ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

AYRIŞIMLARIN KONGRUANS ÖZELLİKLERİ

Göksal BİLGİCİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2007

ÖZET

Doktora Tezi

AYRIŞIMLARIN KONGRUANS ÖZELLİKLERİ

Göksal BİLGİCİ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Ali Bülent EKİN

Pozitif n tamsayısının bir ayrışımı, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ şeklinde pozitif tamsayıların artmayan bir dizisidir öyle ki $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$ dir. n nin ayrışımları sayısı $p(n)$ ile gösterilir. $\Big\{p(n)\Big\}_{n\geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ serisidir ve $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r}$ $(|q| < 1)$ dir.

Ramanujan 1919 yılında $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$, $p(7n+5) \equiv 0 \pmod 5$ ve $p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$ kongruanslarını vermiş ve analitik olarak ispatlamıştır. 1954 yılında $m = 5, 7$ ve 11 modülleri için $p(mn+k)$ formundaki sayıların kongruans özellikleri, Atkin ve Swinnerton-Dyer tarafından hesaplanmıştır. Atkin ve Swinnerton-Dyer temel olarak, $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ serisini, katsayıları y de $(y := q^m)$ kuvvet serileri olan q nun $(m-1)$- dereceden bir polinomu olarak ele almışlardır.

Bu çalışmada, $\prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r}$ sonsuz çarpımı $m = 5,\ 7,$ ve 11 durumları için yukarıda belirttiğimiz tipte bir polinom olarak ifade edilmiştir. Bu polinom ifadeleri kullanılarak kongruans özellikleri farklı bir yolla elde edilmiştir. Bu ifadelere bakıldığında aralarındaki ilişkiler farkedilmektedir. Bu ilişkiler $SL_2(\mathbb{Z})$ modüler grubunun bir kongruans altgrubunun hareketi ile açıklanmıştır. Son olarak, polinom katsayılarını sadeleştirmek için Atkin ve Swinnerton'ın verdiği kullanışlı bir özdeşlik, eliptik fonksiyonlar ve theta fonksiyonları teorileri kullanılarak genelleştirilmiştir.

2007, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler : Ayrışım, rank, crank, modüler form, eliptik fonksiyon, theta fonksiyonları

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CONGRUENCE PROPERTIES of PARTITION

Göksal BİLGİCİ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Ali Bülent EKİN

A *partition* of a positive integer n is a finite nonincreasing sequence of positive integers $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ such that $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. The number of partitions of n is denoted by $p(n)$. The generating function of the sequence $\left\{p(n)\right\}_{n\geq 0}$ is $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ and it is known that $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r}$ $(|q| < 1)$.

In 1919, Ramanujan gave the congruences $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$, $p(7n+5) \equiv 0 \pmod 5$ and $p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$ and proved them analytically. For modulo $m = 5, 7$ and 11 congruence properties of the numbers of the form $p(mn+k)$ were calculated by Atkin and Swinnerton-Dyer in 1954. Basically, Atkin and Swinnerton-Dyer considered the series $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ as a polynomial of degree $m-1$ in q, whose coefficients are power series in y $(y := q^m)$.

In this work, the infinite product $\prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r}$ is expressed as a polynomial of the type stated above, for the cases $m = 5,\ 7,$ and 11. Using these polynomial expressions, we obtained the congruence properties in a completely different way. By looking at these expressions one can realize the relations between them. These relations have been explained by an action of a certain subgroup of modular group $SL_2(\mathbb{Z})$. Finally, an identity given by Atkin and Swinnerton-Dyer, which is very useful to simplify the coefficients of the polynomial expressions, is generalized by using Eliptic functions and theta functions theory.

2007, 75 pages

Key Words : Partiton, rank, crank, modular form, eliptic function, theta functions

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli vaktini ve yardımlarını benden hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam sayın Prof.Dr. Ali Bülent EKİN'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Bu tezi, çalışmalarım süresince fedakarlıklarıyla beni daima destekleyen, bana sınırsızlık kavramını sevgisiyle öğreten, yakın zamanda kaybettiğim biricik eşim, herşeyim Sema'ya atfediyorum.

Göksal BİLGİCİ
Ankara, Temmuz 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	Kalan sınıflarının kümesi
$SL_2(\mathbb{Z})$	Girişleri tamsayı ve determinantları 1 olan matrislerin grubu
U_n	$\mathbb{Z}_n$ halkasının birim grubu
$p(n)$	n' nin ayrışımları sayısı
$F(n)$	n' nin sıralı çarpanlara ayırma sayısı
$D(n)$	n' nin double perfect ayrışımları sayısı
$N(m,n)$	n'nin rankı m' ye eşit olan ayrışımları sayısı
$N(r,m,n)$	n'nin rankı m modülüne göre r' ye kongruent olan ayrışımları sayısı
$N_V(m,n)$	n'nin crankı m' ye eşit olan vektör ayrışımları sayısı
$N_V(r,m,n)$	n'nin crankı m modülüne göre r' ye kongruent vektör ayrışımları sayısı
$M(m,n)$	n'nin crankı m' ye eşit olan ayrışımları sayısı
$M(r,m,n)$	n'nin crankı m modülüne göre r' ye kongruent olan ayrışımları sayısı
F	$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^r}$ sonsuz çarpımı
$\mathbb{H}$	Kompleks üst yarı düzlem
$P(z,q)$	$\prod_{r=1}^{\infty}(1-zq^{r-1})(1-z^{-1}q^r)$ çarpımı
$P(a)$	$\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{m(r-1)+a})(1-y^{mr-a})$ çarpımı
$P(0)$	$\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{mr})$ çarpımı

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bir objeyi alt objelere ayırmak her bilim dalında önemli bir problemdir. Böyle bir problem tamsayıları parçalamaktır. Bir tamsayı iki şekilde parçalanır: çarpımsal ve toplamsal olarak. Bir tamsayıyı toplamsal olarak parçalamak Ayrışım Teorisinin konusudur. Bir ayrışımın ne anlama geldiğini incelemek için 3 sayısını alalım. 3, kaç şekilde bir veya daha fazla pozitif tam sayıya parçalanabilir? 3, tek parça olarak bırakılabilir, 2 bir parça olarak ve kalan 1 de bir parça olarak alınabilir veya 1 büyüklüğünde üç parçaya ayırılabilir. Bu ise yukarıdaki elementer sorunun cevabının;

"3' ün üç tane tamsayı ayrışımı vardır."

olduğunu gösterir.

Tanım 1.1 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > 0$ ve $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$ olmak üzere sonlu λ=$(\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_r)$ dizisine n' nin bir ayrışımı ve bu dizideki her bir λ_i pozitif tamsayısına parça denir. $p(n)$ ile n nin ayrışımları sayısı gösterilir ve $p(0) := 1$ olarak tanımlanır.
Yukarıdaki örnekten $p(3) = 3$ tür.

Örnek 1.1 5' in ayrışımları ($p(5) = 7$);

(5),
(4 1),
(3 2),
(3 1 1),
(2 2 1),
(2 1 1 1),
(1 1 1 1 1)

şeklindedir.

n büyüdükçe $p(n)$ oldukça hızlı büyüyen bir sayıdır. $p(5) = 7$, $p(10) = 42$,

$p(20) = 627$, $p(50) = 204226$, $p(100) = 190569292$ ve $p(200) = 3972999029388$ (13 basamak) dir.

$\Big\{p(n)\Big\}_{n\geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n)q^n$ serisidir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r}, \quad |q| < 1 \tag{1.1}$$

dir (Hardy and Wright, 1938). Bunu izah etmek için $\prod \frac{1}{1-q^r}$ çarpımını q^4 e kadar açalım (bazen kolaylık için $\prod_{r=1}^{\infty}$ gösterimi yerine sadece $\prod$ kullanılacaktır).

$$\begin{aligned}
\prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r} &= \frac{1}{1-q}\ \frac{1}{1-q^2}\ \frac{1}{1-q^3}\ \frac{1}{1-q^4}\cdots \\
&= \left(1+q^1+q^{2.1}+q^{3.1}+q^{4.1}+\cdots\right)\ \left(1+q^{1.2}+q^{2.2}+\cdots\right) \\
&\qquad \left(1+q^{1.3}+\cdots\right)\ \left(1+q^{1.4}+\cdots\right)\cdots \\
&= 1+q^1+\left(q^{2.1}+q^{1.2}\right)+\left(q^{3.1}+q^{1.2+1}+q^{1.3}\right)+ \\
&\qquad \left(q^{1.4}+q^{1.3+1}+q^{2.2}+q^{4.1}+q^{1.2+2.1}\right)+\cdots \\
&= 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+\cdots
\end{aligned}$$

Dikkat edilirse q^i nin sayısı, i nin ayrışım sayısı kadardır.

Euler Pentagonal Sayı Teoremi

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)}(1+q^m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)} \tag{1.2}$$

şeklindedir

(1.1) ve (1.2) kullanılarak bir tamsayının ayrışımlarının sayısını hesaplamak için aşağıdaki formül elde edilir:

$$
\begin{aligned}
p(n) \quad = \quad & p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+\cdots+ \\
& (-1)^m p\left(n-\frac{1}{2}m(3m-1)\right)+(-1)^m p\left(n-\frac{1}{2}m(3m+1)\right)+\cdots
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

(1.3) eşitliği sonsuz bir ifade gibi görünmesine rağmen $n<0$ durumunda $p(n)=0$ olduğundan dolayı aslında sonludur. Şimdi bu formülü kullanarak 11'e kadar olan sayıların ayrışım sayısını hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
& p(0)=1 \\
& p(1)=p(n-1)=p(0)=1 \\
& p(2)=p(1)+p(0)=1+1=2 \\
& p(3)=p(2)+p(1)=2+1=3 \\
& p(4)=p(3)+p(2)=3+2=5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& p(5)=p(4)+p(3)-p(0)=5+3-1=7 \\
& p(6)=p(5)+p(4)-p(1)=7+5-1=11 \\
& p(7)=p(6)+p(5)-p(2)-p(0)=11+7-2-1=15 \\
& p(8)=p(7)+p(6)-p(3)-p(1)=15+11-3-1=22 \\
& p(9)=p(8)+p(7)-p(4)-p(2)=22+15-5-2=30 \\
& p(10)=p(9)+p(8)-p(5)-p(3)=30+22-7-3=42 \\
& p(11)=p(10)+p(9)-p(6)-p(4)=42+30-11-5=56 \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

Pozitif n tamsayısının çok büyük olduğu durumlarda bu formülü kullanmak zor olacaktır. Böyle durumlarda $p(n)$ sayısının hesabı için kullanılan bir yöntem Hardy ve Ramanujan (1918) tarafından verilen

$$
p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}}
$$

formülüdür.

Ayrışımlar ile çarpanlara ayırma arasında güzel bir ilişki vardır. Şimdi bunu açıklayalım:

8 tamsayısı çarpımsal olarak, 8, 4.2, 2.4 ve 2.2.2 şeklinde ifade edilebilir. Bu şekilde çarpanlara ayırmaya sıralı çarpanlara ayırma (ordered factorization) adı verilir. $F(n)$ ile n pozitif tamsayısının sıralı çarpanlara ayrılışları sayısını gösterelim ($F(0) := 0$ olarak tanımlanır).

Bir ayrışım $\lambda = (\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}...\lambda_l^{m_l})$ şeklinde artan bir diziyle de gösterilebilir. Burada m_i' ler λ_i parçasının ayrışımdaki sayısıdır. $\lambda = (\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}...\lambda_l^{m_l})$, n' nin bir ayrışımı olsun. n' den küçük her m tamsayısı $m = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\lambda_i$ $(\alpha_i \in \{0, 1, ..., m_i\})$ şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa λ ayrışımına perfect ayrışım denir. $2 \leq m \leq n-2$ olan her m tamsayısı $m = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\lambda_i$ $(\alpha_i \in \{0, 1, ..., m_i\})$ şeklinde tam olarak iki türlü yazılıyorsa λ ayrışımına double-perfect ayrışım adı verilir. Örneğin 7' nin (1^7), $(1^3\,4)$ ve $(1\,2\,4)$ ayrışımları perfect ve $(1^2\,2\,3)$ ise double-perfect ayrışımdır. $D(n)$ ile n'nin double-perfect ayrışımlarının sayısını gösterelim.

$D(n)$ ile $F(n)$ arasında

$$D(n) = \begin{cases} F(n-1) - F\left(\dfrac{n-1}{4}\right), & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ ise} \\ F(n-1), & n \not\equiv 1 \pmod 4 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bir ilişki vardır (Lee, 2006).

Ayrışımlar cebirin başka konularında da karşımıza çıkmaktadır. Örneğin S_n simetrik grubunun eşlenik sınıflarının sayısı $p(n)$ sayısına eşittir.

Bir ayrışım noktaların bir dizisiyle de gösterilebilir. Örneğin 23 ün (7 5 3 3 2 1 1 1) ayrışımı

Çizelge 1.1 Grafik gösterimi

	8	5	4	2	2	1	1
7	•	•	•	•	•	•	•
5	•	•	•	•	•		
3	•	•	•				
3	•	•	•				
2	•	•					
1	•						
1	•						
1	•						

şeklinde gösterilebilir. Bu gösterime grafik gösterimi veya Ferrer grafiği adı verilir. Bu tablo sütun olarak okunursa 23'ün bir başka ayrışımı (8 5 4 2 2 1 1) bulunur. Bu yöntemle elde edilen ayrışımlara birbirlerinin eşleniği denir. Ayrışımlarla ilgili birçok sonuç grafik gösterimi kullanılarak kolayca ispatlanır.

Ayrışım teorisinin çok ilginç bir hikayesi vardır. Bu hikaye Ortaçağa kadar uzanmasına rağmen ilk önemli sonuçlar onsekizinci yüzyılda bu teorinin kurucusu olarak bilinen Euler tarafından verilmiştir. Bir çok matematikçi bu teoriye katkılarda bulunmuştur. Bunlardan bazıları Legendre, Ramanujan, Hardy, Rademacher, Sylvester, Selberg ve Dyson'dır.

Bu çalışmamızın ana teması 1919 da Hindistan asıllı matematikçi Ramanujan'ın vermiş olduğu

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5} \tag{1.4}$$

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod{7} \tag{1.5}$$

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11} \tag{1.6}$$

kongruanslarına dayanmaktadır.

Hardy ve Ramanujan $p(n)$ sayısını incelerken $n \leq 200$ olmak üzere $p(n)$ değerleri için P.A. MacMahon'ın hazırlamış olduğu tabloyu kullandılar. Bu tabloyu daha okunabilir yapmak için aşağıdaki gibi 5'erli bloklara ayırdılar;

Çizelge 1.2 $n < 30$ için $p(n)$ ayrışım sayısı

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
0	1	10	42	20	627
1	1	11	56	21	792
2	2	$\underline{\underline{12}}$	$\underline{\underline{77}}$	22	1002
3	3	13	101	23	1255
$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{14}$	$\boxed{135}$	$\boxed{24}$	$\boxed{1575}$
$\underline{\underline{5}}$	$\underline{\underline{7}}$	15	176	25	1958
$\underline{\underline{\underline{6}}}$	$\underline{\underline{\underline{11}}}$	16	231	$\underline{\underline{26}}$	$\underline{\underline{2436}}$
7	15	$\underline{\underline{\underline{17}}}$	$\underline{\underline{\underline{297}}}$	27	3010
8	22	18	385	$\underline{\underline{\underline{28}}}$	$\underline{\underline{\underline{3718}}}$
$\boxed{9}$	$\boxed{30}$	$\underline{\underline{\boxed{19}}}$	$\underline{\underline{\boxed{490}}}$	$\boxed{29}$	$\boxed{4565}$

Ramanujan, blokların en sonunda bulunan sayıların ayrışımları sayısının 5'in bir katı olduğunu farketti ve aşağıdaki tahmini yaptı:

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$

Bu beklenmedik ilişkiden sonra tabloyu biraz daha inceleyerek

$$\begin{aligned} p(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7 \\ p(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

kongruanslarını da ekledi. Daha sonra Ramanujan bu üç kongruansı analitik yöntemlerle ispatladı (Ramanujan, 1927). Son olarak Ramanujan bu üç kongruansı aşağıdaki şekilde genelleştirdi:

$\delta := 5^a 7^b 11^c$ ve $24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$ olmak üzere

$$p(\lambda),\, p(\lambda+\delta),\, p(\lambda+2\delta), \cdots \equiv 0 \pmod{\delta}$$

S. Chowla, H. Gupta tarafından verilen genişletilmiş $p(n)$ tablosunu incelerken

$$24.243 \equiv 1 \pmod{7^3}$$

kongruansına rağmen

$$p(243) = 13397825934888 \not\equiv 0 \pmod{7^3}$$

olduğunu farketti. 1938 yılında ise G.N. Watson bu sonucun aşağıdaki şekilde düzeltilebileceğini belirtti (Watson, 1938):

$$24n \equiv 1 \pmod{5^c 7^d 11^e}\ \textit{ise}\ p(n) \equiv 0 \pmod{5^c 7^{[(d+2)/2]} 11^e} \tag{1.7}$$

Bu sonuç son olarak 1967 yılında A.O.L. Atkin tarafından ispatlandı (Atkin, 1967) (Lehner tarafından da farklı yöntemlerle ispatlandı (Lehner, 1949)).

Daha sonra Freeman Dyson tarafından bu kongruansların kombinatorial izahları yapıldı (Dyson, 1944). Sonraki kısımda bunu anlatacağız.

1.1 Rank

F.J. Dyson, Fizik bölümünde öğrenci iken Ramanujan'ın kongruanslarını anlayabilmek için tablolar yapıp, ayrışımları tasnif ederek bir sayma yöntemi bulmaya çalıştı ve $5n+4$ ile $7n+5$ formundaki tamsayıların ayrışımlarını sırasıyla 5 ve 7 eşit parçaya bölen bir sayma yöntemi geliştirdi.

n pozitif tamsayısının bir ayrışımı $\lambda = (\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_l)$ olsun. λ'nın parça sayısı l ve en büyük parçası λ_1'dir. Dyson, λ'nın rankını,

$$rank(\lambda) := \lambda_1 - l$$

olarak tanımlamıştır.

n nin rankı m olan ayrışımları sayısını $N(m,n)$ ile ve n nin rankı m modülüne göre r ye denk olan ayrışımları sayısını ise $N(r,m,n)$ ile gösterelim.

n nin bir ayrışımı $\pi := \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_k$ olsun. $rank(\pi) = \pi_1 - k$ olur. π ayrışımın eşleniği $\pi' = k + \pi'_2 + \pi'_3 + \cdots + \pi'_{\pi_1}$ ve $rank(\pi') = k - \pi_1$ olur. Yani herhangi bir ayrışımın rankı, eşleniğinin rankının ters işaretlisidir. Dolayısıyla

$$N(m,n) = N(-m,n), \qquad N(r,m,n) = N(m-r,m,n) \tag{1.8}$$

yazılabilir ve

$$N(r,m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} N(r+km,n) \tag{1.9}$$

dir.

Şimdi 5, 7 ve 11 sayılarının ayrışımlarını ranka göre tasnif edelim. Burada yapılan şey aynı ranka sahip ayrışımları bir kümeye koymaktır.

Çizelge 1.3 4'ün ayrışımlarının ranka göre tasnifi

4 ün ayrışımı	Rank	Rank mod 5
(4)	3	3
(3 1)	1	1
(2 2)	0	0
(2 1 1)	-1	4
(1 1 1 1)	-3	2

Çizelge 1.4 5'in ayrışımlarının ranka göre tasnifi

5 in ayrışımı	Rank	Rank mod 7
(5)	4	4
(4 1)	2	2
(3 2)	1	1
(3 1 1)	0	0
(2 2 1)	-1	6
(2 1 1 1)	-2	5
(1 1 1 1 1)	-4	3

Çizelge 1.5 6'nın ayrışımlarının ranka göre tasnifi

6 nın ayrışımı	Rank	Rank mod 11
(6)	5	5
(5 1)	3	3
(4 2)	2	2
(4 1 1)	1	1
(3 3)	1	1
(3 2 1)	0	0
(3 1 1 1)	-1	10
(2 2 2)	-1	10
(2 2 1 1)	-2	9
(2 1 1 1 1)	-3	8
(1 1 1 1 1 1)	-5	6

Dyson, Çizelge 1.3 ve Çizelge 1.4' ü kullanarak

$$N(0,5,5n+4) = N(1,5,5n+4) = \cdots = N(4,5,5n+4) = \frac{p(5n+4)}{5}$$
$$N(0,7,7n+5) = N(1,7,7n+5) = \cdots = N(3,7,7n+5) = \frac{p(7n+5)}{7}$$

tahminlerini yaptı. Çizelge 1.5' de görüldüğü gibi 6 sayısının ayrışımları, ranklarına göre kümelere dağıtıldığında rankı 1 ve -1 olan ikişer ayrışım varken diğer kümelere birer ayrışım düşmektedir. Ramanujan'ın son kongruansını ispatmak için, $11n+6$ formundaki sayılara henüz ilk örnek olan 6 için rankın, uygun bir sayma yöntemi olmadığı görülmektedir. Fakat $p(11n+6) \equiv 0 \pmod{n}$ kongruansı ise, ranka benzer bir tasnif yönteminin bulunabileceğini göstermektedir. Bunun üzerine Dyson böyle bir yöntem bulunabileceğini belirterek bu yönteme "crank" adını verdi ve matematikte bir ilki gerçekleştirmiş oldu.

Dyson, ayrıca rankın üreteç fonksiyonunu verdi;

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(m,n)q^n = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{\frac{1}{2}n(3n-1)+mn}(1-q^n). \tag{1.10}$$

(1.9) ve (1.10) kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(r,m,n)q^n = \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^s} {\sum_{n}}' (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)} \frac{q^{rn}+q^{n(m-r)}}{1-q^{mn}} \tag{1.11}$$

bulunur. Burada $\sum'$ sembolü ile n'nin sıfır hariç tüm tamsayı değerleri üzerinden alındığı gösterilmektedir. Dyson ayrıca;

$$\begin{gathered}
N(1,5,5n+1) = N(2,5,5n+1) \\
N(0,5,5n+2) = N(2,5,5n+2) \\
N(0,5,5n+4) = N(1,5,5n+4) = N(2,5,5n+4) \\
N(2,7,7n) = N(3,7,7n) \\
N(1,7,7n+1) = N(2,7,7n+1) = N(3,7,7n+1) \\
N(0,7,7n+2) = N(3,7,7n+2) \\
N(0,7,7n+3) = N(2,7,7n+3), N(1,7,7n+3) = N(3,7,7n+3) \\
N(0,7,7n+4) = N(1,7,7n+4) = N(3,7,7n+4)
\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$N(0,7,7n+5) = N(1,7,7n+5) = N(2,7,7n+5) = N(3,7,7n+5) \qquad (1.13)$$
$$N(0,7,7n+6) + N(1,7,7n+6) = N(2,7,7n+6) + N(3,7,7n+6)$$

tahminlerini yaptı. (1.8) ile (1.12) ve (1.13), Ramanujan'ın (1.4) ve (1.5) kongruanslarını ispatlamaktadır.

Dyson'ın bu iddiaları 1954 yılında A.O.L. Atkin ve P. Swinnerton-Dyer tarafından ispatlandı (Atkin and Swinnerton-Dyer, 1954). Bölüm 2 de Atkin ve Swinnerton-Dyer'ın metodlarını kısaca izah edeceğiz.

1.2 Crank

Dyson'ın crank'ına benzer bir yöntemi 1987 yılında Garvan, doktora tezinde vektörel ayrışım kavramı ile verdi (Garvan,1987).

