ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLI MORREY UZAYLARINDA BİR SINIF ALTLİNEER OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI VE BAZI UYGULAMALARI

Turhan KARAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2012

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLI MORREY UZAYLARINDA BİR SINIF ALTLİNEER OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI VE BAZI UYGULAMALARI

Turhan KARAMAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Eş Danışman: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır ve burada tez hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ileri bölümlerde gerekli olan temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş Morrey uzaylarında altlineer ve altlineer komütatör operatörlerin sınırlılığı elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında altlineer ve altlineer komütatör operatörlerin sınırlılığı elde edilmiştir. Beşinci bölümde, elde edilen sonuçların bazı uygulamaları verilmiştir.

Temmuz 2012, 71 sayfa

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Morrey uzayları, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları, altlineer operatörler, komütatör.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

BOUNDEDNESS OF SOME CLASSES OF SUBLINEAR OPERATORS ON GENERALIZED WEIGHTED MORREY SPACES AND SOME APPLICATIONS

Turhan KARAMAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Co-Supervisor: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction and general information about thesis are given. In the second chapter, basic concepts and definitions which are needed in the further chapters are given. In the third chapter, boundedness of sublinear and sublinear commutator operators are obtained in generalized Morrey spaces. In the fourth chapter, boundedness of sublinear and sublinear commutator operators are obtained in generalized weighted Morrey spaces. In the fifth chapter, some applications of obtained results are given.

July 2012, 71 pages

Key Words: Generalized Morrey spaces, generalized weighted Morrey spaces, sublinear operators, commutator.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ve eş danışmanım Sayın Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e (Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü) ve çalışmalarım süresince benden desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Turhan KARAMAN
Ankara, Temmuz 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
${}^cE$	E kümesinin tümleyeni
χ_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
v_n	Birim yuvarın hacmi
$f*g$	f ile g fonksiyonlarının konvolüsyonu
supp$f$	f fonksiyonunun desteği
$\hat{f}$	f nin Fourier dönüşümü
D^α	$\lvert\alpha\rvert$ mertebeden diferensiyel operatörü
A_p	Muckenhoupt sınıfı
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	Kendisi ve bütün türevleri sürekli olan fonksiyonların sınıfı
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de kompakt destekli bütün C^∞ fonsiyonlarının sınıfı
L_p	p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$L^{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$	$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$M_{p,\lambda}$	Morrey uzayı
$L_{p,\kappa}(w)$	Ağırlıklı Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$WM_{p,\varphi}$	Zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}(w)$	Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı
$WM_{p,\varphi}(w)$	Zayıf genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı

1. GİRİŞ

Harmonik analizde klasik operatörlerin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki ağırlıklı eşitsizliklerinin çalışmaları çok önemli bir yer tutmaktadır. Klasik Morrey uzayları, ikinci mertebeden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında Morrey (1938) tarafından ortaya konulmuştur. Chiarenza ve Frasca (1987) Hardy-Littlewood maksimal operatörü, kesirli integral operatörü ve singüler integral operatörlerinin Morrey uzaylarındaki sınırlılığını göstermiştir. Kesirli integral operatörün sınırlılığı Adams (1975) tarafından da çalışılmıştır. Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında yukarıda bahsedilen operatörlerin sınırlılığı Muckenhoupt (1972), Muckenhoupt ve Wheeden (1974), ve ayrıca Coifman ve Fefferman (1974) tarafından elde edilmiştir. Bu sonuçlar daha sonra çeşitli uzaylara genişletilmiştir. Bununla beraber ağırlıklı Morrey uzayları yeni çalışılmaya başlanmış olup Komori ve Shirai (2009) tarafından bu uzaylarda maksimal, kesirli integral, Calderón-Zygmund operatörlerin ve komütatör operatörünün sınırlılığı elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Nakai ve Mizuhara gibi araştırmacılar Riesz potansiyeli, maksimal ve singüler integral operatörlerinin sınırlılığını elde etmişlerdir. Bu uzaylarda Ding vd. (1998) tarafından altlineer ve komütatör operatörlerin sınırlılığı elde edilmiştir.

Guliyev (1994, 1999) doktora tezinde ortaya koyduğu yeni bir metot ile Lie gruplarında ve $\mathbb{R}^n$ de harmonik analizin klasik integral operatörleri için sınırlılık sonuçları elde etmiştir. Daha sonra Guliyev (2009) ortaya koyduğu yeni metotları kullanarak genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral gibi operatörlerin sınırlılığını elde etmiştir. Son yıllarda Guliyev ile birlikte Burenkov, Samko, Şerbetçi, Tararykova, Gogotashvili, Mustafayev ve Hasanov gibi araştırmacılar, Morrey-tipli uzaylar başta olmak üzere diğer fonksiyon uzaylarında yeni sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, Guliyev tarafından verilen ispat yöntemi kullanılarak genelleştirilmiş Morrey ve genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında altlineer operatörlerin ve altlineer komütatör operatörünün sınırlılığı hakkında yeni sonuçlar elde edilmiştir. Özet olarak $p > 1$ için M_{p,φ_1} genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer M_{p,φ_2} genelleştirilmiş Morrey uzayına ve M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} zayıf uzayına T altlineer operatörünün sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde yeterlik şartları elde edilmiştir. Ayrıca $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $1 < p < \infty$ iken M_{p,φ_1} genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer M_{p,φ_2} genelleştirilmiş Morrey uzayına T_b altlineer komütatör operatörünün sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlik şartları elde edilmiştir. Benzer şekilde ağırlıklı durumda $p > 1$ için $M_{p,\varphi_1}(w)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayından bir diğer $M_{p,\varphi_2}(w)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayına ve $M_{1,\varphi_1}(w)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(w)$ zayıf uzayına T operatörünün sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlilik şartları elde edilmiştir. Ayrıca $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $1 < p < \infty$ iken $M_{p,\varphi_1}(w)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayından bir diğer $M_{p,\varphi_2}(w)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayına T_b altlineer komütatör operatörünün sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlik şartları elde edilmiştir. Bütün durumlarda T ve T_b nin sınırlılık koşullarında $\varphi_1$ve φ_2 nin monotonluğu üzerinde herhangi bir kabul yapılmamış sadece (φ_1, φ_2) nin Zygmund-tipi bir integral eşitsizliğini sağladığı kabul edilmiştir. Analizin bir çok önemli operatörleri bu teoremlerde belirlenen şartları sağlamaktadır, örneğin pseudo-diferensiyel operatörler, Littlewood-Paley operatörü, Marcinkiewicz operatörü ve Bochner-Riesz operatörü bu türden operatörlerdir. Son olarak, elde etmiş olduğumuz sonuçların bir uygulaması olarak, bu operatörler için sınırlılık sonuçları elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

$\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayı $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ve buna karşılık gelen $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile tüm $x = (x_1, ..., x_n)$ noktalarının kümesidir. $j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere negatif olmayan α_j tamsayılarının $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ n-lisine katlı-indis denir. Eğer α ve β iki katlı-indis ise bu durumda $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ ve $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ ile tanımlanır. Eğer her $1 \leq j \leq n$ için $\beta_j \leq \alpha_j$ ise $\beta \leq \alpha$ denir ve bu durumda $\alpha - \beta$ bir katlı-indistir ve $|\alpha - \beta| + |\beta| = |\alpha|$ sağlanır. Ayrıca, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$ biçimindedir. $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$$

operatörü $|\alpha|$ mertebeden bir diferensiyel operatördür. Özel olarak $D^{(0,...,0)} f = f$ olur. Bir-boyutlu durumda D^α, $\frac{d}{dx}$ ifadesine indirgenir.

Tanım 2.1 X bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlarsa X üzerinde bir σ-cebir olarak adlandırılır:
(i) $X \in \mathfrak{M}$
(ii) Her $A \in \mathfrak{M}$ için ${}^cA = X - A \in \mathfrak{M}$
(iii) $n = 1, 2, ...$ için $A_n \in \mathfrak{M}$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$

Bu durumda $(X, \mathfrak{M})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathfrak{M}$ deki her bir kümeye ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.2 $(X, \mathfrak{M})$ bir ölçülebilir uzay olsun. Bir $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ fonksiyonu
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) Eğer (A_n), $\mathfrak{M}$ nin ayrık bir dizisi ise $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona $\mathfrak{M}$ üzerinde (veya $\mathfrak{M}$ anlaşıldığında X üzerinde) bir ölçüdür denir. Eğer her $A \in \mathfrak{M}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir. Ayrıca $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ölçü uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.3 $(X, \mathfrak{M})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : f(x) > t\} \in \mathfrak{M}$ oluyorsa f fonksiyonu ölçülebilirdir denir. Ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ ile gösterilir.

Teorem 2.4 Aşağıdaki özelliklere sahip $\mathbb{R}^n$ nin alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ σ-cebiri ve $\mathfrak{M}$ üzerinde bir pozitif μ ölçüsü vardır:
(i) $\mathbb{R}^n$ nin her açık kümesi $\mathfrak{M}$ ye aittir.
(ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \mathfrak{M}$ ve $\mu(B) = 0$ ise bu durumda $A \in \mathfrak{M}$ ve $\mu(A) = 0$ sağlanır.
(iii) Eğer $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, 2, ..., n\}$ ise bu durumda $A \in \mathfrak{M}$ ve $\mu(A) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$ sağlanır.
(iv) μ öteleme değişmezdir: Eğer $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \mathfrak{M}$ ise bu durumda $x + A = \{x + y : y \in A\} \in \mathfrak{M}$ ve $\mu(x + A) = \mu(A)$ (Adams ve Fournier 2003).

$\mathfrak{M}$ nin elemanları $\mathbb{R}^n$ nin (Lebesgue) ölçülebilir altkümeleri olarak adlandırılır ve μ, $\mathbb{R}^n$ de (Lebesgue) ölçü olarak adlandırılır. Lebesgue ölçüsü $\mathbb{R}^3$ teki hacmin doğal bir genişlemesi olduğundan $A \in \mathfrak{M}$ için $\mu(A)$, A nın ölçüsü veya hacmi olarak adlandırılır.

Tanım 2.5 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme hemen her yerde doğrudur denir.

Tanım 2.6 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(X) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. $L_p(X)$ uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{L_p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \{C > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > C\}) = 0\}$ ile verilir.

Tanım 2.7 $WL_p(X)$ zayıf L_p uzayı, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL_p(X)} = \sup_{t>0} t\mu\left(\{y \in X : |f(y)| > t\}\right)^{1/p} < \infty$$

quasi-normuna sahip f ölçülebilir fonksiyonlarının uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ için $L_p(X) \subset WL_p(X)$ sağlanır. $WL_\infty(X)$ uzayının tanımı $L_\infty(X)$ ile verilir.

Önerme 2.8 $f \in L_p(X)$, $0 < p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p(X)}^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > t\}\right) dt$$

sağlanır (Grafakos 2004).

Tanım 2.9 $p > 1$ ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$ olsun. Bu durumda

$$\|fg\|_{L_1(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} \|g\|_{L_q(X)}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir.

Tanım 2.10 $p \geq 1$ için eğer f, $g \in L_p(X)$ ise bu durumda

$$\|f+g\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}$$

eşitsizliğine Minkowski Eşitsizliği denir.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \cdots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ tam uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

ile gösterilir.

$B = B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ merkezi x, yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve ${}^cB(x,r)$ onun tümleyenini göstersin. $|B(x,r)|$, $B(x,r)$ açık yuvarının Lebesgue ölçüsü ve $\nu_n = |B(0,1)|$ olmak üzere

$$|B(x,r)| = \nu_n r^n = \frac{2\pi^{n/2} r^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{1}{n}\left|S^{n-1}\right| r^n$$

biçimindedir, burada $|S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $\mathbb{R}^n$ de yarıçapı 1 olan S^{n-1} küresinin yüzey alanıdır. $\Gamma(z)$ gamma fonksiyonudur ve bir z kompleks sayısı için $\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ ile tanımlanır. $Q = Q(x_0, r)$ ile x_0 merkezli ve kenar uzunluğu r olan küpü göstereceğiz. Verilen bir Q küpü ve $\lambda > 0$ için λQ ile Q nun merkezine sahip ve kenar uzunluğu Q nun kenar uzunluğunun λ katı olan küpü göstereceğiz.

$A \lesssim B$ gösterimini $A \leq CB$, $C > 0$ eşitsizliğinin yerine kullanacağız. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir. Bu çalışma boyunca C farklı sabitleri gösterecektir.

Teorem 2.11 (Fubini Teoremi) f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dxdy \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\, dx \right) dy \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\, dy \right) dx \end{aligned}$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. Bununla I_2 için $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir g integrallenebilen fonksiyonunun var olduğu ve hemen her y için $g(y)$ nin içteki integrale eşit olduğu kastedilmektedir. I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

(i) hemen her $y \in \mathbb{R}^m$ için $f(\cdot, y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olur.

(ii) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ olur.

(iii) $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y)\, dy \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot)\, dx \in L_1(\mathbb{R}^m)$.

(v) $I_1 = I_2 = I_3$

elde edilir (Adams ve Fournier 2003).

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ nin her bir kompakt altkümesinde p-inci kuvveti integrallenebilen tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayı $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Bu uzay $p=1$ için $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını gösterir. $L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $1 \leq p \leq \infty$ için bütün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının birleşimlerini içerir. Daha genel olarak $0 < p < q < \infty$ için

$$L_q(\mathbb{R}^n) \subseteq L_q^{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir (Grafakos 2004).

Teorem 2.12 (Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi) Eğer $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

sağlanır (Grafakos 2004).

Tanım 2.13 Bir f fonksiyonunun desteği

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır. Eğer supp$f$ sınırlı bir küme ise f kompakt desteğe sahiptir denir.

