ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ASİMETRİK ETKİ FONKSİYONLU M-TAHMİN EDİCİLERİ: ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Mehmet Niyazi ÇANKAYA

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

11/12/2015

Mehmet Niyazi ÇANKAYA

ÖZET

Doktora Tezi

ASİMETRİK ETKİ FONKSİYONLU M-TAHMİN EDİCİLERİ: ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Mehmet Niyazi ÇANKAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Olcay ARSLAN

Bu tez çalışmasında, ε-çarpık üstel kuvvet dağılımlar ailesinin özel halleri olan ε-çarpık normal (ESN), ε-çarpık Laplace (ESL) ve bu ailenin ölçek karması sonucunun özel hali olan ε-çarpık t (ESt) dağılımları incelenmiştir. Bu dağılımların konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin en çok olabilirlik (ML) tahmin edicileri elde edilmiştir. ESN, ESL ve ESt dağılımlarının bu parametrelerinin ML tahmin edicilerinin dayanıklılık ve asimptotik özellikleri incelenmiştir. Huber *M*-tahmin yöntemine alternatif olarak asimetrik *M*-tahmin yöntemi önerilmiştir. Önerilen yöntem kullanılarak konum, ölçek ve çarpıklık parametreleri için asimetrik *M*-tahmin edicileri elde edilmiştir. Asimetrik *M*-tahmin edicilerinin dayanıklılık ve asimptotik özellikleri incelenmiştir. Kontaminasyon sınır değerleri c_1 ve c_2 sabit olmak koşulu ile asimetrik bir forma sahip veri setinde konum, ölçek ve çarpıklık parametreleri için asimetrik *M*-tahmin edicilerinin, *M*-tahmin edicilerinden daha etkin olduğu simülasyon çalışması sonucunda gözlenmiştir. Ayrıca, regresyon parametreleri ile dağılımların ölçek ve çarpıklık parametreleri için asimetrik *M*-tahmin edicileri ve ML tahmin edicileri elde edilmiştir. Sonlu örneklem için ESN, ESL ve ESt dağılımlarının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri ve bu parametrelerin asimetrik *M*-tahmin edicilerinin performansları her bir tahmin edicinin hata kareler ortalamasına göre karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma, regresyon, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin asimetrik *M*-tahmin edicileri ile ML tahmin edicileri içinde tekrar edilmiştir. Aynı zamanda, gerçek veri setlerine uygulaması gerçekleştirilmiştir.

Aralık 2015, 178 sayfa

Anahtar Kelimeler: Asimetrik *M*-Tahmin Yöntemi, Asimetrik Huber, Asimetrik *M*-Tahmin Edicileri, Asimptotik Varyans, En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi, Etki Fonksiyonu, Kırılma Noktası, *M*-Tahmin Yöntemi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

M-ESTIMATORS WITH ASYMMETRIC INFLUENCE FUNCTION: PROPERTIES AND THEIR APPLICATIONS

Mehmet Niyazi ÇANKAYA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Olcay ARSLAN

In this thesis, ε-skew normal (ESN) and ε-skew Laplace (ESL) distributions which are the special cases of ε-skew exponential power distribution family and the special case of scale mixture of this family, named as ε-skew t (ESt) distribution, are examined. The maximum likelihood (ML) estimators for the location, scale and skewness parameters of these distributions are obtained. The robustness and asymptotic properties of the ML estimators for these parameters of ESN, ESL and ESt distributions are examined. The asymmetric *M*-estimation method is proposed as an alternative method to Huber *M*-estimation method. Using the proposed method, the asymmetric *M*-estimators for the location, scale and skewness parameters are obtained. The robustness and the asymptotic properties of the asymmetric *M*-estimators are examined. If c_1 and c_2 which are the limit values for contamination are fixed, then it is observed from the simulation results that the asymmetric *M*-estimators are efficient than *M*-estimators for the data having the asymmetric form. Besides, the asymmetric *M*-estimators and the ML estimators for the regression parameters and the scale and skewness parameters of the distributions are obtained. For the finite sample case, the performances of ML estimators for location, scale and skewness parameters of ESN, ESL and ESt distributions and the asymmetric *M*-estimators for these parameters are compared according to the mean squared error criterion. These comparisons are also repeated for the asymmetric *M*-estimators and the ML estimators of regression, scale and skewness parameters. Finally, the proposed estimators are applied to the real data sets.