Tanım 1.2.1 π herhangi bir ayrışım olmak üzere $\#(\pi)$, π nin parçalarının sayısı ve $\sigma(\pi)$, π nin parçalarının toplamı olsun (0 ın, $\emptyset$ ayrışımı için $\#(\emptyset) = \sigma(\emptyset) = 0$).

$V = \big\{(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \mid \pi_1$ parçaları farklı bir ayrışım, π_2, π_3 herhangi iki ayrışım$\big\}$ olmak üzere V nin elemanlarına vektör ayrışımları denir. $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in V$ için

$$\begin{aligned} s(\vec{\pi}) &= \sigma(\pi_1) + \sigma(\pi_2) + \sigma(\pi_3) \\ \omega(\vec{\pi}) &= (-1)^{\#(\pi_1)} \\ r(\vec{\pi}) &= \#(\pi_2) - \#(\pi_3) \end{aligned}$$

$s(\vec{\pi})$, $\vec{\pi}$ nin parçaları toplamı, $\omega(\vec{\pi})$, $\vec{\pi}$ nin ağırlığı ve $r(\vec{\pi})$ ise $\vec{\pi}$ nin crankı şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.2.2 $\vec{\pi} = \Big((5\,3\,2), (2\,2\,1), (2\,2\,1)\Big)$ ise $s(\vec{\pi}) = 19$, $\omega(\vec{\pi}) = -1$, $r(\vec{\pi}) = 0$ ve π, 19 un bir vektör ayrışımıdır.

n nin crankı m olan vektör ayrışımları sayısı $N_V(m,n)$ ile gösterilirse (ω ağırlığına göre sayıldığında)

$$N_V(m,n) = \sum_{\substack{\vec{\pi}\in V\\ s(\vec{\pi})=n\\ r(\vec{\pi})=m}} \omega(\vec{\pi})$$

olur.

Örnek 1.2.3 2 sayısının 8 tane vektörel ayrışımı yazılabilir:

$$\vec{\pi}_1 = (2,0,0) \quad r(\vec{\pi}_1) = 0$$
$$\vec{\pi}_2 = (0,2,0) \quad r(\vec{\pi}_2) = 1$$
$$\vec{\pi}_3 = (0,0,2) \quad r(\vec{\pi}_3) = -1$$
$$\vec{\pi}_4 = (1,1,0) \quad r(\vec{\pi}_4) = 1$$
$$\vec{\pi}_5 = (1,0,1) \quad r(\vec{\pi}_5) = -1$$
$$\vec{\pi}_6 = (0,1,1) \quad r(\vec{\pi}_6) = 0$$
$$\vec{\pi}_7 = (0,(1\,1),0) \quad r(\vec{\pi}_7) = 2$$
$$\vec{\pi}_8 = (0,0,(1\,1)) \quad r(\vec{\pi}_8) = -2$$

Buna göre $N_V(0,2) = \omega(\vec{\pi}_1) + \omega(\vec{\pi}_6) = -1 + 1 = 0$, $N_V(1,2) = \omega(\vec{\pi}_2) + \omega(\vec{\pi}_4) = 1 - 1 = 0$ $N_V(-1,2) = \omega(\vec{\pi}_3) + \omega(\vec{\pi}_5) = 1 - 1 = 0$, $N_V(2,2) = \omega(\vec{\pi}_7) = 1$ ve $N_V(-2,2) = \omega(\vec{\pi}_8) = 1$ dir.

n nin crankı m modülüne göre r ye kongruent olan ayrışımlarının sayısı $N_V(r,m,n)$ ile gösterilirse

$$N_V(r,m,n) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} (N_V(tm+r,n)) = \sum_{\substack{\vec{\pi}\in V\\ s(\vec{\pi})=n\\ r(\vec{\pi})=r \ mod \ m}} \omega(\vec{\pi})$$

olur. π_2 ve π_3 yer değiştirilirse

$$N_V(m,n) = N_V(-m,n)$$

ve

$$N_V(m-r,m,n) = N_V(r,m,n)$$

elde edilir. $N_V(m,n)$ nin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} N_V(m,n)z^m q^n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{(1-zq^n)(1-z^{-1}q^n)} \tag{1.14}$$

şeklindedir (Garvan, 1987). (1.14) de, $z=1$ yazılırsa

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} N_V(m,n) = p(n)$$

elde edilir.

Vektörel ayrışımlar için

$$\begin{aligned}
N_V(0,5,5n+4) &= N_V(1,5,5n+4) = \cdots = N_V(4,5,5n+4)\\
N_V(0,7,7n+5) &= N_V(1,7,7n+5) = \cdots = N_V(6,7,7n+5) \qquad (1.15)\\
N_V(0,11,11n+6) &= N_V(1,11,11n+6) = \cdots = N_V(4,11,11n+6)
\end{aligned}$$

dir ve bu eşitlikleri ispatlamak için aşağıdaki Lemma kullanılır;

Lemma 1.2.4 $t = 5,7,11$ ve $24\delta_t \equiv 1 \mod t$ olmak üzere

$$N_V(0,t,tn+\delta_t) = N_V(1,t,tn+\delta_t) = \cdots = N_V(t-1,t,tn+\delta_t) = \frac{p(tn+\delta_t)}{t} \tag{1.16}$$

olsun. $\zeta_t = e^{\frac{2\pi i}{t}}$ ve

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{(1-\zeta_t q^n)(1-{\zeta_t}^{-1}q^n)} \tag{1.17}$$

olmak üzere t asal sayısı için (1.16) nin doğru olması, (1.17) de $q^{tn+\zeta_t}$ nin katsayısının sıfır olmasına denktir.

Doğru crank 1988 yılında, Garvan ve Andrews tarafından bulundu (Andrews and Garvan, 1988);

Tanım 1.2.5 π herhangi bir ayrışım olmak üzere $l(\pi)$, π nin en büyük parçası, $\omega(\pi)$, π deki birlerin sayısı, $\mu(\pi)$, π nin $\omega(\pi)$ den büyük parçalarının sayısı olsun. π nin crankı;

$$c(\pi) := \begin{cases} l(\pi) & \omega(\pi) = 0 \; ise \\ \mu(\pi) - \omega(\pi) & \omega(\pi) > 0 \; ise \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

n nin crankı m olan ayrışımları sayısı $M(m,n)$ ile ve n nin crankı m modülüne göre r ye kongruent olan ayrışımları sayısı ise $M(r,m,n)$ ile gösterelim.

Teorem 1.2.6 (Andrews and Garvan, 1988) $n > 1$ için $M(m,n) = N_V(m,n)$ dir .

Bu teorem ve (1.15) Ramanujan kongruanslarını ispatlar.

6'nın ayrışımlarını cranka göre tasnif edelim:

Çizelge 1.6 6 sayısının ayrışımlarının cranka göre tasnifi

6 nın ayrışımı	$l(\pi)$	$\omega(\pi)$	$\mu(\pi)$	$c(\pi)$	$c(\pi)$ mod 11
(6)	6	0	1	6	6
(5 1)	5	1	1	0	0
(4 2)	4	0	2	4	4
(4 1 1)	4	2	1	-1	10
(3 3)	3	0	2	3	3
(3 2 1)	3	1	2	1	1
(3 1 1 1)	3	3	0	-3	8
(2 2 2)	2	0	3	2	2
(2 2 1 1)	2	2	0	-2	9
(2 1 1 1 1)	2	4	0	-4	7
(1 1 1 1 1 1)	1	6	0	-6	5

Daha sonra bir crank tanımı da Dyson tarafından verildi (Dyson,1989):

Tanım 1.2.7 $\pi = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{s-1}$, s parçalı ve parçaları artan olmayan sırada yazılan bir ayrışım ve $t = \pi_0 - \pi_1$ olmak üzere

$$crank(\pi) = \begin{cases} -s & t = 0 \; ise \\ t - \pi_t & t > 0 \; ise \end{cases}$$

ve $r \geq s$ ise $\pi_r = 0$ dır.

π ayrışımı için Andrews ve Garvan'ın crankı, π nin eşleniğinin Dyson'ın crankının ters işaretlisidir. Dolayısıyla iki tanım da $n = 1$ hariç $M(m,n)$ için aynı değerleri vermektedir. Bu tanımda $M(0,1) = -1$ ve $M(-1,1) = 1$ düzenlemeleri yapılırsa her m, n için $M(m,n) = N_V(m,n)$ olur. (1.14) den crankın üreteç serisi

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} M(m,n) z^m q^n &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{(1-zq^n)(1-z^{-1}q^n)} \\ &= \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{n(n-1)/2+|m|n} (1-q^n) \quad (1.18) \end{aligned}$$

şeklindedir.

2. $\prod(1-q^r)^{-1}$ ÇARPIMININ KONGRUANS ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Atkin ve Swinnerton-Dyer'ın Ramanujan kongruansları ve Dyson'ın tahminlerini ispatlamak için kullandıkları yöntem izah edilecektir. (1.1) eşitliğini

$$\mathrm{F} := \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r} \tag{2.1}$$

ile gösterelim. Verilen bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için (2.1) eşitliğinde $n = mk + r$ $(0 \leq k < \infty$ ve $0 \leq r < m)$ dönüşümü yapılırsa sol taraf

$$\mathrm{F} = \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(mk+r)q^{mk+r} \right)$$

haline gelir. Şimdi, $y := q^m =$ diyelim. Bu eşitlik ile yukarıdaki kuvvet serisi

$$\mathrm{F} = \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(mk+r)y^k \right) q^r \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. Yani q nun bir kuvvet serisi, katsayıları y de yine kuvvet serileri olan, q nun $(m-1)$- inci dereceden bir polinomu olarak yazılmış oldu. Aynı şekilde (2.1) eşitliğinin sağındaki sonsuz çarpım da q nun bir polinomu olarak yazılabilirse, q nun katsayılarının eşitlenmesi ile $p(mk+r)$ sayılarının kongruans özellikleri bulunabilir. Yani tüm problem $\prod \frac{1}{1-q^r}$ sonsuz çarpımını polinom olarak yazmaktır. (2.2) eşitliği kullanarak

$$\mathrm{F}_m^{(r)} := q^r \sum_{k=0}^{\infty} p(mk+r)y^k, \qquad (r = 0, 1, \cdots, m-1) \tag{2.3}$$

olarak tanımlayalım. $\mathrm{F}_m^{(r)}$ ye F kuvvet serisinin r. bileşeni diyelim. Herhangi bir bileşen yine bir kuvvet serisidir ve $m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\mathrm{F} = \sum_{r=0}^{m-1} \mathrm{F}_m^{(r)}$$

eşitliği açıktır.

F kuvvet serisinin 5, 7 ve 11 modüllerindeki kongruans özelliklerini Atkin ve Swinnerton-Dyer verdiler (Atkin and Swinnerton-Dyer,1954). Bu sonuçları $\prod \frac{1}{1-q^r}$ sonsuz çarpımını belirttiğimiz gibi polinom gibi ifade etmeden hesapladılar. Bunlara geçmeden önce Atkin ve Swinnerton-Dyer'ın notasyonlarını verelim.

Öncelikle

$$(z;q)_\infty := \prod_{r=1}^{\infty}(1-zq^{r-1})$$

ve

$$P(z,q) := [z;q]_\infty := (z;q)_\infty(z^{-1}q;q)_\infty = \prod_{r=1}^{\infty}(1-zq^{r-1})(1-z^{-1}q^r) \tag{2.4}$$

olarak tanımlayalım. $P(z,q)$ fonksiyonu $0 < z_1 \leq |z| \leq z_2$ halka sınırlı bölgesinde tek değerli analitik bir fonksiyondur ve aşağıdakileri sağlar;

$$P(z^{-1}q,q) = P(z,q), \qquad P(zq,q) = -z^{-1}P(z,q) \tag{2.5}$$

$a \nmid m$ olmak üzere, (2.5) kullanarak

$$\begin{aligned} P(a) &:= P_m(a) := P(y^a,y^m) = \prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{m(r-1)+a})(1-y^{mr-a}) && (2.6)\\ P(0) &:= P_m(0) := \prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{mr}) && (2.7)\end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. Burada $P(0)$, $P(a)$ da a yerine sıfır yazılarak elde edilen bir ifade değildir. (2.5) den

$$P(m-a) = P(a),\ P(-a) = P(m+a) = -y^{-a}P(a) \tag{2.8}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülebilir.

2.1 $m = 5$ Durumunda Kongruanslar

İlk olarak $\prod(1-q^r)^3$ çarpımının m modülüne göre polinom olarak yazılışına ihtiyaç olacaktır.

Lemma 2.1.1 (Atkin and Swinnerton-Dyer,1954)

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv P(0)\sum_{c=0}^{(m-3)/2}(-1)^c(2c+1)q^{\frac{1}{2}c(c+1)}P\left(\frac{m-1}{2}-c\right) \pmod{m}$$

Lemma 2.1.1 nin ispatı

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n(n+1)/2} \tag{2.9}$$

Jacobi formülüne dayanmaktadır (Atkin and Swinnerton-Dyer,1954).

$m=5$ için Lemma 2.1.1

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv P(0)\Big\{P(2)-3qP(1)\Big\} \pmod{5} \tag{2.10}$$

ve $y=q^5$ eşitliği

$$(1-q^r)^5 \equiv 1-y^r \pmod{5} \tag{2.11}$$

kongruansını verir.

$$\begin{aligned}
\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r) &= \prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{5r})(1-y^{5r-1})(1-y^{5r-2})(1-y^{5r-3})(1-y^{5r-4}) \\
&= \underbrace{\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{5r})}_{P(0)}\ \underbrace{\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{5r-1})(1-y^{5r-4})}_{P(1)}\ \underbrace{\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{5r-2})(1-y^{5r-3})}_{P(2)} \\
&= P(0)P(1)P(2) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\sum_{b=0}^{4}\mathrm{F}_5^b = \mathrm{F} = \prod\frac{1}{1-q^r} = \frac{\prod((1-q^r)^3)^3}{\prod((1-q^r)^5)^2} \equiv \frac{\{\prod(1-q^r)^3\}^3}{\prod(1-y^r)^2} \pmod{5}$$

kongruansının sağ tarafındaki küme parantezinin içine (2.10) ve paydaya (2.12) yazılırsa

$$\sum_{b=0}^{4}\mathrm{F}_5^b \equiv P(0)\left\{\frac{P(2)}{P(1)^2}+\frac{q}{P(1)}+\frac{2q^2}{P(2)}+3q^3\frac{P(1)}{P(2)^2}\right\} \pmod{5}$$

bulunur ve q'nun karşılıklı kuvvetleri eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
F_5^{(0)} &\equiv \frac{P(0)P(2)}{P^2(1)} \pmod 5 \\
F_5^{(1)} &\equiv q\frac{P(0)}{P(1)} \pmod 5 \\
F_5^{(2)} &\equiv 2q^2\frac{P(0)}{P(2)} \pmod 5 \\
F_5^{(3)} &\equiv 3q^3\frac{P(0)P(1)}{P^2(2)} \pmod 5 \\
F_5^{(4)} &\equiv 0 \pmod 5 \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

kongruansları elde edilir. (2.13), Ramanujan'ın (1.4) kongruansını ispatlar.

2.2 $m = 7$ Durumunda Kongruanslar

$m = 7$ için Lemma 2.1.1

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv P(0)\Big\{P(3) - 3qP(2) + 5q^3P(1)\Big\} \pmod 5 \qquad (2.14)$$

kongruansını verir. $y = q^7$ eşitliği ile

$$(1-q^r)^7 \equiv 1 - y^r \pmod 7 \qquad (2.15)$$

olur ve bu kongruans yardımıyla

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r) = P(0)P(1)P(2)P(3) \qquad (2.16)$$

yazılabilir. 5 durumundaki gibi

$$\sum_{b=0}^{6} F_7^b = F = \prod \frac{1}{1-q^r} = \frac{\prod((1-q^r)^3)^2}{\prod(1-q^r)^7} \equiv \frac{\{\prod(1-q^r)^3\}^2}{\prod(1-y^r)} \pmod 7$$

yazdıktan sonra küme parantezinin içine (2.14) ve paydaya (2.16) yerleştirilirse

$$\sum_{b=0}^{7} F_7^b \equiv P(0)\left\{\frac{P(3)}{P(1)P(2)} + \frac{q}{P(1)} + 2q^2\frac{P(2)}{P(1)P(3)} + \frac{3q^3}{P(2)} + \frac{5q^4}{P(3)} + 4q^6\frac{P(1)}{P(2)P(3)}\right\} \pmod 7$$

elde edilir. q'nun karşılıklı kuvvetleri eşitlenirse;

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_7^{(0)} &\equiv \frac{P(0)P(3)}{P(1)P(2)} \pmod 7 \\
\mathrm{F}_7^{(1)} &\equiv q\frac{P(0)}{P(1)} \pmod 7 \\
\mathrm{F}_7^{(2)} &\equiv 2q^2\frac{P(0)P(2)}{P(1)P(3)} \pmod 7 \\
\mathrm{F}_7^{(3)} &\equiv 3q^3\frac{P(0)}{P(2)} \pmod 7 \\
\mathrm{F}_7^{(4)} &\equiv 5^4\frac{P(0)}{P(3)} \pmod 7 \\
\mathrm{F}_7^{(5)} &\equiv 0 \pmod 7 \\
\mathrm{F}_7^{(6)} &\equiv 4q^6\frac{P(0)P(1)}{P(2)P(3)} \pmod 7
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

bulunur. (2.17), Ramanujan'ın (1.5) kongruansını ispatlar.

2.3 $m = 11$ Durumunda Kongruanslar

Şimdi ise iki yeni sonuca ihtiyaç olacaktır. Bunlardan ilki $\prod(1-q^r)$ çarpımının polinom şeklinde ifadesidir:

Lemma 2.3.1 (Atkin and Swinnerton-Dyer,1954)
$ebob(6,n) = 1$ ve $n = 6\lambda + \mu$ $(\mu = \pm 1)$ olmak üzere

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = (-1)^{\lambda} q^{\frac{1}{2}\lambda(3\lambda+\mu)} P(0) \left[1 + \sum_{c=1}^{(m-1)/2} (-1)^c q^{\frac{1}{2}c(3c-m)} \frac{P(2c)}{P(c)} \right]$$

dir.

Lemma 2.3.1 ün ispatı (1.2) Euler Pentagonal Sayı Teoremine dayanmaktadır.

Lemma 2.3.2 (Atkin and Swinnerton-Dyer,1954) $b, c, d, b\pm c, c\pm d, b\pm d$ lerin hiçbiri m ye bölünmesin. Bu durumda

$$P^2(b)P(c+d)P(c-d) - P^2(c)P(b+d)P(b-d) + y^{c-d}P^2(d)P(b+c)P(b-c) = 0$$

dır.

Lemma 2.3.2'ye sadeleştirmelerde her zaman ihtiyaç duyulmaktadır. Lemma 2.3.2, $m = 13$ durumunda ayrışımların kongruans özelliklerini ve $\prod \frac{1}{1-q^r}$ sonsuz çarpımının bileşenlerini hesaplamak için yetersiz kalmaktadır. Daha genel bir eşitliğin nasıl bulunabileceği Bölüm 5'te izah edilecektir.

Lemma 2.3.2, $m = 5$ için herhangi bir özdeşlik vermez. Çünkü $m = 5$ için Lemma 2.3.2 de seçilebilecek (b, c, d) üçlüsü yoktur.

$m = 7$ durumunda (b, c, d)=$(3, 2, 1)$ seçilebilir ve bu üçlü ile Lemma 2.3.2

$$P(1)P^3(3) - P(3)P^3(2) + yP(2)P^3(1) = 0 \tag{2.18}$$

eşitliğini verir. $m = 11$ durumunda ise (b, c, d)=$(5, 4, 1)$, $(5, 4, 2)$, $(4, 3, 1)$, $(5, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(5, 3, 1)$, $(5, 4, 3)$, $(5, 2, 1)$, $(4, 3, 2)$ ve $(4, 2, 1)$ seçimleri yapılabilir. Bu üçlüler sırasıyla

$$P(3)P^3(5) - P(5)P^3(4) + y^3P(2)P^3(1) = 0 \tag{2.19}$$

$$P(2)P^3(5) - P(3)P^3(4) + y^2P(1)P^3(2) = 0 \tag{2.20}$$

$$P(2)P^3(4) - P(5)P^3(3) + y^2P(4)P^3(1) = 0 \tag{2.21}$$

$$P(1)P^3(5) - P(4)P^3(3) + yP(3)P^3(2) = 0 \tag{2.22}$$

$$P(1)P^3(3) - P(4)P^3(2) + yP(5)P^3(1) = 0 \tag{2.23}$$

$$P(2)P(4)P^2(5) - P(4)P(5)P^2(3) + y^2P(2)P(3)P^2(1) = 0 \tag{2.24}$$

$$P(1)P(4)P^2(5) - P(2)P(3)P^2(4) + yP(1)P(2)P^2(3) = 0 \tag{2.25}$$

$$P(1)P(3)P^2(5) - P(4)P(5)P^2(2) + yP(3)P(4)P^2(1) = 0 \tag{2.26}$$

$$P(1)P(5)P^2(4) - P(2)P(5)P^2(3) + yP(1)P(4)P^2(2) = 0 \tag{2.27}$$

$$P(1)P(3)P^2(4) - P(3)P(5)P^2(2) + yP(2)P(5)P^2(1) = 0 \tag{2.28}$$

sonuçlarını verir.

$m = 11$ için Lemma 2.1.1 den

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv P(0)\left\{P(5) - 3P(4)q + 5P(3)q^3 - 7P(2)q^6 + 9P(1)q^{10}\right\} \pmod{11} \tag{2.29}$$

ve Lemma 2.3.1 den ise

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = P(0)\left\{\frac{P(4)}{P(2)} - q\frac{P(2)}{P(1)} - q^2\frac{P(5)}{P(3)} - q^4 y\frac{P(1)}{P(5)} + q^5 + q^7\frac{P(3)}{P(4)}\right\} \tag{2.30}$$

bulunur.

Atkin ve Swinnerton-Dyer 5 ve 7 durumlarına benzer şekilde

$$\prod(1-q^r)^{-1} \equiv \left\{\prod(1-q^r)^3\right\}^3 \left\{\prod(1-q^r)\right\} \Big/ \prod(1-y^r) \pmod{11} \tag{2.31}$$

kongruansında küme parantezlerinin içerisine (2.29) ve (2.30) yerleştirildikten sonra (2.19)-(2.28) eşitliklerini kullanılarak aşağıdaki kongruansların hesaplanabileceğini belirtmişlerdir;

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(0)} &\equiv \frac{P(0)}{P(1)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(1)} &\equiv q\frac{P(0)P(5)}{P(2)P(3)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(2)} &\equiv 2q^2\frac{P(0)P(3)}{P(1)P(4)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(3)} &\equiv 3q^3\frac{P(0)P(2)}{P(1)P(3)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(4)} &\equiv 5q^4\frac{P(0)}{P(2)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(5)} &\equiv 7q^5\frac{P(0)P(4)}{P(2)P(5)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(6)} &\equiv 0 \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(7)} &\equiv 4q^7\frac{P(0)}{P(3)} \pmod{11}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(8)} &\equiv 6yq^8\frac{P(0)P(1)}{P(4)P(5)} \pmod{11} \\
\mathrm{F}_{11}^{(9)} &\equiv 8q^9\frac{P(0)}{P(4)} \pmod{11} \\
\mathrm{F}_{11}^{(10)} &\equiv 9q^{10}\frac{P(0)}{P(5)} \pmod{11}
\end{aligned}
$$

Fakat bu yöntemin oldukça sıkıcı olduğunu söyleyerek, bu sonuçları

$$\left\{\prod(1-q^r)^3\right\}\sum_{b=0}^{10}\mathrm{F}_{11}^{(b)} - \left\{\prod(1-q^r)\right\}^2 \equiv 0 \pmod{11}$$

kongruansında yerlerine yazıp, (2.19)-(2.28) eşitlikleri ile q'nun katsayılarının sıfıra kongruent olduğunu göstererek ispat yapmışlardır.