Tanım 2.14 Schwartz uzayı sonsuzda hızla azalan $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Daha açık olarak her α, β katlı-indisi ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.15 $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu A nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.16 $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f * g$ konvolüsyonu

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x - y)\, dy$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.17 $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-ix \cdot y} dy$$

ile tanımlanan $\widehat{f}$, f fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Bu dönüşüm

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-ix \cdot y} dy$$

veya eşdeğer olarak

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i x \cdot y} dy$$

alınabilir. Eğer $n = 1$ ve $f \in L_1(\mathbb{R})$ ise bu durumda

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy} dy$$

olur.

Tanım 2.18 $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot y} dx$$

f nin Fourier dönüşümü ise bu durumda

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\, e^{2\pi i x \cdot y} dy$$

ifadesine ters Fourier formülü denir. Ayrıca

$$f^{\vee}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy$$

dönüşümü ters Fourier dönüşümü olarak adlandırılır.

$1 \leq p, q \leq \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) iki ölçü uzayı ve T, $L_p(X, \mu)$ uzayından tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla Y ve $\mathbb{C}$ olan ölçülebilir fonksiyonların uzayına bir operatör olsun. Eğer $q < \infty$ olmak üzere

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C \|f\|_{L_p(X)}}{\lambda} \right)^q$$

ise T zayıf (p, q) tipinden ve eğer $q = \infty$ iken $L_p(X, \mu)$ uzayından $L_\infty(Y, \nu)$ uzayına sınırlı bir operatör ise zayıf (p, ∞) tipindendir denir.

Eğer T, $L_p(X, \mu)$ uzayından $L_q(Y, \nu)$ uzayına sınırlı ise kuvvetli (p, q) tiplidir denir. Yani, her $f \in L_p(X, \mu)$ için

$$\|Tf\|_{L_q(Y)} \leq C \|f\|_{L_p(X)}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buradan $q = \infty$ olması durumunda zayıf ve kuvvetli tip çakışmaktadır.

Eğer T, kuvvetli (p, q) tipli ise aynı zamanda zayıf (p, q) tiplidir: Gerçekten, eğer $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$ olarak alınırsa, bu durumda

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left| \frac{Tf(x)}{\lambda} \right|^q d\nu \leq \frac{\|Tf\|_{L_q(X)}^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C \|f\|_{L_p(X)}}{\lambda} \right)^q$$

olur.

Eğer $(X, \mu) = (Y, \nu)$ ve T özdeşlik operatörü olarak alınırsa bu durumda zayıf (p, p) klasik Chebyshev eşitsizliği olur.

Tanım 2.19 T, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir (X, μ) ölçü uzayından kompleks değerli, hemen her yerde sonlu, ölçülebilir fonksiyonların bir (Y, ν) ölçü uzayına tanımlanan bir operatör olsun. Bu durumda her f, g ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \quad \text{ve} \quad T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

ise T ye lineer operatör,

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \quad \text{ve} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda|\,|T(f)|$$

ise T ye altlineer operatör, bir $C > 0$ sabiti için

$$|T(f+g)| \leq C(|T(f)| + |T(g)|) \quad \text{ve} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda|\,|T(f)|$$

ise T ye quasilineer operatör denir. Altlineerlik quasilineerliğin özel bir durumudur.

Teorem 2.20 (Marcinkiewicz interpolasyon teoremi) (X, μ) ve (Y, ν) ölçü uzayları olsunlar. $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ olmak üzere T, $L_{p_0}(X, \mu) + L_{p_1}(X, \mu)$ uzayından Y üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlara giden ve zayıf (p_0, p_0) ve zayıf (p_1, p_1) tipli bir altlineer operatör olsun. Bu durumda T, $p_0 < p < p_1$ için kuvvetli (p, p) tiplidir (Duoandikoetxea 2001).

Tanım 2.21 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

ile tanımlanır.

Dikkat edilirse M maksimal operatörü altlineer ve homojendir, yani her $f, g \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \qquad \text{ve} \qquad M(\lambda f) = \lambda(Mf), \ \ \forall \lambda \geq 0$$

sağlanır.

Teorem 2.22 f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun.
(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise bu durumda Mf fonksiyonu hemen her yerde sonludur.
(ii) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ için

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır, burada C sabiti sadece n boyutuna bağlıdır.
(iii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise bu durumda $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır, burada C sadece p ve n boyutuna bağlıdır (Stein 1970).

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Hf Hilbert dönüşümü

$$Hf(x) = \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

ile tanımlanır. Hilbert dönüşümü singüler integrallerin ilk örneği olup üst yarı-düzlemde eşlenik harmonik fonksiyonların sınır değerlerinin araştırmalarında kullanılmaktadır. Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ ise bu durumda f fonksiyonunun Riesz dönüşümü

$$R_j f(x) = \text{p.v.} C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy, \quad 1 \leq j \leq n$$

biçiminde tanımlanır. Riesz dönüşümü Hilbert dönüşümünün bir boyuttan n boyuta genelleştirmesidir. Riesz dönüşümü ikinci mertebeden eliptik denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında ortaya çıkmaktadır.

Ω fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:
(i) $\Omega(\lambda y) = \Omega(y), \;\; \forall\lambda > 0$
(ii) $\int_{S^{n-1}} \Omega(y')d\sigma(y') = 0$, $y' = y/|y|$
(iii) $\Omega \in L_1(S^{n-1})$.

Bu durumda $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ için T_Ω integral operatörü

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy$$

biçiminde tanımlansın. $\Omega(x) = \frac{x_j}{|x|}$ olarak alınırsa bu durumda T_Ω, R_j, $j = 1, ..., n$ Riesz dönüşümü olur. Eğer $n = 1$ ve $\Omega(x) = sgn(x)$ olarak alınırsa bu durumda T_Ω Hilbert dönüşümü olur.

Şimdi K Calderón-Zygmund singüler integral operatörünü tanımlayalım:
$K : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatörü $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir operatördür ve

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy, \qquad x \notin \text{supp}f$$

ile tanımlanır. Burada $k(x,y)$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$ dışında sürekli bir fonksiyondur ve standart eşitsizlikleri sağlar: her $x, y \in \mathbb{R}^n$, ve $x \neq y$ için

$$|k(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n}$$

olacak şekilde $C > 0$ vardır ve $2\left|x - x'\right| \leq |x-y|$ iken

$$|k(x,y) - k(x',y)| + |k(y,x) - k(y,x')| \leq C\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^{\varepsilon} |x-y|^{-n}$$

olacak şekilde $0 < \varepsilon \leq 1$ vardır.

Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır ve zayıf $(1,1)$ tiplidir.

2.1 A_p Muckenhoupt Sınıfı

Ağırlıklı eşitsizlikler Fourier analizinde önemli bir yere sahip olup çok çeşitli uygulamalara sahiptir. Özellikle, ağırlık teorisi Lipschitz bölgeleri üzerinde Laplace denklemi için sınır değer problemleri çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Ağırlıklı eşitsizliklerin diğer uygulamaları extrapolasyon teorisi, vektör değerli eşitsizlikler ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin bazı sınıfları için hesaplamaları içerir. Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ ağırlıklı L_p uzayını kendi üzerine dönüştüren Muckenhoupt karakterizasyonu, A_p sınıfının tanımlanmasına ve ağırlıklı eşitsizliklerin gelişmesine yardımcı olmuştur.

Bir ağırlık fonksiyonu, hemen her yerde $(0, \infty)$ daki değerleri alan ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde negatif olmayan lokal integrallenebilir bir fonksiyondur. Buradan ağırlıkların sadece sıfır Lebesgue ölçülü bir küme üzerinde sıfır veya sonsuz olduğu anlaşılır. Eğer w bir ağırlık ve $1/w$ lokal integrallenebilir ise bu durumda $1/w$ fonksiyonu da bir ağırlıktır.

Verilen bir w ağırlığı ve bir E ölçülebilir kümesi için

$$w(E) = \int_E w(x)dx$$

notasyonunu E kümesinin w-ölçüsünü göstermek için kullanacağız. Ağırlıklar lokal integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından bir yuvar tarafından içerilen bütün E kümeleri için $w(E) < \infty$ olur.

Verilen bir w ağırlık fonksiyonu için B herhangi bir yuvar olmak üzere eğer $w(2B) \leq Cw(B)$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa w doubling şartını sağlar denir. w bu şartı sağladığında kısalık için $w \in \Delta_2$ biçiminde yazılır.

Tanım 2.1.1 $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi bir B yuvarı için

$$\begin{aligned}[w]_{A_p} &= \sup_B [w]_{A_p(B)} \\ &= \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty \qquad (2.1.1)\end{aligned}$$

ise w ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfındandır denir. Burada supremum bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır ve $1/p + 1/p' = 1$ biçimindedir.

$p = 1$ iken, hemen her x için

$$Mw(x) \leq Cw(x) \qquad (2.1.2)$$

olacak şekilde $C > 1$ varsa $w \in A_1$ dir ve (2.1.2) eşitsizliğini sağlayan C nin infimumu $[w]_{A_1}$ ile gösterilir.

p ve p' üsleri ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$1 = \frac{1}{|B|} \int_B dx = \frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{1/p} w(x)^{-1/p} dx \leq [w]_{A_p}^{1/p}$$

elde edilir.

(2.1.1) ifadesinde $p \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\frac{1}{|B|} \int_B w(x)dx \leq C \exp \left(\frac{1}{|B|} \int_B \log w(x)dx \right)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağlanması durumunda $w \in A_\infty$ denir. Ayrıca, $p = \infty$ iken $A_\infty = \bigcup_{1 \leq p < \infty} A_p$ ile tanımlanır. A_∞ için verilen bu iki tanım eşdeğerdir (Garcia-Cuerva ve Rubio de Francia 1985).

A_p sınıfı 1972 de Muckenhoupt tarafından ağırlıklı $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ uzayı üzerinde tanımlı Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılık çalışmalarında tanımlanmıştır.

$w \in A_p$, $1 < p < \infty$ Muckenhoupt ağırlıklarının en önemli örneklerinden biri $w(x) = |x|^t$ fonksiyonudur, burada $-n < t < n(p-1)$ biçiminde olup $-n < t \leq 0$ olarak alınırsa $w \in A_1$ elde edilir. Bundan başka eğer $0 < \delta < 1$ ise bu durumda $w(x) = |x|^{-n(1-\delta)} \in A_1$ ve ayrıca $w(x) = |x|^{-n(p-1)(1-\delta)} \in A_p$ elde edilir.

Muckenhoupt (1972) bir $\varepsilon > 0$ için

$$A_p \subset A_{p-\varepsilon}$$

olduğunu göstermiştir. Coifman ve Fefferman (1974) aşağıdaki lemmayı ispatlamışlardır.

Lemma 2.1.2 Eğer $w \in A_p$ ise bu durumda $w \in A_{p-\varepsilon}$ sağlanır ve

$$[w]_{A_{p-\varepsilon}} \leq C[w]_{A_p}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır, burada $\varepsilon \sim [w]_{A_p}^{-\frac{1}{p-1}}$ biçimindedir.

Lemma 2.1.3 Eğer $w \in \Delta_2$ ise bu durumda

$$w(2Q) \geq Cw(Q)$$

olacak şekilde bir $C > 1$ sabiti vardır (Komori ve Shirai 2009).

Lemma 2.1.4 $1 \leq p < \infty$, $w \in A_p$ olsun. Bu durumda
(1) $w \in \Delta_2$ sağlanır. Ayrıca her $\lambda > 1$ için

$$w(\lambda B) \leq \lambda^{np} \, [w]_{A_p} \, w(B)$$

elde edilir.
(2) Eğer $w \in A_\infty$ ise bu durumda $w \in \Delta_2$ sağlanır. Ayrıca her $\lambda > 1$ için

$$w(\lambda B) \leq 2^{\lambda^n} \, [w]_{A_\infty}^{\lambda^n} \, w(B)$$

elde edilir.

(3)

$$Mf(x) \leq [w]_{A_p}^{1/p} M_w(|f|^p)(x)^{1/p}$$

sağlanır, burada

$$M_w f(x) = \sup_{B \ni x} w(B)^{-1} \int_B |f(y)| w(y) dy$$

biçimindedir.

(4) Her B yuvarı ve bir $S \subset B$ ölçülebilir kümesi için

$$\frac{w(S)}{w(B)} \leq C \left(\frac{|S|}{|B|} \right)^{\delta} \tag{2.1.3}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $\delta > 0$ vardır (Grafakos 2004).

Bir ağırlık (2.1.3) eşitsizliğini sağlarsa bu durumda $w \in A_\infty$ olduğunu Muckenhoupt (1974) ve Coifman ve Fefferman (1974) ispatlamışlardır.

A_p sınıfının bazı özellikleri aşağıdaki önermede verilmektedir:

Önerme 2.1.5

(i) $1 \leq p < q$ olmak üzere $A_p \subset A_q$ sağlanır.

(ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere $A_p = \bigcup_{q<p} A_q$ sağlanır.

(iii) $1/p + 1/p' = 1$ olmak üzere $w \in A_p$ ancak ve ancak $w^{1-p'} \in A_{p'}$.

(iv) $w_0, w_1 \in A_1$ ise bu durumda $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$ sağlanır.

(v) $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$ ise bu durumda $w^{1+\epsilon} \in A_p$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır (Duoandikoetxea 2001).

Tanım 2.1.6 Eğer $1 \leq p < \infty$ ve w bir ağırlık fonksiyonu ise, $L_p(w) \equiv L_p(\mathbb{R}^n, w)$ ile

$$\|f\|_{L_{p,w}} \equiv \|f\|_{L_{p,w}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty$$

normuna sahip bütün ölçülebilir f fonksiyonlarının oluşturduğu ağırlıklı Lebesgue uzayı gösterilir.

