ca II (H,K) çizgileri yeğın, çok sayıda metal çizgisi	Güneş $\alpha$ Aur (Capella)	609
<b>K</b>	Ca II (H,K) çok yeğın, birçok nötr metal çizgisi, tayf morötede zayıf	$\alpha$ Boo (Arcturus) $\alpha$ Tau (Aldebaran)	1719

## ÇİZELGE 2: TAYF SINIFLARININ GENEL ÖZELLİKLERİ DEVAMI

Sınıf	Başlıca Tayf Çizgileri	Örnek	N (m > 6.25)
M	TiO bantları , Ca I ve Ca II nin ve öbür metallerin çizgileri, uzun dönemli değişenlerde H salma çizgileri	$\alpha$ Sco (Antares) $\alpha$ Ori (Betelgeuse)	457
L	TiO , VO gibi metal oksit bantları daha zayıf, FeH , CrH , CaH gibi metal hidritler ile NaI , KI, CsI , RbI gibi alkali metallere ait soğurmalar çok yeğin	Gl605B	-
T	CH <sub>4</sub> soğurma bantları H <sub>2</sub> O nun geniş soğurma bandı	Gliese 229B	-
R	C (Karbon) Yıldızları : K 'nın özellikleri yanı sıra ~ K türlerinin sıcaklığındadırlar C <sub>2</sub> , CN , CH bantları, birçok metal çizgisi	BD -10 5057	-
N	C (Karbon) Yıldızları : K 'nın özellikleri yanı sıra ~ K türlerinin sıcaklığındadırlar C <sub>2</sub> , CN , CH bantları, morötedede ışınım az	19 Psc	8
S	C (Karbon) Yıldızları : K 'nın özellikleri yanı sıra ~ K türlerinin sıcaklığındadırlar ZrO bantları , metal çizgileri , uzun dönemli değişenlerde H salması	$\eta$ 1 Gru	-

## 7.2. İki Boyutlu MKK Sınıflaması

Tayfsal çalışma ve incelemeler, yıldızların tayf sınıflarından başka salt parlaklıklarına (ıştımlarına) göre de belirli aralıklarda sınıflara ayrılması gereğini ortaya çıkarmıştır. Yerkes Gözlemevi'nde W.W. Morgan, P.C. Keenan ve E. Kellmann bu amaçla yaptıkları çalışma sonunda, Güneş yöresindeki Öbek I yıldızlarını salt parlaklıklarına göre 6 aydınlatma sınıfına ayırmayı uygun gördüler (1943). İki boyutlu sınıflama böylece yapılmış oldu. Boyutlardan biri Harvard tayf sınıfları, diğeri de “Morgan-Keenan-Kellmann” in aydınlatma sınıfıdır. Bu yeni sınıflamaya kısaca “MKK düzneği ya da sınıflaması” denir. İkinci boyutun sınıfları şunlardır (Şekil 7.5):

Ia : Çok parlak üst devler

Ib : Olağan üst devler veya üst devler

II : Parlak devler

III : Olağan devler

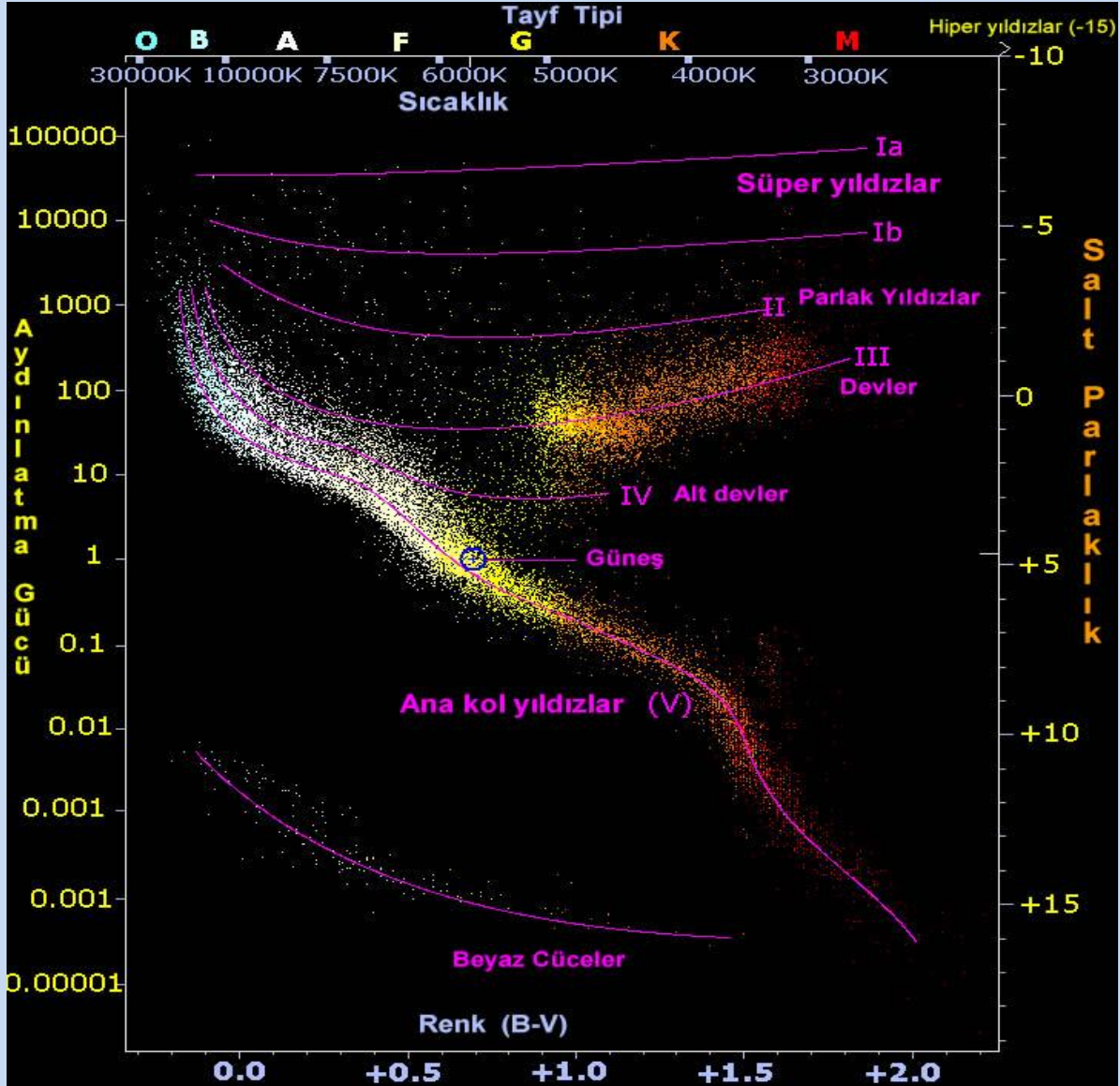
IV : Alt devler

V : Anakol yıldızları (cüceler)

VI : Alt cüceler

Wd : Beyaz cüceler

(bkz. Kızıllık, A., 1970, *Astrofiziğe Giriş*, sayfa 131, Şekil 4-14)



Şekil 7.5. İki boyutlu tayf sınıflaması ile H-R diyagramı.

## 7.2. İki Boyutlu MKK Sınıflaması(devamı)

Aynı tayf türünden olmalarına karşın (Tayf türü aynı ise sıcaklık da aynı) çok büyük  $M$  (salt parlaklık) ve  $L$  (ışınım gücü) değerlerine sahip olan yıldızların  $R$  yarıçapları farklı olacaktır. Çünkü,

$$L \sim R^2 T^4$$

Bundan dolayıdır ki, yıldızların dev ve cüce olmaları, sıcaklığa göre ısıtma gücünün büyüklüğünden ileri gelmektedir. Bu yeni sınıflamanın kullanılması halinde bir yıldızın iki boyutlu sınıfı bundan böyle, **A0 V** , **F2 III** , **K5 II** , **M1 Ib** gibi gösterilecektir.

## 8. Dev ve Cüce Yıldızlar Arasındaki Tayf Farkları

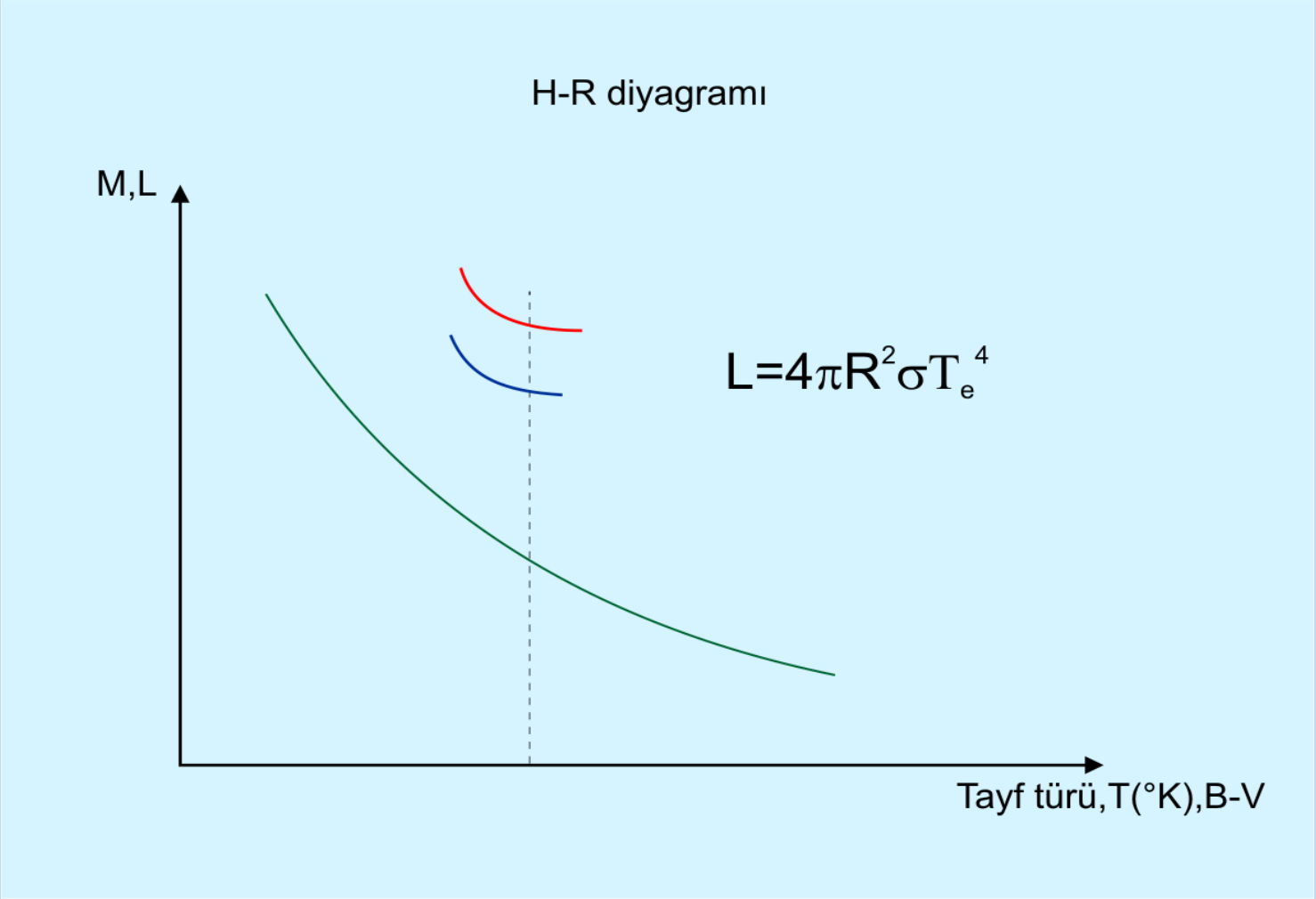
İyonlaşma denklemi,

$$\log(N_1 / N_0) = -\theta I + 2.5 \log T - 0.48 + \log [2B_1(T) / B_0(T)] - \log P_\varepsilon \dots(13)$$

idi. Bu ifadeden görüleceği üzere, sıcaklık gibi elektron basıncı da iyonlaşmayı etkiler.  $T$  sıcaklığı artarsa  $\log(N_1 / N_0)$  artar, yok eğer  $P_\varepsilon$  artarsa  $\log(N_1 / N_0)$  oranı düşer. Dolayısıyla yıldız atmosferi düşük yoğunluklu olduğunda daha yüksek bir iyonlaşma görülecektir ve sıcaklıklar bir önceki tayf sınıfıyla aynı olacaktır. Yıldızları, atmosferlerindeki baskın yoğunluklara göre dizdiğimizde gerçekte onları ışınım güçlerine ayırmış oluruz ; çünkü aynı sıcaklık ya da tayf sınıfındaki cüce yıldızlara göre dev ve üst dev yıldızlar daha düşük yoğunluklara sahiptirler (bkz. Şekil 8.1).

Dev yıldızlardaki basınç cücelerdeki göre azdır. O halde belli bir elementin dev ve cüce yıldızdaki iyonlaşması farklı olacaktır. Dolayısıyla dev ile cüce yıldızların tayflarında da bir fark beklenir.  $T_e$  sıcaklıkları aynı olan dev ve cüceyi karşılaştıracak olursak ; devde  $P_\varepsilon$  daha az olduğundan devde iyonlaşmış çizgi sayısı cücedekinden daha fazla olacaktır. Örneğin, cüce bir yıldız olan Güneş'le aynı sıcaklıkta olan bir dev yıldız, daha ön bir tayf türüne (örneğin F8) sahip olacaktır. Çünkü büyük yıldızın çok daha ince olan atmosferinde iyonlaşma daha fazla olacaktır. Genellikle aynı tayf türündeki yıldızlar karşılaştırılır. Buradan, dev yıldızlar aynı tayf türündeki cücelerden daha soğuk olma eğilimindedirler.





Şekil 8.1. Dev ve cüce yıldızların karşılaştırılması.

## 8. Dev ve Cüce Yıldızlar Arasındaki Tayf Farkları (devamı)

### Özet olarak :

Sıcaklıkları aynı olan dev ile cüce yıldızlardan, dev yıldız olanı cücelerden daha ön tayf türündedir. Tayf türleri aynı olan dev ile cüce yıldızdan dev olanı cüceye göre daha soğuk olma eğilimindedir. Bir diğer durum, cüce yıldızda  $P_{\varepsilon}$  basıncı daha fazla, dolayısıyla parçacıkların çarpışması fazla olacak ve atomların dikine hızlarından dolayı cücelerde tayf çizgileri devdeki çizgilerden yaygın ve geniş olmaktadır. Devlerde ise bu tayf çizgileri keskin ve incedir (bkz. Astronomide Temel Bilgiler, cilt III, sayfa 87 deki şekil). Bu özellikten yararlanılarak tayftan salt parlaklık saptama yöntemi bulunmuştur.

## 8. Dev ve Cüce Yıldızlar Arasındaki Tayf Farkları (devamı)

Azalan sıcaklık ve elektron basıncı görünürde iki benzer tayf vermeye yeterken, belirli iyonların çizgileri aynı düzeyde kalmayacaktır. Bunu görebilmek için, aynı ortalama iyonlaşmaya sahip bir dev ve bir cüce yıldızı karşılaştıralım :

Dev için ;

$$T = 5190 \text{ }^\circ\text{K} \Rightarrow \theta = 5040 / T = 0.97$$

$$P_\varepsilon = 5.1 \text{ dyn cm}^{-2} \Rightarrow \log P_\varepsilon = 0.71$$

Cüce için ;

$$T = 5725 \text{ }^\circ\text{K} \Rightarrow \theta = 5040 / T = 0.88$$

$$P_\varepsilon = 37.2 \text{ dyn cm}^{-2} \Rightarrow \log P_\varepsilon = 1.57$$

seçelim. Aynı ortalama I iyonlaşma potansiyeline sahip olma aynı tayf türünde olma demektir. Bu iki yıldızda, demir ve stronsiyum için çizgi yeğliliklerini hesaplayacak olursak ; Fe için  $I = 7.86 \text{ eV}$

Dev için ;

$$\begin{aligned} \log (N_1 / N_0) &= - 0.97 \times 7.86 + 2.5 \log 5190 - 0.48 + 0.40 - 0.71 \\ &= + 0.908 \Rightarrow N_1 / N_0 \cong 8 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Cücede ise ;

$$\begin{aligned} \log (N_1 / N_0) &= - 0.88 \times 7.86 + 2.5 \log 5725 - 0.48 + 0.40 - 1.57 \\ &= + 0.855 \Rightarrow N_1 / N_0 \cong 7.2 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere, elektron yoğunluğu ve sıcaklığın bu çiftiyle, demir (iyonlaşma potansiyeli 7.86 eV) her iki yıldızda da aynı iyonlaşmaya sahiptir. Öyle ki dev ve cücede iyonlaşmış Fe çizgileri yaklaşık nötr ve atomları oranı  $\sim 8$  dir.

## 8. Dev ve Cüce Yıldızlar Arasındaki Tayf Farkları (devamı)

Öte yandan, **stronsiyum** (iyonlaşma potansiyeli **5.67 eV**) **dev** yıldızda **cücedekine** göre **çok daha kuvvetle iyonlaşacaktır** ; **çünkü** basınçtaki azalmaya göre daha etkilidir. Şimdi bunu görelim; **Sr** için **I = 5.67 eV**

**Dev** için ;

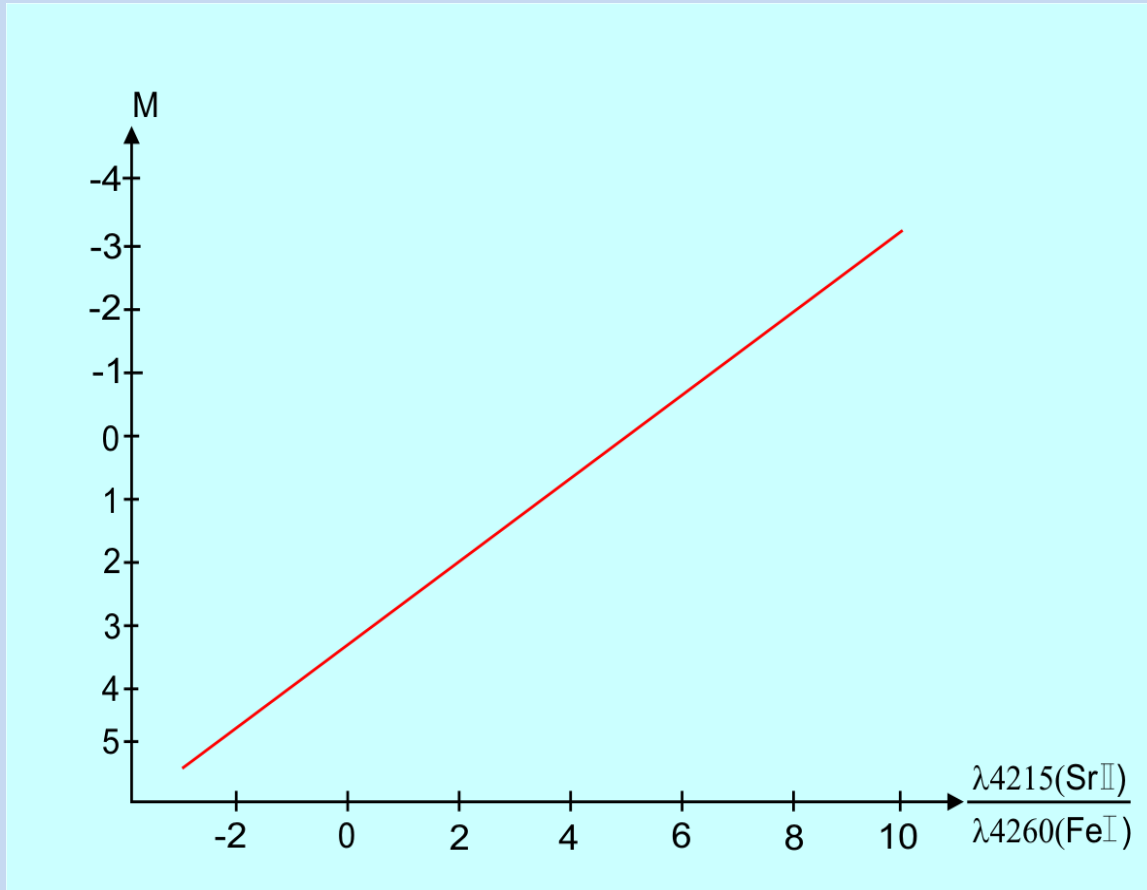
$$\begin{aligned}\log (N_1 / N_0) &= - 0.97 \times 5.67 + 2.5 \log 5190 - 0.48 + 0.32 - 0.71 \\ &= 2.92 \quad \Rightarrow \quad N_1 / N_0 \cong 828 \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

**Cücede** ise ;

$$\begin{aligned}\log (N_1 / N_0) &= - 0.88 \times 5.67 + 2.5 \log 5725 - 0.48 + 0.32 - 1.57 \\ &= 2.675 \quad \Rightarrow \quad N_1 / N_0 \cong 473 \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

Buradan, **aynı tayf sınıfında olan dev** ve **cücede Fe** için  $N_1 / N_0$  oranları **yaklaşık olarak aynı iken** bu oran **Sr** için **yaklaşık 2 kat** olmaktadır. Yani **devde iyonlaşmış Sr çizgileri cüceye göre daha yeğindir.**

Gerçekte **dev yıldızdaki stronsiyumun her bir gramındaki Sr II iyonları cüce yıldızına göre yaklaşık 2 kat kadardır.** Buradan, **Sr II** nin  $\lambda 4215$  **çizgisini** yanındaki **demir çizgileriyle** ( **Fe I** in  $\lambda 4260$  **çizgisi gibi**) **karşılaştırarak** atmosferlerindeki gaz ve elektron basıncı düşük olan dev yıldızlarla, yine atmosferlerindeki gaz ve elektron basınçları yüksek olan cüceleri ayırt edebiliriz. Gözlemler de bu işlemi doğrulayan sonuçlar vermektedir (bkz. Şekil 8.2).



Şekil 8.2. Tayftan salt parlaklık tayini için kalibrasyon grafiği.

## 8. Dev ve Cüce Yıldızlar Arasındaki Tayf Farkları (devamı)

Nötr kalsiyumun  $\lambda 4227$  çizgisi de bir başka örnek sağlamaktadır. Eğer bir **M2 cücesiyle** bir **devi** karşılaştırırsak, bunların **yaklaşık eşit** ve  $3150$  °K lik **sıcaklığa** sahip olduklarını buluruz.

**Dev** için ;

$$T = 3150 \text{ °K} \Rightarrow \theta = 1.6$$

$$P_{\varepsilon} = 0.1 \text{ dyn cm}^{-2} \Rightarrow \log P_{\varepsilon} = -1$$

**Cüce** için ;

$$T = 3150 \text{ °K} \Rightarrow \theta = 1.6$$

$$P_{\varepsilon} = 2.5 \text{ dyn cm}^{-2} \Rightarrow \log P_{\varepsilon} = 0.398$$

**Demirin** durumuna bakalım ; **Fe** için **I = 7.86 eV**

**Dev** yıldızda ;  $\log (N_1 / N_0) = -2.862 \Rightarrow N_1 / N_0 \cong 0.001$

**Cücede** ;  $\log (N_1 / N_0) = -4.26 \Rightarrow N_1 / N_0 \cong 0.00005$

Görüldüğü gibi **nötr Fe çizgileri etkindir**. **Demir gibi elementler her iki yıldızda da nötrdürler**.

## 8. Dev ve Cüce Yıldızlar Arasındaki Tayf Farkları (devamı)

Şimdi **kalsiyumun** durumuna bakalım ; **Ca** için **I = 6.09 eV**

**Ca II** nin (H, K)  $\lambda\lambda 3933, 3968$  çizgileri için,

**Dev** yıldızda ;  $\log (N_1 / N_0) = - 0.38 \Rightarrow N_1 / N_0 \cong 0.916$  veya  
 $N_0 / (N_0 + N_1) = 0.52$  dir. Yani **Ca I** ile **Ca II** yaklaşık eşittir.

**Cücede** ;  $\log (N_1 / N_0) = - 1.436 \Rightarrow N_1 / N_0 \cong 0.037$  veya  
 $N_0 / (N_0 + N_1) = 0.96$  dır. Yani **Ca I** ( $\lambda 4227$ ) hakimdir.

**Nötr kalsiyum** çizgilerinin yeğin olduğu yıldız **cüce yıldızdır**. **Cüce yıldızda** kalsiyumun %96 sinin nötr olduğu görülürken **dev yıldızda** kalsiyumun % 52 sinin nötr olduğu bulunur. Bu tayf sınıfındaki yıldızlarda, nötr kalsiyumun **cücelerde devlerdekinden daha yeğin olması beklenir** ve bu durumu da gözlemler doğrulamıştır.

Bunlara ek olarak **kimi ışınım gücü** ya da “**Salt parlaklık**” belirteci örnekleri verilebilir.

**Fakat bunlar iyonizasyon kuramının rolünü göstermeye yeterlidir.**  
**Uygulamada, bütün ışınım gücü belirteçleri deneysel olarak ayarlanmalıdır.**

## 9. Gaz Basıncı ile Elektron Basıncı Arasındaki Bağntı

Yıldız atmosferleri üzerine kuramsal çalışmalar için, elektron basıncıyla gaz basıncı arasındaki bağıntıyı bilmek gerekir. Çok sıcak yıldızlarda bütün atomlar iyonlaşmışlardır ve her atom en az bir elektron verir. Yıldızın çoğunluktaki maddesinin hidrojen olduğunu düşünebiliriz.  $X$  değeri 0.8 ile 0.97 arasındadır. Bu durumda yıldızda, proton sayısının elektron sayısına eşit olması beklenir. Zira He ve diğer elementler çok azdır. Atmosferlerde hidrojen en büyük bollukla bulunan madde olduğundan ve hidrojenin her bir atomu yalnızca bir elektron verdiği için, elektron basıncı gaz basıncının yarısı kadar olacaktır.

$$P = NkT, P_e = P_p + (\dots) \text{ihmal}$$

Sıcak yıldızlarda ;  $P_g = P_e + P_p + \dots$  ve  $P_e \leq (1/2) P_g$  dir.

Öte yandan, Güneş benzeri bir yıldızda gaz basıncının büyük bir kısmı hidrojence sağlanırken elektron basıncı yalnızca metallerin iyonlaşmasından ortaya çıkmaktadır. Burada gaz basıncı elektron basıncına karışık bir şekilde bağlıdır ve farklı elementlerin varsayılan bolluklarına bağlıdır. Geri tayf türünden yıldızlarda ise, bunlardaki sıcaklıkla iyonlaşmış elementler, genellikle iyonlaşma potansiyeli düşük olan elementlerin elektronları  $P_e$  elektron basıncını yaratır. Bunlarda  $P_g \gg P_e$  olur. İyonlaşma potansiyeli büyük olan elementler bu geri tayf türündeki yıldızlarda nötr durumdadırlar.



## 9. Gaz Basıncı ile Elektron Basıncı Arasındaki Bağıntı (devamı)

$P_g$  gaz basıncını  $P_e$  elektron basıncının ve  $T$  sıcaklığının bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi hesaplanır :  $N_o$  ,  $cm^3$  deki her cinsten atomların sayısını ve  $N_e$  de  $cm^3$  deki elektronların sayısını gösterebiliriz. Ayrıca  $N_o$  'ı atomun iyonlaşma potansiyellerine göre gruplayalım. Öyle ki,  $N_i$  ,  $\psi_i$  ilk iyonlaşma potansiyelindeki atomların sayısını ve

$x_i = N_i / (N_o + N_i)$  ; bir kez iyonlaşmış atomların oranını gösterebiliriz. Hidrojenin çok büyük bolluğundan dolayı ikinci iyonlaşmaları boşlayabileceğimizi göreceğiz. Buradan,

$$N_o = N_1 + N_2 + N_3 + \dots = \sum N_i$$

Burada  $N_1 \rightarrow H$  'ni,  $N_2 \rightarrow He$  'mu ,  $N_3 \rightarrow$  diğer elementi, ... gibi temsil etmektedir.

$x_1$  ; bir kez iyonlaşmış hidrojen oranı  $[N_1/(N_o + N_1)]$  olmak üzere  $N_1$  tane hidrojeninden açığa çıkan elektron sayısı  $N_1 x_1$  olur. Benzer olarak  $x_2$  ; bir kez iyonlaşmış helyum oranı olmak üzere  $N_2$  tane helyumdan açığa çıkan elektron sayısı  $N_2 x_2$  olur.

Bu durumda bir kez iyonlaşmalar gözönüne alınarak toplam elektron sayısı,

$$N_e = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + \dots = \sum N_i x_i$$

dir ve ideal gaz denklemine göre,

$$P_e = N_e kT , P_g = (N_o + N_e) kT = NkT$$

dir. Burada  $N_o$  :  $cm^3$  deki nötr elementlerin sayısıdır. Buradan,

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{(N_o + N_e) kT}{N_e kT}$$

ve,

$$P_g / P_e = (N_o + N_e) / N_e = [ 1 + ( N_e / N_o ) ] / ( N_e / N_o ) \quad \dots\dots(15)$$

elde edilir.

## 9. Gaz Basıncı ile Elektron Basıncı Arasındaki Bağıntı (devamı)

Şimdi eğer yıldız ne çok sıcak ve ne de soğuk değilse bu işlemler nasıl olur ?

Amacımız ( $P_g / P_e$ ) nu bulmaktır. Basitleştirmek için izlenen yol ;

İyonlaşma potansiyelleri ( $\psi_i$  'leri) birbirine yakın elementler gruplaştırılır. Böylece sorun ( $N_e / N_o$ ) ın sıcaklık ve elektron basıncının bir fonksiyonu olarak hesaplanmasına dönüşmüş olur. Buna göre, farklı elementlerin göreceli bolluklarını kabul etmemiz, onları iyonlaşma potansiyellerine göre gruplamamız ve sıcaklık ile elektron basıncının bir fonksiyonu olarak iyonlaşma derecelerini hesaplamamız gerekmektedir. Güneş için Goldberg ve Menzel'in bolluk hesaplarına ve Unsöld'ün  $\tau$  Sco için bolluk hesaplarına dayanarak, Çizelge 3 de gösterilen gruplar kabul edilebilir. Oksijen, azot ve karbonun iyonlaşma potansiyelleri hidrojeninkine yakındır, fakat onların bollukları çok çok daha azdır. Bu nedenle bunların, toplam elektron sayılarına katkılarını boşlayabiliriz. Bunlar her bir hidrojen atomuna karşın üç atomla katkıda bulunurlar.

### Çizelge 3. Elementlerin İyonlaşma Grupları

Atom / Element	Grup	İyonlaşma Potansiyeli (eV)	Atomların sayısı
Helyum	1	24.5	200
Hidrojen (O, N, C)	2	13.54	1000
Fe, Si, Mg, Ni	3	7.9	0.431
Al, Ca, Na	4	5.8	0.011

## 9. Gaz Basıncı ile Elektron Basıncı Arasındaki Bağntı (devamı)

Her bir grup ve verilen bir sıcaklık ile elektron basıncı için, **iyonlaşma yüzdesi** olan  $x_i$  hesaplanır ve  $N_\varepsilon$  **toplam elektron sayısını elde etmek** için  $N_i x_i$  ler **toplanır**. Böylece  $(N_\varepsilon / N_0)$  **oranı bilinir** ve **artık  $(P_g / P_\varepsilon)$  oranı hesaplanabilir**. **Şöyle ki** ;

Her **bin hidrojen atomunun atomik kütle birimi cinsinden toplam kütlesi 1856** dır. Eğer C, N ve O **boşlanabilirse**, buna karşılık gelen atomların **toplam sayısı 1200** dür. Buradan, **iyonlaşmamış maddenin ortalama molekül ağırlığı  $\mu_0 = 1.54$**  olur. **Kabul edilen bollukları göz önüne alarak (15) nolu denklemden**,

$$N_\varepsilon / N_0 = (200 x_1 + 1000 x_2 + 0.431 x_3 + 0.011 x_4) / 1200 \dots(16)$$

$$T = 12600 \text{ }^\circ\text{K ya da } \theta = 5040 / T = 0.4 \text{ ve } \log P_\varepsilon = 2 \text{ de,}$$

(12) nolu **iyonlaşma denkleminin** uygulanmasıyla,

$$x_1 = 0.040 \text{ (He) , } x_2 = 1.00 \text{ (H) bulunur. Şöyle ki ;}$$

**Helyum yüzdesi** için ;

$$\begin{aligned} \log (N_1 / N_0) &= -0.4 \times 24.5 + 2.5 \log 12600 - 0.48 + 0.6 - 2 \\ &= -1.43 \Rightarrow N_1 / N_0 = 0.037 \text{ ve buradan,} \end{aligned}$$

$$x_1 = N_1 / (N_0 + N_1) \cong 0.04 \text{ bulunur.}$$

**Hidrojen yüzdesi** için ;

$$\begin{aligned} \log (N_1 / N_0) &= -0.4 \times 13.54 + 2.5 \log 12600 - 0.48 + 0.0 - 2 \\ &= 2.35 \Rightarrow N_1 / N_0 \cong 224 \text{ ve buradan,} \end{aligned}$$

$$x_2 = N_1 / (N_0 + N_1) \cong 1.00 \text{ bulunur.}$$

**Metaller tümüyle iyonlaşmış olduklarından (  $x_3 \cong 1$  ve  $x_4 \cong 1$  ) onların katkılarını boşlayabiliriz.**

## 9. Gaz Basıncı ile Elektron Basıncı Arasındaki Bağntı (devamı)

O zaman (16) denkleminde,

$$N_{\varepsilon} / N_0 = (200 \times 0.04 + 1000 \times 1) / 1200 = 1008 / 1200 = 0.835$$

ve buradan da,

$$P_g / P_{\varepsilon} = [1 + (N_{\varepsilon} / N_0)] / (N_{\varepsilon} / N_0) = (1 + 0.835) / 0.835 \Rightarrow P_g / P_{\varepsilon} = 2.2$$

bulunur.  $\log P_{\varepsilon} = 2 \Rightarrow P_{\varepsilon} = 100 \text{ dyn/cm}^2$  idi. Buradan

$$P_g = 220 \text{ dyn/cm}^2 \text{ bulunur } (P_{\varepsilon} / P_g \cong 0.46).$$

Aynı işlemler düşük bir sıcaklık için yapılırsa ;

$$T = 6300 \text{ }^{\circ}\text{K} \Rightarrow \theta = 0.8 \text{ ve } \log P_{\varepsilon} = 2 \text{ için,}$$

$x_2 = 0.00016$  dir. Bu nedenle hidrojenin iyonlaşması ile  $1000x_2 = 0.16$  elektron katkıda bulunur. He 'nin  $x_1 = 0.0$  , demir grubu için  $x_3 = 0.835$  ve Al, Ca, Na 'un tümüyle iyonlaşmaları için ise  $x_4 = 1.0$  dir. O zaman,

$$N_{\varepsilon} = 0.011 + 0.36 + 0.16 = 0.531 \text{ verir. Yani,}$$

$$N_{\varepsilon} / N_0 = (1000 \times 0.00016 + 0.431 \times 0.835 + 0.011 \times 1) / 1200$$

$$= 0.16 + 0.36 + 0.011 / 1200 = 0.531 / 1200 \text{ ve buradan}$$

$$\log (P_g / P_{\varepsilon}) = 3.36 \Rightarrow \log P_g = 3.36 + 2 = 5.36 \text{ bulunur } (P_g / P_{\varepsilon} \cong 2291 \text{ dir}).$$

Yıldızlarda Öbek I ve Öbek II türüne göre madde bolluğu değişir. Buradan görülmektedir ki gaz ve elektron basıncı arasındaki bağlantı, yıldız atmosferinin kimyasal yapısına ilişkin yapılan seçime bağlıdır.

## 9. Gaz Basıncı ile Elektron Basıncı Arasındaki Bağntı (devamı)

**Hidrojen / metal oranı yaklaşık bin oluncaya ve metallerin görelı bollukları yaklaşık aynı kalıncaya değın, elektron ve gaz basınçlarıyla ilgili olan Çizelge 4 'te verilen değerler yeterince duyarlı olarak kalmaktadır.**

Çizelge 4. Gaz ve elektron basıncı arasındaki bağıntı ve sıcaklığın fonksiyonu olarak elektron basıncı.