(2.31) denklemi incelendiği zaman Atkin ve Swinnerton-Dyer'ın belirttiği gibi (2.19)-(2.28) eşitlikleri, bu kongruansların bulunması için kesinlikle yeterli değildir.

Atkin ve Swinnerton-Dyer'ın bu kongruansları ne şekilde hesapladıklarını bilmemize rağmen, (2.31) kongruansını kullanarak bu kongruansların nasıl hesaplanabileceğini izah edelim.

$m = 11$ için

$$\prod(1-y^r) \equiv P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5) \pmod{11} \tag{2.32}$$

olduğu açıktır.

$$\left\{\prod(1-q^r)^3\right\}^4 \equiv \prod(1-y^r)\prod(1-q^r) \pmod{11} \tag{2.33}$$

yazıldıktan sonra (2.29),(2.30) ve (2.32) eşitlikleri, (2.33) de yerlerine yazılıp q^5 in katsayıları eşitlenirse aşağıdaki kongruans elde edilir;

$$
\begin{aligned}
P^3(0)\Big\{&5P(5)P^2(3)P(1)y + 3P^2(5)P(2)P(1)y + 2P(4)P(3)P^2(2)y + P(5)P^2(4)P(3) - \\
&4P(4)P(2)P^2(1)y^2\Big\} \equiv P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5) \pmod{11}
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Daha sonra (2.29),(2.30) ve (2.32) eşitlikleri, (2.31) de yerlerine yazıldıktan sonra q nun katsayılarının sadeleştirilmesi gerekmektedir. Örneğin (2.31) de q^0 ın katsayısı;

$$P^3(0)\Big\{-y^2P^3(1)P(2)P(4)P^3(5)+4y^3P^3(1)P^2(2)P^2(3)P(5)+2y^2P^2(1)P^2(2)P(3)P^2(4)P(5)+ 2y^3P^2(1)P^4(2)P(3)P(4)+3yP^2(1)P(3)P^3(4)P^2(5)+5y^2P^2(1)P(2)P^3(3)P^2(4)- 2y^2P(1)P^3(2)P^3(3)P(5)-3yP(1)P^2(2)P(3)P(4)P^3(5)+3yP(1)P(2)P^3(3)P(4)P^2(5)+ P(1)P(3)P^2(4)P^4(5)-3yP^3(2)P^2(3)P^2(4)P(5)\Big\}\Big/\Big\{P^2(1)P^2(2)P^2(3)P^2(4)P^2(5)\Big\}$$

bulunur ve bu ifade (2.19)-(2.28) eşitlikleri kullanılarak sadeleştirilirse

$$P^3(0)\Big\{-4y^2P^3(1)P(2)P(4)P^3(5)+4y^3P^3(1)P^2(2)P^2(3)P(5)+2y^2P^2(1)P(2)P^3(3)P^2(4)+ P(1)P(3)P^2(4)P^5(4)\Big\}\Big/\Big\{P^2(1)P^2(2)P^2(3)P^2(4)P^2(5)\Big\}$$

olur. Son ifadenin payı, (2.34) ve (2.19)-(2.28) eşitlikleri kullanılarak

$$P^3(0)P(2)P(3)P(4)P(5)\Big\{5P(5)P^2(3)P(1)y+3P^2(5)P(2)P(1)y+2P(4)P(3)P^2(2)y +P(5)P^2(4)P(3)-4P(4)P(2)P^2(1)y^2\Big\}\equiv P(0)P(1)P^2(2)P^2(3)P^2(4)P^2(5) \pmod{11}$$

elde edilir. Yerine yazılırsa q^0'ın katsayısı $\dfrac{P(0)}{P(1)}$ bulunur. Diğer kongruanslar da benzer şekilde elde edilebilir.

Yukarıdaki teknik çok kolay gibi görünmesine rağmen $m > 11$ durumundaki kongruanslara uyarlanması neredeyse mümkün değildir. Bu yüzden F kuvvet serisinin kongruans özelliklerini $m = 5, 7$ ve 11 modülleri için farklı bir yöntemle elde edeceğiz. Bu yöntem önce $\prod \dfrac{1}{1-q^r}$ çarpımını polinom olarak yazdıktan sonra bu polinomu kullanarak kongruans özelliklerini hesaplamaktır. F kuvvet serisinin bileşenlerini $m = 5$ ve 7 için A.B. Ekin verdi (Ekin, 1993). Ekin'in $m = 7$ için sadeleştirdiği bileşenleri farklı bir şekilde yazacağız ve ilk olarak burada $m = 11$ için F kuvvet serisinin bileşenlerini, daha sonra da bu bileşenleri kullanarak ayrışımların kongruans özelliklerini elde edeceğiz.

Öncelikle $\prod \dfrac{1}{1-q^r}$ sonsuz çarpımını polinom olarak yazmaya ihtiyacımız olacaktır.

3. $m=5$, 7 ve 11 İÇİN $\prod(1-q^r)^{-1}$ ÇARPIMININ POLİNOM OLARAK YAZILMASI ve KONGRUANS ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $m=7$ ve 11 için verilen bileşenler orjinal sonuçlardır.

Önce bileşenleri hesaplamak için kullanılabilecek en basit yöntemi izah edelim.

Verilen bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için, ω, 1' in m. bir kökü ve $(a)_\infty := (a;q)_\infty$ olmak üzere

$$(q)_\infty(\omega q)_\infty(\omega^2 q)_\infty \cdots (\omega^{m-1}q)_\infty = \frac{(y;y)_\infty^{m+1}}{(y^m;y^m)_\infty^m}$$

eşitliği bilinmektedir (Kolberg, 1957). Burada $(q)_\infty = \prod(1-q^r)$ dir. Bu eşitlik kullanılarak

$$\prod \frac{1}{1-q^r} = (q)_\infty^{-1} = \frac{(y^m;y^m)_\infty^m}{(y;y)_\infty^{m+1}}\,(\omega q)_\infty(\omega^2 q)_\infty \cdots (\omega^{m-1}q)_\infty \tag{3.1}$$

yazilabilir. Sonraki adım ise (3.1) eşitliğinin sağ tarafı açıldıktan sonra ω'nın sadeleştirilmesidir. Bunun için $\omega^m = 1$ ve $1+\omega+\omega^2\cdots+\omega^{m-1}=0$ eşitlikleri yeterlidir.

Bu yöntemi kullanarak $m=5$ durumunda bileşenleri hesaplayalım. $m=5$ için Lemma 2.3.1

$$(q)_\infty = \prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = P(0)\left\{\frac{P(2)}{P(1)} - q - q^2\frac{P(1)}{P(2)}\right\} \tag{3.2}$$

eşitliğini verir. ω, 1'in beşinci bir kökü olmak üzere (3.2) eşitliğinde q yerine sırasıyla $\omega q,\ \omega^2 q,\ \omega^3 q$ ve $\omega^4 q$ yazılırsa

$$(\omega q)_\infty = P(0)\left\{\frac{P(2)}{P(1)} - \omega q - \omega^2 q^2\frac{P(1)}{P(2)}\right\} \tag{3.3}$$

$$(\omega^2 q)_\infty = P(0)\left\{\frac{P(2)}{P(1)} - \omega^2 q - \omega^4 q^2\frac{P(1)}{P(2)}\right\} \tag{3.4}$$

$$(\omega^3 q)_\infty = P(0)\left\{\frac{P(2)}{P(1)} - \omega^3 q - \omega q^2\frac{P(1)}{P(2)}\right\} \tag{3.5}$$

$$(\omega^4 q)_\infty = P(0)\left\{\frac{P(2)}{P(1)} - \omega^4 q - \omega^3 q^2\frac{P(1)}{P(2)}\right\} \tag{3.6}$$

elde edilir. Bu eşitlikler $m = 5$ için (3.1) eşitliğinde yerine yazılır ve çarpım genişletildikten sonra $\omega^5 = 1$ ve $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$ eşitlikleri ile ω sadeleştirilirse bileşenler

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_5^{(0)} &= \frac{1}{P(0)P^6(1)P^6(2)}\left\{\frac{P(2)^4}{P(1)^4} - 3y\frac{P(1)}{P(2)}\right\} \\
\mathrm{F}_5^{(1)} &= q\frac{1}{P(0)P^6(1)P^6(2)}\left\{\frac{P(2)^3}{P(1)^3} + 2y\frac{P(1)^2}{P(2)^2}\right\} \\
\mathrm{F}_5^{(2)} &= q^2\frac{1}{P(0)P^6(1)P^6(2)}\left\{2\frac{P(2)^2}{P(1)^2} - y\frac{P(1)^3}{P(2)^3}\right\} \\
\mathrm{F}_5^{(3)} &= q^3\frac{1}{P(0)P^6(1)P^6(2)}\left\{3\frac{P(2)}{P(1)} + y\frac{P(1)^4}{P(2)^4}\right\} \\
\mathrm{F}_5^{(4)} &= 5q^4\frac{1}{P(0)P^6(1)P^6(2)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $m = 7$ durumunda fazladan (2.18) eşitliğine sadeleştirmeler için ihtiyaç duyulur fakat bileşenleri düzenli bir hale getirmek için epey uğraşmak gerekmektedir. Bu yöntemle elde edilen bileşenler (Ekin, 1993) de bulunabilir.

$m = 11$ durumunda ise bileşenler bulunurken devreye (2.19) - (2.28) eşitlikleri girer. Ancak bu bileşenleri düzenli bir hale getirmek oldukça zorlu bir iştir. Bu sebeple bileşenlerin hesabı için daha sistematik bir yönteme ihtiyaç vardır.

$m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = \sum_{s=0}^{m-1} g_s$$

ve

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv \sum_{s=0}^{m-1} h_s \pmod{m}$$

yazalım. Burada

$$g_s := \begin{cases} \displaystyle\sum_{\frac{1}{2}n(3n+1)\equiv s \pmod m} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}, & 24s+1 \,\text{kuadratik rezidü ise} \\ 0, & 24s+1 \,\text{kuadratik rezidü değilse} \\ (-1)^{\left[\frac{1}{6}(m+1)\right]} q^{\frac{1}{24}(m^2-1)} P_m(0) & 24s+1 \equiv 0 \pmod m \,\text{ise} \end{cases} \tag{3.7}$$

$$h_s := \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\frac{1}{2}n(n+1) \equiv s \pmod m, \\ n \geq 0}} (-1)^n (2n+1) q^{\frac{1}{2}n(n+1)}, & 8s+1 \,\text{kuadratik rezidü ise} \\ 0, & 8s+1 \,\text{kuadratik rezidü, değilse} \\ (-1)^{\left[\frac{1}{2}(m-1)\right]} m q^{\frac{1}{8}(m^2-1)} P_m(0)^3, & 8s+1 \equiv 0 \pmod m \,\text{ise} \end{cases} \tag{3.8}$$

şeklindedir. Daha sonra

$$D \;:=\; \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{m-1} \\ g_{m-1} & g_0 & \cdots & g_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_0 \end{vmatrix}, \tag{3.9}$$

$$D_s \;:=\; \begin{vmatrix} g_{-s} & g_{-s+1} & \cdots & g_{-s+m-2} \\ g_{-s-1} & g_{-s} & \cdots & g_{-s+m-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{-s-m+2} & g_{-s-m+3} & \cdots & g_{-s} \end{vmatrix}, \quad s = 0, 1, \cdots, m-1 \tag{3.10}$$

determinantlarını tanımlayalım. Buna göre

$$D = \frac{P^{m+1}(y,y)}{P(0)} \tag{3.11}$$

ve $s = 0, 1, \cdots, m-1$ için

$$\mathrm{F}_m^{(s)} = (-1)^{(m-1)s} \frac{P(0)}{P^{m+1}(y,y)} D_s \tag{3.12}$$

dır (Kolberg, 1957). (3.9) determinantı (3.1) eşitliğinden çok daha sade biçimde bileşenlerin hesaplanmasını sağlamaktadır.

3.1 $m = 5$ Durumunda Bileşenler ve Kongruanslar

$m = 5$ için (3.7) den

$$g_1 = -qP(0), \quad g_3 = g_4 = 0$$

elde edilir. Daha sonra

$$\prod (1-q^r)^3 = (g_0 + g_1 + g_2)^3$$

eşitliği ve (3.8) den

$$0 = h_2 = 3g_0^2 g_2 + 3g_1^2 g_0$$

bulunur. Buradan

$$g_0 g_2 + g_1^2 = 0$$

elde edilir. Şimdi ise

$$\alpha := g_1^{-1} g_0, \ \beta := g_1^{-1} g_2$$

diyelim.

$$\alpha\beta = -1$$

olduğu açıktır.

Son eşitlik

$$\prod_{r=1}^{\infty} (1-q^r) = P(0) \left\{ \frac{P(2)}{P(1)} - q - q^2 \frac{P(1)}{P(2)} \right\} \tag{3.13}$$

kullanılarak da görülebilir. (3.13) den

$$g_0 = \frac{P(0)P(2)}{P(1)}, \ g_1 = -qP(0), \ g_2 = -q^2 \frac{P(0)P(1)}{P(2)}$$

bulunur. α, β nın tanımından

$$\alpha = -\frac{1}{q} \frac{P(2)}{P(1)}, \ \beta = q \frac{P(1)}{P(2)}$$

olduğu görülebilir ve buradan da

$$\alpha\beta = -1$$

bulunur. Bileşenler ise (3.12) den $s = 0, 1, \cdots, 4$ için

$$\mathrm{F}_5^{(s)} = \frac{1}{P^5(0)P^6(1)P^6(2)} D_s$$

şeklinde olur. D_s ler ise (3.9) determinantı kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
D_0 &= q^4 P^4(0) \left\{\alpha^4 - 3\beta\right\} \\
D_1 &= q^4 P^4(0) \left\{-\alpha^3 + 2\beta^2\right\} \\
D_2 &= q^4 P^4(0) \left\{2\alpha^2 - \beta^3\right\} \\
D_3 &= q^4 P^4(0) \left\{-3\alpha + \beta^4\right\} \\
D_4 &= 5q^4 P^4(0)
\end{aligned}$$

α ve β yerine yazılırsa bileşenler

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_5^{(0)} &= \kappa_5 \left\{\frac{P(2)^4}{P(1)^4} - 3y\frac{P(1)}{P(2)}\right\} \\
\mathrm{F}_5^{(1)} &= q\kappa_5 \left\{\frac{P(2)^3}{P(1)^3} + 2y\frac{P(1)^2}{P(2)^2}\right\} \\
\mathrm{F}_5^{(2)} &= q^2\kappa_5 \left\{2\frac{P(2)^2}{P(1)^2} - y\frac{P(1)^3}{P(2)^3}\right\} \\
\mathrm{F}_5^{(3)} &= q^3\kappa_5 \left\{3\frac{P(2)}{P(1)} + y\frac{P(1)^4}{P(2)^4}\right\} \\
\mathrm{F}_5^{(4)} &= 5q^4\kappa_5
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada verilen bir m için $\kappa_m := \dfrac{(y^m; y^m)_\infty^m}{(y; y)_\infty^{m+1}}$ dir.

Şimdi ise bu bileşenleri kullanarak kongruans özelliklerinin nasıl bulunacağını izah edelim.

m asal olmak üzere

$$(1 - q^r)^m \equiv 1 - y^r \pmod{m}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $P(a)$ ların tanımı kullanılarak

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r) = P(0)P(1)P(2)\cdots P\left(\frac{m-1}{2}\right) \tag{3.14}$$

eşitliği hemen görülebilir. Daha sonra

$$\left[\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right]^m \equiv \prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r)^3 \pmod{m}$$

kongruansında (3.14) kullanılırsa

$$\left[\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right]^m \equiv P^3(0)P^3(1)P^3(2)\cdots P^3\left(\frac{m-1}{2}\right) \pmod{m} \tag{3.15}$$

olarak yazılır.

$$(1-y^r)^m \equiv 1-y^{mr} \pmod{m}$$

yazılabilir. Buradan

$$P^m(0)P^m(1)P^m(2)\cdots P^m\left(\frac{m-1}{2}\right) \equiv P(0) \pmod{m} \tag{3.16}$$

ve dolayısıyla

$$P^{m-1}(0)P^m(1)P^m(2)\cdots P^m\left(\frac{m-1}{2}\right) \equiv 1 \pmod{m} \tag{3.17}$$

bulunur. Son kongruans (3.15) kongruansı ile çarpılırsa

$$\left[\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3\right]^m \equiv P^{m+2}(0)P^{m+3}(1)P^{m+3}(2)\cdots P^{m+3}\left(\frac{m-1}{2}\right) \pmod{m} \tag{3.18}$$

elde edilir.

$m=5$ için (2.10) kongruansı (3.18) de yerine yazılırsa

$$P^5(2)+2yP^5(1) \equiv P^2(0)P^8(1)P^8(2) \pmod{5}, \tag{3.19}$$

elde edilir.

(3.19) un her iki tarafı $P(0)P^{10}(1)P^7(2)$ ile bölünürse

$$\begin{aligned}
\frac{P^5(2)+2yP^5(1)}{P(0)P^{10}(1)P^7(2)} &\equiv \frac{P(0)P(2)}{P^2(1)} \pmod 5 \\
\frac{1}{P(0)P^6(1)P^6(2)}\left\{\frac{P^4(2)}{P^4(1)}+2y\frac{P(1)}{P(2)}\right\} &\equiv \frac{P(0)P(2)}{P^2(1)} \pmod 5 \\
\mathrm{F}_5^{(0)} &\equiv \frac{P(0)P(2)}{P^2(1)} \pmod 5
\end{aligned}$$

bulunur. (3.19) un her iki tarafı $P(0)P^9(1)P^8(2)/q$ ile bölünürse

$$\begin{aligned}
q\frac{P^5(2)+2yP^5(1)}{P(0)P^9(1)P^8(2)} &\equiv q\frac{P(0)}{P(1)} \pmod 5 \\
q\frac{1}{P(0)P^6(1)P^6(2)}\left\{\frac{P^3(2)}{P^3(1)}+2y\frac{P^2(1)}{P^2(2)}\right\} &\equiv q\frac{P(0)}{P(1)} \pmod 5 \\
\mathrm{F}_5^{(1)} &\equiv q\frac{P(0)}{P(1)} \pmod 5
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.19) benzer şekilde sırasıyla $3P(0)P^8(1)P^9(2)/q^2$ ve $2P(0)P^7(1)P^{10}(2)/q^3$ ile bölünürse

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_5^{(2)} &\equiv 2q^2\frac{P(0)}{P(2)} \pmod 5 \\
\mathrm{F}_5^{(3)} &\equiv 3q^3\frac{P(0)P(1)}{P^2(2)} \pmod 5
\end{aligned}$$

bulunur.

3.2 $m = 7$ Durumunda Bileşenler ve Kongruanslar

$m = 7$ için (3.7) ve (3.8)

$$g_2 = -q^2P(0),\ g_3 = g_4 = g_6 = 0,$$

$$h_6 = -7q^6P^3(0),\ h_3 = h_4 = h_5 = 0$$

eşitliklerini verir.

$$\prod(1-q^r)^3 = (g_0+g_1+g_2+g_5)^3 = h_0+h_1+h_2+h_6$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} 3(g_0^2g_2+g_1^2g_0+g_2^2g_5) &= h_3=0 \\ 3(g_1^2g_2+g_2^2g_0+g_5^2g_1) &= h_4=0 \qquad (3.20) \\ 3(g_0^2g_2+g_2^2g_1+g_5^2g_2) &= h_5=0 \\ g_2^3+6g_0g_1g_5 &= h_6=7g_2^3 \qquad (3.21) \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir.

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)=P(0)\left\{\frac{P(2)}{P(1)}-q\frac{P(3)}{P(2)}-q^2+q^5\frac{P(1)}{P(3)}\right\} \qquad (3.22)$$

eşitliği daha önce belirtilmişti.

(3.22) den

$$g_0=\frac{P(0)P(2)}{P(1)},\ \ g_1=-q\frac{P(0)P(3)}{P(2)},\ \ g_2=-q^2P(0),\ \ g_5=q^5\frac{P(0)P(1)}{P(3)} \qquad (3.23)$$

olduğu görülebilir. Şimdi ise

$$\alpha:=g_0^3g_1g_2^{-4},\qquad \beta:=g_1^3g_5g_2^{-4},\qquad \gamma:=g_5^3g_0g_2^{-4} \qquad (3.24)$$

diyelim. (3.21) den

$$\alpha\beta\gamma=1$$

olduğu açıktır ve ayrıca (3.20) ile (3.24) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= -\alpha-1 \\ \beta\gamma &= -\beta-1 \qquad (3.25) \\ \gamma\alpha &= -\gamma-1 \end{aligned}$$

bulunur. (3.11) eşitliği ve (3.9) determinatından

$$\begin{aligned} g_2^{-7}D &= -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-14(\alpha+\beta+\gamma)-58 \\ &= -(\alpha+\beta+\gamma)^2-16(\alpha+\beta+\gamma)-64 \\ &= -(\alpha+\beta+\gamma+8)^2=-\frac{P^8(1)P^8(2)P^8(3)}{q^{14}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha+\beta+\gamma+8=\pm\frac{P^4(1)P^4(2)P^4(3)}{q^7}$$

olur. Sağ tarafın işareti için α, β ve γ, q da seriye açılırsa

$$\alpha = -q^{-7} + \cdots \quad \beta = -1 + \cdots \quad \gamma = q^7 + \cdots$$

elde edilir ve buradan da

$$\alpha + \beta + \gamma + 8 = -\frac{P^4(1)P^4(2)P^4(3)}{q^7} \tag{3.26}$$

bulunur.