December 2015, 178 pages

Key Words: Asymmetric *M*-estimation method, Asymmetric Huber, Asymmetric *M*-Estimates, Asymptotic Variance, Maximum Likelihood Estimation Method, Influence Function, Breakdown Point, *M*-Estimation Method.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca; her türlü yardımı benden esirgemeyen, bilgi ve tecrübesiyle beni aydınlatan, bana bu çalışma konusunu vererek kendimi geliştirmemi sağlayan, bana zaman ayırarak beni sabırla dinleyip tezimi titizlikle inceleyen ve ilgisini benden esirgemeyen ayrıca kişisel problemlerimi çözmemde bana destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Olcay ARSLAN'a (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü) en kalbi duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Tez önerisinden itibaren değerli zamanlarını ayırarak yapılan tez izleme toplantılarına katılan, fikirleri ve önerileri ile tez çalışmamın olgunlaşmasında katkıda bulunan aynı zamanda iyi niyetli ve yapıcı yaklaşımları ile destek olan Sayın Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü) ve Sayın Prof. Dr. Meral ÇETİN (Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü) ve daha öncede tanıdığım çok güzel gönüllü olan Doç. Dr. Arzu ALTIN YAVUZ hocalarıma en içten samimi duygularla teşekkür ederim.

Tanıştığım günden beri kişisel hayatımla ilgili ve akademik konularda felsefi yaklaşımlarıyla fikirlerini benden esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Mehmet YILMAZ (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü) hocama çok teşekkür ederim.

Çalışmamı hazırlamam sırasında beni cesaretlendiren ve sürekli yanımda olup manevi desteklerini esirgemeyen zorlandığım dönemlerde beni sevgiyle kucaklayan değerli "CAN" dostlarım Abdullah YALÇINKAYA, Ömer ALTINDAĞ ve Yrd. Doç. Dr. Mahmut KARA'ya en içten sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Tanıdığım günden beri mutlu olduğum tezin her aşamasında yardımlarını ve güler yüzlerini esirgemeyen arkadaşlarım Yeşim GÜNEY, Yetkin TUAÇ, Hilmi PEKALP, Feyza GÜNAY, Dr. Fatma Gül AKGÜL, Dr. Fatma Zehra DOĞRU, Dr. Talha ARSLAN, Dr. Şükrü ACITAŞ, Dr. Yakup Murat BULUT'a şükranlarımı sunarım.

Ankara Üniversitesine geldiğim günden beri bana ablalık yapan Sayın Yrd. Doç. Dr. Rukiye DAĞALP ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Özlem TÜRKŞEN hocalarıma ve bana bilimsel sohbetleriyle destek olan Sayın Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK hocama teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bölüm Başkanımız, çocukluk anılarımı paylaştığım güzel Mersin'imizden olan Prof. Dr. Yılmaz AKDİ hocama da teşekkürü bir borç bilirim. Serap KIŞ ve Bilge KARABAŞ'a yazışmalardaki desteklerinden dolayı şükranlarımı sunarım. Hayat yolculuğunda, değeri paha biçilemez anıları 11/12/2015 tarihinde yaşatan tüm gönül dostlarımın her birine kalpten gelen duygularla göz yaşlarımı tutaraktan bu satırları yazabilirim.

Son olarak, çalışmalarım boyunca bana her konuda destek olan Ailemi en kalbi duygularla KUCAKLARIM. Canım Canım Kardeşim Sabri'nin Anısına...

Mehmet Niyazi ÇANKAYA
Ankara, Aralık 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ψ	ρ fonksiyonunun türevi
Ψ	ψ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör
Γ	Gamma fonksiyonu
Γ'	Digamma fonksiyonu
ρ	Amaç fonksiyonu
$\overset{P}{\rightarrow}$	Olasılıkta yakınsama
$\overset{D}{\rightarrow}$	Dağılımda yakınsama
~	Asimptotik denk

Kısaltmalar

AIC	Akaike bilgi kriteri
BIC	Bayesian bilgi kriteri
N_3	3-boyutlu asimptotik normal
N_p	p-boyutlu asimptotik normal
$ESEP$	ε-çarpık üstel kuvvet
ESH	Asimetrik Huber M-tahmin edicisi
ESN	ε-çarpık normal dağılım
ESL	ε-çarpık Laplace dağılım
$ESGt$	ε-çarpık genelleştirilmiş t dağılımı
ESt	ε-çarpık t dağılımı
E_F	F dağılım fonksiyonu üzerinden integral
GES	Büyük hata duyarlılığı (Gross error sensivity)
H_{ESN}	ESN dağılımının Hessian matrisi
H_{ESt}	ESt dağılımının Hessian matrisi
IF	Etki fonksiyonu
MSE	Hata kareler ortalamaları (Mean Square Error)
N	Normal dağılım
H	Huber M-tahmin edicisi