Teorem 2.1.7 $1 < p < \infty$ ise M, $L_p(w)$ üzerinde sınırlıdır ancak ve ancak $w \in A_p$. Eğer $p = 1$ ise

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, w(x)dx$$

zayıf $(1,1)$ eşitsizliği sağlanır ancak ve ancak $w \in A_1$ (Duoandikoetxea 2001).

Teorem 2.1.8 $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p$ ise K Calderón-Zygmund operatörü $L_p(w)$ üzerinde sınırlıdır. Eğer $p = 1$ ve $w \in A_1$ ise her $\lambda > 0$ için

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Kf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L_1(w)}$$

sağlanır (Duoandikoetxea 2001, Grafakos 2004).

2.2 BMO Uzayı ve Komütatör Operatörü

Bu kesimde John ve Nirenberg (1961) tarafından kısmi diferensiyel denklemlerin çalışmaları sırasında ortaya konan BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayının ve komütatör operatörünün tanımını ve bazı özelliklerini vereceğiz. BMO uzayı L_∞ uzayı ile benzer özelliklere sahiptir ve sıklıkla L_∞ yerine kullanılır. Klasik singüler integral operatörler L_∞ uzayından L_∞ uzayına sınırlı değildir, fakat L_∞ uzayından BMO uzayına sınırlıdır. Çoğu kez L_p ve BMO arasındaki interpolasyon L_p ile L_∞ arasındakinden daha uygun olmaktadır. Fakat BMO uzayının rolü bundan daha kapsamlı ve derindir. Bu uzay standart çekirdekli konvolüsyon tipli olmayan singüler integral operatörlerin L_2 sınırlılığının karakterizasyonunda olduğu gibi analizde pek çok durumda önemli bir role sahiptir. 1971'de Fefferman BMO uzayının H^1 uzayına dual olduğunu göstermiştir, burada H^1 Hardy uzayıdır.

$f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve bir $B(x,r)$ yuvarı için

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

ifadesine f fonksiyonunun $B(x,r)$ üzerindeki ortalaması denir. Bu durumda $|f - f_{B(x,r)}|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun salınımı ve

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| dy$$

ifadesine $B(x,r)$ üzerinde f fonksiyonunun ortalama salınımı denir.

Tanım 2.2.1 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| dy$$

olsun. Eğer $\|f\|_* < \infty$ ise f fonksiyonu ortalama salınıma sahiptir denir ve $\|f\|_* < \infty$ olmak üzere $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesi $BMO(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$BMO(\mathbb{R}^n)$ bir lineer uzaydır. Bundan başka $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve λ skaler olmak üzere

$$\|f + g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$$

$$\|\lambda f\|_* = |\lambda| \, \|f\|_*$$

sağlanır. Fakat $\|\cdot\|_*$ bir norm değildir. Çünkü $\|f\|_* = 0$ olması $f = 0$ olmasını gerektirmeyip f nin sabit olmasını gerektirmektedir. Bundan başka her c sabit fonksiyonu için $\|c\|_* = 0$ sağlanır. $\|\cdot\|_*$ bir yarı-norm olmasına rağmen karışıklığın söz konusu olmadığı durumlarda bir norm olarak adlandırılır. c bir sabit iken f ve $f{+}c$ fonksiyonları aynı BMO normuna sahip olup, farkları bir sabit olan BMO uzayının elemanları özdeştir.

$\|f\|_* \leq 2\,\|f\|_\infty$ olduğundan $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyon BMO uzayındadır. Sınırlı olmayan BMO fonksiyonları da vardır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olan fakat $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olmayan tipik bir örnek $\log|x|$ fonksiyonudur. Şimdi BMO fonksiyonlarının bir çok örneğini vermeyi sağlayan bir sonucu verelim.

Teorem 2.2.2 Eğer w bir A_1 ağırlığı ise bu durumda sadece $[w]_{A_1}$ e bağlı bir norm ile $\log w \in BMO$ sağlanır (Garcia-Cuerva ve Rubio de Francia 1985).

Şimdi BMO uzayına ait olmayan bir fonksiyon örneği verelim. Bu örnek bir fonksiyonun mutlak değeri BMO sınıfına ait iken bu fonksiyonun bir BMO fonksiyonu olmasını gerektirmeyeceğini gösterir.

Örnek 2.2.3 $g(x) = sgn(x)\log\frac{1}{|x|}$ fonksiyonu $BMO\left([-1,1]\right)$ uzayına ait değildir. Gerçekten $0 < h < 1$ ve $I \equiv [-h,h]$ için $g_I = 0$ ve

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I |g(x)-g_I|\,dx &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left|\log\frac{1}{|x|}\right|dx = \frac{1}{h}\int_0^h \log\frac{1}{x}dx \\ &= 1+\log\frac{1}{h} \to \infty, \quad h \to 0 \text{ iken}\end{aligned}$$

elde edelir.

(John ve Nirenberg 1961) de ispatlanan ve John-Nirenberg eşitsizliği olarak bilinen ifade aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.2.4 Her $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $t > 0$ için

$$|\{x \in B : |f(x) - f_B| > t\}| \leq C_1 |B| e^{-C_2 t/\|f\|_*} \qquad \forall B \subset \mathbb{R}^n \tag{2.2.1}$$

olacak şekilde $C_1, C_2 > 0$ sabitleri vardır.

Uyarı 2.2.5 (1) John-Nirenberg eşitsizliği $1 < p < \infty$ için

$$\|f\|_* \approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\left|f(y)-f_{B(x,r)}\right|^p dy\right)^{1/p} \tag{2.2.2}$$

olmasını gerektirir.

(2) $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $0 < 2r < t$ için

$$\left|f_{B(x,r)} - f_{B(x,t)}\right| \leq C\,\|f\|_* \ln\frac{t}{r} \tag{2.2.3}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ vardır, burada C sabiti b, x, r ve t den bağımsızdır.

$f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $M^{\#}f(x)$ sharp maksimal fonksiyonu

$$M^{\#}f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B| \, dy$$

ile tanımlanır, burada supremum x noktasını içeren bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayının tanımından $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $f \in BMO(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow M^{\#}f(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ yazılabilir.

Şimdi $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayının bazı özelliklerini verelim.

Uyarı 2.2.6

(i) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ ise bu durumda $f(\cdot - h) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\cdot - h)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

sağlanır.

(ii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda > 0$ ise bu durumda $f(\lambda x) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

sağlanır.

(iii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\|f\|_{BMO} \approx \sup_Q \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| \, dx$$

sağlanır (Lu vd. 2007).

Ölçülebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı bir lineer T operatörü ve bir b fonksiyonu için $[b, T]$ komütatörü $[b, T]\, f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$ ile tanımlanır. Calderón-Zygmund operatörlerinin komütatörleri ikinci mertebeden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Açık olarak $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $[b, K]$, $L_p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır. Coifman vd. (1976) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $[b, K]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ sınırlılığını göstermişlerdir. Daha sonra Janson (1978) $[b, K]$, $L_p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı iken $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermiştir. K operatörü zayıf $(1, 1)$ eşitsizliğini sağlamasına rağmen $[b, K]$ komütatörü bu eşitsizliği sağlamaz. Buna karşılık aşağıdaki zayıf sonuç doğrudur.

Teorem 2.2.7 K Calderón-Zygmund operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in C_0^\infty$ ve her $\lambda > 0$ için

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |[b, K]\, f(y)| > \lambda\}| \leq C \, \|b\|_* \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\right) dy$$

sağlanır, burada $\log^+ t = \max(\log t, 0)$ biçiminde verilir (Pérez 1995).

Teorem 2.2.8 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve K Calderón-Zygmund operatörü olsun. Eğer $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p$ ise bu durumda $[b, K]$, $L_p(w)$ üzerinde sınırlıdır (Segovia ve Torrea 1991).

2.3 Morrey Uzayı

Klasik Morrey uzayları 1938'de Morrey tarafından eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının çalışmalarında tanımlanmıştır. Daha sonra Morrey uzaylarının önemli uygulamaları Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride ortaya çıkmıştır.

Şimdi klasik Morrey uzaylarının tanımını verelim.

Tanım 2.3.1 $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$, $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $M_{p,\lambda} \equiv M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$M_{p,\lambda} := \{f : \|f\|_{M_{p,\lambda}} < \infty\}$$

biçiminde tanımlanır, burada $\|f\|_{M_{p,\lambda}}$

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

biçiminde verilir.

$\lambda = 0$ için $M_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ olur. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $M_{p,\lambda} = \Theta$ olur, burada Θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

Ayrıca $WM_{p,\lambda} \equiv WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olan zayıf Morrey uzayını göstereceğiz öyle ki burada

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

biçimindedir.

Şimdi iyi bilinen iki sonucun ispatlarını verelim:

Lemma 2.3.2 $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $M_{p,n} \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{M_{p,n}} = \nu_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır, burada $\nu_n = |B(0,1)|$ dir.

İspat: $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$r^{-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \leq \nu_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olduğu görülür. Buradan $f \in M_{p,n}$ ve

$$\|f\|_{M_{p,n}} \leq \nu_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır.

$f \in M_{p,n}$ olsun. Lebesgue diferensiyelleme teoreminden

$$\lim_{r\to 0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy = |f(x)|^p$$

olur. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{r\to 0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \leq \nu_n^{-1/p} \|f\|_{M_{p,n}}$$

elde edilir. Buradan $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \nu_n^{-1/p} \|f\|_{M_{p,n}}$$

olduğu görülür.

Lemma 2.3.3 $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $t = \frac{n-\lambda}{p}$ için

$$\|f\|_{M_{1,n-t}} \leq \nu_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

ve buradan $M_{p,\lambda} \subset M_{1,n-t}$ sağlanır, burada $1/p + 1/p' = 1$ dir.

İspat: $f \in M_{p,\lambda}$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ve $tp = n - \lambda$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy &\leq \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,r)} dy \right)^{1/p'} \\ &= \nu_n^{1/p'} r^{n/p'} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan başka

$$\begin{aligned} r^{t-n} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy &\leq \nu_n^{1/p'} r^{t-n/p} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\ &= \nu_n^{1/p'} r^{-\lambda/p} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \leq \nu_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $f \in M_{1,n-t}$ ve

$$\|f\|_{M_{1,n-t}} \leq \nu_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

elde edilir.

Chiarenza ve Frasca maksimal operatörün Morrey uzayında sınırlılığını araştırmışlardır. Bu sonuç aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Teorem 2.3.4 $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{M_{p,\lambda}} \leq C\|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WM_{1,\lambda}} \leq C\|f\|_{M_{1,\lambda}}$$

sağlanır, burada C, f den bağımsız bir sabittir (Chiarenza ve Frasca 1987).

Ayrıca $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $f \in M_{p,\lambda}$ için $\mathbb{R}^n$ de Mf hemen her yerde sonludur.

Fazio ve Ragusa, Calderón-Zygmund operatörünün Morrey uzayında sınırlılığını araştırmışlardır. Bu sonuç aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Teorem 2.3.5 $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için K Calderón-Zygmund operatörü $M_{p,\lambda}$ üzerinde ve $p = 1$ için $M_{1,\lambda}$ uzayından $WM_{1,\lambda}$ uzayına sınırlıdır (Fazio ve Ragusa 1993).

Teorem 2.3.5 Peetre (1969) tarafından klasik Calderón-Zygmund singüler integral operatörler için ispatlanmıştır.

Şimdi ağırlıklı Morrey uzaylarının tanımını vererek bu uzayda elde edilen sonuçları ifade edelim.

Tanım 2.3.6 $1 \leq p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve w bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

$L_{p,\kappa}(w) \equiv L_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıklı Morrey uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\kappa}(w)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} w(B(x,r))^{-\frac{\kappa}{p}} \|f\|_{L_{p,w}(B(x,r))} < \infty$$

ile bütün $f \in L_p^{loc}(w)$ fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır. Ayrıca $WL_{p,\kappa}(w) \equiv WL_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, w)$ ile

$$\|f\|_{WL_{p,\kappa}(w)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} w(B(x,r))^{-\frac{\kappa}{p}} \|f\|_{WL_{p,w}(B(x,r))} < \infty$$

olmak üzere bütün $f \in WL_p^{loc}(w)$ fonksiyonların zayıf ağırlıklı Morrey uzayı gösterilir.

Uyarı 2.3.7 (1) Eğer $w \equiv 1$ ve $0 < \lambda < n$ olmak üzere $\kappa = \lambda/n$ ise bu durumda $L_{p,\lambda/n}(1) = M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzaylarıdır.
(2) $w \in \Delta_2$ olsun. Eğer $\kappa = 0$ ise bu durumda $L_{p,0}(w) = L_p(w)$ olur. Eğer $\kappa = 1$ ise, bu durumda w ye göre Lebesgue diferensiyelleme teoreminden $L_{p,1}(w) = L_\infty(w)$ elde edilir (Torchinsky 1986).

Komori ve Shirai 2009 yılında, ağırlıklı Morrey uzaylarında M, K ve $[b, K]$ operatörleri için aşağıdaki teoremleri ispatlamışlardır:

Teorem 2.3.8 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $w \in A_p$ ise bu durumda M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.
Eğer $p = 1$, $0 < \kappa < 1$ ve $w \in A_1$ ise bu durumda her $t > 0$ ve herhangi bir Q küpü için

$$w\left(\{x \in Q : Mf(x) > t\}\right) \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L_{1,\kappa}(w)} w(Q)^\kappa$$

sağlanır (Komori ve Shirai 2009).

Teorem 2.3.9 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $w \in A_p$ ise bu durumda K Calderón-Zygmund operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.
Eğer $p = 1$, $0 < \kappa < 1$ ve $w \in A_1$ ise bu durumda her $t > 0$ ve herhangi bir Q küpü

için

$$w\left(\{x \in Q : |Kf(x)| > t\}\right) \leq \frac{C}{t}\|f\|_{L_{1,\kappa}(w)} w(Q)^{\kappa}$$

sağlanır (Komori ve Shirai 2009).