$s = 0, 1, ..., 6$ için (3.9) determinantları hesaplandıktan sonra (3.21) eşitliği ($g_0 g_1 g_5 = g_2^3$) kullanılarak sadeleştirilirse

$$\begin{aligned}
D_0 &= g_0^6 - 5g_2g_0^4g_5 + g_0^2g_2^3g_1 + 6g_5^2g_0^2g_2^2 + 4g_0g_2^2g_1^3 + g_5^2g_1^4 + g_5^3g_2^3 - g_1^5g_2 \\
D_1 &= -g_1g_0^5 - g_5^3g_0^3 + 2g_2^4g_0^2 - 6g_2^3g_1^2g_0 + 2g_2g_5^4g_0 + g_1^2g_5^4 + g_2^2g_1^4 - 3g_2^5g_5 - 3g_5^2g_2g_1^3 \\
D_2 &= -g_2g_0^5 + g_1^2g_0^4 + 4g_2^2g_5g_0^3 + g_0g_2^3g_5^2 + g_5^6 + g_2^3g_1^3 + 6g_2^2g_5^2g_1^2 - 5g_5^4g_1g_2 \\
D_3 &= 2g_0^4g_2g_1 + g_0^4g_5^2 - g_0^3g_1^3 - 3g_0^2g_5^3g_2 - 3g_2^5g_0 - 6g_1g_2^3g_5^2 - g_1^5g_5 + 2g_2^4g_1^2 + g_2^2g_5^4 \\
D_4 &= g_2^2g_0^4 - 3g_2g_0^3g_1^2 + g_1^4g_0^2 - 6g_2^3g_5g_0^2 - g_0g_5^5 + 2g_1^4g_5g_2 - 3g_1g_2^5 + 2g_2^4g_5^2 - g_1^3g_5^3 \\
D_5 &= -g_0^5g_5 - 3g_2^2g_0^3g_1 + 4g_2g_5^2g_0^3 + 4g_1^3g_0^2g_2 - g_1^5g_0 - 3g_2^2g_5^3g_0 + 4g_1^2g_2g_5^3 + 8g_2^6 \\
&\qquad -3g_1^3g_2^2g_5 - g_5^5g_1 \\
D_6 &= g_2^3g_0^3 + g_5^4g_0^2 + 6g_0^2g_2^2g_1^2 - 5g_0g_2g_1^4 - g_5^5g_2 + g_5g_2^3g_1^2 + 4g_5^3g_2^2g_1 + g_1^6
\end{aligned}$$

bulunur. (3.24) kullanılarak

$$\begin{gathered}
g_0^2g_1^3g_2^{-5} = \alpha\beta, \quad g_1^2g_5^3g_2^{-5} = \beta\gamma, \quad g_5^2g_0^3g_2^{-5} = \alpha\gamma \\
g_0g_1^5g_2^{-6} = \alpha\beta^2, \quad g_1g_5^5g_2^{-6} = \beta\gamma^2, \quad g_5g_0^5g_2^{-6} = \gamma\alpha^2 \qquad (3.27) \\
g_0^7g_2^{-7} = \gamma\alpha^3, \qquad g_1^7g_2^{-7} = \alpha\beta^3, \qquad g_5^7g_2^{-7} = \beta\gamma^3
\end{gathered}$$

eşitlikleri yazılabilir. D_0, D_1, ..., D_6 sırasıyla $g_0g_2^{-7}$, $g_5^{-1}g_2^{-5}$, $g_5g_2^{-7}$, $g_0^{-1}g_2^{-5}$, $g_1^{-1}g_2^{-5}$,

g_2^{-6} ve $g_1 g_2^{-7}$ ile çarpıldıktan (3.27) ve (3.25) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{g_0}{g_2^7}\, D_0 &= -\alpha^2 + 2\alpha + 2\beta - 11\gamma - 17 \\
\frac{1}{g_5 g_2^5}\, D_1 &= -5\beta^2 + \alpha^2 - 8\alpha + \beta - 12 \\
\frac{g_5}{g_2^7}\, D_2 &= -\gamma^2 + 2\gamma + 2\alpha - 11\beta - 17 \\
\frac{1}{g_0 g_2^5}\, D_3 &= -5\gamma^2 + \beta^2 - 8\beta + \gamma - 12 \\
\frac{1}{g_1 g_2^5}\, D_4 &= -5\alpha^2 + \gamma^2 - 8\gamma + \alpha - 12 \\
\frac{1}{g_2^6}\, D_5 &= -7(\alpha + \beta + \gamma) - 7 \qquad (3.28) \\
\frac{g_1}{g_2^7}\, D_6 &= -\beta^2 + 2\beta + 2\gamma - 11\alpha - 17
\end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuçları daha düzenli yazmak için yine (3.25) eşitliklerine ihtiyaç vardır.

$$\begin{aligned}
\frac{g_0}{g_2^7}\, D_0 &= -\alpha^2 + 2\alpha + 2\beta - 11\gamma - 17 \\
&= \alpha(-\alpha - 1) + 3\alpha + 2\beta - 11\gamma - 17 \\
&= \alpha^2 + 3\alpha + 2\beta - 11\gamma - 17 \\
&= \alpha^2\beta - 3(-\alpha - 1) + 2\beta - 11\gamma - 20 \\
&= \alpha^2\beta - 3\alpha\beta + 2\beta - 11\gamma - 20 \\
&= -\alpha\beta(-\alpha - 1) - 4\alpha\beta + 2\beta - 11\gamma - 20 \\
&= -\alpha^2\beta^2 - 2(-\beta - 1) - 4\alpha\beta - 11\gamma - 22 \\
&= -\alpha^2\beta^2 - 2\beta\gamma + 11(-\gamma - 1) - 4\alpha\beta - 11 \\
&= -\alpha^2\beta^2 - 2\beta\gamma + 11\alpha\gamma - 4\alpha\beta - 11 \\
&= -\alpha^2\beta^2 - 2\beta\gamma + 11\alpha\gamma - 4\alpha - 7 \\
&= -\alpha^2\beta^2 - 2\beta\gamma - 11\alpha(-\gamma - 1) - 7\alpha - 7 \\
&= -\alpha^2\beta^2 - 11\alpha^2\gamma - 2\beta\gamma + 7\Big\{ -\alpha - 1\Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $s = 1, \cdots, 6$ için diğer D_s ler aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{g_5 g_2^5}\, D_1 &= -\alpha^2\beta^2 + 3\alpha^2\gamma + 5\beta\gamma + 7(2\alpha+1) \\
\frac{g_5}{g_2^7}\, D_2 &= -\alpha^2\gamma^2 - 11\gamma^2\beta - 2\alpha\beta + 7(-\gamma-1) \\
\frac{1}{g_0 g_2^5}\, D_3 &= -\beta^2\gamma^2 + 3\beta^2\alpha + 5\alpha\gamma + 7(2\beta+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{g_1 g_2^5}\, D_4 &= -\alpha^2\gamma^2 + 3\gamma^2\beta + 5\alpha\beta + 7(2\gamma+1) \\
\frac{1}{g_2^6}\, D_5 &= -7(\alpha+\beta+\gamma) - 7 \\
\frac{g_1}{g_2^7}\, D_6 &= -\beta^2\gamma^2 - 11\beta^2\alpha - 2\alpha\gamma + 7(-\beta-1)
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Son olarak (3.12) den bileşenler

$$
\mathrm{F}_7^{(s)} = \frac{1}{P^7(0)P^8(1)P^8(2)P^8(3)} D_s \tag{3.30}
$$

şeklinde olacaktır. (3.23), (3.24) ve (3.30) kullanılarak m=7 için bileşenler

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_7^{(0)} &= \kappa_7 \left\{ \frac{P^6(3)}{P^3(1)P^3(2)} - 2y^3\frac{P^4(1)}{P^3(2)P(3)} + 11y\frac{P^4(2)}{P^3(1)P(3)} + 7\left[-y\frac{P(2)P(3)}{P^2(1)} + y^2\frac{P(1)}{P(2)}\right]\right\} \\
\mathrm{F}_7^{(1)} &= q\kappa_7 \left\{ \frac{P^5(3)}{P^3(1)P^2(2)} + 5y^3\frac{P^4(1)}{P^2(2)P^2(3)} - 3y\frac{P^5(2)}{P^3(1)P^2(3)} + 7\left[2y\frac{P^2(2)}{P^2(1)} - y^2\frac{P(1)}{P(3)}\right]\right\} \\
\mathrm{F}_7^{(2)} &= q^2\kappa_7 \left\{ y\frac{P^6(2)}{P^3(1)P^3(3)} + 2\frac{P^4(3)}{P^3(1)P(2)} - 11y^3\frac{P^4(1)}{P^3(3)P(1)} + 7\left[y^2\frac{P(1)P(2)}{P^2(3)} + y\frac{P(3)}{P(1)}\right]\right\} \\
\mathrm{F}_7^{(3)} &= q^3\kappa_7 \left\{ y^3\frac{P^5(1)}{P^3(2)P^2(3)} + 5y\frac{P^4(2)}{P^2(1)P^2(3)} + 3\frac{P^5(3)}{P^3(2)P^2(1)} + 7\left[2y\frac{P^2(3)}{P^2(2)} - y\frac{P(2)}{P(1)}\right]\right\} \\
\mathrm{F}_7^{(4)} &= q^4\kappa_7 \left\{ -y\frac{P^5(2)}{P^3(3)P^2(1)} + 5\frac{P^4(3)}{P^2(1)P^2(2)} - 3y^3\frac{P^5(1)}{P^3(3)P^2(2)} + 7\left[2y^2\frac{P^2(1)}{P^2(3)} + y\frac{P(3)}{P(2)}\right]\right\} \\
\mathrm{F}_7^{(5)} &= 7q^5 \left\{ \frac{P^3(0)}{P^4(y,y)} + 7y\frac{P^7(0)}{P^8(y,y)} \right\} \\
\mathrm{F}_7^{(6)} &= q^6\kappa_7 \left\{ -y^3\frac{P^6(1)}{P^3(2)P^3(3)} + 2y\frac{P^4(2)}{P^3(3)P(1)} + 11\frac{P^4(3)}{P^3(2)P(1)} + 7\left[y\frac{P(1)P(3)}{P^2(2)} - y\frac{P(2)}{P(3)}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Burada 5. bileşen için (3.26) kullanılmıştır.

Bileşenleri bu şekilde tekrar düzenlemekteki amaç, 7 modülüne geçildiğinde daha az terimle çalışmaktır.

Bu bileşenler kullanılarak kongruans özelliklerini elde etmek için (3.18) eşitliğine ihtiyaç vardır. $m = 7$ için (3.18)

$$P^7(3) + 4yP^7(2) + 5y^3P^7(1) \equiv P^2(0)P^{10}(1)P^{10}(2)P^{10}(3) \pmod 7, \qquad (3.31)$$

kongruansını verir. (3.31) nin her iki yanı sırasıyla $6y^2P^4(1)P^2(2)P(3)$, $3yP^2(1)P(2)P^4(3)$ ve $2yP(1)P^4(2)P^2(3)$ e bölünür ve (3.23), (3.24) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
6\alpha^2\beta^2 + 3\alpha^2\gamma + 5\beta\gamma &\equiv \frac{6}{y^2}\, P^2(0)P^6(1)P^8(2)P^9(3) \pmod 7\\
6\alpha^2\gamma^2 + 3\gamma^2\beta + 5\alpha\beta &\equiv \frac{5}{y}\, P^2(0)P^8(1)P^9(2)P^6(3) \pmod 7\\
6\beta^2\gamma^2 + 3\beta^2\alpha + 5\alpha\gamma &\equiv \frac{4}{y}\, P^2(0)P^9(1)P^6(2)P^8(3) \pmod 7
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu kongruanslar (3.29) bileşenlerinde yerlerine yazılıp yine (3.23) ve (3.24) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_7^{(0)} &\equiv \frac{P(0)P(3)}{P(1)P(2)} \pmod 7\\
\mathrm{F}_7^{(1)} &\equiv q\frac{P(0)}{P(1)} \pmod 7\\
\mathrm{F}_7^{(2)} &\equiv 2q^2\frac{P(0)P(2)}{P(1)P(3)} \pmod 7\\
\mathrm{F}_7^{(3)} &\equiv 3q^3\frac{P(0)}{P(2)} \pmod 7\\
\mathrm{F}_7^{(4)} &\equiv 5q^4\frac{P(0)}{P(3)} \pmod 7\\
\mathrm{F}_7^{(6)} &\equiv 4q^6\frac{P(0)P(1)}{P(2)P(3)} \pmod 7
\end{aligned}$$

kongruansları bulunur.

3.3 $m = 11$ Durumunda Bileşenler ve Kongruanslar

$m = 11$ için (3.7) ve (3.8) den $m = 11$ için

$$g_3 = g_6 = g_8 = g_9 = g_{10} = 0 \quad ve \quad g_5 = q^5P(0)$$

ve

$$h_2 = h_5 = h_7 = h_8 = 9 = 0 \quad ve \quad h_4 = -11q^{15}P^3(0)$$

bulunur.

$$\prod(1-q^r)^3 = (g_0+g_1+g_2+g_4+g_5+g_7)^3 = h_0+h_1+h_3+h_4+h_6+h_{10}$$

eşitliğinden ise

$$3(2g_2g_4g_7 + 2g_1g_5g_7 + g_0g_1^2 + g_4^2g_5 + g_0^2g_2) = h_2 = 0 \tag{3.32}$$

$$3(2g_0g_1g_4 + 2g_4g_5g_7 + g_2g_7^2 + g_1g_2^2 + g_0^2g_5) = h_5 = 0 \tag{3.33}$$

$$3(2g_0g_2g_5 + 2g_1g_2g_4 + g_4g_7^2 + g_0^2g_7 + g_1^2g_5) = h_7 = 0 \tag{3.34}$$

$$3(2g_0g_1g_7 + 2g_1g_2g_5 + g_2^2g_4 + g_5g_7^2 + g_0g_4^2) = h_8 = 0 \tag{3.35}$$

$$3(2g_0g_4g_5 + 2g_0g_2g_7 + g_2^2g_5 + g_1^2g_7 + g_1g_4^2) = h_9 = 0 \tag{3.36}$$

$$3(g_1g_7^2 + g_0^2g_4 + g_0g_2^2 + g_4^2g_7 + g_1^2g_2) + g_5^3 = h_4 = -11g_5^3 \tag{3.37}$$

denklemleri elde edilir.

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = P(0)\left\{\frac{P(4)}{P(2)} - q\frac{P(2)}{P(1)} - q^2\frac{P(5)}{P(3)} - q^4y\frac{P(1)}{P(5)} + q^5 + q^7\frac{P(3)}{P(4)}\right\}$$

eşitliği daha önce verilmişti. Buna göre g_i lerin

$$g_0 = \frac{P(0)P(4)}{P(2)},\ g_1 = -q\frac{P(0)P(2)}{P(1)},\ g_2 = -q^2\frac{P(0)P(5)}{P(3)},$$
$$g_4 = -q^4y\frac{P(0)P(1)}{P(5)},\ g_5 = q^5P(0),\ g_7 = q^7\frac{P(0)P(3)}{P(4)} \tag{3.38}$$

oldukları görülebilir. Şimdi ise $m = 7$ durumundaki gibi kolaylık için

$$\alpha := g_0^2g_4g_5^{-3} \quad \beta := g_1^2g_2g_5^{-3}, \quad \gamma := g_2^2g_0g_5^{-3}, \quad \theta := g_4^2g_7g_5^{-3}, \quad \delta := g_7^2g_1g_5^{-3} \tag{3.39}$$

diyelim.

Açık olarak (3.37) den

$$\alpha + \beta + \gamma + \theta + \delta = -4 \tag{3.40}$$

eşitliği elde edilir ve

$$\alpha\beta\gamma\theta\delta = -1 \tag{3.41}$$

olduğu görülür. Daha sonra $A := \gamma\theta\delta$, $B := \alpha\beta\delta$, $C := \alpha\gamma\delta$, $D := \alpha\beta\theta$ ve $E := \beta\gamma\theta$ diyelim. (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) ve (3.36) eşitlikleri sırasıyla $g_7 g_5^{-4}$, $g_4 g_5^{-4}$, $g_2 g_5^{-4}$, $g_1 g_5^{-4}$ ve $g_0 g_5^{-4}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} 2A + B + C &= \theta + 2\delta \\ 2D + A + E &= \alpha + 2\theta \\ 2E + A + C &= \beta + 2\gamma \\ 2B + D + E &= \delta + 2\beta \\ 2C + D + B &= \gamma + 2\alpha \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü;

$$\begin{aligned} A = \gamma\theta\delta &= \frac{1}{4}(-\alpha - \beta - \gamma + 3\theta + 3\delta) \\ B = \alpha\beta\delta &= \frac{1}{4}(-\alpha + 3\beta - \gamma - \theta + 3\delta) \\ C = \alpha\gamma\delta &= \frac{1}{4}(3\alpha - \beta + 3\gamma - \theta - \delta) \\ D = \alpha\beta\theta &= \frac{1}{4}(3\alpha - \beta - \gamma + 3\theta - \delta) \\ E = \beta\gamma\theta &= \frac{1}{4}(-\alpha + 3\beta + 3\gamma - \theta - \delta) \end{aligned} \tag{3.42}$$

şeklindedir. (3.40) eşitliği kullanılırsa

$$\gamma\theta\delta = \theta + \delta + 1 \tag{3.43}$$

$$\alpha\beta\delta = \beta + \delta + 1 \tag{3.44}$$

$$\alpha\gamma\delta = \alpha + \gamma + 1 \tag{3.45}$$

$$\alpha\beta\theta = \alpha + \theta + 1 \tag{3.46}$$

$$\beta\gamma\theta = \beta + \gamma + 1 \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.43) eşitliğinin her iki yanı $\alpha\beta$ ile çarpılır ve (3.41) eşitliği kullanılırsa

$$-1 = \alpha\beta\theta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta$$

bulunur. (3.44) ve (3.46) yerlerine yazılırsa

$$\alpha\beta = \gamma + 1 \tag{3.48}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\beta\theta = \delta + 1 \tag{3.49}$$

$$\gamma\theta = \alpha + 1 \tag{3.50}$$

$$\gamma\delta = \beta + 1 \tag{3.51}$$

$$\alpha\delta = \theta + 1 \tag{3.52}$$

olduğu görülebilir.

(3.40), (3.41) ve (3.48)-(3.52) eşitlikleri olağanüstü kolaylıklar sağlamaktadırlar. (3.10) determinantları hesaplandıktan sonra $m = 7$ durumundaki gibi karşılaşılan tüm terimler, α, β, γ, θ ve δ larin çarpımı olarak ifade edilebilmektedir. $m = 11$ durumunda $s = 0, 1, ..., 10$ için 10x10 boyutundaki (3.10) determinantları hesaplandıktan sonra yaklaşık 250'şer terimlidir. Karşılaşılan en karmaşık terimler $g_0^{11} g_5^{-11}$, $g_1^{11} g_5^{-11}$, $g_2^{11} g_5^{-11}$, $g_4^{11} g_5^{-11}$ ve $g_7^{11} g_5^{-11}$ dir. Bunlar

$$\begin{aligned}
g_0^{11} g_5^{-11} &= \alpha^8 \beta^2 \gamma^3 \delta^4 \\
g_1^{11} g_5^{-11} &= \alpha^4 \beta^8 \theta^2 \delta^3 \\
g_2^{11} g_5^{-11} &= \beta^3 \gamma^8 \theta^4 \delta^2 \\
g_4^{11} g_5^{-11} &= \alpha^3 \beta^4 \gamma^2 \theta^8 \\
g_7^{11} g_5^{-11} &= \alpha^2 \gamma^4 \theta^3 \delta^8
\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.40), (3.41) ve (3.48)-(3.52) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_0^{11} g_5^{-11} = {} & -\gamma^4\beta + \alpha^3\gamma + 2\gamma^3\beta + \theta^3\alpha + 10\alpha^2\gamma - 10\gamma^2\beta + 10\theta^2\alpha + \delta^2\theta \\
& +36\alpha\gamma - \beta\delta + 29\beta\gamma + 28\alpha\theta - 5\theta\delta + 86\alpha + 50\beta + 159\gamma + 7\theta + 130
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_1^{11} g_5^{-11} = {} & -\delta^4\theta + \gamma^3\beta + 2\delta^3\theta + \beta^3\delta + \alpha^2\gamma - 10\delta^2\theta + 10\beta^2\delta + 10\gamma^2\beta \\
& -5\alpha\gamma + 36\beta\delta + 28\beta\gamma - \alpha\theta + 29\theta\delta + 7\gamma + 50\theta + 86\beta + 159\delta + 130
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2^{11} g_5^{-11} = {} & -\beta^4\delta + \gamma^3\beta + 2\beta^3\delta + \alpha^3\gamma - 10\beta^2\delta + 10\alpha^2\gamma + \theta^2\alpha + 10\gamma^2\beta \\
& +28\alpha\gamma + 29\beta\delta + 36\beta\gamma - 5\alpha\theta - \theta\delta + 7\alpha + 86\gamma + 159\beta + 50\delta + 130
\end{aligned}$$

$$g_4^{11} g_5^{-11} = -\alpha^4\gamma + \delta^3\theta + \theta^3\alpha + 2\alpha^3\gamma - 10\alpha^2\gamma + 10\delta^2\theta + 10\theta^2\alpha + \beta^2\delta$$
$$+29\alpha\gamma - 5\beta\delta - \beta\gamma + 36\alpha\theta + 28\theta\delta + 159\alpha + 50\gamma + 86\theta + 7\delta + 130$$

$$g_7^{11} g_5^{-11} = -\theta^4\alpha + \delta^3\theta + 2\theta^3\alpha + \beta^3\delta + 10\delta^2\theta - 10\theta^2\alpha + 10\beta^2\delta + \gamma^2\beta$$
$$-\alpha\gamma + 28\beta\delta - 5\beta\gamma + 29\alpha\theta + 36\theta\delta + 50\alpha + 159\theta + 7\beta + 86\delta + 130$$

oldukları görülebilir. Benzer şekilde tüm terimler sadeleştirildikten sonra $m = 11$ için F kuvvet serisinin bileşenleri

$$\mathrm{F}_{11}^{(s)} = \frac{1}{P^{11}(0)\left\{P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)\right\}^{12}} D_s \tag{3.53}$$