$\theta$	log P <sub>g</sub>							
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1	1,2	1,4
log P <sub>ε</sub> = -1	-0,70	-0,66	-0,66	-0,61	0,00	2,30	2,68	2,92
log P <sub>ε</sub> = 0	0,30	0,34	0,36	0,67	1,89	3,47	4,31	4,70
log P <sub>ε</sub> = 1	1,33	1,35	1,47	2,43	3,78	4,78	5,93	6,52
log P <sub>ε</sub> = 2	2,34	2,38	2,99	4,36	5,36	6,48	7,59	
log P <sub>ε</sub> = 3	3,35	3,64	4,88	6,15	6,89			

# 10. Kimyasal Bileşenlerin Ayrışma Dengesi

İyonlaşma kuramı, sıcak yıldızların tayf sırasının gerçek bir açıklamasını verirken, moleküllerin oluşma ve ayrışmasının benzer olarak en azından nicesel bir incelemesi soğuk yıldızların tayflarını açıklar. İki atomdan oluşmuş bir **molekül** gözönüne alalım. **A** ve **B** atomlarının geriye dönüşebilen,



tepkimesine göre iki atomlu **AB molekülünü** oluşturduğunu varsayalım.

**A** atomlarının sayısı : **n(A)**

**B** atomlarının sayısı : **n(B)**

**AB moleküllerinin** sayısı : **n(AB)** olsun.

**A** ve **B** atomlarıyla **AB moleküllerinin** sayısı, **iyonlaşma denklemine benzer olan bir bağıntıyla birbirlerine bağlıdır**. Şöyle ki,

$$\mathbf{n(A) n(B) / n(AB) = K'(AB)} \quad \dots(18)$$

Burada **K'(AB)** ye kimi zaman “**ayrışma sabiti**” denir. Bu **sabit sıcaklığa** ve **molekülün ayrışma potansiyeline** bağlıdır. (18) bağıntısı, **iyonlaşma denklemine benzer bir şekilde P(A) , P(B) , P(AB)** parçalı basınçlar cinsinden yeniden yazılabilir :

**A elementinin parçalı basıncı** : **P(A)**

**B elementinin parçalı basıncı** : **P(B)**

**AB molekülünün parçalı basıncı** : **P(AB)** ise,

## 10. Kimyasal Bileşenlerin Ayrışma Dengesi (Devamı)

$$\frac{P(A)P(B)}{P(AB)} = \left(\frac{g_A g_B}{g_{AB}}\right) [2\pi M k T / h^2]^{3/2} (h^2 / 8\pi^2 I) [1 - \exp(-S)] \exp(-D/kT) \\ = K(AB) \quad \dots(19)$$

Burada,  $g_A$ ,  $g_B$ ,  $g_{AB}$ , sırasıyla A ve B atomlarıyla AB molekülünün temel düzeylerinin istatistik ağırlıklarını ve M,

$$M = M_A M_B / (M_A + M_B) = M_A M_B / M_{AB}$$

ile tanımlanan indirgenmiş kütle göstermektedir.  $K(AB)$  üzerine etkiyen ve (11) denkleminin sağ yanında görülmeyen iki etken daha vardır. Bunlar eylemsizlik momenti ( $I = M r_o^2$ ) ve molekülün temel titreşim frekansı olan  $\nu$  ile ilgilidir ( $S = h\nu/kT$ ). AB molekülünün A ve B atomları arasındaki denge ayrıklığı :  $r_o$ .

Bunlar (iki etken) atomların sahip olmadığı ve yalnızca moleküllerin sahip olduğu ek hareket yeteneklerinden ortaya çıkmaktadır. Astrofizik ile ilgili moleküller için,

$$[1 - \exp(-S)] = S \exp(-0.46S) \dots(20)$$

hemen hemen geçerli olup tercih edilen bağıntıdır ve eğer titreşim frekansı ( $\omega$ ) dalga sayısı ( $\text{cm}^{-1}$ ) birimi ile belirtilirse,

$$h\nu/k = 1.43 \omega$$

elde edilir. Burada  $\omega$  titreşim frekansıdır.

## 10. Kimyasal Bileşenlerin Ayrışma Dengesi (Devamı)

Bundan başka, eğer A ve B atomlarının denge ayrıklığı  $r_o$  ise  $I = Mr_o^2$  dir. D ise ayrışma potansiyelidir. Eğer basınçlar ve K dyn olarak, M atomik kütle birimiyle,  $r_o$  Angström biriminde ve D ayrışma potansiyeli eV olarak ölçülürse, log K şöyle yazılabilir :

$$\log K = - (5040/T) D + (1/2) \log T - (0.286 \omega / T) + (1/2) \log M - 2 \log r_o \\ + \log \omega + \log (g_A g_B / g_{AB}) + 6.24 \quad \dots(21)$$

Bu, H.N. Russell tarafından verilen denklemdir.

Bir örnek olarak CH molekülünü göz önüne alalım;

$$\text{CH için, } g_A g_B / g_{AB} = 3, \quad r_o = 1.12 \text{ \AA}, \quad \omega = 2862 \text{ cm}^{-1} \\ M = (12 \times 1) / (12 + 1) = 12 / 13 \text{ a.k.b. ve } D = 3.47 \text{ eV}$$

Eğer Güneş atmosferinde C ve H nin parçalı basınçları sırasıyla 4 ve  $8 \times 10^4 \text{ dyn/cm}^2$  ve eğer T = 5700 °K alınırsa,

$$\log K = 8.72 \text{ ve buradan CH'in parçalı basıncı,} \\ P(\text{CH}) = 61.1 \times 10^{-5} \text{ dyn/cm}^2 \text{ olarak bulunur.}$$

Herhangi türden atomların toplam sayısı (örneğin karbonun), serbest atomların sayısı ile moleküllerde bağlı olan atomların sayıları toplamına eşit olacaktır :

$$n'(C) = n(C) + 2n(C_2) + n(\text{CH}) + n(\text{CO}) + \dots \text{v.b} \quad \dots(22)$$



## 10. Kimyasal Bileşenlerin Ayrışma Dengesi (Devamı)

**Azot** atomları ise şu biçimde bir bağıntıyı sağlayacaklardır :

$$n'(N) = n(N) + 2n(N_2) + n(CN) + \dots \text{v.b.} \dots (23)$$

**Benzer bağıntılar, O , H , Ti , ...v.b. için de yazılabilir. Russell, Güneş tayfının çözümlemesinden, sözgelimi  $n'(C)$  ,  $n'(N)$  , ...v.b. değişik elementler için görece bollukları hesapladı. (22) ve (23) nolu denklemlerin sağ taraflarındaki nicelikler hesaplanmış olmaktadır.**

**Parçalı basınç  $P = nkT$  olduğundan, aşağıdaki biçimde ikinci dereceden bir dizi denklem yazılabilir :**

$$P'(C) = P(C) \{1 + [2 P(C) / K(C_2)] + [P(N) / K(CN)] + \dots \text{v.b.}\} \dots (24)$$

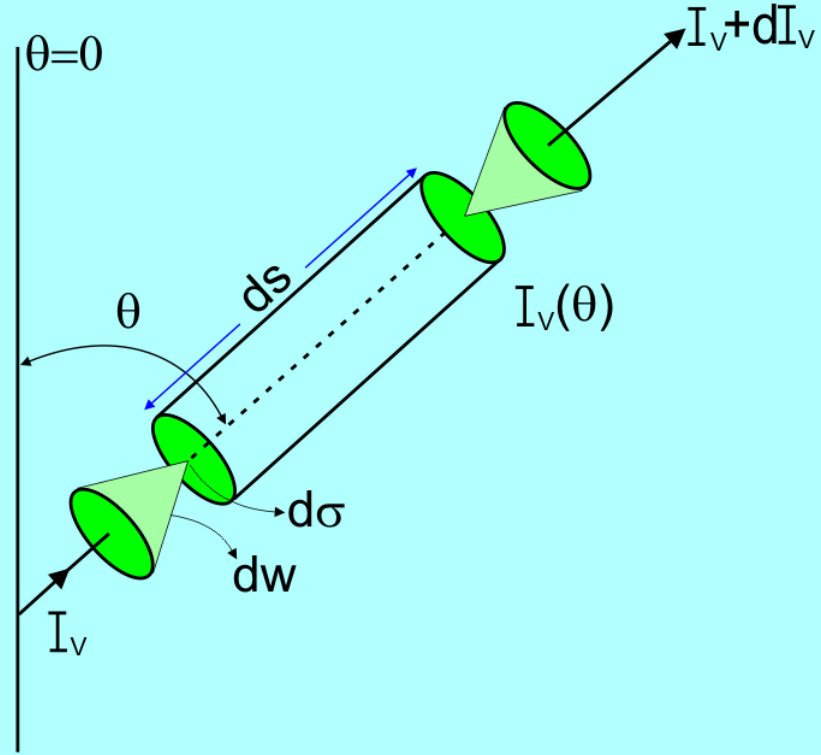
Burada **P** ve **K** lar bilinmektedir. Bu denklemlerin eşzamanlı çözümü  **$P(C)$  ,  $P(N)$  ,  $P(H)$  , v.b. nicelikleri verecektir. Hidrojenin çok fazla bollukta oluşu gerçeği sorunu biraz kolaylaştırır. Öbür elementler, küçük karşılıklı etkilere sahip olan bir gruba girmektedirler ve ayrı ayrı ele alınabilirler. İyonlaşma ise, molekül oluşumu için eldeki atom sayılarını tüketmektedir.**

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ

- Belli bir frekanstaki bir ışın demetinin bir yıldız atmosferi içinde nasıl ilerlediğini ışınım geçiş denklemleri ile tanımlayabiliriz. Bu denklemleri kurarken, enerjinin ışınım yolu ile taşındığı ve dengenin ışınım salınması ve soğurulması ile korunduğu varsayılır. Yani ışınımın taşındığı bölge ışınım dengesindedir. Bununla beraber enerji konveksiyon ve iletim yolu ile de taşınabilir. Güneş türü yıldızlarda iletim önemsiz düzeydedir ama konveksiyon önemli olur.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Yıldız içinde kesiti  $d\sigma$ , uzunluğu  $ds$  ve normalle  $\theta$  açısı yapan **silindir biçiminde bir hacim elementini** ele alalım. Şekil **11.1**.
- Bu **silindire**  $d\omega$  uzay açısı altında girip yine  $d\omega$  uzay açısı altında ve aynı doğrultuda **silindirden çıkan ışınımı** hesaplayalım. Silindir içinde **ışınım şiddetinde meydana gelen değişime**,
- $dI_v = \text{Salınan Şiddet} - \text{Soğurulan Şiddet}$  olacaktır.



Şekil 11.1. Işınımın bir atmosfer katmanı içinden geçişi.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$\nu$  ile  $\nu+d\nu$  frekans aralığında  $d\sigma$  yüzeyine (silindirin) normal doğrultuda  $d\omega$  uzay açısı altında  $dt$  zaman aralığında giren ışınım enerjisi,

$$I_\nu d\nu d\omega d\sigma dt \quad \dots(1)$$

olacaktır. Silindirin üst yüzeyinden aynı doğrultuda çıkan ışınım enerjisi ise,

$$(I_\nu + dI_\nu) d\sigma d\omega d\nu dt \quad \dots(2)$$

olacaktır.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

(1) ve (2) arasındaki **fark** silindir tarafından salınan enerji ile giren ışımandan soğurulan enerji arasındaki farktır. Silindir tarafından  $dt$  zamanda  $d\nu$  frekans aralığında  $d\omega$  doğrultusunda salınan enerji,

$$j_\nu \rho d\nu dt d\omega d\sigma ds \quad \dots(3)$$

Soğurulan enerji ise,

$$I_\nu \rho \kappa_\nu d\nu dt d\omega ds d\sigma \quad \dots(4)$$

şeklinde olacaktır. Burada  $d\sigma ds$  silindirin hacmidir.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

(4) ile (3) arasındaki fark (2) ile (1) arasındaki farka eşit olmalıdır:

$$(I_v + dI_v)d\sigma d\omega dv dt - I_v dv d\omega d\sigma dt = j_v \rho dv dt d\omega d\sigma ds - \kappa_v \rho I_v dv dt d\omega ds d\sigma$$

Buradan;

$$dI_v = j_v \rho ds - \kappa_v \rho I_v ds$$

$$\frac{dI_v}{ds} = j_v \rho - \kappa_v \rho I_v \quad \dots\dots(5)$$

- elde edilir. Burada  $j_v$  kütle salma katsayısı ve  $\kappa_v$  kütle soğurma katsayısıdır.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Silindir içinde termodinamik denge veya YTD varsa **Kirchhoff yasası** geçerlidir :

$$j_v = \kappa_v B_v(T) \quad \dots\dots(6)$$

Bu durumda,

$$-\frac{1}{\kappa_v \rho} \cdot \frac{dI_v}{ds} = I_v - B_v(T) \quad \dots\dots(7)$$

olur. Ancak genel olarak **(6)** sağlanmaz ve **(7)** denklemi geçerli olmaz. YTD'den herhangi bir sapmayı hesaba katmak için bir kaynak fonksiyonu tanımlanır.



## 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Kirchhoff yasasına benzetilerek  $S_v$  ile gösterilen kaynak fonksiyonu ;

$$S_v = \frac{j_v}{K_v} \quad \dots\dots(8)$$

şeklinde tanımlanır. (7) denklemi böylece ;

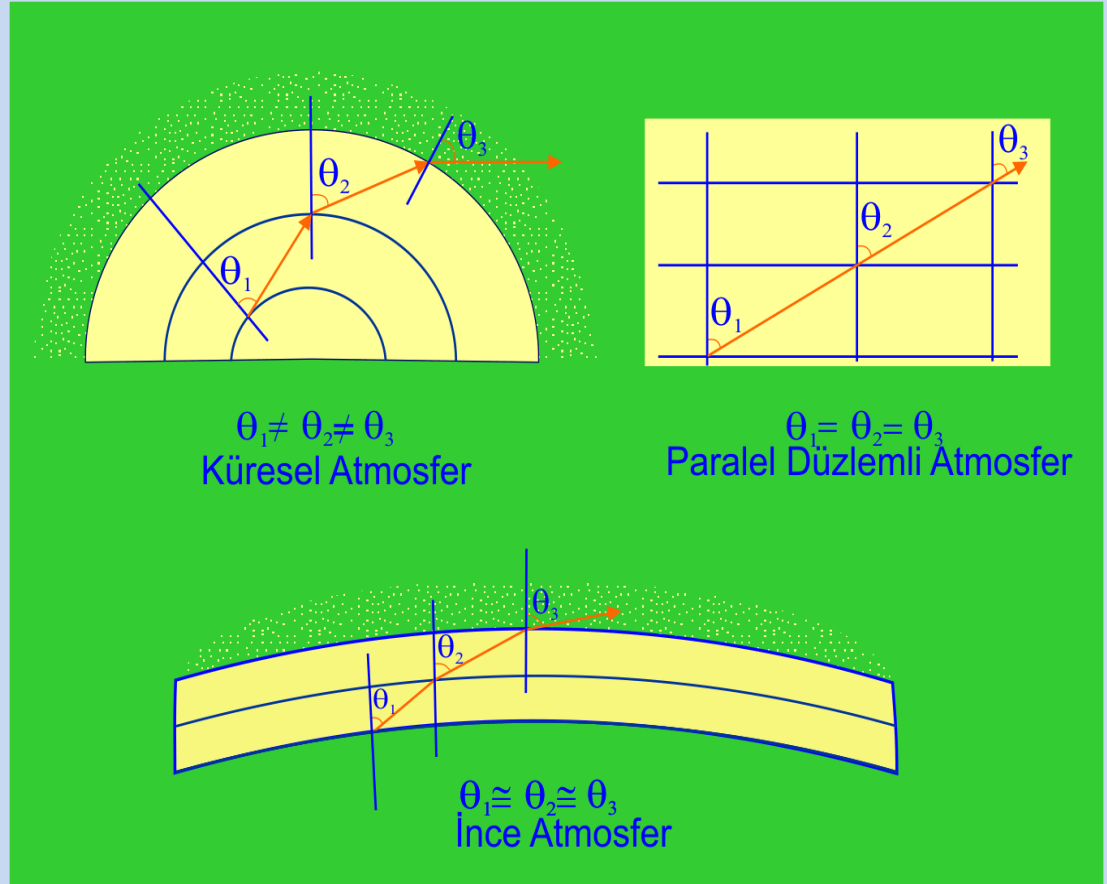
$$-\frac{1}{K_v \rho} \cdot \frac{dI_v}{ds} = I_v - S_v \quad \dots\dots(9)$$

şeklini alır ki buna ışınım geçiş denklemi denir.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

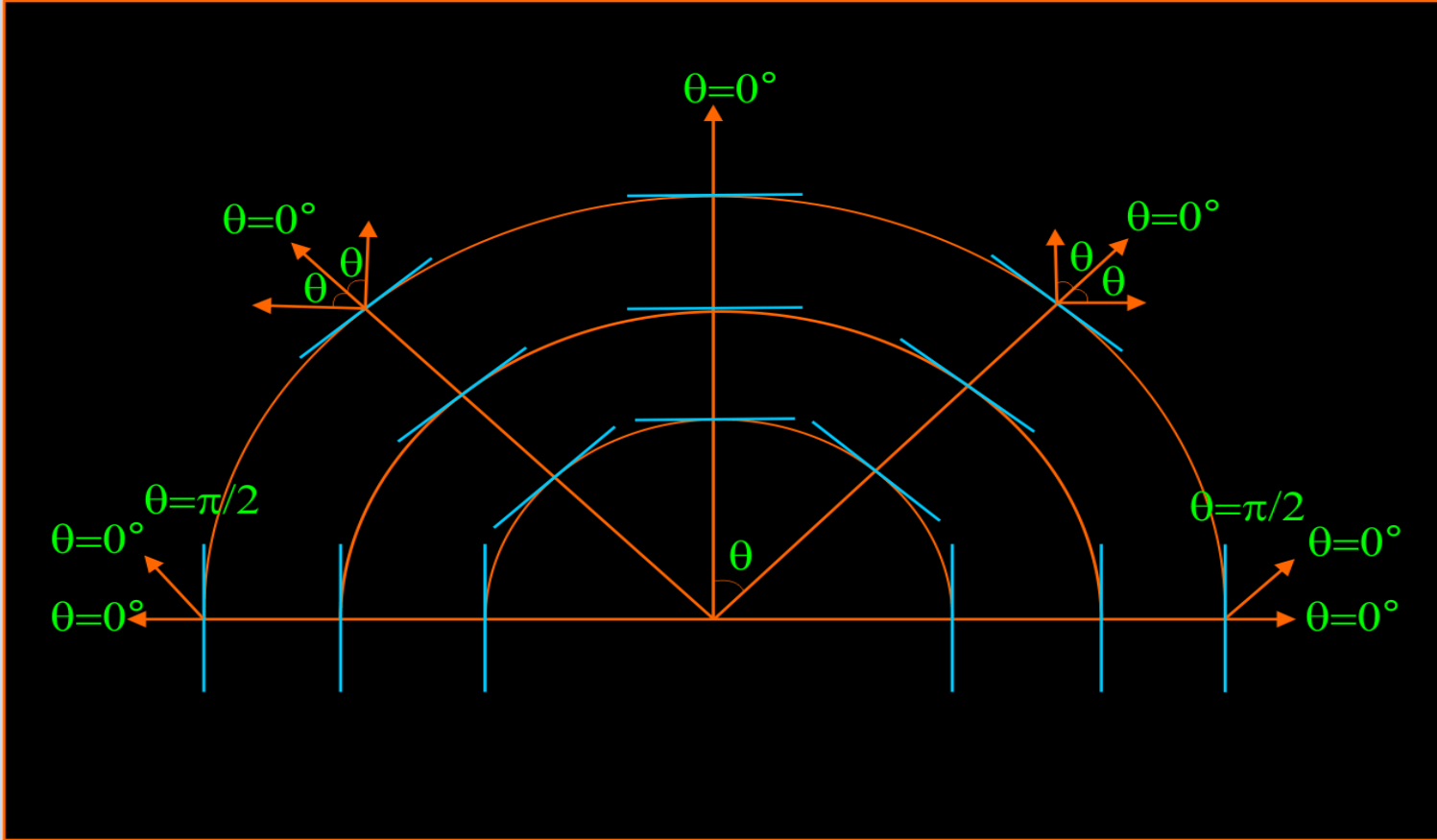
## 11.1. Paralel Düzlemlerle Yaklaştırma :

Yıldız atmosferini tam olarak incelemek için geçiş denkleminde küresel koordinatlar kullanılmalıdır. Çeşitli atmosfer katmanlarından geçen bir ışın, ardışık katmanların normalleri ile eşit açı yapmaz. Ancak çoğu zaman atmosferi yarıçapa dik düzlemlerden oluşmuş varsayarak çözüm yapmak yeterli olur ( Bkz. Şekil 11.2).



Şekil 11.2. Atmosfer özellikleri ve ilgili yaklaşımları.

Bu bir ilk yaklaşımdır. Çünkü atmosfer kalınlığı çoğu yıldızda yıldız yarıçapı yanında küçüktür. Örneğin Güneş'te atmosfer kalınlığı 500-600 km, yarıçapı ise  $7 \times 10^5$  km'dir. Yani atmosfer, yarıçapın ancak %0,1'i kadardır ve atmosferin tabanı ile üstü arasında  $\theta$  daki değişme çok küçüktür (bkz. Şekil 11.3.)

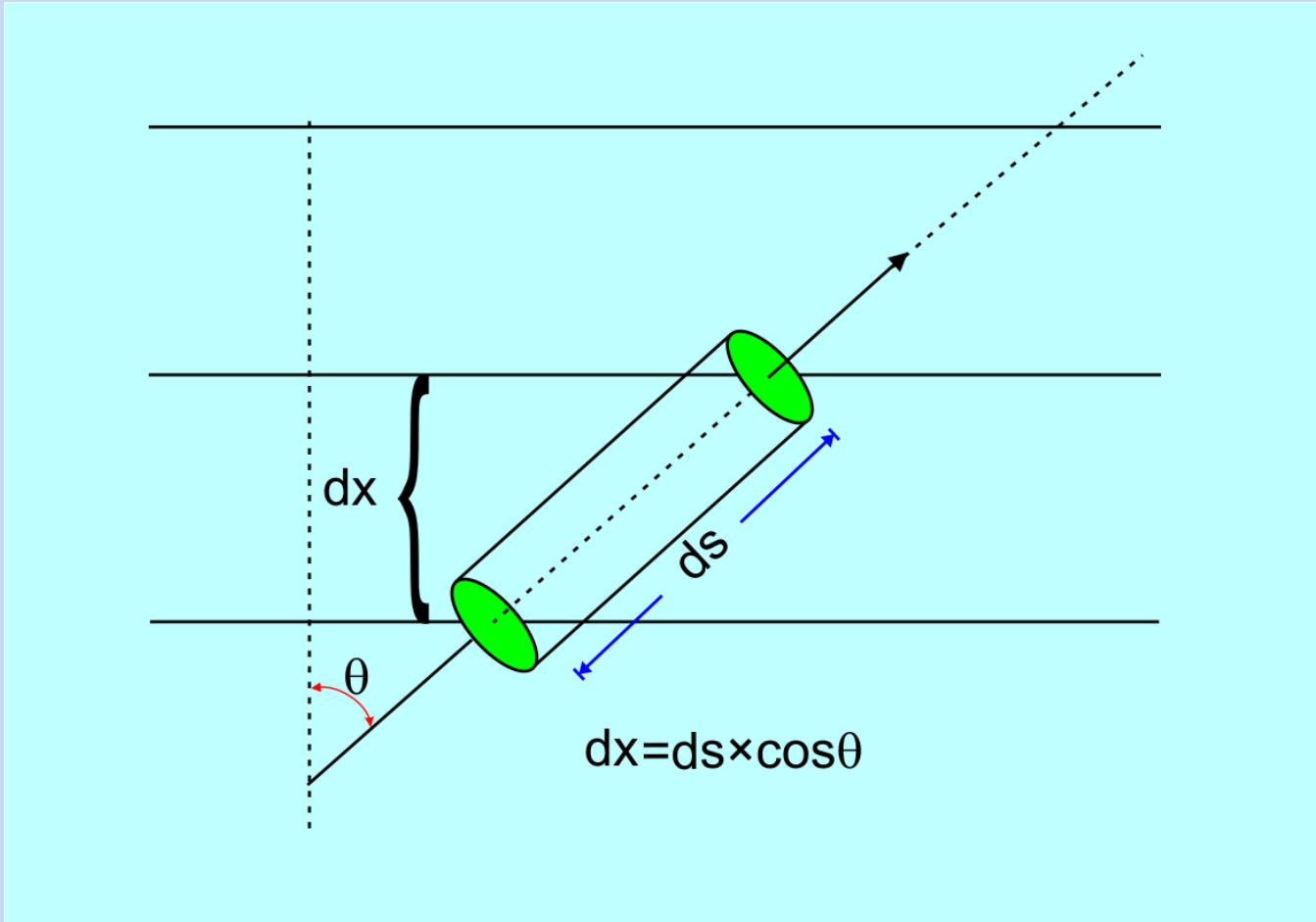


Şekil 11.3. Atmosferden çıkan ışınımın  $\theta$  açısına bağlı gözlenen bileşeni.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

**Bu yaklaşımda** atmosferin düz olması gerekmez, yalnız her yarıçapa dik paralel düzlemler almak yeterlidir (Bkz. Şekil **11.4**). Şekil **11.4**’ten görüldüğü gibi, verilen bir doğrultuda giden ışınım, örneğin bize gelen ışınım, yıldızı merkezde  $\theta = 0$  altında terkeder ve kenara doğru bu açı artar ve tam kenarda  $\theta = \pi/2$  dir. Işınım şiddetinin merkezden kenara kadar değişimini bulmak için yıldızın herhangi bir noktasından çıkan ışınımın şiddetinin açısal dağılımını incelemek yeterlidir.

**Geçiş denklemini** paralel düzlemler için yazalım.  $I_\nu$  ışınım demetinin içinden geçtiği silindirin eksenini paralel düzlemlerin normali ile  $\theta$  açısı yapsın.  $I_\nu$  bu durumda yalnız  $\theta$ ’nın ve  $\mathbf{x}$ ’in fonksiyonudur.



Şekil 11.4.  $\theta$  doğrultusunda ilerleyen ışınım.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Bu durumda

$$dx = ds \cdot \cos \theta \quad \text{.....(10)}$$

dır. (9)'da yerine koyarsak,

$$- \cos \theta \frac{dI_v}{\kappa_v \rho dx} = I_v(\theta, x) - S_v(\theta, x) \quad \text{.....(11)}$$

$d\tau_v = -\kappa_v \rho dx$  tanımını kullanırsak,

$$\cos \theta \frac{dI_v(\theta, x)}{d\tau_v} = I_v(\theta, x) - S_v(\theta, x) \quad \text{.....(12)}$$

- elde edilir. Burada **optik derinlik**  $\tau_v$ , **x geometrik derinliğin tersine, yüzeyden içe doğru ölçülmektedir.**

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Bu denklem her frekans için ayrı ayrı geçerlidir. Bir yıldızın saldığı ışınımı çözümlenmek istersek her dalgaboyuna ayrı ayrı uygulamalıyız. Bunun için  $\tau_\nu$ 'nün yani soğurma katsayısının  $\nu$ 'ye bağlılığı bilinmelidir. Eğer  $\kappa_\nu$  için  $\nu$ 'nün fonksiyonu olarak genel bir ifade olsaydı (12) genel olarak çözülebilirdi. Bu da bize bütün frekanslar için  $I_\nu(\theta, \tau_\nu)$  yü verirdi.  $\tau_\nu=0$  için yüzey enerji dağılımını bulur ve gözlemlerde karşılaştırdık. Bu genellikle zordur. Çünkü  $\kappa_\nu$  karmaşık bir şekilde frekansa, sıcaklığa ve kimyasal bileşime bağlıdır.

Özel ve basit bir durum  $\kappa_\nu$  frekanstan bağımsız olduğu zaman ortaya çıkar. O zaman  $\kappa_\nu = \kappa = \text{sabit}$  alabilir ve (12) denklemini frekans üzerinden integre ederek toplam ışınım geçiş denklemini yazabiliriz.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

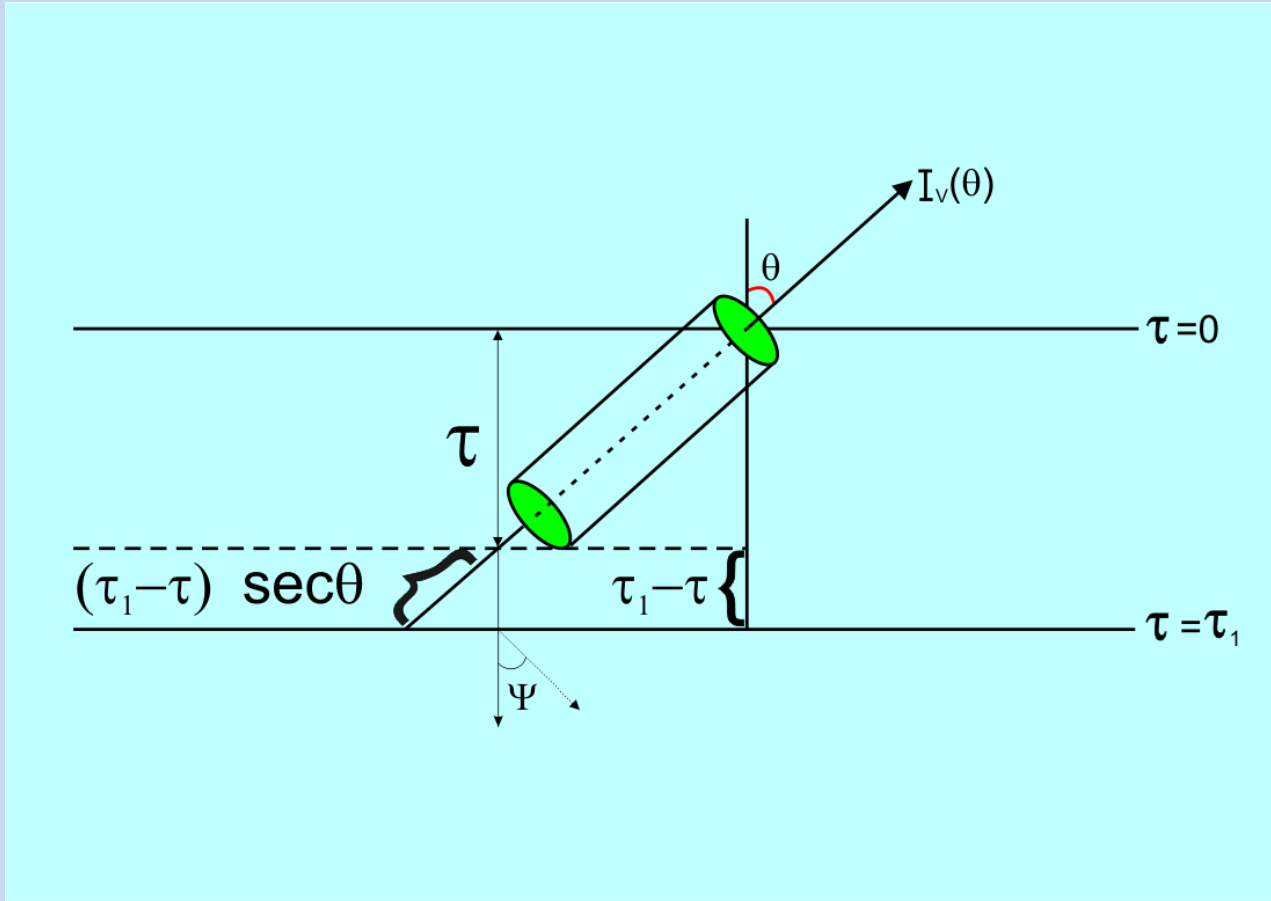
## *11.2. Geçiş Denklemiminin İntegral Şeklinde*

### *Çözümü:*

Soğurma katsayısını ve onun yıldız atmosferinde enerji akışına etkisini incelemeden önce geçiş denklemini yeniden yazarak  $I_{\nu}(\theta, \tau_{\nu})$  yü kaynak fonksiyonunun integrali olarak ifade edelim.

Yıldız içinde bir  $\tau_{\nu}$  derinliğindeki ışınımı içe ve dışa doğru olmak üzere **ikiye ayırılım** (Şekil 11.5).





Şekil 11.5. Atmosfer katmanından geçen ışınımın bileşenleri.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Dışa doğru olan ışınım  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  aralığındaki ışınım demetlerinin toplamıdır. İçe doğru ışınım için  $\theta$  açısı  $\pi / 2 \leq \theta \leq \pi$  aralığındadır. Her iki durumda da açı dışa doğru yönelen normalden ölçülür. Fakat içe doğru ışınımı, içe doğru yönelen normalden ölçülen açı cinsinden yazabiliriz. İçe doğru ışınımı  $I'(\Psi)$  ile gösterelim ve

$$\left. \begin{array}{l} \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \Psi \leq \pi/2 \end{array} \right\} \text{ için } \Psi = \pi - \theta$$

olsun.

$$\text{Cos } \theta = \text{Cos } (\pi - \Psi) = - \text{Cos } \Psi$$

olduğu için içe doğru giden ışınım demeti için geçiş denklemini ayrı olarak yazabiliriz.

## 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- **Dışa Doğru Işınım İçin:**

$$\cos\theta \frac{dI_v(\theta, \tau_v)}{d\tau_v} = I_v(\theta, \tau_v) - S_v(\theta, \tau_v) \quad , 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

- **İçe Doğru Işınım İçin:**

$$\cos\Psi \frac{dI'_v(\Psi, \tau_v)}{d\tau_v} = -I'_v(\Psi, \tau_v) + S_v(\Psi, \tau_v) \quad , 0 \leq \Psi \leq \frac{\pi}{2}$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- **Birinci**yi  $e^{-\tau_v \sec \theta}$ , **ikinci**yi  $e^{\tau_v \sec \Psi}$  ile çarptıktan sonra bu denklemleri şöyle yazabiliriz:

$$\cos \theta \frac{d}{d\tau_v} \left[ I_v e^{-\tau_v \sec \theta} \right] + S_v e^{-\tau_v \sec \theta} = 0$$

$$\cos \Psi \frac{d}{d\tau_v} \left[ I_v' e^{\tau_v \sec \Psi} \right] - S_v e^{\tau_v \sec \Psi} = 0$$

- Belli bir  $\tau$ ,  $\tau_1$  arasında integre edersek,

$$I_v(\tau_1, \theta) e^{-\tau_1 \sec \theta} - I_v(\tau, \theta) e^{-\tau \sec \theta} = - \int_{\tau}^{\tau_1} S_v(x) e^{-x \sec \theta} \sec \theta dx$$

Burada  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  dir.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$I'_{\nu}(\tau_1, \Psi)e^{\tau_1 \sec \Psi} - I_{\nu}(\tau, \Psi)e^{\tau \sec \Psi} = \int_{\tau}^{\tau_1} S_{\nu}(x)e^{-x \sec \Psi} \sec \Psi dx$$

Burada  $0 \leq \Psi \leq \frac{\pi}{2}$  dir.

