ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

NEUTRAL GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE

Vildan KUTAY BOZKURT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2016

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

20 /01/2016

Vildan KUTAY BOZKURT

ÖZET

Doktora Tezi

NEUTRAL GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE

Vildan KUTAY BOZKURT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısmında fark denklemleri ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmektedir. İkinci kısımda ise neutral gecikmeli denklemler hakkında genel bilgiler verilmektedir. Bu kısımda öncelikle neutral gecikmeli diferensiyel denklemlerden sözedilmiş ardından bu denklemlerin ayrık benzeri olan ve tezin temelini oluşturan neutral gecikmeli fark denklemleri tanıtılmıştır.

Bu tezin orjinal kısımları üçüncü ve dördüncü bölümlerde yer almaktadır. Üçüncü bölümde Riccati dönüşümü yardımıyla ikinci basamaktan neutral gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı araştırılmıştır.

Dördüncü bölüm kendi içinde iki kısma ayrılmaktadır. İlk kısımda Bihari eşitsizliğinin ayrık benzeri kullanılarak ikinci basamaktan neutral gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışları üzerinde durulmuştur. Son kısımda ise ayrık Lyapunov fonksiyonlarından yararlanılarak birinci basamaktan neutral gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin sınırlılık ve asimptotik davranışları incelenmiştir. Söz konusu tüm incelemeler yapılırken konunun daha iyi anlaşılabilmesi adına tez örneklerle desteklenmiştir.

Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Ocak 2016, 73 sayfa

Anahtar Kelimeler: Asimptotik sabitlik, ayrık Bihari eşitsizliği, ayrık Lyapunov fonksiyonu, fark denklemi, neutral gecikmeli fark denklemi, Riccati dönüşümü, salınımlılık, sınırlılık

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON NEUTRAL DELAY DIFFERENCE EQUATIONS

Vildan KUTAY BOZKURT

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematic

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter consists of two section. In the first section, basic concepts of difference equations are mentioned. In the second section, general information about neutral delay equations are given. In this section, firstly, neutral delay differential equations are stated and then neutral difference equations which are discrete analogues of these equations and form the basis of thesis are introduced.

Original results are contained in the third and fourth chapters. In the third chapter, with the help of the Riccati transformations, oscillations of the solutions of a second order neutral delay difference equation are investigated.

The fourth chapter is divided into two section in itself. In the first section, by using the discrete analogues of Bihari inequality, asymptotic behavior of the solutions of a second order neutral delay difference are focused on. In the last section, boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a first order neutral delay difference equation are investigated by using discrete Lyapunov functions. In order to better understanding of the issue, thesis is supported by examples.

Finally, the last chapter is devoted to analysis of the results obtained.

January 2016, 73 pages

Key Words: Asymptotic constancy, boundedness, difference equations, discrete Bihari inequality, discrete Lyapunov functions, Neutral delay difference equation, Riccati transformation, oscillation

TEŞEKKÜR

Doktora tezimi yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım tüm güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, büyük bir sabır ve titizlikle beni yönlendiren saygı değer hocam, Sayın Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'na, tez izleme komitesi üyesi olarak tez izleme toplantıları boyunca olumlu uyarılarla katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Marat AKHMET (Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)'e, çalışmam boyunca yardımlarını ve önerilerini eksik etmeyen değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a, doktora yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Vildan KUTAY BOZKURT

Ankara, Ocak 2016

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Fark denklemlerine sadece diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil, aynı zamanda biyoloji, mühendislik, ekonomi, savunma, demografi ve benzeri alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde doğrudan ya da dolaylı olarak rastlanmaktadır. Fark denklemlerinde bağımsız değişkenin tamsayılar üzerinde tanımlanması nedeniyle diferensiyel denklemlerdeki türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunmaktadır. Dolayısıyla, fark denklemleri sürekli olmayan problemleri karakterize etmektedir. Örneğin; genetik alanda genetik özellikler kuşaklar arasında değişim göstermektedir. Bu nedenle kuşağı gösteren değişken bağımsız değişken olup ayrık bir değişkendir. Ekonomide fiyat değişimleri ele alındığı takdirde değişimler yıllık, aylık, haftalık veya günlük olarak hesaplanmaktadır. Bu durumda zaman değişkeni bağımsız değişken olup ayrık bir değişkendir. Popülasyon dinamiklerinde yaş grupları arasındaki nüfus değişim problemlerinde ise yaş gruplarını gösteren değişken ayrık bir bağımsız değişken olarak karşımıza çıkmaktadır.

Uygulama alanının geniş olması fark denklemlerine duyulan ilgiyi artırmış ve sadece matematikçilerin değil aynı zamanda fen, mühendislik, sağlık ve sosyal bilimlerde çalışan araştırmacıların da dikkatini çekmiştir. Böylece son 35 yıl içerisinde hatırı sayılır bir literatür oluşmuştur. Bu konuyla ilgili olarak Miller (1968), Goldberg (1986), Lakshmikantham ve Trigiante (1988), Mickens (1990), Agarwal ve Wong (1997), Elaydi (1999), Agarwal (2000), Kelley ve Peterson (2001), Cheng (2003) ve Cull vd. (2005) kitaplarından söz edilebilir. Fark denklemleri alanında ortaya çıkan bu gelişmelere paralel olarak Akın ve Bulgak (1998) yılında, Bereketoğlu ve Kutay ise (2012) yılında yayınladıkları Türkçe kitaplarla konu hakkında araştırma yapmak isteyenlere katkıda bulunmuşlardır. Ayrıca, çok sayıda makale literatürdeki yerini almıştır.

Bilindiği üzere fizik, mekanik ve mühendislikteki teknik alanlarla ilgili somut problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde çoğu zaman fark denklemleri ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla, söz konusu problemlerin aydınlatılması herşeyden önce karşılık gelen fark denklemlerinin tanımlanmasına bağlı kalmaktadır. Fark denklemleri için cevaplanması gereken başlıca soru çözümün mevcut olup olmamasıdır. Çözümün mevcut olması durumunda çözümün analitik olarak hesaplanması ve irdelenmesi süreci başlar. Fakat analitik çözümleri bulmak çok zor hatta bulundukları zaman da irdelenmeleri güçlüklerle dolu olabilir. Bu nedenle denklemleri çözmeden çözümlerin yapısı hakkında bilgi sahibi olmak son derece önemlidir. Bu gibi durumlarda fark denklemlerinin kalitatif olarak incelenmesi devreye girer. Çözümleri bulmaksızın onların sınırlılık, salınımlılık ve yakınsaklık gibi durumlarının incelenmesi kalitatif analizin başlıca araştırma konularını oluşturmaktadır.

Bu tez çalışmasında fark denklemlerinin önemli sınıflarından biri olan neutral gecikmeli fark denklemlerin çözümlerinin kalitatif incelenmesi yapılacaktır. Neutral gecikmeli fark denklemleri, değişme hızı geçmiş değerlere bağlı olan biyolojik ve fiziksel sistemler için bir matematiksel model oluşturur. Bu tip denklemler popülasyon dinamikleri, kararlılık teorisi, gecikmeli ağ sistemlerinin dinamik davranışları gibi bir çok alanda uygulama bulabilmektedir. Bu yüzden, son yıllarda konuyla ilgili çok sayıda çalışma ortaya çıkmıştır.

Neutral gecikmeli fark denklemlerinin salınımlılığı için Georgiou vd. (1989), Georgiou vd. (1991), Thandapani (1994), Thandapani ve Lallı (1994), Chen vd. (1995), Li (1998), Wei (1999), Jiang (2003), Saker (2003), Sun ve Saker (2005), Hung (2008), Kutay ve Bereketoğlu (2014); kararlılığı için Yu ve Cheng (1994), Chen ve Liu (1996), Tang (2002), Li vd. (2003), Migda ve Migda (2005), Hung (2008), Rath ve Barık (2010), Chatzarakis ve Miliaras (2011); sınırlılığı için Lallı ve Zhang (1992), Chen ve Liu (1993), Zhang ve Saker (2003), Wang (2006), Raja (2011), Chatzarakis ve Miliaras (2011), He vd. (2012), Galewski vd. (2014) çalışmalarına bakılabilir. Neutral gecikmeli fark denklemleri için yapılan kalitatif çalışmalara bakıldığında ortaya çıkan literatürün normal fark denklemleri kadar zengin olmadığı ve bu alanda çözümlerin salınımlılık, sınırlılık ve asimptotik davranışı gibi bazı önemli boşlukların olduğu gözlenmiştir. Söz konusu boşlukları doldurabilmek adına bu tez çalışması yapılmıştır.

Beş bölümden oluşan bu tezin ikinci bölümü fark denklemlerinin daha kolay anlaşılabilmesi adına bazı temel kavramlara ve neutral gecikmeli denklemlere ayrılmıştır. Neutral gecikmeli denklemlerden bahsedilirken, teorilerinin benzerliği nedeniyle, neutral gecikmeli fark denklemleri ve neutral gecikmeli diferensiyel denklemler birlikte ele alınmıştır. Böylece neutral fark denklemleri hakkında yapılan çalışmaları analoglarıyla karşılaştırma imkanı sunulmaktadır. Üçüncü ve dördüncü bölümler tezin özgün kısımlarını oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde; ikinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta\left[p(n)\left(\Delta\left(x(n)+q(n)x(n-\tau)+h(n)x(n-\sigma)\right)\right)^{\gamma}\right]$$
$$+f(n,x(n-\sigma))=g(n,x(n-\sigma),x(n-\tau)),\ \ n\geq 0$$

fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı Riccati dönüşümü yardımıyla incelenmiştir; burada $\gamma=\dfrac{k}{l}$; k ve l iki tek pozitif tam sayı, $\{p(n)\}$ pozitif reel dizi, $\{q(n)\}$ ve $\{h(n)\}$ negatif olmayan reel diziler, τ ve σ negatif olmayan tamsayılar; $f(n,x)$ ve $g(n,x,y)$ her $n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ ve $x,y\in\mathbb{R}$ için tanımlı fonksiyonlardır.

Dördüncü bölüm iki kısma ayrılmaktadır. İlk kısımda Bihari eşitsizliğinin ayrık benzeri kullanılarak ikinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta^2\left(x(n)+px(n-\tau)+qx(n-\sigma)\right)+f(n,x(n))=0$$

fark denkleminin asimptotik davranışları irdelenmiştir. İkinci kısımda ise birinci basamaktan lineer olmayan neutral gecikmeli

$$\Delta\left[x(n)-p(n)f(x(n-\tau(n)))\right]+q(n)g(x(n-\theta))=0,\qquad n\in\mathbb{N}(n_0)$$

fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığı ve asimptotik davranışları ayrık Lyapunov fonksiyonu yardımıyla ortaya konulmuştur; burada, $\theta>0$ tamsayı, $\tau(n)>0$ tamsayı dizisi, $q(n)$ artmayan olmak üzere $q(n)$ ve $p(n)$ birer pozitif reel sayı dizisi, n_0 negatif olmayan tamsayı ve $\mathbb{N}(n_0)=\{n_0,n_0+1,n_0+2,...\}$ dir.

Üçüncü ve dördüncü bölüm boyunca sadece söz konusu üç ana denklem değil denklemlerin özel durumları da ele alınarak çeşitli sonuçlardan söz edilmiştir. Konu hakkında önceden yapılmış olan çalışmalara da yer verilerek literatür hakkında bilgilendirme yapılmıştır. İlaveten tez örneklerle desteklenerek verilen teorem ve sonuçların daha kolay anlaşılabilmesi sağlanmıştır.

2. FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili temel kavramlar verilmekte ve neutral gecikmeli fark denklemler tanıtılmaktadır. Neutral gecikmeli fark denklemleri tanıtılırken beraberinde neutral gecikmeli diferensiyel denklemlerden bahsedilmektedir. Zira, fark denklemler teorisi genel olarak diferensiyel denklem teorisinin ayrık benzeri çalışmalardan oluşmaktadır. Konu ile ilgili yapılan çalışmalardan da bahsedilerek literatür incelemesi yapılmıştır.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Bir $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ $fark\ operatörü$ veya diğer bir deyişle x in $birinci\ basamaktan\ farkı$

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanmaktadır; burada $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ doğal sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesidir.

Buradan x in $ikinci\ basamaktan\ farkı$

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(n) &= \Delta(\Delta x(n)) \\ &= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) \end{aligned}$$

ve k $yıncı\ basamaktan\ farkı$

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j) \tag{2.1}$$

şeklinde hesaplanır; burada $k \geq j$ olmak üzere

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)...(k-j+1)}{j\,!}$$

dir.

Tanım 2.1.2. E *öteleme operatörü*

$$Ex(n) = x(n+1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Bu tanıma göre k yıncı basamaktan öteleme operatörü

$$E^k x(n) = x(n+k) \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

Δ ve E operatörleri arasında

$$\Delta = E - I$$

ilişkisi vardır; burada I *özdeşlik operatörü*dür; yani $Ix(n) = x(n)$.

Binom formülü yardımıyla, k yıncı basamaktan fark ve öteleme operatörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \Delta^k &= (E-I)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \, E^{k-j} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} E^k &= (\Delta + I)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^{k-j} \end{aligned}$$

şeklinde verilebilirler.

Δ ve E operatörleri ile ilgili bazı temel özellikler:

(1) Her $k, l \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}$ için

$\Delta^k \Delta^l = \Delta^l \Delta^k = \Delta^{k+l}$, $E^k E^l = E^l E^k = E^{k+l}$ ve $\Delta^k E^l = E^l \Delta^k$;

(2) $\Delta(ax(n) + by(n)) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$,

$E(ax(n) + by(n)) = aEx(n) + bEy(n)$,

burada a ve b sabitler;

(3) $\Delta(x(n)y(n)) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n)$;

(4) $\Delta\left(\dfrac{x(n)}{y(n)}\right) = \dfrac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)}$

dir.

Tanım 2.1.3. $n \geqslant n_0$ için $\Delta F(n) = f(n)$ verilsin. Bu durumda $n \geqslant n_0$ için

$$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c,$$

şeklinde ifade edilen Δ^{-1} operatörüne *ters fark operatörü* ve $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ nin *ters farkı* denir; burada c bir keyfi sabittir.

Lemma 2.1.1. Δ fark operatörü için

$$(i)\ \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) = x(n) - x(n_0); \tag{2.3}$$

$$(ii)\ \Delta_n\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i)\right) = x(n) \tag{2.4}$$

dir.

Bu Lemmanın bir sonucu Sonuç 2.1.1'de verilmektedir.

Sonuç 2.1.1. $n \geqslant 0$ için tanımlı bir $f(n)$ fonksiyonu için

$$\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c \tag{2.5}$$

dir; burada c bir keyfi sabittir.

Buna göre Δ^{-1} ters fark operatörü

$$\Delta^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1}$$

şeklinde bir *belirsiz toplam* olarak da ifade edilebilir.

Ters fark operatörü ile ilgili bazı sonuçlar:

(1) $\Delta^{-1}(ax(n) + by(n)) = a\Delta^{-1}x(n) + b\Delta^{-1}y(n)$,

burada a ve b sabitler;

(2) $\Delta\Delta^{-1} = I$ ve $\Delta^{-1}\Delta \neq I$;

(3) $\Delta^{-2} f(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1 n + c_2$ ve

$\Delta^{-3} f(n) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1 n^2 + c_2 n + c_3$; burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitler;

(4) $\Delta F(n) = f(n)$ ve a, b $(b \geq a)$ tamsayılar olarak verilsin. Bu durumda

$\sum_{i=a}^{b} f(i) = F(b+1) - F(a)$;

(5) $\sum_{i=0}^{n-1} y(i)\Delta x(i) = x(n)y(n) - \sum_{i=0}^{n-1} x(i+1)\Delta y(i) + c$; burada c keyfi sabit;

(6) $\sum_{i=0}^{n-1} y(i)\Delta x(i) = [x(i)y(i)]_0^n - \sum_{i=0}^{n-1} x(i+1)\Delta y(i)$;

(7) $m < n$ için $\sum_{i=m}^{n-1} y(i)\Delta x(i) = [x(i)y(i)]_m^n - \sum_{i=m}^{n-1} x(i+1)\Delta y(i)$

dır.