olur ki burada D_s ler

$$\begin{aligned}
\frac{g_0}{g_5^{11}} D_0 \;&=\; 5\delta^6\alpha^5\beta\gamma - 30\alpha^6\beta^4\delta - \gamma^5\delta^4\alpha + 15\beta^5\theta^3\alpha + 42\theta^4\gamma^3 + 11\Big[-\gamma^3\beta + 14\gamma\alpha^2 + 19\theta^2\alpha \\
&\quad -24\gamma^2\beta - 11\delta^2\theta + 53\alpha\gamma + 50\alpha\theta - 21\beta\gamma + 27\beta\delta - 51\theta\delta - 62\alpha - 8\beta - 170\theta \\
&\quad -94\delta - 389\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_0 g_5^9} D_1 \;&=\; -2\theta^6\gamma^5\beta\delta + \gamma^6\delta^4\theta + 7\beta^5\theta^4\gamma + 5\delta^5\alpha^3\gamma + 3\alpha^4\beta^3 + 11\Big[12\beta^3\delta - 2\delta^3\theta + 8\alpha^2\gamma \\
&\quad +6\theta^2\alpha + 6\gamma^2\beta + 38\beta^2\delta - 17\delta^2\theta + 21\alpha\gamma + 14\alpha\theta - \beta\gamma + 94\beta\delta - 48\theta\delta + 42\alpha \\
&\quad +82\beta + 69\gamma + 84\delta + 178\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1 g_5^9} D_2 \;&=\; -2\gamma^6\delta^5\alpha\theta + \delta^6\alpha^4\gamma + 7\theta^5\gamma^4\delta + 5\alpha^5\beta^3\delta + 3\beta^4\theta^3 + 11\Big[12\theta^3\alpha - 2\alpha^3\gamma + 8\beta^2\delta \\
&\quad +6\gamma^2\beta + 6\delta^2\theta + 38\theta^2\alpha - 17\alpha^2\gamma + 21\beta\delta + 14\beta\gamma - \theta\delta + 94\alpha\theta - 48\alpha\gamma + 42\beta \\
&\quad +82\theta + 69\delta + 84\alpha + 178\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_2 g_5^9} D_3 \;&=\; -2\alpha^6\beta^5\theta\delta + \beta^6\theta^4\alpha + 7\delta^5\alpha^4\beta + 5\theta^5\gamma^3\beta + 3\gamma^4\delta^3 + 11\Big[12\delta^3\theta - 2\theta^3\alpha + 8\gamma^2\beta \\
&\quad +6\alpha^2\gamma + 6\beta^2\delta + 38\delta^2\theta - 17\theta^2\alpha + 21\beta\gamma + 14\alpha\gamma - \beta\delta + 94\theta\delta - 48\alpha\theta + 42\gamma \\
&\quad +82\delta + 69\beta + 84\theta + 178\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{g_7}{g_5^{11}} D_4 \;&=\; 5\gamma^6\delta^5\alpha\theta - 30\delta^6\alpha^4\gamma - \theta^5\gamma^4\delta + 15\alpha^5\beta^3\delta + 42\beta^4\theta^3 + 11\Big[-\theta^3\alpha + 14\delta^2\theta + 19\beta^2\delta \\
&\quad -24\theta^2\alpha - 11\gamma^2\beta + 53\theta\delta + 50\beta\delta - 21\alpha\theta + 27\alpha\gamma - 51\beta\gamma - 62\delta - 8\alpha - 170\beta \\
&\quad -94\gamma - 389\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_4 g_5^9} D_5 \;&=\; -2\delta^6\alpha^5\beta\gamma + \alpha^6\beta^4\delta + 7\gamma^5\delta^4\alpha + 5\beta^5\theta^3\alpha + 3\theta^4\gamma^3 + 11\Big[12\gamma^3\beta - 2\beta^3\delta + 8\theta^2\alpha \\
&\quad +6\alpha^2\gamma + 6\delta^2\theta + 38\gamma^2\beta - 17\beta^2\delta + 21\alpha\theta + 14\theta\delta - \alpha\gamma + 94\beta\gamma - 48\beta\delta + 42\theta \\
&\quad +82\gamma + 69\alpha + 84\beta + 178\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{g_5^{10}} D_6 &= 11\Big[-\alpha^3\gamma-\beta^3\delta-\gamma^3\beta-\theta^3\alpha-\delta^3\theta-14\alpha^2\gamma-14\beta^2\delta-14\gamma^2\beta \\
&\quad -14\theta^2\alpha-14\delta^2\theta-29\alpha\gamma-29\beta\delta-29\beta\gamma-29\alpha\theta-29\theta\delta+106\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{g_4}{g_5^{11}} D_7 &= 5\beta^6\theta^5\alpha\gamma-30\theta^6\gamma^4\beta-\alpha^5\beta^4\theta+15\gamma^5\delta^3\theta+42\delta^4\alpha^3+11\Big[-\alpha^3\gamma+14\theta^2\alpha+19\delta^2\theta \\
&\quad -24\alpha^2\gamma-11\beta^2\delta+53\alpha\theta+50\theta\delta-21\alpha\gamma+27\beta\gamma-51\beta\delta-62\theta-8\gamma-170\delta \\
&\quad -94\beta-389\Big] \\
\frac{1}{g_7 g_5^9} D_8 &= -2\beta^6\theta^5\alpha\gamma+\theta^6\gamma^4\beta+7\alpha^5\beta^4\theta+5\gamma^5\delta^3\theta+3\delta^4\alpha^3+11\Big[12\alpha^3\gamma-2\gamma^3\beta+8\delta^2\theta \\
&\quad +6\theta^2\alpha+6\beta^2\delta+38\alpha^2\gamma-17\gamma^2\beta+21\theta\delta+14\beta\delta-\alpha\theta+94\alpha\gamma-48\beta\gamma+42\delta \\
&\quad +82\alpha+69\theta+84\gamma+178\Big] \\
\frac{g_2}{g_5^{11}} D_9 &= 5\theta^6\gamma^5\beta\delta-30\gamma^6\delta^4\theta-\beta^5\theta^4\gamma+15\delta^5\alpha^3\gamma+42\alpha^4\beta^3+11\Big[-\beta^3\delta+14\gamma^2\beta+19\alpha^2\gamma \\
&\quad -24\beta^2\delta-11\theta^2\alpha+53\beta\gamma+50\alpha\gamma-21\beta\delta+27\theta\delta-51\alpha\theta-62\gamma-8\delta-170\alpha \\
&\quad -94\theta-389\Big] \\
\frac{g_1}{g_5^{11}} D_{10} &= 5\alpha^6\beta^5\theta\delta-30\beta^6\theta^4\alpha-\delta^5\alpha^4\beta+15\theta^5\gamma^3\beta+42\gamma^4\delta^3+11\Big[-\delta^3\theta+14\beta^2\delta+19\gamma^2\beta \\
&\quad -24\delta^2\theta-11\alpha^2\gamma+53\beta\delta+50\beta\gamma-21\theta\delta+27\alpha\theta-51\alpha\gamma-62\beta-8\theta-170\gamma \\
&\quad -94\alpha-389\Big]
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Bu sonuçlar (3.9) determinantları hesaplanıp $m=7$ durumundaki gibi (3.48) - (3.52) eşitlikleri kullanılarak sadeleştirildikten sonra tekrar düzenlenerek bulunmaktadır.

$m=11$ için bileşenler;

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(0)} &= \kappa_{11}\Bigg\{5y^3\frac{P(3)^9}{P(1)^3P(2)^2P(4)^2P(5)^2}+30y\frac{P(4)^9}{P(1)^3P(2)^2P(3)^2P(5)^2}+\frac{P(5)^9}{P(4)^2P(1)^3P(2)^2P(3)^2} \\
&\quad +15y^6\frac{P(2)^9}{P(1)^3P(3)^2P(4)^2P(5)^2}+42y^{10}\frac{P(1)^8}{P(2)^2P(3)^2P(4)^2P(5)^2} \\
&\quad +11\Bigg[y\frac{P(5)^7P(4)^2}{P(3)^7P(1)^2}+14y^4\frac{P(4)^4P(1)^2}{P(2)^4P(3)^2}-19y^9\frac{P(1)^5P(3)^2}{P(5)^5P(2)P(4)}+24y^2\frac{P(5)^5P(2)P(4)}{P(3)^5P(1)^2} \\
&\quad -11y^7\frac{P(3)^5P(2)^3}{P(4)^6P(5)^2}-53y^4\frac{P(4)^2P(1)P(5)}{P(2)^2P(3)^2}-50y^7\frac{P(1)^3P(3)}{P(5)^3P(2)}+21y^3\frac{P(5)^3P(2)^2}{P(3)^3P(1)^2} \\
&\quad +27y^4\frac{P(2)^4P(3)P(5)}{P(1)^3P(4)^3}+51y^7\frac{P(3)^3P(2)^2P(1)}{P(4)^4P(5)^2}+62y^5\frac{P(1)P(4)}{P(2)P(5)}+8y^4\frac{P(2)^3P(5)}{P(1)^2P(3)P(4)} \\
&\quad -170y^7\frac{P(1)^2P(2)P(3)}{P(4)^2P(5)^2}+94y^5\frac{P(2)^2P(3)^2}{P(4)^3P(1)}-389y^5\frac{P(2)}{P(4)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(1)} \quad = \quad & q\kappa_{11}\Bigg\{-2y^{10}\frac{P(1)^9}{P(2)^3P(3)^3P(4)^2P(5)}+\frac{P(5)^{10}}{P(2)^3P(3)^3P(1)^2P(4)^2}\\
&-7y^6\frac{P(2)^8}{P(3)^3P(5)P(1)^2P(4)^2}+5y^3\frac{P(3)^8}{P(2)^3P(1)^2P(4)^2P(5)}-3y\frac{P(4)^9}{P(2)^3P(3)^3P(1)^2P(5)}\\
&+11\Bigg[12y\frac{P(2)^6P(5)^3}{P(1)^7P(3)P(4)}+2y^6\frac{P(2)^2P(3)^7}{P(5)^2P(4)^6P(1)}+8y^3\frac{P(4)^6P(1)^2}{P(2)^6P(3)^2}\\
&-6y^8\frac{P(1)^5P(3)^2P(4)}{P(5)^5P(2)^3}-6y\frac{P(5)^5P(4)^3}{P(3)^5P(1)^2P(2)}-38y^2\frac{P(2)^4P(5)^2}{P(4)P(1)^5}-17y^6\frac{P(3)^5P(2)}{P(4)^4P(5)^2}\\
&-21y^3\frac{P(5)P(4)^4P(1)}{P(2)^4P(3)^2}-14y^6\frac{P(1)^3P(4)^2P(3)}{P(2)^3P(5)^3}+y^2\frac{P(5)^3P(4)^2}{P(1)^2P(3)^3}+94y^3\frac{P(2)^2P(3)P(5)}{P(1)^3P(4)}\\
&+48y^6\frac{P(1)P(3)^3}{P(5)^2P(4)^2}-42y^4\frac{P(4)^3P(1)}{P(2)^3P(5)}-82y^3\frac{P(2)P(4)P(5)}{P(1)^2P(3)}+69y^3\frac{P(4)^2P(5)^2}{P(2)^2P(3)^2}\\
&-84y^4\frac{P(3)^2}{P(4)P(1)}+178y^4\frac{P(4)}{P(2)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(2)} \quad = \quad & q^2\kappa_{11}\Bigg\{2\frac{P(5)^9}{P(1)^3P(4)^3P(2)^2P(3)}-y^3\frac{P(3)^{10}}{P(1)^3P(4)^3P(5)^2P(2)^2}\\
&+7y^{10}\frac{P(1)^8}{P(4)^3P(3)P(5)^2P(2)^2}+5y\frac{P(4)^8}{P(1)^3P(5)^2P(2)^2P(3)}-3y^6\frac{P(2)^9}{P(1)^3P(4)^3P(5)^2P(3)}\\
&+11\Bigg[12y^{10}\frac{P(1)^6P(3)^3}{P(5)^7P(4)P(2)}-2y^3\frac{P(1)^2P(4)^7}{P(3)^2P(2)^6P(5)}+8y^2\frac{P(2)^6P(5)^2}{P(1)^6P(4)^2}\\
&-6y^6\frac{P(5)^5P(4)^2P(2)}{P(3)^5P(1)^3}+6y\frac{P(3)^5P(2)^3}{P(4)^5P(5)^2P(1)}+38y^8\frac{P(1)^4P(3)^2}{P(2)P(5)^5}+17y^3\frac{P(4)^5P(1)}{P(2)^4P(3)^2}\\
&-21y^3\frac{P(3)P(2)^4P(5)}{P(1)^4P(4)^2}+14y^2\frac{P(5)^3P(2)^2P(4)}{P(1)^3P(3)^3}-y^6\frac{P(3)^3P(2)^2}{P(5)^2P(4)^3}+94y^6\frac{P(1)^2P(4)P(3)}{P(5)^3P(2)}\\
&-48y^3\frac{P(5)P(4)^3}{P(3)^2P(2)^2}+42y^3\frac{P(2)^3P(5)}{P(1)^3P(3)}-82y^6\frac{P(1)P(2)P(3)}{P(5)^2P(4)}+69y^4\frac{P(2)^2P(3)^2}{P(1)^2P(4)^2}\\
&+84y^4\frac{P(4)^2}{P(2)P(5)}-178y^4\frac{P(2)}{P(1)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(3)} \;=\;& q^3\kappa_{11}\Bigg\{2y\frac{P(4)^9}{P(3)^3P(1)^3P(5)^2P(2)}+y^6\frac{P(2)^{10}}{P(3)^3P(1)^3P(4)^2P(5)^2}\\
&-7y^3\frac{P(3)^8}{P(1)^3P(2)P(4)^2P(5)^2}+5y^{10}\frac{P(1)^8}{P(3)^3P(4)^2P(5)^2P(2)}+3\frac{P(5)^9}{P(3)^3P(1)^3P(4)^2P(2)}\\
&+11\Bigg[12y^6\frac{P(3)^6P(2)^3}{P(4)^7P(1)P(5)}-2y^{10}\frac{P(3)^2P(1)^7}{P(2)^2P(5)^6P(4)}+8y\frac{P(5)^6P(4)^2}{P(3)^6P(1)^2}\\
&-6y^3\frac{P(4)^5P(1)^2P(5)}{P(2)^5P(3)^3}+6y^2\frac{P(2)^5P(5)^3}{P(1)^5P(4)^2P(3)}-38y^6\frac{P(3)^4P(2)^2}{P(5)P(4)^5}-17y^8\frac{P(1)^5P(3)}{P(5)^4P(2)^2}\\
&+21y^2\frac{P(2)P(5)^4P(4)}{P(3)^4P(1)^2}+14y^3\frac{P(4)^3P(5)^2P(1)}{P(3)^3P(2)^3}+y^3\frac{P(2)^3P(5)^2}{P(4)^2P(1)^3}+94y^6\frac{P(3)^2P(1)P(2)}{P(4)^3P(5)}\\
&-48y^6\frac{P(4)P(1)^3}{P(2)^2P(5)^2}-42y^3\frac{P(5)^3P(4)}{P(3)^3P(2)}+82y^4\frac{P(3)P(5)P(2)}{P(4)^2P(1)}+69y^3\frac{P(5)^2P(2)^2}{P(3)^2P(1)^2}\\
&-84y^6\frac{P(1)^2}{P(5)P(4)}-178y^4\frac{P(5)}{P(3)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(4)} \;=\;& q^4\kappa_{11}\Bigg\{5\frac{P(5)^9}{P(2)^3P(3)^2P(1)^2P(4)^2}-30y^3\frac{P(3)^9}{P(2)^3P(1)^2P(4)^2P(5)^2}+y^{10}\frac{P(1)^9}{P(2)^3P(3)^2P(4)^2P(5)^2}\\
&-15y\frac{P(4)^9}{P(2)^3P(3)^2P(1)^2P(5)^2}+42y^6\frac{P(2)^8}{P(1)^2P(3)^2P(4)^2P(5)^2}\\
&+11\Bigg[y^{10}\frac{P(1)^7P(3)^2}{P(5)^7P(2)^2}+14y^6\frac{P(3)^4P(2)^2}{P(4)^4P(5)^2}-19y^2\frac{P(2)^5P(5)^2}{P(1)^5P(3)P(4)}+24y^8\frac{P(1)^5P(3)P(4)}{P(5)^5P(2)^2}\\
&+11y\frac{P(5)^5P(4)^3}{P(3)^6P(1)^2}-53y^6\frac{P(3)^2P(1)P(2)}{P(4)^2P(5)^2}+50y^3\frac{P(2)^3P(5)}{P(1)^3P(4)}+21y^6\frac{P(1)^3P(4)^2}{P(5)^3P(2)^2}\\
&-27y^3\frac{P(4)^4P(1)P(5)}{P(2)^3P(3)^3}+51y^2\frac{P(5)^3P(4)^2P(2)}{P(3)^4P(1)^2}+62y^4\frac{P(2)P(3)}{P(1)P(4)}+8y^4\frac{P(4)^3P(1)}{P(2)^2P(3)P(5)}\\
&+170y^3\frac{P(2)^2P(4)P(5)}{P(1)^2P(3)^2}-94y^3\frac{P(4)^2P(5)^2}{P(3)^3P(2)}-389y^4\frac{P(4)}{P(3)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(5)} \;=\;& q^5\kappa_{11}\Bigg\{2y^3\frac{P(3)^9}{P(5)^3P(2)^3P(1)^2P(4)}+y\frac{P(4)^{10}}{P(5)^3P(2)^3P(3)^2P(1)^2}\\
&+7\frac{P(5)^8}{P(2)^3P(4)P(3)^2P(1)^2}-5y^6\frac{P(2)^8}{P(5)^3P(3)^2P(1)^2P(4)}-3y^{10}\frac{P(1)^9}{P(5)^3P(2)^3P(3)^2P(4)}\\
&+11\Bigg[12y\frac{P(5)^6P(4)^3}{P(3)^7P(2)P(1)}+2y^2\frac{P(5)^2P(2)^7}{P(4)^2P(1)^6P(3)}+8y^9\frac{P(1)^6P(3)^2}{P(5)^6P(2)^2}\\
&-6y^7\frac{P(3)^5P(2)^2P(1)}{P(4)^5P(5)^3}-6y^4\frac{P(4)^5P(1)^3}{P(2)^5P(3)^2P(5)}+38y^2\frac{P(5)^4P(4)^2}{P(1)P(3)^5}-17y^3\frac{P(2)^5P(5)}{P(1)^4P(4)^2}\\
&+21y^7\frac{P(4)P(1)^4P(3)}{P(5)^4P(2)^2}+14y^7\frac{P(3)^3P(1)^2P(2)}{P(5)^3P(4)^3}-y^4\frac{P(4)^3P(1)^2}{P(3)^2P(2)^3}+94y^3\frac{P(5)^2P(2)P(4)}{P(3)^3P(1)}\\
&+48y^6\frac{P(3)P(2)^3}{P(4)^2P(1)^2}-42y^4\frac{P(1)^3P(3)}{P(5)^3P(4)}-82y^3\frac{P(5)P(1)P(4)}{P(3)^2P(2)}+69y^3\frac{P(1)^2P(4)^2}{P(5)^2P(2)^2}\\
&+84y^4\frac{P(2)^2}{P(1)P(3)}-178y^5\frac{P(1)}{P(5)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(6)} &= q^6\kappa_{11}\Bigg\{11y^{10}\frac{P(1)^7P(3)^3}{P(5)^7P(2)^2P(4)}+11\frac{P(5)^7P(4)^3}{P(3)^7P(1)^2P(2)}+11y^6\frac{P(3)^7P(2)^3}{P(4)^7P(5)^2P(1)}\\
&-11y\frac{P(2)^7P(5)^3}{P(1)^7P(4)^2P(3)}+11y^3\frac{P(4)^7P(1)^3}{P(2)^7P(3)^2P(5)}\\
&+154y^8\frac{P(1)^5P(3)^2}{P(5)^5P(2)^2}-154y^6\frac{P(3)^5P(2)^2}{P(4)^5P(5)^2}-154y^3\frac{P(4)^5P(1)^2}{P(2)^5P(3)^2}\\
&+154y\frac{P(5)^5P(4)^2}{P(3)^5P(1)^2}+154y^2\frac{P(2)^5P(5)^2}{P(1)^5P(4)^2}\\
&+319y^2\frac{P(5)^3P(2)P(4)}{P(3)^3P(1)^2}+319y^3\frac{P(4)^3P(1)P(5)}{P(2)^3P(3)^2}-319y^3\frac{P(2)^3P(3)P(5)}{P(1)^3P(4)^2}\\
&+319y^6\frac{P(3)^3P(1)P(2)}{P(4)^3P(5)^2}+319y^6\frac{P(1)^3P(3)P(4)}{P(5)^3P(2)^2}+1166y^4\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(7)} &= q^7\kappa_{11}\Bigg\{5y^6\frac{P(2)^9}{P(3)^3P(5)^2P(1)^2P(4)^2}-30y^{10}\frac{P(1)^9}{P(3)^3P(5)^2P(2)^2P(4)^2}-y\frac{P(4)^9}{P(1)^2P(3)^3P(5)^2P(2)^2}\\
&+15\frac{P(5)^9}{P(3)^3P(2)^2P(1)^2P(4)^2}+42y^3\frac{P(3)^8}{P(5)^2P(2)^2P(1)^2P(4)^2}\\
&+11\Bigg[-y^2\frac{P(4)^7P(1)^2}{P(2)^7P(3)^2}+14y^7\frac{P(1)^4P(3)^2}{P(5)^4P(2)^2}-19y^5\frac{P(3)^5P(2)^2}{P(4)^5P(5)P(1)}+24y^2\frac{P(4)^5P(5)P(1)}{P(2)^5P(3)^2}\\
&-11y\frac{P(2)^5P(5)^3}{P(1)^6P(4)^2}+53y^5\frac{P(1)^2P(3)P(4)}{P(5)^2P(2)^2}+50y^5\frac{P(3)^3P(2)}{P(4)^3P(5)}-21y^2\frac{P(4)^3P(5)^2}{P(2)^3P(3)^2}\\
&+27y\frac{P(5)^4P(2)P(4)}{P(3)^3P(1)^3}+51y^2\frac{P(2)^3P(5)^2P(3)}{P(1)^4P(4)^2}+62y^5\frac{P(3)P(1)}{P(5)P(4)}+8y^2\frac{P(5)^3P(4)}{P(3)^2P(2)P(1)}\\
&-170y^3\frac{P(3)^2P(5)P(2)}{P(1)^2P(4)^2}-94y^2\frac{P(5)^2P(2)^2}{P(1)^3P(3)}+389y^3\frac{P(5)}{P(1)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(8)} &= q^8\kappa_{11}\Bigg\{2y^7\frac{P(2)^9}{P(4)^3P(5)^3P(3)^2P(1)}-y^{11}\frac{P(1)^{10}}{P(4)^3P(5)^3P(2)^2P(3)^2}\\
&-7y^2\frac{P(4)^8}{P(5)^3P(1)P(2)^2P(3)^2}-5y\frac{P(5)^8}{P(4)^3P(2)^2P(3)^2P(1)}-3y^4\frac{P(3)^9}{P(4)^3P(5)^3P(2)^2P(1)}\\
&+11\Bigg[-12y^3\frac{P(4)^6P(1)^3}{P(2)^7P(5)P(3)}+2\frac{P(4)^2P(5)^7}{P(1)^2P(3)^6P(2)}+8y^6\frac{P(3)^6P(2)^2}{P(4)^6P(5)^2}\\
&-6y^2\frac{P(2)^5P(5)^2P(3)}{P(1)^5P(4)^3}-6y^8\frac{P(1)^5P(3)^3}{P(5)^5P(2)^2P(4)}+38y^3\frac{P(4)^4P(1)^2}{P(3)P(2)^5}+17y\frac{P(5)^5P(4)}{P(3)^4P(1)^2}\\
&-21y^6\frac{P(1)P(3)^4P(2)}{P(4)^4P(5)^2}+14y^3\frac{P(2)^3P(3)^2P(5)}{P(4)^3P(1)^3}+y^6\frac{P(1)^3P(3)^2}{P(2)^2P(5)^3}-94y^3\frac{P(4)^2P(5)P(1)}{P(2)^3P(3)}\\
&+48y^2\frac{P(2)P(5)^3}{P(1)^2P(3)^2}-42y^4\frac{P(3)^3P(2)}{P(4)^3P(1)}-82y^4\frac{P(4)P(3)P(1)}{P(2)^2P(5)}+69y^6\frac{P(3)^2P(1)^2}{P(4)^2P(5)^2}\\
&+84y^3\frac{P(5)^2}{P(3)P(2)}+178y^4\frac{P(3)}{P(4)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(9)} \;=\; q^9\kappa_{11}\Bigg\{ & -5y^{10}\frac{P(1)^9}{P(4)^3P(3)^2P(5)^2P(2)^2}+30\frac{P(5)^9}{P(4)^3P(3)^2P(1)^2P(2)^2}-y^6\frac{P(2)^9}{P(5)^2P(4)^3P(3)^2P(1)^2}\\
& -15y^3\frac{P(3)^9}{P(4)^3P(1)^2P(5)^2P(2)^2}+42y\frac{P(4)^8}{P(3)^2P(1)^2P(5)^2P(2)^2}\\
& +11\Bigg[y\frac{P(2)^7P(5)^2}{P(1)^7P(4)^2}+14y\frac{P(5)^4P(4)^2}{P(3)^4P(1)^2}-19y^3\frac{P(4)^5P(1)^2}{P(2)^5P(3)P(5)}-24y^2\frac{P(2)^5P(3)P(5)}{P(1)^5P(4)^2}\\
& -11y^8\frac{P(1)^5P(3)^3}{P(5)^6P(2)^2}+53y^2\frac{P(5)^2P(4)P(2)}{P(3)^2P(1)^2}+50y^3\frac{P(4)^3P(1)}{P(2)^3P(3)}+21y^3\frac{P(2)^3P(3)^2}{P(1)^3P(4)^2}\\
& +27y^6\frac{P(3)^4P(1)P(2)}{P(4)^3P(5)^3}-51y^6\frac{P(1)^3P(3)^2P(4)}{P(5)^4P(2)^2}+62y^3\frac{P(4)P(5)}{P(3)P(2)}-8y^4\frac{P(3)^3P(2)}{P(4)^2P(1)P(5)}\\
& -170y^4\frac{P(4)^2P(3)P(1)}{P(5)^2P(2)^2}+94y^6\frac{P(3)^2P(1)^2}{P(5)^3P(4)}+389y^4\frac{P(3)}{P(5)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(10)} \;=\; q^{10}\kappa_{11}\Bigg\{ & -5y\frac{P(4)^9}{P(5)^3P(1)^2P(2)^2P(3)^2}-30y^6\frac{P(2)^9}{P(5)^3P(1)^2P(4)^2P(3)^2}+y^3\frac{P(3)^9}{P(2)^2P(5)^3P(1)^2P(4)^2}\\
& +15y^{10}\frac{P(1)^9}{P(5)^3P(4)^2P(2)^2P(3)^2}+42\frac{P(5)^8}{P(1)^2P(4)^2P(2)^2P(3)^2}\\
& +11\Bigg[y^3\frac{P(3)^7P(2)^2}{P(4)^7P(5)^2}+14y^2\frac{P(2)^4P(5)^2}{P(1)^4P(4)^2}+19y\frac{P(5)^5P(4)^2}{P(3)^5P(1)P(2)}+24y^6\frac{P(3)^5P(1)P(2)}{P(4)^5P(5)^2}\\
& +11y^3\frac{P(4)^5P(1)^3}{P(2)^6P(3)^2}-53y^3\frac{P(2)^2P(5)P(3)}{P(1)^2P(4)^2}+50y^2\frac{P(5)^3P(4)}{P(3)^3P(1)}-21y^6\frac{P(3)^3P(1)^2}{P(4)^3P(5)^2}\\
& +27y^6\frac{P(1)^4P(4)P(3)}{P(5)^3P(2)^3}-51y^3\frac{P(4)^3P(1)^2P(5)}{P(2)^4P(3)^2}-62y^3\frac{P(5)P(2)}{P(1)P(3)}+8y^6\frac{P(1)^3P(3)}{P(5)^2P(4)P(2)}\\
& +170y^3\frac{P(5)^2P(1)P(4)}{P(2)^2P(3)^2}-94y^4\frac{P(1)^2P(4)^2}{P(2)^3P(5)}+389y^4\frac{P(1)}{P(2)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. 11 modülünde yirmi terim yerine sadece beş terimle uğraşmak çok büyük avantaj sağlamaktadır. Bu bileşenlerin 11 modülündeki kongruans karşılıklarını nasıl bulabileceğimizi izah edelim.