Teorem 2.3.10 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve K Calderón-Zygmund operatörü olsun. $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $w \in A_p$ ise bu durumda $[b, K]$, $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır (Komori ve Shirai 2009).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA ALTLİNEER OPERATÖRLERİN VE KOMÜTATÖRÜN SINIRLILIĞI

Bu bölümde ilk olarak genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanımı verilip (Guliyev 2009) çalışmasında ispatlanan maksimal ve Calderón-Zygmund operatörlerinin sınırlılığı ifade edilecektir. Daha sonra altlineer ve altlineer komütatör operatörleri için bu uzayda elde edilen sonuçlar verilecektir.

Genelleştirilmiş Morrey uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.1 $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \le p < \infty$ olsun.

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} \left|B(x,r)\right|^{-1/p} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

olmak üzere bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Ayrıca

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} \left|B(x,r)\right|^{-1/p} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

olmak üzere bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir ve zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Tanımdan $\varphi(x,r) = r^{(\lambda-n)/p}$ seçilmesiyle $M_{p,r^{(\lambda-n)/p}} = M_{p,\lambda}$ ve $WM_{p,r^{(\lambda-n)/p}} = WM_{p,\lambda}$ olduğu görülür.

(Guliyev 2009), (Mizuhara 1991) ve (Nakai 1994) çalışmalarında $1 < p < \infty$ olmak üzere M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına M maksimal operatörü ve K Calderón-Zygmund operatörünün sınırlılığı için φ_1 ve φ_2 üzerinde yeterlilik koşulları elde edilmiştir.

Mizuhara (1991) $\varphi(x,r)=\Phi(r)$ için M maksimal operatörünün sınırlılığını genelleştirilmiş Morrey uzaylarında göstermiştir, burada Φ artan ve herhangi bir $r>0$ ve $1\leq C<2^n$ biçimindeki bir C sabiti için $\Phi(2r)\leq C\Phi(r)$ olacak şekilde bir fonksiyondur. Nakai'nin (1994) elde ettiği sonuç bunun genelleştirmesidir.

(Mizuhara 1991) ve (Nakai 1994) çalışmalarındaki sonuçları içeren aşağıdaki teoremler Guliyev tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.2 $1\leq p<\infty$ ve (φ_1,φ_2)

$$\int_t^\infty \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r}\leq C\varphi_2(x,t) \tag{3.1}$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve t ye bağlı değildir. Bu durumda M maksimal operatörü $p>1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır (Guliyev 2009).

Teorem 3.3 $1\leq p<\infty$ ve (φ_1,φ_2), (3.1) koşulunu sağlasın. Bu durumda K Calderón-Zygmund operatörü $p>1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır (Guliyev 2009).

3.1 Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Altlineer Operatörlerin Sınırlılığı

T herhangi bir kompakt destekli $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|Tf(x)|\leq c_0\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy, \qquad x\notin \operatorname{supp} f \tag{3.1.1}$$

özelliğini sağlayan bir altlineer operatör olsun, burada c_0, f ve x ten bağımsızdır.

(3.1.1) koşulu ilk olarak Soria ve Weiss (1994) tarafından tanımlanmıştır. (3.1.1) koşulu harmonik analizde pek çok operatör için sağlanır, örneğin Calderón-Zygmund operatörü, Carleson maksimal operatörü, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, C. Fefferman singüler çarpanları, R. Fefferman singüler integralleri, Ricci-Stein salınımlı singüler integralleri, Bochner-Riesz ortalaması ve diğerleri (Lu vd. 2002, Soria ve Weiss 1994).

(Ding vd. 1998) çalışmasında (3.1.1) koşulunu sağlayan T altlineer operatörü için $\varphi(x,r)$ üzerinde aşağıdaki koşullar uygulanmıştır: $r \le t \le 2r$ olmak üzere

$$C^{-1}\varphi(x,r) \le \varphi(x,t) \le C\varphi(x,r) \tag{3.1.2}$$

ayrıca

$$\int_r^\infty \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le C\varphi(x,r)^p \tag{3.1.3}$$

burada $C(>0)$, t,r ve $x \in \mathbb{R}^n$ ye bağlı değildir.

Dikkat edilirse Teorem 3.2 ve 3.3, (3.1.2) noktasal doubling şartını gerektirmemektedir.

(Mizuhara 1991) ve (Nakai 1994) çalışmalarındaki sonuçları içeren aşağıdaki ifade (3.1.1) koşulunu sağlayan bir T altlineer operatörü için Ding vd. (1998)'de ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.1 $\varphi(x,r)$, (3.1.2)-(3.1.3) şartlarını sağlasın. T, (3.1.1) koşulunu sağlayan ve $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Bu durumda T operatörü $M_{p,\varphi}$ üzerinde sınırlıdır (Ding vd. 1998).

Bu bölümde

$$Hg(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g(r)dr, \quad 0 < t < \infty$$

Hardy operatörünün sınırlılığı hakkındaki aşağıdaki sonucu kullanacağız.

Teorem 3.1.2

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t>0} u(t)Hg(t) \le c \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v(t)g(t)$$

eşitsizliği bütün negatif olmayan ve $(0,\infty)$ üzerinde artmayan g fonksiyonları için sağlanır ancak ve ancak

$$A := \sup_{t>0} \frac{u(t)}{t} \int_0^t \frac{dr}{\underset{0<s<r}{\operatorname{ess\,sup}} v(s)} < \infty$$

ve $c \approx A$ (Carro vd. 2001).

Teorem 3.1.3 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere T, (3.1.1) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt$$

herhangi bir $B = B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

Ayrıca $p = 1$ için

$$\|Tf\|_{WL_1(B)} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \, dt \tag{3.1.4}$$

herhangi bir $B = B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat: $p \in (1, \infty)$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar ve $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{^c(2B)}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \leq \|Tf_1\|_{L_p(B)} + \|Tf_2\|_{L_p(B)}$$

elde ederiz. $f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $Tf_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olur ve T nin $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından

$$\|Tf_1\|_{L_p(B)} \leq \|Tf_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C \|f\|_{L_p(2B)}$$

elde edilir, burada $C > 0$, f den bağımsızdır.

$x \in B$, $y \in {}^c(2B)$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \le |x - y| \le \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olmasını gerektirir. Buradan

$$|Tf_2(x)| \le 2^n c_0 \int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde ederiz. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy &\approx \int_{{}^c(2B)} |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \le |x_0 - y| < t} |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Hölder eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}} \tag{3.1.5}$$

elde ederiz. Ayrıca, her $p \in [1, \infty)$ için

$$\|Tf_2\|_{L_p(B)} \lesssim r^{n/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + r^{n/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_p(2B)} &\approx r^{n/p} \|f\|_{L_p(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{n/p+1}} \\
&\lesssim r^{n/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

sağlanır. Böylece

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \lesssim r^{n/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}$$

elde ederiz.

$p=1$ olsun. T nin zayıf $(1,1)$ sınırlılığı ve (3.1.7) ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\|Tf_1\|_{WL_1(B)} &\leq \|Tf_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_1(2B)} \\ &\lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.1.6) ve (3.1.8) ifadelerini birleştirerek (3.1.4) eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 3.1.4 $1 \leq p < \infty$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq C\varphi_2(x,r) \tag{3.1.9}$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve r ye bağlı değildir. T, (3.1.1) koşulunu sağlayan, $p>1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $p=1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Bu durumda T operatörü $p>1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır. Yani $p>1$ için

$$\|Tf\|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}$$

ve $p=1$ için

$$\|Tf\|_{WM_{1,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

sağlanır.

İspat: Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3 ten $p>1$ için

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{M_{p,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}} \\
&\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-n/p}} \|f\|_{L_p(B(x,t^{-p/n}))}\, dt \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r^{-p/n})^{-1} \int_0^{r} \|f\|_{L_p(B(x,t^{-p/n}))}\, dt \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r^{-p/n})^{-1} r \, \|f\|_{L_p(B(x,r^{-p/n}))} \\
&\approx \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Benzer şekilde $p=1$ için

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{WM_{1,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-n}} \|f\|_{L_1(B(x,t^{-1/n}))}\, dt \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r^{-1/n})^{-1} \int_0^{r} \|f\|_{L_1(B(x,t^{-1/n}))}\, dt \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r^{-1/n})^{-1} r \, \|f\|_{L_1(B(x,r^{-1/n}))} \\
&\approx \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç 3.1.5 $1\le p<\infty$ ve (φ_1,φ_2), (3.1.9) şartını sağlasın. Bu durumda M ve K operatörleri $p>1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır.

Yukarıdaki teorem Guliyev'in (2009) elde ettiği sonucun bir genelleştirmesidir.

(3.1.9) şartının (3.1) şartından daha zayıf olduğuna dikkat edilmelidir. Gerçekten

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq \int_r^\infty \varphi_1(t) \frac{dt}{t}, \qquad r \in (0,\infty)$$

olduğundan eğer (3.1) şartı sağlanırsa bu durumda (3.1.9) sağlanır.

Diğer taraftan

$$\varphi_1(r) = r^{\beta-\frac{n}{p}} \left| \sin\left(\max\left\{1, \frac{\pi}{r}\right\}\right)\right|, \qquad \varphi_2(r) = r^{2\beta-\frac{n}{p}}, \qquad 0 < \beta < \frac{n}{2p}$$

fonksiyonları için (3.1.9) şartı sağlanır: $r \in (0,1)$ durumunda $\operatorname*{ess\,inf}_{r<s<\infty} \varphi_1(s) s^{\frac{n}{p}} = 0$ ve

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \approx \begin{cases} 0 & , \quad r \in (0,1) \\ r^{\beta-\frac{n}{p}} & , \quad r \in (1,\infty) \end{cases} \lesssim \varphi_2(r), \qquad r \in (0,\infty)$$

olur, fakat (3.1) sağlanmaz.

İkinci bir örnek aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{\chi_{(1,\infty)}(r) r^{\frac{n}{p}-\beta}}, \qquad \varphi_2(r) = r^{-\frac{n}{p}}\left(1 + r^\beta\right), \qquad 0 < \beta < \frac{n}{p}$$

fonksiyonları için (3.1.9) şartı sağlanır, fakat (3.1) şartı sağlanmaz.

3.2 Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Altlineer Komütatör Operatörlerin Sınırlılığı

Bir b fonksiyonu için T_b komütatörü bir lineer veya altlineer operatörü göstersin ve kompakt destekli herhangi bir $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için

$$|T_b f(x)| \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)| \, |x-y|^{-n} \, |f(y)| \, dy, \qquad x \notin \operatorname{supp} f \qquad (3.2.1)$$

sağlansın, burada c_0, f ve x ten bağımsızdır.

Teorem 3.2.1 $\varphi(x,r)$, (3.1.2)-(3.1.3) şartlarını sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. T, (3.1.1) koşulunu sağlayan bir lineer operatör olsun ve $[b,T]$ komütatör operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda $[b,T]$ operatörü $M_{p,\varphi}$ de sınırlıdır (Ding vd. 1998).

Teorem 3.2.2 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve T_b, (3.2.1) koşulunu sağlayan bir altlineer operatör olsun ve

$$\|T_b f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_* \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.2.2}$$

sağlansın. Bu durumda

$$\|T_b f\|_{L_p(B)} \lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

herhangi bir $B = B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat: $p \in (1,\infty)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{^c(2B)}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|T_b f\|_{L_p(B)} \leq \|T_b f_1\|_{L_p(B)} + \|T_b f_2\|_{L_p(B)}$$

elde ederiz. (3.2.2) ifadesinden

$$\|T_b f_1\|_{L_p(B)} \leq \|T_b f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_* \|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|b\|_* \|f\|_{L_p(2B)}$$

elde edilir.

$x \in B$ için

$$\begin{aligned} |T_b f_2(x)| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(y)-b(x)|}{|x-y|^n} |f_2(y)|\, dy \\ &\approx \int_{{}^c(2B)} \frac{|b(y)-b(x)|}{|x_0-y|^n} |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} \|T_b f_2\|_{L_p(B)} &\lesssim \left(\int_B \left(\int_{{}^c(2B)} \frac{|b(y)-b(x)|}{|x_0-y|^n} |f(y)|\, dy \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &\lesssim \left(\int_B \left(\int_{{}^c(2B)} \frac{|b(y)-b_B|}{|x_0-y|^n} |f(y)|\, dy \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\int_B \left(\int_{{}^c(2B)} \frac{|b(x)-b_B|}{|x_0-y|^n} |f(y)|\, dy \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. I_1 ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} I_1 &\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{{}^c(2B)} \frac{|b(y)-b_B|}{|x_0-y|^n} |f(y)|\, dy \\ &\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{{}^c(2B)} |b(y)-b_B|\, |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\ &\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \le |x_0-y| < t} |b(y)-b_B|\, |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y)-b_B|\, |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}}. \end{aligned}$$

Hölder eşitsizliği ve (2.2.2), (2.2.3) ifadelerinden

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} \left|b(y)-b_{B(x_0,t)}\right| |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\quad + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left|b_{B(x_0,r)}-b_{B(x_0,t)}\right| \int_{B(x_0,t)} |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(\int_{B(x_0,t)} \left|b(y)-b_{B(x_0,t)}\right|^{p'} dy \right)^{1/p'} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\quad + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left|b_{B(x_0,r)}-b_{B(x_0,t)}\right| \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}} \\ &\lesssim \|b\|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}} \end{aligned}$$

elde ederiz.