- Şekil **11.5**'ten görüleceği gibi  $\tau_1$  gelişigüzel seçilmiştir ve atmosferin üst sınırı altında bir başvuru düzeyi olarak alınabilir. Bazen  $\tau_1$ 'i fotosferin derinliği olarak almak uygun olur. Atmosferin üst sınırı olarak  $I'_{\nu}(0, \Psi)=0$  olan yüzey alınır, yüzeyde  $\tau=0$ 'dır. **O halde son iki denklemden,**

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$I_v(\tau, \theta) = I_v(\tau_1, \theta)e^{-(\tau_1-\tau)\sec\theta} + \int_{\tau}^{\tau_1} S_v(x)e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx \quad \dots\dots(13)$$

$$I'_v(\tau, \Psi) = \int_0^{\tau} S_v(x)e^{-(\tau-x)\sec\Psi} \sec\Psi dx \quad \dots\dots(14)$$

- (14)'ü elde etmek için önce  $\tau=0$ ,  $\tau_1=\tau$  ve  $I'_v(0, \Psi)=0$  konur. (13) denkleminde sağdaki ilk terim  $\tau_1$  derinliğindeki katmanın  $\tau$  derinliğinde ve dışa doğru  $\theta$  doğrultusundaki ışınım katkısıdır. Ancak  $\tau_1$ 'den  $\tau$ 'ya uzanan  $(\tau_1-\tau)\sec\theta$  yolu boyunca soğurma çarpanı  $e^{-(\tau_1-\tau)\sec\theta}$  kadar azalmıştır. Bu  $\tau_1$  ile  $\tau$  arasındaki katmanı geçen ışınımıdır. İkinci terim ise  $\tau$  ile  $\tau_1$  arasındaki tüm katmanlardan (yol boyunca soğurma ile azaldıktan sonra)  $\tau$ 'ya ulaşan tüm katkılardır.
- (14)'ün sağ tarafındaki integral atmosferin üst tabakası ile  $\tau$  derinliğindeki tabaka arasındaki tüm katmanların  $\tau$  derinliğinde ve içe doğru olan ışınım katkılarının toplamıdır.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- YTD durumunda (13) ve (14)'te  $S_v$  yerine  $B_v$  gelir. Bu durumda katmanların toplam ışınım katkısı karacismın katkısı gibi olur.
- Çoğu durumda  $\tau_1$ 'i atmosferin üst sınırından çok içeride seçebiliriz. Yani  $\tau_1 = \infty$  alabiliriz. Bu durumda denklemler daha basit şekle girer:

$$I_v(\tau, \theta) = \int_{\tau}^{\infty} S_v(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx \quad \dots\dots(15)$$

$$I_v'(\tau, \Psi) \quad \text{degismez.}$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Yıldız yüzeyinde  $\tau = 0$  koyarsak, yüzeyden  $\theta$  doğrultusunda çıkan ışınım;

$$I_{\nu}(0, \theta) = \int_0^{\infty} S_{\nu}(x) e^{-x \sec \theta} \sec \theta dx \quad \dots\dots(16)$$

- Bu son denklem Güneş Fiziği için önemlidir. Çünkü onu kullanarak ve kenar kararmasını inceleyerek kaynak fonksiyonunun derinliğe bağılılığı araştırılabilir.
- **ÖDEV:** Geçiş denklemini  $(dy/dx)+Py=Q$  şeklinde lineer diferansiyel denklem olarak yazıp genel çözümünü bulunuz. İntegral sabitini  $\tau=\tau_1$  için belirleyerek (13) çözümünü doğrulayınız.



# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

## 11.3 Geçiş Denkleminin Yaklaşık Çözümleri:

- Geçiş denklemini toplam ışınım için elde edelim. Bunun için geçiş denkleminin ilk şeklini integre etmek gerekir.

$$dI_v = j_v \rho dx \sec \theta - \kappa_v \rho I_v dx \sec \theta$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- $\nu$  üzerinden integre etmek için iki tarafı  $d\nu$  ile çarpalım.

$$d \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu = \rho dx \sec \theta \int_0^{\infty} j_{\nu} d\nu - \rho dx \sec \theta \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} I_{\nu} d\nu$$

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu \quad \text{ve} \quad j = \int_0^{\infty} j_{\nu} d\nu$$

- diyelim ve basit hale getirmek için  $\kappa_{\nu}$ 'nün  $\nu$ 'den bağımsız olduğunu, yani  $\kappa_{\nu} = \kappa = \text{sabit}$  olduğunu (bu durumda atmosfere gri atmosfer denir) varsayalım.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Bu durumda toplam ışınım için geçiş denklemi şöyle olur:

$$dI = j\rho dx \sec \theta - \kappa\rho I dx \sec \theta, \quad d\tau = -\kappa\rho dx$$

- tanımı ile,

$$\cos \theta \frac{dI(\theta, \tau)}{d\tau} = I(\theta, \tau) - \frac{j}{\kappa} \quad \dots\dots(17)$$

- Bu denklem de yaklaştırma yapmadan basitçe çözülemez. Çünkü kaynak fonksiyonu  $j/\kappa$  bilinmiyor. İşlemleri kolaylaştırmak için, frekans üzerinden integre edilmiş kabul edilen şu ortalama değer tanımları kullanılır ( daha önce (2), (7) ve (9)'da tanımlanan):

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$\left. \begin{aligned} J(\tau) &= \frac{1}{4\pi} \int I(\theta, \tau) d\omega && \text{ışınımın ortalama siddeti} \\ H(\tau) &= \frac{1}{4\pi} \int I(\theta, \tau) \cos \theta d\omega && \text{dış doğru net akı} \\ K(\tau) &= \frac{1}{4\pi} \int I(\theta, \tau) \cos^2 \theta d\omega \end{aligned} \right\} \dots(18)$$

- Bu denklemlerde integral tüm küre üzerinden alınır.  $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$ , ya da ışınım alanı  $\theta = 0$  etrafında simetrik olduğuna göre

$d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  alıp (17)'yi  $\theta$  üzerinden integre edersek,

$$\int_{\omega} \cos \theta \frac{dI(\theta, \tau)}{d\tau} d\omega = \int_{\omega} I(\theta, \tau) d\omega - \int_{\omega} \frac{j}{K} d\omega$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- $\tau'$ ya göre türev  $\omega$  üzerinden integrasyondan bağımsız olduğundan;

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\omega} I(\theta, \tau) \cos \theta d\omega = \int_{\omega} I(\theta, \tau) d\omega - \int_{\omega} \frac{j}{\kappa} d\omega$$

- $j$  ve  $\kappa$ 'nin açısal bağılılığı olmadığından,

$$4\pi \frac{dH(\tau)}{d\tau} = 4\pi J(\tau) - 4\pi \frac{j}{\kappa}$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = J(\tau) - \frac{j}{\kappa} \quad \dots\dots(19)$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Şimdi de  $\cos \theta$  ile çarpıp integre edersek:

$$\frac{d}{d\tau} \int I(\theta, \tau) \cos^2 \theta d\omega = \int I(\theta, \tau) \cos \theta d\omega - \underbrace{\frac{j}{K} \int \cos \theta d\omega}_0$$

$$\frac{d}{d\tau} (4\pi K) = 4\pi H$$

$$\frac{dK}{d\tau} = H \quad \dots\dots(20)$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Ele aldığımız atmosferde enerji kaynağı (nükleer enerji üretimi gibi) ya da enerji “yutan” bölgeler olmadığına göre  $H(\tau)$  akısı  $\tau$ 'nın fonksiyonu değildir. Yani sabit olmalıdır. Buna ışınım dengesi denir. O halde (19)'da  $dH / d\tau = 0$  konur ve (20) integre edilirse,

$$J = \frac{j}{K} \quad \dots\dots(21)$$

$$K = H\tau + \text{sabit} \quad \dots\dots(22) \quad \text{elde edilir.}$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

## 11.3.1. Eddington'un İlk Yaklaşması:

- Yukarıda belirtildiği gibi (17) tam çözülemez, dolayısıyla  $I(\theta)$  belli değildir. Eddington'un ilk yaklaşmasında ışınım alanı dışa doğru sabit  $I_1(\tau)$  ve içe doğru da sabit  $I_2(\tau)$  alınır, yani

$$I(\tau, \theta) = \begin{cases} I_1(\tau) & 0 \leq \theta \leq \pi / 2 \\ I_2(\tau) & \pi / 2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \dots\dots(23)$$



# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- $I_1$  ve  $I_2$ 'yi  $\tau$ 'nin fonksiyonu olarak bulmalıyız. Bu yaklaşım  $\theta = \pi / 2$  'de süreksizdir ama bizi integral denkleminde kurtarır ve yeterli ilk yaklaşım sağlar.

(18) integrallerini alalım:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int I d\omega = \frac{2\pi}{4\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} I_1 \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \sin \theta d\theta \right]$$

$$= \frac{1}{2} I_1 (-\cos \theta)_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} I_2 (-\cos \theta)_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \dots\dots(24)$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Bu sonuç uygundur, çünkü  $J$ ,  $I_1$  ve  $I_2$  'nin ortalamasıdır.

$$H = \frac{1}{4\pi} \int I \cos \theta d\omega = \frac{2\pi}{4\pi} \left( \int_0^{\pi/2} I_1 \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \cos \theta \sin \theta d\theta \right)$$
$$= \frac{1}{2} I_1 \left( \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} I_2 \left( \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{4} (I_1 - I_2) \quad \dots\dots(25)$$

- $H = (1/4\pi) F$  idi, o halde  $4\pi H$  net akıdır. Yani yıldızın birim yüzeyinden birim zamanda çıkan enerjidir.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Üçüncü integrali de alırsak,

$$K = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} I \cos^2 \theta d\omega = \frac{2\pi}{4\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} I_1 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right]$$

$$K = \frac{1}{2} I_1 \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} I_2 \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{6} (I_1 + I_2)$$

(24)'ten,

$$K = \frac{1}{3} J \quad \text{.....(26)} \quad \text{bulunur.}$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Şimdi  $J(\tau)$ 'yu ve  $I_1(\tau)$ ,  $I_2(\tau)$ 'yu bulalım.  
(22) ve (26)'dan;

$$J = 3H\tau + \text{sabit} \quad \text{.....(27)}$$

- Sabiti bulmak için önce  $\tau = 0$  koyalım.

$$J(0) = \text{sabit} \quad \text{.....(28)}$$

- Yüzeyden içe doğru ışınım olmadığına göre,

$$I_2(0) = 0$$

olmalıdır.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- (24) ve (25)'ten sırasıyla

$$\left. \begin{array}{l} J(0) = \frac{1}{2} I_1(0) \\ H = \frac{1}{4} I_1(0) \end{array} \right\} J(0) = 2H$$

- Bu (28)'de kullanılırsa,  
sabit = 2H
- bulunur. Bunu (27)'de yerine koyarsak :

$$J(\tau) = 3H\tau + 2H = H(2+3\tau) \quad \text{.....(29)}$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- (24) ve (25)'ten  $I_1$  ve  $I_2$  'yi çözersek,

$$I_1(\tau) = J(\tau) + 2H$$

$$I_1(\tau) = H(4 + 3\tau) \quad \dots\dots(30)$$

$$I_2(\tau) = J - 2H = 3H\tau \quad \dots\dots(31)$$

- **Sıcaklık Dağılımı**

- Bir yıldızda kuramsal enerji dağılımını hesaplarırken karşılaşılan en önemli veri sıcaklığın derinlikle değişmesidir. Geçiş denkleminin farklı çözümleri birbirinden farklı çözümler (sonuçlar) vermektedir. Çünkü verdikleri sıcaklık eğimi (değişimi) farklı olmaktadır.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Işınım alanı eş yönlü ve  $T$  sıcaklığında çevredeki madde ile dengede ise Kirchoff yasası geçerlidir. Yani,

$$j_{\nu} = \kappa_{\nu} B_{\nu}(T)$$

- dir. Eğer madde **YTD** ise bu yine geçerlidir. Bu durumda,  $\kappa_{\nu}$  frekanstan bağımsız ise toplam ışınım için

$$j = \kappa \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = \kappa \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

- Burada  $\sigma$  Stefan-Boltzman sabitidir. (21)'den gri atmosfer için  $J = j / \kappa$  olduğundan,
- $J = (\sigma/\pi) T^4$  .....(32)
- olur. Burada  $T$ 'ye ışınımın etkin sıcaklığı denir.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Demek ki  $\kappa$ ,  $v$ 'den **bağımsız** ise **YTD'deki maddenin sıcaklığı ışınımın etkin sıcaklığına eşittir.**

(32)'yi (29)'da kullanırsak,

$$J = H(2 + 3\tau) \quad \dots\dots(29)$$

$$(\sigma/\pi)T^4 = H(2 + 3\tau)$$

- **Yüzeydeki sıcaklık  $T_0$  olmak üzere  $\tau = 0$  koyarsak,**

$$T_0^4 = 2H \frac{\pi}{\sigma}$$

Buradan,



# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right) \quad \dots\dots(33)$$

- elde edilir. Bu ifade sıcaklığın optik derinlikle değişimini verir. Stefan-Boltzman yasasından,

$$F = \sigma T_e^4 \quad \text{ve} \quad H = \frac{1}{4\pi} F$$

- olduğuna göre  $T_0^4 = \frac{1}{2} T_e^4$  veya  $T_e = \sqrt[4]{2} \cdot T_0 = 1,189 T_0$

bulunur ( **Güneş**'in etkin sıcaklığından  $T_0$  yüzey sıcaklığını buluruz.  $T_{e\odot} = 5780$  °K).

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$T_e$  cinsinden yazarsak,

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right) \dots\dots(34)$$

Demek ki  $\tau = 2 / 3$  optik derinliğinde fotosferin sıcaklığı etkin sıcaklığa eşittir. Tam çözüm bundan çok az fark eder.

## 11.3.4. Eddington'un İkinci Yaklaşması ve Kenar Kararması :

Güneş diski kenarda ortasına göre daha karanlıktır. Bu diğer yıldızlar için de doğrudur. Çift yıldız ışık eğrileri bunu göstermektedir. Işınım şiddetinin disk üzerindeki konuma göre değişmesi, ışınımın normale yaptığı  $\theta$  açısına bağlılıktan ileri gelmektedir. Dolayısıyla  $I$ 'yı  $\theta$ 'ya bağlı olarak bulmalıyız.

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Dışa doğru ışınım şöyle veriliyordu:

$$I_{\nu}(\tau, \theta) = \int_{\tau}^{\infty} S_{\nu}(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

Frekans üzerinden toplarsak,

$$I(\tau, \theta) = \int_{\tau}^{\infty} S(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

yazabiliriz. Gri atmosfer ( $\kappa = \text{sabit}$ ) durumunda  $J = j/\kappa$  bulunmuştu. Yani kaynak fonksiyonu ortalama şiddet  $J$ 'ye eşittir. Bu durumda geçiş denklemini toplam ışınım için yazar ve  $S(\tau) = J(\tau) = H(2 + 3\tau)$  koyup integre edersek,

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$I(\tau, \theta) = \int_{\tau}^{\infty} J(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

$$= \int_{\tau}^{\infty} H(2+3x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

$$I(\tau, \theta) = 2H \int_{\tau}^{\infty} e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx + 3H \int_{\tau}^{\infty} x e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

Burada  $y = (x - \tau) \sec \theta$ ,  $dy = dx \sec \theta$  dersek,

$$= 2H \int_0^{\infty} e^{-y} dy + 3H \int_0^{\infty} (\tau + y \cos \theta) e^{-y} dy$$

$$= 2H(-e^{-y}) \Big|_0^{\infty} + 3H\tau(-e^{-y}) \Big|_0^{\infty} + 3H \cos \theta \int_0^{\infty} y e^{-y} dy$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$= 2H + 3H\tau + 3H \cos \theta \left[ (-ye^{-y})_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y} dy \right]$$

$$= 2H + 3H\tau + 3H \cos \theta(0+1)$$

$$I(\tau, \theta) = H(2 + 3\tau + 3 \cos \theta) \quad \dots\dots(35a)$$

Aynı işlemi içe doğru ışınım için yaparsak,

$$I'(\tau, \Psi) = \int_0^{\tau} J(x) e^{-(\tau-x)\sec\Psi} \sec\Psi dx$$

$$= \int_0^{\tau} H(2 + 3x) e^{-(\tau-x)\sec\Psi} \sec\Psi dx$$

$$= H \left[ (2 - 3 \cos \Psi)(1 - e^{-\tau \sec \Psi}) + 3\tau \right] \quad \dots\dots(35b)$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

(35a)'yı **yüzeyden çıkan ışınım** için yazarsak ( $\tau=0$ )

$$I(0,\theta) = H(2+3\cos\theta) \quad \dots\dots(35c)$$

Bu ifadeden,

$$I(0,0) = 5H, \quad I(0,\pi/2) = 2H$$

bulunur. Bunları (30)'dan elde edilen  $I_1(0) = 4H$  ile

**karşılaştırırsak**  $\cos\theta = 2/3$  iken **Eddington'un ilk yaklaştırmaları ile (35c) aynı sonucu verdiğini görürüz.**

Beklenildiği gibi,  $\theta$  arttıkça **şiddet azalmaktadır**. Bu kenar kararmasının etkisi,  $I(0,\theta) / I(0,0)$  oranı hesaplanarak görülebilir :

$$\frac{I(0,\theta)}{I(0,0)} = \frac{2}{5} \left( 1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right) \quad \dots\dots(36)$$

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Bu denklemin verdiği değerler ile gözlenen değerler Güneş için aşağıdaki çizelgede verilmektedir.

$\cos\theta$	Gözlenen	Eddington Yaklaşması	Tam Çözüm (Chandrasekhar)
1,00	1,00	1,00	1,00
0,90	0,944	0,940	0,939
0,80	0,898	0,880	0,878
0,70	0,842	0,820	0,816
0,60	0,788	0,760	0,755
0,50	0,730	0,700	0,692
0,40	0,670	0,640	0,629
0,30	0,602	0,580	0,565
0,20	0,522	0,520	0,499
0,10	0,450	0,460	0,429
0,00	-	0,400	0,344

# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Görüldüğü gibi basit kuramın öngördüğü kenar kararması gereğinden büyük, ancak genellikle gözlemlerle uyuşmaktadır ve bu da Güneş atmosferinde ışınım dengesinin (ışınım dengesinin) varlığını göstermektedir.

Burada şu noktalar unutulmamalıdır: Toplam ışınımdaki kenar kararması,  $I_{\nu}(0,\theta)/I_{\nu}(0,0)$  tek renk değerlerden ve gözlenen enerji dağılımından bulunmak zorundadır. İkincisi Güneş maddesi gri değildir, bu nedenle gri cisim enerji dağılımı Güneş için geçerli olmayabilir.

**Tek renklerle karşılaştırma yapılırsa uyumun böyle iyi olmadığı görülür.**

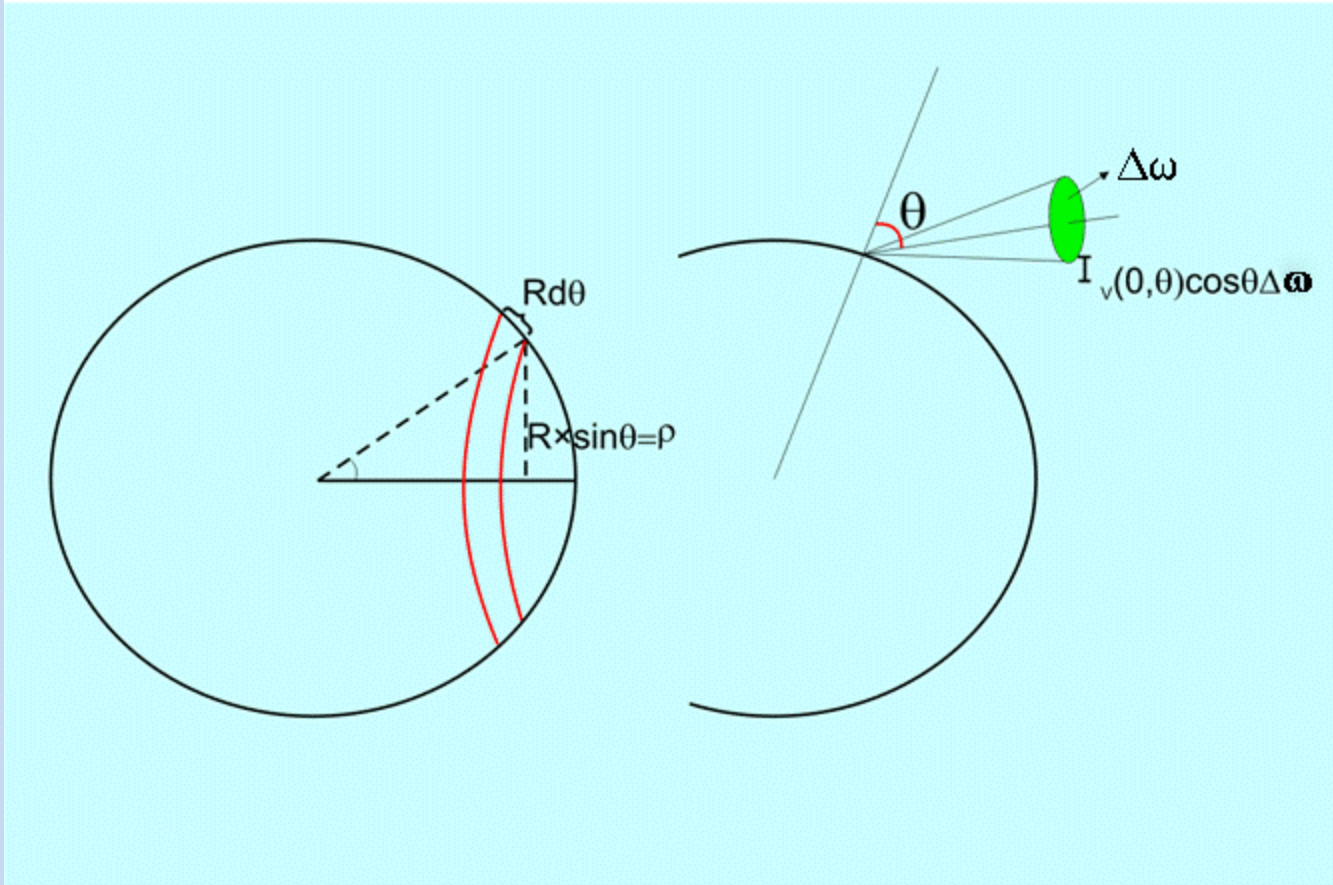


# 11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$I_v(\tau, \theta) / I_v(\tau, 0)$  nun verilen bir optik derinlikte  $\theta$  nın fonksiyonu olarak grafiği çizilirse salınan ışınımın eşyönlülükten ne kadar saptığını görebiliriz.  $\tau$  ne kadar büyükse, yani yıldız içinde ne kadar derinde isek, ışınım o kadar eşyönlüdür, çünkü  $\tau$  arttıkça  $\cos\theta$  teriminin katkısı gittikçe azalır. Fiziksel olarak bu demektir ki, **iç kısımlarda ışınım karacisim ışınımına daha yakındır, yani YTD iç kısımlarda daha büyük oranda sağlanmaktadır.**

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI

- **Akı** dışarıya doğru **net enerji akışını** tanımlar. **Yıldız tayfı** gözlemlerinin  $\nu$ 'ye göre  $I_\nu(0,\theta)$  veya  $F_\nu(0)$  dağılımını verip veremeyeceğini inceleyelim.
- **Güneş** dışındaki **yıldızların farklı bölgelerini ayrı ayrı göremediğimizden yıldızın görünen yüzeyinin tümünden gelen ışınımın toplamını gözleyebiliriz(Şekil 12.1).**

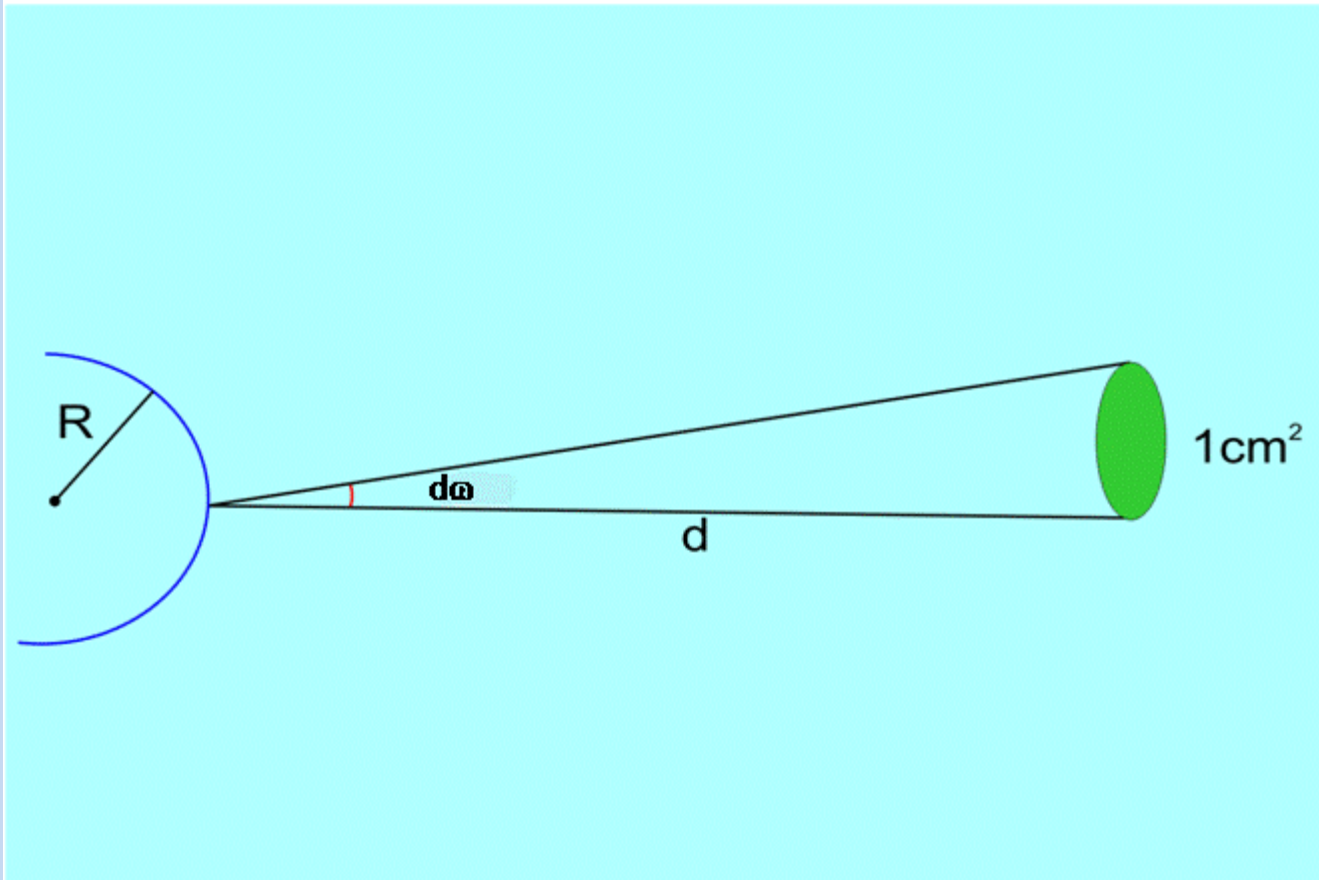


**Şekil 12.1.** Güneş ve yıldız yüzeyinden gelen toplam ışıının özelliği.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- 1 cm<sup>2</sup> den  $\Delta\omega$  uzay açısında  $\theta$  doğrultusunda çıkan ışınım miktarı  $I_v \cos\theta \Delta\omega$  ile verilir.Verilen bir  $\theta$  açısı için  $2\pi\rho R.d\theta$  lık **alandan ışınım alırız**;  $\rho=R.\sin\theta$  dır.  
**Yeryüzünde** cm<sup>2</sup> başına ölçülen **enerjiyi aldığımız**  $\Delta\omega$  uzay açısı, **yıldızın uzaklığı ile belirlenir** ve  $\Delta\omega=1\text{cm}^2/d^2$  dir(Şekil **12.2.**).
- Yeryüzünde 1 cm<sup>2</sup> ye saniyede gelen **toplam enerji**

$$E_v = \Delta\omega \int_0^{\pi/2} I_v(0, \theta) \cos \theta \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$



Şekil 12.2. Yer yüzünde birim yüzeye düşen ışı nım erkesi.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $d \gg R$  olduğundan yıldızın yüzeyinin her noktasında  $\Delta\omega$  aynıdır.

$$E_v = 2\pi R^2 \Delta\omega \int_0^{\pi/2} I_v(0, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = R^2 F_v(0) \Delta\omega$$

- Yıldızın  $\pi R^2$  alanlı parlak bir disk olduğunu düşünürsek diskin  $1 \text{ cm}^2$  sinden gelen ortalama şiddet,

$$\overline{I}_v = \frac{E_v}{\Delta\omega \cdot \pi R^2} = \frac{R^2 F_v(0) \Delta\omega}{\Delta\omega \pi R^2}$$

$$\overline{I}_v = \frac{F_v(0)}{\pi}$$

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $F_{\nu}(0)$ , yıldız diskinden salınan ortalama şiddetin  $\pi$  katına eşittir. Yıldız tayfları  $F_{\nu}$  akısının enerji dağılımını verir. Tanıma göre akı  $1 \text{ cm}^2$  den gelen ve  $\theta$  ile  $\phi$ 'nin tüm açıları boyunca giden enerjiyi belirlerken, yıldız yüzeyinden farklı  $\theta$  ile  $\phi$  için gördüğümüz ışınım yıldız yüzeyinin farklı alanlarından gelmektedir.
- **12.1. Eddington-Barbier Yaklaşması:**
- Kaynak fonksiyonunun optik derinliğe nasıl bağlı olduğunu bilirsek ışınım geçiş denklemini integre edip,  $\theta$  doğrultusunda çıkan ışınım şiddetini bulabiliriz. Her ne kadar kaynak fonksiyonunun şeklini bilmiyorsak da iyi bir tahmin  $I(0,\theta)$ 'yı bulmamızı sağlar.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Kaynak fonksiyonunun, optik derinliğin lineer bir fonksiyonu olduğunu varsayalım:
- $S_\lambda = a_\lambda + b_\lambda \tau_\lambda$
- Bu Eddington-Barbier yaklaşımasıdır. Bu durumda,

$$I_\lambda(\tau, \theta) = \int_\tau^\infty S_\lambda e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\mu} \quad \text{dersek,}$$

$$I_\lambda(\tau, \theta) = \int_\tau^\infty (a_\lambda + b_\lambda x) e^{-(x-\tau)/\mu} \frac{dx}{\mu} = a_\lambda + b_\lambda \tau + b_\lambda \mu$$

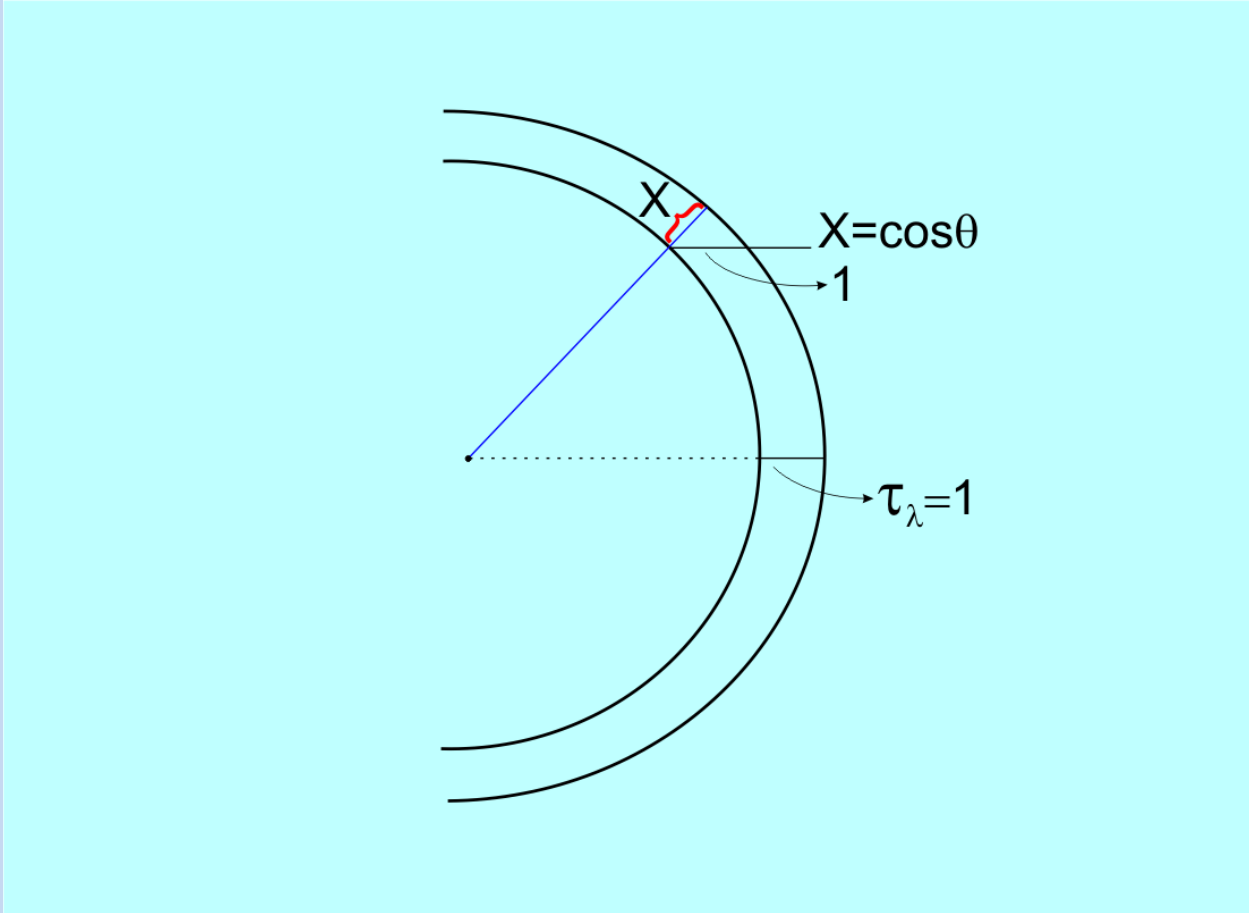
$$\text{Yüzeyde } I_\lambda(0, \mu) = a_\lambda + b_\lambda \mu = S_\lambda(\tau_\lambda^*)$$

$$\text{Burada } \tau_\lambda^* = \mu = \cos\theta$$



## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI (DEVAM)

- Demek ki biz **Güneş diskinin merkezinde** (  $\theta=0$ ,  $\tau_{\lambda}^* = \cos\theta = 1$  )  $\tau_{\lambda}=1$  **derinliğindeki kaynak fonksiyonu** ( $S_{\lambda}=a_{\lambda}+b_{\lambda}$ ) görüyoruz. **Kenarda** ( $\theta=\pi/2$ ) ise,  $\tau_{\lambda}^* = \cos\theta = 0$  **olduğundan yüzeydeki**  $S_{\lambda}'$ 'yi görüyoruz. Gerçekten paralel düzlemler yaklaştırmasında  $x/s = \cos\theta$  olduğuna göre,  $\tau_{\lambda_s}=1$  ise  $\tau_{\lambda} = \cos\theta$  olur. O halde **atmosferin daima**  $\tau_{\lambda_s}=1$  yani  $\tau_{\lambda} = \cos\theta$  **derinliğine kadar görüyoruz** (Şekil 12.3.).