(3.18), $m = 11$ için

$$
\begin{aligned}
& P^{11}(5)+8yP^{11}(4)+5y^3P^{11}(3)+4y^6P^{11}(2)+9y^{10}P^{11}(1)\equiv\\
& \qquad P^2(0)P^{14}(1)P^{14}(2)P^{14}(3)P^{14}(4)P^{14}(5) \pmod{11} \quad (3.54)
\end{aligned}
$$

kongruansını verir.

11 modüne göre

$$\begin{aligned}
4\frac{g_0}{g_5^{11}}D_0 &\equiv 9\delta^6\alpha^5\beta\gamma+\alpha^6\beta^4\delta+7\gamma^5\delta^4\alpha+5\beta^5\theta^3\alpha+3\theta^4\gamma^3 \pmod{11}\\
\frac{1}{g_0g_5^9}D_1 &\equiv 9\theta^6\gamma^5\beta\delta+\gamma^6\delta^4\theta+7\beta^5\theta^4\gamma+5\delta^5\alpha^3\gamma+3\alpha^4\beta^3 \pmod{11}\\
\frac{1}{g_1g_5^9}D_2 &\equiv 9\gamma^6\delta^5\alpha\theta+\delta^6\alpha^4\gamma+7\theta^5\gamma^4\delta+5\alpha^5\beta^3\delta+3\beta^4\theta^3 \pmod{11}\\
\frac{1}{g_2g_5^9}D_3 &\equiv 9\alpha^6\beta^5\theta\delta+\beta^6\theta^4\alpha+7\delta^5\alpha^4\beta+5\theta^5\gamma^3\beta+3\gamma^4\delta^3 \pmod{11}\\
4\frac{g_7}{g_5^{11}}D_4 &\equiv 9\gamma^6\delta^5\alpha\theta+\delta^6\alpha^4\gamma+7\theta^5\gamma^4\delta+5\alpha^5\beta^3\delta+3\beta^4\theta^3 \pmod{11}\\
\frac{1}{g_4g_5^9}D_5 &\equiv 9\delta^6\alpha^5\beta\gamma+\alpha^6\beta^4\delta+7\gamma^5\delta^4\alpha+5\beta^5\theta^3\alpha+3\theta^4\gamma^3 \pmod{11}\\
\frac{1}{g_5^{10}}D_6 &\equiv 0 \pmod{11}\\
4\frac{g_4}{g_5^{11}}D_7 &\equiv 9\beta^6\theta^5\alpha\gamma+\theta^6\gamma^4\beta+7\alpha^5\beta^4\theta+5\gamma^5\delta^3\theta+3\delta^4\alpha^3 \pmod{11}\\
\frac{1}{g_7g_5^9}D_8 &\equiv 9\beta^6\theta^5\alpha\gamma+\theta^6\gamma^4\beta+7\alpha^5\beta^4\theta+5\gamma^5\delta^3\theta+3\delta^4\alpha^3 \pmod{11}\\
4\frac{g_2}{g_5^{11}}D_9 &\equiv 9\theta^6\gamma^5\beta\delta+\gamma^6\delta^4\theta+7\beta^5\theta^4\gamma+5\delta^5\alpha^3\gamma+3\alpha^4\beta^3 \pmod{11}\\
4\frac{g_1}{g_5^{11}}D_{10} &\equiv 9\gamma^6\delta^5\alpha\theta+\delta^6\alpha^4\gamma+7\theta^5\gamma^4\delta+5\alpha^5\beta^3\delta+3\beta^4\theta^3 \pmod{11}
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. (3.54) kongruansının her iki tarafı sırasıyla $y^4P^2(1)P^2(2)P^3(3)P^3(4)P(5)$, $6y^4P^2(1)P^3(2)P(3)P^3(4)P^2(5)$, $7y^4P^3(1)P(2)P^2(3)P^2(4)P^3(5)$, $3y^5P^3(1)P^3(2)P^2(3)P(4)P^2(5)$ ve $2y^3P(1)P^2(2)P^3(3)P^2(4)P^3(5)$ e bölündükten sonra (3.38) ve (3.39) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&9\theta^6\gamma^5\beta\delta+\gamma^6\delta^4\theta+7\beta^5\theta^4\gamma+5\delta^5\alpha^3\gamma+3\alpha^4\beta^3\equiv\\
&\qquad\frac{1}{y^4}\,P^2(0)P^{12}(1)P^{12}(2)P^{11}(3)P^{11}(4)P^{13}(5) \pmod{11}\\
&9\gamma^6\delta^5\alpha\theta+\delta^6\alpha^4\gamma+7\theta^5\gamma^4\delta+5\alpha^5\beta^3\delta+3\beta^4\theta^3\equiv\\
&\qquad\frac{2}{y^4}\,P^2(0)P^{12}(1)P^{11}(2)P^{13}(3)P^{11}(4)P^{12}(5) \pmod{11}
\end{aligned}$$

$$9\alpha^6\beta^5\theta\delta+\beta^6\theta^4\alpha+7\delta^5\alpha^4\beta+5\theta^5\gamma^3\beta+3\gamma^4\delta^3\equiv$$
$$\frac{8}{y^4}\ P^2(0)P^{11}(1)P^{13}(2)P^{12}(3)P^{12}(4)P^{11}(5)\pmod{11}$$
$$9\delta^6\alpha^5\beta\gamma+\alpha^6\beta^4\delta+7\gamma^5\delta^4\alpha+5\beta^5\theta^3\alpha+3\theta^4\gamma^3\equiv$$
$$\frac{4}{y^5}\ P^2(0)P^{11}(1)P^{11}(2)P^{12}(3)P^{13}(4)P^{12}(5)\pmod{11}$$
$$9\beta^6\theta^5\alpha\gamma+\theta^6\gamma^4\beta+7\alpha^5\beta^4\theta+5\gamma^5\delta^3\theta+3\delta^4\alpha^3\equiv$$
$$\frac{6}{y^3}\ P^2(0)P^{13}(1)P^{12}(2)P^{11}(3)P^{12}(4)P^{11}(5)\pmod{11}$$

kongruansları elde edilir. Bu kongruanslar yerlerine yazılıp (3.38) ve (3.39) eşitlikleri göz önüne alınarak (3.53) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{11}^{(0)} &\equiv \frac{P(0)}{P(1)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(1)} &\equiv q\frac{P(0)P(5)}{P(2)P(3)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(2)} &\equiv 2q^2\frac{P(0)P(3)}{P(1)P(4)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(3)} &\equiv 3q^3\frac{P(0)P(2)}{P(1)P(3)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(4)} &\equiv 5q^4\frac{P(0)}{P(2)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(5)} &\equiv 7q^5\frac{P(0)P(4)}{P(2)P(5)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(7)} &\equiv 4q^7\frac{P(0)}{P(3)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(8)} &\equiv 6yq^8\frac{P(0)P(1)}{P(4)P(5)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(9)} &\equiv 8q^9\frac{P(0)}{P(4)} \pmod{11}\\
\mathrm{F}_{11}^{(10)} &\equiv 9q^{10}\frac{P(0)}{P(5)} \pmod{11}
\end{aligned}$$

kongruansları bulunur.

4. $\prod(1-q^r)^{-1}$ NiN BİLEŞENLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

$\prod(1-q^r)^{-1}$ çarpımının bileşenleri incelendiğinde $m=5$ durumunda $\mathrm{F}_5^{(0)}$ ile $\mathrm{F}_5^{(3)}$ ve $\mathrm{F}_5^{(1)}$ ile $\mathrm{F}_5^{(2)}$ bileşenleri arasındaki benzerlikler dikkat çekicidir. Benzer durum $m=7$ için $\left\{ \mathrm{F}_7^{(0)}, \mathrm{F}_7^{(2)}, \mathrm{F}_7^{(6)} \right\}$ ve $\left\{ \mathrm{F}_7^{(1)}, \mathrm{F}_7^{(3)}, \mathrm{F}_7^{(4)} \right\}$ bileşenleri arasında ve $m=11$ için ise $\left\{ \mathrm{F}_{11}^{(0)}, \mathrm{F}_{11}^{(4)}, \mathrm{F}_{11}^{(7)}, \mathrm{F}_{11}^{(9)}, \mathrm{F}_{11}^{(10)} \right\}$ ve $\left\{ \mathrm{F}_{11}^{(1)}, \mathrm{F}_{11}^{(2}, \mathrm{F}_{11}^{(3)}, \mathrm{F}_{11}^{(5)}, \mathrm{F}_{11}^{(8)} \right\}$ bileşenleri arasında vardır. Bu bileşenlerin katsayılarında $P(a)$ terimleri ve y'nin kuvvetleri değişirken sabitler aynı kalmaktadır. Bu bölümde bileşenler arasındaki bu güzel ilişki modüler formlar kullanılarak izah edilecektir.

4.1 Modüler Formlar

$SL_2(\mathbb{Z})$ ile girişleri tamsayı ve determinantları 1 olan 2x2 matrislerin grubu, **A** ile ise $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ formunda bir matris gösterilecektir.

$n > 2$ için

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \mathbf{A} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

ve

$$\Gamma(n) := \left\{ \mathbf{A} \in \Gamma_0(n) : a \equiv d \equiv \pm 1 \pmod{n} \right\}$$

olarak gösterelim. $\Gamma_0(n)$, $SL_2(\mathbb{Z})$'nin altgrubu ve $\Gamma(n)$, $\Gamma_0(n)$'nin normal altgrubudur. Ayrıca

$$\Gamma_0(n)/\Gamma(n) \cong U_n/\{\pm 1\}$$

dir (Lewis, 1995). Burada U_n, $\mathbb{Z}_n$ halkasının birim grubudur. Diğer bir deyişle

$$U_n := \left\{ a \in \mathbb{Z}_n : ebob(a,n) = 1 \right\}$$

kümesidir.

$SL_2(\mathbb{Z})$ grubu

$$\mathbf{U} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{V} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri tarafından üretilir . $\mathbf{A} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $q_i \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{q_0}\mathbf{V}\mathbf{U}^{q_1}\mathbf{V} \cdots \mathbf{U}^{q_n}\mathbf{V}$$

yazılabilir (Rankin, 1977). Bu yazım tek türlü değildir.

$\mathbb{H}$ kompleks üst yarı düzlem, $\mathbf{A} \in SL_2(\mathbb{Z}), \tau \in \mathbb{H}$ için

$$\mathbf{A}\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \in \mathbb{H}$$

dönüşümü ile $SL_2(\mathbb{Z})$, $\mathbb{H}$ üzerinde hareket eder. Bu dönüşümlerin kümesi bir grup oluşturur ve bu grup modüler grup olarak adlandırılır. Modüler grubu $\widehat{SL_2}(\mathbb{Z})$ ile göstereceğiz. Dikkat edilirse $\mathbf{A} \in SL_2(\mathbb{Z})$ için $\mathbf{A}$ matrisi ile $-\mathbf{A}$ matrisi $\widehat{SL_2}(\mathbb{Z})$'de aynı dönüşümü temsil etmektedirler.

$\mathbf{A} \in \widehat{SL_2}(\mathbb{Z})$ olsun. $\mathbf{A}z = z$ ise

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$z_1, z_2 = \frac{(a-d) \pm [(a+d)^2 - 4]^{\frac{1}{2}}}{2c}$$

şeklindedir ve kökler için üç durum vardır:

(i) $|\,a+d| < 2$ ise $\mathbf{A}$ nin iki kompleks sabit noktası vardır ve $\mathbf{A}$ eliptik dönüşüm olarak adlandırılır.

(ii) $|\,a+d| > 2$ ise $\mathbf{A}$ nin iki tane reel sabit noktası vardır ve $\mathbf{A}$ ye hiperbolik dönüşüm denir.

(iii) $|\,a+d| = 2$ ise $\mathbf{A}$ nin bir tek reel sabit noktası vardır ve $\mathbf{A}$ parabolik dönüşüm adını alır. Parabolik dönüşümlerin sabit noktaları cusp olarak adlandırılır.

$\mathbb{D} \subset \bar{\mathbb{C}}$ açık, $\bar{\mathbb{C}}$ üzerindeki topolojide bağlantılı bir küme ve f, $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\infty \in \mathbb{D}$ olduğunda f'nin ∞'daki davranışını incelemek için $z = 0$

ile $z^* = \infty$' un komşulukları arasındaki

$$f*(z) = f(1/z)$$

homeomorfizmi kullanılır.

Tanım 4.1.1 f aşağıdakileri sağlıyorsa, $\mathbb{D}$ üzerinde holomorfiktir denir;
(i) f, $\mathbb{D}$'den $\mathbb{C}$ içine bir dönüşümdür
(ii) f, $\mathbb{D} - \{\infty\}$ üzerinde diferensiyellenebilirdir
(iii) $\infty \in \mathbb{D}$ ise f^*, 0'ın bir komşuluğunda diferensiyellenebilirdir.

$$h(z) := (z-\rho)^m f(z)$$

diyelim. h, ρ'da holomorfik olacak şekilde bir $m \geq 0$ varsa f'ye $\rho \in \mathbb{C}$ noktasında meromorfik denir. Diğer bir deyişle h, ρ da sürekli ve $m \geq 0$ için

$$h(\rho) = \lim_{z \to \rho} (z-\rho)^m f(z) \tag{4.1}$$

ise f, ρ da meromorfiktir.

f, ∞ da meromorfik ise f^*, 0 da meromorfiktir.

Tanım 4.1.2 f'nin meromorfik olduğu fakat holomorfik olmadığı (yani $m > 0$) bir ρ noktası f'nin kutup noktası (pole) olarak adlandırılır. (4.1) eşitliğini sağlayan en küçük m tamsayısına kutbun mertebesi ve $m = 1$ ise ρ'ya, f'nin basit kutbu denir.

$q = exp(2\pi i \tau)$ ve $\tau \in \mathbb{H}$ olmak üzere Dedekind Eta Fonksiyonu;

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{r=1}^{\infty} (1-q^r) \tag{4.2}$$

olarak tanımlanır. Dedekind Eta Fonksiyonu

$$\eta(\mathbf{A}\tau) = e(\mathbf{A};\tau)\eta(\tau) \tag{4.3}$$

özdeşliğini sağlar (Radhemacher, 1972). Burada $e(\mathbf{A};\tau) = \varepsilon(\mathbf{A})\sqrt{c\tau+d}$ ve $\varepsilon(\mathbf{A})$ 1'in 24. bir köküdür. $-\pi/2 < arg(\sqrt{c\tau+d}) \leq \pi/2$ alınırsa $\varepsilon(\mathbf{A}) = exp((\pi i/12)\Phi(\mathbf{A}))$ olur. $\Phi(\mathbf{A})$ ise

$$\Phi(\mathbf{A}) := \begin{cases} b+3, & c=0 \text{ ve } d=1 \text{ ise} \\ \dfrac{a+d}{c} - 12s(d,c), & c>0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir. Buradaki $s(d,c)$ Dedekind toplamı olarak adlandırılır ve

$$((x)) := \begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2} & x \text{ tamsayı değilse} \\ 0 & x \text{ tamsayı ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$s(h,k) := \sum_{\mu=0}^{k-1} \left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{\mu h}{k}\right)\right)$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi Dedekind Eta Fonksiyonundan yola çıkarak yeni bir fonksiyon inşa edelim.

$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, ω tamsayısı ve $\mathbf{A} \in SL_2(\mathbb{Z})$ matrisi için

$$(f|_\omega \mathbf{A}) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonunu

$$(f|_\omega \mathbf{A}) = e(\mathbf{A};\tau)^{-\omega} f(\mathbf{A}\tau) \tag{4.4}$$

ile tanımlayalım. $(f|_\omega \mathbf{A})$ fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned} \big((f+g)|_\omega \mathbf{A}\big) &= (f|_\omega \mathbf{A}) + (g|_\omega \mathbf{A}) \\ \big((f/g)|_{\omega_1-\omega_2} \mathbf{A}\big) &= (f|_{\omega_1} \mathbf{A})/(g|_{\omega_2} \mathbf{A}) \\ \big((fg)|_{\omega_1+\omega_2} \mathbf{A}\big) &= (f|_{\omega_1} \mathbf{A})(g|_{\omega_2} \mathbf{A}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

$e(\mathbf{AB};\tau) = e(\mathbf{A};\mathbf{B}\tau)e(\mathbf{B};\tau)$ olduğundan dolayı

$$((f|_\omega \mathbf{A})|_\omega \mathbf{B}) = (f|_\omega \mathbf{AB}) \tag{4.6}$$

özdeşliği elde edilir. Dedekind Eta Fonksiyonu için bir başka önemli özdeşlik

$$(\eta|_1\mathbf{A}) = \eta \tag{4.7}$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.3 (Lewis, 1995)
Γ, $SL_2(\mathbb{Z})$'in bir alt grubu olmak üzere eğer
(i) Her $\mathbf{A} \in \Gamma$ için $\upsilon_{\Gamma,f}$ 1'in bir kökü olmak üzere $(f|_\omega\mathbf{A}) = \upsilon_{\Gamma,f}f$ ise,
(ii) f, $\mathbb{H}$ üzerinde ve Γ'nın $\mathbb{H}$' daki cusp larında meromorfik ise (f'nin r/s deki q-açılımındaki q'nun negatif kuvvetlerinin sayısı sonlu ise f, r/s cusp noktasında meromorfiktir) f' ye $\frac{1}{2}\omega$ ağırlıklı modüler form diyeceğiz.

G bir sonlu abelyan grup olsun. Modülleri 1 olan kompleks sayıların kümesi çarpmaya göre bir grup oluşturur ve G den bu gruba olan bir homomorfizmaya G nin bir karakteri adı verilir. $\mathcal{X}$, G nin bir karakteri olsun. Bu durumda $\forall g \in G$ için

$$(\mathcal{X}(g))^{|G|} = \mathcal{X}(g^{|G|}) = \mathcal{X}(1_G) = 1$$

olur. Yani $\mathcal{X}$' in değerleri 1' $|G|$ -yinci köküdür.

f, $SL_2(\mathbb{Z})$ üzerinde $\frac{1}{2}\omega$ ağırlıklı bir modüler form olsun. (4.6) dan $\upsilon_{SL_2(\mathbb{Z}),f}$, $\widehat{SL_2}(\mathbb{Z})$ üzerinde bir karakterdir. Bu karakterler

$$\mathcal{X}_u = (-1)^u\varepsilon(\mathbf{A})^{4u}, \ \ (u = 0, 1, \cdots, 5)$$

dönüşümleridir ve toplam 6 tanedir. f, $SL_2(\mathbb{Z})$ üzerinde $\frac{1}{2}\omega$ ağırlıklı bir modüler formu için $(f|_\omega\mathbf{A}) = \mathcal{X}_u f$ ise, f, $\mathcal{X}_u$ karakterine aittir denir.

$$\kappa := \frac{4u+\omega}{24}$$

diyelim ve

$$\mathbf{J}_m := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlayalım.

f'nin (k,m)-yinci bileşenini

$$f^{(r,k,m)}(\tau) := exp\left(-2\pi ir\frac{k+\kappa}{m}\right) f(\mathbf{J}_m\mathbf{U}^r\tau), \quad (r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < m)$$

olmak üzere

$$f^{(k,m)} := \frac{1}{m}(f^{(0,k,m)} + f^{(1,k,m)} + \cdots + f^{(m-1,k,m)})$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$f(\mathbf{U}\tau) = e(\mathbf{U};\tau)^{\omega}(f|_{\omega}\mathbf{U})(\tau) = exp\left(\frac{\omega\pi i}{12}\right)(-1)^u exp\left(\frac{4u\pi i}{3}\right) f(\tau) = exp(2\pi i\kappa)f(\tau)$$

yani

$$f(z+1) = q^{\kappa} f(z)$$

olduğundan dolayı $i\infty$ civarında $f(\tau) = q^{\kappa}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$ ve
$f^{(k,m)}(\tau) = q^{\frac{k+\kappa}{m}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nm+k}q^n$ yazılabilir.

$m \in \mathbb{Z}^+$ için $ebob(m,6)$=1, 2, 3 veya 6 olmasına durumuna göre sırasıyla

$$m_+ := m,\ 8m,\ 3m,\ veya\, 4m \tag{4.8}$$

ve $ebob(a, m_+) = 1$ ise $a_* = a$ (mod m) olsun. Buna göre c ve m tamsayıları iki şekilde bağıntılı olabilirler:

$$Q_0(m,c) : m_+ \Big| c, \text{ yani } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(m_+),$$

$$Q_1(m,c) : m \text{ çift ve } m_+ \Big| 2c, \text{ fakat } m_+ \not\Big| c.$$

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz .

Teorem 4.1.4 (Lewis, 1995)

f, $SL_2(\mathbb{Z})$ üzerinde $\frac{1}{2}\omega$ ağırlıklı $\mathcal{X}_u$ karakterine ait bir modüler form ve m pozitif bir tamsayı olsun ve $\mathbf{A} \in \Gamma_0(n)$ olmak üzere

$$\mathbf{A}_{(n)} := \begin{bmatrix} a(1-bc) & -b^2c/n \\ nc & d \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Her $0 \leq k < m$ ve her $\mathbf{A} \in SL_2(\mathbb{Z})$ için

(i) $Q_0(m,c)$ sağlanıyorsa,

$$k_A \equiv q^2 k + \kappa(a_*^2 - 1) \pmod{m} \;\; (0 \leq k_A < m)) \tag{4.9}$$

ve

$$u(m, \mathbf{A}) := \mathcal{X}_u(\mathbf{A})_{(m)} \varepsilon(\mathbf{A})_{(m)})^{\omega} \varepsilon(\mathbf{A})^{-\omega}$$

olmak üzere

$$(f^{(k,m)}|_{\omega}\mathbf{A}) = u(m,a) exp\left(2\pi i ab \frac{k+\kappa}{m}\right) f^{(k_A,m)} \tag{4.10}$$

dır.