Diferensiyel denklemler teorisi ile bu denklemlerin ayrık benzeri olarak isimlendirilen fark denklemleri teorisi arasında birtakım benzerlikler bulunmaktadır. Söz konusu benzerlikler çizelge 2.1'de özetlenmektedir:

Çizelge 2.1 Fark denklemleri teorisi ve diferensiyel denklemler teorisi arasındaki benzerlikler

Fark Analizi	**Diferensiyel Analiz**
$\Delta x(n) = x(n+\varepsilon) - x(n)$	$Dx(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\Delta x(t)}{\varepsilon}$
$\Delta \mathrm{c}x = \mathrm{c}\Delta x$	$D\mathrm{c}x = \mathrm{c}Dx$
$\Delta x^{(k)} = k\varepsilon x^{(k-1)}$	$Dx^k = kx^{k-1}$
$\Delta^k x = \Delta(\Delta^{k-1}x)$	$D^k x = D(D^{k-1}x)$
$\Delta(\mathrm{c}_1x_1+\mathrm{c}_2x_2) = \mathrm{c}_1\Delta x_1+\mathrm{c}_2\Delta x_2$	$D(\mathrm{c}_1x_1+\mathrm{c}_2x_2) = \mathrm{c}_1Dx_1+\mathrm{c}_2Dx_2$
$x(n), k$ yıncı dereceden bir polinom ise, $\Delta^k x =$ sabit ve $l \geqslant k+1$ için $\Delta^l x = 0$ dır.	$x(t), k$ yıncı dereceden bir polinom ise, $D^k x =$ sabit ve $l \geqslant k+1$ için $D^l x = 0$ dır.
$\Delta(xy) = y\Delta x + (Ex)\Delta y$	$D(xy) = yDx + xDy$
$\Delta \dfrac{x}{y} = \dfrac{y\Delta x - x\Delta y}{yEy}$	$D\dfrac{x}{y} = \dfrac{yDx - xDy}{y^2}$
$\Delta F = f$ ise, $\Delta^{-1} f = F + c$	$DF = f$ ise, $\int f = F + c$

Bu benzerliklere rağmen bir diferensiyel denklem ile onun analoğu olan fark denkleminin çözümleri arasında niteliksel farklar olabilir. Örneğin;

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0 \tag{2.6}$$

diferensiyel denklemi ele alınsın. Bu denklemin fark denklemlerindeki analogu

$$\Delta x(n) + a(n)x(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.7}$$

biçiminde ifade edilebilir. (2.6) denklemi

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ya daima pozitiftir ya da daima negatiftir; yani salınımlı değildir. Halbuki (2.7) fark denkleminin

$$x(n) = x(n_0)\left(\prod_{i=n_0}^{n-1}(1-a(i))\right)$$

çözümü $i \geq n_0$ için $\{1 - a(i)\} < 0$ olduğu sürece salınımlıdır.

Tanım 2.1.4. k. basamaktan

$$\Delta^k x(n) + f(n, x(n), \Delta x(n), \Delta^2 x(n), ..., \Delta^{k-1} x(n)) = 0 \tag{2.8}$$

adi fark denklemi ve

$$x(n_0 + i) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k-1$$

başlangıç koşullarından meydana gelen probleme bir *başlangıç değer problemi* denir; burada $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ reel sabitlerdir.

Teorem 2.1.1. k yıncı basamaktan

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1)), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.9}$$

fark denklemi ve

$$x(0) = \alpha_0,\ x(1) = \alpha_1, ..., x(k-1) = \alpha_{k-1} \tag{2.10}$$

başlangıç koşulları verilsin.

f fonksiyonu bağlı olduğu değişkenlerin bütün değerlerine göre tanımlı ise, o zaman (2.9)-(2.10) başlangıç değer probleminin çözümü vardır ve tektir.

2.2 Neutral Gecikmeli Denklemler

Bilindiği üzere adi diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri sadece t anında hesaplanmaktadır. Gerçekte durum biraz daha komplikedir. Pek çok olay sadece şimdiki duruma değil, onun geçmiş ve gelecekteki durumuna da bağlı olabilmektedir. Bu gibi olayları formüle eden diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri $t-\sigma(t)$ ve/veya $t+\sigma(t)$ argümentlerine bağlı olarak hesaplanmaktadır; burada $\sigma(t) > 0$ dır. Böylesi argümentlerden oluşan denklemler genel olarak fonksiyonel diferensiyel denklemler olarak adlandırılmaktadır. Fonksiyonel diferensiyel denklemler kendi aralarında gecikmeli, ileri, karma ve neutral şeklinde dört gruba ayrılabilir.

Birinci basamaktan gecikmeli bir diferensiyel denklem

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t - \sigma(t))), \quad \sigma(t) > 0$$

ve birinci basamaktan ileri bir diferensiyel denklem

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t + \sigma(t))), \quad \sigma(t) > 0$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Karma diferensiyel denklemler ise içerisinde hem gecikmeli hem de ileri terimlerin yer aldığı denklemlerdir.

Birinci basamaktan bir neutral diferensiyel denklem ise

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t + \sigma(t)), x^{'}(t + \sigma(t)))$$

şeklinde ifade edilmektedir. ile verilmektedir. Bu tür denklemler; türevin bağlı olduğu terimler ileri formda $(\sigma(t) > 0)$ ise neutral ileri diferensiyel denklem, gecikmeli formda $(\sigma(t) < 0)$ ise neutral gecikmeli diferensiyel denklem olarak adlandırılırlar. Neutral gecikmeli diferensiyel denklemler fonksiyonel diferensiyel denklemler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda bu konuda yapılan yoğun çalışmalar sayesinde hatırı sayılır bir literatür ortaya çıkmıştır.

Gecikmeli bir diferensiyel denkleme literatürde ilk defa onsekizinci yüzyılın ikinci yarısında rastlanmıştır. Fakat bu konudaki çalışmalar 1950 yılından sonra Myshkis, Wright ve Bellman, tarafından sistematik olarak yapılmıştır. Uygulama alanlarının çokluğu sayesinde hızla gelişmiş ve zengin bir literatür oluşmuştur. Konu hakkında yazılan kitaplardan bazıları Györi ve Ladas (1991), Kuang (1993), Erneux (2009) ve Smith (2011) olarak verilebilir.

Neutral diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar ise gecikmeli diferensiyel denklemlerden daha sonra başlamıştır. Neutral diferensiyel denklemlerin salınımıyla ilgili ilk çalışma Zahariev ve Bainov (1980)'de yapılmıştır. Neutral diferensiyel denklemlerin salınımıyla ilgili sistematik gelişmeler ise Ladas ve Sficas (1986) ile başlamıştır. Ladas ve Schults (1989) yılında neutral gecikmeli

$$x^{'}(t) + cx^{'}(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0$$

diferensiyel denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşulları ortaya koymuşlardır; burada c, q, τ ve σ reel sayılardır. Konu hakkında yazılan kitaplara örnek olarak Bainov ve Mishev (1991), Hale ve Lunel (1993), Agarwal vd. (2012) ve Gil (2014) verilebilir.

Literatürde karşılaşılan bir diğer gecikmeli diferensiyel denklem tipi impulse gecikmeli diferensiyel denklemlerdir. İmpulsive diferensiyel denklemler için çözümler sonlu ya da sonsuz sayıdaki noktada parçalı sürekli olup diğer yerlerde sürekli fonksiyonlardır. Söz konusu süreksizlik noktalarına impulse nokta denir ve t_1, $t_2, t_3, ...$ ile gösterilir. Bu tür denklemlere ilk defa 1937 yılında ortaya konan bir saat modelinde rastlanmış olup bu alandaki sistematik çalışmalar 1980'li yıllarda başlamış ve uygulama alanlarının genişliği sayesinde günümüze kadar bir çok araştırmacının dikkatini çekerek literatürdeki yerini almıştır. İmpulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili ilk çalışma Gopalsamy ve Zhang (1989)'da yayınlanmıştır. Bu makalede

$$x^{'}(t) + p(t)x(t-\tau) = 0 \quad t \neq t_i$$
$$x(t_i^+) - x(t_i^-) = b_i x(t_i^-)$$
$$j \to \infty \ \text{ iken } \ 0 < t_1 < t_2 < ... < t_j \to \infty$$

impulsive sistemi incelenmiş ve salınımlılıkla ilgili sonuçlar verilmiştir; burada τ pozitif reel sayıdır.

Neutral impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile yapılan çalışmalar ise impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerle karşılaştırıldığında daha sonra ilgi çekici hale gelmiştir. Zhang ve Dang (1998)'de yayınladıkları makalede neutral impulsive gecikmeli

$$[y(t) + Py(t-\tau)]^{'} + Q(t)y(t-\sigma) = 0, \quad t \geq 0, \quad t \neq t_i$$
$$y(t_i^+) - y(t_i^-) = b_i y(t_i), \ \ i = 1, 2, ...$$

diferensiyel denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeterli koşulları vermişlerdir; burada $\tau > 0$, $\sigma > 0$ ve P sabitler, $Q(t) \in C\left([0,\infty], R^+\right)$ ve $i = 1, 2, ...$ için $b_i > 0$ dır.

Bu denklemlerin sınırlılığı, kararlılığı ve asimptotik davranışları da son yıllarda bu konuda çalışanlar için araştırma konuları olmuştur. Shen vd. (2007) yılında yaptıkları çalışmada

$$[x(t) + C(t)x(t-\tau)]^{'} + P(t)f\left(x(t-\delta)\right) = 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_i$$
$$x(t_i) = b_i x(t_i^-) + (1-b_i)\int_{t_i-\delta}^{t_i} P(s+\delta)f\left(x\left(s\right)\right)ds, \quad i = 1, 2, ...$$

denklemini ele almışlar ve tüm çözümlerin $t \to \infty$ halinde bir sabite gitmesi için yeterli koşulları ortaya koymuşlardır; burada $\tau > 0, \delta > 0, C(t), P(t) \in PC\left([t_0,\infty], R\right)$ ve $P(t) \geq 0,\ f \in C\left(R,R\right),\ 0 < t_i < t_{i+1}$ olmak üzere $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$ ve $i = 1, 2, ...$ için b_i ler sabitlerdir.

Daha önceden belirtildiği üzere fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinin ayrık benzeridir. Benzer olarak, neutral gecikmeli fark denklemler teorisi de neutral gecikmeli diferensiyel denklemler için var olan çalışmaların analoglarından oluşmaktadır. Neutral gecikmeli fark denklemlerinin en önemli özelliği en yüksek basamaktan farkın bilinmeyen fonksiyonun sadece n bağımsız değişkenine değil, aynı zamanda σ kadar önceki argümentlere bağlı olmasıdır. Genel olarak, en yüksek basamaktan fark bilinmeyen fonksiyonun n anındaki ve $n-\sigma_1$, $n-\sigma_2$ ve $n-\sigma_3, ...$ gibi gecikmelere bağlı olarak ifade edilmiş ise, bu tür fark denklemler neutral gecikmeli fark denklemleri olarak adlandırılır.

Genel olarak, $k.$ *basamaktan* bir $adi\ fark\ denklemi$

$$\Delta^k x(n) + f(n, x(n), \Delta x(n), \Delta^2 x(n), ..., \Delta^{k-1} x(n)) = 0,$$

$k.$ *basamaktan* bir $gecikmeli\ fark\ denklemi$

$$\Delta^k x(n) + f(n, x(n-\sigma_1), \Delta x(n-\sigma_2), \Delta^2 x(n-\sigma_3), ..., \Delta^{k-1} x(n-\sigma_k)) = 0$$

ve $k.$ *basamaktan* bir $neutral\ gecikmeli\ fark\ denklemi$

$$\Delta^k (x(n)+a(n)x(n-\sigma))+f(n, x(n-\sigma_1), \Delta x(n-\sigma_2), \Delta^2 x(n-\sigma_3), ..., \Delta^{k-1} x(n-\sigma_k)) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir; burada $n \in \mathbb{N}$, σ, σ_1, σ_2,...,σ_k lar pozitif tamsayılardır.

Neutral fark denklemlerinin kapalı formda çözümlerini bulmak genellikle zordur. Çözümler bulunamadığı zaman fark denklemlerinin çözümlerinin kalitatif bakımdan incelemesi büyük önem taşır. Neutral gecikmeli fark denklemlerinin kalitatif teorisinde daha çok çözümlerin salınımlılık, sınırlılık ve asimptotiksel davranışları incelenmektedir. Neutral gecikmeli fark denklemleri çatallanma analizi, populasyon dinamiği, kararlılık teorisi, gecikmeli ağ sistemlerinin dinamiği gibi bir çok konuda kendine uygulama alanı bulmaktadır.

Adi fark denklemleri ile matematiksel modeller kurulurken gerçekte mevcut olan gecikmeler göz ardı edilerek analizler yapılmaktadır. Gecikmeli ve neutral gecikmeli denklemler ise sistemin gelecekteki davranışlarını belirlerken fonksiyonun ve onun farklarının hem şimdiki hem de geçmişteki hareketlerini göz önünde bulundurmaktadır. Bu durum da modelin başarısını artırmaktadır. Fakat gecikmeli ve neutral gecikmeli fark denklemlerinin kalitatif teorisi adi fark denklemleri kadar kolay olmayıp bazı zorlukları içermektedir. Adi fark denklemleri için geçerli olan sonuçlar neutral gecikmeli denklemler için sağlanmayabilir. Teorinin zorluğuna rağmen bu denklemlerin uygulama alanlarının oldukça geniş olması yapılan çalışmaların hız kazanmasını sağlamıştır.

1885 yılında Poincare ile doğrusal fark denklem teorisi çalışılmaya başlanmış ve bu alanda ilk kalitatif çalışmaların temeli atılmıştır. Fakat Hartman tarafından 1978 yılında yayınlanan makale bir çok araştırmacının fark denklemlerine ve onun kalitatif teorisine olan ilgisini artırmıştır. Hooker ve Patula (1983)'de ayrık

$$\Delta^2 x(n-1) + q(n)x^{\alpha}(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Emden-Fowler denklemini ele alarak tüm çözümlerin salınımlı olması için gerek ve yeter koşulları ortaya koymuşlardır; burada α iki tek pozitif tam sayının bölümü şeklinde yazılmaktadır. Söz konusu denklem astrofizik, nükleer fizik ve kimyasal reaksiyonlar konularında uygulama alanı bulmaktadır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar daha sonra Kulenovic ve Budincevic (1984), Thandapani vd. (1994) ve Zhang ve Chen (1996)'da

$$\Delta\left(a(n)\Delta x(n)\right) + q(n+1)f\left(x(n+1)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

denklemine genelleştirilmiştir.

Gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili ilk çalışmalardan biri Ladas vd. (1989)'da yapılmıştır. Söz konusu çalışmada

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

gecikmeli fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeterli koşullar ortaya konulmuştur.

Erbe ve Zhang (1989)'da gecikmeli

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ve

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemlerini ele alarak bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışlarını incelemişlerdir.

Gao ve Zhang (2001) ile Tang ve Liu (2001)'de lineer olmayan gecikmeli

$$x(n+1) - x(n) + q(n)x^{\alpha}(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemini ele almışlar ve tüm çözümlerin salınımlı olması için gerekli koşulları elde etmişlerdir.

Georgiou vd. (1991) yılında neutral gecikmeli

$$\Delta\left(x(n) + px(n-k)\right) + qx(n-l) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerekli koşulları elde etmişler ve benzer sonuçları daha genel bir form olan neutral gecikmeli

$$\Delta\left(x(n) + p(n)x(n-k)\right) + q(n)x(n-l) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemi için de ortaya koymuşlardır. Lallı vd. (1991)'de tüm çözümlerin salınımlılığını sağlayan kriterleri karşılaştırma teoremleri yardımıyla ortaya koyarken bu denklemin salınımsız çözümlerinin varlığını ise sabit nokta teoremi sayesinde kanıtlamıştır.

Thandapani (1994) yılında, Thandapani ve Sundaram ise (1996) yılında yayınlamış oldukları makalelerde neutral gecikmeli

$$\Delta\left(x(n)+p(n)x(\sigma(n))\right) \pm f\left(n, x(\sigma_1(n)), ..., x(\sigma_m(n))\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

denklemini incelemişler ve tüm çözümlerin salınımlı olması için yeterli koşullar ile sınırlı salınımsız çözüme sahip olması için gerekli kriterleri ortaya koymuşlardır. Yine Thandapani (1994), aynı makalesinde neutral gecikmeli

$$\Delta\left(x(n)+p(n)x(n-k)\right) + \sum_{j=1}^{m} q_j(n) f_j(x(n-\sigma_j)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin salınımsız çözümlerinin asimptotik davranışlarını incelemiştir.

Sternal vd. (1998) ve Thandapani (1992)'de ikinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta^2\left(x(n)+p(n)x(n-k)\right) - q(n)f\left(x(n-l)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemini ele almışlardır. Bu makalelerde salınımsız çözümlerin asimptotik davranışları ile sınırlı ve sınırsız salınımlı çözümlerin varlığı ile ilgili sonuçlar ortaya konmuştur.

Sternal ve Szmanda (1996)'da neutral gecikmeli

$$\Delta\left(a(n)\Delta\left(x(n)+p(n)x(n-k)\right)\right) + q(n)f\left(x(n+1-l)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık durumlarını incelemişlerdir.

Yine Sternal ve Szmanda (1996)'da ikinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta\left(a(n)\Delta\left(x(n)+p(n)x(n-k)\right)\right)+q(n)f(x(n-l))=0$$

fark denklemi ele alınmış ve tüm çözümlerin salınımlı olması için yeterli koşullardan bahsedilmiştir. Ayrıca çalışmalarında çözümlerin asimptotiklik durumları ile ilgili sonuçlar da ifade edilmektedir.

Thandapani vd. (2002)'de neutral gecikmeli

$$\Delta^2\left(x(n)-px(n-k)\right)-q(n)f(x(n-l))=0$$

fark denkleminin asimptotik ve salınımlılık durumlarını incelemiştir. Thandapani ve Mohankumar (2007) yılında bu denklemin daha genelleştirilmiş hali olan

$$\Delta^2\left(x(n)-p(n)x(n-k)\right)-q(n)f(x(n-l))=0$$

denklemini ele alarak çözümlerin salınımlılık ve salınımsızlık durumları ile ilgili yeni sonuçlar ortaya koymuşlardır.