Şekil 12.3. Optik derinliğe bağlı olarak ölçülen ışınım.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Aynı şekilde,

$$F_{\lambda} = 2\pi \int_0^1 I_{\lambda} \mu d\mu = 2\pi \int_0^1 (a_{\lambda} + b_{\lambda} \mu) \mu d\mu = \pi \left( a_{\lambda} + \frac{2}{3} b_{\lambda} \right)$$

$$F_{\lambda}(0) = \pi S_{\lambda}(\tau_{\lambda}^*) \quad , \quad \tau_{\lambda}^* = \frac{2}{3}$$

- Bu önemli bağıntı Eddington-Barbier bağıntısıdır. Yıldız tayflarının anlaşılmasında yararlı bir bağıntıdır. Yıldız yüzeyinden çıkan akı  $\tau_{\lambda}=2/3$  optik derinliğindeki kaynak fonksiyonuna eşittir. Bu sonuç da  $S_{\lambda}=a_{\lambda}+b_{\lambda}\tau_{\lambda}$  yaklaşımının iyi bir yaklaşım olduğunu gösterir.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $S_{\lambda}(\tau_{\lambda})=B_{\lambda}(\tau_{\lambda})$  olduğu **YTD** durumunu alalım.

$$F_{\lambda}=\pi B_{\lambda}(\tau_{\lambda}=2/3)$$

- olur. **Gri atmosferde**  $\kappa_{\lambda}=\kappa$  ve  $\tau_{\lambda}=\tau$  olacağından

$$F_{\lambda}(0)=\pi B_{\lambda}(T(\tau=2/3))$$

- olur. **Bunun anlamı yüzeyden çıkan akının enerji dağılımının  $\tau=2/3$  derinliğindeki sıcaklığa karşılık gelen kara cisim ışınımının enerji dağılımına eşit olduğudur.**

$$F_{\lambda}(0) = \int_0^{\infty} F_{\lambda}(0) d\lambda = \pi \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T_0) d\lambda = \sigma T_e^4 \quad ; \quad T_0 = T(\tau = \frac{2}{3})$$

- O halde  $\tau=2/3$ 'deki **sıcaklık etkin sıcaklığa** eşittir. Kaynak fonksiyonunun derinliğe bağılılığı doğrusal (lineer) ve **gri atmosfer varsayımları geçerli ise bu sonuç da geçerlidir**. Bu, çoğu durum için oldukça iyi bir yaklaşımdır. Örneğin **Güneş** için enerji dağılımının  $T=T_e$  sıcaklığındaki **bir kara cisminki ile oldukça iyi temsil edildiği** görülür.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI (DEVAM)

- **12.2. Sürekli Soğurma Katsayısı**
- Soğurma katsayısının **frekansa bağılılığı** bilinmeden bir **yıldızın tayfındaki enerji dağılımını** tam olarak bilemeyiz. Farklı atomlar, **verilen bir frekanstaki ışınımın farklı oranda soğurdukları** için **atmosferdeki kimyasal bileşim** de bilinmelidir.
- **Gerçek sürekli soğurma ve saçılma ışınım demetinin şiddetinde azalmaya neden olurlar**, fakat süreçleri oldukça farklıdır. **Gerçek sürekli soğurma, iki farklı süreçle olur**. Her ikisinde de **soğurulan foton “kimliğini” yitirir, yani frekansı değişir**. Önce **ısısal enerjiye** dönüşür, sonra **daha düşük frekanslarda tüm tayfa** dağılır. Bu **YTD** için gerekli bir koşuldur.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Gerçek soğurma **2 süreçle** meydana gelir:
  1. Bağlı-Serbest geçişler, yani **iyonlaşma**
  2. **Serbest-Serbest** geçişler.
- İyonlaşmada, **iyonizasyon potansiyelinden daha büyük enerji soğurulabilir**. Yani  $v > v_i$  den  $v \rightarrow \infty$  a kadar soğurulabilir, kalan enerji ( $E = hv - hv_i$ ) elektronun kinetik enerjisi olarak kullanılır ( $E = (1/2)m_e v^2$ ). **Elektron çarpımlarla kinetik enerjisini azaltır**, sonunda bir başka atom tarafından yakalandığında, **soğurduğundan daha küçük frekansta foton salar**. **Bu süreç yıldızın içinden gelen yüksek frekanslı enerjiyi daha küçük frekanslı enerjiye çevirmiş olur**.
- **Serbest-Serbest geçişlerde bir iyonun çevresinde hiperbolik yörüngede bulunan bir elektron  $hv$  fotonunu soğurunca bir başka hiperbolik yörüneye geçer**. Bu da **çarpımlar sonucu, aldığı enerjiyi başka yönde ve frekansta salabilir**.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Işınım geçiş denkleminde **soğurma katsayısı için doğru değer koyarsak** bir yıldızın tayfını açıklayabiliriz.
- **Sürekli tayf için sürekli soğurma katsayısı kullanılmalıdır.** Çizgi oluşumunu açıklamak için ek bilgilere ihtiyaç vardır. Çünkü **çizgiler için soğurma katsayısı** oldukça büyüktür.
- Kütle soğurma katsayısı  $\kappa_v$  veya  $\kappa_\lambda$ 'yi hesaplamak için önce  $\alpha_v$  veya  $\alpha_\lambda$ 'yi bilmeliyiz.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **Bağlı-Serbest Geçişler:**

- n kuantum düzeyinde bulunan bir elektron,
- $h\nu_n = \chi_n$  : iyonlaşma enerjisi
- olmak üzere  $\nu \geq \nu_n$  koşulunu sağlayan bir foton soğurursa atomu terk eder.  $h(\nu - \nu_n)$  kadar enerji elektronun kinetik enerjisine dönüşür.
- Soğurma katsayısı, bu tek süreç (iyonlaşma) için **Einstein'in**  $B_n$  katsayısı ile  $h\nu$ 'nün çarpımıdır. Yani tek bir atom için **elektron tarafından** birim zamanda  $\nu$  frekanslı **ışınım demetinden** soğurulan enerji:

$$a(z, n, \nu) = \frac{64\pi^4 Z^4 m_e e^{10}}{3\sqrt{3} \cdot ch^6 n^5} \cdot \frac{1}{\nu^3} \cdot g(\nu, n) \quad ; \quad (\nu > \nu_n \text{ dir})$$



# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI (DEVAM)

- $m_e$  elektronun kütlesi,  $Z$  atomun atom numarası,  $e$  elektronun yükü,  $g(\nu, n)$  ise **Gaunt faktörüdür** ve **elektronun dalga özelliğini** hesaba katar. Bu, yıldız içindeki süreçler için **0.80** ile **1.05** arasında değişir. Çoğu zaman bir ortalama  $\bar{g}$  kullanılır.
- Bir atomun toplam soğurmasını bulmak için  $\alpha'$ 'yı  $n$ . düzeydeki elektron sayısı  $N(Z, n)$  ile çarpmak gerekir. O halde atom numarası  $Z$ , atom ağırlığı  $A$  olan **bir atomun bir gramının soğurduğu enerji** (bağlı-serbest geçişler için);

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\kappa_{bs} = a(Z, n, \nu) \frac{N(Z, n)}{A.H} \quad \text{dir.}$$

- Burada H, birim atomik kütlenin gram cinsinden değeridir.

$$u = \frac{h\nu}{kT} \quad , \quad u_n = \frac{h\nu_n}{kT} \quad \text{koyarsak,}$$

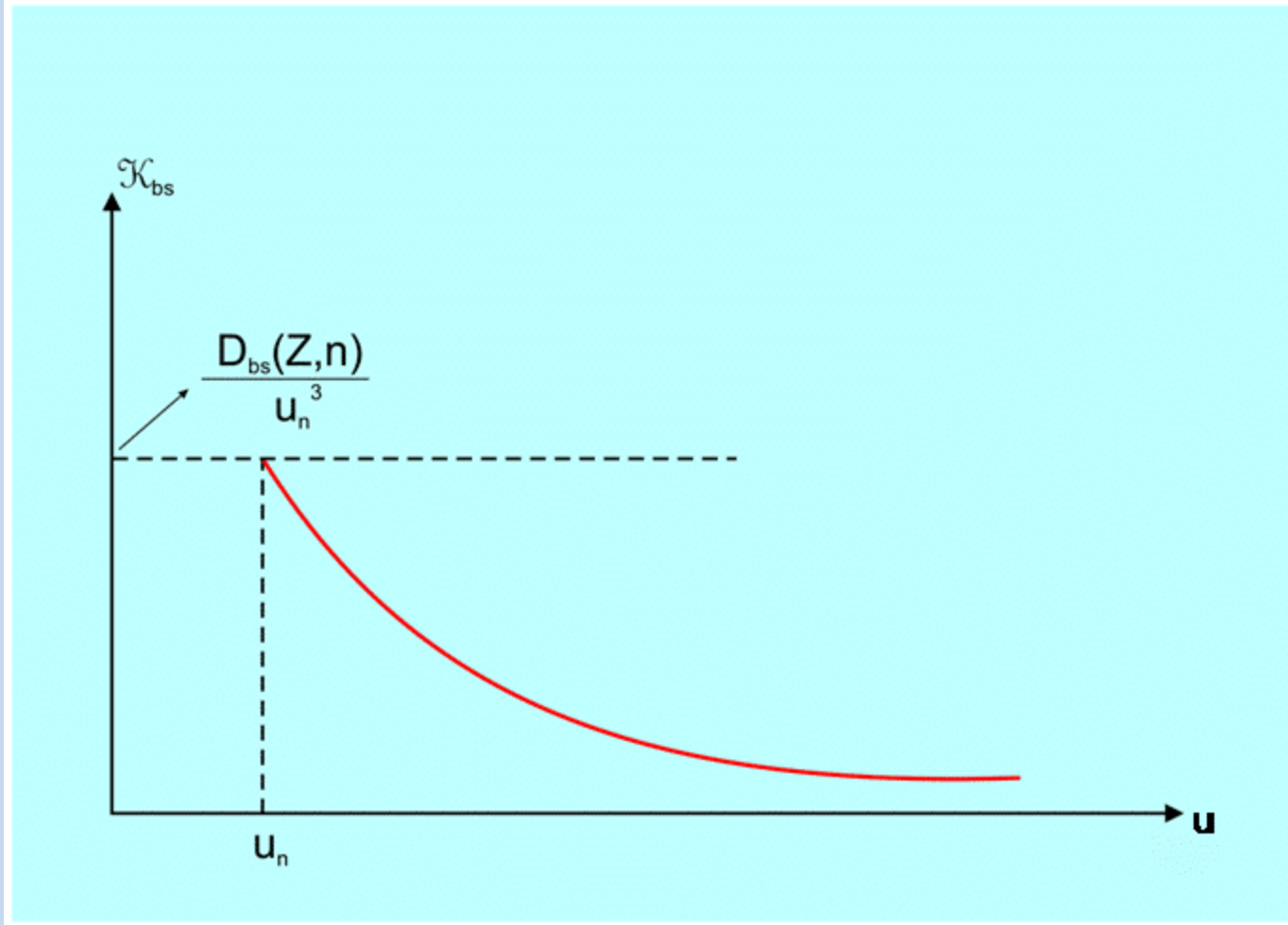
$$\kappa_{bs}(Z, n, \nu) = D_{bs}(Z, n) \frac{1}{u^3} \quad , \quad (u \geq u_n) \quad \text{.....(37)}$$

bulunur. Burada,

$$D_{bs}(Z, n) = \frac{64\pi^4 Z^4 m_e e^{10} g}{3\sqrt{3}.c.h^3 n^5} \cdot \frac{N(Z, n)}{A.H.(kT)^3} \quad \text{dir.}$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

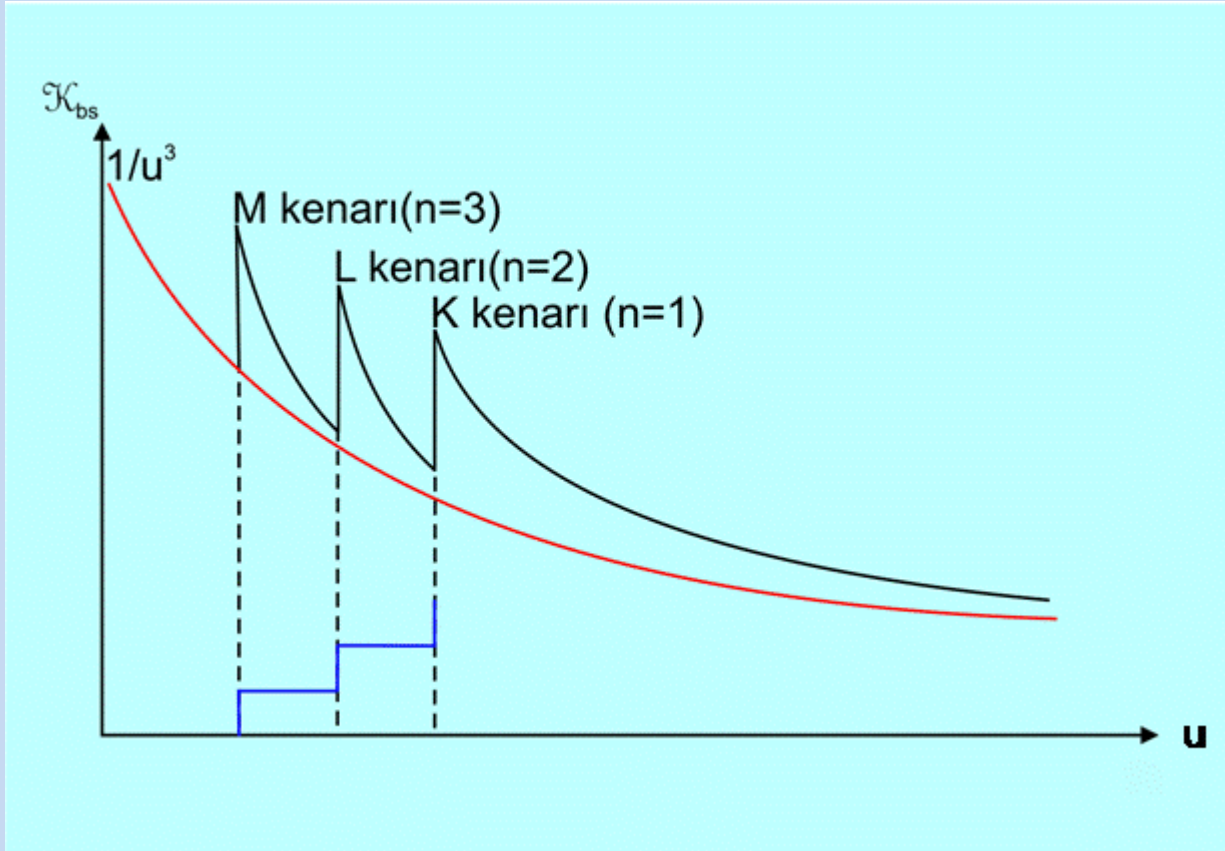
- $u < u_n$  için  $\kappa_{bs} = 0$ ,  $u = u_n$  olduğu an  $\kappa_{bs}$  en büyük değerine fırlar, sonra  $u^3$  ile orantılı olarak azalır. Eğer yıldızda tek cins atom ve her atomda bir elektron yörüngesi olsaydı, yıldız maddesinin soğurma katsayısı bu eğri ile belli olurdu. Ancak bir atomda çeşitli yörüngelerde çok sayıda elektron var ve yıldız maddesi çeşitli elementlerden oluşmuştur(Şekil 12.4.)



Şekil 12.4. Bağlı-serbest geçişlerden süreklilik soğurmasına katkı.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Toplam soğurmayı bulmak için, **önce**, verilen bir atomun tüm elektronik yörüngeleri üzerinden toplam almak gerekir. Sonra da farklı atomları hesaba katmak gerekir. Tüm elektron yörüngeleri üzerinden toplarsak bir “**adım fonksiyonu**” elde ederiz. Çünkü ne zaman  $u$ , belli bir  $u_n$ 'ye eşit olursa  $\kappa_{bs}$  daha büyük değere sıçrar. Bu  $u_n$ 'ler farklı tayfsal serilerin “soğurma kenarlarına” karşılık gelir.  $n=1, 2, 3$  için bunlar **K, L, M** ile gösterilir. Bu işlemlerde her  $n$  için, alt düzeylerin (farklı  $\ell$  ve  $s$  düzeylerinin) enerji farkı hesaba katılmamıştır (Şekil 12.5).



Şekil 12.5. MLK kenarları ile birlikte süreklilik soğurma katsayısı.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **(37)**'deki  $(1/u^3)$  terimi, **şekilde kesikli eğri ile gösterilen sürekli fonksiyonu** temsil eder. Bu yalnız frekansa bağlıdır ve **n'den bağımsızdır**.  $D_{bs}(Z,n)$  **çarpanı ise** yalnız **n'ye** bağlıdır ve frekanstan **bağımsızdır**. Bir başka deyişle  $u_{i+1} < u < u_i$  için  $D_{bs}(Z,n)$  **sabittir** ve  **$u = u_i$  olduğu zaman yeni bir sabit değere yükselir**. Bu iki fonksiyon çarpılırsa istenen soğurma katsayısı hesaplanmış olur.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Çok küçük frekanslarda ( $\nu \sim 0$ ) bağlı-serbest geçişler yoktur. **Çünkü** fotonun  $h\nu$  enerjisi **en dış yörüngelerdeki elektronları bile iyonlaştırmaya yetmez.** Işınının frekansı artınca, **foton enerjisi en dış kabuktaki elektronları iyonlaştırmaya yeterli olur ve  $\kappa_{bs}$  birden artar.** **Birinci soğurma kenarı budur.** Frekans daha da artarsa **soğurma düşer,** çünkü  $(1/u^3)$  çarpanı vardır. Bu **düşüş,** foton enerjisi bir sonraki kabuktaki elektronları iyonlaştırmaya yetecek büyüklüğe gelinceye kadar sürer.



## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Verilen bir frekanstaki toplam soğurma katsayısı, bu frekanstaki enerjinin iyonlaşmada etkili olduğu elektronik kabuklar üzerinden toplam alınarak bulunur. Bu durumda şöyle olur:

$$K_{bs}(Z, u) = \frac{1}{u^3} \sum_{n=1}^{n_{\max}} D_{bs}(Z, n) \quad , \quad u_{i-1} > u \geq u_i$$

- Bir yıldızda farklı atomlar (farklı Z'ler) olduğuna göre her element için yukarıdaki gibi bir toplam yazıp bunları da toplamamız gerekir. Bu kolay değildir, çünkü her element için doğru formülü yazsak bile, bu elementlerin yıldız içindeki bolluğu ile de çarpmalıyız; bolluk ise genellikle belli değildir. **Bolluğu biliyorsak, bağlı-serbest** geçişlerden ileri gelen soğurma,

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$K_{bs}(u) = \sum_{Z=1}^{Z_{\max}} x(Z) \cdot K_{bs}$$

şeklinde olacaktır. Burada  $x(Z)$  atom numarası  $Z$  olan elementin bolluğudur; yani 1 gr. lık yıldız maddesinde  $Z$  elementinin oranıdır.

$$K_{bs}(u) = \frac{1}{u^3} \sum_Z \sum_n D_{bs}(Z, n) \cdot x(Z)$$

- Açık olarak yalnız iyonlaşma enerjisi  $h\nu'$ den küçük olan elektronlar yukarıdaki toplama katkıda bulunabilirler, yani toplama sadece bu kabuklar katılmalıdır.

$$K_{bs}(u) = \sum_Z x(Z) \cdot K_{bs}$$

$$= \frac{1}{u^3} \sum_Z \sum_n D_{bs}(Z, n) \cdot x(Z)$$

$$K_{bs}(\nu) = \sum \sum a_{bs}(\nu, Z, n) \left( \frac{N_{i,n}}{N_i} \right) \left( \frac{N_i}{\sum N_i} \right) \frac{1}{A.H} x(Z)$$

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **Serbest-Serbest Soğurma Katsayısı:**
- **Hiperbolik yörüngeler kuantumlu olmadığı için, elektronlar 0'dan  $\infty$ 'a kadar her frekansı soğurabilirler. Bir iyon ve iyonun alanında  $v$  hızı ile hareket eden bir elektron içeren  $1 \text{ cm}^3$  lük hacimden geçen  $\nu$  frekanslı birim şiddetteki bir demetten bu elektronun soğurduğu enerji miktarı (oranı), yani atomun soğurma katsayısı:**

$$a(\nu, \nu, Z) = \frac{4\pi.Z^2.e^6.g_{ss}}{3\sqrt{3}.h.cm_e^2.\nu^3.\nu}$$

- dir ki burada  $v$  soğurucu elektronun hızı,  $g_{ss} \sim 1$  ise bu süreç için **gaunt faktörüdür.**

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Toplam soğurmayı bulmak için yukarıdaki eşitliği önce hızları  $v$  ile  $v+dv$  arasında olan toplam elektron sayısı ile çarpmalıyız, sonra da tüm hızlar üzerinden integre etmeliyiz. Daha sonra tüm iyon çeşitleri üzerinden, yani  $Z$  üzerinden toplanmalıdır. Bu, frekans, sıcaklık ve yoğunluğun sürekli bir fonksiyonunu verir.  $N(v)dv$ ,  $v$  ile  $v+dv$  hız aralığındaki birim hacimdeki elektron sayısı ise,  $v$  hızındaki elektronlar için gram basına soğurma katsayısı,

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\kappa_{ss}(Z, \nu, \nu) = \frac{a(\nu, \nu, Z)}{A.H} \cdot N(\nu) d\nu$$

olur.  $N(\nu)$  için **Maxwell** hız dağılımını alabiliriz.

$$N(\nu) d\nu = 4\pi N_e \left( \frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_e \nu^2}{2kT}} \nu^2 d\nu$$

$$\kappa_{ss}(Z, \nu) = \frac{4\pi Z^2 e^6 g_{ss} = 1}{3\sqrt{3}.h.c.m_e^2.\nu^3} \cdot \frac{1}{A.H} 4\pi N_e \left( \frac{m_e}{2\pi.k.T} \right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{m_e \nu^2}{2kT}} \cdot \nu^2 d\nu$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\begin{aligned} &= \frac{16\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}.h.c.m_e^2} \cdot \left( \frac{m_e}{2\pi.k.T} \right)^{3/2} \cdot \frac{N_e}{A.H.v^3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}} \cdot v^2 dv \\ &= \left( \frac{16\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}.h.c.m_e^2} \cdot \left( \frac{m_e}{2\pi.k.T} \right)^{3/2} \cdot \frac{N_e}{A.H.v^3} \right) \left( -\frac{kT}{m_e} e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}} \right) \Bigg|_0^{\infty} \\ &= \frac{16\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}.h.c.(m_e 2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{N_e}{A.H.(kT)^{1/2}} \cdot \frac{1}{v^3} \end{aligned}$$

Bu,  $v$ 'nün sürekli bir fonksiyonudur.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

Yine  $u = \frac{h\nu}{kT}$  koyarsak ve

$$D_{ss}(Z) = \frac{1}{A.H} \cdot \frac{16\pi^2 Z^2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{h^2 e^6}{c(2\pi m_e)^{3/2}} \cdot \frac{N_e}{(kT)^{3.5}}$$

tanımını yaparsak,

$$\kappa_{ss}(Z, u) = \frac{D_{ss}(Z)}{u^3}$$

bulunur. Son olarak  $\mathbf{X}(Z)$  bolluğu ile çarpıp  $\mathbf{Z}$  üzerinden toplamalıyız:

$$\kappa_{ss}(u) = \frac{1}{u^3} \sum_Z x(Z) D_{ss}(Z)$$

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

**Bağlı-Serbest** ve **Serbest-Serbest** katsayılarını birleştirirsek

$$\kappa_{suso}(u) = \sum_Z x(Z) [\kappa_{bs}(Z, u) + \kappa_{ss}(Z, u)]$$

bulunur.

## **Elektron Saçılması (Thomson Saçılması):**

Dış alanın etkisi altında olmayan serbest bir elektron da gelen ışın demetinin enerjisini azaltabilir. Bu süreçte **foton**, **elektron tarafından önce soğurular**, sonra **başka bir yönde salınır**. Bu sürecin kesitini şöyle hesaplayabilirsiniz:

Klasik elektromanyetik kurama göre ivmesi **a** olan **bir elektron**  $(2/3) \cdot (e^2 a^2 / c^3)$  kadar (birim zamanda) **bütün doğrultularda enerji salar**. Bu **enerji**, **elektrona çarpan ışın demetinden çıkarılıp elektronu ivmelendirmeye harcanan enerjidir**. Gelen ışınımın elektrik alan şiddeti **E** ise, **elektronun ivmesi**  $a = (e E) / m_e$  olacaktır.



## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

O halde **elektronun birim zamanda** saldığı enerji

$$\frac{2}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \cdot cE^2$$

olacaktır. Saçılma katsayısı  $\sigma_e$ 'yi bulmak için **elektrona birim zamanda düşen enerji akısı ile** karşılaştırmalıyız. Bu enerji **Poynting vektörü** ile verilir:

$$F = S = \frac{c}{4\pi} \left| \vec{E} \times \vec{H} \right| = \frac{c}{4\pi} E^2$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

Böylece,

$$\sigma_e = \frac{\frac{2}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \cancel{e} \cdot \cancel{E^2}}{\frac{\cancel{e}}{4\pi} \cancel{E^2}} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{\underbrace{m_e c^2}_{2.81785 \times 10^{-13} \text{ cm}}} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6.654 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Bu, **bir elektron için elektron saçılma katsayısıdır**. Görüldüğü gibi **frekanstan bağımsızdır**.  $r_0$ , klasik **elektron yarıçapıdır**.

Çok enerjik fotonlar için bu formül görelilik ve kuantum etkileri için düzeltilmelidir. Orta enerjik fotonlar için,

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{2h\nu}{m_e c^2} \right) \dots\dots(38)$$

yazılabilir.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

Burada durgun kütle yerine;

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{2h\nu}{m_0 c^2}}}, \quad (h\nu \approx \frac{1}{2}mv^2)$$

ifadesi kullanılmıştır.

$\sigma_e$ 'yi birim kütle cinsinden ifade etmeliyiz.  $N_e$  birim hacimdeki elektron sayısı ise  $N_e/\rho$  da birim kütledeki sayı olur. O halde **gram başına saçılma katsayısı** şöyle olur:

$$\kappa_e = \sigma_e \frac{N_e}{\rho} \quad \dots\dots(39)$$

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

Tam iyonlaşma durumunda 1 gr lık maddede:

X gram H ,  $\frac{X}{H}$  elektron verir.

Y gram He ,  $\frac{Y}{4H} \cdot 2$  elektron verir.

$1 - X - Y$  gram ağır element ,  $\frac{1 - X - Y}{A.H} \cdot \frac{A}{2}$  elektron verir.

1 gr lık maddedeki toplam elektron sayısı:

$$\frac{N_e}{\rho} = \frac{1}{H} \left( X + \frac{1}{2} Y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} Y \right) = \frac{1}{2H} (1 + X)$$

Bunu (39)'da yerine koyarsak,

$$\kappa_e = \frac{1}{2} \sigma_e \left( \frac{1 + X}{H} \right) = 0.20(1 + X) \quad \dots\dots(40)$$

bulunur.  $\left[ \sigma_e = 0.665 \times 10^{-24} \text{ cm}^2, \quad H = 1.672 \times 10^{-24} \text{ gr} \right]$

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **Rayleigh Saçılması**
- Atomlar ve moleküller gibi bağlı sistemler kendi karakteristik geçiş frekanslarından daha büyük frekanslı ışınımı saçabilirler. Bu tür saçılma, bir tayf çizgisine karşılık gelen dalga boyundan çok daha büyük dalga boylu bir elektromanyetik dalganın, yörüngedeki elektronları zorla titreştirmesi ile meydana gelir. Bu durumda saçılma  $\lambda^{-4}$  ile orantılıdır. Dolayısıyla Rayleigh saçılması renge bağlıdır. En iyi örnek göğün mavi rengidir. Güneş ışığının hava molekülleri tarafından saçılmasından kaynaklanır. Hidrojen atomu için,

$$\sigma_R = \sigma_e \left( \frac{\lambda_L}{\lambda} \right)^4$$

- yazılabilir. Burada  $\lambda_L$ , Lyman çizgilerinin ortalama dalgaboyudur (Hemen tüm H, temel seviyede olduğu için başvuru dalgaboyu olarak Lyman çizgilerinin dalgaboylarının ağırlıklı ortalaması  $\lambda_L=1026 \text{ \AA}$  seçilebilir). Diğer elementlerin Rayleigh saçılması dışlanabilir.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Rayleigh saçılması orta sıcaklıktaki (G ve K) yıldızlarda önemli olabilir. Hidrojenin çoğu nötrdür ve temel seviyededir. Lyman geçişlerine ( $1 \rightarrow n$ ) karşılık gelen rezonans frekansları morötesindedir. Dolayısı ile görsel dalgalarda ışınım Rayleigh mekanizması ile saçılacaktır.
- Düşük sıcaklıklarda  $H_2$  molekülleri de boldur ve  $H_2$  nin Rayleigh mekanizması ile ışığı saçması bu sıcaklıklarda baskındır.
- Elektron saçılması ve Rayleigh saçılması izotropik değildir.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **12.3. Ortalama Soğurma Katsayıları:**

- Gri atmosferin gri olmayan atmosferle benzerliği ya da ilişkisi araştırılabilir. **Gri atmosfer** için **geçiş denklemini tam olarak çözülebildiğinden bu önemlidir**. Öyle bir ortalama soğurma katsayısı tanımlanmalı ki geçiş denklemini frekans üzerinden integre edildiğinde gri denkleme tam olarak eşit olsun. Bunun için çeşitli tanımlar yapılmıştır.

- **Geçiş denkleminde**

$$\cos \theta \frac{dI_v}{\kappa_v \rho dx} = -I_v + \frac{j_v}{\kappa_v}$$

- $\cos \theta$  ile çarpılıp **bütün katı açı üzerinden** integre edilirse,

$$\int_{\omega} \cos^2 \theta \frac{dI_v}{\kappa_v \rho dx} d\omega = - \int_{\omega} \cos \theta I_v d\omega + \int_{\omega} \cos \theta \frac{j_v}{\kappa_v} d\omega$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $j_\nu$  ve  $\kappa_\nu$ ,  $\omega$  dan bağımsız olduğuna göre ve olduğundan,

$$\int_{\omega} \cos \theta d\omega = 0$$

$$4\pi \frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{dK_\nu}{\rho \cdot dx} = -4\pi \cdot H_\nu$$

$$\frac{dK_\nu}{\rho \cdot dx} = -\kappa_\nu H_\nu$$

- yazılabilir. **Gri durumda** olduğu gibi,  $\nu$  üzerinden integre edersek,

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dK}{dx} = \int_0^{\infty} \kappa_\nu H_\nu d\nu$$



## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Şimdi öyle bir  $\bar{\kappa}$  tanımlayalım ki aşağıdaki şartı sağlasın:

$$\bar{\kappa} \int_0^{\infty} H_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} H_{\nu} d\nu \quad (\text{Buna ağırlıklı ortalama denir.})$$

yani,

$$\bar{\kappa}_A = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\nu} H_{\nu} d\nu}{H}$$

- Ortalama optik derinlik de  $d\bar{\tau} = -\bar{\kappa}\rho \cdot dx$  olduğuna göre yukarıdaki eşitlik

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\bar{\kappa}}{dx} = \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} H_{\nu} d\nu = \bar{\kappa}_A \int_0^{\infty} H_{\nu} d\nu = \bar{\kappa}_A \cdot H$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\frac{dK}{d\tau} = H$$

- elde edilir. Bu, gri durumda elde edilen ile aynıdır. Böylece gri ve gri olmayan durumda toplam akının aynı olması sağlanmış olur.

$$\bar{\kappa}_P = \frac{1}{B} \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} B_{\nu} d\nu$$

Planck ağırlıklı ortalama

$$\bar{\kappa}_J = \frac{1}{J} \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} J_{\nu} d\nu$$

Şiddet ağırlıklı ortalama

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **Rosseland Ortalaması:**
- **Akı ağırlıklı ortalama** başka bir şekilde de ifade edilebilir:

$$-\frac{1}{\kappa_{\nu}\rho} \cdot \frac{d\kappa_{\nu}}{dx} = H_{\nu}$$

- ifadesi bulunmuştu. **Bütün frekanslar** üzerinden integre edilirse,

$$-\frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \cdot \frac{d\kappa_{\nu}}{dx} d\nu = \int_0^{\infty} H_{\nu} d\nu = H$$

- **Ortalama katsayı,**

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^{\infty} \frac{d\kappa_{\nu}}{dx} d\nu = \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \cdot \frac{d\kappa_{\nu}}{dx} d\nu \quad \text{şeklinde de tanımlanabilir.}$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $\kappa_\nu$  önceden bilinmediğinden (çünkü ışınım alanına bağlı) **akı ağırlıklı donuklukta olduğu gibi yukarıdaki formülden ortalama soğurma katsayısını hemen hesaplayamayız**. Ancak atmosferin daha derin kısımlarında **YTD** geçerlidir ve  $\mathbf{J}_\nu = \mathbf{B}_\nu$  alınabilir. **Eddington** yaklaştırmasında

$$\kappa_\nu = \frac{1}{3} J_\nu$$

- alınabilir (**Toplam ışınım için bulduğumuzu tek renk ışınım için de doğru kabul ederek**). Bu durumda,

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{d\kappa_\nu}{dx} d\nu}{\int_0^\infty \frac{d\kappa_\nu}{dx} d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{dJ_\nu}{dx} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dJ_\nu}{dx} d\nu}$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $\kappa_e$   $\nu$ 'ye bağlı değildir ve  $\kappa_{bs}$  ile  $\kappa_{ss}$ 'nin  $u$ 'ya bağılılığı aynı olduğundan ikisini beraber alabiliriz.

$$\kappa(u) = \frac{D(u)}{u^3} \quad \text{ün Rosseland ortalamasını alalım:}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa''} \cdot \frac{dB_{\nu}(T)}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{dB_{\nu}(T)}{dT} d\nu}$$

$$u = \frac{h\nu}{kT} \quad , \quad d\nu = \frac{kT}{h} du \quad , \quad \frac{du}{dT} = -\frac{1}{T} u$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^u - 1}$$

$$\frac{dB_\nu(T)}{dT} = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^u \frac{u}{T} \frac{1}{(e^u - 1)^2}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\frac{2k}{e^2} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa''} \cdot \cancel{\mathcal{T}} \frac{h\nu^3}{\mathcal{T}} \frac{u \cdot e^u}{(e^u - 1)^2} \cdot \cancel{kT} \cdot \cancel{h} du}{\frac{2k}{e^2} \int_0^\infty \frac{h\nu^3}{\mathcal{T}} \frac{u \cdot e^u}{(e^u - 1)^2} \cdot \cancel{kT} \cdot \cancel{h} du}$$

$$= \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa''} \cdot \frac{u^4 \cdot e^u}{(e^u - 1)^2} du}{\int_0^\infty \frac{u^4 \cdot e^u}{(e^u - 1)^2} du}$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

YTD de  $\mathbf{J}_\nu = \mathbf{B}_\nu$  olduğundan ve

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x} = \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Olduğundan ve  $dT/dx$  de frekanstan bağımsız olduğuna göre,

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}$$

Bu şekilde tanımlanan soğurma katsayısına **Rosseland ortalaması** denir. Görüleceği gibi ortalamanın harmonik olması, yani  $1/\kappa_\nu$  nün ortalamasının alınması, donukluğun en az olduğu bölgelere en büyük ağırlığı verir.

Yani enerji geçişi daha kolay olur. Bu da istenen bir özelliktir.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **Rosseland Ortalama Donukluğu**
- Rosseland ortalamasını elde etmek için önce ayrı ayrı tek renk soğurma katsayılarını toplamalıyız:

$$\kappa(\nu) = \kappa_{bs}(\nu) + \kappa_{ss}(\nu) + \kappa_e$$

- Bu, toplam tek renk soğurma katsayısıdır. Bunu zorlama ile ışınım çarpanı

$$1 - e^{-h\nu/kT}$$

- ile çarpıp Rosseland ortalamasını bulmak gerekir.  
**Ancak,**



## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{u^3}{D(u)} \cdot \frac{e^u \cdot u^4}{(1-e^{-u})(e^u-1)^2} du}{\int_0^{\infty} \frac{e^u \cdot u^4}{(e^u-1)^2} du} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{D(u)} \cdot \frac{u^7 e^u du}{e^{-u}(e^u-1)(e^u-1)^2}}{4 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{u^3 du}{e^u-1}}_{\frac{\pi^4}{15}}}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^{\infty} \frac{1}{D(u)} \cdot \frac{u^7 e^{2u}}{(e^u-1)^3} du$$

**D(u)** ardışık soğurma kenarları arasında sabit kaldığına göre  $u_i > u > u_{i+1}$  aralığındaki değerini

$$\mathbf{D}(u_i, u_{i+1})$$

ile gösterelim. Bu frekans aralığında integral dışına çıkarabiliriz.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{15}{4\pi^4} \left[ \frac{1}{D(u_0, u_1)} \int_{u_1}^{u_0=\infty} \frac{u^7 e^{2u}}{(e^u - 1)^3} du + \frac{1}{D(u_1, u_2)} \int_{u_2}^{u_1} \frac{e^{2u} u^7 du}{(e^u - 1)^3} + \frac{1}{D(u_2, u_3)} \int_{u_3}^{u_2} \dots + \dots \right]$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{15}{4\pi^4} \left[ \frac{1}{D(u_0, u_1)} \int_0^{u_0=\infty} \frac{e^{2u} u^7}{(e^u - 1)^3} du - \int_0^{u_1} \frac{e^{2u} u^7}{(e^u - 1)^3} du \right] + \dots + \frac{15}{4\pi^4} \frac{1}{D(u_{n-1}, u_n)} \left( \int_0^{u_{n-1}} - \int_0^{u_n} \right)$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{15}{4\pi^4} \sum_{i=0} \frac{S(u_i) - S(u_{i+1})}{D(u_i, u_{i+1})}$$

Burada  $u_0 = \infty$  ve  $S(u_i) = \int_0^{u_i} \frac{e^{2u} u^7}{(e^u - 1)^3} du$

**Strömgren**,  $(15/(4\pi^4)).S(u)$  fonksiyonunu, **u**'nun çeşitli değerleri için çizelgeledi. Bu, verilen bir kimyasal bileşim için soğurma katsayısını hesaplamayı kolaylaştırdı.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **12.4. H<sup>-</sup> Soğurması:**
- Yıldız yüzeylerinde **iyonlaşma** dışlanabilecek kadar az olduğundan **soğurmada nötr atomlar ve moleküller hesaba katılmalıdır**. Nötr H'de en bol atom olduğundan önce bunu gözönüne almak gerekir.
- **Sıcak yıldızlarda (O, B, A türü)** nötr H'in soğurması sürekli soğurmayı açıklamaktadır. Başka bir deyişle kuramsal olarak hesaplanan sürekli tayf, gözlemlerle uyuşmaktadır. Fakat **daha soğuk yıldızlarda (Güneş gibi)** teori ile gözlemler birbirine **uymamaktadır**: Hesaplar oldukça belirgin bir **Balmer süreksizliği gösterirken**, gözlemler  $\kappa_{\nu} \approx \text{sabit}$  alındığında daha iyi açıklanmaktadır.