I_2 ifadesini hesaplamak için

$$I_2 = \left(\int_B |b(x) - b_B|^p \, dx\right)^{1/p} \int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

olduğuna dikkat edelim. (2.2.2) ifadesinden

$$I_2 \lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde ederiz. Böylece (3.1.5) ifadesinden

$$I_2 \lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}$$

elde edilir. I_1 ve I_2 ifadelerinin toplanmasıyla

$$\|T_b f_2\|_{L_p(B)} \lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}$$

elde ederiz. Son olarak,

$$\|T_b f\|_{L_p(B)} \lesssim \|b\|_* \|f\|_{L_p(2B)} + \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}$$

yazarız ve teoremin ifadesini (3.1.7) ifadesinden elde ederiz.

Teorem 3.2.3 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \le C \varphi_2(x,r)$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve r ye bağlı değildir. T_b, (3.2.1) ve (3.2.2) koşullarını sağlayan bir altlineer operatör olsun. Bu durumda T_b operatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına sınırlıdır. Yani

$$\|T_b f\|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \|b\|_* \|f\|_{M_{p,\varphi_1}} \tag{3.2.3}$$

sağlanır.

İspat: Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned}
\|T_b f\|_{M_{p,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \|b\|_* \int_r^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,t))} dt \\
&\approx \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-n/p}} \left(1+\ln\frac{1}{t^{p/n} r}\right) \|f\|_{L_p(B(x,t^{-p/n}))} dt \\
&= \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r^{-p/n})^{-1} \int_0^{r} \left(1+\ln\frac{r^{p/n}}{t^{p/n}}\right) \|f\|_{L_p(B(x,t^{-p/n}))} dt \\
&\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r^{-p/n})^{-1} r \|f\|_{L_p(B(x,r^{-p/n}))} \\
&\approx \|b\|_* \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Maksimal operatörün

$$M_b(f)(x) = \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(x)-b(y)|\, |f(y)|\, dy$$

altlineer komütatör operatörü ve $[b,K]$ Calderón-Zygmund operatörünün lineer komütatörü için Teorem 3.2.3 ten aşağıdaki yeni sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.2.4 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2) (3.1.9) şartını sağlasın. Bu durumda M_b altlineer komütatör operatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına sınırlıdır.

Sonuç 3.2.5 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2) (3.1.9) şartını sağlasın. Bu durumda $Kf(x)$ Calderón-Zygmund singüler integrali hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için vardır ve $[b,K]$, M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına sınırlıdır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLI MORREY UZAYLARINDA ALTLİNEER OPERATÖRLER VE KOMÜTATÖRLERİ

Bu bölümde, genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Guliyev'in (2009) ortaya koyduğu maksimal, potansiyel ve singüler integral operatörlerin sınırlılığının ispatı metodu yardımıyla genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında altlineer operatörlerin ve onların komütatörünün sınırlılığını elde edeceğiz.

Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarının tanımını vererek başlayalım.

Tanım 4.1 $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde bir pozitif ölçülebilir fonksiyon ve w, $\mathbb{R}^n$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi}(w) \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w)$, $1 \le p < \infty$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_{p,\varphi}(w)} &\equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n,w)} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} w(B(x,r))^{-1/p} \|f\|_{L_{p,w}(B(x,r))} < \infty \end{aligned}$$

olmak üzere bütün $f \in L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca, $WM_{p,\varphi}(w) \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, w)$ zayıf genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı

$$\begin{aligned} \|f\|_{WM_{p,\varphi}(w)} &\equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n,w)} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} w(B(x,r))^{-1/p} \|f\|_{WL_{p,w}(B(x,r))} < \infty \end{aligned}$$

olmak üzere bütün $f \in WL^{loc}_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

Uyarı 4.2 (1) Eğer $w \equiv 1$ ise bu durumda $M_{p,\varphi}(1) = M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayıdır.

(2) Eğer $\varphi(x,r) \equiv w(B(x,r))^{\frac{\kappa-1}{p}}$, $0 < \kappa < 1$ ise bu durumda $M_{p,\varphi}(w) = L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayıdır.

(3) Eğer $w \equiv 1$ ve $0 < \lambda < n$ olmak üzere $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ ise bu durumda

$M_{p,\varphi}(1) = M_{p,\lambda}$ klasik Morrey uzayı ve $WM_{p,\varphi}(1) = WM_{p,\lambda}$ zayıf Morrey uzayıdır.
(4) Eğer $\varphi(x,r) \equiv w(B(x,r))^{-1/p}$ ise bu durumda $M_{p,\varphi}(w) = L_p(w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayıdır.

4.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Altlineer Operatörlerin Sınırlılığı

Bu kesimde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında elde edilen altlineer operatörlerin sınırlılığını ifade edeceğiz.

Teorem 4.1.1 $1 \le p < \infty$, $w \in A_p$, T, (3.1.1) koşulunu sağlayan bir altlineer operatör ve $p > 1$ için $L_p(w)$ üzerinde ve $L_1(w)$ uzayından $WL_1(w)$ uzayına sınırlı olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için

$$\|Tf\|_{L_{p,w}(B)} \lesssim w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

eşitsizliği herhangi bir $B = B(x_0,r)$ yuvarı ve her $f \in L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

Ayrıca $p = 1$ için

$$\|Tf\|_{WL_{1,w}(B)} \lesssim w(B) \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{1,w}(B(x_0,t))} \left\|w^{-1}\right\|_{L_{\infty}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \tag{4.1.1}$$

eşitsizliği herhangi bir $B = B(x_0,r)$ yuvarı ve her $f \in L_{1,w}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat: $p \in (1,\infty)$ ve $w \in A_p$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0,r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{^c(2B)}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|Tf\|_{L_{p,w}(B)} \le \|Tf_1\|_{L_{p,w}(B)} + \|Tf_2\|_{L_{p,w}(B)}$$

elde ederiz. $f_1 \in L_p(w)$ olduğundan $Tf_1 \in L_p(w)$ olur ve T nin $L_p(w)$ üzerindeki sınırlılığından

$$\|Tf_1\|_{L_{p,w}(B)} \leq \|Tf_1\|_{L_{p,w}} \leq C\,\|f_1\|_{L_{p,w}} = C\,\|f\|_{L_{p,w}(2B)}$$

elde edilir, burada $C > 0$, f den bağımsızdır.

$x \in B$ için

$$|Tf_2(x)| \leq 2^n c_0 \int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde ederiz. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy &\approx \int_{{}^c(2B)} |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0-y| < t} |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Hölder eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \tag{4.1.2}$$

elde ederiz. Ayrıca, her $p \in [1,\infty)$ için

$$\|Tf_2\|_{L_{p,w}(B)} \lesssim w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \tag{4.1.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\|Tf\|_{L_{p,w}(B)} \lesssim \|f\|_{L_{p,w}(2B)} + w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_{p,w}(2B)} &\approx |B|\,\|f\|_{L_{p,w}(2B)}\int_{2r}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim |B|\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\leq w(B)^{1/p}\left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B)}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim w(B)^{1/p}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))}\left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}} \qquad (4.1.4)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\|Tf\|_{L_{p,w}(B)} \lesssim w(B)^{1/p}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))}\left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}}$$

elde ederiz.

$p=1$ olsun. T nin zayıf $(1,1)$ sınırlılığından

$$\begin{aligned}
\|Tf_1\|_{WL_{1,w}(B)} &\leq \|Tf_1\|_{WL_{1,w}} \\
&\lesssim \|f_1\|_{L_{1,w}} = \|f\|_{L_{1,w}(2B)} \\
&\approx |B|\,\|f\|_{L_{1,w}(2B)}\int_{2r}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\leq w(B)\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{1,w}(B(x_0,t))}\left\|w^{-1}\right\|_{L_\infty(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}} \qquad (4.1.5)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda (4.1.3) ve (4.1.5) ten (4.1.1) eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 4.1.2 $1 \leq p < \infty$, $w \in A_p$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^{\infty}\frac{\underset{t<s<\infty}{\operatorname{ess\,inf}}\varphi_1(x,s)s^n}{t^{n+1}}dt \leq C\varphi_2(x,r) \qquad (4.1.6)$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve r ye bağlı değildir. T, (3.1.1) koşulunu sağlasın ve $p>1$ için $L_p(w)$ üzerinde ve $L_1(w)$ uzayından $WL_1(w)$ uzayına sınırlı olsun. Bu durumda T, $p>1$ için $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına ve $M_{1,\varphi_1}(w)$ uzayından

$WM_{1,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır. Yani $p>1$ için

$$\|Tf\|_{M_{p,\varphi_2}(w)} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(w)}$$

ve $p=1$ için

$$\|Tf\|_{WM_{1,\varphi_2}(w)} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}(w)}$$

sağlanır.

İspat: Teorem 3.1.2 ve Teorem 4.1.1 den $p>1$ için

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{M_{p,\varphi_2}(w)} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_{p,w}(B(x,t))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-n}} \|f\|_{L_{p,w}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} dt \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r^{-\frac{1}{n}})^{-1} \int_0^{r} \|f\|_{L_{p,w}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} dt \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r^{-\frac{1}{n}})^{-1} w(B(x,r^{-\frac{1}{n}}))^{-1/p} \|f\|_{L_{p,w}(B(x,r^{-\frac{1}{n}}))} \\
&= \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(w)}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$p=1$ için benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{WM_{1,\varphi_2}(w)} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_{1,w}(B(x,t))} \left\|w^{-1}\right\|_{L_{\infty}(B(x,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-n}} \|f\|_{L_{1,w}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} \left\|w^{-1}\right\|_{L_{\infty}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} dt \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r^{-\frac{1}{n}})^{-1} \int_0^{r} \|f\|_{L_{1,w}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} \left\|w^{-1}\right\|_{L_{\infty}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} dt \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r^{-\frac{1}{n}})^{-1} w(B(x,r^{-\frac{1}{n}}))^{-1} \|f\|_{L_{1,w}(B(x,r^{-\frac{1}{n}}))} \\
&= \|f\|_{M_{1,\varphi_1}(w)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.3 $1 \leq p < \infty$, $w \in A_p$ ve (φ_1, φ_2), (4.1.6) koşulunu sağlasın. Bu durumda M ve K operatörleri $p > 1$ için $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına ve $M_{1,\varphi_1}(w)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

$\varphi_1(x,r) = \varphi_2(x,r) \equiv w(B(x,r))^{\frac{\kappa-1}{p}}$ durumunda Teorem 4.1.2 den aşağıdaki yeni sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1.4 $1 \leq p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$ olsun. Ayrıca T, (3.1.1) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(w)$ üzerinde ve $L_1(w)$ uzayından $WL_1(w)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Bu durumda T, $p > 1$ için $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayında ve $L_{1,\kappa}(w)$ uzayından $WL_{1,\kappa}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 4.1.4 ten Teorem 2.3.8 ve Teorem 2.3.9 elde edilir.

4.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Altlineer Komütatör Operatörlerin Sınırlılığı

Bu kesimde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında elde edilen altlineer komütatör operatörlerin sınırlılığını ifade edeceğiz.

Önce teoremlerin ispatlarında kullanacağımız aşağıdaki lemmaları vereceğiz.

Lemma 4.2.1 $w \in A_\infty$ olsun. Bu durumda $BMO(w)$ uzayının normu $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayının normuna eşdeğerdir, burada

$$BMO(w) = \left\{ b : \|b\|_{*,w} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{w\left(B(x,r)\right)} \int_{B(x,r)} \left|b(y) - b_{B(x,r),w}\right| w(y)dy < \infty \right\}$$

ve

$$b_{B(x,r),w} = \frac{1}{w\left(B(x,r)\right)} \int_{B(x,r)} b(y)w(y)dy$$

biçimindedir (Muckenhoupt ve Wheeden 1976).

Uyarı 4.2.2 John-Nirenberg eşitsizliği $1 \le p < \infty$ ve $w \in A_\infty$ için

$$\|b\|_* \approx \sup_B \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |b(y) - b_B|^p \, w(y) dy \right)^{1/p} \tag{4.2.1}$$

olmasını gerektirir.

Gerçekten John-Nirenberg eşitsizliğinden ve Lemma 2.1.4 (4) ün kullanılmasıyla herhangi bir B yuvarı ve $t > 0$, $\delta > 0$ için

$$w(\{x \in B : |b(x) - b_B| > t\}) \le Cw(B) e^{-C_2 t\delta/\|b\|_*}$$

elde ederiz. Dolayısıyla bu eşitsizlik

$$\begin{aligned}
\int_B |b(y) - b_B|^p \, w(y) dy &= p \int_0^\infty t^{p-1} w(\{x \in B : |b(x) - b_B| > t\}) dt \\
&\le Cw(B) \int_0^\infty t^{p-1} e^{-C_2 t\delta/\|b\|_*} dt \\
&= Cw(B) \, \|b\|_*^p
\end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Bu durumda (4.2.1) ifadesini elde ederiz. $w \equiv 1$ durumunda (4.2.1) ifadesinden (2.2.2) elde edilir.

Lemma 4.2.3 $w \in A_\infty$ ve b, $BMO(\mathbb{R}^n)$ de bir fonksiyon olsun. Ayrıca $1 \le p < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r_1, r_2 > 0$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{1}{w(B(x,r_1))} \int_{B(x,r_1)} \left| b(y) - b_{B(x,r_2),w} \right|^p w(y) dy \right)^{1/p} \le C \, [w]_{A_\infty}^{2^n} \left(1 + \left| \ln \frac{r_1}{r_2} \right| \right) \|b\|_*$$

sağlanır, burada $C > 0$, f, w, x, r_1 ve r_2 den bağımsızdır.

İspat: Sadece $0 < r_1 \le r_2$ durumunu göz önüne alacağız. Benzer yöntem $0 < r_2 < r_1$ durumu için de geçerlidir.