Diferensiyel denklemlerde de bahsedildiği gibi gecikme içeren ve kendine çalışma alanı bulan bir diğer gecikmeli fark denklemi tipi impulsive gecikmeli fark denklemleridir. İmpulsive gecikmeli fark denklemleri ile ilgili yapılan çalışmalardan biri Wei ve Zou (1999)'da yapılmıştır. Bu çalışmada

$$x(n+1)-x(n)+p(n)x(n-l)=0,\quad n>0,\quad n\neq n_k,$$

$$x(n_k+1)-x(n_k)=b_k x(n_k),\quad k=1,2,3,...$$

impulsive fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeterli sonuçlar verilmiştir; burada $p(n)\geq 0$, l pozitif tamsayı, $n_1<n_2<...<n_k<...$ ve $\lim_{k\to\infty} n_k=\infty$ olmak üzere $\{n_k\}$ doğal sayıların bir alt kümesi ve $k=1,2,3,...$ için $b_k>-1$ dir. Aynı denklem Wei (1999)'da yeniden ele alınmış ve ilave olarak salınımsızlıkla ilgili sonuçlardan da bahsedilmiştir. Wei (2000)'de ise birden fazla gecikmeye sahip olan impulsive gecikmeli

$$x(n+1) - x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n)x(n-l_i) = 0, \quad n > 0, \quad n \neq n_k,$$

$$x(n_k+1) - x(n_k) = b_k x(n_k), \quad k = 1, 2, 3, ...$$

fark denklemi ele alınmış ve çözümlerin salınımlılığı ve salınımsızlığı için yeterli sonuçlar elde edilmiştir. Bu denklem Tang ve Yu (2001)'da incelenerek yine çözümlerin salınımlılığı ile ilgili bir takım ilave sonuçlar ortaya konulmuştur. Bu çalışmada söz konusu denklemin kararlılık özelliklerinden de bahsedilmiştir. İmpulsive gecikmeli fark denklemleri için yapılan benzer çalışmalara örnek olarak Peng (2003), Zhang ve Chen (2006), Li ve Xi (2009) ile Wu ve Ding (2011) makaleleri verilebilir.

İmpulsive neutral gecikmeli fark denklemleri ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde ise gecikmeli fark denklemleri kadar yoğun ilgi görmediği ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları; Wei (1999), Wei (2001) ve Peng (2002) dir.

Bu tez çalışmasında da uygulama açısından bahsedildiği üzere zengin bir yapıya sahip olan neutral gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılık, sınırlılık ve asimptotik davranışları ele alınmıştır. Yapılan literatür çalışması ve örneklerle tez desteklenmiştir.

Diferensiyel denklemler ve fark denklemlerinde denkleme eklenen gecikme terimi çözümlerin salınımlılık özelliklerinde bir takım değişikliklere neden olabilmektedir. Örneğin; birinci basamaktan gecikmeli

$$x^{'}(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$$

diferensiyel denklemi ele alındığı takdirde denklem $x(t) = \sin t$ şeklinde salınımlı bir çözüme sahiptir. Bu denklemden gecikme kaldırıldığı takdirde birinci basamaktan

$$x^{'}(t) + x(t) = 0$$

diferensiyel denklemi $x(t) = e^{-t}$ şeklinde salınımsız bir çözüme sahiptir. Buradan anlaşılmaktadır ki salınım $\tau = \dfrac{\pi}{2}$ gecikmesi sayesinde ortaya çıkmaktadır.

Söz konusu durum fark denklemleri için de geçerlidir. Birinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta\left(x(n) - 10x(n-4)\right) + 18x(n-4) = 0$$

fark denklemi $x(n) = (-2)^n$ şeklinde bir salınımlı çözüme sahiptir. Denklemden gecikmeler kaldırılırsa ortaya çıkan

$$\Delta x(n) - 2x(n) = 0$$

denklemi ise $x(n) = 3^n$ şeklinde salınımsız bir çözüme sahiptir. Burada yine $\tau = 4$ gecikme sabiti çözümlerin salınımlı olmasını sağlamaktadır.

3. İKİNCİ BASAMAKTAN NEUTRAL GECİKMELİ BİR FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Adi fark denklemleri ile ilgili yapılan kalitatif çalışmalar incelendiği takdirde salınımlılık ile ilgili olanların literatürde önemli bir yer kapladığı görülmektedir. Neutral gecikmeli fark denklemlerini kapsayan salınımlılık çalışmalarının adi fark denklemleri kadar yoğun olmadığı, ama uygulama alanının geniş olmasından dolayı konunun son yıllarda daha çok dikkat çekmeye başladığı görülmektedir. Bu alandaki ilgi ve sığlık bu tez çalışmasının ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Bu bölümde ikinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta\left[p(n)\left(\Delta\left(x(n)+q(n)x(n-\tau)+h(n)x(n-\sigma)\right)\right)^{\gamma}\right]$$
$$+f(n,x(n-\sigma))=g(n,x(n-\sigma),x(n-\tau)),\ n\geq 0 \tag{3.1}$$

denklemi ele alınacak ve bu denklemin çözümlerinin salınımlılık durumları incelenecektir; burada $\gamma=\dfrac{k}{l}$; k ve l iki tek pozitif tam sayı, $\{p(n)\}$ pozitif reel dizi, $\{q(n)\}$ ve $\{h(n)\}$ negatif olmayan reel diziler, τ ve σ negatif olmayan tamsayılar; $f(n,x)$ ve $g(n,x,y)$ her $n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ ve $x,y\in\mathbb{R}$ için tanımlı fonksiyonlardır.

Birinci basamaktan neutral fark denklemlerinin salınımlılık davranışları üzerine yapılan ilk çalışma Georgiou vd. (1991) yılında yayınlanan makalede yer almaktadır. Bu makalede tüm çözümlerin salınımlı olması için gerekli koşullar ortaya konulmuştur. Ardından bir çok yazar ikinci basamaktan neutral gecikmeli fark denklemlerini ele almış ve çözümlerin salınımlılığını ortaya koyabilmek adına sabit nokta teoremi, fark eşitsizlikleri ve Riccati dönüşüm teknikleri gibi yöntemlerden yararlanmışlardır. Tezin bu bölümünde de ikinci basamaktan neutral gecikmeli bir fark denkleminin salınımlılık durumları ile ilgili incelemeler yapılırken Riccati dönüşüm tekniğinden yararlanılacaktır.

Neutral gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığının incelenmesi problemlerinde Riccati dönüşüm tekniğiyle sıklıkla karşılaşılmaktadır. Bu konu ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları Saker (2003a), Sun vd. (2005) ve Saker vd. (2007) olarak verilebilir. Söz konusu çalışmalara ek olarak Cheng (2007), ikinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta\left(p(n)\left(\Delta\left(x(n)+c(n)\,x(n-\tau)\right)\right)^{\gamma}\right)+q(n)x^{\beta}(n-\sigma)=0$$

fark denkleminin salınımlılık durumlarını incelemek için Riccati dönüşümü tekniğinden yararlanmıştır.

Thandapani vd. (2010), yine Riccati dönüşüm tekniğini kullanarak üçüncü basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta\left(a(n)\left(\Delta^{2}\left(x(n)+p(n)\,x(n-\delta)\right)\right)^{\alpha}\right)+q(n)x^{\alpha}(n-\tau)=0$$

fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık durumlarını ele almışlardır.

Saker (2003c), Riccati dönüşümü yardımıyla ikinci basamaktan lineer olmayan neutral gecikmeli

$$\Delta(a(n)\left(\Delta\left(x(n)+p(n)x(n-\tau)\right)\right)^{\gamma})+f(n,x(n-\sigma))=0,\quad n=0,1,2,... \tag{3.2}$$

fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için bazı sonuçlar elde etmiştir. Bu tez çalışmasında da Riccati dönüşümü yardımıyla (3.1) denklemi için benzer sonuçlar ortaya konulmuştur.

Tezin bu bölümünde öncelikle incelemeler boyunca yararlanılacak bazı tanımlardan bahsedilecektir. Ardından asıl teorem ve sonuçlara yer verilerek sonuçların desteklenebilmesi adına yapılan örneklerle bölüm tamamlanacaktır.

Tanım 3.1. $n\geq -L$ için tanımlı aşikar olmayan bir $\{x(n)\}$ dizisine (3.1) denkleminin bir çözümü denir; burada $L=\max\{\tau,\sigma\}$ ve $n=0,1,2,...$ için (3.1) denklemi sağlanmaktadır.

Tanım 3.2. $\{x(n)\}$ dizisi (3.1) in bir çözümü olsun. Her $n \geq n_1$ için $x(n)x(n+1) \leq 0$ olacak şekilde bir $n_1 > 0$ varsa, $\{x(n)\}$ çözümüne salınımlı, aksi halde salınımsızdır denir. (3.1)'in tüm çözümleri salınımlı ise bu denkleme salınımlı denklem adı verilir.

Esas sonuçlara geçmeden önce (3.1) denklemi ve $x(n) = \varphi(n)$ başlangıç fonksiyonundan oluşan başlangıç değer probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu kabul edelim; burada $\varphi(n)$ başlangıç fonksiyonu $n = -L, ..., -1, 0$ için tanımlıdır.

Teorem 3.1. $\Delta p(n) \geq 0$ olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:
$(H1)$ $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{p(n)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \infty, \; 0 \leq q(n) + h(n) < 1,$
$(H2)$ $a(n) - b(n) \geq 0$ ve yeterince büyük bir n_0 için

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n} (a(i) - b(i)) \geq 0 \tag{3.3}$$

ve

$$\frac{f(n,u)}{u^\gamma} \geq a(n) \;\; \text{ve} \;\; \frac{g(n,u,v)}{u^\gamma} \leq b(n), \; u \neq 0 \tag{3.4}$$

olacak biçimde $\{a(n)\}$ ve $\{b(n)\}$ reel dizileri mevcut olsun.
$\sum\limits_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i) > 0$ ve

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} M(n) \left[\left(\sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i) \right)^{\frac{1}{1+\sigma}} (\sigma + 1) - \sigma \right] = \infty \tag{3.5}$$

ise bu durumda (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır; burada

$$M(n) = (a(n) - b(n)) \frac{(1 - q(n-\sigma) - h(n-\sigma))^\gamma}{p(n-\sigma)} \left(\frac{n-\sigma}{2}\right)^\gamma$$

dır.

İspat. $\{x(n)\}$, (3.1) denkleminin nihai pozitif bir çözümü olsun. Buradan her $n \geq n_0 > 0$ için $x(n) > 0$ ve $x(n-L) > 0$ olacak biçimde yeterince büyük bir $n_0 > 0$

tamsayısı vardır.

$$z(n) = x(n) + q(n)x(n-\tau) + h(n)x(n-\sigma) \tag{3.6}$$

olarak tanımlansın. Buradan $n \geq n_0$ için, $z(n) > 0$ dır. (3.1) ve (3.4)'den,

$$\Delta\left[p(n)\left(\Delta z(n)\right)^{\gamma}\right] \leq -\left(a(n) - b(n)\right)\left(x\left(n-\sigma\right)\right)^{\gamma} \leq 0, \quad n \geq n_0 \tag{3.7}$$

elde edilir. Böylece $\{p(n)\left(\Delta z(n)\right)^{\gamma}\}$ nihai artmayan bir dizidir. Önce, $n \geq n_0$ için $\Delta z(n) \geq 0$ iddiasında bulunalım. Aksi halde, $p(n_1)\left(\Delta z(n_1)\right)^{\gamma} = \beta < 0$ olacak şekilde bir $n_1 \geq n_0$ tam sayısı vardır ve buradan $n \geq n_1$ için $p(n)\left(\Delta z(n)\right)^{\gamma} \leq \beta$ olur. Böylece

$$\Delta z(n) \leq \left(\frac{\beta}{p(n)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin iki yanı n_1 den $n-1$ e toplanırsa, $n \to \infty$ iken

$$z(n) \leq z(n_1) + \beta^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{i=n_1}^{n-1} \left(\frac{1}{p(i)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \to -\infty$$

elde edilir. Fakat bu durum $n \geq n_0$ için $z(n) > 0$ olması ile çelişir. Böylece $n \geq n_0$ için $\Delta z(n) \geq 0$ dır. Buradan ve (3.6)'dan $\left(1 - q(n) - h(n)\right) z(n) \leq x(n)$ bulunur. Sonuç olarak,

$$\left(1 - q(n-\sigma) - h(n-\sigma)\right) z(n-\sigma) \leq x(n-\sigma), \;\; n \geq n_1 = n_0 + \sigma \tag{3.8}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.1), (3.4) ve (3.8)'den $n \geq n_1$ için

$$\Delta\left[p(n)\left(\Delta z(n)\right)^{\gamma}\right] + \left(a(n) - b(n)\right)\left(1 - q(n-\sigma) - h(n-\sigma)\right)^{\gamma}\left(z(n-\sigma)\right)^{\gamma} \leq 0 \tag{3.9}$$

elde edilir .

Şimdi, $n \geq n_0$ için $\Delta^2 z(n) \leq 0$ olduğu iddia edilsin. Aksi halde, $\Delta^2 z(n) > 0$ olacak biçimde bir $n = n_1 \geq n_0$ tam sayısı vardır. Böylece $\Delta z(n+1) > \Delta z(n)$ sağlanır. $\Delta p(n) \geq 0$ olduğundan,

$$p(n+1)(\Delta z(n+1))^\gamma > p(n+1)(\Delta z(n))^\gamma \geq p(n)(\Delta z(n))^\gamma$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. Böylece, $\Delta^2 z(n) \leq 0$ dir. Yani, $\{\Delta z(n)\}$ artmayan bir dizidir. Buradan

$$z(n) - z(n_1) = \sum_{k=n_1}^{n-1} \Delta z(k) \geq (n - n_1)\, \Delta z(n)$$

ve $n \geq n_1 \geq 2n_0 + 1$ için $z(n) \geq \dfrac{n}{2}\Delta z(n)$ elde edilir. Böylece

$$z(n-\sigma) \geq \frac{n-\sigma}{2}\Delta z(n-\sigma), \quad n \geq n_2 = n_1 + \sigma \tag{3.10}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.9) ve (3.10)'dan

$$\begin{aligned} \Delta\left[p(n)\,(\Delta z(n))^\gamma\right] + (a(n) - b(n))\,(1 - q(n-\sigma) - h(n-\sigma))^\gamma & \\ \times \left(\frac{n-\sigma}{2}\right)^\gamma (\Delta z(n-\sigma))^\gamma \leq 0, \quad n \geq n_2 & \end{aligned} \tag{3.11}$$

bulunur. $y(n) = p(n)\,(\Delta z(n))^\gamma$ olsun. Böylece $y(n) > 0$ ve

$$\Delta y(n) + M(n) y(n-\sigma) \leq 0, \quad n \geq n_2 \tag{3.12}$$

elde edilir.

$$\delta(n) = -\frac{\Delta y(n)}{y(n)} \tag{3.13}$$

olarak tanımlansın. $\{y(n)\}$ artmayan dizi olduğundan, yeterince büyük n için $0 \leq \delta(n) < 1$ dir. (3.13)'den

$$\frac{y(n+1)}{y(n)} = 1 - \delta(n)$$

ve

$$\frac{y(n-\sigma)}{y(n)} = \prod_{i=n-\sigma}^{n-1} (1-\delta(i))^{-1}$$

elde edilir. (3.12) ve (3.13) den,

$$\delta(n) \geq M(n) \prod_{i=n-\sigma}^{n-1} (1-\delta(i))^{-1} \geq M(n) \left(1 - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=n-\sigma}^{n-1} \delta(i)\right)^{-\sigma} \tag{3.14}$$

bulunur. $s(n) = \sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i)$ olsun. (3.14)'den,

$$\delta(n) \geq M(n) \left(1 - \frac{1}{\sigma s(n)} s(n) \sum_{i=n-\sigma}^{n-1} \delta(i)\right)^{-\sigma} \tag{3.15}$$

yazılabilir. (3.15) ve

$$\left(1 - \frac{1}{\sigma} r x\right)^{-\sigma} \geq x + \frac{\left(r^{\frac{1}{1+\sigma}} (\sigma+1) - \sigma\right)}{r}, \; r > 0 \text{ ve } x < \frac{\sigma}{r},$$

eşitsizliğinden,

$$\delta(n) \geq M(n) \left[\frac{1}{s(n)} \sum_{i=n-\sigma}^{n-1} \delta(i) + \frac{1}{s(n)} \left((s(n))^{\frac{1}{1+\sigma}} (\sigma+1) - \sigma\right)\right] \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) yeniden düzenlenirse

$$\delta(n) s(n) - M(n) \sum_{i=n-\sigma}^{n-1} \delta(i) \geq M(n) \left(\left(\sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i)\right)^{\frac{1}{1+\sigma}} (\sigma+1) - \sigma\right)$$

ve $N > n_2$ için

$$\sum_{n=n_2}^{N} \delta(n) s(n) - \sum_{n=n_2}^{N} M(n) \sum_{i=n-\sigma}^{n-1} \delta(i) \geq \sum_{n=n_2}^{N} M(n) \left(\left(\sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i)\right)^{\frac{1}{1+\sigma}} (\sigma+1) - \sigma\right) \tag{3.17}$$

bulunur. Toplamın sınırları değiştirilirse,

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_2}^{N} M(n) \sum_{i=n-\sigma}^{n-1} \delta(i) \geq \sum_{i=n_2}^{N-\sigma-1} \sum_{n=i+1}^{i+\sigma} \delta(i) M(n) &= \sum_{i=n_2}^{N-\sigma-1} \delta(i) \sum_{n=i+1}^{i+\sigma} M(n) \\ &= \sum_{n=n_2}^{N-\sigma-1} \delta(n) \sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i)\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.17) ve (3.18) kullanılırsa eşitsizlik

$$\sum_{n=N-\sigma}^{N} \delta(n) \sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i) \geq \sum_{n=n_2}^{N} M(n) \left(\left(\sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i) \right)^{\frac{1}{1+\sigma}} (\sigma+1) - \sigma \right) \tag{3.19}$$

halini alır. $\{y(n)\}$ pozitif ve artmayan olduğundan,

$$\sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i) \leq 1 \tag{3.20}$$

dir. Böylece (3.5), (3.19) ve (3.20)'den $n \to \infty$ iken,

$$\sum_{n=N-\sigma}^{N} \delta(n) \geq \sum_{n=n_2}^{N} M(n) \left(\left(\sum_{i=n+1}^{n+\sigma} M(i) \right)^{\frac{1}{1+\sigma}} (\sigma+1) - \sigma \right) \to \infty$$

elde edilir. $\delta(n)$'nin tanımından,

$$\sum_{n=N-\sigma}^{N} \delta(n) = \sum_{n=N-\sigma}^{N} \left(1 - \frac{y(n+1)}{y(n)} \right) < \sigma + 1$$

bulunur. Bu da (3.19) ile çelişir. $\{x(n)\}$'in (3.1) denkleminin nihai bir negatif çözümü olması durumunda (3.1) denkleminde $y(n) = -x(n)$ alınarak benzer çelişki elde edilir. Böylece (3.1)'in tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 3.2. $\gamma \geq 1$ ve $\Delta p(n) \geq 0$ olsun. $(H1)$ ile $(H2)$ sağlansın.