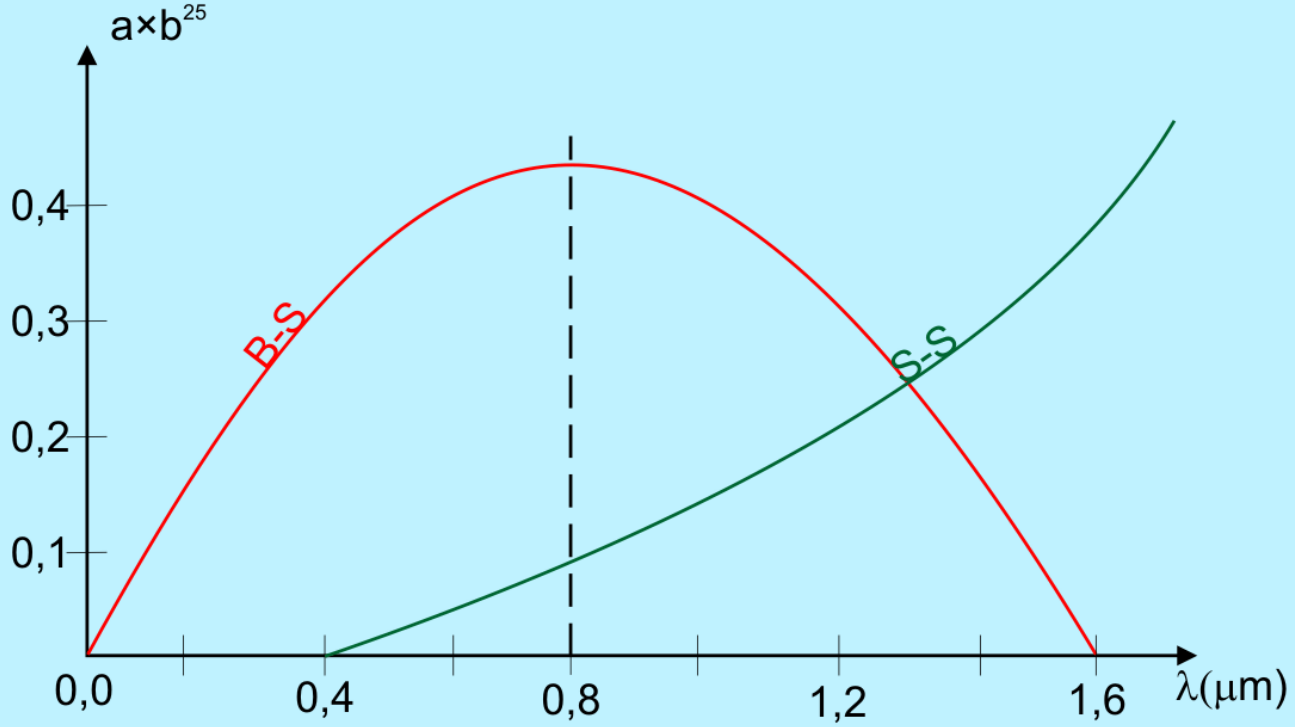
## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Gözlemler ve hesaplar arasındaki bu uyumsuzluk, Wildt tarafından 1938'de yıldız atmosferlerinde negatif H iyonunun var olduğunu ileri sürmesiyle açıklandı.  $H^-$  iyonunu laboratuvar da elde etmek henüz mümkün olmamıştı ama, kuantum mekaniği hesapları ile onun var olacağı fizikçiler tarafından öngörülmüştü. Daha sonra 1950-1955'te laboratuvar da  $H^-$  iyonunun sürekliliği gözlemlendi. Bu iyon H çekirdeği etrafında dolanan iki elektrondan meydana gelmiştir ve iyonlaşma potansiyeli **0.754 eV**'tur tek bir kararlı enerji düzeyi vardır.  $\lambda = hc/E = (hc/0.754 \text{ eV})$  eşitliğinden  $\lambda = 16450 \text{ \AA}$  bulunur. O halde  $H^-$  iyonu bu  $\lambda$ 'dan daha küçük dalgaboyundaki ışınımı soğurarak iyonlaşır; yani nötr H ve serbest elektrona çözülür.  $H^-$  nin soğurma tayfı sürekli bir soğurmadır; kenar **16450 \AA**'a düşer, sonra düzgün olarak artar ve **8500 \AA** civarında maksimum olur ve sonra küçük dalgaboylarına doğru azalır.  $H^-$  iyonu tarafından bu bağlı-serbest soğurmaya ek olarak serbest-serbest geçişler de vardır. Bu  $H^-$  iyonunun kuantumlanmamış geçişleridir. Yani nötr H atomunun yakınından geçen bir serbest elektronun kinetik enerjisinin değişimine karşılık gelir.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $H^-$  nin **soğurma katsayısının hesabı** çok zordur, özellikle de **serbest-serbest** geçişler için. Çeşitli araştırmacılar tarafından yapılan hesapların sonuçları şekil **12.6**'da gösterilmektedir.
- Şekil **12.6**. da  $H^-$  **iyonunun** ( $T=6300$  °K ve  $P_e=1$  dyn/cm<sup>2</sup> olan atmosfer için) **soğurma katsayısına** ilişkin grafik gösterilmektedir.
- Görüleceği gibi **serbest-serbest geçişlerin** katkısı **kısa dalgalarda azdır**.  $\lambda$  **artıkça artar** ve **kırmızıötede boşlanamayacak hale** gelir.

H<sup>-</sup> iyonunun soğurma katsayısı  
(T=6300°K ve P<sub>e</sub>=1dyn/cm<sup>-2</sup> olan atmosfer için)



Şekil 12.6. H<sup>-</sup> iyonunun soğurma katsayısı.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $H^-$  soğurmasını hesaplamak için, nötr H atomlarına nazaran  $H^-$  iyonlarının sayısını hesaplamak gerekir. Bunun için Saha formülünü kullanabiliriz.  $H^-$  nin temel seviyesi bir tekli (**singlet**) S durumu olduğuna göre onun istatistik ağırlığı 1'dir. Nötr H atomunun temel seviyesinin istatistik ağırlığı 2 'dir.  $n>1$  düzeyleri için uyarılma enerjileri büyük olduğundan bu düzeylerdeki atomların sayısı temel düzeydekiyle karşılaştırıldığında boşlanabilir. Bu nedenle  $u(H)=2$  'dir.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Saha kanunu kullanılarak  $\frac{N(H)}{N(H^-)}$  bulunabilir.

$$\log \frac{N(H)}{N(H^-)} = 2,5 \log T + \log \frac{4}{1} - 0,754\theta - \log P_e - 0,48$$

- Eğer  $N(H^-)$  yi, **bağlı-serbest geçiş** için **bir iyonun soğurması** ile çarparsak **bağlı-serbest  $H^-$  soğurma katsayısını** elde ederiz.
- **Geç tip yıldızlarda nötr H'in soğurması azdır. Çünkü temel seviyededir.** Lyman serisi limitinden başlar, yani  $\lambda \leq 912 \text{ \AA}$  dadır. Bu **morötesi bölgede bu yıldızların ışınımı zayıftır.** Görsel bölgede **sürekli soğurma için  $n=3$  düzeyine uyarılmış H atomları gerekir.** Bunun **uyartılma potansiyeli** büyüktür ( $\sim 12.1 \text{ eV}$ ). O halde **Güneş** gibi **geç tür yıldızların atmosferlerinde böyle uyarılmış H atomlarının sayısı da azdır. Nötr H'in bol olmasına karşın soğurmadaki rolü küçüktür. Çünkü soğurma katsayısı, ışınım şiddetinin az olduğu frekanslarda büyüktür.** Bu nedenle **F'den daha geç tür yıldızlarda nötr H'in soğurması önemsizdir.**



# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $H^-$  in soğurma katsayısı, K, M, N yıldızlarının ışınımının yüksek olduğu dalgaboyu bölgesinde bir maksimuma sahiptir. O halde  $H^-$  iyonu bu yıldızların atmosferindeki sürekli soğurmada önemli bir rol oynayabilir. Yalnız  $H^-$  iyonunun toplam sürekli soğurmaya katkısı,  $H^-$  nin bolluğuna, yani  $cm^3$  teki sayısına bağlıdır. Bu ise nötr H'nin bolluğuna ve elektron yoğunluğuna ( $N_e$ ) bağlıdır. Bu yıldızlarda nötr H boldur. Çünkü bu sıcaklıklarda hemen hemen hiç iyonlaşmaz, ancak aynı nedenle serbest elektron sayısı da azdır. Dolayısıyla M ve N yıldızlarında  $H^-$  nin hemen hiç rolü yoktur. K yıldızlarında  $N_e$  yükseldiği için  $H^-$  kendini hissettirir. Güneş gibi yıldızlarda negatif H iyonunun soğurması baskındır, ancak burada metallerin de soğurmaya katkısı vardır. Na( $\chi=5.15$  eV), Mg( $\chi=7.61$  eV) ve Ca( $\chi=6.09$  eV) gibi nötr metallerin iyonlaşması sürekli soğurmaya katkıda bulunur. Böylece serbest elektronların sayısının artması  $H^-$  nin oluşumunu da sağlar. Yalnız, bu metallerin temel seviyelerinden iyonlaşmanın sürekli soğurmaya katkısı, tayfın mavi bölgesine düşer, o halde  $\lambda > 3000$  Å dalgaboyundaki ışınım bu iyonlaşmada etkisizdir. O halde optik bölgede metallerin sürekli soğurmaya katkıları uyarılmış seviyelerdeki metallere Boltzmann formülü uygulanırsa görülür ki bu atomların önemli bir kısmı uyarılmış seviyededir ; ancak görsel bölgede soğurmaya katkıları  $H^-$  nin yanında önemli değildir.

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **G'**den daha erken yıldızlara gidildikçe  $H^-$  iyonunun önemi azalır. Çünkü uyarılmış **H** atomlarının sayısı gittikçe artar ve  $H^-$  nin bolluğu fotoiyonizasyon nedeniyle azalır. Erken **F** ve geç **A** türlerinde nötr **H** soğurması baskındır.
- Daha da sıcak yıldızlarda nötr ve iyonlaşmış **He** da katkıda bulunmaya ve serbest elektronlar tarafından saçılma da önemli bir rol oynamaya başlar.
- Geç **K**, **M** yıldızları için, molekül soğurması önemlidir. Özellikle **M** yıldızlarının sürekli tayfı moleküllerin geniş bantları ile bozulmuştur. Molekül bantları için yeterli bir opasite kuramı olmadığından, doğrudan doğruya gözlemlere bakılır. Gözlemlere göre **M** yıldızlarının fotosferlerinden geçen ışınımın azalması ve bantların oluşumu, gerçek soğurmadan çok molekül saçılmasından ileri geldiği sanılmaktadır.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **12.5 Sürekli Soğurma Katsayısı ve Sürekli Tayf**
- Yıldız yüzeyinden salınan ışınım;

$$I_{\nu}(0, \theta) = \int_0^{\infty} S_{\nu}(\tau_{\nu}) \cdot e^{-\tau_{\nu} \sec \theta} \sec \theta d\tau_{\nu}$$

- idi.  $S_{\nu} = B_{\nu}$  olduğu zaman,

$$I_{\nu}(0, \theta) = \int_0^{\infty} B_{\nu}(\tau_{\nu}) \cdot e^{-\tau_{\nu} \sec \theta} \sec \theta d\tau_{\nu}$$

- olur.  $\tau_{\nu}$ ,  $\kappa_{\nu}$  ye ve dolayısı ile **frekansa** bağlıdır. Atmosfer **gri değilse**,  $\kappa_{\nu}$  aracılığı ile  $\tau_{\nu}$  nün **frekansa bağlılığı tam olarak yazılmalıdır.**

# 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Planck fonksiyonunu ve  $T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 (1 + \frac{3}{2} \bar{\tau})$  yaklaştırmasını kullanırsak,

$$I_\nu(0, \theta) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau_\nu \sec \theta} \sec \theta d\tau_\nu}{e^{(h\nu/kT_e)2^{1/4} (1+\frac{3}{2}\bar{\tau})^{-1/4}} - 1} \cdot d\tau_\nu \quad \dots\dots(1)$$

- $\tau_\nu$  frekansa bağlı optik derinlik, ve  $\bar{\tau}$  ise Rosseland ortalaması alınmış soğurma katsayısı ile tanımlanan ortalama optik derinliktir. Yani,

$$\left. \begin{array}{l} d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho dx \\ d\bar{\tau} = -\bar{\kappa} \rho dx \end{array} \right\} \text{ Bunlardan } d\tau_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\bar{\kappa}} d\bar{\tau}$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Eğer  $\kappa_\nu / \bar{\kappa}$  nın **optik derinlikten bağımsız olduğu varsayımını yaparsak** (atmosfer nispeten ince olduğu için bunu kabul etmek çok hatalı değildir),

$$\tau_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\bar{\kappa}} \bar{\tau}$$

- yazılabilir. Bunu yerine koyarsak,

$$I_\nu(0, \theta) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-(\kappa_\nu/\bar{\kappa})\bar{\tau}\sec\theta} \sec\theta \frac{\kappa_\nu}{\bar{\kappa}} d\bar{\tau}}{e^{(h\nu/kT_e)2^{1/4} (1+\frac{3}{2}\bar{\tau})^{-1/4}} - 1}$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\alpha = \frac{h\nu}{kT_e} 2^{1/4}, \quad \eta = \frac{\kappa_\nu}{\kappa} \sec \theta \quad \text{denirse,}$$

$$I_\nu(0, \theta) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta\bar{\tau}} \eta \cdot d\bar{\tau}}{e^{\alpha(1+\frac{3}{2}\bar{\tau})^{-1/4}} - 1} \quad \text{.....(2)}$$

- olur. Bu integral kısmen seriye açarak ve kısmen nümerik integrasyon ile hesaplanabilir.
- **Kenar Kararması:**
- (1) ve (2) integralleri genellikle seriye açılarak daha kolay alınabilir.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- $T_0$  yüzey sıcaklığı olmak üzere  $T = T_0 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right)^{1/4}$  ü

$B_\nu$  de yerine koyalım ve  $\bar{\tau} = 0$  etrafında (yöresinde, komşuluğunda) seriye açalım:

$$\begin{aligned} B_\nu &= B_\nu(\bar{\tau} = 0) + \left( \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} \right)_{\bar{\tau}=0} \tau_\nu + \dots \\ &= B_\nu(\bar{\tau} = 0) + \left( \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{\tau}} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \tau_\nu} \right)_{\bar{\tau}=0} \tau_\nu + \dots \\ &= B_\nu(\bar{\tau} = 0) \left[ 1 + \left( \frac{1}{B_\nu} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{\tau}} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \tau_\nu} \right)_{\bar{\tau}=0} \tau_\nu \right] \end{aligned}$$

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT_0} - 1} (1 + \beta_0 \tau_\nu)$$

Burada,

$$\beta_0 = \left( \frac{1}{B_\nu} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau_\nu} \right)_{\tau=0} = \frac{\frac{3}{8} \alpha \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\nu}}{1 - e^{-\alpha}}$$

$$\left( T_e = 2^{1/4} T_0 \text{ olduğundan } \alpha = \frac{h\nu}{kT_0} \right)$$



## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- O halde **yıldız yüzeyini**  $\theta$  açısı altında terkeden  **$\nu$**  frekanslı ışınımın şiddeti

$$I_{\nu}(0, \theta) = \int_0^{\infty} B_{\nu}(\tau_{\nu}) e^{-\tau_{\nu} \sec \theta} \sec \theta d\tau_{\nu}$$
$$= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT_0} - 1} \int_0^{\infty} e^{-\tau_{\nu} \sec \theta} (1 + \beta_0 \tau_{\nu}) \sec \theta d\tau_{\nu}$$

- integral alınırsa,**

$$I_{\nu}(0, \theta) = B_{\nu}(T_0) \cdot (1 + \beta_0 \cos \theta) \quad \dots\dots(3)$$

- bulunur.  $B_{\nu}(T_0)$ ,  $T = T_0 = 2^{-1/4} T_e$  deki **karacisim ışınımıdır**.  $B_{\nu}(T_0)$  aynı zamanda **Güneş'in kenarından çıkan ışınım**a eşittir.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Çünkü  $\theta = \pi/2$  konursa,

$$I_v(0, \pi/2) = B_v(T_0)$$

ve

$$I_v(0, \theta) = I_v(0, \pi/2)(1 + \beta_0 \cos \theta)$$

- Bu denklem Güneş kararması ve onun frekansa bağıllığını incelemede önemlidir. **Frekansa bağlı olarak kenar kararması şöyle yazılabilir:**

$$\frac{I_v(0, \theta)}{I_v(0, 0)} = \frac{1 + \beta_0 \cos \theta}{1 + \beta_0} \quad \dots\dots(4)$$

- $\beta_0$ ,  $\alpha$  'dan dolayı **frekansın** ve  $\kappa_v$  ve  $\bar{\kappa}$  nin **fonksiyonudur**.  $\kappa_v$  ve  $\bar{\kappa}$  nin hesaplanan değerleri (4)'te yerine konursa **kenar kararması** hesaplanabilir.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Ya da problem tersine çevrilerek gözlemlerden  $\beta_0$  ve buradan da  $\kappa_\nu / \bar{\kappa}$  oranının ne olması gerektiği bulunabilir.  $\kappa_\nu / \bar{\kappa} = 1$  için gözlemlerle (4) yaklaşık olarak uyuşmaktadır. Demek ki  $\kappa_\nu$  yaklaşık olarak sabittir ve ortalamasına eşittir. Unsöld'e göre 3230 Å de  $\kappa_\nu / \bar{\kappa} = 1.57$  den  $\lambda = 10080$  Å de 1.20'ye kadar değişmektedir.

Denklemden  $\kappa_\nu / \bar{\kappa} = 1$  konursa,

$$\frac{I_\nu(0, \pi/2)}{I_\nu(0, 0)}$$

- oranı  $\lambda = 3230$  Å de **0.225** 'ten  $\lambda = 10082$  Å 'de **0.462** 'ye kadar değiştiği bulunuyor.

## 12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Eğer (2) tam integralinde  $\kappa_\nu / \bar{\kappa} = 1$  alınır ve bu oran nümerik olarak hesaplanırsa aynı  $\lambda$  aralığında **0.0977** ile **0.4966** arasında değerler bulunmaktadır. Dolayısı ile yaklaşık yasa (4 denklemini)  $\lambda > 3230 \text{ \AA}$  için oldukça iyi sonuç vermektedir.
- Bir yıldız için, ışınımın nereden geldiğini ayıramadığımızdan kenar kararması etkisini inceleyemeyiz. Ancak ışınım akısını gözleriz. Dolayısıyla

$$F_\nu = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi \cdot B_\nu(T_0) \left( 1 + \frac{2}{3} \beta_0 \right)$$

- bulunur. Görüleceği gibi toplam akı her frekans için  $\kappa_\nu / \bar{\kappa}$  oranının fonksiyonudur. Bu oran iyi bilinirse gözlenen sürekli tayf, kuramsal tayf ile karşılaştırılabilir.

# 13. ÇİZGİ OLUŞUMU

Yıldızın iç kısımlarından atmosfere doğru akan ışınım, dalga boyunun yaklaşık olarak sürekli bir fonksiyonudur. Çünkü iç bölgede sıcaklık gradyenti (eğimi) küçüktür ve madde ile ışınım dengede sayılabilir. Bu koşullar altında **tayf**, yani ışınımın dalgaboyuna göre erke dağılımı **kara cisim ışınımına** benzer. Dış kısımlarda ise sıcaklık gradyenti (eğimi) oldukça büyüktür ve ışınım alanı eş yönlü sayılamaz. **Belli frekanslarda soğurma yapabilen atomlara ve iyonlara düşük sıcaklıklarda daha çok rastlanılacaktır** ve dışa doğru gelen ışınımdan bu frekanslarda **çkarılan erke komşu sürekli tayftan çkarılandan daha çok olacaktır.**

Atmosferdeki bir **atomun** ya da **iyonun**, aralarındaki **erke farkı  $h\nu_0$**  olan iki bağılı erke düzeyi varsa  **$\nu_0$  frekansında erke soğurulması** meydana gelebilir. O zaman dışa doğru ilerleyen ışınımdan bu **foton çkarılmış olacağından** yıldızın **bu frekanstaki toplam ışınımı azalacaktır.** Saniyenin bir kesri sonra gelişigüzel bir doğrultuda bu **foton yeniden salınarak atmosfere geri dönebilir**, bu durumda **fotonun yeniden soğurulması** mümkündür. Belki de bir **atoma** ya da **iyona** bağılı bir elektronun koparır ve serbest kalan bu elektron başka parçacıklarla etkileşerek erke kaybedebilir ya da **kazanabilir**, sonunda **üçüncü bir iyonla birleştiğinde salınan fotonun frekansı  $\nu_0$  dan genellikle farklı olacaktır.**

## 13. Çizgi Oluşumu (Devamı)

Başlangıçta  $v_0$  frekansındaki foton artık geliş güzel frekanslı bir başka fotona dönüşmüş demektir. O halde erke belli bir frekansta çıkarılıp sürekli tayfa eklenmektedir. Böylece sürekli tayf üzerinde karanlık bir çizgi oluşur.

Aslında çizgi sonsuz ince değildir,  $v_0$  yöresinde belli bir aralıkta ışınım soğurulacaktır. Bu çizgi genişleme mekanizması üzerinde daha sonra durulacaktır.

Yeniden  $v_0$  frekanslı fotonun atom ya da iyon tarafından soğurulup bağlı bir elektronu bir üst düzeye çıkardığı ana dönelim. Bu elektron bu düzeyde kalmayacak, ya ilk düzeyine dönecek ya da bir başka düzeye geçecek belki de atomu terk edecektir. Eğer ilk düzeyine dönerse foton sadece saçılmış olacaktır. Eğer ilk düzeyine dönmezse gerçek soğurma söz konusu olur. Bu son durum özellikle en dış erke düzeyleri için geçerlidir. Sık sık oluşan iyonlaşmalar ve yeniden birleşmeler ile bağlı düzeyler arasındaki geçişler, bağlı düzeylerdeki populasyon ile serbest elektronları dengede tutar. Her ikisi de aynı sıcaklıkla temsil edilebilir. Başka bir deyişle Boltzmann denklemindeki uyarma sıcaklığı ile Maxwell hız dağılımındaki kinetik sıcaklık aynıdır. Aynı sıcaklık Saha denkleminde göre oluşan iyonlaşma işlemlerini de tanımlar. Bu koşullarda Yerel Termodinamik Denge (YTD) baskın demektir. Hidrojenin üst serilerindeki çizgileri, örneğin Brackett serisi, gerçek soğurma ile oluşan çizgilere örnektir.  $n = 1$  ile  $n = 2$  düzeyleri arasındaki geçiş karşılık gelen Lyman  $\alpha$  çizgisi ise saçılma işlemleri ile oluşur.

# 13. Çizgi Oluşumu (Devamı)

Bir soğurma çizgisinin, yıldız atmosferinin özelliğini vermesi açısından **iki özelliği önemlidir**. Birisi **çizginin şiddetidir**, buna eşdeğer genişlik denir. Eşdeğer genişlik çizgiyi oluşturmak için sürekli tayftan çıkarılması gereken toplam ışıdır. Diğer önemli özellik **çizginin biçimi** ya da **profilidir**. **Profil**, çizgi içindeki erkenin dalgaboyunun fonksiyonu olarak çizilen grafiğidir. Çizgi **sonsuz ince olmadığından** çizgideki erke  $\lambda$  ya belli bir şekilde bağlıdır, kenarda erke en çok, çizgi ortasında en azdır.

O halde çizgi oluşum kuramı çizginin hem şiddetini (eşdeğer genişliğini) hem de **profilini** hesaplamalıdır. **Bunun için geçiş denklemini sürekli soğurma katsayısına ek olarak çizgi soğurma katsayısı da içermelidir**. Bu katsayı yalnız belli frekanslarda sıfırdan farklı olacaktır.

$\kappa_v$  sürekli soğurma katsayısı,  $\sigma$  sürekli saçılma katsayısı (Rayleigh saçılması yıldızların çoğu için boşlanabilir, yalnız orta sıcaklıkta geniş zarflı süper devlerde önemli olabilir),  $\ell_v$  çizgi soğurma katsayısı,  $\sigma_v$  de çizgi saçılma katsayısı **olsun**. Bu durumda

$$\cos \theta \frac{dI_v(\tau_v, \theta)}{d\tau_v} = I_v(\tau_v, \theta) - S_v(\tau_v, \theta)$$

şeklinde verilen **geçiş denklemini** geçerli olacak ancak **optik derinlik** yeniden tanımlanmış olacaktır :

$$d\tau_v = -(\kappa_v + \ell_v + \sigma + \sigma_v) \rho dx$$

## 13. Çizgi Oluşumu (Devamı)

Geçiş denklemi  $l_v \neq 0$  ve  $\sigma_v \neq 0$  için **çözümlenmelidir**. Eğer **tek bir çizgi ve onun profili** ile ilgilenilecekse **geçiş denklemi**, **çizgi genişliğini kapsayacak şekilde küçük bir frekans aralığı için yazılıp çözümlenmelidir**. Bunun için  $l_v$ ,  $\sigma_v$  ve  **$S_v$  bilinmelidir**.

Önce **atmosferi yarı sonsuz bir ortam** (paralel düzlemlerden oluşmuş) varsayıp  $I_v$  nün integral ifadesini **yüzeyden çıkan ışınım** için yazalım :

$$I_v(0, \theta) = \int_0^{\infty} S_v(\tau_v, \theta) \exp(-\tau_v \sec \theta) \sec \theta d\tau_v \quad \text{.....( A )}$$

Yıldız için bir  $\theta$  doğrultusu başka bir doğrultudan ayıramadığından ancak **toplam yüzey akısı** ölçülebilir :

$$\begin{aligned} F_v(0) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_v(0, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad \text{.....( B )} \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} I_v(0, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Kaynak fonksiyonu  $S_v(\tau_v, \theta)$  nın  $\theta$  ya **bağılılığı bilinmeden bu ifade integre edilemez**. Ancak bu fonksiyonun eş yönlü olduğunu ya da  $\theta$  ya **bağılılığının boşlanacak kadar küçük olduğunu varsaymak çoğu zaman mümkündür**. Bunları **integre etmek için çizgi genişliği boyunca  $S_v$ ,  $\kappa_v$ ,  $l_v$ ,  $\sigma$  ve  $\sigma_v$  bilinmelidir**. Bunlar  $\tau_v$  nün de **fonksiyonudurlar**.



# 13. Çizgi Oluşumu (Devamı)

**Sürekli tayf** için  $S_v = B_v$  yazılabilir. Çünkü **sürekli tayfın** YTD koşullarının geçerli olduğu bölgede oluştuğu varsayılır ve **bu iyi bir yaklaşımdır**. Ancak **çizgi için** bu yaklaşım **doğru değildir**. Çünkü çizginin oluşması, aslında **sürekli tayf süreçlerinden başka süreçlerin var olması demektir**.

YTD varsayılırsa gerçek soğurmanın yanında saçılma dışlanabilir. Bu durumda  $S_v = B_v$  alınır ve

$$d\tau_v = -(\kappa_v + \ell_v)\rho dx$$

olur. **Sıcaklık** ve **basıncın**  $\tau_v$  ile değişimi bilirse  $I_v$  ve  $F_v$  yü veren **yukarıdaki integraller sayısal olarak hesaplanabilir**, yani **çizgi profili frekansın fonksiyonu olarak hesaplanabilir**. Bu, **atmosfer için kabul edilen modele bağlıdır**. Çünkü **soğurma çizgilerinin biçimi ve şiddeti atmosferdeki fiziksel koşullara ve ışımsal süreçlere, yani soğurma ve saçılmaya bağlıdır**. **Atmosfer için farklı modeller kabul ederek çizgilerin ışımsal süreçlere hangi ölçüde bağlı olduğu ilke olarak hesaplanabilir**.

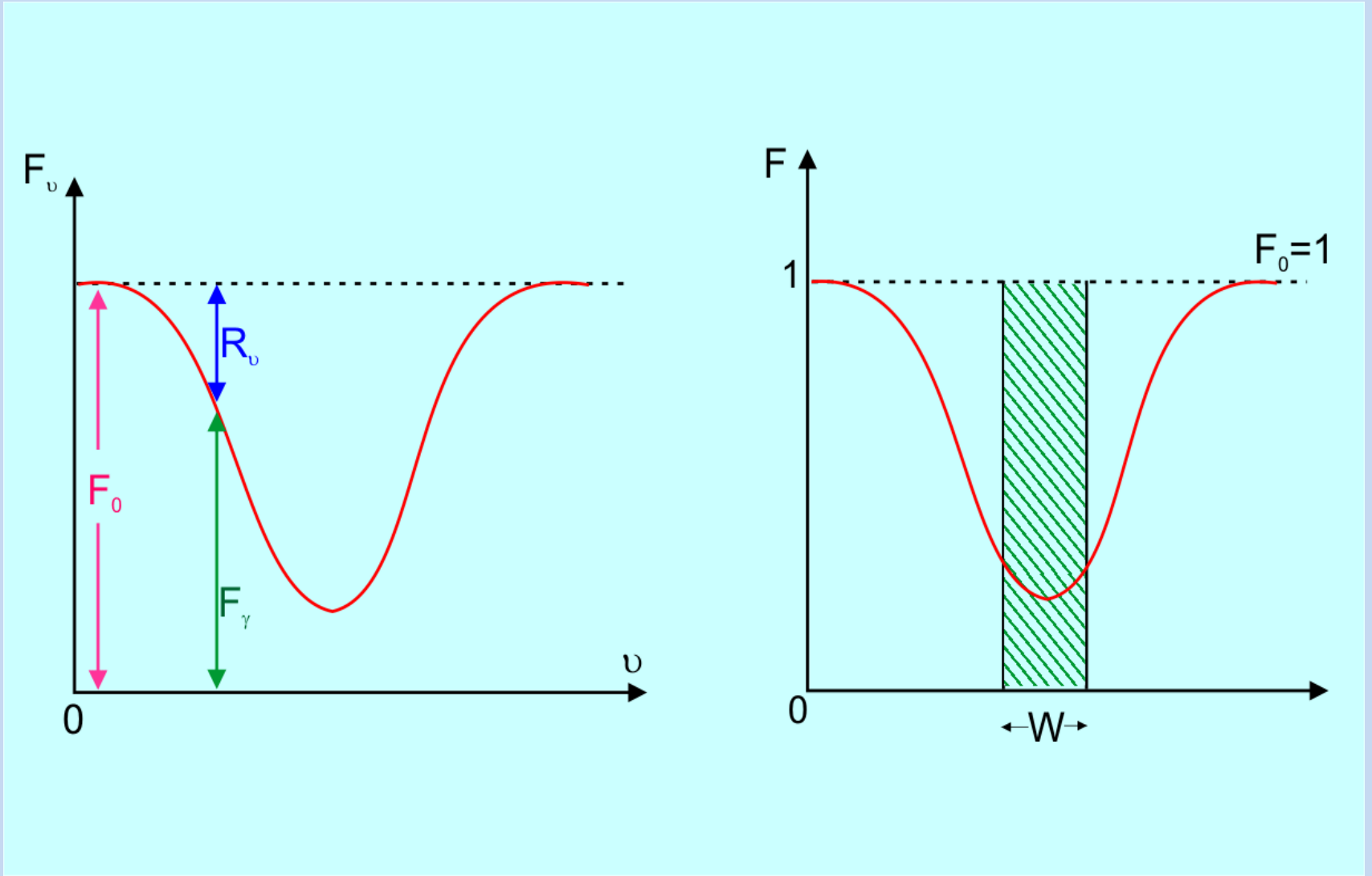
# 13. Çizgi Oluşumu (Devamı)

$I_v$  ve  $F_v$  yerine çizgideki şiddet ve akının göreceli derinliklerini kullanmak daha uygundur :

$$r_v = \frac{I_o(0, \theta) - I_v(0, \theta)}{I_o(0, \theta)}$$
$$R_v = \frac{F_o(0) - F_v(0)}{F_o(0)}$$

Eşdeğer genişlik ;  $W = \int R_v dv$

Çizgideki toplam akının  $F_o$  ile bölümüne eşdeğer genişlik (  $W$  ) denir(Şekil 13.1).  $F_o$  ile bölüm akıyı sürekli akı birimlerinde ölçmek anlamına gelir, bu durumda sürekli akı = 1 olur. O halde Şekil 13.1 deki gibi eşdeğer genişlik, gerçek çizgininki ile aynı toplam soğurmayı veren dikdörtgen tayf çizgisinin genişliğini tanımlar (  $I_o$  ve  $F_o$  , şiddet ve akının çizgiye komşu sürekli tayftaki değerleridir). Genel olarak (A) ve (B) integralleri analitik olarak hesaplanamaz, sayısal yöntemler kullanılmalıdır. Kimi özel durumlarda hesaplar kolaylaştırılabilir. Örneğin zayıf soğurma çizgileri ya da kuvvetli çizgilerin kanatları için  $l_v \ll \kappa_v$  yaklaştırması yapıp denklemler basitleştirilebilir. Çizgi ağırlık fonksiyonları diye tanımlanan fonksiyonların kullanımı hesaplarda, sözü edilen basitleştirmeyi kolaylaştırır.



Şekil 13.1. Eşdeğer genişlik ve tanımı.

# 13. 1. Çizgi Soğurma Katsayısı

Görelî şiddet  $r_\nu$  (veya  $R_\nu$ ) çizgi soğurma katsayısı  $\ell_\nu$  yü içeren bir integral olarak yazıldığına göre, bu çizgi soğurma katsayısı bilinmelidir. Klasik elektromanyetik kuramdan çizgi soğurma katsayısının frekansa bağıllığı hesaplanabilir. Klasik olarak bir çizginin, bir atom üzerine düşen elektromanyetik dalganın atom içindeki bir elektronu titreştirmesi sonucu oluştuğu düşünülebilir. Bu elektron, bu durumda **sönümlü titreşim yapan bir dipol** gibi düşünülebilir. Elektromanyetik alandan soğurulan (sonra salınan) erke, bu dipolün yaydığı erkeye eşit olacağından hesaplanabilir.

Klasik kurama göre ancak ivmelenen yük ışına yapar, yani erke kaybeder. Erke kaybedeceği için titreşim zamanla söner. İvmelenen elektronun saldığı erke yazılabilir. Ayrıca elektronun hareket denklemi yazılıp çözümlenir. Bu hesaplamalar sonucunda **bir parçacık tarafından soğurulan kesirsel erke, yani parçacık (atom) başına soğurma katsayısı** bulunur. Bunu  $\alpha_\nu$  ile gösterirsek

$$\alpha_\nu = (4\pi e^2 / mc) [ \gamma v^2 / 4\pi^2 (v_0^2 - v^2) + \gamma^2 v^2 ]$$

Burada  $\gamma$  ışınım sönüm sabitidir :  $\gamma = (8\pi^2 / 3)(e^2 / mc^3) v^2$

Eğer  $N$ , birim hacimde  $v_0$  frekansı ile titreşen elektronların sayısı ise, **hacim soğurma katsayısı**,

$$\rho \kappa_\nu = N \alpha_\nu = N (4\pi e^2 / mc) [ \gamma v^2 / 4\pi^2 (v_0^2 - v^2) + \gamma^2 v^2 ]$$

olur.