$0 < r_1 \le r_2$ için $2^{k_1 - 1} < r_1 \le 2^{k_1}$ ve $2^{k_2 - 1} < r_2 \le 2^{k_2}$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu durumda $k_1 \leq k_2$ ve

$$(k_2 - k_1 - 1)\ln 2 < \ln \frac{r_2}{r_1} < (k_2 - k_1 + 1)\ln 2$$

elde ederiz.

(4.2.1), Lemma 2.1.4 (2) ve Lemma 4.2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{w(B(x,r_1))} \int_{B(x,r_1)} \left| b(y) - b_{B(x,r_2),w} \right|^p w(y)dy \right)^{1/p} \\
\leq \; & \left(\frac{1}{w(B(x,r_1))} \int_{B(x,r_1)} \left| b(y) - b_{B(x,2^{k_1})} \right|^p w(y)dy \right)^{1/p} \\
& + \left| b_{B(x,2^{k_1}),w} - b_{B(x,r_2),w} \right| + \left| b_{B(x,2^{k_1})} - b_{B(x,2^{k_1}),w} \right| \\
\leq \; & \left(\frac{1}{w(B(x,r_1))} \int_{B(x,r_1)} \left| b(y) - b_{B(x,2^{k_1})} \right|^p w(y)dy \right)^{1/p} \\
& + \left| b_{B(x,r_2),w} - b_{B(x,2^{k_2}),w} \right| + \sum_{j=k_1}^{k_2-1} \left| b_{B(x,2^{j+1}),w} - b_{B(x,2^j),w} \right| \\
& + \left| b_{B(x,2^{k_1})} - b_{B(x,2^{k_1}),w} \right| \\
\leq \; & \left(\frac{1}{w(B(x,r_1))} \int_{B(x,r_1)} \left| b(y) - b_{B(x,2^{k_1})} \right|^p w(y)dy \right)^{1/p} \\
& + \frac{1}{w(B(x,r_2))} \int_{B(x,r_2)} \left| b(y) - b_{B(x,2^{k_2}),w} \right| w(y)dy \\
& + \sum_{j=k_1}^{k_2-1} \frac{1}{w(B(x,2^j))} \int_{B(x,2^j)} \left| b(y) - b_{B(x,2^{j+1}),w} \right| w(y)dy \\
& + \frac{1}{w(B(x,2^{k_1}))} \int_{B(x,2^{k_1})} \left| b(y) - b_{B(x,2^{k_1})} \right| w(y)dy \\
\leq \; & \left(\frac{2^{2^n} [w]_{A_\infty}^{2^n}}{w(B(x,2^{k_1}))} \int_{B(x,2^{k_1})} \left| b(y) - b_{B(x,2^{k_1})} \right|^p w(y)dy \right)^{1/p} \\
& + \frac{2^{2^n} [w]_{A_\infty}^{2^n}}{w(B(x,2^{k_2}))} \int_{B(x,2^{k_2})} \left| b(y) - b_{B(x,2^{k_2}),w} \right| w(y)dy \\
& + \sum_{j=k_1}^{k_2-1} \frac{2^{2^n} [w]_{A_\infty}^{2^n}}{w(B(x,2^{j+1}))} \int_{B(x,2^{j+1})} \left| b(y) - b_{B(x,2^{j+1}),w} \right| w(y)dy \\
& + \frac{1}{w(B(x,2^{k_1}))} \int_{B(x,2^{k_1})} \left| b(y) - b_{B(x,2^{k_1})} \right| w(y)dy \\
\leq \; & 2^{2^n} [w]_{A_\infty}^{2^n} (C + k_2 - k_1) \left\| b \right\|_* \leq C [w]_{A_\infty}^{2^n} (1 + \ln \frac{r_2}{r_1}) \left\| b \right\|_*
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Lemma 4.2.3 ten $w \equiv 1$ için Lin ve Lu (2008) tarafından ispatlanmış olan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.4 b, $BMO(\mathbb{R}^n)$ de bir fonksiyon olsun. Ayrıca $1 \leq p < \infty, x \in \mathbb{R}^n$ ve $r_1, r_2 > 0$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{1}{|B(x,r_1)|}\int_{B(x,r_1)} \left|b(y) - b_{B(x,r_2)}\right|^p dy\right)^{1/p} \leq C\left(1 + \left|\ln\frac{r_1}{r_2}\right|\right)\|b\|_*$$

elde edilir, burada $C > 0$, f, x, r_1 ve r_2 den bağımsızdır.

Lemma 4.2.5 $w \in A_p$ ve b, $BMO(\mathbb{R}^n)$ de bir fonksiyon olsun. Ayrıca $1 < p < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r_1, r_2 > 0$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{1}{w^{1-p'}(B(x,r_1))}\int_{B(x,r_1)} \left|b(y) - b_{B(x,r_2),w}\right|^{p'} w(y)^{1-p'} dy\right)^{1/p'} \leq C\,[w]_{A_p}^{1/p}\left(1 + \left|\ln\frac{r_1}{r_2}\right|\right)\|b\|_*$$

elde edilir, burada $C > 0$, f, w, x, r_1 ve r_2 den bağımsızdır.

İspat: Sadece $0 < r_1 \leq r_2$ durumunu göz önüne alacağız. Benzer yöntem $0 < r_2 < r_1$ durumu için de geçerlidir.

$0 < r_1 \leq r_2$ için $2^{k_1-1} < r_1 \leq 2^{k_1}$ ve $2^{k_2-1} < r_2 \leq 2^{k_2}$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $k_1 \leq k_2$ ve

$$(k_2 - k_1 - 1)\ln 2 < \ln\frac{r_2}{r_1} < (k_2 - k_1 + 1)\ln 2$$

elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{w^{1-p'}(B(x,r_1))}\int_{B(x,r_1)}\left|b(y)-b_{B(x,r_2),w}\right|^{p'}w(y)^{1-p'}dy\right)^{1/p'} \\
\leq & \left(\frac{1}{w^{1-p'}(B(x,r_1))}\int_{B(x,r_1)}\left\{\left|b(y)-b_{B(x,2^{k_1}),w^{1-p'}}\right|\right.\right. \\
& \left.\left.+\left|b_{B(x,2^{k_1}),w^{1-p'}}-b_{B(x,r_2),w}\right|\right\}^{p'}w(y)^{1-p'}dy\right)^{1/p'} \\
\leq & \left(\frac{1}{w^{1-p'}(B(x,r_1))}\int_{B(x,r_1)}\left|b(y)-b_{B(x,2^{k_1}),w^{1-p'}}\right|^{p'}w(y)^{1-p'}dy\right)^{1/p'} \\
& +\left|b_{B(x,2^{k_1}),w^{1-p'}}-b_{B(x,r_2),w}\right| \\
= & \; J_1+J_2
\end{aligned}
$$

sağlanır. Eğer $1\leq p<\infty$ için $w\in A_p$ ise bu durumda $w^{1-p'}\in A_{p'}\subset A_\infty$ olduğu bilinmektedir. Buradan ve Lemma 2.1.4 (1) ve Lemma 4.2.3 ten

$$
\begin{aligned}
J_1 & \leq \left(\frac{2^{np'}\left[w^{1-p'}\right]_{A_{p'}}}{w^{1-p'}(B(x,2^{k_1}))}\int_{B(x,2^{k_1})}\left|b(y)-b_{B(x,2^{k_1}),w^{1-p'}}\right|^{p'}w(y)^{1-p'}dy\right)^{1/p'} \\
& \leq C\left[w^{1-p'}\right]_{A_{p'}}^{1/p'}\|b\|_*=C\,[w]_{A_p}^{1/p}\|b\|_*
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Şimdi J_2 ifadesini hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
J_2 & = \left|b_{B(x,2^{k_1}),w^{1-p'}}-b_{B(x,r_2),w}\right| \\
& \leq \left|b_{B(x,2^{k_1}),w^{1-p'}}-b_{B(x,2^{k_1})}\right|+\left|b_{B(x,2^{k_1})}-b_{B(x,r_2)}\right|+\left|b_{B(x,r_2)}-b_{B(x,r_2),w}\right| \\
& = J_{21}+J_{22}+J_{23}.
\end{aligned}
$$

(4.2.1) ifadesinden

$$
\begin{aligned}
J_{21} & = \left|b_{B(x,2^{k_1}),w^{1-p'}}-b_{B(x,2^{k_1})}\right| \\
& \leq \frac{1}{w^{1-p'}(B(x,2^{k_1}))}\int_{B(x,2^{k_1})}\left|b(y)-b_{B(x,2^{k_1})}\right|w(y)^{1-p'}dy \\
& \leq C\,\|b\|_*
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Sonuç 4.2.4 ten

$$\begin{aligned} J_{22} &= \left| b_{B(x,2^{k_1})} - b_{B(x,r_2)} \right| \\ &\leq \frac{1}{|B(x,2^{k_1})|} \int_{B(x,2^{k_1})} \left| b(y) - b_{B(x,r_2)} \right| dy \\ &\leq C \left(1 + \left| \ln \frac{2^{k_1}}{r_2} \right| \right) \|b\|_* \end{aligned}$$

elde ederiz. (4.2.1) ifadesinden

$$\begin{aligned} J_{23} &= \left| b_{B(x,r_2)} - b_{B(x,r_2),w} \right| \\ &\leq \frac{1}{w(B(x,r_2))} \int_{B(x,r_2)} \left| b(y) - b_{B(x,r_2)} \right| w(y) dy \\ &\leq C \|b\|_* \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda

$$J_1 + J_2 \leq C \, [w]_{A_p}^{1/p} \left(1 + \left| \ln \frac{r_2}{r_1} \right| \right) \|b\|_*$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.6 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve T_b, (3.2.1) koşulunu sağlayan bir altlineer operatör olsun ve

$$\|T_b f\|_{L_{p,w}} \lesssim \|b\|_* \|f\|_{L_{p,w}} \tag{4.2.2}$$

sağlansın. Bu durumda

$$\|T_b f\|_{L_{p,w}(B)} \lesssim \|b\|_* \, w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \ln \left(e + \frac{t}{r} \right) \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \left\| w^{-1/p} \right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

eşitsizliği herhangi bir $B = B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat: $p \in (1, \infty)$ ve $w \in A_p$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli

r yarıçaplı yuvar olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{{}^c(2B)}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|T_b f\|_{L_{p,w}(B)} \leq \|T_b f_1\|_{L_{p,w}(B)} + \|T_b f_2\|_{L_{p,w}(B)}$$

elde ederiz. (4.2.2) ifadesinden

$$\|T_b f_1\|_{L_{p,w}(B)} \leq \|T_b f_1\|_{L_{p,w}} \lesssim \|b\|_* \|f_1\|_{L_{p,w}} = \|b\|_* \|f\|_{L_{p,w}(2B)}$$

elde edilir. $x \in B$ için

$$\begin{aligned} |T_b f_2(x)| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(y) - b(x)|}{|x - y|^n} |f_2(y)|\, dy \\ &\approx \int_{{}^c(2B)} \frac{|b(y) - b(x)|}{|x_0 - y|^n} |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} \|T_b f_2\|_{L_{p,w}(B)} &\lesssim \left(\int_B \left(\int_{{}^c(2B)} \frac{|b(y) - b(x)|}{|x_0 - y|^n} |f(y)|\, dy \right)^p w(x)\, dx \right)^{1/p} \\ &\lesssim \left(\int_B \left(\int_{{}^c(2B)} \frac{|b(y) - b_{B,w}|}{|x_0 - y|^n} |f(y)|\, dy \right)^p w(x)\, dx \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\int_B \left(\int_{{}^c(2B)} \frac{|b(x) - b_{B,w}|}{|x_0 - y|^n} |f(y)|\, dy \right)^p w(x)\, dx \right)^{1/p} \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. I_1 ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
I_1 &= w(B)^{1/p} \int_{{}^c(2B)} \frac{|b(y) - b_{B,w}|}{|x_0 - y|^n} |f(y)|\, dy \\
&\approx w(B)^{1/p} \int_{{}^c(2B)} |b(y) - b_{B,w}|\, |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&\approx w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \le |x_0-y| < t} |b(y) - b_{B,w}|\, |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y) - b_{B,w}|\, |f(y)|\, dy \frac{dt}{t^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Hölder eşitsizliğinin uygulanmasıyla ve Lemma 4.2.5 ten

$$\begin{aligned}
I_1 &\lesssim w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \left(\int_{B(x_0,t)} \left| b(y) - b_{B(x_0,r),w} \right|^{p'} w(y)^{1-p'} dy \right)^{1/p'} \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim [w]_{A_p}^{1/p} \|b\|_* \, w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r} \right) \left\| w^{-1/p} \right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

I_2 ifadesini hesaplamak için

$$I_2 = \left(\int_B |b(x) - b_{B,w}|^p \, w(x)\, dx \right)^{1/p} \int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

olduğuna dikkat edelim. Lemma 4.2.3 ten

$$I_2 \lesssim \|b\|_* \, w(B)^{1/p} \int_{{}^c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde ederiz. Böylece (4.1.2) den

$$I_2 \lesssim \|b\|_* \, w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \left\| w^{-1/p} \right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

elde edilir. I_1 ve I_2 ifadelerinin toplanmasıyla

$$\|T_b f_2\|_{L_{p,w}(B)} \lesssim \|b\|_* \, w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \ln \left(e + \frac{t}{r} \right) \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \left\| w^{-1/p} \right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

elde ederiz. Son olarak,

$$\begin{aligned} \|T_b f\|_{L_{p,w}(B)} &\lesssim \|b\|_* \|f\|_{L_{p,w}(2B)} \\ &+ \|b\|_* \, w(B)^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \end{aligned}$$

elde ederiz ve Teorem 4.2.6 nın ifadesi (4.1.4) ten görülür.