(ii) $Q_1(m,c)$ sağlanıyorsa, $u(m,\mathbf{A})$'nın aynı değerleri için (4.10) doğrudur fakat

$$k_A \equiv a^2 k + \kappa(a_*^2 - 1) + 12\kappa m \pmod{m}$$

olur.

f, $\mathbb{H}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $[f] := \{uf \,:\, u \text{ 1'in bir kökü } \}$ diyelim. Teorem 4.1.4 bize, f, $SL_2(\mathbb{Z})$ üzerinde $\frac{1}{2}\omega$ ağırlıklı modüler form ve $m \in \mathbb{Z}^+$ ise $\Gamma_0(m_+)$ $[f^{(k,m)}] \to [(f^{(k,m)}|_{\omega}\mathbf{A}] = [f^{(k_A,m)}]$ dönüşümüyle

$$F^{(m)} := \{[f^{(0,m)}],\, [f^{(1,m)}],\, \cdots, [f^{(m-1,m)}]\}$$

kümesi üzerinde hareket ettiğini söyler. $\Gamma(m_+)$ açıkça bu küme üzerinde hareket eder. Dolayısıyla bu hareket $\Gamma_0(m_+)/\Gamma(m_+)$'nın bir hareketine indirgenir. Gerçekten de $(\Gamma_0(m_+)/\Gamma(m_+))^2 \cong \mathbf{U}_{m_+}^2 =: G_m$, $F^{(m)}$ üzerinde hareket eder. Orbitler için $F^{(m)}$ yi $[0, 1, \cdots, m-1]$ şeklinde ve $a^2 \in \mathbf{U}_m^2$'nin $k \in F^{(m)}$ üzerindeki hareketini $k \,\mathrm{o}\, a^2$ ile gösterelim. Bu durumda

$$k \,\mathrm{o}\, a^2 = a^2 k + \kappa(a^2 - 1)$$

dir.

$m > 3$ asal olsun. Bu durumda $m_+ = m$ olur. G_m'in üç tane orbiti vardır ve bu orbitler $\left(\dfrac{k+\kappa}{m}\right)$ Legendre sembolü ile belirlidir. $m = 11$ için bu orbitleri belirleyelim.

f, $\frac{1}{2}$ ağırlıklı ve $u = 5$ karakterine ait bir modüler form olsun. Buna göre $\kappa \equiv (4u+1)24^{-1} \pmod{11} \equiv 5$ olur.

$k = 0, 4, 7, 9$ ve 10 için $\left(\dfrac{k+5}{11}\right) = 1$,

$k = 1, 2, 3, 5$ ve 8 için $\left(\dfrac{k+5}{11}\right) = -1$ ve

$k = 6$ için $\left(\dfrac{k+5}{11}\right) = 0$ dır.

Yani $m = 11$ için orbitler $[0, 4, 7, 9, 10]$, $[1, 2, 3, 5, 8]$ ve $[6]$ şeklindedir. Bölüm 4.2 de $SL_2(\mathbb{Z})$ in $\Gamma_0(11)$ altgrubunun F_{11} nin bileşenleri üzerindeki hareketi ayrıntılı bir şekilde izah edilecektir.

4.2 $m = 11$ Durumunda Bileşenler Arasındaki İlişkiler

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\eta_n : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonunu

$$\eta_n(\tau) := \eta(n\tau) \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre $L_n := \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\eta_n(\tau) = \eta(L_n\tau) \tag{4.12}$$

yazılabilir.

$\mathbf{A} \in \Gamma_0(n)$ için $\mathbf{A}_n = L_n\mathbf{A}L_n^{-1} = \begin{bmatrix} a & nb \\ c/n & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta_n(\mathbf{A}\tau) &= \eta(n\mathbf{A}\tau)\eta(L_n\mathbf{A}\tau) \\ &= \eta(\mathbf{A}_nL_n\tau) = \varepsilon(\mathbf{A}_n)\sqrt{c\tau+d}\;\eta_n(\tau) \end{aligned}$$

ve

$$(\eta|_1\mathbf{A}) = \varepsilon(\mathbf{A})^{-1}\varepsilon(\mathbf{A}_n)\eta_n \tag{4.13}$$

olur.

Rademacher Theta-fonksiyonlarını

$$\Theta_{\mu,\nu}(\upsilon|\tau) = \sum_{n} (-1)^{\nu n} exp\left((n+\mu/2)^2 \pi i \tau\right) exp\left(2\pi i (n+\mu/2)\upsilon\right)$$

olarak tanımlamış ve

$$\Theta_{1,1}(\upsilon|\mathbf{A}\tau) = \varepsilon(\mathbf{A})^3 exp\left(\pi i c \upsilon^2 (c\tau+d)\right) \sqrt{c\tau+d} \quad \Theta_{1,1}(\upsilon(c\tau+d)|\tau) \tag{4.14}$$

olduğunu göstermiştir (Rademacher, 1972). Ayrıca

$$\Theta_{1,1}(\upsilon+1|\tau) = -\Theta_{1,1}(\upsilon|\tau)$$

özdeşliği sağlanır.

$n > 0$ ve r tamsayıları için

$$S_{n,r} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$S_{n,r}(\tau) := -exp((\pi r^2 \tau/n)\Theta_{1,1}(r\tau|n\tau) \tag{4.15}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$P(z;q^n)(q^n;q^n)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^n q^{n(n-1)/2}$$

Jacobi üçlü çarpımı (Andrews, 1972) ile

$$S_{n,r}(\tau) = q^{(n/2-r)^2/2n} P(q^r;q^n)(q^n;q^n)_\infty \tag{4.16}$$

elde edilir ve

$$S_{n,-r} = -S_{n,r} = S_{n,r+n} \tag{4.17}$$

olduğu görülür.

$\mathbf{A} \in \Gamma_0(n)$ olsun. (4.14) den

$$
\begin{aligned}
S_{n,r}(\mathbf{A}\tau) &= -exp(\pi i r^2 \mathbf{A}\tau/n)\Theta_{1,1}(r\mathbf{A}\tau | L_n \mathbf{A}\tau) \\
&= -exp(\pi i r^2 \mathbf{A}\tau/n)\Theta_{1,1}(r\mathbf{A}\tau | \mathbf{A} L_n \tau) \\
&= -\varepsilon(\mathbf{A}_n)^3 exp(\pi i r^2 \mathbf{A}\tau/n) exp\big(\pi i (r\mathbf{A}\tau)^2 c/n(c\tau+d)\big) \\
&\qquad \sqrt{c\tau+d}\ \Theta_{1,1}\big(r\mathbf{A}\tau(c\tau+d) \mid L_n\tau\big) \\
&= -\varepsilon(\mathbf{A}_n)^3 exp\Big(\pi i r^2 \mathbf{A}\tau/n\big(1+c(a\tau+b)\big)\Big) \\
&\qquad \sqrt{c\tau+d}\ \Theta_{1,1}\big(r(a\tau+b) \mid n\tau\big) \\
&= -\varepsilon(\mathbf{A}_n)^3 exp\big(\pi i r^2 a(a\tau+b)/n\big)\sqrt{c\tau+d}\,(-1)^{rb}\Theta_{1,1}(ra\tau \mid n\tau) \\
&= (-1)^{rb} - \varepsilon(\mathbf{A}_n)^3 exp\big(\pi i r^2 ab/n\big)\sqrt{c\tau+d}\, S_{n,ar}(\tau)
\end{aligned}
$$

bulunur ve

$$
(S_{n,r}|_1\mathbf{A}) = (-1)^{rb} exp(\pi i r^2 ab/n)\varepsilon(\mathbf{A}_n)^3 \varepsilon(\mathbf{A})^{-1}\, S_{n,ar} \tag{4.18}
$$

dir.

$m = 5, 7, 11$ ve $0 \leq k < m$ tamsayıları için

$$
\begin{aligned}
&f^{(k,m)} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \\
&f^{(k,m)}(\tau) := exp(-\pi i\tau/12)\mathrm{F}_m^{(k)}(q^{1/m})
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

Şimdi $m = 11$ durumunda $\prod \dfrac{1}{1-q^r}$ çarpımının bileşenleri arasındaki ilişkileri verelim. Kolaylık için $S_{11,r}$ yerine S_r yazacağız. (4.19) ve (4.16) ile 6. bileşeni kullanarak

$$
\begin{aligned}
f^{(6,11)} &= \frac{\eta_{11}^{11}}{\eta^{12}}\Bigg\{11\frac{S_1^7S_3^3}{S_5^7S_2^2S_4} + 11\frac{S_5^7S_4^3}{S_3^7S_1^2S_2} + 11\frac{S_3^7S_2^3}{S_4^7S_5^2S_1} - 11\frac{S_5^3S_2^7}{S_1^7S_4^2S_3} + 11\frac{S_4^7S_1^3}{S_2^7S_3^2S_5} \\
&\quad +154\frac{S_1^5S_3^2}{S_5^5S_2^2} - 154\frac{S_3^5S_2^2}{S_4^5S_5^2} - 154\frac{S_4^5S_1^2}{S_2^5S_3^2} + 154\frac{S_5^5S_4^2}{S_3^5S_1^2} + 154\frac{S_5^2S_2^5}{S_1^5S_4^2} \\
&\quad +319\frac{S_5^3S_2S_4}{S_3^3S_1^2} + 319\frac{S_4^3S_1S_5}{S_2^3S_3^2} - 319\frac{S_5S_2^3S_3}{S_1^3S_4^2} + 319\frac{S_3^3S_1S_2}{S_4^3S_5^2} + 319\frac{S_1^3S_3S_4}{S_5^3S_2^2} + 1166\Bigg\}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $\mathbf{A} \in \Gamma_0(11)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(S_1|_1\mathbf{A}) &= (-1)^b exp(\pi iab/11)\varepsilon(\mathbf{A}_{11})^3\varepsilon(\mathbf{A})^{-1}S_a \\
(S_2|_1\mathbf{A}) &= exp(4\pi iab/11)\varepsilon(\mathbf{A}_{11})^3\varepsilon(\mathbf{A})^{-1}S_{2a} \\
(S_3|_1\mathbf{A}) &= (-1)^b exp(9\pi iab/11)\varepsilon(\mathbf{A}_{11})^3\varepsilon(\mathbf{A})^{-1}S_{3a} \\
(S_4|_1\mathbf{A}) &= exp(16\pi iab/11)\varepsilon(\mathbf{A}_{11})^3\varepsilon(\mathbf{A})^{-1}S_{4a} \\
(S_5|_1\mathbf{A}) &= (-1)^b exp(3\pi iab/11)\varepsilon(\mathbf{A}_{11})^3\varepsilon(\mathbf{A})^{-1}S_{5a}
\end{aligned}
$$

dir. (4.7) ve (4.13) kullanılırsa $G_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}$ ya bağlı 1'in bir kökü olmak üzere

$$
\begin{aligned}
f^{(6,11)}|_{-1}\mathbf{A} &= G_{\mathbf{A}}\frac{\eta_{11}^{11}}{\eta^{12}}\Bigg\{11\Bigg[(-1)^b exp(-\pi iab)\left(\frac{S_a^7S_{3a}^3}{S_{5a}^7S_{2a}^2S_{4a}}-\frac{S_{5a}^3S_{2a}^7}{S_a^7S_{4a}^2S_{3a}}\right) \\
&+\frac{S_{5a}^7S_{4a}^3}{S_{3a}^7S_a^2S_{2a}}+\frac{S_{3a}^7S_{2a}^3}{S_{4a}^7S_{5a}^2S_a}+\frac{S_{4a}^7S_a^3}{S_{2a}^7S_{3a}^2S_{5a}}\Bigg] \\
&+154\Bigg[(-1)^b exp(-\pi iab)\left(-\frac{S_{3a}^5S_{2a}^2}{S_{4a}^5S_{5a}^2}+\frac{S_{5a}^2S_{2a}^5}{S_a^5S_{4a}^2}\right) \\
&+\frac{S_a^5S_{3a}^2}{S_{5a}^5S_{2a}^2}-\frac{S_{4a}^5S_a^2}{S_{2a}^5S_{3a}^2}+\frac{S_{5a}^5S_{4a}^2}{S_{3a}^5S_a^2}\Bigg] \\
&+319\Bigg[(-1)^b exp(-\pi iab)\left(-\frac{S_{5a}S_{2a}^3S_{3a}}{S_a^3S_{4a}^2}+\frac{S_a^3S_{3a}S_{4a}}{S_{5a}^3S_{2a}^2}\right) \\
&\frac{S_{5a}^3S_{2a}S_{4a}}{S_{3a}^3S_a^2}+\frac{S_{4a}^3S_aS_{5a}}{S_{2a}^3S_{3a}^2}+\frac{S_{3a}^3S_aS_{2a}}{S_{4a}^3S_{5a}^2}\Bigg]+1166\Bigg\}
\end{aligned}
$$

olur. $ad-bc=1$, $c\equiv 0 \pmod{11}$ olduğundan dolayı $a=2$ ise b tek değer alır ve $exp(-\pi iab)=1$ olur. $a=3$ ise b çift değer alır ve yine $exp(-\pi iab)=1$ dir. Benzer şekilde $a=4$ ve 5 için $exp(-\pi iab)=1$ olmaktadır. Dolayısıyla

$$
f^{(6,11)}|_{-1}\mathbf{A}=G_{\mathbf{A}}f^{(6,11)}
$$

dir.

$m=11$ durumunda (4.17) ve (4.18) dan dolayı $\mathbf{A}\in\Gamma_0(11)$ için a=2,3, 4 ve 5 durumlarını incelemek yeterlidir. Diğer bileşenler arasındaki ilişkiler;

$$f^{(0,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}}exp\,(20\pi ib/11)f^{(4,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(8\pi ib/11)f^{(7,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(18\pi ib/11)f^{(9,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(6\pi ib/11)f^{(10,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \end{cases}$$

$$f^{(4,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}}exp\,(14\pi ib/11)f^{(9,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(21\pi ib/11)f^{(10,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(6\pi ib/11)f^{(7,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(13\pi ib/11)f^{(0,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \end{cases}$$

$$f^{(7,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}}exp\,(4\pi ib/11)f^{(10,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(6\pi ib/11)f^{(4,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(8\pi ib/11)f^{(0,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(10\pi ib/11)f^{(9,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \end{cases}$$

$$f^{(9,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}}exp\,(12\pi ib/11)f^{(7,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(18\pi ib/11)f^{(0,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(2\pi ib/11)f^{(10,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(8\pi ib/11)f^{(4,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \end{cases}$$

$$f^{(10,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}}exp\,(16\pi ib/11)f^{(0,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(13\pi ib/11)f^{(9,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(10\pi ib/11)f^{(4,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(15\pi ib/11)f^{(7,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \end{cases}$$

$$f^{(1,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}}exp\,(2\pi ib/11)f^{(8,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(14\pi ib/11)f^{(5,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(4\pi ib/11)f^{(3,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b\ tek) \\ G_{\mathbf{A}}exp\,(16\pi ib/11)f^{(2,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b\ \text{ç}ift) \end{cases}$$

$$f^{(2,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}} exp\,(6\pi ib/11) f^{(1,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b \; tek) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(9\pi ib/11) f^{(3,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b \; çift) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(12\pi ib/11) f^{(8,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b \; tek) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(15\pi ib/11) f^{(5,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b \; çift) \end{cases}$$

$$f^{(3,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}} exp\,(10\pi ib/11) f^{(5,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b \; tek) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(4\pi ib/11) f^{(1,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b \; çift) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(20\pi ib/11) f^{(2,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b \; tek) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(14\pi ib/11) f^{(8,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b \; çift) \end{cases}$$

$$f^{(5,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}} exp\,(18\pi ib/11) f^{(2,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b \; tek) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(16\pi ib/11) f^{(8,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b \; çift) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(14\pi ib/11) f^{(1,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b \; tek) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(12\pi ib/11) f^{(3,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b \; çift) \end{cases}$$

$$f^{(8,11)}|_{-1}\mathbf{A} = \begin{cases} G_{\mathbf{A}} exp\,(8\pi ib/11) f^{(3,11)} & a=2 \;\; ise \quad (b \; tek) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(\pi ib/11) f^{(2,11)} & a=3 \;\; ise \quad (b \; çift) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(16\pi ib/11) f^{(5,11)} & a=4 \;\; ise \quad (b \; tek) \\ G_{\mathbf{A}} exp\,(9\pi ib/11) f^{(1,11)} & a=5 \;\; ise \quad (b \; çift) \end{cases}$$

şeklindedir. Buna göre $\mathbf{A} \in \Gamma_0(11)$ ve $a = 2, 3, 4$ veya 5 olmak üzere $\mathbf{A}$ matrisi

$$\{[f^{(0,11)}], [f^{(1,11)}], \cdots, [f^{(10,11)}]\}$$

kümesi üzerinde

$$[f^{(k,11)}] \to [f^{((a^2k+5(a^2-1)) \pmod{11},\ 11)}]$$

dönüşümüyle hareket eder.

5. THETA FONKSİYONLARI ve ELİPTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde Lemma 2.3.2 nin nasıl genelleştirilebileceği izah edilecektir.

Hirschhorn (1987)

$$48\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{10} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+n}\Big\{(6m+3)^3(6n+1)-(6m+3)(6n+1)^3\Big\}q^{\frac{1}{2}(3m^2+3m+3n^2+n)} \quad (5.1)$$

eşitliğini vermiştir. Öncelikle

$$Q(b) := \left[y^b; y^{3m}\right]_\infty (y^{3m}; y^{3m})_\infty \qquad 1 \leq b < 3m \quad (5.2)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (5.1) eşitliğinin sağ tarafını düzenlemek için

$$\begin{aligned}[a;q]_\infty[b;q]_\infty[ab;q]_\infty[ab^{-1};q]_\infty(q)^2_\infty &= [a^3;q^3]_\infty(q^3;q^3)^2_\infty\left\{[b^3q;q^3]_\infty - b[b^3q^2;q^3]_\infty\right\}\\ &\quad -ab^{-1}[b^3;q^3]_\infty(q^3;q^3)^2_\infty\left\{[a^3q;q^3]_\infty - a[a^3q^2;q^3]_\infty\right\}\end{aligned} \quad (5.3)$$

Winquist özdeşliğine (Winquist, 1969) ve

$$[z;q]_\infty(q;q)_\infty = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m z^m q^{m(m-1)/2} \quad (5.4)$$

Jacobi üçlü çarpımına ihtiyaç duyulmaktadır.

(a,b,q) yerine (y^r, y^s, y^m) alınırsa (5.3) eşitliği

$$\begin{aligned}P(r)P(s)P(r+s)P(r-s)P^2_m(0) &= Q(3r)\Big\{Q(3r+m) - y^sQ(3s+2m)\Big\}\\ &\quad -y^{r-s}Q(3s)\Big\{Q(3r+m) - y^rQ(3r+22)\Big\}\end{aligned} \quad (5.5)$$

haline gelir. (5.5) da $m = 13$ için (r,s) yerine sırasıyla $(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),$ $(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(4,3),(4,2),(4,1),(3,2),(3,1),(2,1)$ alınırsa

$$Q(18)Q(11) + Q(18)y^3Q(2) - yQ(15)Q(8) - y^2Q(15)Q(5) = P^2(0)P(1)P(2)P(5)P(6)$$
$$Q(18)Q(14) - Q(18)y^4Q(1) - y^2Q(12)Q(8) - y^3Q(12)Q(5) = P^2(0)P(2)P(3)P(4)P(6)$$
$$Q(18)Q(17) - Q(18)y^3Q(4) - y^3Q(9)Q(8) - y^4Q(9)Q(5) = P^2(0)P^2(3)P(4)P(6)$$
$$Q(18)Q(19) - Q(18)y^2Q(7) - y^4Q(6)Q(8) - y^5Q(6)Q(5) = P^2(0)P(2)P(4)P(5)P(6)$$
$$Q(18)Q(16) - Q(18)yQ(10) - y^5Q(3)Q(8) - y^6Q(3)Q(5) = P^2(0)P(6)^2P(1)P(5)$$
$$Q(15)Q(14) - Q(15)y^4Q(1) - yQ(12)Q(11) - y^4Q(12)Q(2) = P^2(0)P(4)^2P(1)P(5)$$
$$Q(15)Q(17) - Q(15)y^3Q(4) - y^2Q(9)Q(11) - y^5Q(9)Q(2) = P^2(0)P(5)^2P(2)P(3)$$
$$Q(15)Q(19) - Q(15)y^2Q(7) - y^3Q(6)Q(11) - y^6Q(6)Q(2) = P^2(0)P(2)P(3)P(5)P(6)$$
$$Q(15)Q(16) - Q(15)yQ(10) - y^4Q(3)Q(11) - y^7Q(3)Q(2) = P^2(0)P(1)P(4)P(5)P(6)$$
$$Q(12)Q(17) - Q(12)y^3Q(4) - yQ(9)Q(14) + y^5Q(9)Q(1) = P^2(0)P(1)P(3)P(4)P(6)$$
$$Q(12)Q(19) - Q(12)y^2Q(7) - y^2Q(6)Q(14) + y^6Q(6)Q(1) = P^2(0)P(2)^2P(4)P(6)$$
$$Q(12)Q(16) - Q(12)yQ(10) - y^3Q(3)Q(14) + y^7Q(3)Q(1) = P^2(0)P(1)P(3)P(4)P(5)$$
$$Q(9)Q(19) - Q(9)y^2Q(7) - yQ(6)Q(17) + y^4Q(6)Q(4) = P^2(0)P(1)P(2)P(3)P(5)$$
$$Q(9)Q(16) - Q(9)yQ(10) - y^2Q(3)Q(17) + y^5Q(3)Q(4) = P^2(0)P(1)P(2)P(3)P(4)$$
$$Q(6)Q(16) - Q(6)yQ(10) - yQ(3)Q(19) + y^3Q(3)Q(7) = P^2(0)P(1)^2P(2)P(3)$$

özdeşlikleri elde edilir. (5.1) eşitliğinin sağ tarafı q nun kuvvetlerine göre düzenlendikten sonra yukarıdaki onbeş eşitlik ve Jacobi üçlü çarpımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{10} \equiv\ & P^2(0)\Big\{P(2)P(4)P(5)P(6) + 3P^2(3)P(4)P(6)q - 4P(1)P(5)P(6)^2q^2 \\ & -4P(2)P(3)P(5)P(6)q^3 - P(2)P(3)P^2(5)q^4 \\ & +\Big[-2P(2)P(3)P(4)P(6) + 6P(1)P(4)P(5)P(6) + 5yP(1)P(2)P(3)P(5)\Big]q^5 \\ & +y^2P^2(1)P(2)P(3)q^6 - 4P(1)P(2)P(3)P(4)q^7 + 4P(1)P^2(4)P(5)q^8 \\ & -3P^2(2)P(4)P(6)q^9 + P(1)P(3)P(4)P(6)q^{10} - 3P(1)P(3)P(4)P(5)q^{11} \\ & +3P(1)P(2)P(5)P(6)q^{12}\Big\} \pmod{13} \qquad (5.6)\end{aligned}$$

kongruansı bulunur.