## 13. 1. Çizgi Soğurma Katsayısı(Devamı)

### Özel Durumlar :

1-  $v \gg v_0$  ise Thomson saçılması; yukarıdaki formülde  $v_0$  ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} k' &= N (4\pi e^2 / mc) [ \gamma v^2 / ( 4\pi^2 v^4 + \gamma^2 v^2 ) ] \\ &= N (4\pi e^2 / mc) [ \gamma / (4\pi^2 v^2 + \gamma^2 ) ] \end{aligned}$$

$v \gg \gamma$  olduğundan,

$$k' = N (4\pi e^2 / mc) ( \gamma / 4\pi^2 v^2 )$$

ve  $\gamma = (8\pi^2 / 3)(e^2 / mc^3) v^2$  konursa,

$$\begin{aligned} k' &= N (8\pi / 3) (e^2 / mc^2)^2 = N 0.66 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \\ &= N \sigma_e \end{aligned}$$

olduğu görülür.  $N$  nin katsayısı bir elektronun Thomson saçılma kesitidir. Serbest elektronların ( $v_0 = 0$ ) neden olduğu Thomson saçılması O, B yıldızlarında önemlidir.

## 13. 1. Çizgi Soğurma Katsayısı (Devamı)

2-  $v \ll v_0$  **Rayleigh Saçılması** ;

$$k' = N (4\pi e^2 / mc) (\gamma / v^2 4\pi^2) (v / v_0)^4 = N \sigma_{\text{Thomson}} (\lambda_0 / \lambda)^4$$

Görsel bölgede önemsizdir. Soğuk yıldızlarda önemlidir.

3-  $v \approx v_0$  **Rezonans saçılması** ; Durağan (sabit) bir atomun oluşturduğu çizgi profilini verir.

$$v_0^2 - v^2 \cong (v_0 - v) 2v$$

konursa,

$$k' = N (e^2 / mc) (\gamma / 4\pi) \{ 1 / [(v - v_0)^2 + (\gamma / 4\pi)^2] \} \dots (*)$$

elde edilir ki bu, **klasik çizgi soğurma katsayısıdır**. Doğal ya da ışınım sönüm sabiti denilen  $\gamma$  (yükü parçacığın erke kaybetme hızına bağlıdır) çizginin doğal genişliğini ya da ışıma genişliğini verir. Formülden görüleceği gibi  $v = v_0$  için soğurma katsayısı en büyüktür, bunun her iki yanında simetrik olarak azalır.

$$\Delta v = |v - v_0| = \gamma / 4\pi \text{ için en büyük değerinin}$$

yarısına ulaşır. Bu nedenle

$$2 \Delta v = \gamma / 2\pi$$

ye çizginin toplam yarım şiddet genişliği,  $\gamma / 4\pi$  ye de yarı genişliği denir. Görüldüğü gibi çizginin biçimini  $\gamma$  sönüm sabiti belirlemektedir.

# 13. 1. Çizgi Soğurma Katsayısı(Devamı)

Gösterilebilir ki soğurma çizgisinin profili de  $\kappa_\nu$  nün grafiğine benzer. Buna **sönümlenme kesiti** veya **Lorentzien kesiti** denir.  $\Delta x$  kalınlığındaki ( $\tau_1$  ve  $\tau_2$  arasında) **ince bir atmosfer tabakası** ( $\tau_2$  daha **yüksek seviyede**; bkz. Şekil 13.2) için,

$$I_\nu(\tau_2) = I_\nu(\tau_1) \exp(-\kappa_\nu \rho \Delta x) \\ \approx I_\nu(\tau_1) (1 - \kappa_\nu \rho \Delta x)$$

$$I_\nu(\tau_2) - I_\nu(\tau_1) \approx -\kappa_\nu \rho \Delta x I_\nu(\tau_1)$$

O halde ışınım tabakayı geçerken  $\nu$  **frekansındaki şiddetin azalması** doğrudan  $\kappa_\nu$  **ile orantılıdır** (Şekil 13.2 ve Şekil 13.3). **Maksimum derinliğin yarısında**

$$(\nu - \nu_0)^2 = (\gamma / 4\pi)^2 \text{ yani } \nu - \nu_0 = \gamma / 4\pi$$

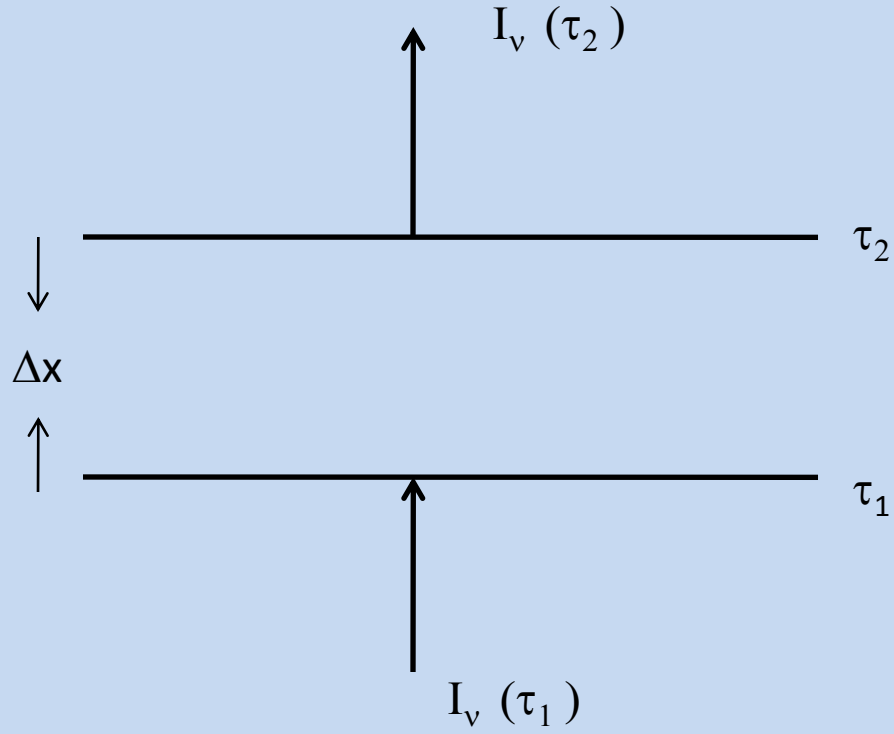
**olmalıdır.**  $\Delta\nu_{1/2} = \gamma / 4\pi$  : **profilin yarı genişliğidir** (Şekil 13.3)

$\lambda$  cinsinden,  $\Delta\lambda_{1/2} = (c / \nu^2) \Delta\nu_{1/2}$  ;  $\gamma$  nın  $\gamma = (8\pi^2 / 3)(e^2 / mc^3) \nu^2$  **değeri yerine konursa,**

$$\Delta\lambda_{1/2} = (2\pi / 3) (e^2 / mc^2) = 0.00006 \text{ \AA}$$

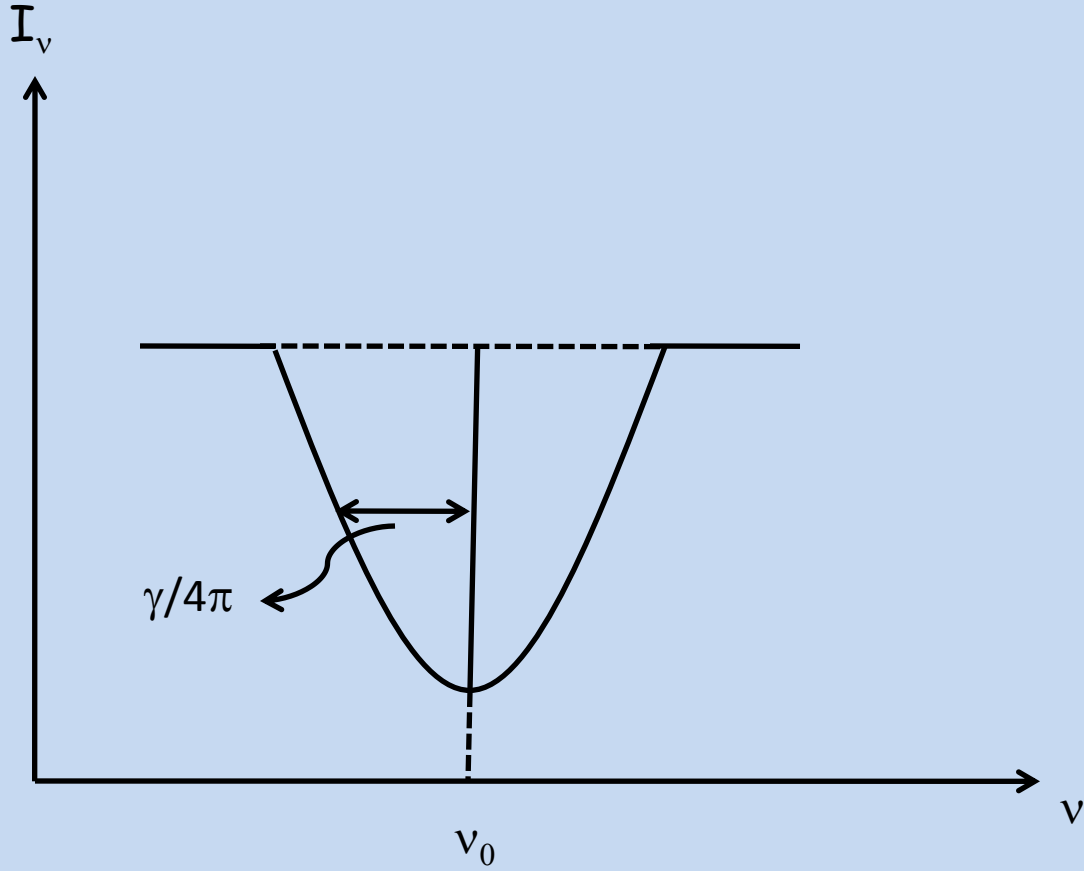
elde edilir. **Bu çok küçük bir değerdir** ve **bütün çizgiler için aynıdır.**

**Bunun iki katı çizginin doğal genişliğidir.**  $2\Delta\lambda_{1/2} = 0.00012 \text{ \AA}$



Şekil 13.2. Bir katmandan geçen ışınımın soğurulması.





Şekil 13.3. Bir soğurma çizgisinin yarı-şiddetteki yarı-genişliği.

## 13. 1. Çizgi Soğurma Katsayısı(Devamı)

Yukarıdaki formülde **k'** hacim soğurma katsayısı, **N** birim hacimde  $\nu_0$  frekansı ile titreşen bağlı elektronların sayısıdır. Eğer  $I_\nu$  eşyönlü ışınım yeğirliği ise birim hacimde ve  $d\nu$  frekans aralığında birim uzay açıda soğurulan erke

$$N \alpha_\nu I_\nu d\nu$$

olacaktır. Çizgi tarafından soğurulan erke ise şöyle olacaktır:

$$N \int \alpha_\nu I_\nu d\nu$$

$I_\nu$  çizgi boyunca değişmezse,

$$N I_\nu \int_0^\infty \alpha_\nu d\nu = N I_\nu \int \alpha_\nu d\nu = N I_\nu (\pi e^2 / mc)$$

olur. Çünkü

$$\int_0^\infty \alpha_\nu d\nu = (e^2 / mc) \int_{-\infty}^{+\infty} [(\gamma / 4\pi) / (\nu - \nu_0)^2 + (\gamma / 4\pi)^2] d(\nu - \nu_0)$$

Son integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a / x^2 + a^2) dx = \text{Arc tg } (x/a) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

olduğundan,

$$\int_0^\infty \alpha_\nu d\nu = (\pi e^2 / mc)$$

bulunur.

## 13.2. Kuantum Atomu

Yukarıdaki formüller klasik harmonik salınım kullanılarak bulunmuştur. Bu nedenle tam olarak doğru değildir. Doğru olan kuantum mekaniği kullanılarak bulunmasıdır. Bu kuramda çizgi soğurması, bir atom bir düzeyden yüksek erkeli bir başka düzeye uyarıldığı zaman olur ve her geçişte bir  $h\nu$  fotonu soğurur. Böyle kuantum düzeyindeki soğurucu elektrona ait dalga denkleminin çözümü,

$$k' = (N e^2 / mc)(\gamma / 4\pi) \{ 1 / [(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma / 4\pi)^2] \}$$

ile aynı biçimdedir, ancak  $N$  ve  $\gamma$  nın anlamı klasik anlamlarından farklıdır.

Önce doğal genişlemiş çizgi profilinin sonlu bir genişliğe sahip olmasının fiziksel yorumu nedir ? Ona bakalım. **Klasik olarak anlamı** : titreşen bir elektron, **bir mekanik osilatör gibi**, üzerine düşen kendi rezonans frekansından biraz farklı bir frekansa da yanıt verebilir. **Kuantum mekaniğine göre ise**, bir çizginin genişliği, **erke düzeylerinin sonlu bir genişliğe sahip olmasının bir sonucudur**. Heisenberg'in belirsizlik ilkesine göre,

$$\Delta t \cdot \Delta E \approx h / 2\pi$$

dir. Burada  $\Delta E$  **erke düzeyinin genişliği** ve  $\Delta t$  onun **ömrüdür**, yani bir **elektronun bir düzeyde kalma süresidir**.

## 13.2. Kuantum Atomu(Devamı)

$\Delta t \approx 10^{-8}$  sn olduğuna göre  $\Delta E$  de **sonludur**. O halde **atom**, bir düzeyden bir başka erke düzeyine geçişte  $E_1 + \Delta E_1/2$  ve  $E_1 - \Delta E_1/2$  arasındaki bütün düzeyler ile  $E_2 + \Delta E_2/2$  ve  $E_2 - \Delta E_2/2$  arasındaki bütün enerji düzeylerindeki geçişleri **yapabilir**. **Temel düzeyin ömrü uzundur** ; dolayısıyla  $\Delta E$  **çok küçük ve düzey keskindir**.

**Kuantum mekaniğine göre**  $\kappa_v'$  nün ifadesindeki **N** ve  $\gamma$  nın **değiştirilmesi gerekir**. Önce  $\gamma$  nın yerine gelecek terimi (**parametreyi**) bulalım. Görüldüğü gibi klasik sönüm sabiti  $\gamma$ , titreşim sönme hızını belirler. Bir başka değişle  $\gamma^{-1}$  ilgili erke düzeyinin yaşam süresi yani ömrüdür. Eğer **atom bir ışınım alanı içinde değilse uyarılmış n inci erke düzeyinden alt düzeylere ancak kendiliğinden düşebilir**. Bu durumda **kendiliğinden salma katsayısı (olasılığı)  $A_{nm}$  nin tanımından,**

$$dN_n / dt = - N_n \sum_{m<n} A_{nm} = - N_n \Gamma_n \quad \text{.....(a)}$$

Burada  $\Gamma_n = \sum_{m<n} A_{nm} = 1 / T_n$  dir.  $T_n$  , **n düzeyindeki atomun ortalama**

**yaşam süresidir (ömrüdür)**. (a) ifadesi integre edilirse,

$$N_n = N_{n,0} \exp ( - \Gamma_n t )$$

bulunur. Burada  $N_{n,0}$  **başlangıçta n kuantum düzeyinde bulunan atomların sayısıdır**.

## 13.2. Kuantum Atomu(Devamı)

Eğer **atom** kuvvetli bir ışınım alanı içinde ise (YTD de) zorlama ile ışınım ve soğurma işlemleri ile de düzey değiştirecektir. O zaman

$$\Gamma_n = \sum_{m=1}^{n-1} A_{nm} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{nm} U_{\nu_{nm}} + \sum_{m'=n+1}^{\infty} B_{nm'} U_{\nu_{nm'}} \dots\dots(b)$$

Klasik kurama göre çizginin yarı genişliği bütün dalga boyları için sabitti, yani **çizginin doğal genişliği sabitti**. Burada ise  $\Gamma$ , **geçiş olasılıklarına bağlı**, yüksek geçiş olasılıkları olan çizgiler daha geniştir.  $U(\nu)$ ,  $\nu$  frekansında **ışınım yoğunluğudur**.

## 13.2. Kuantum Atomu(Devamı)

Planck formülünden

$$U(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

konur ve

$$B_{nm} = \frac{g_m}{g_n} \cdot B_{mn} \quad , \quad A_{nm} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot B_{nm}$$

bağıntıları kullanılırsa (b) ifadesi şu şekli alır :

$$\Gamma_n = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{A_{nm}}{1 - e^{-h\nu/kT}} + \sum_{m'=n+1}^{\infty} \frac{\frac{g_{m'}}{g_n} \cdot A_{m'n}}{e^{h\nu_{nm'}/kT} - 1}$$

$\gamma$  yerine kullanılacak olan budur.

## 13.3. Osilatör Şiddeti

Şimdi de (a) denklemindeki **N** nin ne anlama geldiğini bulalım. **N**, birim oylumdaki klasik titreşici (elektron) sayısı idi. Bu elektronlar tarafından birim oylumda  $d\omega$  doğrultusunda çizgi profili boyunca saniyede soğurulan erke şöyle verilmişti :

$$N \cdot I_{\nu} \frac{\pi e^2}{mc} d\omega \quad \dots (*)$$

Diğer taraftan **kuantum atomunun** n ninci alt erke düzeyinden m ninci üst erke düzeyine geçerken birim oylum tarafından  $d\omega$  doğrultusunda saniyede soğurulan erke,

$$N_n \cdot B_{nm} \cdot U_{\nu_{nm}} \cdot h \nu_{nm} \cdot \frac{d\omega}{4\pi}$$

olacaktır. Burada  $N_n$ , n düzeyindeki atomların yoğunluğu,  $B_{nm}$  Einstein katsayısı,  $U_{\nu_{nm}}$  ışınım yoğunluğudur.

## 13.3. Osilatör Şiddeti(Devamı)

$$U_{\nu_{nm}} = \frac{4\pi}{c} \cdot I_{\nu_{nm}}$$

koyarsak

$$N_n \cdot B_{nm} \cdot I_{\nu_{nm}} \cdot \frac{h\nu_{nm}}{c} \cdot d\omega \quad \dots(**)$$

(\*) ve (\*\*) ile verilen bu iki ifade eşitlenirse, doğal frekansı  $\nu_0 = \nu_{nm}$  olan klasik elektronlar kuantum atomlar tarafından soğurulan erke kadar erke soğurmuş olacaklardır. O halde,

$$\frac{N}{N_n} = \frac{mh\nu_{nm}}{\pi e^2} B_{nm}$$

Bu orana osilatör şiddeti denir ve **f** ile gösterilir :



## 13.3. Osilatör Şiddeti(Devamı)

$$f_{nm} = \frac{mh\nu_{nm}}{\pi e^2} \cdot B_{nm}$$

Demek ki çizgi profilini veren ( $k'$ ) soğurma katsayısında  $N$  yerine  $N_n f_{nm}$  koymak gerekir.  $N = N_n f_{nm}$  olduğuna göre bir **kuantum atom** tarafından yapılan soğurma, **f klasik osilatör tarafından yapılan soğurmaya denktir.**

$f_{nm}$  ifadesinde  $B_{nm}$  katsayısı  $A_{mn}$  cinsinden ifade edilir ve  $\gamma [ = (8\pi^2 / 3)(e^2 / mc^3)v^2 ]$  kullanılırsa,

$$A_{nm} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{nm} \quad \Rightarrow \quad B_{nm} = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} A_{nm} = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \frac{g_m}{g_n} A_{mn}$$

$$f_{nm} = \frac{g_m}{g_n} \frac{mc^3}{8\pi e^2 \nu^2} A_{mn} = \frac{g_m}{g_n} \frac{1}{3\gamma} A_{mn}$$

## 13.3. Osilatör Şiddeti(Devamı)

Aynı şekilde **salma osilatör şiddeti**

$$f_{mn} = \frac{m h \nu_{nm}}{\pi e^2} \cdot B_{mn}$$

ile tanımlanırsa,

$$f_{mn} = -\frac{g_n}{g_m} \cdot f_{nm} = -\frac{A_{mn}}{3\gamma}$$

bulunur. Genellikle **salma ile ilgili osilatör şiddeti** (-) işaretli alınır.

**k'** ile verilen **soğurma katsayısının kuantum karşılığı** aşağıda verildiği gibi olur:

## 13.3. Osilatör Şiddeti(Devamı)

$$k' = \kappa_v \rho = N \cdot a_v = \frac{\pi e^2}{mc} \cdot N_n \cdot f \cdot \frac{\Gamma_n / 4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\Gamma_n}{4\pi}\right)^2}$$

Bu durumda **bir atom başına düşen soğurma** ( $N_n = 1$ ),

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \alpha_\nu d\nu &= \frac{\pi e^2}{mc} \cdot f \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma_n / 4\pi^2}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\Gamma_n}{4\pi}\right)^2} d(\nu - \nu_o) \\ &= \frac{\pi e^2}{mc} \cdot f \end{aligned}$$

**Birim hacimdeki ortalama soğurma katsayısı,**

$$\kappa' = \bar{\kappa} \rho = \frac{\pi e^2}{mc} \cdot N_n \cdot f$$

yazılabilir.

## 13.4. Çizgi Genişlemesi

**Soğurma çizgisi profilini veren denklem, atomu hareketsiz ve başka atomlarla çarpışmadığı varsayılarak çıkarılmıştı.** Bu koşullar hiç bir zaman geçerli değildir. Dolayısıyla soğurma çizgilerinin şiddetini ve biçimini incelerken atomların hem hareketleri hem de karşılıklı çarpışmaları gözönüne alınmalıdır. Bu iki olay da çizgilerin genişlemesine neden olur ve böylece çizgilerin biçimleri etkilenir.

### DOPPLER GENİŞLEMESİ :

**Atomların hareketleri Doppler etkisi nedeniyle çizgilerin genişlemesine neden olur.** Bir yıldızın herhangi bir oylum elementinde atomlar gelişigüzel hızlara sahiptirler. Bu hızların hangi aralıkta ve kaç tane atomun hangi hızda olduğunu Maxwell dağılım yasası verir. **Dolayısıyla** her atomun oluşturduğu tayf çizgisi bir miktar kayar ; **kayma miktarı ve yönü** atomdan atoma değişir, **çünkü bunlar atomun hızına ve hareket doğrultusuna bağlıdır.** Böylece bütün atomların birlikte etkisi çizgiyi genişletmektedir.

$v$  ile  $v + dv$  arasındaki hızlarla belli bir doğrultuda hareket eden birim oylumdaki atomların sayısı  $N(v)$ , Maxwell hız dağılımı yasası ile şöyle verilmiştir :

$$N(v)dv = \frac{N}{v_o \sqrt{\pi}} \cdot e^{-v^2/v_o^2} dv, \quad v_o = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (\text{en olası hız})$$

(Burada Maxwell dağılımının tek bileşeni alındı.)

## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

$v$ , bakış doğrultusundaki hız bileşenidir. Gazda ayrıca çalkantı hareketi varsa

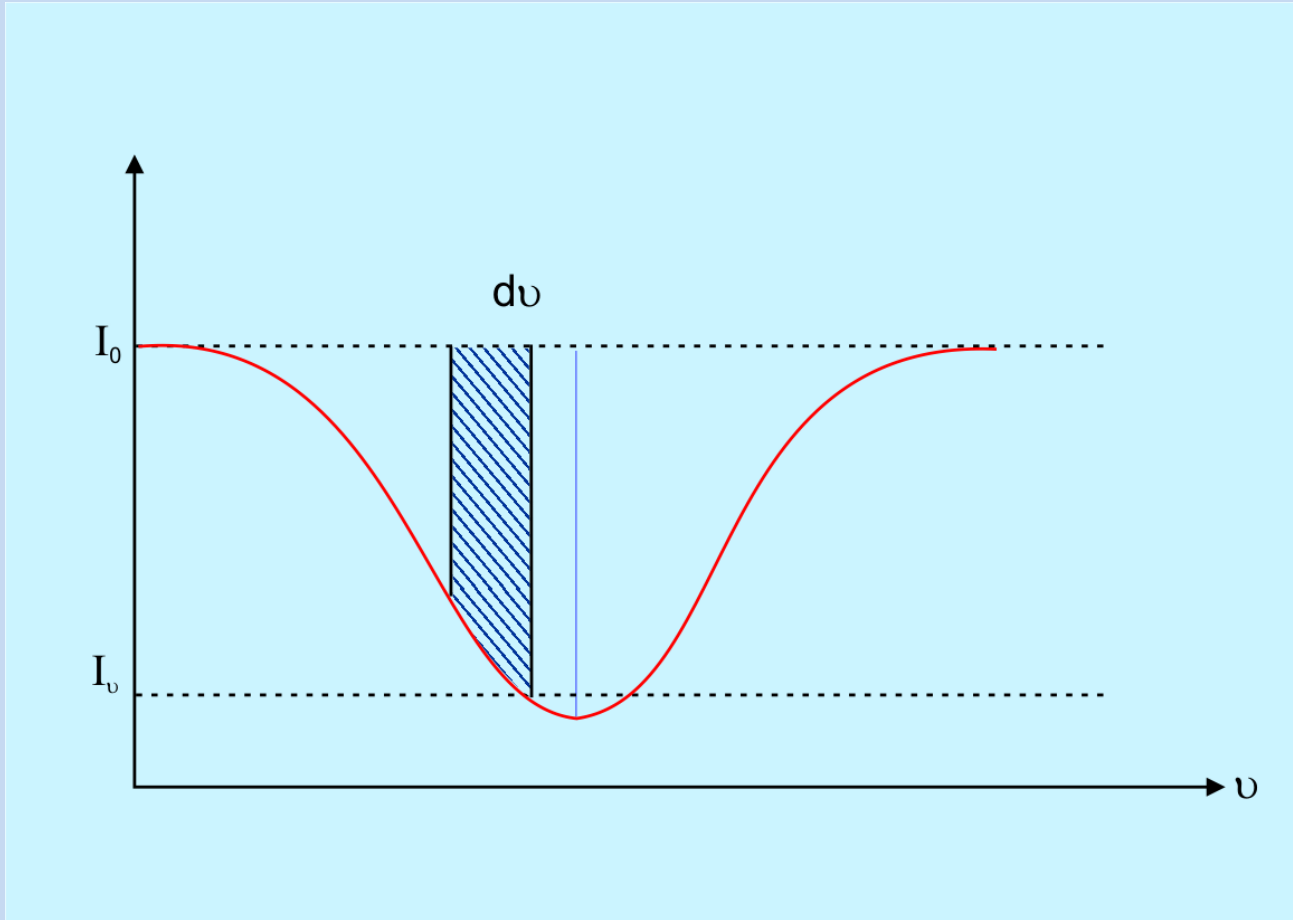
$$v_o^2 = \frac{2kT}{m} + v_{\text{çal}}^2$$

alınmalıdır.  $v_{\text{çal}}$  da çalkantı hareketinin en olası hızıdır ve çalkantı hareketinin de bir Maxwell dağılımı gösterdiği varsayılır.

Yıldız atmosferinde ince bir tabakayı gözönüne alalım. Bu tabakada soğurulan şiddet,  $\lambda$  dalga boyunda soğurucu atomların sayısı ile orantılı olacaktır. O halde Şekil 13.4 de gösterilen şerit boyunca süreklilikten soğurulan enerji için ;

$(I_o - I_v) dv = \text{şerit}$   
yazılabilir. Bu durumda,

$$\frac{(I_o - I_v) dv}{\int_{\text{çizgi}} (I_o - I_v) dv} = \frac{N(v) dv}{N} = \frac{1}{v_o \sqrt{\pi}} e^{-v^2/v_o^2} \cdot dv$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_o}\right)^2} \frac{dv}{\Delta v_o} \quad (\text{bkz. açıklama})$$



Şekil 13.4. Çizgi boyunca süreklilikten söğürulan erke.

## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

Bu son verilen ifadeden,

$$\frac{(I_o - I_\nu)}{\int_{\text{çizgi}} (I_o - I_\nu) d\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_o}\right)^2} \cdot \frac{1}{\Delta\nu_o}$$

yazılabilir. Çizgi merkezinde  $\Delta\nu = 0$  dır. Bu durumda bu ifade

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta\nu_o}$$

olur. Yarı genişlik  $\Delta\nu_{1/2}$  için,

$$\frac{1}{2} = \frac{I_o - I_{\nu_{1/2}}}{I_o - I_\nu} = e^{-\left(\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu}\right)^2 = \ln 2$$

## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

Yarı genişlik ;

$$\begin{aligned}\Delta \nu_{1/2} &= \Delta \nu_o \sqrt{\ln 2} = \frac{\nu_o \nu_o}{c} \sqrt{\ln 2} \\ &= \frac{\nu_o}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \cdot \ln 2}\end{aligned}$$

Toplam genişlik ;

$$\begin{aligned}2\Delta \nu_{1/2} &= \frac{2\nu_o}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2} \\ 2\Delta \lambda_{1/2} &= \frac{2\lambda_o}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2}\end{aligned}$$

**Yarı-genişlik** beklendiği gibi (parçacıkların hareketliliğine bağlı olarak) **sıcaklıkla** artar, Parçacığın **kütlesi ile** azalır. Örneğin, **Güneş tayfında**  $H_\beta$  nın **toplam yarı-genişliği**,  $T=5800$  °K alınırsa,

$$2\Delta \lambda_{1/2} = \frac{2 \times 4861}{3 \times 10^{10}} \sqrt{\frac{2 \times 1.38 \times 10^{-16} \times 5800}{1.67 \times 10^{-24}} \ln 2} = 0.264 \text{ \AA}$$

Bu **yarı-genişlik doğal genişliğin**  $\sim 2000$  katıdır.



## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

### ÇARPMA İLE GENİŞLEME :

Çarpışma ile de çizgi genişler, çünkü çarpışma ışına yapan ya da soğuran atomu tedirgin eder. Tedirgin olan atom ise “rahat” olan atom kadar ince çizgi salamaz, çünkü ancak sınırsız zaman aralığında serbestçe ışına yapabilen atom sonsuz ince çizgi salabilir. Eğer atom sonlu zaman süresince ışına yapıyorsa salınan ışınım çeşitli frekansları içeren bir nabız şeklindedir.

Eğer çarpışma yoksa, çizgi genişliğini uyarılmış erke düzeyinin doğal yaşam süresi belirler. Heisenberg ilkesine göre eğer yaşam süresi  $\Delta t$  ise erkedeki belirsizlik

$$\Delta E \Delta t \approx h / 2\pi$$

dir. Çarpışmalar erke düzeyinin yaşam süresini kısaltacağından  $\Delta E$  büyür, böylece çizgi genişler. Doğal genişleme  $\gamma$  (veya  $\Gamma$ ) ile veriliyordu, çarpmaların neden olduğu genişleme de buna eklenmelidir. Yani yarı – genişlik :

$$(\gamma / 4\pi) + (\gamma_c / 4\pi)$$

olur. O halde soğurma katsayısını veren formülde  $\gamma$  yerine

$$\gamma_{\text{ışınım}} + \gamma_{\text{çarpma}}$$

(veya kuantum mekaniğine göre  $\Gamma = \Gamma_{\text{ışınım}} + \Gamma_{\text{çarpma}}$ ) gelmelidir.  $\Gamma_{\text{çarpma}}$ , çarpışmalar nedeniyle atomun erke düzeylerinde meydana gelen kaymalar göz önüne alınarak hesaplanmaktadır.

## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

**DOĞAL, ÇARPIŞMA VE DOPPLER GENİŞLEMESİNİN BİLEŞİK ETKİSİ :**

Bir atomun **soğurma katsayısı** :

$$a_{\nu} = \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{\Gamma}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{(\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2}$$

idi. Burada  $\Gamma = \Gamma_{\text{ışınım}} + \Gamma_{\text{çarpma}}$  alınırsa **doğal ve çarpışma ile genişleme hesaba katılmış olur**. Doppler genişlemesini hesaba katmak için hızları göz önüne almak gerekir.

$\nu$  radyal hızı ile hareket eden **bir atom orta frekansı**

$$\nu' = \nu_o + (\nu/c) \nu_o$$

olan **bir soğurma** yapacaktır. O halde **bu atoma ait soğurma katsayısı** :

## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

$$a_v = \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{\Gamma}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\left( v_o + \frac{v}{c} v_o - v \right)^2 + \left( \frac{\Gamma}{4\pi} \right)^2}$$

olacaktır.  $v$  frekansında ve **birim frekans aralığında atom başına düşen toplam soğurma katsayısını bulmak için** bu formülü **hızları  $v$  ile  $v + dv$  arasında olan atomların oransal sayısı**

$$\frac{dN}{N} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot dv$$

ile **çarpıp bütün hızlar üzerinden integre etmek gerekir**. Burada  **$m = \mu H$  atomun gram cinsinden kütesidir.**

## 13.4. Çizgi Genişlemesi (Devamı)

$$a_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{\Gamma}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot d\nu}{\left(\nu_o + \frac{\nu}{c} \nu_o - \nu\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2} \dots(a)$$

Bu integral bir kaç değişiklikle daha uygun şekle sokulabilir :

Önce,

$$\Delta \nu_o = \frac{\nu_o}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{\nu_o}{c} v_o \quad ; \quad \Delta \nu = \frac{\nu_o}{c} \nu$$

$$u = \frac{\nu - \nu_o}{\Delta \nu_o} \quad ; \quad y = \frac{\Delta \nu}{\Delta \nu_o} \quad ; \quad a = \frac{\Gamma}{4\pi \Delta \nu_o}$$

tanımlarını yapalım. Buradaki  $\nu$  değişken değil, hangi  $\nu$  frekansında  $a_\nu$  yü bulmak istiyorsak o frekanstır. İkinci tanımdan

$$d\nu = (c / \nu_o) d(\Delta \nu)$$

olur. Bunlar ( $\alpha$ ) ifadesinde kullanılırsa,

## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

$$a_v = a_o \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (u - y)^2} dy = a_o H(a, u)$$

Burada

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{\pi e^2}{mc} \cdot f \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta v_o} \\ &= \frac{g_m}{g_n} A_{mn} \cdot \frac{\lambda^2}{8\pi^{3/2}} \cdot \frac{1}{\Delta v_o} \end{aligned}$$

olup **çizginin merkezinde sıfır sönümlenme için soğurma katsayısıdır. H** fonksiyonları (Hjerting fonksiyonları) :

## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

Sabit basınç ve sıcaklıkta  $\alpha$  sabittir ve  $H(\alpha, u)$  integrali  $y$  üzerinden integre edilebilir.

$\alpha_v / \alpha_o$  'ı hesaplamak için yararlı çizelgeler verilmiştir.