Teorem 4.2.7 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^n}{t^{n+1}} dt \leq C\varphi_2(x,r)$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve r ye bağlı değildir. T_b, (3.2.1) ve (4.2.2) koşullarını sağlayan bir altlineer operatör olsun. Bu durumda T_b operatörü $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır. Yani

$$\|T_b f\|_{M_{p,\varphi_2}(w)} \lesssim \|b\|_* \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(w)}$$

sağlanır.

İspat: Teorem 3.1.2 ve Teorem 4.2.6 dan

$$\begin{aligned} \|T_b f\|_{M_{p,\varphi_2}(w)} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \|b\|_* \\ &\quad \times \int_r^{\infty} \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p,w}(B(x,t))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\approx \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \\ &\quad \times \int_0^{r^{-n}} \ln\left(e + \frac{1}{t^{1/n} r}\right) \|f\|_{L_{p,w}(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x,t^{-1/n}))} dt \\ &= \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x, r^{-1/n})^{-1} \\ &\quad \times \int_0^{r} \ln\left(e + \frac{r^{1/n}}{t^{1/n}}\right) \|f\|_{L_{p,w}(B(x,t^{-1/n}))} \left\|w^{-1/p}\right\|_{L_{p'}(B(x,t^{-1/n}))} dt \\ &\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x, r^{-1/n})^{-1} w(B(x, r^{-1/n}))^{-1/p} \|f\|_{L_{p,w}(B(x,r^{-1/n}))} \\ &= \|b\|_* \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(w)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç 4.2.8 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2), (4.1.6) koşulunu sağlasın. Bu durumda M_b ve $[b, K]$ operatörleri $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

$\varphi_1(x,r) = \varphi_2(x,r) \equiv w(B(x,r))^{\frac{\kappa-1}{p}}$ durumunda Teorem 4.2.7 den aşağıdaki yeni sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.9 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca T_b, (3.2.1) ve (4.2.2) koşullarını sağlayan bir altlineer operatör ve $L_p(w)$ üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda T_b, $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayında sınırlıdır.

Komori ve Shirai (2009) $[b, K]$ operatörü için ağırlıklı Morrey uzaylarında sınırlılık elde etmişlerdir. Bu sonucu ve ayrıca M_b operatörünün de sınırlılığını içeren aşağıdaki yeni sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.10 $1 < p < \infty, 0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_b ve $[b, K]$ operatörleri $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.

5. BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.2.7 yi pseudo-diferensiyel, Littlewood-Paley, Marcinkiewicz ve Bochner-Riesz operatörü gibi birkaç özel operatöre uygulayacağız.

5.1 Pseudo-diferensiyel Operatörler

Bu kesimde pseudo-diferensiyel operatörleri tanıtıp, bu operatörler için elde edilen sonuçları ifade edeceğiz.

Bir u fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve ters Fourier formülü sırasıyla

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

ve

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

ile verilsin.

Fourier dönüşümünün temel özellikleri $\varphi \in \mathcal{S}$ için

$$\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$$

yazılmasına imkan verir. Bu durumda ters Fourier formülünden

$$D^\alpha \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

elde edilir. $a_\alpha(x)$, $\mathbb{R}^n$ de tanımlı fonksiyonlar olmak üzere bir $a(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ lineer kısmi diferensiyel operatörü için bu formüller $\varphi \in \mathcal{S}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeyi verir:

$$a(x,D)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

burada $a(x,D)$ operatörünün $a(x,\xi)$ sembolü $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(2\pi i\xi)^\alpha$ polinomudur.

$m \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta < 1$ ve $0 \le \rho < 1$ olsun. $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu her α ve β katlı-indisi için

$$\left| D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi) \right| \le C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

eşitsizliğini sağlarsa $S^m_{\rho,\delta}$ sınıfına ait bir sembol olarak adlandırılır. $S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ sınıfına ait bir sembol yukarıdaki eşitsizliği her m reel sayısı için sağlar. Eğer $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ ise bu durumda

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

formülü ile bir A pseudo-diferensiyel operatörü tanımlanır. Sembolü $S^m_{\rho,\delta}$ sınıfına ait pseudo-diferensiyel operatörlerin sınıfı $L^m_{\rho,\delta}$ ile gösterilir.

Pseudo-diferensiyel operatörler diferensiyel operatörlerin ve singüler integrallerin genelleştirmesidir. Miller (1982) pseudo-diferensiyel operatörlerin ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığı hakkında aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 5.1.1 Eğer $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ ve A, $L^0_{1,0}$ Hörmander sınıfına ait bir pseudo-diferensiyel operatör ise bu durumda A, $L_p(w)$ üzerinde sınırlıdır (Miller 1982).

Coifman ve Meyer (1978) tarafından $L^0_{1,0}$ Hörmander sınıfına ait pseudo-diferensiyel operatörlerin Calderón-Zygmund operatörleri olduğu gösterilmiştir. Bu durumda Sonuç 4.1.3 ve 4.2.8 den aşağıdaki yeni sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.1.2 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ ve (φ_1, φ_2) (4.1.6) koşulunu sağlasın. Eğer A, $L^0_{1,0}$ Hörmander sınıfından bir pseudo-diferensiyel operatör ise bu durumda A operatörü $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 5.1.3 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ olsun. (φ_1, φ_2) (4.1.6) koşulunu sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer A, $L^0_{1,0}$ Hörmander sınıfından bir pseudo-diferensiyel operatör ise bu durumda $[b, A]$ operatörü $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 4.1.4 ve 4.2.9 dan aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.1.4 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$ olsun. Eğer A, $L^0_{1,0}$ Hörmander sınıfından bir pseudo-diferensiyel operatör ise bu durumda A operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.

Sonuç 5.1.5 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer A, $L^0_{1,0}$ Hörmander sınıfından bir pseudo-diferensiyel operatör ise bu durumda $[b, A]$ operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.

5.2 Littlewood-Paley Operatörü

Littlewood-Paley fonksiyonları klasik harmonik analiz, kompleks analiz ve kısmi diferensiyel denklemler teorisinde önemli rol oynamaktadır. Bunlara örnek olarak Fatou tipinden teğetsel olmayan yakınsaklık, Riesz dönüşümü ve çarpanların sınırlılığı çalışmalarını verebiliriz (Stein 1958, Stein 1970, Stein 1993).

Littlewood-Paley g fonksiyonu bir boyutlu durumda ilk olarak Littlewood ve Paley (1931) tarafından Fourier serileri üzerindeki çalışmalarında

$$g(f)(\theta) = \left(\int_0^1 (1-\rho) \left| \Phi'(\rho e^{i\theta}) \right|^2 d\rho \right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanmıştır, burada $\Phi(z)$, $|z| < 1$ de analitiktir ve reel kısmı $f(\theta)$ sınır değerine sahip olacak şekilde bir fonksiyondur. Bu teori, Stein (1958) tarafından yüksek boyutlu uzaylara genişletilmiştir. Ağırlıklı Littlewood-Paley teorisi ilk olarak Kurtz (1980) tarafından çalışılmıştır.

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ için f nin Poisson integrali

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) f(x-y) dy$$

ile verilir, burada

$$P_t(y) = c_n \frac{t}{(t^2 + |y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}}$$

biçimindedir. Δ, $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ de

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

olacak şekilde Laplace operatörünü göstersin. Burada $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$, $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ olacak şekildeki üst yarı-uzaydır. Karşılık gelen gradiyent

$$|\nabla u(x,t)|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2$$

biçimindedir. Bu durumda f nin Littlewood-Paley g fonksiyonu

$$g(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\nabla u(x,t)|^2 \, tdt\right)^{1/2}$$

ile tanımlanır.

Stein g fonksiyonunun $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ uzayını karakterize ettiğini göstermiştir.

Teorem 5.2.1 $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $g(f)(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$A_p^{'} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|g(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır (Stein 1970).

Tanım 5.2.2 $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0 \tag{5.2.1}$$

sağlansın. Bu durumda g_ψ genelleştirilmiş Littlewood-Paley g fonksiyonu

$$g_\psi(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

ile tanımlanır, burada $F_t(f) = \psi_t * f$ ve $t > 0$ için $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$ biçimindedir.

g_ψ operatörünün altlineer komütatörü

$$[b, g_\psi](f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| F_t^b(f)(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$$

ile tanımlanır, burada

$$F_t^b(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)]\psi_t(x-y)f(y)dy$$

ile verilir.

g_ψ Littlewood-Paley operatörü için aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 5.2.3 $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için (5.2.1) ve aşağıdaki özellikler sağlansın:

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+1}} \tag{5.2.2}$$

$$|\nabla\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+2}} \tag{5.2.3}$$

burada $C > 0$ sayısı x ten bağımsızdır. Eğer $w \in A_p$ ise bu durumda g_ψ, her $1 < p < \infty$ için $L_p(w)$ üzerinde sınırlıdır (Lu vd. 2007).

$H = \left\{ h : \|h\| = \left(\int_0^\infty |h(t)|^2 \, dt/t \right)^{1/2} < \infty \right\}$ uzayını tanımlayalım. Bu durumda her bir sabitlenmiş $x \in \mathbb{R}^n$ için $F_t(f)(x)$, $[0, \infty)$ dan H uzayına bir dönüşüm olarak düşünülebilir. O halde $g_\psi(f)(x) = \|F_t(f)(x)\|$ olduğu açıktır. Minkowski eşitsizliği ve ψ üzerindeki koşuldan

$$\begin{aligned} g_\psi(f)(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_0^\infty |\psi_t(x-y)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_0^\infty \frac{t^{-2n}}{(1+|x-y|/t)^{2(n+1)}} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dy \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda g_ψ için (3.1.1) koşulu sağlanır.

Böylece Teorem 4.1.2 ve 4.2.7 den aşağıdaki yeni sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.2.4 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ olsun. (φ_1, φ_2) (4.1.6) koşulunu ve $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (5.2.1)-(5.2.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda g_ψ operatörü $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 5.2.5 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. (φ_1, φ_2) (4.1.6) koşulunu ve $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (5.2.1)-(5.2.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda $[b, g_\psi]$, $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 4.1.4 ve Sonuç 4.2.9 dan aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.2.6 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$, $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (5.2.1)-(5.2.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda g_ψ operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.

Sonuç 5.2.7 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (5.2.1)-(5.2.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda $[b, g_\psi]$ operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.

5.3 Marcinkiewicz Operatörü

Marcinkiewicz (1938)

$$\mu(f)(x) = \left(\int_0^{2\pi} \frac{|F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)|^2}{t^3} dt \right)^{1/2}, \qquad x \in [0, 2\pi]$$

ifadesini tanımlamıştır, burada $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ biçimindedir.

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $\mathbb{R}^n$ de $d\sigma$ Lebesgue ölçüsü ile donatılmış birim küre olsun. Ω aşağıdaki koşulları sağlasın:

(a) Ω, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyon, yani herhangi bir $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ için

$$\Omega(tx) = \Omega(x)$$

olsun.

(b) Ω, S^{n-1} üzerinde sıfır ortalama değerine sahip, yani

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0$$

olsun.

(c) $\Omega \in Lip_\gamma(S^{n-1})$, $0 < \gamma \leq 1$, yani herhangi bir $x', y' \in S^{n-1}$ için

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq C\,|x' - y'|^\gamma$$

olacak şekilde $C > 0$ vardır.

1958'de Stein μ_Ω yüksek boyutlu Marcinkiewicz integralini

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$

olarak tanımlamıştır, burada

$$F_{\Omega,t}(f)(x) = \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y)dy$$

biçimindedir.

Stein, Zygmund'un 1944'te elde ettiği sonuçların benzerini aşağıdaki teoremde elde etmiştir.

Teorem 5.3.1 $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$ ve Ω (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda

(i) $\mu_\Omega(f)$ hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $1 < p \leq 2$ ise $\|\mu_\Omega(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ sağlanır.

(iii) Eğer $p = 1$ ise her $\lambda > 0$ için $\lambda\,|\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_\Omega(f)(x) > \lambda\}| \leq C\,\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ sağlanır

(Stein 1958).

Benedek vd. (1962), Ω, $x \neq 0$ da sürekli diferensiyellenebilir olduğunda yukarıdaki teoremin (ii) durumunun $1 < p < \infty$ için sağlandığını göstermişlerdir.

μ_Ω operatörünün altlineer komütatörü

$$[b, \mu_\Omega](f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t,b}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

ile tanımlanır, burada

$$F_{\Omega,t,b}(f)(x) = \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} [b(x) - b(y)] f(y) dy$$

biçimindedir.

H, $H = \left\{ h : \|h\| = \left(\int_0^\infty |h(t)|^2 \, dt/t^3 \right)^{1/2} < \infty \right\}$ uzayı olsun, bu durumda her bir sabitlenmiş $x \in \mathbb{R}^n$ için $F_{\Omega,t}(f)(x)$, $[0, \infty)$ dan H uzayına bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Bu durumda $\mu_\Omega(f)(x) = \|F_{\Omega,t}(f)(x)\|$ olduğu açıktır. Minkowski eşitsizliği ve Ω üzerindeki koşuldan

$$\begin{aligned} \mu_\Omega(f)(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece μ_Ω (3.1.1) koşulunu sağlar. Torchinsky ve Wang (1990) $1 < p < \infty$ olmak üzere $w \in A_p$ için μ_Ω ve $[b, \mu_\Omega]$ nın $L_p(w)$ üzerinde sınırlı olduğunu göstermişlerdir. Bu durumda Teorem 4.1.2 ve 4.2.7 den aşağıdaki yeni sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.3.2 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ olsun. (φ_1, φ_2) (4.1.6) koşulunu ve Ω (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda μ_Ω, $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 5.3.3 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. (φ_1, φ_2) (4.1.6) koşulunu ve Ω (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda $[b, \mu_\Omega]$, $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 4.1.4 ve 4.2.9 dan aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.3.4 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$ olsun ve Ω (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda μ_Ω operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.

Sonuç 5.3.5 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun ve Ω (a)-(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda $[b, \mu_\Omega]$, $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.