RE	Göreli etkinlik (relative efficiency)
RE_{ESH}	ESH asimetrik *M*-tahmin edicisinin diğer tahmin edicilere göre göreli etkinliği
MSE_{ESH}	ESH: asimetrik *M*-tahmin edicisinin hata kareler ortalaması
MSE_{ESN}	ESN'nin ML tahmin edicisinin hata kareler ortalaması
MSE_{ESL}	ESL'nin ML tahmin edicisinin hata kareler ortalaması
MSE_{H}	Huber *M*-tahmin edicisinin hata kareler ortalaması
Var	Varyans
U_n, X_n	n tane rasgele gözlem
ρ_{ESH}	Asimetrik Huber amaç fonksiyonu
n_{ESN}	ESN dağılımında üretilen rasgele sayıların örneklem hacmi
n_{ESL}	ESL dağılımında üretilen rasgele sayıların örneklem hacmi
ψ_{ESH}	Asimetrik Huber ψ fonksiyonu
ψ_{ESN}	ε-çarpık normal dağılımdan elde edilen ψ fonksiyonu
ψ_{ESL}	ε-çarpık Laplace dağılımından elde edilen ψ fonksiyonu
ψ_{H}	Huber ψ fonksiyonu
ψ_{N}	Normal dağılımdan elde edilen ψ fonksiyonu
ψ_{L}	Laplace dağılımından elde edilen ψ fonksiyonu
$\psi_{bi(r)}$	Azalan iki ağırlıklı (Biweight) *M*-tahmin edicisi
$\psi_{Sm(r)}$	Azalan Smith *M*-tahmin edicisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

$x_1, x_2, ..., x_n$ rasgele örneklem olmak üzere x_i'ler aşağıdaki konum ve ölçek modelini sağlasın,

$$x_i = \theta + \sigma u_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.1}$$

burada u_i'ler rasgele değişkenleri, $\theta \in \mathbb{R}$ konum parametresini, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ölçek parametresini göstermektedir. u rasgele değişkeninin

$$f(x; \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma} g(\frac{x - \theta}{\sigma}) \tag{1.2}$$

modeline sahip olduğu varsayılsın. Burada $f : \mathcal{X} \times \tau \rightarrow [0, 1]$ ve $g : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonlarıdır. Bu modelin, θ ve σ parametreleri bilinmemektedir. $\tau = (\theta, \sigma)$ parametre vektörünü göstermek üzere bu parametreleri tahmin etmek için aşağıda verilen en çok olabilirlik (ML) tahmin yöntemi kullanılabilir. τ parametresi için ML tahmin edicisi

$$\hat{\tau} = \underset{\tau}{argmax}\{f(x_1; \tau) \cdot f(x_2; \tau) \cdots f(x_n; \tau)\} \tag{1.3}$$

biçiminde tanımlı maksimizasyon probleminin çözümüdür.

Özel olarak, u_i rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı standart normal dağılıma sahip olduğunda, θ ve σ parametrelerinin ML tahmin edicileri, sırasıyla $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ ve $\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right)^{1/2}$ şeklindedir. Ancak, $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örnekleminde sapan gözlem ya da gözlemler olması durumunda, $\hat{\theta}$ ve $\hat{\sigma}$ tahmin edicileri sapan gözlemlerden etkilenecektir. Dolayısı ile, bu tahmin ediciler dayanıklı olmayacaktır.

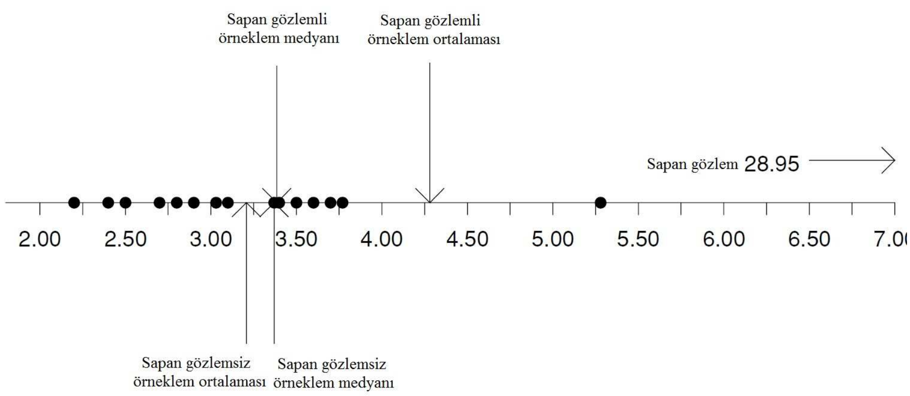
Özel olarak, u_i rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı Laplace dağılımına sahip olduğunda θ ve σ parametrelerinin ML tahmin edicileri, sırasıyla $\tilde{\theta} = Medyan(X_n)$ ve $\tilde{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - Medyan(X_n)|$ şeklindedir. $Medyan(X_n)$ tahmin edicisi sapan gözlemlerden etkilenmediği için $\hat{\theta}$ tahmin edicisine göre dayanıklı bir tahmin edicidir. Seçilen dağılımın konum ve ölçek parametrelerinin ML tahmin edicilerinin sapan gözlemden etkilenip etkilenmediğine ilişkin durumlar Örnek 1.1'de verilmektedir.