$\alpha_v = \alpha_o H(\alpha, u)$  ifadesi

$\alpha_v / \alpha_o = H_o(u) + \alpha H_1(u) + \alpha^2 H_2(u) + \alpha^3 H_3(u) + \dots$

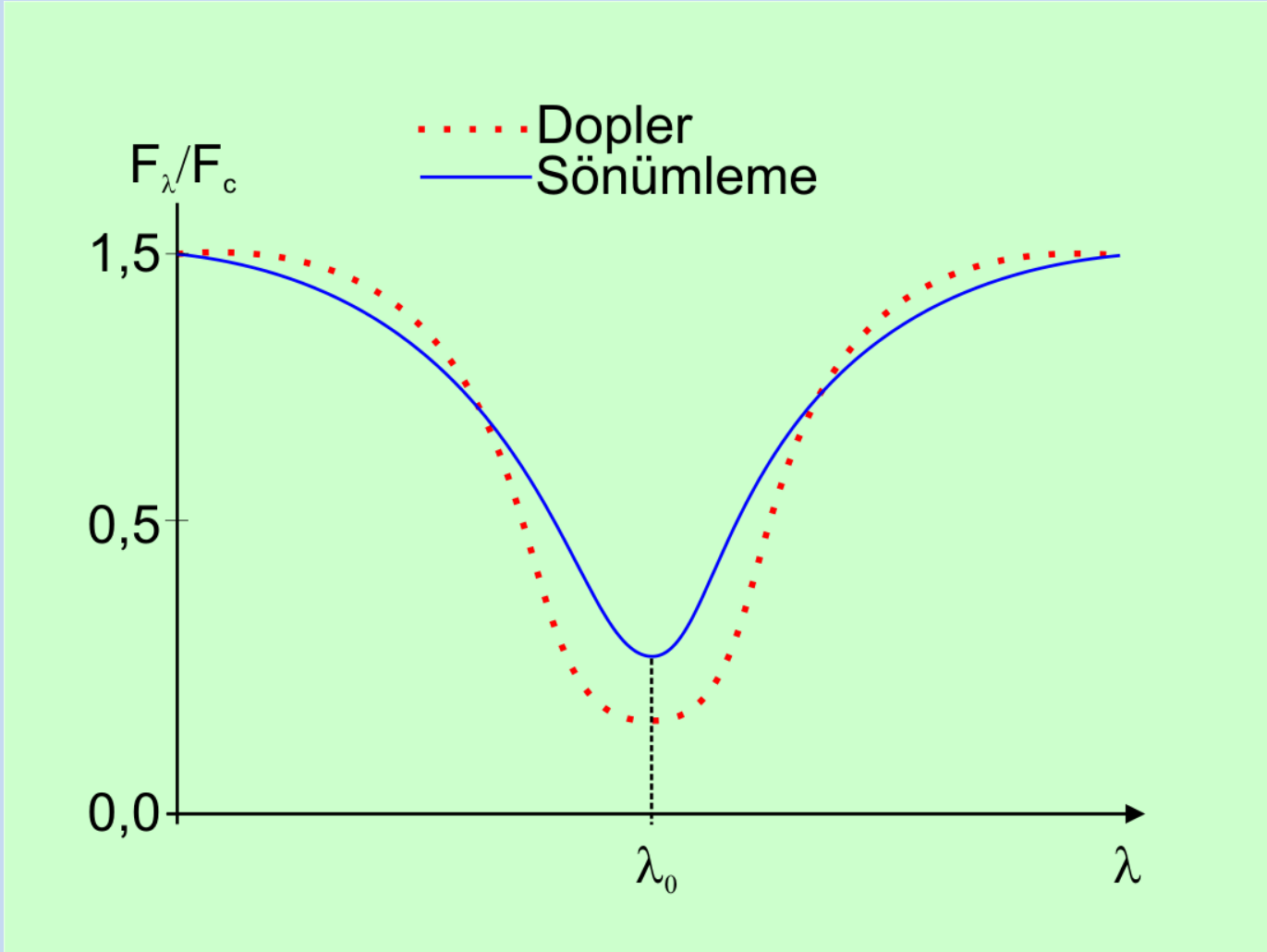
şeklinde seriye açılmış ve  $H_1, H_2, H_3, \dots$  çizelgeler halinde  $u$  nun fonksiyonu olarak verilmiştir.

$u$	$H_o(u)$	$H_1(u)$	$H_2(u)$	...
0.0	...	...	...	...
0.1	...	...	...	...
0.2	...	...	...	...
...				
...				

## 13.4. Çizgi Genişlemesi(Devamı)

Doppler genişlemesi nedeniyle çizginin **yarı-genişliği**, doğal yarı-genişliğinden çok büyük olmasına rağmen, çizginin merkezinden uzaklaştıkça Doppler genişlemesi nedeniyle **çizginin derinliği üstel (eksponansiyel) olarak azalır**. Bunun nedeni Maxwell hız dağılımının üstel bir fonksiyon olmasıdır. Oysa doğal genişleme nedeniyle çizgi derinliği daha yavaş ( $\sim 1 / \Delta\lambda^2$ ) azalır.

Doppler ve sönümlenme (doğal) profillerin ikisinin birlikte katkısı ile elde edilen çizgi profiline “Voigt profili” denir. Doppler genişlemesi çizginin merkezinde etkindir. Fakat çizginin merkezinden uzaklaştıkça Doppler profilinin derinliği azalmaya başlar (üstel olarak) ve kanatlarda sönümlenme etkisi baskın hale gelir (Şekil 13.5).



Şekil 13.5. Doppler profili ve sönümlleme etkisi.



## 13.5. Çizgi Genişlemesine Neden Olan Diğer Etkenler

### 1. Stark Etkisi :

Işınım yapan bir atom, bir elektrik alanın etkisinde ise, onun enerji düzeyleri belli sayıda alt düzeylere ayrılır. Sonuç olarak da bir çizgi bir çok bileşene ayrılır. Yıldız atmosferlerinde ışınım yapan bir atomun etrafında daima yüklü parçacıklar yani bir elektrik alanı vardır. Bu alanın şiddeti ve doğrultusu devamlı olarak değişir ; sonuçta gözlenen çizgide bir genişleme görülür.

Stark etkisi, atom ağırlığı düşük elementlerde daha etkin olduğundan, yıldız atmosferlerinde sadece H ve He için gözlemlenemez. Bu etki nedeniyle H çizgileri yüksek ısıtmalı (L) yıldızlarda (dev ve süperdevlerde) daha incedir, L azaldıkça (cücelerde) daha geniş ve yaygın olurlar. Çünkü parlaklık azaldıkça  $P_e$  artar, yani elektrik alanın şiddeti artar.

Holtmark teorisine göre, mikroskopik bir elektrik alanının ortalama değeri,  $E_o = 46.8 (P_i / T)^{2/3}$  dür. Burada  $P_i$  iyonların basıncı,  $P_e$  elektron basıncına eşittir.

Çizgi merkezinden bir  $\Delta\lambda$  uzaklığında Doppler genişliğinden çok daha büyüktür. Hidrojen çizgileri için atom başına soğurma katsayısı

## 13.5. Çizgi Genişlemesine Neden Olan Diğer Etkenler (Devamı)

$$a_{\lambda} = \frac{a_n E_o^{3/2}}{\Delta\lambda^{5/2}} = a_n \cdot 321 \cdot \frac{P_e}{T} \Delta\lambda^{-5/2}$$

ile verilir.  $a_n$  çizgiden çizgiye değişir, f osilatör şiddetine bağlıdır. He için teori, **şiddetli çizgiler için bir formüle götürür** ve genellikle çok daha karışıktır.

# 13.5. Çizgi Genişlemesine Neden Olan Diğer Etkenler (Devamı)

## 2. Zeeman Etkisi :

Stark etkisine benzer olarak, eğer yıldız atmosferlerinde manyetik alan varsa çizgilerde bir genişleme meydana gelir.

**Sonuç olarak**  $\alpha_v$  ( H ve He çizgileri hariç ) çizgilerin kanatlarında  $\Delta\lambda^{-2}$  ile orantılı değişir. Çünkü sönümlenme (doğal ve çarpma ile) baskındır. H nin kanatlarında Stark etkisi ( $P_e / T$ )  $\Delta\lambda^{-5/2}$  ile orantılı değişir. Bir H çizgisinin profili teorik olarak hesaplanacak olursa  $P_e$  ve  $T$  nin atmosferin optik derinliği ile değişimini hesaba katmak gerekecektir.

Çizginin merkez kısmında ısısal Doppler etkisi nedeniyle  $\alpha$ ,  $\exp(-\Delta\lambda^2)$  ile değişir. Dolayısıyla  $\Delta\lambda$  yeterince büyük olduğunda onun etkisi boşlanabilir, ama sönümlenme ve Stark etkisi baskın hale gelir. H manyetik alan şiddeti olmak üzere Zeeman etkisi,

$$\Delta\lambda = 4.67 \times 10^{-5} \lambda^2 \cdot H$$

ile hesaplanabilir. Burada H (Gauss),  $\lambda$ (cm) ve  $\Delta\lambda$ (cm) birimindedir.

## 13.5. Çizgi Genişlemesine Neden Olan Diğer Etkenler (Devamı)

### 3. Yıldızların Dönmesi :

Şekil 13.6\_ dan görüleceği gibi, yıldızın bir eksen etrafında dönmesi nedeniyle yıldızın bir yarısı bize yaklaşırken diğer yarısı bizden uzaklaşır.  $\theta$  enlemindeki dönme hızı  $V_r(\theta)$  ise hareketin bakış doğrultusundaki bileşeni  $V_y = V_r(\theta) \sin \theta$  dır.

Ekvator dönme hızı  $V_e$  olmak üzere katı cisim dönmesi için

$$V_r(\theta) = V_e \sin \theta \quad ,$$

bakış doğrultusundaki hız bileşeni için de

$$V_y = V_e \sin \theta \sin \Phi$$

yazılabilir. Küre üzerindeki her noktada  $V_y$  sabit olduğuna göre

$$\sin \theta \sin \Phi = \text{sabit}$$

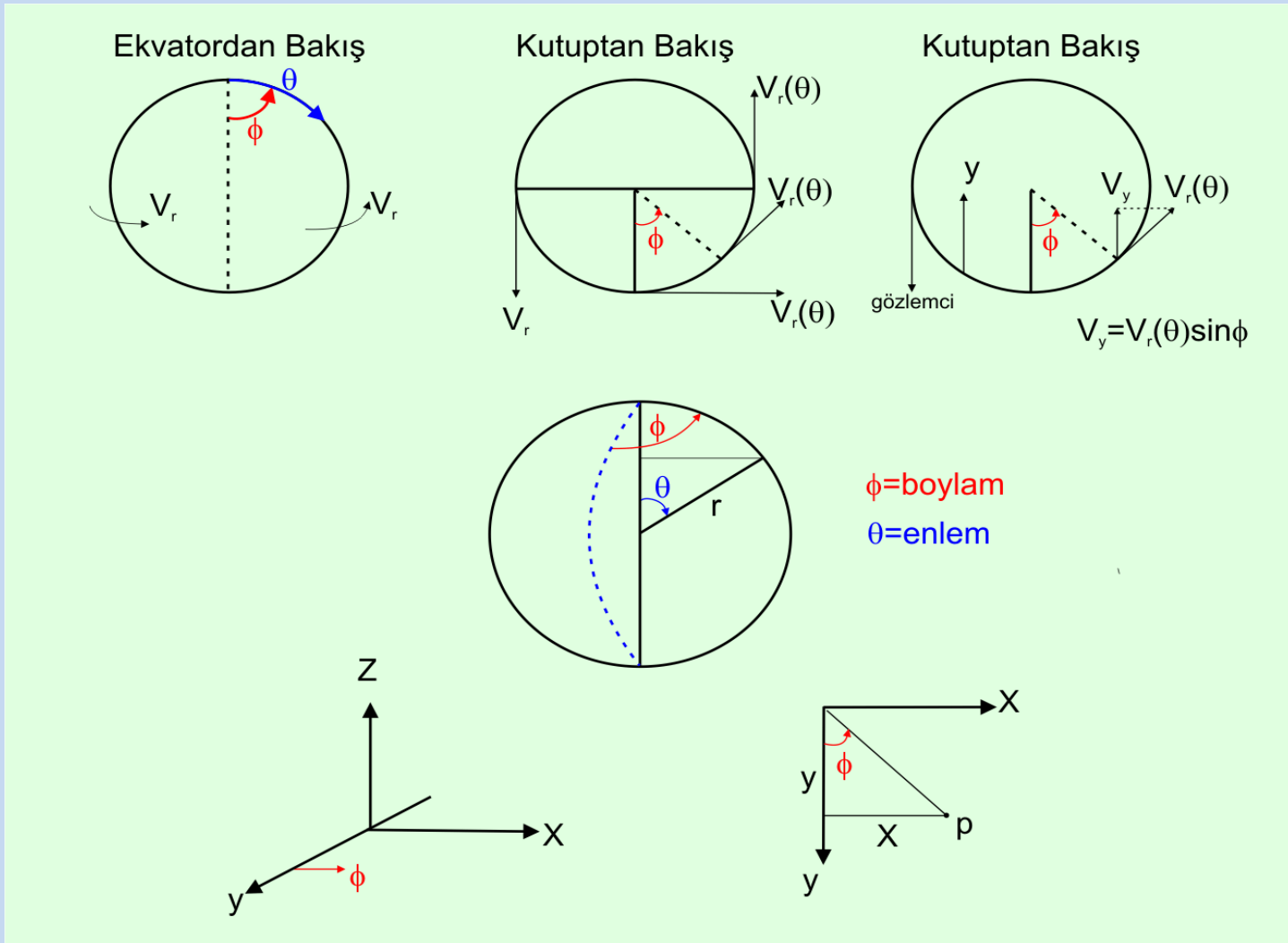
olmalıdır. Yıldız küresini küresel koordinat sisteminde tanımlarsak küre yüzeyinde bu noktaların yerleri kolayca yazılabilir :

$$x = \rho \sin \Phi = r \sin \theta \sin \Phi$$

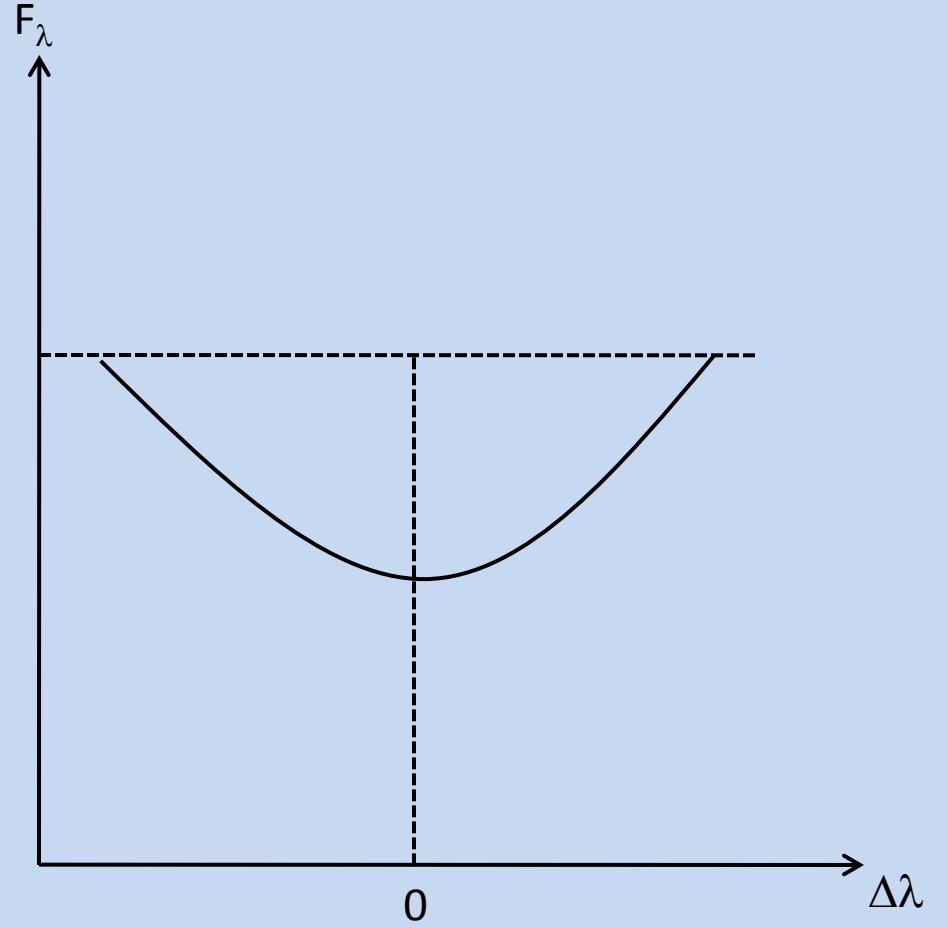
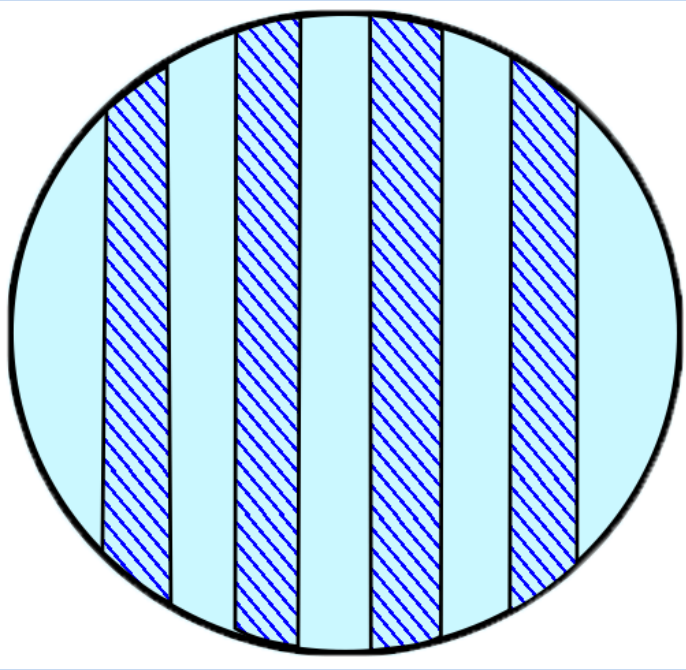
$$y = \rho \cos \Phi = r \sin \theta \cos \Phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Bu da yıldız yüzeyinde taralı yollar (şeritler) boyunca  $x = \text{sabit}$  için  $\sin \theta \sin \phi$  nin sabit olacağını gösterir (Şekil 13.7 A). Yıldız yüzeyinde tüm alanlar aynı parlaklıkta olsa dönmeden dolayı genişlemiş bir çizgi elips şeklinde bir bir çizgi kesiti biçimini alır (Şekil 13.7 B).



Şekil 13.6. Yıldız dönmesinin enlemsel ve boylamsal etkileri.



Şekil 13.7. Yıldız dönmesinin çizgi profiline etkisi.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ

Yıldız atmosferlerinin temel sorunu sürekli tayftaki erke dağılımını ve soğurma çizgilerinin profillerini doğru olarak veren kuramı geliştirmek ve bu kuramdan yıldız atmosferlerindeki fiziksel koşulları belirlemektir. **Fiziksel koşulları belirlemek** ; kimyasal bileşimi, **sıcaklığı**, **yoğunluğu**, **iyonlaşma durumunu** ve yüzey çekim ivmesini hesaplamak demektir. Bunun için hem çizgi profili kuramı, hem de çizgi için geçiş denkleminin çözümü bilinmelidir.

Eğer soğurma katsayısı, frekansın veya dalgaboyunun fonksiyonu olarak bilinirse, **soğurma çizgisinin biçiminin yani içindeki erke dağılımının hesap edilebileceği daha önce gösterilmişti**. Gözlemsel olarak bir çizgi profili ve çizginin eşdeğer genişliği ölçülebilir. İşte sorun **bu profil veya eşdeğer genişlikten ne öğrenebileceğimiz sorundur**. Çizgi tayfının incelenmesi önce hemen nitel bir analiz imkanı sunar : laboratuvarında alınan tayflarla karşılaştırma yaparak soğurma çizgilerini oluşturan elementler tanınabilir. İkinci olarak bir çizginin şiddetinin doğal olarak onu meydana getiren soğurucu atomların sayısına bağlı olduğunu varsayarak, bir nicel analiz yapma imkanı doğar. Diğer taraftan Saha ve Boltzmann yasalarına göre, bir elementin belli bir iyonlaşma ve belli bir uyarılma erkesine karşılık gelen bir frekansta soğurabilen **atomların sayısı**, **elektron basıncına** ve **sıcaklığa** bağlıdır. **Sonuç olarak tayf çizgilerinin varlığı ve şiddeti, bir yıldız atmosferinin bu iki temel parametresi hakkında da bilgi verebilir.**

**İki şekilde bilgi edinilebiliyor :**

- 1-)  $I = f(v - v_0)$  grafiğinden, yani profilden
- 2-) **Toplam şiddet (eşdeğer genişlik)'ten**

## 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

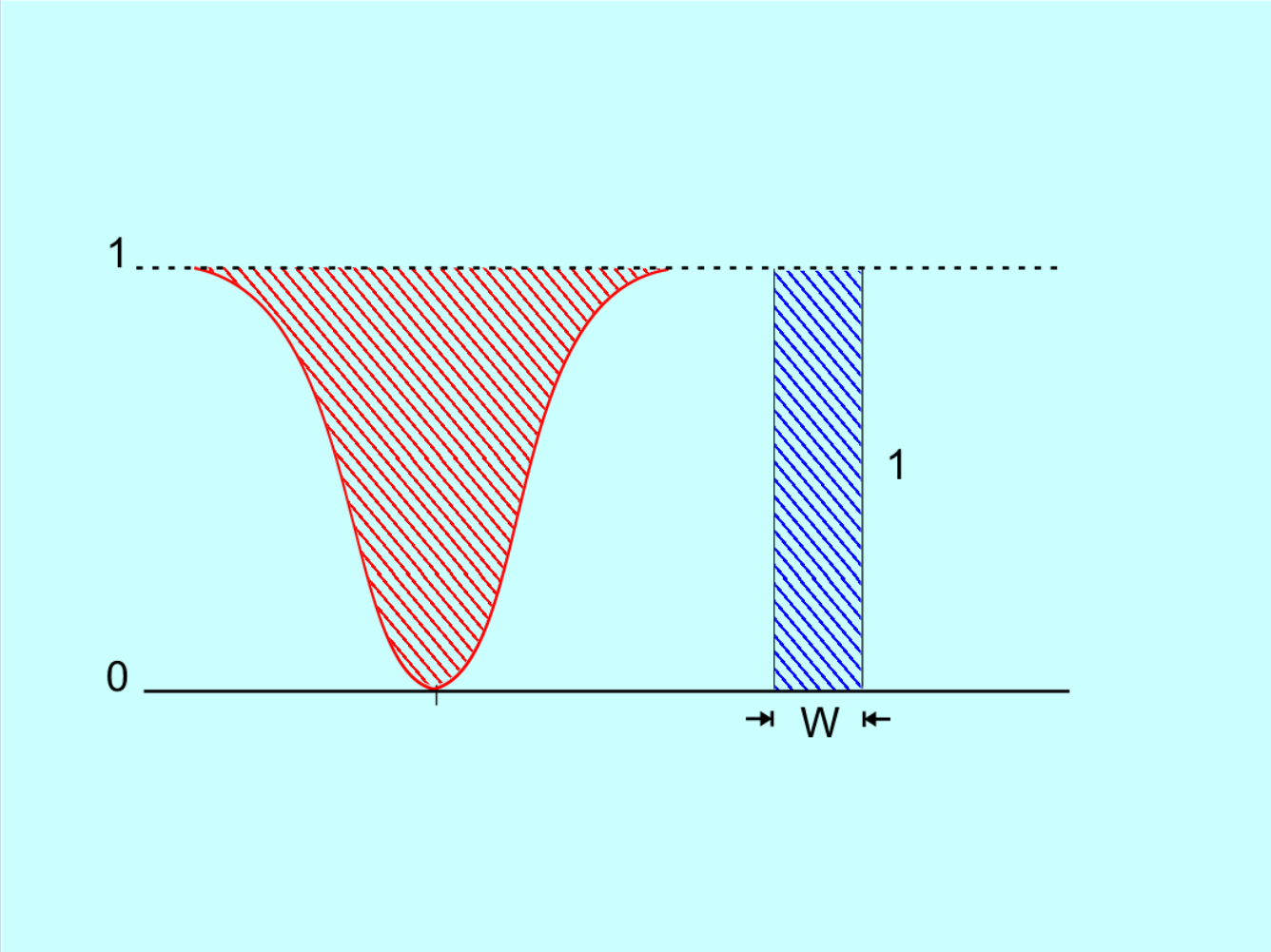
Birinci yöntem kuramsal olarak daha çok bilgi verir ama uygulamada, zayıf ve orta şiddetteki çizgilere uygulanması sakıncalıdır. Çünkü tayfçelerin ayırma gücü sınırlı olduğundan çizginin gerçek profilini aletsel profile çevirir.

İkinci yöntem ise aletlerin sınırlı gücünden çok daha az etkilendiğinden daha çok kullanılır.

Bir **sürekli tayf üzerinde** zayıf (yeğlinliği az olan) bir soğurma çizgisi düşünelim. Bu çizginin eşdeğer genişliğini ölçerek yeğlinliği hakkında bilgi edinilebilir. Onun yeğlinliğini **W eşdeğer genişliği** olarak belirleyebiliriz. Eşdeğer genişlik, dikdörtgen kesitli tamamen siyah bir çizginin genişliğidir (bkz. Şekil 14.1). Çizgi kesitinin her bir noktasında  $I_v / I_o$  ölçülür ve **frekans birimlerinde eşdeğer genişlik şöyle tanımlanır** :

$$W_v = \int \frac{I_o - I_v}{I_o} \cdot d\nu \quad \dots(1)$$





Şekil 14.1. Bir tayf çizgisinin şiddeti ve eşdeğer genişliği.

## 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Bir ışık demetinin, uzunluğu  $h$ , yoğunluğu  $\rho$  ve soğurma katsayısı  $k$  olan bir ortamdan geçtiğinde,

$$I = I_0 e^{-hk\rho} = I_0 e^{-hN\alpha}$$

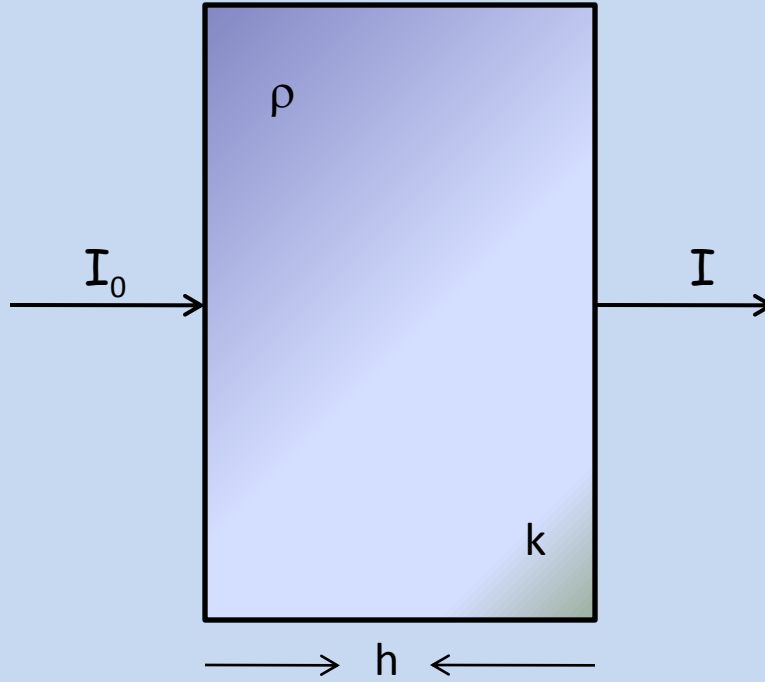
yasasına göre yeğlinliği azalacaktır (bkz. Şekil 14.2). Burada,  $N$  cm<sup>3</sup> deki atom sayısı ve  $\alpha$ , atom başına soğurma katsayısıdır.  $k$  ve  $\alpha$  nın her ikisi de frekansa bağlıdır. Eğer katmanın optik kalınlığı küçük ise,  $I$  yeğlinliği,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

gibi seriye açılabilir ve

$$I = I_0 (1 - hN\alpha + \text{küçük terimler})$$

şeklinde yazılabilir. Eğer  $\nu_0$  frekansında atom başına  $f$  osilatörü varsa ve  $f$  göz önüne alınırsa,



Şekil 14.2. Soğurma nedeniyle ışınım şiddetindeki azalma.

## 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

$$\int_0^{\infty} \alpha_{\nu} d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} \cdot f \quad \text{ve} \quad \bar{k} = \frac{\pi e^2}{mc} Nf$$

idi. Buradan

$$\rho h \int k d\nu = hN \int \alpha d\nu = hN \frac{\pi e^2}{mc} f = \int \frac{I_o - I_{\nu}}{I_o} d\nu = W_{\nu}$$

Dalgaboyu birimleri cinsinden,

$$W_{\lambda} = \frac{\lambda_o^2}{c} W_{\nu} \quad \dots (2)$$

ve

$$W_{\lambda} = hN \lambda_o^2 \frac{\pi e^2}{mc^2} f \quad \dots (3)$$

elde edilir.

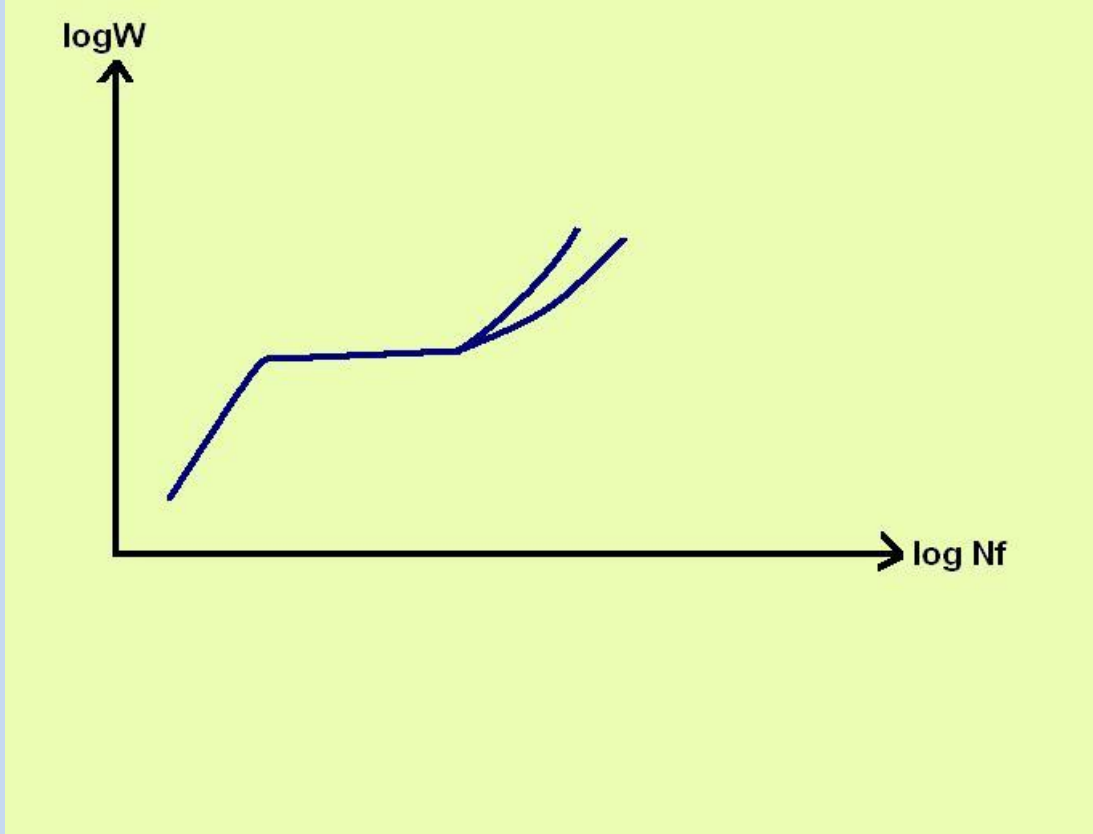
# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Buradan, eğer  $N$  gaz basıncından ( $P = NkT$ ) bulunabilir ve  $W_\lambda$  ölçülebilirse, söz konusu  $\lambda$  için  $f$  nin salt değeri elde edilebilir. Bazı durumlarda  $N$  bilinmeyebilir. Eğer  $N$  bilinmiyorsa  $f$  nin yalnızca görelî değerleri olan  $Nf$  değerleri bulunabilir. Zayıf çizgilerin kullanılması gerektiği unutulmamalıdır.

Uygulamada ideal koşullarda soğurucu gaz katmanı (bütün dalgaboylarındaki optik derinliği 1 den çok küçük olan) bulmak zordur, ve  $W - Nf$  bağıntısının (büyüme eğrisi) doğrusallığından sapmalara göz yumulur. Şekil 14.3 de büyüme eğrisinin grafiği gösterilmektedir.

**Büyüme eğrisinin önemi** :  $f$  lerin deneysel ölçümü için tek yoldur.  $f$  nin saptanması kuantum kuramının bir bakıma denetlenmesidir ve soğurma miktarının hesaplanmasıdır.

Bir çizginin profilinden bilgi elde etmek için önce bir model atmosfer oluştururlur. Sonra sürekli tayfta olduğu gibi ışınım geçiş denklemi çizgiyi içine alan frekans aralığında çözülerek  $I_\nu(0, \theta)$  fonksiyonu bulunur. Bu şekilde diskin her noktası için kuramsal profil saptanır ve bu, gözlemsel profil ile karşılaştırılır. Tabii bu Güneş için mümkündür.



Şekil 14.3. Büyüme eğrisi.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Yıldızlarda ise,

$$F_{\nu}(0) = \int_{\omega} I_{\nu}(0, \theta) \cos \theta d\omega$$

bulunup, gözlenmiş profillerle karşılaştırılır.

Yıldız modeli, gözlemlerle hesap arasında en iyi uyum sağlanıncaya kadar değiştirilirse, hangi atmosfer modelinin gerçeğe yakın olduğu söylenebilir.

**Şimdi şu sorulara yanıt arayalım :**

- 1- Soğurma çizgileri hangi tabakalarda (ters çeviren tabakada veya bütün atmosferde) ve hangi mekanizma ile (soğurma veya saçılma) oluşmaktadır ?
- 2- Bir çizgi bize bir elementin bolluğu hakkında ne gibi bilgiler verir ve bunu elde etmek için kullanılan yöntemler ve atmosferdeki koşullar nelerdir ?

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Önce biliyoruz ki sürekli soğurmaya neden olan katmanlar **çizgi oluşumuna da katkıda bulunurlar**. Bir başka deyişle **çizgideki bilgi bütün katmanların toplamıdır**.

Işınım geçiş denkleminin çizgi soğurma katsayısı da göz önüne alınarak çözümü matematik olarak mümkün değildir. Çünkü  $l_v$ ,  $\kappa_v$  ve  $\alpha_v$  nün  $\tau$  ya bağlılığı bilinmiyor. Ancak bazı basitleştirmeler ve  $l_v$ ,  $\kappa_v$  ve  $\alpha_v$  nün  $\tau$  ya bağlılığı için varsayımlar yapılarak çözüme gidilir. Bu varsayımlar değişik yıldız atmosferi modellerinin yapımına götürür. Çeşitli modellere dayanarak hesaplanmış çizgi profillerinin gözlenmiş olanlarla karşılaştırılması, bu modellerden hangisinin gerçeğe daha yakın olduğunun söylemeye imkan verir.

## 14.1 Bir Çizginin Şiddetini Belirleyen Parametreler :

Bir yıldızda belli bir elementin X atomu vardır. Bunlardan sadece belli bir yüzdesi çizginin oluştuğu frekansta soğurma yapabilir :

- Önce çizgiye ait iyonlaşmış durumdaki atomların yüzdesini bulmak gerekir. Bu oran (yüzde)  $T$  ve  $P_e$  ye bağlıdır (**Saha yasası**).
- İyonlaşmış durumda bulunan bu atomlardan sadece çizginin oluştuğu geçişin alt düzeyinde bulunan atomlar o çizgide soğurma yapabilirler. **Bu atomların yüzdesi de Boltzmann yasası ile bulunur**.



# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Yani bir elementin yıldızda bulunan X atomlarının o özel iyonlaşma ve uyarılma durumunda bulunanları verilen çizgide soğurma yapmaya muktedirdir. Bu yüzden de Saha ve Boltzmann yasaları ile bellidir, ancak bu yasalar termodinamik dengede geçerli olduğundan yıldız atmosferlerinin bu dengeden fazla ayrılmadığı kabul edilir.

Ayrıca bir elementin yıldızda bulunan X atomlarının sadece yıldızın atmosferindekiler yani ışınımın kaçabildiği yüzey tabakalarındaki soğurma çizgilerinin oluşumuna katılıyorlar. Yıldızlardaki donukluk kaynağı hemen hemen sadece Hidrojen atomunun serbest – serbest ve bağlı – serbest geçişleri olduğundan, daha sıcak yıldızlarda (B, A), H hemen hemen tamamen iyonlaştığı için, Güneş tipi yıldızlardan çok daha donuktur. Farklı türdeki yıldızların atmosferik derinlikleri arasındaki bu farklılıklar çizgilerin şiddetleri üzerinde çok etkili olacaktır.