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sum_{k=0}^{n} \left[\rho(k) M(k) - \frac{p(k-\sigma) \left(\Delta \rho(k)\right)^2}{4\gamma \left(\frac{k-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1} \rho(k)} \right] = \infty \tag{3.21}$$

olacak şekilde bir $\{\rho(n)\}$ pozitif dizisi mevcut ise bu durumda (3.1)'in tüm çözümleri salınımlıdır; burada $M(n) = (a(n) - b(n))(1 - q(n-\sigma) - h(n-\sigma))^\gamma$ dir.

İspat. $\{x(n)\}$, (3.1)'in nihai pozitif bir çözümü olsun. Yani, her $n \geq n_0$ için $x(n) > 0$ ve $x(n-\sigma) > 0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $n_0 > 0$ sayısı vardır. Teorem 3.1'in ispatına benzer yöntem izlenirse, (3.9) elde edilir. Ardından Riccati

$$w(n) = \rho(n)\frac{p(n)\,(\Delta z(n))^\gamma}{(z(n-\sigma))^\gamma} \tag{3.22}$$

dönüşümü uygulansın; burada $z(n)$, (3.6) eşitliği ile ifade edilmektedir. Buradan $w(n) > 0$ ve

$$\Delta w(n) = p(n+1)\,(\Delta z(n+1))^\gamma\,\Delta\left[\frac{\rho(n)}{(z(n-\sigma))^\gamma}\right] + \rho(n)\frac{\Delta\left(p(n)\,(\Delta z(n))^\gamma\right)}{(z(n-\sigma))^\gamma} \tag{3.23}$$

bulunur. (3.9) ve (3.23) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\Delta w(n) \quad &\leq \quad -\rho(n)M(n) + \frac{\Delta\rho(n)}{\rho(n+1)}w(n+1) \\ &\quad - \rho(n)\frac{p(n+1)\,(\Delta z(n+1))^\gamma\,\Delta\left((z(n-\sigma))^\gamma\right)}{(z(n+1-\sigma))^\gamma(z(n-\sigma))^\gamma}\end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.9) ve $\Delta z(n) \geq 0$ dan,

$$p(n-\sigma)\Delta\,(z(n-\sigma))^\gamma \geq p(n+1)\,(\Delta z(n+1))^\gamma \quad \text{ve} \quad z(n+1-\sigma) \geq z(n-\sigma) \tag{3.25}$$

dır. (3.24) ve (3.25)'den,

$$\begin{aligned}\Delta w(n) \quad &\leq \quad -\rho(n)M(n) + \frac{\Delta\rho(n)}{\rho(n+1)}w(n+1) \\ &\quad - \rho(n)\frac{p(n+1)\,(\Delta z(n+1))^\gamma\,\Delta\left(z^\gamma(n-\sigma)\right)}{\left(z^\gamma(n+1-\sigma)\right)^2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Her $x \neq y > 0$ ve $\gamma \geq 1$

$$x^\gamma - y^\gamma \geq \gamma y^{\gamma-1}(x-y)$$

olduğu gerçeği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\Delta w(n) \leq -\rho(n)M(n) + \frac{\Delta\rho(n)}{\rho(n+1)}w(n+1) \\ - \rho(n)\frac{p(n+1)\gamma\left(z(n-\sigma)\right)^{\gamma-1}\Delta\left(z(n-\sigma)\right)\left(\Delta z(n+1)\right)^{\gamma}}{\left(z^{\gamma}(n+1-\sigma)\right)^{2}}\end{aligned} \tag{3.26}$$

bulunur. (3.10), (3.25) ve (3.26)'dan, $n \geq n_2$ için

$$\begin{aligned}\Delta w(n) \leq -\rho(n)M(n) + \frac{\Delta\rho(n)}{\rho(n+1)}w(n+1) - \gamma\left(\frac{n-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1} \times \\ \frac{\rho(n)}{\left(\rho(n+1)\right)^{2}p(n-\sigma)}\frac{\left(p(n+1)\right)^{2}\left(\rho(n+1)\right)^{2}\left(\Delta z(n+1)\right)^{2\gamma}}{\left(z^{\gamma}(n+1-\sigma)\right)^{2}}\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\Delta w(n) \leq & \quad -\rho(n)M(n) + \frac{\Delta\rho(n)}{\rho(n+1)}w(n+1) \\ & \quad -\gamma\left(\frac{n-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1}\frac{\rho(n)}{\left(\rho(n+1)\right)^{2}p(n-\sigma)}w^{2}(n+1) \\ = & \quad -\rho(n)M(n) + \frac{p(n-\sigma)(\Delta\rho(n))^{2}}{4\gamma\left(\frac{n-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1}\rho(n)} \\ & \quad -\left[\frac{\sqrt{\gamma\left(\frac{n-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1}\rho(n)}}{\rho(n+1)\sqrt{p(n-\sigma)}}w(n+1) - \frac{\sqrt{p(n-\sigma)}\Delta\rho(n)}{2\sqrt{\gamma\left(\frac{n-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1}\rho(n)}}\right]^{2} \\ < & \quad -\left[\rho(n)M(n) - \frac{p(n-\sigma)(\Delta\rho(n))^{2}}{4\gamma\left(\frac{n-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1}\rho(n)}\right]\end{aligned} \tag{3.28}$$

bulunur. (3.28)'in her iki yanı n_2 den n ye toplanırsa,

$$-w(n_2) < w(n+1) - w(n_2) < -\sum_{k=n_2}^{n}\left[\rho(k)M(k) - \frac{p(k-\sigma)(\Delta\rho(k))^{2}}{4\gamma\left(\frac{k-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1}\rho(k)}\right]$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=n_2}^{n}\left[\rho(k)M(k) - \frac{p(k-\sigma)(\Delta\rho(k))^{2}}{4\gamma\left(\frac{k-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1}\rho(k)}\right] < c$$

olacak biçimde $c > 0$ sonlu sabiti mevcuttur. Bu eşitsizlik ise (3.21) ile çelişmektedir. $\{x(n)\}$'nin nihai negatif olma durumu da benzer şekilde ispatlanabilir. Böylece

(3.1)'in tüm çözümleri salınımlıdır.

Sonuç 3.1. Teorem 3.2 için $q(n) = h(n) = g(n, x(n-\sigma), x(n-\tau)) = 0$ ve $f(n, x(n-\sigma)) = \eta(n)(x(n-\sigma))^{\gamma}$ ise, (3.21) koşulu

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sum_{k=0}^{n} \left[\rho(k)\eta(k) - \frac{p(k-\sigma)\left(\Delta\rho(k)\right)^2}{4\gamma\left(\frac{k-\sigma}{2}\right)^{\gamma-1}\rho(k)}\right] = \infty$$

halini alır.

Sonuç 3.2. (3.1) denkleminin özel bir durumu olan

$$\Delta^2 x(n) + \mu(n)x(n-\sigma) = 0, \quad n \geq 0$$

denklemi ele alınırsa, (3.21) koşulu

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sum_{k=0}^{n} \rho(k) \left[\mu(k) - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\rho(k)}{\rho(k)}\right)^2\right] = \infty$$

haline indirgenir.

Teorem 3.3. $0 < \gamma < 1$, $q(n) = h(n) = 0$, $\Delta p(n) \geq 0$ ve

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{p(n)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} < \infty \tag{3.29}$$

olsun. Ayrıca, (3.21) sağlanacak şekilde bir $\{\rho(n)\}$ pozitif dizisi ve $n_0 > 0$ için

$$\Delta\theta(n) \geq 0, \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} \theta(n+1)\left[a(n) - b(n)\right] = \infty$$

ve

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{p(n)\theta(n)} \sum_{i=n_0}^{n-1} \theta(i+1)\left[a(i) - b(i)\right]\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \infty \tag{3.30}$$

olacak biçimde bir $\{\theta(n)\}$ pozitif dizisi mevcut olsun ve $(H2)$ sağlansın. Bu durumda

$$\Delta\left[p(n)\left(\Delta x(n)\right)^{\gamma}\right]+f(n,x(n-\sigma))=g(n,x(n-\sigma),x(n-\tau)) \tag{3.31}$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır veya sıfıra yakınsar.

İspat. $\{x(n)\}$, (3.31) denkleminin nihai pozitif bir çözümü olsun. Yani, n_0 yeterince büyük olmak üzere her $n \geq n_0$ için $x(n)>0$ ve $x(n-\sigma)>0$. (3.31)'den, $n \geq n_0$ için

$$\Delta\left[p(n)\left(\Delta x(n)\right)^{\gamma}\right] \leq 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. Böylece, $\{p(n)\left(\Delta x(n)\right)^{\gamma}\}$ nihai artmayan bir dizidir. $p(n)$ pozitif olduğundan $\Delta x(n)$ nihai pozitif ya da nihai negatiftir. Buradan $\Delta x(n)<0$ ya da $\Delta x(n)>0$ dır. $n \geq n_1 > n_0$ için $\Delta x(n)<0$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} x(n)=\alpha \geq 0$ dır. Şimdi $\alpha=0$ olduğu iddia edilsin. Aksi takdirde, $n\to\infty$ iken $(x(n-\sigma))^{\gamma} \to \alpha^{\gamma}>0$ dır. Buradan $(x(n-\sigma))^{\gamma} \geq \alpha^{\gamma}$ olacak biçimde $n_2 \geq n_1$ mevcuttur. Böylece (3.4)'den,

$$\Delta\left[p(n)\left(\Delta x(n)\right)^{\gamma}\right] \leq -\left(a(n)-b(n)\right)\alpha^{\gamma}$$

bulunur. $n \geq n_2$ için $\upsilon(n)=\theta(n)p(n)\left(\Delta x(n)\right)^{\gamma}$ olsun. Buradan

$$\Delta\upsilon(n) \leq -\alpha^{\gamma}\theta(n+1)\left(a(n)-b(n)\right)+p(n)\left(\Delta x(n)\right)^{\gamma}\Delta\theta(n)$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki yanı n_2 den $n-1$'e toplanırsa

$$\upsilon(n) \leq \upsilon(n_2)-\alpha^{\gamma}\sum_{i=n_2}^{n-1}\theta(i+1)\left(a(i)-b(i)\right)+\sum_{i=n_2}^{n-1}p(i)\left(\Delta x(i)\right)^{\gamma}\Delta\theta(i)$$

elde edilir. (3.30)'dan,

$$\upsilon(n) \leq \upsilon(n_2)-\alpha^{\gamma}\sum_{i=n_2}^{n-1}\theta(i+1)\left(a(i)-b(i)\right)$$

bulunur. (3.30)'dan,

$\sum_{n=n_0}^{\infty} \theta(n+1)\left[a(n)-b(n)\right]=\infty$ olduğundan, her $n \geq n_3$ için

$$v(n) \leq -\frac{\alpha^{\gamma}}{2} \sum_{i=n_2}^{n-1} \theta(i+1)\left(a(i)-b(i)\right)$$

olacak şekilde yeterince büyük bir n_3 tam sayısı alınabilir. Eşitsizliğin her iki yanı n_3 den n'ye toplanırsa

$$x(n+1) \leq x(n_3) - \left(\frac{\alpha^{\gamma}}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{s=n_3}^{n} \left(\frac{1}{p(s)\theta(s)} \sum_{i=n_2}^{s-1} \theta(i+1)\left[a(i)-b(i)\right]\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

elde edilir. (3.30) koşulu sayesinde $\{x(n)\}$ nihai negatiftir. Böylece bir çelişki elde edilmiş olur. Buradan $\{x(n)\}$ sıfıra yakınsamaktadır.

Diğer taraftan, $\Delta x(n) > 0$ olması durumunda benzer çelişki elde edilecektir. Bu nedenle, $x(n)$ nihai pozitif değildir. Benzer şekilde $\{x(n)\}$'in nihai negatif bir çözüm olması durumu da benzer şekilde ispatlanabilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.1. İkinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\begin{aligned} \Delta &\left[n\left(\Delta\left(x(n)+\frac{1}{n^2}x(n-4)+\frac{1}{n^3}x(n-3)\right)\right)^{\frac{9}{7}}\right] \\ &\qquad + \left(\frac{5}{4}+\frac{7n}{2}+\frac{3^{-6n}}{n^2+4}\right)\left(x\left(n-3\right)\right)^{\frac{9}{7}} \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{(x(n-3))^{\frac{23}{7}}}{1+(x(n-3))^2} \times \frac{(x(n-4))^4}{1+(x(n-4))^4}\right), \quad n \geq 4. \end{aligned} \tag{3.33}$$

denklemini ele alalım.

$$\frac{f(n,x(n-3))}{(x(n-3))^{\frac{9}{7}}} = \left(\frac{5}{4}+\frac{7n}{2}+\frac{3^{-6n}}{n^2+4}\right) \geq \left(\frac{5}{4}+\frac{7n}{2}\right) \text{ ve}$$

$$\frac{g(n,x(n-3),x(n-4))}{(x(n-3))^{\frac{9}{7}}} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{(x(n-3))^2}{1+(x(n-3))^2} \times \frac{(x(n-4))^4}{1+(x(n-4))^4}\right) \leq \frac{1}{n^2}$$

olur ve Teorem 3.1'in tüm hipotezleri sağlanır. Böylece (3.33)'ün tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 3.2. İkinci basamaktan neutral gecikmeli

$$
\begin{aligned}
\Delta \left[(n+1)^2 \left(\Delta(x(n)) \right)^{\frac{1}{9}} \right] & \\
+ \left(6(n+1)^{\frac{7}{3}} + \frac{n^2+5}{n^2+4n+6} \right) (x(n-2))^{\frac{1}{9}} & \\
= \frac{1}{8} \left(\frac{(x(n-2))^{\frac{19}{9}}}{1+(x(n-2))^2} \times \frac{(x(n-3))^4}{1+(x(n-3))^4} \right), & \quad n \geq 2.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

denklemi ele alınsın.

$$
\frac{f(n, x(n-2))}{(x(n-2))^{\frac{1}{9}}} = \left(6(n+1)^{\frac{7}{3}} + \frac{n^2+5}{n^2+4n+6} \right) \geq 6(n+1)^{\frac{7}{3}} \text{ ve}
$$

$$
\frac{g(n, x(n-2), x(n-3))}{(x(n-2))^{\frac{1}{9}}} = \frac{1}{8} \left(\frac{(x(n-2))^2}{1+(x(n-2))^2} \times \frac{(x(n-3))^4}{1+(x(n-3))^4} \right) \leq \frac{1}{8}
$$

olur ve $\theta(n) = n$ alınırsa, Teorem 3.3'ün tüm hipotezleri sağlanır. Böylece (3.34)'ün tüm çözümleri salınımlıdır veya sıfıra yakınsar.

4. NEUTRAL GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SINIRLILIK VE ASİMPTOTİK DAVRANIŞLARI

Bu bölümde neutral gecikmeli fark denklemlerinin sınırlılık ve asimptotik davranışları üzerinde durulmuştur. İki kısımdan oluşan bu bölümün ilk kısmında Bihari eşitsizliği yardımıyla incelemeler yapılırken ikinci kısımda Lyapunov fonksiyonlarından yararlanılmaktadır.

4.1 İkinci Basamaktan Neutral Gecikmeli Bir Fark Denkleminin Çözümlerinin Asimptotik Davranışları

Bu kısımda Bihari eşitsizliğinin ayrık benzeri ele alınarak ikinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta^2 \left(x(n) + px(n-\tau) + qx(n-\sigma)\right) + f(n, x(n)) = 0 \tag{4.1}$$

fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışları incelenecektir. Benzer incelemeler ikinci basamaktan

$$\Delta^2 \left(x(n) + px(n-\tau) + qx(n-\sigma)\right) + f(n, x(n), \Delta x(n)) = 0 \tag{4.2}$$

ve üçüncü basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta^3 \left(x(n) + px(n-\tau) + qx(n-\sigma)\right) + f\left(n, x(n), \Delta x(n), \Delta^2 x(n)\right) = 0 \tag{4.3}$$

fark denklemleri için de yapılacaktır.