5.4 Bochner-Riesz Operatörü

Bochner-Riesz ortalaması ilk olarak Bochner (1936) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $\delta > (n-1)/2$ için L_p sınırlılığı elde edilmiştir. Burada $\delta = (n-1)/2$ kritik indis olarak adlandırılır. $\xi \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$m_\delta(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\delta$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$(m_\delta)^\vee(x) = B^\delta(x) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\pi^\delta} \frac{J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi |x|)}{|x|^{\frac{n}{2}+\delta}}$$

olduğu bilinmektedir, burada J_λ

$$J_\lambda(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^\lambda}{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} e^{its} \left(1 - s^2\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} ds$$

Bessel fonksiyonudur. Böylece

$$\left|B^\delta(x)\right| \le C_{n,\delta}(1+|x|)^{-n-(\delta - \frac{n-1}{2})} \tag{5.4.1}$$

elde edilir (Grafakos 2004).

$B_t^\delta(f)^\wedge(\xi) = (1-t^2|\xi|^2)_+^\delta \widehat{f}(\xi)$ ve $t>0$ için $B_t^\delta(x) = t^{-n}B^\delta(x/t)$ olsun, burada $A_+ = \max(A,0)$ dır. Maksimal Bochner-Riesz operatörü

$$B_{\delta,*}(f)(x) = \sup_{t>0} \left|B_t^\delta(f)(x)\right|$$

ile tanımlanır (Liu ve Lu 2003, Liu ve Chen 2008).

H, $H = \{h : \|h\| = \sup_{t>0}|h(t)| < \infty\}$ uzayı olsun, bu durumda $B_{\delta,*}(f)(x) = \left\|B_t^\delta(f)(x)\right\|$ olduğu açıktır. (5.4.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left|B_r^\delta(x-y)\right| &\leq Cr^{-n}(1+|x-y|/r)^{-(\delta+(n+1)/2)} \\
&= C\left(\frac{r}{r+|x-y|}\right)^{\delta-(n-1)/2} \frac{1}{(r+|x-y|)^n} \\
&\leq C|x-y|^{-n}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$B_{\delta,*}(f)(x) \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy$$

elde ederiz. Böylece $B_{\delta,*}$, (3.1.1) koşulunu sağlar. $w \in A_p$ olmak üzere $B_{\delta,*}$ operatörünün $p>1$ için $L_p(w)$ üzerinde ve $L_1(w)$ uzayından $WL_1(w)$ uzayına sınırlı olduğu bilinmektedir (Shi ve Sun 1992, Vargas 1996). Bu durumda Teorem 4.1.2 ve 4.2.7 den aşağıdaki yeni sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.4.1 $1 \leq p < \infty$, $w \in A_p$ olsun. (φ_1, φ_2) (4.1.6) koşulunu sağlasın ve $\delta \geq (n-1)/2$ olsun. Bu durumda $B_{\delta,*}$ operatörü $p>1$ için $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına ve $M_{1,\varphi_1}(w)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 5.4.2 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. (φ_1, φ_2) (4.1.6) koşulunu sağlasın ve $\delta \geq (n-1)/2$ olsun. Bu durumda $[b, B_{\delta,*}]$ operatörü $M_{p,\varphi_1}(w)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Uyarı 5.4.3 (3.1.2) ve (3.1.3) koşullarını sağlayan $\varphi(x,r)$ üzerindeki şartlar altında Sonuç 5.4.1 ve 5.4.2 (Liu ve Chen 2008) çalışmasında ispatlanmıştır.

Sonuç 4.1.4 ve 4.2.9 dan aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.4.4 $1 \le p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$, ve $\delta \ge (n-1)/2$ olsun. Bu durumda $B_{\delta,*}$ operatörü $p > 1$ için $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde ve $L_{1,\kappa}(w)$ uzayından $WL_{1,\kappa}(w)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 5.4.5 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$, $w \in A_p$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\delta \ge (n-1)/2$ olsun. Bu durumda $[b, B_{\delta,*}]$ operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ üzerinde sınırlıdır.

KAYNAKLAR

Adams, D.R. 1975. A note on Riesz potentials. Duke Math. J., 42(4); pp. 765-778.

Adams, R.A. and Fournier, J.J.F. 2003. Sobolev spaces. Second edition. Pure and applied mathematics. Elsevier/Academic press, 305 p., Amsterdam.

Akbulut, A., Guliyev, V.S. and Mustafayev, R. 2010. Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces. Preprint, Institute of Mathematics, AS CR, Prague.

Álvarez, J., Bagby, R.J., Kurtz, D.S. and Pérez, C. 1993. Weighted estimates for commutators of linear operators. Studia Math., 104(2); pp. 195-209.

Benedek, A., Calderón, A.P. and Panzone, R. 1962. Convolution operators on Banach space valued functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 48; pp. 356-365.

Bochner, S. 1936. Summation of multiple Fourier series by spherical means. Trans. Amer. Math. Soc., 40(2); pp. 175-207.

Burenkov, V.I., Guliyev, H.V. and Guliyev, V.S. 2007a. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of fractional maximal operators in local Morrey-type spaces. J. Comput. Appl. Math., 208(1); pp. 280-301.

Burenkov, V.I., Guliyev, H.V. and Guliyev, V.S. 2007b. On boundedness of the fractional maximal operator from complementary Morrey-type spaces to Morrey-type spaces. Contemp. Math., 424. The Interaction of Analysis and Geometry. Amer. Math. Soc. Providence RI, pp. 17-32.

Burenkov, V.I., Guliev, V.S., Tararykova, T.V. and Sherbetchi, A. 2008. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in Morrey-type local spaces. Dokl. Math., 78(2); pp. 651-654.

Burenkov, V.I. and Guliyev, V.S. 2009. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces. Potential Anal., 30(3); pp. 211-249.

Burenkov, V.I., Gogatishvili, A., Guliyev, V.S. and Mustafayev, R.Ch. 2010. Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces. Complex Var. Elliptic Equ., 55(8-10); pp. 739-758.

Carro, M., Pick, L., Soria, J. and Stepanov, V.D. 2001. On embeddings between classical Lorentz spaces. Math. Inequal. Appl., 4(3); pp. 397-428.

Chiarenza, F. and Frasca, M. 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. Rend. Mat. Appl., 7(3-4); pp. 273-279.

Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P. 1991. Interior $W^{2,p}$-estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients. Ricerche Mat., 40(1); pp. 149-168.

Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P. 1993. $W^{2,p}$-solvability of Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients. Trans. Amer. Math. Soc., 336(2); pp. 841-853.

Coifman, R.R. and Fefferman, C. 1974. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Studia Math., 51; pp. 241-250.

Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. 1976. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. Ann. of Math., 103(3); pp. 611-635.

Coifman, R.R. and Meyer, Y. 1978. Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque, 57. Société Mathématique de France, 185 p., Paris.

Ding, Y., Yang, D. and Zhou, Z. 1998. Boundedness of sublinear operators and commutators on $L^{p,w}(\mathbb{R}^n)$. Yokohama Math. J., 46(1); pp. 15-27.

Di Fazio, G. and Ragusa, M.A. 1993. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients. J. Funct. Anal., 112(2); pp. 241-256.

Duoandikoetxea, J. 2001. Fourier analysis. Graduate studies in mathematics. Amer. Math. Soc. Providence RI., 29; 222 p.

Fefferman, C. and Stein, E.M. 1971. Some maximal inequalities. Amer. J. Math., 93; pp. 107-115.

García-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J. L. 1985. Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland mathematics studies. 116, 604 p., Amsterdam.

Grafakos, L. 2004. Classical and modern Fourier analysis. Pearson Education. Inc. Upper Saddle River, 931 p., New Jersey.

Guliyev, V.S. 1994. Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$. Doctor's degree dissertion, Mat. Inst. Steklov, 329 p., Moscow.

Guliyev, V.S. 1999. Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups, some applications. 332 p., Baku.

Guliyev, V.S. 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces. J. Inequal. Appl., 20 p.

Guliyev, V.S., Hasanov, J.J. and Samko, S.G. 2010a. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces. Math. Scand., 107(2); pp. 285-304.

Guliyev, V.S., Hasanov, J.J. and Samko, S.G. 2010b. Boundedness of maximal, potential type, and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces. J. Math. Sci., 170(4); pp. 423-443.

Guliyev, V.S., Aliyev, S.S. and Karaman, T. 2011. Boundedness of a class of sublinear operators and their commutators on generalized Morrey spaces. Abstr. Appl. Anal., Art. ID 356041, 18 p.

Guliyev, V.S., Karaman, T., Mustafayev, R.Ch. and Serbetci, A. Generalized weighted Morrey spaces and commutators of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operators. (submitted).

Janson, S. 1978. Mean oscillation and commutators of singular integral operators. Ark. Mat., 16(2); pp. 263-270.

John, F. and Nirenberg, L. 1961. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math., 14; pp. 415-426.

Karaman, T., Guliyev, V.S. and Serbetci, A. Boundedness of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operators on generalized weighted Morrey spaces. Scientific Annals of "Al.I. Cuza" University of Iasi (accepted).

Komori, Y. and Shirai, S. 2009. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator. Math. Nachr., 282(2); pp. 219-231.

Kurtz, D.S. 1980. Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted L^p spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 259(1); pp. 235-254.

Lanzhe, L. and Shanzhen, L. 2003. Weighted weak type inequalities for maximal commutators of Bochner-Riesz operator. Hokkaido Math. J., 32(1); pp.

85-99.

Lin, Y. and Lu, S. 2008. Strongly singular Calderón-Zygmund operators and their commutators. Jordan Journal of Mathematics and Statistics, 1; pp. 31-49.

Littlewood, J.E. and Paley, R.E.A.C. 1931. Theorems on Fourier series and power series I. J. London Math. Soc., 6; pp. 230-233.

Liu, Y. and Chen, D. 2008. The boundedness of maximal Bochner-Riesz operator and maximal commutator on Morrey type spaces. Anal. Theory Appl., 24(4); pp. 321-329.

Lu, S., Ding, Y. and Yan, D. 2007. Singular integrals and related topics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 272 p. Singapore.

Lu, G., Lu, S. and Yang, D. 2002. Singular integrals and commutators on homogeneous groups. Anal. Math., 28(2); pp. 103-134.

Marcinkiewicz, J. 1938. Sur quelques integrales de type de Dini. Annales de la Société Polonaise, 17; pp. 42-50.

Miller, N. 1982. Weighted Sobolev spaces and pseudodifferential operators with smooth symbols. Trans. Amer. Math. Soc., 269(1); pp. 91-109.

Mizuhara, T. 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces. Harmonic analysis, ICM-90 Satell. Conf. Proc., Springer Tokyo, pp. 183-189.

Morrey, C.B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 43(1); pp. 126-166.

Muckenhoupt, B. 1972. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc., 165; pp. 207-226.

Muckenhoupt, B. 1974. The equivalence of two conditions for weight functions. Studia Math., 49; pp. 101-106.

Muckenhoupt, B. and Wheeden, R. 1974. Weighted norm inequalities for fractional integrals. Trans. Amer. Math. Soc., 192; pp. 261-274.

Muckenhoupt, B. and Wheeden, R.L. 1976. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. Studia Math., 54(3); pp. 221-237.

Nakai, E. 1994. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces. Math. Nachr., 166; pp. 95-103.

Peetre, J. 1969. On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces. J. Functional Analysis, 4; pp. 71-87.

Pérez, C. 1995. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. J. Funct. Anal., 128(1); pp. 163-185.

Royden, H.L. 1988. Real analysis. Third edition. Macmillan Publishing Company, 444 p., New York.

Rudin, W. 1987. Real and complex analysis. Third edition. McGrav-Hill Book Co., 416 p., New York.

Saint Raymond, X. 1991. Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press., 108 p., Boca Raton.

Segovia, C. and Torrea, J.L. 1991. Weighted inequalities for commutators of fractional and singular integrals. Conference on Mathematical Analysis (El Escorial, 1989), Publ. Mat., 35; pp. 209-235.

Shi, X. and Sun, Q. 1992. Weighted norm inequalities for Bochner-Riesz operators and singular integral operators. Proc. Amer. Math. Soc., 116(3); pp. 665-673.

Soria, F. and Weiss, G. 1994. A remark on singular integrals and power weights. Indiana Univ. Math. J., 43(1); pp. 187-204.

Stein, E.M. 1958. On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz. Trans. Amer. Math. Soc., 88; pp. 430-466.

Stein, E.M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, 290 p., Princeton, N.J.

Stein, E.M. 1993. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton University Press, 695 p., Princeton, N.J.

Torchinsky, A. 1986. Real-variable methods in harmonic analysis. Academic Press, 462 p., Orlando, FL.

Torchinsky, A. and Wang, S. 1990. A note on the Marcinkiewicz integral. Colloq. Math., 60/61(1); pp. 235-243.

Vargas, A.M. 1996. Weighted weak type $(1, 1)$ bounds for rough operators. J. London Math. Soc., 54(2); pp. 297-310.

Zygmund, A. 1944. On certain integrals. Trans. Amer. Math. Soc., 55; pp. 170-204.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Turhan KARAMAN

Doğum Yeri : Kırşehir

Doğum Tarihi : 01.05.1982

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kırşehir Lisesi (1997)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2004)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Temmuz 2007)

Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Temmuz 2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2008-

Yayınları (SCI ve diğer)

Guliyev, V.S., Aliyev, S.S. and Karaman, T. 2011. Boundedness of a class of sublinear operators and their commutators on generalized Morrey spaces. Abstr. Appl. Anal., Art. ID 356041, 18 p.

Guliyev, V.S., Aliyev, S.S., Karaman, T. and Shukurov, P.S. 2011. Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey spaces. Integr. Equ. Oper. Theory, 71(3); pp. 327-355.