$m = 13$ için Lemma 2.3.1 ve Lemma 2.1.1 den sırasıyla

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = P(0)\left\{\frac{P(4)}{P(2)} - q\frac{P(6)}{P(3)} - q^2\frac{P(2)}{P(1)} + q^5\frac{P(5)}{P(4)} + q^7 + q^9 y\frac{P(1)}{P(6)} - q^{12}\frac{P(3)}{P(5)}\right\} \qquad (5.7)$$

ve

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv P(0)\Big\{P(6)-3P(5)q-11P(1)yq^2+5P(4)q^3-7P(3)q^6+9P(2)q^{10}\Big\} \pmod{13} \quad (5.8)$$

elde edilir. Şimdi ise

$$\prod(1-q^r)^{10}\prod(1-q^r)^3 \equiv \prod(1-q^r)^{13} \equiv \prod(1-y^r) \equiv P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)P(6) \pmod{13}$$

yazalım. Bu kongruansta (5.7), (5.8) ve (5.6) yerlerine yazıldıktan sonra q'nun katsayıları sadeleştirilirken

$$yP(1)P(2)P(3)P(5) - P(2)P(3)P(4)P(6) + P(1)P(4)P(5)P(6) = 0. \qquad (5.9)$$

şeklinde yeni bir eşitlik ile karşılaşılmaktadır. Bu ise Lemma 2.3.2 den daha genel bir sonuç olduğunu akla getirmektedir. Lemma 2.3.2 yi genelleştirmek Theta Fonksiyonları ve Eliptik Fonksiyonlar teorisine dayanmaktadır ve sonraki bölümde bu teoriler kısaca izah edilecektir.

Burada not edilmesi gereken bir durum bulunmaktadır. $m = 11$ için (5.1) düzenlenirse

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{10} \equiv\ & P^2(0)\Big\{P(2)P(3)P(4)P(5) + P(1)P(4)P^2(5)q + 2P(2)P^2(3)P(5)q^2 \\ & +3P^2(2)P(4)P(5)q^3 + 5P(1)P(3)P(4)P(5)q^4 + 7P(1)P(3)P^2(4)q^5 \\ & +4P(1)P(2)P(4)P(5)q^7 + 6yP^2(1)P(2)P(3)q^8 + 8P(1)P(2)P(3)P(5)q^9 \\ & +9P(1)P(2)P(3)P(4)q^{10}\Big\} \pmod{11} \qquad (5.10)\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (5.10)

$$\sum_{k=0}^{10} \mathrm{F}_{11}^{(k)} q^k \equiv \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r} \equiv \prod_{r=1}^{\infty} \frac{(1-q^r)^{10}}{1-y^r} \equiv \frac{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{10}}{P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)} \pmod{11}$$

kongruansında yerine yazılırsa $\prod \frac{1}{1-q^r}$ çarpımının 11 modülündeki kongruans özellikleri farklı bir yöntemle bulunmuş olur.

5.1 Theta Fonksiyonları

Önceki bölümde görüldüğü gibi $P(a)$ fonksiyonları aslında Theta Fonksiyonları olarak karşımıza çıkmaktadırlar. $\tau \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ olmak üzere $q := e^{\pi i \tau}$ yazalım. Bu durumda $|q| < 1$ dir.

$$\Theta(z,q) := \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} Cos 2nz$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon

$$\Theta(z+\pi, q) = \Theta(z,q),$$
$$\Theta(z+\pi\tau, q) = -q^{-1} e^{-2iz} \Theta(z,q)$$

olduğundan z nin bir qua-fonksiyonudur (quasi-doubly periodic). z yi π ya da $\pi\tau$ kadar artırmak ile $\Theta(z,q)$ yu 1 ya da $-q^{-1}e^{-2iz}$ ile çarpmak aynı etkiyi yapar. Bu yüzden 1 ve $-q^{-1}e^{-2iz}$, sırasıyla π ve $\pi\tau$ periodlarının period çarpanları olarak adlandırılır.

$\Theta(z,q)$ yerine $\Theta_4(z,q)$ yazdıktan sonra theta fonksiyonları ise aşağıdaki gibi tanımlanır (Whittaker and Watson, 1990);

$$\begin{aligned}
\Theta_1(z,q) &:= -i\sum(-1)^n 2q^{(n+1/2)^2}e^{(2n+1)\pi iz} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}Sin(2n+1)z \\
\Theta_2(z,q) &:= \sum q^{(n+1/2)^2}e^{(2n+1)\pi iz} = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}Cos(2n+1)z \\
\Theta_3(z,q) &:= \sum q^{n^2}e^{2\pi inz} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}Cos2nz \\
\Theta_4(z,q) &:= \sum(-1)^n q^{n^2}e^{2\pi inz} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}Cos2nz
\end{aligned}$$

$\Theta_1(z), \Theta_2(z), \Theta_3(z)$ ve $\Theta_4(z)$ nin sıfırları sırasıyla 0, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$ ve $\frac{1}{2}\pi\tau$ dur ve Θ_1, z nin tek, diğer üç Θ-fonksiyonu ise z nin çift fonksiyonudur.

Theta fonksiyonlarının sonsuz çarpımlar ile gösterimleri aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
\Theta_1(z;q) &= iq^{1/4}z^{-1/2}\,P(z;q^2)\,P(q^2;q^2) \\
\Theta_2(z;q) &= q^{1/4}z^{-1/2}\,P(-z;q^2)\,P(q^2;q^2) \\
\Theta_3(z;q) &= P(-zq;q^2)\,P(q^2;q^2) \\
\Theta_4(z;q) &= P(zq;q^2)\,P(q^2;q^2)
\end{aligned}$$

ve aralarındaki ilişkiler;

$M = q^{1/4}e^{iz}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Theta_1(z) &= -\Theta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = -iM\Theta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = -iM\Theta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right) \\
\Theta_2(z) &= M\Theta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = M\Theta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = \Theta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) \\
\Theta_3(z) &= \Theta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = M\Theta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = M\Theta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right) \\
\Theta_4(z) &= -iM\Theta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = iM\Theta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = \Theta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir (Whittaker and Watson, 1990). Theta fonksiyonlarının aralarındaki ilişkileri araştırmak için kullanılan en temel yöntem Theta fonksiyonlarını kullanarak bir eliptik fonksiyon inşa etmektir. Sonraki bölümde Eliptik fonksiyonlar kısaca tanıtılacaktır.

5.2 Eliptik Fonksiyonlar

f fonksiyonu ve $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ için $f(z+\omega_1) = f(z)$, $f(z+\omega_2) = f(z)$ olsun. $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ ise f, iki periodlu (doubly periodic) fonksiyon olarak adlandırılır. $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{R}$ olduğu taktirde f fonksiyonu tek periodlu bir fonksiyon haline gelir.

$\mathbb{C}$ üzerinde meromorfik ve iki periodlu bir fonksiyona Eliptik fonksiyon adı verilir. $Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ alınır, aksi halde ise ω_1 ile ω_2 yer değiştirilebilir.

ω_1 ve ω_2, bir f eliptik fonksiyonunun periodu ise m ve n tamsayıları için $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ de period olur. Lineer bağımsız ω_1 ve ω_2, f'nin temel (fundemental) periodları olarak adlandırılır. ω_1 ve ω_2 bir latis oluştururlar ve aynı latis için $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ ve $mq - np = 1$ olmak üzere $\omega_1' = m\omega_1 + n\omega_2$ ve $\omega_2' = p\omega_1 + q\omega_2$ noktaları da temel periodlardır. Eliptik fonksiyonlar teorisindeki bu temel periodlar, trigonometrik fonksiyonların periodu ile aynı rolü oynamaktadırlar.

ω_1 ve ω_2 temel periodlar ise $z, z+\omega_1, z+\omega_2$ ve $z+\omega_1+\omega_2$ vektörlerinin oluşturduğu paralelkenar, temel paralelkenar, temel domain veya hücre (cell) olarak adlandırılır. Burada hücre kelimesi tercih edilecektir.

Eliptik fonksiyonlar, eliptik integrallerin inversidir ve bu fonksiyonların iki standart formu vardır: Weierstrass eliptik fonksiyonları ve Jacobi eliptik fonksiyonları. İki teori arasındaki en önemli fark ise periodik bir latisin köşelerinde Weierstrass eliptik fonksiyonlarının, rezidüleri sıfır olan, 2. mertebeden kutup noktaları varken Jacobi eliptik fonksiyonlarının ise rezidüleri ters işaretli, iki basit kutup noktasının olmasıdır.

Eliptik Fonksiyonların Özellikleri: (Chandrasekharan,1985), (Whittaker and Watson, 1990)

f Elliptik bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

• f'nin bir hücredeki kutuplarının sayısı sonludur,

• f'nin bir hücredeki köklerinin sayısı sonludur,

• f'nin bir hücrede kutuplarındaki rezidülerinin toplamı sıfırdır,

• Lioville teoremi: Herhangi bir hücrede kutup noktası yoksa f, sabit fonksiyondur,

• $f(z) = c$ eşitliğinin köklerinin sayısı c sabitinden bağımsız ve $f(z)$'nin kutuplarının sayısına (mertebe olarak adlandırılır) eşittir,

• f'nin mertebesi ≥ 2 dir, yani mertebesi 1 olan eliptik fonksiyon yoktur,

• f'nin türevi aynı periodlara sahip yine bir eliptik fonksiyondur.

Ayrıca

• Aynı temel periodlara sahip eliptik fonksiyonların kümesi bir cisimdir .

5.3 Theta Fonksiyonları ve $P(a)$ Kuvvet Serileri

w, x, y, z ile w', x', y', z' kompleks sayıları

$$\begin{aligned} 2w' &= -w + x + y + z \\ 2x' &= w - x + y + z \\ 2y' &= w + x - y + z \\ 2z' &= w + x + y - z \end{aligned}$$

eşitlikleri ile bağıntılı olmak üzere $[r] := \Theta_r(w)\Theta_r(x)\Theta_r(y)\Theta_r(z)$ ve $[r]' := \Theta_r(w')\Theta_r(x')\Theta_r(y')\Theta_r(z')$ şeklinde tanımlayalım.

$$T(z) := \frac{-[1]' + [2]' + [3]' + [4]'}{[3]}$$

olarak alınırsa $T(z)$ periodları π ve $\pi\tau$ olan bir eliptik fonksiyon olur. Ayrıca $T(z)$ nin bir tek kutup noktası olabilir ve bu nokta $\Theta_3(z)$ nin sıfırıdır. Yani $mertebe(T) \leq 1$ dir. Fakat eliptik fonksiyonların mertebeleri 2 den büyük olduğu için bu nokta $T(z)$ nin kutup noktası değildir. Dolayısıyla Liouville Teoreminden $T(z)$ sabit bir fonksiyondur, yani

$$T(z) = A$$

olacak şekilde bir $A \in \mathbb{C}$ vardır ve buradan ise

$$A[3] = -[1]' + [2]' + [3]' + [4]' \tag{5.11}$$

yazılır. (5.11) ifadesinde $w = x = y = z = 0$ alınırsa $A = 2$ olarak bulunur.

$$2[3] = -[1]' + [2]' + [3]' + [4]' \tag{5.12}$$

olur. (5.12) de w, x, y, z değişkenleri $\frac{1}{2}\pi$ artırılırsa

$$2[4] = [1]' - [2]' + [3]' + [4]' \tag{5.13}$$

ve (5.12) ile (5.13) de w, x, y, z değişkenleri $\frac{1}{2}\pi\tau$ artırılırsa

$$2[2] = [1]' + [2]' + [3]' - [4]' \tag{5.14}$$

$$2[1] = [1]' + [2]' - [3]' + [4]' \tag{5.15}$$

elde edilir.

(5.12),(5.13),(5.14) ve (5.15) den

$$2[4]' = [1] - [2] + [3] + [4] \tag{5.16}$$

bulunur.

(5.16) da w, x, y, z yerine sırasıyla $w, -x, -y, -z$ alınırsa

$$\begin{aligned} &2\Theta_4\left(\frac{-w-x-y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{w+x-y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{w-x+y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{w-x-y+z}{2}\right) \\ &= \Theta_1(w)\Theta_1(-x)\Theta_1(-y)\Theta_1(-z) - \Theta_2(w)\Theta_2(-x)\Theta_2(-y)\Theta_2(-z) + \\ &\Theta_3(w)\Theta_3(-x)\Theta_3(-y)\Theta_3(-z) + \Theta_4(w)\Theta_4(-x)\Theta_4(-y)\Theta_4(-z) \end{aligned} \tag{5.17}$$

ve (5.16) da w, x, y, z yerine bu kez sırasıyla $-w, -x, -y, -z$ alınırsa

$$\begin{aligned} &2\Theta_4\left(\frac{w-x-y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{-w+x-y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{-w-x+y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{-w-x-y+z}{2}\right) \\ &= \Theta_1(-w)\Theta_1(-x)\Theta_1(-y)\Theta_1(-z) - \Theta_2(-w)\Theta_2(-x)\Theta_2(-y)\Theta_2(-z) + \\ &\Theta_3(-w)\Theta_3(-x)\Theta_3(-y)\Theta_3(-z) + \Theta_4(w)\Theta_4(-x)\Theta_4(-y)\Theta_4(-z) \end{aligned} \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.17) den (5.18) çıkarılıp $\Theta_1(z)$ nin tek, $\Theta_2(z), \Theta_3(z)$ ve $\Theta_4(z)$ nin çift fonksiyon olması göz önüne alınırsa

$$\Theta_1(w)\Theta_1(x)\Theta_1(y)\Theta_1(z)-$$

$$\Theta_4\left(\frac{w-x-y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{-w+x-y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{-w-x+y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{-w-x-y+z}{2}\right)+$$

$$\Theta_4\left(\frac{-w-x-y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{w+x-y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{w-x+y-z}{2}\right)\Theta_4\left(\frac{w-x-y+z}{2}\right)=0 \tag{5.19}$$

bulunur. (5.19) ifadesinde $\alpha = e^{2iw}, \beta = e^{2ix}, \gamma = e^{2iy}\zeta = e^{2iz}$ alınıp $q^2 \to q$ yazılırsa

$$(\alpha\beta\gamma\zeta)^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}[\alpha;q][\beta;q][\gamma;q][\zeta;q]-$$

$$\left[(\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}};q\right]\left[(\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}};q\right]\left[(\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}};q\right]\left[(\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\zeta)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}};q\right]+$$

$$\left[(\alpha\beta\gamma\zeta)^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}};q\right]\left[(\alpha\beta\gamma^{-1}\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}};q\right]\left[(\alpha\beta^{-1}\gamma\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}};q\right]\left[(\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\zeta)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}};q\right]=0$$

eşitliği elde edilmiş olur. Son olarak $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ ve q yerine sırasıyla y^a, y^b, y^c, y^d ve y^m yazılırsa aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.3.1 $m, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$x := \frac{m-(a+b+c+d)}{2}$$

olsun ve $a, b, c, d, a+x, b+x, c+x, d+x, x, a+b+x, a+c+x, a+d+x$ lerin hiçbirisi m ile bölünmesin. Bu durumda

$$y^x P(a)P(b)P(c)P(d) - P(a+x)P(b+x)P(c+x)P(d+x) + P(x)P(a+b+x)P(a+c+x)P(a+d+x) = 0 \tag{5.20}$$

dir.

m yi asal olarak alacağımız için açık olarak $a+b+c+d$ toplamını bir tek sayı olacak şekilde seçmemiz gerekir. Bu yüzden a, b, c ve d nin hepsi aynı anda ya da ikişer ikişer eşit olamaz. Şimdi ise bu teoremi kullanarak m =7, 11, 13 ve 17 için bulunabilecek eşitlikleri verelim.

$m = 7$ için $a+b+c+d$ nin alabileceği tek değer 5 dir; $a = b = c = 1$, $d = 2$ alınırsa;

$$yP^3(1)P(2) - P^3(2)P(3) + P^3(3)P(1) = 0$$

bulunur.

$m = 11$ için $a + b + c + d$ nin alabileceği değerler 5,7 ve 9 olabilir.

$a + b + c + d = 5$ olabilmesi sadece $a = b = c = 1$, $d = 2$ eşitlikleri ile mümkündür. Bu ise;

$$y^3P^3(1)P(2) - P^3(4)P(5) + P^3(5)P(3) = 0$$

eşitliğini verir.

$a+b+c+d = 7$ için $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 4), (1, 1, 2, 3), (1, 2, 2, 2)$ alınabilir. (a, b, c, d) dörtlüsünün bu değerleri için sırasıyla

$$\begin{aligned}
y^2P^3(1)P(4) - P^3(3)P(5) + P^3(4)P(2) &= 0 \\
y^2P^2(1)P(2)P(3) - P^2(3)P(4)P(5) + P^2(5)P(2)P(4) &= 0 \\
y^2P^3(2)P(1) - P^3(4)P(3) + P^3(5)P(2) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$a+b+c+d = 9$ için $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 6), (1, 1, 2, 5), (1, 1, 3, 4), (1, 2, 2, 4), (2, 2, 2, 3)$, $(1, 2, 3, 3)$ olabilir. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned}
yP^3(1)P(5) - P^3(2)P(4) + P^3(3)P(1) &= 0 \\
yP^2(1)P(2)P(5) - P^2(2)P(3)P(5) + P^2(4)P(1)P(3) &= 0 \\
yP^2(1)P(3)P(4) - P^2(2)P(4)P(5) + P^2(5)P(1)P(3) &= 0 \\
yP^2(2)P(1)P(4) - P^2(3)P(2)P(5) + P^2(4)P(1)P(5) &= 0 \\
yP^3(2)P(3) - P^3(3)P(4) + P^3(5)P(1) &= 0 \\
yP^2(3)P(1)P(2) - P^2(4)P(2)P(3) + P^2(5)P(1)P(4) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

a, b, c, d lerin hepsinin farklı olması durumunda teorem $m = 11$ için herhangi bir eşitlik vermez. Çünkü bunun için yazılabilecek tek dörtlü (1,2,3,5) dir. Fakat bu durumda $a + b + c + d = 11$ olur.

$m = 7$ ve $m = 11$ için yukarıda verilen eşitlikler Lemma 2.3.2 den de bulunur. Benzer şekilde Lemma 2.3.2, $m = 13$ için 20 ve $m = 17$ için 56 tane eşitlik verir. (5.20) ise daha fazla olarak $m = 13$ için 1, $m = 17$ için 8 adet yeni eşitlik vermektedir.

$m = 13$ için

$(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 5)$ alırsak aşağıdaki eşitliği buluruz;

$$yP(1)P(2)P(3)P(5) - P(2)P(3)P(4)P(6) + P(1)P(4)P(5)P(6) = 0.$$

$m = 17$ için a, b, c, d lerin hepsi farklı olacak şekilde toplam 8 tane dörtlü yazılabilir;

$(1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 7), (1, 2, 4, 6), (1, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 9), (1, 2, 4, 8), (1, 2, 5, 7), (2, 3, 4, 6).$

(a, b, c, d) nin bu değerleri için aşağıdaki eşitlikler bulunur;

$$
\begin{aligned}
y^3P(1)P(2)P(3)P(5) - P(4)P(5)P(6)P(8) + P(3)P(6)P(7)P(8) &= 0\\
y^2P(1)P(2)P(3)P(7) - P(3)P(4)P(5)P(8) + P(2)P(5)P(6)P(7) &= 0\\
y^2P(1)P(2)P(4)P(6) - P(3)P(4)P(6)P(8) + P(2)P(5)P(7)P(8) &= 0\\
y^2P(1)P(3)P(4)P(5) - P(3)P(5)P(6)P(7) + P(2)P(6)P(7)P(8) &= 0\\
yP(1)P(2)P(3)P(8) - P(2)P(3)P(4)P(7) + P(1)P(4)P(5)P(6) &= 0\\
yP(1)P(2)P(4)P(8) - P(2)P(3)P(5)P(8) + P(1)P(4)P(6)P(7) &= 0\\
yP(1)P(2)P(5)P(7) - P(2)P(3)P(6)P(8) + P(1)P(4)P(7)P(8) &= 0\\
yP(2)P(3)P(4)P(6) - P(3)P(4)P(5)P(7) + P(1)P(6)P(7)P(8) &= 0.
\end{aligned}
$$

(5.20) özdeşliğini vermemizin sebebi, daha önce de belirttiğimiz gibi $m = 13$ durumunda $\prod \frac{1}{1-q^r}$ çarpımının bileşenlerini hesaplamak için Lemma 2.3.2 nin yetersiz kalmasıdır. Bu çalışmaya başlarken amacımız $\prod \frac{1}{1-q^r}$ çarpımınının 13 modülündeki kongruans özelliklerini hesaplamaktı. $\prod \frac{1}{1-q^r}$ nin $m = 13$ durumundaki bileşenler ve kongruans özellikleri sonuçlandırılmak üzeredir.

KAYNAKLAR

Andrews, G.E. 1976. The Theory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics and Its Application, Addison-Wesley, London.

Andrews, G.E. and Garvan, F.G. 1988. Dyson's Crank of a Partition, Bulletin of the American Mathematical Society, 167-171.

Atkin, A.O.L. 1967. Proof a Conjecture of Ramanujan, Glasgow Mathematical Journal, 8, 14 - 32

Atkin, A.O.L. and Swinnerton-Dyer, H.P.F. 1954. Some Properties of Partitions, Proceedings of the London Mathematical Society, 4 , 84-106.

Chanrasekharan, K. 1985. Eliptic Functions, Springer - Verlag, Berlin, New York

Dyson, F.J. 1944. Some Guesses in the Theory of Partitions, Eureka, Cambridge, 8, 10-15.

Dyson, F.J. 1989. Mapping and Symmetries of Partitions, Journal of Combinatorial Theory, Series A , 51.

Ekin, A.B. 1993. The Rank and the Crank in the Theory of Partition, D.Phil Thesis, University of Sussex.

Garvan, F.G. 1987. New Combinatorial Interpretations of Ramanujan's Partition Congruences Mod 5,7 and 11, Transactions of the American Mathematical Society, 305, 47-77.

Hardy, G. H. and Ramanujan, S. 1918. Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis, Proc. London Math. Soc. 17, 75-115.

Hardy, G.H. and Wright, E.M. 1938. An Introduction to the theory of numbers, 1st ed. Oxford University Press, Oxford.

Hirschhorn, M.D. 1987. A Generalization of Winquist's Identity and A Conjecture of Ramanujan, Journal of the Indian Mathematical Society, 51.

Hirschhorn, M. D. 1988. A simple proof of Winquist's identity and a conjecture of Ramanujan, J.I.M.S. Ramanujan Centenary Volume.

Kolberg, O. 1957. Some Identities Involving the Partition Function, Mathematica Scandinavica, 5, 77 - 92.

Lee, H. 2006. Double-perfect partitions, Discrete Mathematics, 306, 519-525.

Lehner, J. 1949. Divisibility Properties of the Fourier Coefficients of the Modular Invariants, American Journal of Mathematics, 71, 136 - 148.

Lehner, J. 1949. Further Congruence Properties of the Fourier Coefficients of the Modular Invariants , American Journal of Mathematics, 71 , 373 - 236.

Lewis, R. 1995. The Components of Modular Forms, Journal of the London Mathematical Society, 52, 245 - 254.

Rademacher, H. 1972. Topics in Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York.

Ramanujan, S. 1927. Some Properties of p(n), the Number of Partitions of n, Paper 25 of Collected Papers of S. Ramanujan, Cambridge University Press, London, New York.

Rankin, R. A. 1977. Modular Forms and Function, Cambridge University Press, London.

Watson, G.N. 1938. Ramanujans Vermutung über Zerfallungsanzahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 179, 97 - 128.

Whittaker, E.T. and Watson, G.N. 1990. A Course in Modern Analysis, 4th ed. Cambridge, England.

Winquist, L. 1969. An Elementary Proof of, J. of Combinatorial Theory, 6, 56-69.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Göksal BİLGİCİ

Doğum Yeri : Kayseri / Devederesi

Doğum Tarihi : 08.09.1975

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Ankara Başkent Lisesi, 1992

Lisans : Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Bölümü, 1996

Yüksek Lisans : Gazi Ün., Fen Bil. Enst., Matematik Eğitimi Bölümü,1999

Çalıştığı Kurumlar:

Gazi Üniversitesi: 1998 -