Gronwall eşitsizliğinin lineer olmayan genelleştirilmesi olan Bihari eşitsizliği Macar matematikçi İmre Bihari tarafından ispatlanmıştır. Bu eşitsizlik yardımıyla neutral gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışlarını inceleyen bir çok araştırma yayınlanmıştır. Rogovchenko (1998)'de lineer olmayan

$$x'' + f(t, x(t), x'(t)) = 0$$

diferensiyel denklemini ele alarak bu denklemin çözümlerinin asimptotik davranışlarını Bihari eşitsizliği yardımıyla incelemiştir. Buradan hareketle Dzurina (2002)'de, yine Bihari eşitsizliğini kullanarak ikinci basamaktan lineer olmayan neutral gecikmeli

$$(x(t) + px(t - \tau))'' + f(t, x(t)) = 0$$

diferensiyel denklemi için çözümlerin asimptotik davranışlarını irdelemiştir. Söz konusu makalede salınımsız çözümlerin $t \to \infty$ halinde hangi şartlar altında asimptotik olarak $at + b$'ye yakınsadığı bulunmuştur; burada $a, b \in \mathbb{R}$.

Fark denklemleri için düşünüldüğünde ayrık Bihari eşitsizliğini kullanarak yapılan çalışmalar diferensiyel denklemlerdeki kadar fazla değilse de son yıllarda hız kazandığı gözlemlenmektedir.

Pachpatte (2000)'de, ikinci basamaktan

$$\Delta^2 x(n) + f(n, x(n), \Delta x(n)) = 0$$

fark denklemi için ayrık Bihari eşitsizliğini kullanarak çözümlerin sınırlılık durumlarını araştırmıştır.

Venkatesan (2008)'de, yine ayrık Bihari eşitsizliği yardımıyla ikinci basamaktan lineer olmayan neutral gecikmeli

$$\Delta^2(x(n) + c(n)x(n - k)) + f(n, x(n), x(n - m), \Delta x(n), \Delta x(n - l)) = 0$$

fark denkleminin salınımlı olmayan çözümlerinin asimptotik davranışlarını incelemiştir.

Migda (2005)'de ikinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta^2(x(n) + px(n - k)) + f(n, x(n)) = 0$$

fark denkleminin salınımsız çözümlerinin $n \to \infty$ halinde asimptotik olarak $an +$

b'ye yakınsadığını garanti eden koşulları ortaya koymuştur; burada $a, b \in \mathbb{R}$. Bu kısımda da benzer yöntemler kullanılarak (4.1), (4.2) ve (4.3) denklemlerinin salınımsız çözümlerinin asimptotik davranışları hakkında sonuçlar verilmeye çalışılacaktır.

Öncelikle, bu bölüm boyunca (4.1) denklemi ve $x(n) = \varphi(n)$ başlangıç fonksiyonundan oluşan başlangıç değer probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu kabul ettiğimizi belirtelim; burada $\varphi(n)$, $n = -L, ..., -1, 0$ için tanımlıdır.

Tanım 4.1.1. $n \geq -L$ için tanımlı aşikar olmayan bir $\{x(n)\}$ dizisi (4.1) denklemini sağlarsa, o zaman $\{x(n)\}$ dizisine (4.1) denkleminin bir çözümü denir; burada $L = \max\{\tau, \sigma\}$ ve $n = 0, 1, 2, ...$

Tanım 4.1.2. $\{x(n)\}$ dizisi (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. Her $n \geq n_1 > 0$ için $x(n)x(n+1) \leq 0$ olacak şekilde bir $n_1 > 0$ tamsayısı varsa, $\{x(n)\}$ çözümüne salınımlı, aksi halde salınımsızdır denir. (4.1)'in tüm çözümleri salınımlı ise, o zaman salınımlı denklem adını alır.

Esas sonuçlara geçmeden aşağıdaki lemmaları göz önüne alalım.

Lemma 4.1.1. $r(n)$ ve $t(n)$, $n = 0, 1, 2, ...$ için tanımlanmış reel değerli negatif olmayan fonksiyonlar ve g, $x_0 > 0$ bir sabit olmak üzere $I = [x_0, \infty]$ aralığında tanımlanmış sürekli pozitif ve azalmayan bir fonsiyon olsun. İlaveten k negatif olmayan bir sabit olmak üzere her $n = 0, 1, 2, ...$ için

$$r(n) \leq k + \sum_{i=0}^{n-1} t(i)g(r(i))$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$r(n) \leq G^{-1}\left[G(k) + \sum_{i=0}^{n-1} t(i)\right], \quad 0 \leq n \leq \alpha$$

yazılabilir; burada

$$G(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{g(s)},\ x\geq x_0>0,$$

G^{-1}, G'nin tersi ve

$$\alpha=\sup\left\{n:G(k)+\sum_{i=0}^{n-1}t(i)\in Dom\left(G^{-1}\right)\right\}$$

dir.

Bu lemma T.E Hull ve W.A.J Luxemburg tarafından Bihari eşitsizliğinin ayrık benzeri olarak ortaya konulmuştur.

Lemma 4.1.2. Nihai olarak $y(n)>0$ $(y(n)<0)$ ve

$$w(n)=y(n)+p\frac{n-\tau}{n}y(n-\tau)+q\frac{n-\sigma}{n}y(n-\sigma) \tag{4.4}$$

olsun; burada $0\leq p+q<1$ ve $p,q,\tau,\sigma>0$ dır. $\lim\limits_{n\to\infty}w(n)=c$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty}y(n)=\dfrac{c}{1+p+q}$ elde edilir.

İspat. $y(n)>0$ olsun. Buradan $c\geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\sup y(n)\geq\frac{c}{1+p+q}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\inf y(n)\leq\frac{c}{1+p+q}$$

elde edilir. $y(n)$'nin $y\left(\bar{n}_i\right)$ ve $y\left(\underline{n}_i\right)$ alt dizileri alınsın. Varsayalım ki

$$\lim_{n\to\infty}\sup y(n)=\lim_{i\to\infty}y(\bar{n}_i)=\frac{c+\eta_1}{1+p+q}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\inf y(n)=\lim_{i\to\infty}y(\underline{n}_i)=\frac{c-\eta_2}{1+p+q}$$

olsun; burada $\eta_1,\eta_2\geq 0$ dır. Şimdi $\eta_1=\eta_2=0$ olduğu gösterilsin.

a) $\eta_1 \geq \eta_2 \geq 0$ ve $\eta_1 > 0$ olsun. (4.4)'den, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$w(n) \geq y(n) + p\frac{n-\tau}{n}\frac{c-\eta_2-\varepsilon}{1+p+q} + q\frac{n-\sigma}{n}\frac{c-\eta_2-\varepsilon}{1+p+q}$$

dir. $i \to \infty$ iken, $n = \bar{n}_i$ alınırsa,

$$c \geq \frac{c+\eta_1}{1+p+q} + p\frac{c-\eta_2-\varepsilon}{1+p+q} + q\frac{c-\eta_2-\varepsilon}{1+p+q}$$

elde edilir. Buradan

$$\eta_1 \leq \eta_2(p+q) + \varepsilon(p+q)$$

bulunur. $\varepsilon = \dfrac{[(1-p-q)\eta_2]}{2(p+q)}$ alınırsa,

$$\eta_1 \leq (p+q)(2\eta_2 - \eta_1) \leq (p+q)\eta_2 < \eta_2$$

elde edilir ve bu da bir çelişkidir.

b) $\eta_2 \geq \eta_1 \geq 0$ ve $\eta_2 > 0$ olsun. herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$w(n) \leq y(n) + p\frac{c+\eta_1+\varepsilon}{1+p+q} + q\frac{c+\eta_1+\varepsilon}{1+p+q}$$

elde edilir. $i \to \infty$ iken, $n = \underline{n}_i$ alınırsa,

$$c \leq \frac{c-\eta_2}{1+p+q} + p\frac{c+\eta_1+\varepsilon}{1+p+q} + q\frac{c+\eta_1+\varepsilon}{1+p+q}$$

bulunur. Son eşitsizlik düzenlenirse

$$\eta_2 \leq \eta_1(p+q) + \varepsilon(p+q)$$

yazılabilir. $\varepsilon = \dfrac{[(1-p-q)\eta_2]}{2(p+q)}$ alınırsa, eşitsizlik

$$\eta_2 \leq (p+q)(2\eta_1 - \eta_2) \leq (p+q)\eta_1 < \eta_1$$

halini alır ve bu da bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1. $0 \leq p+q < 1$, $\tau, \sigma > 0$ olsun ve $f(n,u)$ aşağıdaki koşulları sağlasın:

$H3)$ $f(n,u)$, u ya göre sürekli,

$H4)$ $n = 1, 2, ...$için

$$|f(n,u)| \leq h(n)g\left(\frac{|u|}{n}\right) \tag{4.5}$$

olacak biçimde sürekli $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu ve $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ dizisi mevcut olsun; burada $s > 0$ için , $g(s)$ pozitif ve azalmayan bir fonksiyon,

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} h(s) < \infty, \quad n_0 \geq 1 \tag{4.6}$$

ve $x \to \infty$ iken,

$$G(x) = \int_{n_0}^{x} \frac{ds}{g(s)} \to \infty$$

dur. Bu durumda (4.1)'in bütün salınımsız $x(n)$ çözümleri asimptotik olarak $an+b$'ye veya a'ya yakınsar; burada a ve b reel sabitlerdir.

İspat. $x(n)$, (4.1)'in salınımsız bir çözümü olsun.

$$\omega(n) = x(n) + px(n-\tau) + qx(n-\sigma) \tag{4.7}$$

alınırsa, $|\omega(n)| > |x(n)|$ ve (4.1)'den

$$\Delta^2(\omega(n)) = -f(n, x(n)) \tag{4.8}$$

elde edilir. $\omega(n_0) = c_1$ ve $\Delta\omega(n_0) = c_2$ alınarak (4.8)'in her iki yanı n_0 'dan $n-1$ 'e toplanırsa,

$$\Delta\omega(n) = c_2 - \sum_{s=n_0}^{n-1} f(s, x(s)) \tag{4.9}$$

ve

$$\omega(n) = c_1 + (n-n_0)c_2 - \sum_{s=n_0}^{n-1} (n-s-1) f(s, x(s)) \tag{4.10}$$

bulunur. (4.10)'dan

$$|\omega(n)| \leq (|c_1| + |c_2|)\, n + n \sum_{s=n_0}^{n-1} |f(s, x(s))| \tag{4.11}$$

dir. (4.5) den

$$|f(n, x(n))| \leq h(n) g\left(\frac{|x(n)|}{n}\right) \leq h(n) g\left(\frac{|\omega(n)|}{n}\right)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{|\omega(n)|}{n} \leq |c_1| + |c_2| + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|\omega(s)|}{s}\right)$$

elde edilir. Bihari eşitsizliğinin ayrık hali kullanılırsa (Lemma 4.1.1)

$$\frac{|\omega(n)|}{n} \leq G^{-1}\left(G\left(|c_1| + |c_2|\right) + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s)\right)$$

bulunur.

$$k_1 = G\left(|c_1| + |c_2|\right) + \sum_{s=n_0}^{\infty} h(s) < \infty$$

alınsın. $G^{-1}(x)$ azalmayan olduğundan,

$$\frac{|\omega(n)|}{n} \leq k_2 = G^{-1}(k_1) < \infty$$

elde edilir. İlaveten $(H4)$'den

$$\begin{aligned}
\sum_{s=n_0}^{n-1} |f(s, x(s))| &\leq \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|x(s)|}{s}\right) \\
&\leq \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|\omega(s)|}{s}\right) \\
&\leq g(k_2) \sum_{s=n_0}^{\infty} h(s) < k_3
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $\sum_{s=n_0}^{\infty} |f(s,x(s))| = L$ mevcuttur ve

$$\lim_{n\to\infty} \Delta\omega(n) = c_2 - L$$

dir. Buradan iki durum söz konusudur:

(a) $c_2 = L$ ise, $\lim_{n\to\infty} \Delta\omega(n) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\omega(n)}{n} = 0$ dir.

$w(n) = \frac{\omega(n)}{n}$ alınırsa,

$$w(n) = y(n) + p\frac{n-\tau}{n} y(n-\tau) + q\frac{n-\sigma}{n} y(n-\sigma)$$

bulunur; burada $y(n) = \frac{x(n)}{n}$ dir. Lemma 4.1.2'den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)}{n} = 0$$

elde edilir.

(b) $c_2 \neq L$ ise, $\lim_{n\to\infty} \Delta\omega(n) = a_1$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\omega(n)}{n} = a_1$ dir; burada a_1 bir sabittir. (a) şıkkına benzer şekilde,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)}{n} = \frac{a_1}{1+p+q}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $0 \leq p + q < 1$, $\tau, \sigma > 0$ olsun ve $f(n,u,v)$ aşağıdaki koşulları sağlasın:

$H5)$ $f(n,u,v)$; u ve v ye göre sürekli

$H6)$ $n = 1, 2, ...,$ için

$$|f(n,u,v)| \leq h(n) g\left(\frac{|u|}{n}\right) |v|$$

olacak biçimde sürekli $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu ve $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ dizisi mevcut olsun; burada $s > 0$ için, $g(s)$ pozitif ve azalmayan bir fonksiyon, h, (4.6) ile aynı özelliklere sahip ve $x \to \infty$ halinde

$$G(x) = \int_{n_0}^{x} \frac{ds}{sg(s)} \to \infty$$

dur. Bu durumda (4.2)'nin bütün salınımsız $x(n)$ çözümleri asimptotik olarak $an + b$'ye veya a'ya yakınsar; burada a ve b reel sabitlerdir.

İspat. Teorem 4.1.1'e benzer şekilde ispat yapılacaktır. Aynı yöntem uygulanırsa,

$$|\Delta\omega(n)| \leq |c_2| + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s)g\left(\frac{|\omega(s)|}{s}\right)|\Delta\omega(s)| \tag{4.12}$$

ve

$$\frac{|\omega(n)|}{n} \leq |c_1| + |c_2| + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s)g\left(\frac{|\omega(s)|}{s}\right)|\Delta\omega(s)| \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece $|\Delta\omega(s)| \leq \dfrac{|\omega(s)|}{s}$'dir. Bu eşitsizlik (4.13)'de yerine konulursa,

$$\frac{|\omega(n)|}{n} \leq |c_1| + |c_2| + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s)g\left(\frac{|\omega(s)|}{s}\right)\frac{|\omega(s)|}{s}$$

bulunur. Buradan Teorem 4.1.1'e benzer şekilde ispat tamamlanabilir.

Teorem 4.1.3. İkinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta^2\left(x(n) + px(n-\tau) + qx(n-\sigma)\right) + r(n)x(n) = 0 \tag{4.14}$$

fark denklemi ele alınsın. $0 \leq p + q < 1$, $\tau, \sigma > 0$ ve

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} s\,|r(s)| < \infty$$

olsun. Bu durumda (4.14)'ün her $x(n)$ salınımsız çözümü asimptotik olarak $an+b$'ye veya a'ya yakınsar; burada a ve b reel sabitlerdir.

İspat. $x(n)$, (4.14)'ün salınımsız bir çözümü olsun. Teorem 4.1.1'deki yöntem uygulanırsa,

$$\Delta\omega(n) = c_2 - \sum_{s=n_0}^{n-1} r(s)x(s)$$

ve

$$\omega(n) = c_1 + (n-n_0)c_2 - \sum_{s=n_0}^{n-1}(n-s-1)r(s)x(s)$$

elde edilir. Buradan

$$|\omega(n)| \leq (|c_1| + |c_2|)\, n + n\sum_{s=n_0}^{n-1} |r(s)|\,|x(s)|$$

ve

$$\frac{|\omega(n)|}{n} \leq |c_1| + |c_2| + \sum_{s=n_0}^{n-1} s\,|r(s)|\,\frac{|\omega(s)|}{s}$$

bulunur. Ayrık Gronwall eşitsizliğinden

$$\frac{|\omega(n)|}{n} \leq (|c_1| + |c_2|)\exp\left(\sum_{s=n_0}^{n-1} s\,|r(s)|\right) \leq k_4 \tag{4.15}$$

halini alır. (4.15)'den

$$\sum_{s=n_0}^{n-1} |r(s)|\,|x(s)| \leq k_4 \sum_{s=n_0}^{n-1} s\,|r(s)| < \infty$$

yazılabilir. Böylece $\sum_{s=n_0}^{\infty} |r(s)|\,|x(s)| = A$ mevcuttur. İspat Teorem 4.1.1'e benzer şekilde devam ettirilebilir.