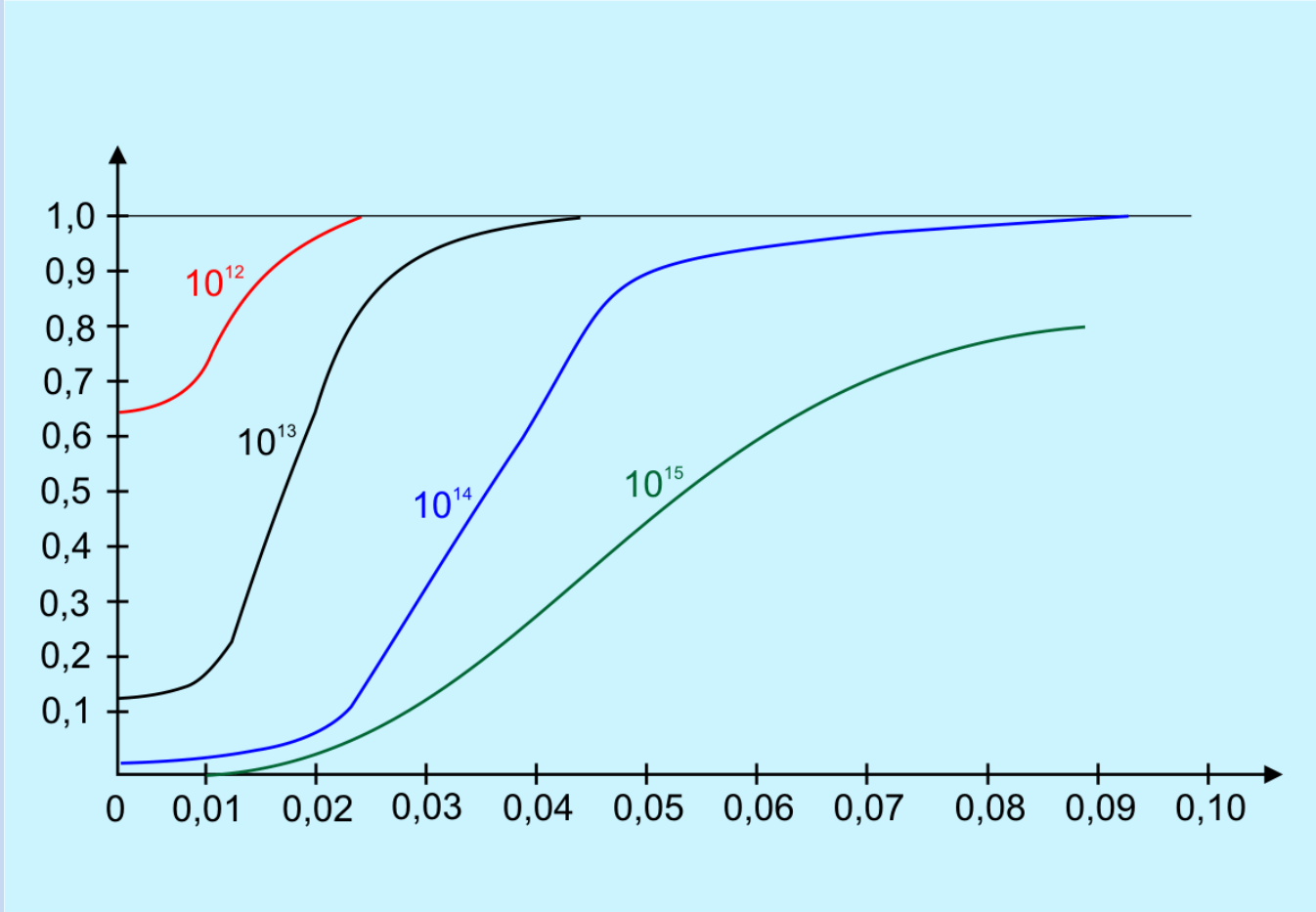
Sonuç olarak, atmosferik derinliği donukluğa bağlı olarak belirlenmiş bir yıldız için eğer biz bir çizginin şiddetini, soğurucu atomların N sayısının değişmesine bağlayan yasayı bilirsek, gözlenen şiddetten N yi ve N den de Saha ve Boltzmann yasalarıyla ( T ve  $P_e$  nin bilindiği varsayımı ile ) atmosferde bulunan elementlerin atomlarının toplam sayılarını bulabiliriz.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Bir çizginin toplam şiddetinin soğurucu atomların sayısına bağlı değişimini veren yasaya **BÜYÜME EĞRİSİ** denir.

Büyüme eğrisinin anlamı nedir ? Bir yıldız atmosferine bir elementin, örneğin Fe nin gittikçe daha çok sayıda atomlarını soktuğumuzu varsayalım. Fe I in **4045.80** çizgisinin durumu incelenirse şu özellikler gözlenir :

Atom sayısı az iken,  $N\alpha_v \ll 1$ , çizgi süreklilik üzerinde çok küçük bir çökme olarak görülür. Atom sayısı arttıkça çizgi hafifçe genişler ve derinleşir. **SS** modelinde (**SS** : Schuster – Schwarzschild) ve tamamen saçan bir atmosferde, merkezi şiddet sıfıra yaklaşır. Sonra oldukça geniş bir  $N\alpha_v$  aralığı için eşdeğer genişlik, **N** nin artmasıyla yavaşça artar. **N** artmaya devam ederse, sönmüleme bölgesinde soğurma önemli hale gelir ve çizginin kanatları genişler. Eğer teorik profiller **N** nin  $N = 10^{12}$ ,  $10^{13}$ ,  $10^{14}$ ,  $10^{15}$  değerleri için hesaplanırsa Şekil **14.4** te gösterilen durumlar elde edilir.  $N = 10^{13}$  te sönmüleme nedeniyle kanatlar hafifçe görülmeye başlar. **N** daha da artarsa eşdeğer genişlik yine artar ama bu kez  $\sqrt{N}$  ile orantılı olarak artar.



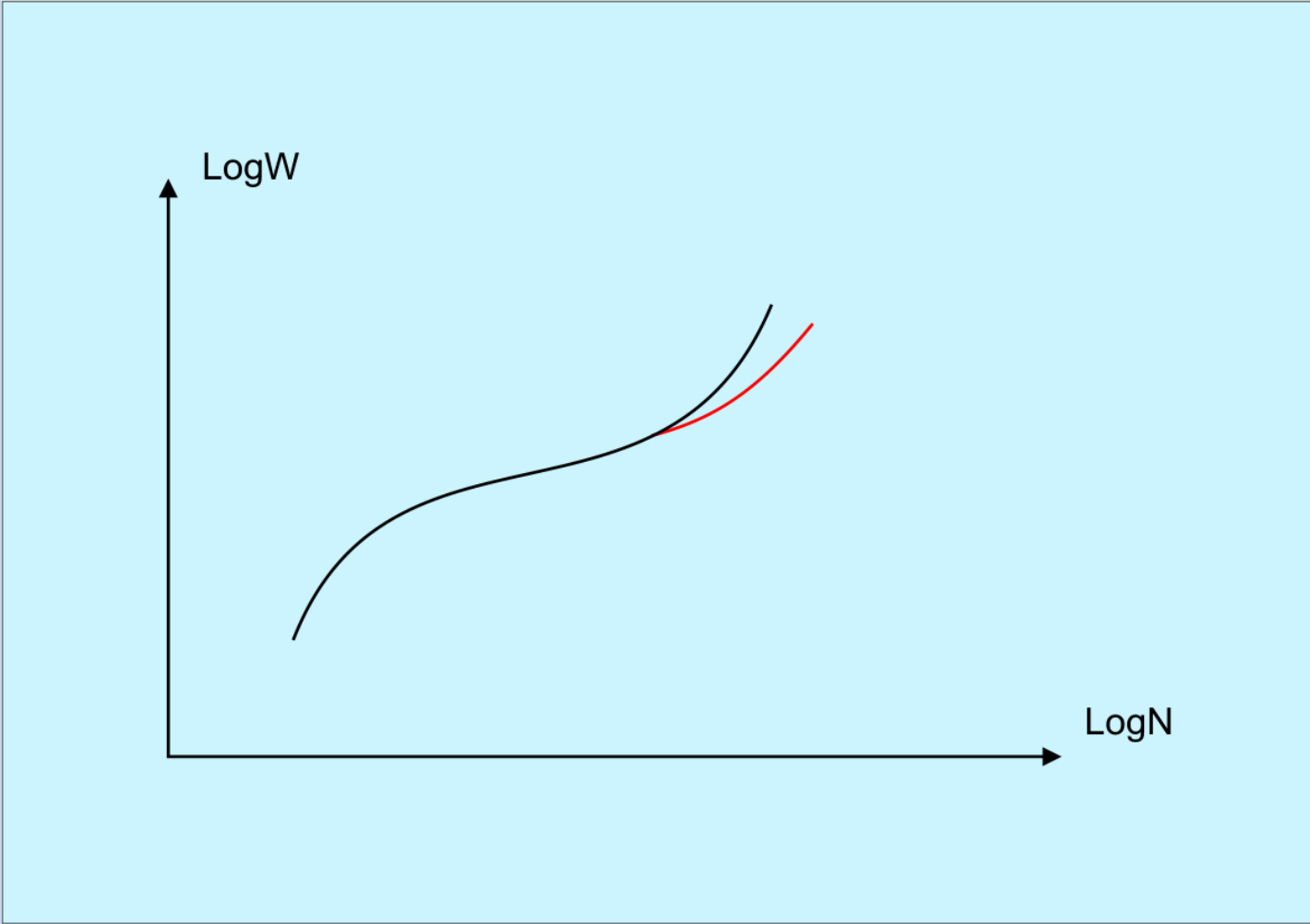
Şekil 14.4. Atom sayısına bağlı çizgi şiddetindeki değişim ve doymuş çizgi profili.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Eğer **profillerin alanları ölçülür** ve **N** nin **fonksiyonu** olarak işaretlenirse, **örneğin Fe I in 4045.80 çizgisi için büyüme eğrisi elde edilir**. Belli bir  $N_0$  (=  $10^{13}$ ) değerine kadar **W**, **N** ile orantılı olarak artar. Bu kola Doppler kolu denir ve **N** nin bu değerleri için çizginin kanatları yoktur. **Profil Doppler profilidir**. Sonra bir aralıkta **N** nin artmasıyla, **W** hemen hemen sabit kalır ; **N** daha da fazla artarsa **W** yine artmaya başlar ama  $\sqrt{N}$  ile orantılı olarak artar (Şekil 14.5).

Pratikte tek bir çizgi için  **$\log N \alpha_\nu$**  ve  **$\log W$**  arasındaki bağıntı ile ilgilenilmez. Genelde verilen bir elementin, verilen bir düzeyinden geçişlerle oluşan çizgilerin **W leri** ölçülür. Bu çizgilerin **f** değerleri gerek teorik, gerekse deneysel çalışmalarla bulunmaktadır. Böylece  **$\log f$**  lere karşılık  **$\log W$**  leri işaretleyerek **gözlemsel büyüme eğrisi** elde edilir. **Şimdi işin uygulamasına geçmeden önce büyüme eğrisinin teorisini kısaca görelim.**

Bir çizginin teorik olarak profilinin elde edilmesi bu çizginin  **$\nu$  frekansı** civarında geçiş denkleminin çözümü ile mümkün. Ancak çeşitli yaklaşımlar ve modellerle problemin çözümüne gidilmiştir :



Şekil 14.5. Büyüme eğrisinde sönümlenme kolları.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Menzel'e göre eğer bir çizgi, **SS** modeline uygun ve **sırf soğurma** ile olmuşsa

$$1 - R_v = \frac{I_v}{I_{vs}} = e^{-\tau_v} = e^{-N\alpha_v}$$

yazılabilir ( **N** ; 1 cm<sup>2</sup> tabanlı, **h** yüksekliğinde bulunan **soğurucu atomların sayısıdır**,  
ve

$$\tau_v = -\int_h^0 \kappa_v \rho dx = \kappa_v \rho h$$

dir). **I<sub>v</sub> / I<sub>vs</sub>** gözlemlerle bulunup gözlemsel profil elde edilebilir. **α<sub>v</sub> teorik olarak hesaplanırsa teorik I<sub>v</sub> / I<sub>vs</sub> değerleri hesaplayıp elde edilen teorik profili gözlenmiş profil ile karşılaştırarak N değeri belirlenebilir.**

Ancak bir çizgi **sırf soğurma** ile meydana gelmiyor. Hem saçılma ve hem soğurma için **Minnaert deneysel bir formül** veriyor :

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{\alpha_v N} + \frac{1}{R_o}$$

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

**Menzel** çizginin **sırf saçılma** ile meydana geldiği zaman **çizgi derinliğinin SS modelinde** şu şekilde olduğunu gösteriyor ;

$$\frac{I_{\nu}}{I_{\nu_s}} = \frac{1}{1 + N\alpha_{\nu}}$$

Bu durumda (**çizgi simetrik**),

$$W_{\nu} = \int_0^{\infty} R d\nu = \int_0^{\infty} \frac{N\alpha_{\nu}}{1 + N\alpha_{\nu}} d\nu$$

Burada  $\alpha_{\nu}$  için **yaklaşık bir formül** kullanırsak :

$$\alpha_{\nu} = \frac{\pi e^2}{mc} f \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{c}{\nu_o \nu_o} e^{-\left(\frac{c}{\nu_o}\right)^2 \left(\frac{\nu - \nu_o}{\nu}\right)^2} + \frac{\gamma}{4\pi^2 (\nu - \nu_o)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \right]$$

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Bu yaklaşımda, çizginin merkezinde yalnız Doppler etkisi (çünkü  $\alpha_v(\text{Doppler}) \gg \alpha_v(\text{sönümlenme-damping})$ ), kanatlarda ise yalnız sönümlenme etkisi göz önüne alınmıştır. Böylece ilk terim çizginin merkezi kısmında, ikinci terim kanatlarda kullanılmıştır.

$$X_o = \frac{N\pi e^2}{mc} f \frac{c}{\sqrt{\pi v_o v_o}} = N\alpha_o$$

koyarsak,  $X_o$  çizginin merkezindeki soğurmayı gösterir. Burada  $\alpha_o$  sönümlenme sıfır iken çizginin merkezindeki ( $v = v_o$ ) soğurmadır.

1-  $X_o \leq 0.1$  olduğu zaman ( yani zayıf çizgiler için )  $\alpha_v$  eşitliğinin ikinci tarafı ihmal edilebilir.  $W_\lambda$  yı veren yukarıdaki integral alınırsa,

$$\frac{W}{\lambda} \cong \sqrt{\pi} \frac{v}{c} X_o$$

elde edilir.



# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

2-  $X_o \gg 1$  olduğu zaman  $\alpha_v$  nün ilk terimi ihmal edilip  $W_\lambda$  yı veren integral alınırsa

$$\frac{W}{\lambda} \cong \frac{\pi^{1/4}}{2} \left[ X_o \frac{v}{c} \frac{\gamma}{v_o} \right]^{1/2}$$

olduğu bulunur.

3-  $X_o$  'ın ara değerleri için nümerik integrasyon da

$$\frac{W}{\lambda} \cong \frac{2v}{c} (\ln X_o)^{1/2}$$

vermektedir.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

O halde teorik büyüme eğrisi üç kol ile karakterize edilmiş olacaktır :

$$\log \frac{W}{\lambda} \cdot \frac{c}{v} \cong \log \sqrt{\pi} X_o$$

$$\log \frac{W}{\lambda} \cdot \frac{c}{v} \cong \log \left[ 2 \sqrt{\ln X_o} \right]$$

$$\log \frac{W}{\lambda} \cdot \frac{c}{v} \cong \log \frac{\pi^{1/4}}{2} \sqrt{X_o Z}$$

Burada

$$Z = \frac{\gamma}{v} \cdot \frac{c}{v}$$

$$X_o = \frac{\pi e^2}{mc} \cdot \frac{c}{\sqrt{\pi} v_o v_o} \cdot Nf$$

ve  $C$  sabit alarak,

$$\log X_o = \log N + \log f + \log C$$

dir.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Birinci kolda  $W / \lambda$  ,  $Nf$  ile orantılı ve çizgi, sönümlenme kanatları olmayan Doppler profili verir. İkinci kolda  $W / \lambda$  ,  $Nf$  ile çok yavaş artıyor. Doppler merkezi (çekirdek) doymuştur, fakat soğurucu atomlar sönümlenme soğurmasının etkin olması için yeterli miktarda değildir. Düz kol, soğurucu atomların sayısı gazın kinetik sıcaklığına bağlı belli bir değere erişince başlar. Kinetik sıcaklık ne kadar yüksek ise çizginin merkezinden daha da büyük uzaklıklarda soğurma yapabilen atomların sayısı da o kadar büyük olur. Dolayısıyla kinetik sıcaklığın artmasıyla Doppler merkezi (core) daha büyük sayıda atom için doymuş hale gelir. Üçüncü kolda  $W / \lambda$  ,  $(Nf)^{1/2}$  ile orantılıdır ve  $\gamma$  nın farklı değerleri için bir eğri ailesi elde edilir.

Unsöld, atmosfer için SS modelini kabul etti.  $R_v$  için formülü, soğurma çizgilerinin yalnızca saçılma ile meydana gelmediğini hesaba katarak değiştirdi. Yani  $R_o < 1$  idi. Minnaert'in saçılma ve soğurmayı da içeren deneysel olarak bulunduğu ifade şöyledir :

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{NH\alpha_v} + \frac{1}{R_o}$$

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Menzel'in  $N$  ile gösterdiği fotosfer üzerindeki atom sayısı, burada  $NH$  dir.  $H$  fotosferin yüksekliği olduğuna göre  $N$ ,  $1 \text{ cm}^3$  deki atom sayısı,  $NH$  da tabanı  $1 \text{ cm}^2$  ve yüksekliği  $H$  olan bir silindir içindeki atomların sayısıdır. Sırf saçılma halinde  $R_o = 1$  olur ve bu ifade Menzel'in formülüne dönüşür :

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{NH\alpha_v} + 1 \quad , \quad 1 - \frac{I_v}{I_{vs}} = \frac{NH\alpha_v}{1 + NH\alpha_v}$$
$$\frac{I_v}{I_{vs}} = \frac{1}{1 + NH\alpha_v}$$

$R_o < 1$  için Minnaert'in formülü soğurmayı da hesaba katar. Soğurucu atomların sayısı çok küçük ise

$$NH\alpha_v \ll R_o$$

olur ve yukarıdaki eşitlik şu hale gelir :

$$R_v = NH\alpha_v \quad , \quad \frac{I_v}{I_{vs}} = 1 - NH\alpha_v$$

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Eğer **sırf soğurma** halindeki

$$\frac{I_v}{I_{vs}} = e^{-NH\alpha_v}$$

eşitliğini seriye açar ve  $NH\alpha_v$  nin ikinci kuvvetini ihmal edersek,  $NH$  'ın çok küçük olması halinde elde edilen yukarıdaki eşitlik bulunur.

**Wrubel**, farklı  $B_0 / B_1$  değerleri için çeşitli eğri aileleri elde etti. Bunlar **şekil** olarak hemen hemen aynıdır ve **x** eksenini boyunca kaydırılarak çakıştırılabilirler.  $B_0$  ve  $B_1$ ,  $T_0$  ve  $v$  nün bir fonksiyonu olduğundan ve bir yıldız için  $T_0$  **sabit olduğundan**, farklı tayf bölgesinde aynı **log (W / b)** değerine karşılık gelen **log  $\eta_0$**  değerlerindeki farklılık, atmosferik opasitenin  $v$  ile **değiştiğini** gösterir.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

## 14.2. Yıldız Tayflarının Analizinde Büyüme Eğrisinin Kullanımı

Kuramsal büyüme eğrisinin hesaplanmasında sadece Doppler ve doğal genişleme göz önüne alındığından, Balmer çizgilerine veya He çizgilerine uygulanamazlar. Çünkü bunlar Stark etkisine duyarlıdır. Bu iki elementin eşdeğer genişliklerinin yorumu daha sonra tartışılacaktır.

Yukarıda belirtildiği gibi kuramsal olarak hesaplanan büyüme eğrisi

$$\log \frac{W_\lambda}{\Delta\lambda_D} = \log \frac{W_\lambda}{\lambda} \cdot \frac{c}{v_o}$$

değerini  $\log X_o$  in **fonksiyonu olarak** vermektedir. Burada

$$X_o = Na_o = \frac{\sqrt{\pi}e^2}{mc} \cdot Nf \cdot \frac{1}{\Delta v_D} = \frac{\sqrt{\pi}e^2}{mc} \cdot Nf \frac{c}{v_o v_o}$$

olup  $v_o$  çizgiyi oluşturan atomların ortalama rasgele hızıdır.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Bir yıldızın tayfındaki çizgilerin eşdeğer genişliklerinden gözlemsel büyüme eğrisini bulalım. Tek bir çizgi ile büyüme eğrisinin elde edilemeyeceği açıktır. Çünkü bir çizgi için  $N_i f_i$  nin tek bir değeri vardır. Büyüme eğrisi elde etmek için bir dizi  $N_i f_i$  değeri için gözlenmiş  $W_\lambda$  lar gerekmektedir. Böyle bir bağıntı, merkez dalgaboyu  $\lambda_o$  ları hemen hemen aynı,  $N_i$  leri aynı fakat  $f_i$  leri farklı çizgilerden bulunabilir. Her  $f_i$ , büyüme eğrisinde farklı bir nokta verir. Bir “multiplet (yani çoklu)” bu özellikleri sağlayan çizgiler verir.  $X_o$  'ı şöyle yazabiliriz :

$$\log X_o = \log C + \log N_i + \log f_i$$

$$\text{Burada } C = \frac{\sqrt{\pi} e^2}{mc} \cdot \frac{\lambda_o}{v_o} = \text{sabit}$$

**Çoklunun (Multipletin) her çizgisi için  $W_\lambda$  ölçülür.** Sonra  $\log (W_\lambda / \lambda)$  ,  $\log f_i$  ye karşı noktlanır. Bu şekilde bir dizi nokta elde edilir.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Ancak genellikle bir **çoklu (multiplet)** tam bir büyüme eğrisi verecek kadar çizgiye sahip değildir ve **başka çoklular da** kullanılmalıdır. Bu farklı çoklular büyüme eğrisinin farklı kısımlarını verirler. Ancak **her kısım yatay eksen boyunca diğerine göre kaymış** olur. Bu **kısımlar yatay eksen boyunca paralel kaydırılıp çakıştırılarak** tek bir büyüme eğrisi elde edilir.

Şimdi bu gözlemsel büyüme eğrisini kuramsal eğri ile karşılaştıralım. Kuramsal eğride dikey eksen  $\log [(W_\lambda / \lambda)(c / v_o)]$ , yatay eksen  $\log X_o$  dir. Bu iki eğri, yatay ve dikey kaydırmalarla çakıştırılabilir. Dişey kayma miktarı  $\log (c / v_o)$  'ı verecektir. Buradan  $v_o$  hızı hemen hesaplanır. Bulunan bu değeri en olası ısıl hız  $v_{ISI} = (2kT / m)^{1/2}$  ile karşılaştırılır ( T uyarma sıcaklığıdır). Çoğunlukla  $v_{ISI} < v_{BE}$  bulunmaktadır. Bunun için atmosferde ek bir “çalkantı hızı = mikrotürbülans” olduğu varsayılır ve,

$$v_o = \left( \frac{2kT}{m} + v_{cal}^2 \right)^{1/2}$$

den  $v_{cal}$  hızı da hesaplanır. Kuramsal eğri ile gözlemsel eğri arasındaki yatay fark,  $N_i$  değerini verecektir. Çünkü dikey kaydırmadan  $v_o$  ve dolayısıyla C bilinmektedir.



# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Büyüme eğrisinin daha doğru kullanma biçimi,  $N_i$  için Boltzmann dağılımını kullanmaktır.

$$N_i = N_{r,i} = \frac{N_r}{U_r(T)} \cdot g_i e^{-\chi_i/kT}$$

$N_r$  , r defa iyonlaşmış atomların sayısı,  $g_i$  alt düzeyin istatistik ağırlığı,  $\chi_i$  uyarma potansiyeli,  $T$  uyarma sıcaklığı,  $U_r(T)$  ise bölünme fonksiyonudur.

$$\log X_o = \log \left[ \frac{\sqrt{\pi} e^2}{mc} \cdot N_i f_i \cdot \frac{\lambda_o}{v_o} \right]$$

$$\log X_o = \log \left[ \frac{\sqrt{\pi} e^2}{mc} \cdot \frac{N_r g_i f_i \lambda_o}{v_o} \frac{e^{-\chi_i/kT}}{U_r(T)} \right]$$

$$= \log \left[ \frac{\sqrt{\pi} e^2}{mc} \cdot \frac{N_r}{U_r(T)} \cdot \frac{1}{v_o} \right] + \log(g_i f_i \lambda_o) - \frac{\chi_i}{kT} \cdot \log e$$

$$= \log[C] + \log g_i f_i \lambda - \chi_i \theta_{exc}$$

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

Burada  $\theta = 5040 / T_{exc}$  ,  $\chi_i$  artık eV birimindedir. Gözlemsel büyüme eğrisi elde etmek için her çizgiye ait  $\log (W_\lambda / \lambda)$  yı  $(\log gf\lambda - \chi_i \theta)$  ya karşı noktalanır. Farklı çizgilerin aynı bir eğri oluşturması için en uygun  $\theta$  seçilir (ortalama etrafında en az saçılmayı veren  $\theta$ ). Bu uyarma sıcaklığını verecektir ve çizgi oluşturan bölgeyi temsil eden sıcaklıktır. Farklı çizgiler farklı derinlikte oluşmuş ise tek  $\theta$  bulmak mümkün olmayabilir.

Yukarıda belirtildiği gibi yine kuramsal eğriye göre dikey kaydırma  $v_o$  'ı verecektir. Yatay fark ise

$$\log X_o - [\log gf\lambda - \chi\theta] = \log C$$

yi verecektir. Buradan da  $N_r$  hesaplanır. Tabii  $U_r(T)$  yi yerine koymak koşulu ile.

Düşey ve yatay kaydırmalarda büyüme eğrisinin lineer ve düz kısımları kullanılır. Bir dizi hesaplanmış büyüme eğrilerinden, gözlenen ve hesaplanan "sönüm bölgesi"nin karşılaştırılması da

$$z = \frac{\gamma}{v} \cdot \frac{c}{v}$$

yi verecektir.  $c / v$  önceden bulunduğu göre buradan  $\gamma$  hesaplanır, bu da kuramsal  $\gamma$  ile karşılaştırılabilir.

# 14. BÜYÜME EĞRİSİ(Devamı)

**Not :** Belli bir  $L$  (toplam açısal momentum) ve  $S$  (spin moment) için atomik enerji düzeyleri  $J$  nin farklı değerlerine göre ince yapı düzeylerine bölünürler.  $J$  nin değerleri  $S$  nin  $L$  ye göre yönelmesine bağlıdır. İki ana düzeyin ince yapı düzeyleri arasındaki geçişlerle meydana gelen çizgiler bir çoklu (multiplet) oluşturur.

# Thomas – Kuhn Toplama Kuralı

Bu kural  $f$  osilatör yeğinliklerine ilişkindir. Bir atom için osilatör yeğinlikleri, Thomas – Kuhn toplama kuralı olarak adlandırılan çok önemli bir bağıntıyı sağlarlar. Bu bağıntı (kural) şöyledir : Eğer tüm olası dizilişler (konfigürasyonlar) arasındaki tüm olası geçişler için  $f$  lerin toplamını alacak olursak, atomdaki elektronların sayısını elde ederiz. Buna göre  $n\ell$  düzeyinden  $n'\ell'$  düzeyine geçişler için,

$$\sum f(n\ell ; n'\ell') = N \quad \dots\dots(1)$$

Burada  $N$ , atom ya da iyondaki elektronların sayısıdır ( $N$  : elektron sayısı). Örneğin demirde tüm optik ve X-ışın geçişleri için  $f$  değerlerinin tam bir toplamı 26 olacaktır.

Eğer daha iç kabuklardaki elektronlar çok sıkı bağlı iseler, onlar arasındaki etkileşmeleri onların dıştaki valans (değerlik ya da serbest) elektronlarla etkileşmelerini göz önüne almak gerekmez. Bu durumda toplam, genellikle değerlik elektronlar (dış yörüngedeki elektronlar) olduğundan,

$$\sum f(n\ell ; n'\ell') = r \quad \dots\dots(2)$$

yazılabilir. Burada  $r$  değerlik (valans) elektronların sayısıdır ve toplam, geçişlerin olabileceği tüm düzeyler için yapılmıştır.

Bu kuralı hidrojene uygularsak ;

Balmer serisi için : 2 nci düzeyden daha üst bir  $n$  düzeyine geçiş için  $f_{2n}$  değerleri aşağıda bir çizelge halinde verilmektedir .

# Thomas – Kuhn Toplama Kuralı(Devamı)

$$H_{\alpha} : f_{2,3} = 0.641$$

$$H_{\beta} : f_{2,4} = 0.119$$

$$H_{\gamma} : f_{2,5} = 0.045$$

$$H_{\delta} : f_{2,6} = 0.022$$

$$H_{\varepsilon} : f_{2,7} = 0.012$$

$$\text{Öbür çizgiler için} : 0.042$$

$$\text{Süreklilik için} : 0.235$$

---

$$\text{Toplam} : 1.116 (!!?)$$

$$f_{nn'} = -\frac{g_{n'}}{g_n} f_{n'n}$$

denklemine göre ;

**Lyman serisi** :  $L_{\alpha} : f_{2,1} = -0.104$  elde edilir. O zaman

$$\Sigma \mathbf{f} = 1.116 - 0.104 = \mathbf{1.012}$$

bulunur. Biz  $\Sigma \mathbf{f} \cong \mathbf{1}$  bekliyorduk ancak elde edilen iyi bir sonuçtur.

# Thomas – Kuhn Toplama Kuralı(Devamı)

Diğer bir örnek olarak  $\text{Na}_{11}$  ' i ele alalım ;

$\text{Na}_{11}$  ' in dizilişi :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$  ;  $\Sigma f = 1$  alacağız.

-----  
Dolu olduğundan  
göz önüne alınmaz

**Ölçülen değerler** ise ;

**Temel düzey** :  $3^2S_{1/2} \rightarrow 3^2P_{1/2}$  ( $\lambda 5896$ ) :  $f = 0.328$   
 $3^2S_{1/2} \rightarrow 3^2P_{3/2}$  ( $\lambda 5890$ ) :  $f = 0.654$   
 $3^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2,3/2}$  ( $\lambda 3302$ ) :  $f = 0.014$   
 $3^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2,3/2}$  :  $f = 0.0024$   
 $3^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2,3/2}$  :  $f = 0.0007$

---

**Toplam**

**= 0.9991**

**bulunur.**

## Thomas – Kuhn Toplama Kuralı(Devamı)

Şimdi bu  $\Sigma f(n\ell ; n' \ell') = r$  kuralını **soğurma osilatör yeğinlikleri** cinsinden yazmak istersek ; sonuçlarımız, **soğurma osilatör yeğinlikleri cinsinden** ifade edilerek ,

$$\underbrace{\sum_{n''} f_{nn''}}_{\text{soğurma}} - \underbrace{\sum \frac{g_{n'}}{g_n} f_{n'n}}_{\text{salma}} + \underbrace{\int_0^{\infty} f_{nR} dR}_{\text{süreklilik soğurması}} = r \quad \dots(3)$$

Sol tarafta yazılan **ilk terim n düzeyinden soğurmaları göstermektedir** ve **toplam n'' > n olan tüm düzeyler için** yapılmıştır (**Şekil**).

**İkinci terim salmaları gösterir** ve **toplam n' < n olan tüm düzeyler için** yapılmıştır. Bu salmalar

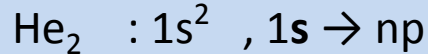
$$f_{nn'} = - (g_{n'} / g_n) f_{n'n}$$

bağıntısından **yararlanarak soğurma cinsinden** ifade edilmiştir.

**Üçüncü terim ise bağlı – serbest soğurmaları** gösterir ve **bu durumda atom elektronunu yitirir**. Yani **bu terim süreklilik soğurması için osilatör yeğinliğini belirtmektedir**.

# Thomas – Kuhn Toplama Kuralı(Devamı)

(3) Denkleminin uygulamasını, helyum çizgilerine uygulayarak gösterelim.  $r$  değerinin seçiminde dikkatli olunmalıdır : örneğin helyum için  $r$ , baş seriler için 2 dir. Çünkü temel düzeyde 2 tane 1s elektronu vardır ve bunların ikisi de daha yüksek bir düzeye geçiş sırasında atlayabilir.



Baş seriler göz önüne alınırsa elektronların her ikisi s düzeyinde oldukları için her ikisi de aynı olasılıkla np düzeyine geçiş şansına sahip olduğundan  $r = 2$  dir.

Ancak başka seriler göz önüne alınırsa ;

Herhangi bir anda daha yüksek bir düzeyde, bunlardan yalnızca bir tanesi bulunacağından, ikinci derece (subordinate) çizgiler için  $f$  değerleri, hidrojeninde olduğu gibi birim olacak şekilde toplanmalıdır. Örneğin  $1p \rightarrow ns$  serisi için  $r = 1$  olacaktır. Zira bir elektron  $1p$  ye uyarılmıştır.



# Thomas – Kuhn Toplama Kuralı(Devamı)

$1s1p \rightarrow$  durumu için, aktif olan elektron  $1p$  düzeyindeki elektron olduğu için  $r = 1$  dir.

Baş seri dışındaki tüm geçişler için  $r = 1$  dir.

Özetle  $He_2$  nin  $(ns^2)$   $r$  değeri için iki durum vardır :

1°) Baş seriler için  $r = 2$

2°) Diğer seriler için  $r = 1$  alınır.

Eğer **tek çoklular (multiplets)** için  $f$  değerleri verilir ve ilgilenilen iki diziliş arasındaki tüm geçiş takımı için uygun  $f$  değerinin bulunması istenirse kolayca  $f$  lerin toplamının ve **her çoklunun** bundan çıkan  $f$  değeri hesaplanır, **sonra tüm dizilişin ağırlığına bölünür**. Kısaca ve başka deyimle ; iki diziliş arasındaki geçiş için  $f$  değerlerini bulma kuralı : Her bir takımın ağırlıklarıyla osilatör yeğinliklerinin çarpımlarının toplamı alınır ve toplam ağırlığa bölünürler.

Balmer serisinin bir çizgisini göz önüne alalım. Bu çizgi  $2^2S - n^2P$  ve  $2^2P - n^2S$ ,  $2^2P - n^2D$  çiftlilerinden oluşur.  $^2S$  teriminin ağırlığı  $g = 2$  ( $L=0, S=1/2, J=1/2$  ;  $g = 2J+1=2$ ),  $^2P$  teriminin ağırlığı ise  $g = 6$  ( $L=1, S=1/2, J=1/2, 3/2$  ;  $g = 2+4 = 6$ ) dir. Aslında bu düzeyler  $s = 1/2, -1/2$  den dolayı tekli değil, ikili düzeylerdir.

# Thomas – Kuhn Toplama Kuralı(Devamı)

$n = 2$  düzeyi **Balmer serisi** olup bu,

$2^2S$  ve

$2^2P$  düzeylerinden oluşur.

O zaman  $\Delta\ell = \pm 1$  **seçim kurallarını uygulayarak** geçişlerin ağırlıkları :

$$2^2S ; \quad 2^2S - n^2P \quad (\Delta\ell = \pm 1) \quad \dots g = 2$$

$$2^2P ; \quad 2^2P - n^2S \quad \dots g = 6$$

$$2^2P - n^2D \quad \dots g = 6$$

ler mümkündür. Görüldüğü üzere **bir seri geçişlerinden oluşacak çizgi aslında birbirine yakın üç çizgidir**, çünkü **3 geçiş söz konusu** olmaktadır. **Öyleyse**,

$$f_{2n} = \frac{1}{8} [2f(2,0;n,\ell) + 6f(2,\ell;n,0) + 6f(2,\ell;n,2)] \quad \dots(4)$$

*genel olarak*

$$f_{2n} = \frac{1}{g_2} \sum_{\ell,\ell'} g_{2,\ell} f(2,\ell;n,\ell') \quad \dots(4')$$

dir. **Ancak değerlik elektronları çok olan atomlar için Thomas – Kuhn kuralı pek uygun sonuçlar vermemektedir.**