Teorem 4.1.4. $0 \leq p+q < 1$, $\tau, \sigma > 0$ olsun ve $f(n,u,v,\omega)$ aşağıdaki koşulları sağlasın:

$H7)$ $f(n,u,v,\omega)$; u, v ve ω ya göre sürekli

$H8)$ $n = 1, 2, ...$ için

$$|f(n,u,v,\omega)| \leq h(n)g\left(\frac{|v|}{n}\right)|\omega| \tag{4.16}$$

olacak biçimde sürekli $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu ve $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ dizisi mevcut olsun; burada $s > 0$ için , $g(s)$ pozitif ve azalmayan bir fonksiyon, h, (4.6) ile aynı özelliklere sahip ve $x \to \infty$ halinde

$$G(x) = \int_{n_0}^{x} \frac{ds}{sg(s)} \to \infty$$

dur. Bu durumda (4.3)'ün bütün salınımsız $x(n)$ çözümleri asimptotik olarak $an^2 + bn + c$'ye veya $an + b$'ye yakınsar; burada a, b ve c reel sabitlerdir.

İspat. $x(n)$, (4.3)'ün salınımsız bir çözümü olsun. (4.3)'den,

$$\Delta^3 \omega(n) = -f\left(n, x(n), \Delta x(n), \Delta^2 x(n)\right)$$

elde edilir. $\omega(n_0) = c_1$, $\Delta\omega(n_0) = c_2$, $\Delta^2\omega(n_0) = c_3$ ve $\varphi(n) = \Delta\omega(n)$ alınırsa

$$\Delta^2 \varphi(n) = -f\left(n, x(n), \Delta x(n), \Delta^2 x(n)\right),$$

$$\Delta\varphi(n) = c_3 - \sum_{s=n_0}^{n-1} f\left(s, x(s), \Delta x(s), \Delta^2 x(s)\right)$$

ve

$$\varphi(n) = c_2 + (n - n_0)c_3 - \sum_{s=n_0}^{n-1} (n - s - 1) f(s, x(s), \Delta x(s), \Delta^2 x(s)$$

bulunur. Teorem 4.1.1'e benzer işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{|\varphi(n)|}{n} &\leq |c_2| + |c_3| + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|\Delta x(s)|}{s}\right) \left|\Delta^2 x(s)\right| \\
&\leq |c_2| + |c_3| + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|\Delta \omega(s)|}{s}\right) \left|\Delta^2 \omega(s)\right| \\
&\leq |c_2| + |c_3| + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|\varphi(s)|}{s}\right) |\Delta\varphi(s)| \\
&\leq |c_2| + |c_3| + \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|\varphi(s)|}{s}\right) \frac{|\varphi(s)|}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bihari eşitsizliğinin ayrık benzeri kullanılırsa,

$$\frac{|\varphi(n)|}{n} \leq G^{-1}\left(G\left(|c_2|+|c_3|\right)+\sum_{s=n_0}^{n-1} h(s)\right)$$

elde edilir.

$$k_5 = G\left(|c_2|+|c_3|\right)+\sum_{s=n_0}^{\infty} h(s) < \infty$$

alınırsa, $G^{-1}(x)$ azalmayan olduğundan

$$\frac{|\varphi(n)|}{n} \leq k_6 = G^{-1}(k_5) < \infty$$

bulunur. İlaveten, (4.16)'dan

$$\begin{aligned}
\sum_{s=n_0}^{n-1} \left|f(s,x(s),\Delta x(s),\Delta^2 x(s))\right| &\leq \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|\Delta x(s)|}{s}\right)\left|\Delta^2 x(s)\right| \\
&\leq \sum_{s=n_0}^{n-1} h(s) g\left(\frac{|\Delta \omega(s)|}{s}\right)\left|\Delta^2 \omega(s)\right| \\
&\leq g(k_6) k_6 \sum_{s=n_0}^{\infty} h(s) < k_7
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\sum_{s=n_0}^{\infty} |f(s,x(s),\Delta x(s),\Delta^2 x(s))| = B$ mevcuttır ve

$$\lim_{n\to\infty} \Delta\varphi(n) = c_3 - B$$

dir. Burada iki durum söz konusudur:

(a) $c_3 = B$ ise, $\lim_{n\to\infty} \Delta\varphi(n) = 0$. Böylece $\lim_{n\to\infty} \Delta^2\omega(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\omega(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\omega(n)}{n(n-1)} =$ 0 ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\omega(n)}{n(n-1)} = 0$ elde edilir. $\mu(n) = \frac{\omega(n)}{n(n-1)}$ alınırsa

$$\mu(n) = y(n) + p\frac{(n-\tau)(n-\tau-1)}{n(n-1)} y(n-\tau) + q\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{n(n-1)} y(n-\sigma),$$

bulunur; burada $y(n) = \frac{x(n)}{n(n-1)}$. Lemma 4.1.2'den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)}{n(n-1)} = 0.$$

(b) $c_3 \neq B$ ise, $\lim_{n\to\infty} \Delta\varphi(n) = a_2$. Buradan $\lim_{n\to\infty} \Delta^2\omega(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\omega(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\omega(n)}{n(n-1)} =$ a_2 ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\omega(n)}{n(n-1)} = \frac{a_2}{2}$. (a)'ya benzer şekilde,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)}{n(n-1)} = \frac{a_2}{2(1+p+q)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.1. İkinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta^2 \left(x(n) + \tfrac{1}{3}x(n-2) + \tfrac{1}{4}x(n-3)\right) + \left(\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)\left(2 + \tfrac{n^2}{(n+1)^2}\right)\tfrac{x^2(n)}{x^2(n)+4n^2} = 0 \quad ,n \geq 3 \tag{4.17}$$

fark denklemi ele alınsın.

$g(u) = \dfrac{u^2}{u^2+4}$ ve $h(n) = 4\left(\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)$ olduğundan, Teorem 4.1.1'in tüm hipotezleri sağlanır. Bu durumda (4.17)'nin bütün salınımsız $x(n)$ çözümleri asimptotik olarak $an+b$'ye veya a'ya yakınsar; burada a ve b reel sabitlerdir.

Örnek 4.1.2. İkinci basamaktan neutral gecikmeli

$$\Delta^2 \left(x(n) + \frac{1}{3}x(n-2) + \frac{1}{4}x(n-3)\right) + \frac{1}{n^2(n+2)}x(n) = 0. \quad n \geq 2 \tag{4.18}$$

fark denklemi ele alınsın.

$r(n) = \dfrac{1}{n^2(n+2)}$ olduğundan Teorem 4.1.3'ün tüm hipotezleri sağlanır. Bu durumda (4.18)'in bütün salınımsız $x(n)$ çözümleri asimptotik olarak $an+b$'ye veya a'ya yakınsar; burada a ve b reel sabitlerdir.

4.2 Birinci Basamaktan Neutral Gecikmeli Bir Fark Denkleminin Çözümlerinin Sınırlılık ve Asimptotik Davranışları

Bu kısımda birinci basamaktan lineer olmayan neutral gecikmeli

$$\Delta\left[x(n) - p(n)f(x(n-\tau(n)))\right] + q(n)g(x(n-\theta)) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}(n_0) \tag{4.19}$$

fark denkleminin tüm çözümlerinin sınırlı olması için yeter koşullar elde edilecektir; burada, $\theta > 0$ tamsayı, $\tau(n) > 0$ tamsayı dizisi, $q(n)$ artmayan olmak üzere $q(n)$ ve $p(n)$ birer pozitif reel sayı dizisi, n_0 negatif olmayan tamsayı ve $\mathbb{N}(n_0) = \{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$'dir. İlaveten (4.19) denkleminin özel bir durumu için tüm çözümlerin sınırlı ve $n \to \infty$ halinde bir sabite yakınsadığı gösterilecektir. Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için verilecek olan örneklerle sonuçlar desteklenecektir.

Bu kısımda ele alınan (4.19) denkleminin kalitatif özellikleri incelenirken ayrık Lyapunov fonksiyonlarından yararlanılacaktır. Lyapunov fonksiyonlarının gecikmeli diferensiyel denklemlerin kararlılık ve sınırlılık incelemelerinde kullanılması yeni bir durum değildir. Bu alanda yapılan bir çok çalışma bulunmaktadır (Wei (2006), Shen (2007), Jiang (2012), Wei (2014)). Ancak, neutral gecikmeli fark denklemleri için Lyapunov fonksiyonunun kullanımı henüz çok yenidir:

Wei (2011)'de, birinci basamaktan lineer olmayan neutral gecikmeli

$$\Delta\left[x(n) - c(n)x(n-m)\right] + p(n)f(x(n-k)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}(n_0) \tag{4.20}$$

fark denkleminin asimptotik davranışları incelenmiştir; burada m ve k pozitif tamsayılar, $\{c(n)\}$ reel sayı dizisi, $\{p(n)\}$ pozitif dizi, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, n_0 negatif olmayan bir tamsayı ve $\mathbb{N}(n_0) = \{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ dir.

Yine Wei (2014)'de, birinci basamaktan pozitif ve negatif katsayılı neutral gecikmeli

$$\Delta\left[x(n) - c(n)x(n-m)\right] + p(n)f(x(n-k)) - q(n)f(x(n-l)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}(n_0)$$

fark denkleminin sınırlılık ve asimptotik davranışları ele alınmıştır. Bu kesimde benzer sonuçlar (4.19) denklemi için de elde edilmektedir.

Tanım 4.2.1. $\rho = \max\{\tau(n_0), \theta\}$ olsun. Her $n \in N(n_0 - \rho) = \{n_0 - \rho, n_0 - \rho + 1, n_0 - \rho + 2, ...\}$ için tanımlı ve her $n \in N(n_0)$ için (4.19) denklemini sağlayan bir $\{x(n)\}$ reel sayı dizisine (4.19)'un bir çözümü denir.

Herhangi bir n_0 ve $x(n_0 + j) = a_j$, $j = -\rho, -\rho + 1, -\rho + 2, ...$ başlangıç koşulu için (4.19) denkleminin, her $n \in N(n_0 - \rho)$ için tanımlanmış bir tek $\{x(n)\}$ çözümüne sahip olduğu kabul edilmektedir.

Teorem 4.2.1. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

$(H9)$

$$|x| \leq |f(x)| \leq |g(x)| \leq L\,|x|\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

olacak biçimde bir $L > 1$ sabiti mevcut ve $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ ve $xg(x) > 0$,

$(H10)$ $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \alpha < \dfrac{1}{L}$,

$(H11)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \left[2\alpha + \sum\limits_{i=n-\theta}^{n+\theta} q\,(i+\theta)\right] < \dfrac{2}{L}$.

Bu durumda (4.19)'un tüm çözümleri sınırlıdır.

İspat. $x(n)$, (4.19)'un bir çözümü olsun. (4.19) denklemi yeniden

$$\Delta\left[x(n) - p(n)f(x(n-\tau(n))) - \sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+\theta)g(x(i))\right] + q(n+\theta)g(x(n)) = 0 \quad (4.21)$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha < 1$ olduğundan, $\alpha + \epsilon < 1$ olacak biçimde yeterince küçük bir $\epsilon > 0$ seçilebilir ve $(H11)$'den

$$\lim_{n\to\infty} sup \left[2(\alpha+\epsilon) + \sum_{i=n-\theta}^{n+\theta} q\,(i+\theta)\right] < \frac{2}{L} \quad (4.22)$$

dir. İlaveten, $(H10)$'dan $n \geqslant n_1$ için

$$p(n) \leq \alpha + \epsilon \tag{4.23}$$

olacak biçimde yeterince büyük $n_1 > n_0$ seçilebilir.

$$\frac{g^2(x(n-\tau(n)))}{f^2(x(n-\tau(n)))} \geqslant 1 \geqslant \frac{p(n)}{\alpha+\epsilon}\ , \quad n \geqslant n_1,$$

olduğundan

$$p(n)f^2(x(n-\tau(n))) \leq (\alpha+\epsilon)\, g^2(x(n-\tau(n))), \quad n \geqslant n_1 \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi

$$V_1(n) = \left[x(n) - p(n)f(x(n-\tau(n))) - \sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+\theta)g(x(i))\right]^2$$

ve

$$\begin{aligned} V_2(n) \quad &= \quad \sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+2\theta) \sum_{j=i}^{n-1} q(j+\theta)g^2(x(j)) \\ &\quad + (\alpha+\epsilon) \sum_{i=n-\tau(n)}^{n-1} q(i+\theta)g^2(x(i)) \end{aligned}$$

olacak biçimde $V(n) = V_1(n) + V_2(n)$ seçilsin. (4.19)'un çözümleri boyunca $\Delta V_1(n)$ ve $\Delta V_2(n)$ hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\Delta V_1(n) &= \Delta\left[x(n)-p(n)f(x(n-\tau(n)))-\sum_{i=n-\theta}^{n-1}q(i+\theta)g(x(i))\right].\\
&\left[x(n+1)-p(n+1)f(x(n+1-\tau(n+1)))-\sum_{i=n+1-\theta}^{n}q(i+\theta)g(x(i))\right.\\
&\left.+x(n)-p(n)f(x(n-\tau(n)))-\sum_{i=n-\theta}^{n-1}q(i+\theta)g(x(i))\right]\\
&= -q(n+\theta)\left[2x(n)g\left(x(n)\right)-2p(n)f(x(n-\tau(n)))g\left(x(n)\right)\right.\\
&\left.-\sum_{i=n-\theta}^{n-1}q(i+\theta)2g(x(i))g\left(x(n)\right)-q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right)\right]\\
&\leq -q(n+\theta)\left[2x(n)g\left(x(n)\right)-p(n)f^2(x(n-\tau(n)))-p(n)g^2\left(x(n)\right)\right.\\
&\left.-g^2\left(x(n)\right)\sum_{i=n-\theta}^{n}q(i+\theta)-\sum_{i=n-\theta}^{n-1}q(i+\theta)g^2(x(i))\right]
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\Delta V_2(n) &= -q(n+\theta)\sum_{j=n-\theta}^{n-1}q(j+\theta)g^2(x(j))\\
&+q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right)\sum_{i=n+1-\theta}^{n}q(i+2\theta)\\
&+\left(\alpha+\epsilon\right)q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right)-\left(\alpha+\epsilon\right)q(n-\tau(n)+\theta)g^2\left(x(n-\tau(n))\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $q(n)$ artmayan ve $n-\tau(n)<n$ olduğundan, $q(n-\tau(n))\geqslant q(n)$ yazılabilir. Böylece $\Delta V_2(n)$ yeniden düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
\Delta V_2(n) &\leq -q(n+\theta)\sum_{j=n-\theta}^{n-1}q(j+\theta)g^2(x(j))\\
&+q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right)\sum_{i=n+1-\theta}^{n}q(i+2\theta)\\
&+\left(\alpha+\epsilon\right)q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right)-\left(\alpha+\epsilon\right)q(n+\theta)g^2\left(x(n-\tau(n))\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.24) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\Delta V(n) &= \Delta V_1(n) + \Delta V_2(n) \\
&\leq -q(n+\theta)\Big[2x(n)g\left(x(n)\right) - p(n)f^2\left(x(n-\tau(n))\right) - p(n)g^2\left(x(n)\right) \\
&\quad - \sum_{i=n-\theta}^{n} q(i+\theta)g^2\left(x(n)\right)\Big] + q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right) \sum_{i=n+1-\theta}^{n} q(i+2\theta) \\
&\quad +(\alpha+\epsilon)q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right) - (\alpha+\epsilon)q(n+\theta)g^2\left(x(n-\tau(n))\right) \\
&= -q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right)\left[\frac{2x(n)}{g\left(x(n)\right)} - p(n) - \sum_{i=n-\theta}^{n+\theta} q(i+\theta) - (\alpha+\epsilon)\right] \\
&\leq -q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right)\left[\frac{2}{L} - 2\left(\alpha+\epsilon\right) - \sum_{i=n-\theta}^{n+\theta} q(i+\theta)\right] \\
&= -q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right)\left[\frac{2}{L} - \sum_{i=n-\theta}^{n+\theta} q(i+\theta) - 2\left(\alpha+\epsilon\right)\right] \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.22)'den $\Delta V(n) \leqslant 0$ elde edilir. $V(n) > 0$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} V(n) = \delta$ mevcuttur.

(4.22) ve (4.25)'den,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q(n+\theta)g^2\left(x(n)\right) < \infty \qquad (4.26)$$

dur. Herhangi pozitif bir m tamsayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n-m}^{n-1} q(i+\theta)g^2\left(x(i)\right) = 0$$

yazılabilir. Şimdi $\lim_{n\to\infty} V_2(n) = 0$ olduğunu gösterelim.

(4.22)'den, $n \geq n_2 + \theta$ olacak biçimde yeterince büyük pozitif $n_2 \geq n_0$ tamsayısı vardır ve

$$
\begin{aligned}
0 \;\leq\; V_2(n) &= \sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+2\theta) \sum_{j=i}^{n-1} q(j+\theta) g^2(x(j)) \\
&+ (\alpha+\epsilon) \sum_{i=n-\tau(n)}^{n-1} q(i+\theta) g^2(x(i)) \\
\leq\; & \sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+2\theta) \sum_{j=n-\theta}^{n-1} q(j+\theta) g^2(x(j)) + \frac{2}{L} \sum_{i=n-\tau(n)}^{n-1} q(i+\theta) g^2(x(i)) \\
\leq\; & \frac{2}{L} \left[\sum_{j=n-\theta}^{n-1} q(j+\theta) g^2(x(j)) + \sum_{i=n-\tau(n)}^{n-1} q(i+\theta) g^2(x(i)) \right]
\end{aligned}
$$

dir. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} V_2(n) = 0$ dır.

Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} V(n) = \lim\limits_{n\to\infty} V_1(n) = \delta$ eşitliği gerçeklenir. Yani,

$$
\lim_{n\to\infty} \left[x(n) - p(n) f(x(n-\tau(n))) - \sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+\theta) g(x(i)) \right]^2 = \delta \qquad (4.27)
$$

dır. $y(n) = x(n) - p(n) f(x(n-\tau(n))) - \sum\limits_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+\theta) g(x(i))$ alınırsa,

$$
\lim_{n\to\infty} y^2(n) = \delta
$$

ve

$$
\lim_{n\to\infty} |y(n)| = \delta^{\frac{1}{2}}
$$

elde edilir. Simdi $\{y(n)\}$ dizisinin yakınsak olduğu gösterilsin. $\delta = 0$ ise bu durum aşikardır. $\delta > 0$ ise, $\{y(n)\}$ 'nin nihai pozitif veya nihai negatif olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer değilse, $0 < \epsilon < \delta^{\frac{1}{2}}$ olacak biçimde ϵ sayısı mevcuttur.

$$
\delta^{\frac{1}{2}} - \epsilon < |y(n)| < \delta^{\frac{1}{2}} + \epsilon, \quad n \geq N, \qquad (4.28)
$$

ve

$$
A = \{n \geq N : y(n) < 0\}, \qquad B = \{n \geq N : y(n) > 0\}
$$

olacak biçimde N pozitif tamsayısı alınsın. $\{y(n)\}$ nihai negatif ya da nihai pozitif olmadığından, A ve B sınırsızdır. Böylece $N \leq n_1 < n_2 < ...< n_j < ...$, $n_j \in B$, $n_j + 1 \in A$ olacak biçimde ıraksak bir $\{n_j\}$ tamsayılar dizisi alınabilir. Buradan $y(n_j + 1) < 0$ ve $y(n_j) > 0$. İlaveten (4.28) den,

$$2\left(-\delta^{\frac{1}{2}} - \epsilon\right) < y(n_j + 1) - y(n_j) < 2\left(-\delta^{\frac{1}{2}} + \epsilon\right), \quad j \geq 1$$

sağlanır ve (4.21) den,

$$0 < 2\left(\delta^{\frac{1}{2}} - \epsilon\right) < q(n_j + \theta)g(x(n_j)) < 2\left(\delta^{\frac{1}{2}} + \epsilon\right), \quad j \geq 1 \qquad (4.29)$$

dir.

Diğer taraftan, (4.26) ve (4.29)'dan, $\{g\left(x\left(n_j\right)\right)\}$'nin sıfıra yakınsak olduğu söylenebilir. $(H11)$'den, $\{q(n)\}$ sınırlıdır. Böylece $j \to \infty$ iken

$$q(n_j + \theta)g\left(x\left(n_j\right)\right) \to 0$$

bulunur ve bu da (4.29) ile çelişir. Buradan $\{y(n)\}$ dizisi

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{n\to\infty}\left[x(n) - p(n)f(x(n-\tau(n))) - \sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+\theta)g(x(i))\right] = \beta \qquad (4.30)$$

olacak biçimde yakınsak olmalıdır; burada $\beta = \sqrt{\delta}$ veya $\beta = -\sqrt{\delta}$ sonludur. İlaveten, (4.21) ve $y(n)$'nin tanımından

$$\begin{aligned}\sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+\theta)g(x(i)) &= -\sum_{i=n-\theta}^{n-1} \Delta y(i) \\ &= y(n-\theta) - y(n)\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ halinde limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n-\theta}^{n-1} q(i+\theta)g(x(i)) = 0$$

bulunur. Böylece (4.30)'dan,

$$\underset{n\to\infty}{lim}\left[x(n)-p(n)f(x(n-\tau(n)))\right]=\beta \tag{4.31}$$

olduğu açıktır. Şimdi $\{|x(n)|\}$'in sınırlı olduğu gösterilsin. Eğer $\{|x(n)|\}$ sınırlı değilse, $l\to\infty$ halinde $|x(n_l)|\to\infty$ ve

$$|x(n_l)|=\sup_{n_0-\tau(n_0)\leq\, n\,\leq\, n_l}|x(n)|$$

olacak biçimde ıraksak $\{n_l\}$ tam sayı dizisi mevcuttur. Buradan $l\to\infty$ halinde

$$\begin{aligned}|x(n_l)-p(n_l)f(x(n_l-\tau(n_l)))| &\geqslant |x(n_l)|-p(n_l)\,|f(x(n_l-\tau(n_l)))|\\ &\geqslant |x(n_l)|\,(1-(\alpha+\epsilon)\,L)\to\infty\end{aligned}$$

elde edilir ve bu da (4.31) ile çelişir. Böylece $\{|x(n)|\}$ sınırlıdır.

Teorem 4.2.2. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

$(H12)$ $\underset{n\to\infty}{lim}\ p(n)=\alpha<1,$

$(H13)$ $\underset{n\to\infty}{lim\,sup}\left[2\alpha+\sum_{i=n-\theta}^{n+\theta}q\,(i+\theta)\right]<2.$

Bu durumda

$$\Delta\left[x(n)-p(n)x(n-\tau(n))\right]+q(n)x(n-\theta)=0 \tag{4.32}$$

denkleminin her çözümü sınırlıdır ve $n\to\infty$ halinde bir sabite yakınsar.

İspat. Teorem 4.2.1'deki yol izlenirse, $\{|x(n)|\}$ 'nin sınırlı olduğu bulunur. Şimdi, $\underset{n\to\infty}{lim}\,x(n)$ mevcut ve sonlu olduğu gösterilsin. $(H12)$'den, $n>n_3$ için $p(n)<1$ olacak biçimde yeterince büyük bir n_3 bulunabilir.

$$\lambda_1=\underset{n\to\infty}{lim}\sup x(n),\qquad \lambda_2=\underset{n\to\infty}{lim}\inf x(n)$$

alınsın ve $i \to \infty$ halinde $u_i \to \infty$ ve $v_i \to \infty$ ve

$$\lambda_1 = \underset{i\to\infty}{lim} x(u_i), \qquad \lambda_2 = \underset{i\to\infty}{lim} x(v_i)$$

olacak biçimde $\{u_i\}$ ve $\{v_i\}$ tamsayı dizileri seçilsin. $n > n_3$ için,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \underset{i\to\infty}{lim} x(u_i) = \underset{i\to\infty}{lim} \left[x(u_i) - p(u_i)x(u_i - \tau(u_i)) + p(u_i)x(u_i - \tau(u_i))\right] \\ &= \beta + \alpha \underset{i\to\infty}{lim} x(u_i - \tau(u_i)) \leq \beta + \alpha\lambda_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \underset{i\to\infty}{lim} x(v_i) = \underset{i\to\infty}{lim} \left[x(v_i) - p(v_i)x(v_i - \tau(v_i)) + p(v_i)x(v_i - \tau(v_i))\right] \\ &= \beta + \alpha \underset{i\to\infty}{lim} x(v_i - \tau(v_i)) \geq \beta + \alpha\lambda_2 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\lambda_1 \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \leq \lambda_2$$

elde edilir ve $\lambda_1 \geq \lambda_2$ olduğundan

$$\lambda_1 = \frac{\beta}{1-\alpha} = \lambda_2$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3. $(H12)$ ve $(H13)$ sağlansın. Bu durumda (4.32)'nin her salınımlı çözümü sınırlıdır ve $n \to \infty$ halinde sıfıra yakınsar.

İspat. $x(n)$, (4.32)'nin salınımlı bir çözümü olsun. Teorem 4.2.2'den $x(n)$ sınırlıdır ve $n \to \infty$ halinde μ gibi bir sabite yakınsar.

$$\mu_1 = \underset{n\to\infty}{lim} \sup x(n), \qquad \mu_2 = \underset{n\to\infty}{lim} \inf x(n)$$

alınırsa $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ yazılabilir. İlaveten $x(n)$ salınımlı olduğundan, $\mu_1 \geq 0$ ve $\mu_2 \leq 0$ dır. Böylece

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1.

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\sum_{i=n-\theta}^{n+\theta} q\left(i+\theta\right) \right] < 2$$

ise bu durumda

$$\Delta x(n) + q(n)x(n-\theta) = 0$$

denkleminin her çözümü $n \to \infty$ halinde bir sabite yakınsar.

Örnek 4.2.1. Değişken gecikmeli neutral

$$\Delta\left[x(n) - e^{-n}x(n-2n)\right] + (n-2)\left(\frac{1}{n(n+1)} + e^{-n}\left(\frac{n-ne^{-1}+1}{n(n+1)}\right)\right)x(n-2) = 0, \quad n \geq 5 \tag{4.33}$$

fark denklemi ele alınsın. Burada $p(n) = (e^{-n})$ ve $q(n) = (n-2)\left(\frac{1}{n(n+1)} + e^{-n}\left(\frac{n-ne^{-1}+1}{n(n+1)}\right)\right)$'dir. Teorem 4.2.2'nin tüm koşulları sağlanır. Böylece (4.33)'ün tüm çözümleri $n \to \infty$ halinde bir sabite yakınsar. $x(n) = \frac{1}{n}$ bu özellikleri sağlayan bir çözümdür.

Örnek 4.2.2. Neutral gecikmeli

$$\Delta x(n) + \left(\frac{n-1}{ne} - \frac{n-1}{(n+1)e^2}\right)x(n-1) = 0, \; n \geq 2 \tag{4.34}$$

denklemi ele alınsın. Sonuç 4.2.1'in tüm koşulları sağlanmaktadır. Böylece $n \to \infty$ halinde (4.34)'ün tüm çözümleri bir sabite yakınsar. $x(n) = \frac{e^{-n}}{n}$ böyle bir çözümdür.

Örnek 4.2.3. Değişken gecikmeli neutral

$$\begin{aligned}\Delta\left[x(n)-\frac{n-2}{8n}\left(1+\cos^2 x(n-(2)^n)\right)x(n-(2)^n)\right] \\ +\frac{1}{n}(2+\sin^2 x(n-2))x(n-2)=0,\ n\geq 3.\end{aligned} \tag{4.35}$$

denklemi ele alınsın. (4.35) ile (4.19) denklemi karşılaştırılırsa,

$$p(n)=\frac{n-2}{8n},\quad f(x)=(1+\cos^2 x)x,\quad g(x)=(2+\sin^2 x)x\quad \text{ve}\quad q(n)=\frac{1}{n}$$

olduğu görülür. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)=\frac{1}{8}<\frac{1}{3}$,

$|x|\leq|(1+\cos^2 x)x|\leq\left|(2+\sin^2 x)x\right|\leq 3\,|x|$,

$x\neq 0$ için, $x^2(2+\sin^2 x)>0$, $x^2(1+\cos^2 x)>0$ ve $\limsup\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}+\sum\limits_{i=n-2}^{n+2}\frac{1}{i+2}\right]<\frac{2}{3}$ dir. Böylece Teorem 4.2.1'in tüm koşulları sağlanır ve (4.35) denkleminin her çözümü sınırlıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında fark denklemleri ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir. Ardından neutral gecikmeli denklemlerin daha iyi anlaşılabilmesi adına bu tür denklemlerin yapıları tanıtılmaya çalışılmıştır. Fark denklemleri teorisinin diferensiyel denklemler teorisinin ayrık benzeri olduğu gerçeğine dikkat çekebilmek adına tanımlar verilirken diferensiyel denklem teorisiyle karşılaştırmalar yapılmıştır. Ardından tezin özgün kısmına geçilmiştir.

Tezin özgün kısmı olan üçüncü ve dördüncü bölümlerde üç ana neutral gecikmeli fark denklemi ele alınarak bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılık, sınırlılık ve asimptotik davranışları hakkında teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Riccati dönüşümü kullanılarak ikinci basamaktan neutral gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı üzerinde durulmuştur. Konu ile ilgili önceden yapılan çalışmalardan bahsedilmiş ve ele alınan denklemin özel durumlarına dair sonuçlar verilerek örneklerle desteklenmiştir. Dördüncü bölüm ele alınan denklem tipi ve inceleme durumuna göre kendi içinde iki kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda ikinci basamaktan neutral gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışları Bihari eşitsizliğinin ayrık benzeri yardımıyla incelenmiştir. Ayrıca incelenen denklemin özel halleri ele alınmış ve üçüncü basamaktan neutral gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışları için bir teorem verilmiştir. Son kısımda ise birinci basamaktan neutral gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin sınırlılık durumları ayrık Lyapunov fonksiyonları yardımıyla araştırılmıştır. Tez çalışmasının daha iyi anlaşılabilmesi adına konu ile ilgili örnekler verilmiştir.

Neutral fark denklemleri alanında yapılan bu tez çalışmasının konu hakkında inceleme yapmak isteyen kişilere yardımcı olacağı ve bundan sonra yapılacak olan çalışmalara da ışık tutacağı düşünülmektedir. Bu alanda ortaya çıkan Türkçe kaynak sıkıntısının da bu tez yardımıyla aşılabileceği umulmaktadır. Bu çalışmada ele alınan denklemlerin farklılaştırılarak konu ile ilgili yeni çalışmaların da yapılabileceği ve konunun geliştirilebileceği beklenmektedir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., Berezansky, L., Braverman, E. and Domoshnitsky, A. 2012. Nonoscilation Theory of Functional Differential Equations with Applications. Springer, 520 p., New York.

Agarwal, R.P. and Wong, P.J.Y. 1997. Advanced Topics in Difference Equations. Kluwer Academic Publishers, 510 p., Drodrecht.

Agarwal, R.P and Karakoç, F. 2010. Oscillation theory for impulsive partial difference equations. Communications in Applied Analysis, 14, 59-72.

Agarwal, R.P., Bohner, M., Grace, S.R. and Regan, D.O. 2005. Discrete Oscillation Theory. Hindawi Publishing Corporation, 961 p., New York.

Agarwal, R.P. 2000. Difference Equations and Inequalities. Marcel Dekker, 970 p., New York.

Akhmet, M.U. 2013. Almost periodic solutions of second order neutral differential equations with functional response on piecewise constant argument. Discontinuity, Nonlinearity and Complexity, 2(4), 369-388.

Akhmet, M.U. Arugaslan, D. and Yılmaz, E. 2011. Method of Lyapunov functions for differential equations with piecewise constant delay. Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 4554-4560.

Akhmet, M.U. and Yılmaz, E. 2010. Global attractivity in impulse neural networks with piecewise constant delay. In:Proceedings of neural, parallel and scientific computations. Dynamics Publishers, 11-18.

Akın, Ö. ve Bulgak, H. 1998. Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi. Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi, 180 s., Konya.

Arino, O. and Pituk, M. 2001. More on linear differential systems with small delays. Journal of Differential Equations, 170, 381-407.

Bainov, D.D and Mishev, D.P. 1991. Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay, CRC Press, 288 p., England.

Bastinec, J., Berezansky, L., Diblik, J. and Z. Smarda. 2011. A final result on the oscillation of solutions of the linear discrete-delayed equation $\Delta x(n) = -p(n)x(n-k)$ with a positive coeffficient. Abstract and Applied Analysis, vol. 2011, Article ID 586328.

Bereketoğlu, H. and Huseynov, A. 2009. Boundary value problems for nonlinear second-order difference equations with impulse. Applied Mathematics and Mechanics, 30(8), 1045–1054.

Bereketoğlu, H. and Huseynov, A. 2010. Convergence of solutions of nonhomogeneous linear difference systems with delays. Acta Applicandae Mathematicae, 110(1), 259-269.

Bereketoğlu, H. and Karakoç, F. 2005. Some results on boundedness and stability of a third order differential equations with delay. Anaele Stiintifice Ale Univ. Al. I. Cuzalasi, 51(2), 245-258.

Bereketoğlu, H. and Karakoç, F. 2008. Asymptotic constancy for impulsive delay differential equations. Dynamics Systems and Applications, 17, 71-84.

Bereketoğlu, H. and Pituk, M. 2003. Asymptotic constancy for nonhomogeneous linear differential equations with unbounded delays, Discrete and Continuous Dynamical Systems, A Supplement Volume, 100-107.

Bereketoğlu, H. ve Kutay, V. 2012. Fark denklemleri, 304 s., Gazi Kitabevi.

Cermak, J. 2000. Asymptotic behaviour of solutions of some differential equations with an unbounded delay. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2, 1-8.

Chatzarakis, G. E. and Miliaras, G. N. 2011. Convergence and divergence of the solutions of a neutral difference equation. Journal of Applied Mathematics, vol 2011, Article ID 262316, 18.

Chen, S. and Erbe, L.H. 1989. Riccati techniques and discrete oscillation. Journal of Mathematics and Applications, 142, 468-487.

Chen, S.Z. and Erbe, L. 1994. Oscillation results for second order scalar and matrix difference equation. Computers and Mathematics with Applications, 28, 55-69.

Chen, M.P., Lalli, B.S. and Yu, J.S. 1995. Oscillation in neutral delay difference equations with variable coefficients. Computers and Mathematics with Applications, 29(3), 5–11.

Chen, M.P. and Liu, B. 1996. Asymptotic behaviour of solutions of first order nonlinear delay difference equations. Computers and Mathematics with Applications, 32(4), 9-13.

Chen, M.P. and Zhang, B. G. 1993. The existence of bounded positive solutions of delay difference equations. Pan American Mathematical Journal, 3(1), 79-94.

Cheng, J. 2007. Kamenev type oscillation criteria for delay difference equations. Acta Mathematica Scientica, 27(3), 574-580.

Cohen, D.S. 1967. The asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations. Proceedings of the American Mathematical Society, 18, 607-609.

Diblik, J. 1998. Behaviour of solutions of linear differential equations with delay. Archivum Mathematicum (Brno), 34, 31-37.

Diblik, J. 1999. A criterion for convergence of solutions of homogeneous delay linear differential equations. Annales Polonici Mathematici, LXXII.2, 115-130.

Dzurina, J. 2002. Asymptotic behavior of solutions of neutral nonlinear differential equations. Archıvum Mathematıcum, 38, 319-325.

Elaydi, S. 1999. An Introduction to Difference Equations. Springer-Verlag, 540 p., NewYork.

Erbe, L.H. and Zhang, B.G. 1989. Oscillation of discrete analogues of delay equations. Differential and Integral Equations, 2, 300-309.

Erneux, T. 2009. Applied Delay Differential Equations. Springer, 204 p., London.

Gao, Y. and Zhang, G. 2001. Oscillation of nonlinear first order difference equations. Applied Mathematics E-Notes, 1, 5-10.

Gao, Q.L. 2004. A class of discrete type Bellman-Bihari inequalities and their application. Journal of Mathematical Research and Exposition, 24(3), 493-499.

Georgiou, D.A., Grove, E.A. and Ladas, G. 1989. Oscillation of neutral difference equations. Applied Analysis, 33, 243-253.

Georgiou, D.A., Grove, E.A. and Ladas, G. 1991. Oscillation of neutral difference equations with variable coefficients. Lecture Notes in Pure Applications, Math. Dekker, New York, 127, 165-173.

Gil, I.M. 2014. Stability of Neutral Functional Differential Equations. Atlantis Press, 310 p., Israel.

Goldberg, S. 1986. Introduction to Difference equations with Illustrative examples from Economics, Psychology and Sociology, 288 p., New York.

Gopalsamy, K. 1992. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Kluwer Academic, 501 p., Dordrecht.

Gopalsamy, K. and Zhang, B.G. 1989. On the delay differential equations with impulses. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 139(1), 110-122.

Graef, J.R., Shen, J. H. and Stavroulakis, I. P. 2002. Oscillation of impulsive neutral delay differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 268, 310-333.

Györi, I. and Ladas, G. 1991. Oscillation Theory of Delay Difference Equation with Applications, 368 p., Oxford.

Györi, I, Karakoç, F. and Bereketoğlu, H. 2001. Convergence of solutions of a linear impulsive differential equations system with many delays. Dynamics of Continuous, Dicrete and Impulsive Systems Series A, 18, 191-2002.

Hale, J.K. and Lunel, S.M. 1993. Introduction to Functional Differential Equations. 447 p., Springer Science & Business Media.

Hartman, P. 1978. Difference equations; disconjugacy, principal solutions, Green's functions, complete monotonicity. Transaction of the American Mathematical Society, 246, 1-30.

Hooker, J. and Patula, W. 1983. A second order nonlinear difference equation: oscillation and asymptotic behaviour. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 9, 9-29.

Hull, T.E. and Luxemburg, W.A.J. 1960. Numerical Methods and existence theorems for ordinary differential equations. Numerische Mathematik, 2, 30-41.

Hung, D. C. 2008. Oscillation and convergence for a neutral difference equation. Journal of Mathematical Physics, 24, 133-143.

Jaros, J. and Kusano, T. 1991. Oscillation of solutions of a class of first order functional differential equations of neutral type. Differential and Integral Equations, 5, 425-436.

Jinfa, C. 2007. Kamenev-type oscillation criteria for delay difference equations. Acta Mathematica Scientia (Series B), 27(3), 574-580.

Jiang, F. and Shen, J. 2012. Asymptotic behaviors of nonlinear neutral impulsive delay differential equations with forved term. Kodai Mathematical Journal, 35(1), 126-137.

Jiang, J. 2003. Oscillation of second order nonlinear neutral delay difference equations. Applied Mathematics and Computation, 146, 791-801.

Karakoç, F. and Bereketoğlu, H. 2009a. Solutions of delay differential equations by using differential transform method. International Journal of Computer Mathematics, 86, 914-923.

Karakoç, F. and Bereketoğlu, H. 2009b. Some results for linear impulsive delay differential equations. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A, 16, 313-326.

Kelley, W.G. and Peterson, A.C. 1991. Difference Equations An Introduction with Applications, 540 p., New York.

Kulenovic, M.R.S. and Budinevic, M. 1984. Asymptotic analysis of nonlinear second order difference equation, 30, 39-52.

Kuang, Y. 1993. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Academic Press, 398 p., USA.

Kutay, V. and Bereketoğlu, H. 2014. Oscillation of a class of second order neutral difference equations with delays. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 6(2), 23-31.

Kutay, V. 2010. Fark Denklemleri, Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

Ladas, G. 1990. Recent developments in the oscillation of delay difference equations. Differential Equations: Stability and Control, Marcel Dekker. 321-332.

Ladas, G. and Sficas, Y. G. 1986. Oscillations of neutral delay differential equations. Canadian Mathematical Bulletin, 29(4), 438-445.

Ladas, G. and Schults, S. W. 1989. On oscillations of neutral equations with mixed arguments. Hiroshima Mathematical Journal, 19(2), 409-429.

Lakshmikantham, V. and Trigiante, D. 1988. Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications, New York.

Lallı, B.S. and Zhang, B.G. 1992. On existence of positive solutions and bounded oscillations for neutral difference equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 166, 271-287.

Lallı, B. S., Zhang, B. and Lı, J. Z. 1991. On the oscillation of solutions of neutral difference equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 158, 213-233.

Liu, B. and Yan, J. 1996. Oscillatory and asymptotic behaviour of second order nonlinear difference equations. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2; 39; 523-535.

Li, F.M., Tian, Y., Liu, Y.J. and Sun, X. D. 2003. Existence and asymptotic property of the nonoscillatory solution to a nonlinear neutral difference equation with multiple delay. Journal of Hebei Normal University Natural Science Edition, 27(2), 113-115.

Li, H.J. and Yeh, C.C. 1998. Oscillation criteria for second order neutral difference equations. Computers and Mathematics with Applications, 36, 123-132.

Liu, Y. and Ge,W. 2004. Asymptotic behaviour of solutions of forced nonlinear neutral difference equations. Journal of Applied Mathematics and Computing,16, 37-51.

Liu, X.Z. and Shen, J. H. 1999. Asymptotic behavior odd solutions of impulsive neutral differential equations. Applied Mathematics Letters, 12, 51-58.

Li, W.T. 1998. Oscillation of higher order neutral nonlinear difference equations. Applied Mthematical Letters, 11, 1-8.

Mickens, R. 1990. Difference Equations. Van Nostrand , Reinhold , 448 p., New York.

Migda, M. and Migda, J. 2005. Asymptotic properties of solutions of second order neutral difference equations. Nonlinear Analysis, 63, 789-799.

Mikolajski, J. 1998. Asymptotic behavior of oscillatory solutions of a second order difference equation. Communications in difference equations, 265–272.

Miller, K.S. 1968. Linear Difference Equations, 105 p., New York.

Murakami, K. 1997. Asymptotic constancy for systems of delay differential equations. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 30, 4595-4606.

Pachpatte, B.G. 1973. On the discrete generalisation of Gronwall's inequality. The Journal of the Indian Mathematical Society, 37, 147-156.

Pachpatte, B.G. 1977. On some nonlinear discrete inequalities of Gronwall type. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 5, 305-315.

Pachpatte, B.G. 2000. Bounds for solutions of certain finite difference equations. Research Group in Mathematical Inequalities and Applications research report collection, 3(3).

Pandian, S. and Balachandran, Y. 2011. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear neutral delay difference equations with positive and negative coefficients. Far East Journal of Applied Mathematics, 59(1), 45–61.

Parhi, N. and Tripathy, A.K. 2000. Oscillation criteria for forced non linear neutral delay difference equations of first order. Differential Equations Dynamics Systems, 8, 81-97.

Parhi, N. and Tripathy, A.K. 2003. Oscillation of forced nonlinear neutral delay difference equations of first order, Czechoslovak Mathematical Journal, 53(1), 83-10.

Peng, M. 2002. Oscillation theorems of second-order nonlinear neutral delay difference equations with impulses. Computers and Mathematics with Applications, 44, 741-748.

Philos, C.G. and Purnaras, I.K. 1995. Asymptotic behavior of solutions of second order nonlinear differential equations. Nonlinear Analysis, 24, 81-90.

Popenda, J. 1985. On some discrete Gronwall type inequalities. Fasciculi Mathematici, 14, 109-114.

Popenda, J. and Werbowski, J. 1980. On the asymptotic behavior of the solutions of difference equations of second order. Commentationes Mathematicae Prace Matematyczne, 22(1), 135-142.

Raja, P.S. 2011. Oscillatory and asymptotic behavior of nonlinear neutral difference equations. Thesis. 110 p., Periyar University.

Rath, R.N., Padhi, S. and Barik, B.L.S. 2008. Oscillatory and asymptotic behaviour of a homogeneous neutral delay difference equation of second order. Bulletin of the Institute of Mathematics, 3(3), 453-467.

Rath, R.N. and Padhy, L.N. 2005. Necessary and sufficient conditions for oscillation of solutions of a first order forced nonlinear difference equation with several delays, Fasculi Mathematici. 35, 99-113.

Rath, R.N. and Barık, B.L.S. 2010. Asymptotic behavior of solutions of a second order neutral equation of discrete type with oscillating coefficients. Differential Equations and Applications, 2(2), 177-188.

Rogovchenko, S. and Rogovchenko, S.1998, Asymptotics of solutions for a class of second order nonlinear differential equations. Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, 36, 157-164.

Saker, S.H. and Zhang, B.G. 2007. Oscillation of second order nonlinear delay damped difference Equations. Acta Mathematica Sinica, 23(4), 715-722.

Saker, S. H. 2005. Oscillation criteria of second order half linear delay difference equations. Kyungpook Mathematical Journal, 45(4), 579-594.

Saker, S.H. 2003a. Kamenev-Type oscillation criteria for hyperbolic nonlinear neutral delay difference equations. Nonlinear Studies, 10(3).

Saker, S.H. 2003b. Oscillation of second order nonlinear delay difference equations. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 40(3), 489-501.

Saker, S.H. 2003c. New oscillation criteria for second order nonlinear neutral delay difference equations. Applied Mathematics and Computation, 142, 99-111.

Saker, S.H. 2003d. Oscillation theorems for second order nonlinear delay difference equations. Periodica Mathematica Hungarica, 47(1-2), 201-213.

Shan, W. and Ge, W. 2004. Oscillation of neutral difference equations with positive and negative coefficients. Computers and Mathematical with Applications. 47, 1647-1657.

Shen, J., Liu, Y and Li, J. 2007. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear neutral differential equations with impulses. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332, 179-189.

Smith, H. 2011. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. 172 p., Springer New York Dordrecht.

Sternal, A. and Szmanda B. 1996. Asymptotic and oscillatory behavior of certain difference equations. Le Matematiche, 1, 77-86.

Sternal, A., Szafransic, Z. and Szmanda, B. 1998. Oscillatory and asymptotic behavior some difference equations. 97, 66-74.

Sun, Y. G and Saker, S. H. 2005. Oscillation for second order nonlinear neutral delay difference equations. Applied Mathematics and Computation, 163, 909-918.

Szafranski, Z. and Szmanda, B. 1995. Oscillation and asymptotic behavior of certain nonlinear difference equations. Rivista di Matematica della Universita di Parma, 5(4), 231-240.

Szafranski, Z. and Szmanda, B. 1997. Oscillation theorems for some nonlinear difference equations. Applied Mathematics and Computation, 83, 43-52.

Szmanda, B. 2000. Oscillation theorems for nonlinear second order difference equations with deviating coeffcients. Computers and Mathematical with Applications, 39, 169-181.

Tang, X.H. 2002. Asymptotic behavior of solutions for neutral difference equations. Computers and Mthematics with Applications, 44, 301-315.

Tang, X.H. and Cheng, S.S. 2004. Positive solutions of a neutral difference equations with positive and negative coefficients. Georgian Mathematical Journal, 11, 177-185.

Tang, X. H. and Yu. J. S. 1999. Oscillations of delay difference equations. Computers and Mathematics with Applications, 37 (7), 11-20.

Tang, X.H. and Yu, J.S. 2001. Oscillation and stability for a system of linear impulsive delay difference equations. Mathematical Applications (Wuhan), 14(1), 28-32.

Thang, X.H. and Liu, Y.J. 2001. Oscillation for nonlinear delay difference eqauations. Tamkang Journal of Mathematics, 32 (4), 275-280.

Thandapani, E., Arul R. and Raja, P. S. 2002. Oscillatory and asymptotic behavior of solutions of non-homogeneous neutral difference equations. Studies of the University of Zilina, Mathematical Series, 15(1), 67–82.

Thandapani, E. and Kumar, P. M. 2007. Oscillation and nonoscillation of nonlinear neutral delay difference equations. Tamkang Journal of Mathematics, 38(4), 323–333.

Thandapani, E. and Lalli, B.S. 1994. Asymptotic behavior and oscillations of difference equations of Volterra type. Applied Mathematical Letters, 7, 89-93.

Thandapani, E. and Sanadarani, P. 2009. On the asymptotic and oscillatory behavior of second order nonlinear neutral difference equations. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 26, 19.

Thandapani, E. and Sundaram, P. 1994. Oscillation properties of first order nonlinear functional difference equation of neutral type. 36, 59-71.

Thandapani, E. and Sundaram, P. 1996. Asymptotic and oscillatory bahavior of solutions of first order nonlinear neutral difference equations. Rivis. Math. Pure Applications, 18, 93-105.

Thandapani, E. 1992. Asymptotic and oscillatory behavior of second order nonlinear neutral delay difference equations. Riv. Mat. Univ. Parma, 5, 105-113.

Thandapani, E. 1994. Asymptotic and oscillatory behavior of solutions of nonlinear neutral delay difference equation. Utilitas Mathematics, 45, 237-244.

Tripathy, A.K. 2009. Some oscillation results for second order nonlinear dynamic equations of neutral type. Nonlinear Analysis. 71, 1727-1735.

Tripathy, A.K. 2010. Oscillation in nonlinear neutral difference equations with positive and negative coefficients. International Journal of Difference Equations, 5(2), 251-265.

Tripathy, A. K. and Panigrahi, S. 2010. Oscillation in nonlinear neutral difference equations with positive and negative coefficients. International Journal of Difference Equations. 5(2), 251–265.

Wang, X. 2006. Asymptotic behavior of solutions for neutral difference equations. Computers and Mthematics with Applications. 52, 1595-1602.

Wei, G.P. and Zou, Z.Z. 1999. Oscillation criteria for impulsive delay difference equations. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Normalis Hunanensis, 22 (2), 8-11.

Wei, G.P. 2000. Oscillation and nonoscillation for solutions of impulsive difference equations with several delays. Huaihua Shizhuan Xuebao. 19(5), 1-6.

Wei, G. 1999. Oscillation of solutions of impulsive neutral delay difference equations. Mathematical Theory and Applications, 19 (2), 119-121.

Wei, G. 2000. Oscillation of delay difference equations with impulses. Journal of Mathematical Study, 33(1), 61-64.

Wei, G. 2011. Asymptotic behavior results for nonlinear neutral delay difference equations. Applied Mathematics and Computation, 217, 7184–7190.

Wei, G. 2014. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear neutral delay differential equations. Tamkang Journal of Mathematics, 45(1), 21-30.

Wei, G and Shen, J. 2006. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear impulsive delay differential equations with positive and negative coefficients. Mathematical and Computer Modelling, 44, 1089-1096.

Wei, G. and Shen, J. 2010. Boundedness and asymptotic behaviour results for nonlinear difference equations with positive and negative coefficients. Computers and Mathematics with Applications. 60, 2469-2475.

Venkatesan, P. 2008. Oscillatory behavior of solutions of some neutral type difference equations. Perıyar University, Salem. India.

Yu, J.S. and Wang, Z.C. 1994. Asymptotic behavior and oscillation in neutral delay difference equations. Funkcialaj Ekvacıoj, 37(2), 241–248.

Yu, J.S. and Cheng, S.S. 1994. A stability criterion for a neutral difference equation with delay. Applied Mathematical Letters, 7(6), 75-80.

Zahariev, A.I. and Bainov, D.D. 1980. Oscillation properties of the solutions of a class of neutral type functional-differential equations. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 22(3), 365-372.

Zhang, G. and Cheng, S.S. 1997. Positive solutions of a nonlinear neutral difference equation, Nonlinear Analysis, 28(4), 729-738.

Zhang, B.G. and Saker, S.H. 2003. Kamanev type oscillation criteria for nonlinear neutral delay difference equation. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 34(11), 1571-1584.

Zhang, Y.Z. and Dang, X.Y. 1998. Oscillation of solutions of impulsive neutral delay differential equations. Acta Mathematica Sinica (Chin. Ser.), 41(1), 219–224.

Zhang, B.G. and Chen, G.D. 1996. Oscillation of certain second order nonlinear difference equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 199, 827-841.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Vildan KUTAY BOZKURT

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi: 15.12.1984

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Aydınlıkevler Lisesi (2003)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı (2007)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2010)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Sosyal Güvenlik Kurumu (2011-)

Yayınlar

V.Kutay and Hüseyin BEREKETOĞLU. 2014. Oscillation of a class of second order neutral difference equations with delays. Bull. Math. Anal. Appl., 6(2); 23-31