Örnek 1.1 Kepekli undaki bakır içeriğini gösteren 24 gözlem aşağıda verilmiştir.

2.2	2.2	2.4	2.4	2.5	2.7	2.8	2.9	3.03	3.03	3.1	3.37
3.4	3.4	3.4	3.5	3.6	3.7	3.7	3.7	3.7	3.77	5.28	28.95

28.95 değeri diğer gözlem değerlerinden daha uzak olduğu için sapan gözlem olarak değerlendirilebilir. Burada bir yazım hatası yapılmış, 2.895 yerine 28.95 yazılmış olabilir. Ancak bu varsayım göz ardı edilerek, bu değer etkili sapan gözlem olarak değerlendirilecektir (Maronna vd. 2006).

Bu veri seti için örneklem ortalaması ve standart sapması sırasıyla 4.28 ve 5.3'dür. Örneklem ortalaması veri setinde iki değer (5.28 ve 28.95) dışında diğer gözlemlerden büyük çıkmıştır. Dolayısı ile verinin büyük bir kısmını temsil etmemektedir. Ancak 28.95 değeri çıkarılıp örneklem oralaması ve standart sapması tekrar hesaplandığında, bu değerler 3.21 ve 0.69 olur. Şekil 1.1'de sapan gözlemin olduğu ve olmadığı durum için örneklem ortalaması ve örneklem medyanı için değerler gösterilmiştir. Burada tek bir sapan gözlemin bile örneklem ortalaması ve standart sapması üzerinde ne kadar etkili olduğu bunun aksine medyanın bu gözlemden etkilenmediği görülmüştür. Bu gözlemler için Laplace dağılımının $\tilde{\sigma}$ tahmin edicisinin değeri 1.6'dır. 28.95 değeri çıkarıldığında ise $\tilde{\sigma} = 0.52$'dir. Bu değer, örneklem standart sapması ile karşılaştırıldığında sapan gözlemden etkilenmediği söylenebilir (Maronna vd. 2006).



Şekil 1.1 Sapan gözlemli veri seti

ML tahmin edicilerinin genelleştirmesi olan $M-$tahmin edicileri konum modeli için ilk kez Huber (1964) tarafından tanımlanmıştır. $M-$tahmin edicileri Örnek 1.1'deki gibi problemlerin üstesinden gelebilen dayanıklı tahmin edicilerin bulunması düşüncesiyle ortaya çıkmıştır. Dayanıklılık kavramı, tahmin edicilerin sapan gözlemlerden etkilenmemesi temeline dayanır. θ konum parametresi için dayanıklı bir tahmin edici olarak budanmış ortalamalar (trimmed mean) tahmin edicisi önerilebilir. Bu yöntem, küçük ya da büyük değerlerin belli bir oranda veri setinden çıkarılmasına dayanmaktadır. Ayrıca, sıra istatistiklerinin doğrusal bir kombinasyonu olması temeline dayalı olan $L-$tahmin edicisi, konum modeli için Jureckova ve Sen (1982) tarafından dayanıklılık literatürüne kazandırılmıştır. Hodges ve Lehmann (1963) gözlemlerin sıra numarasına dayalı olan $R-$tahmin edicilerini önermiştir. Adichie (1967), Jureckova (1971) ve Jaeckel (1972) tarafından bu tahmin ediciler geliştirilmiştir.

Konum parametresi için $M-$tahmin edicisi tanımlandıktan sonra dayanıklılık kavramı üzerine yapılan diğer çalışmalar literatürde yer almıştır. Bu kavram, Hampel (1968, 1971, 1974) tarafından etki fonksiyonu ile ilişkilendirilmiştir. Etki fonksiyonu skor fonksiyonunun lineer bir dönüşümüdür. Skor fonksiyonu ise, $\rho(x;\tau) = -log(f(x;\tau))$ fonksiyonunun ilgili parametreye göre kısmi türevi olup $\psi(x;\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\rho(x;\tau)$ ile ifade edilir. Burada ρ fonksiyonu, bir amaç fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

Bilinmeyen θ parametresinin $M-$tahmin edicisinin etki fonksiyonu yerel (local) dayanıklılık ölçüsü olarak dayanıklılık literatüründe yer almaktadır. Bu kavram tahmin edicinin dayanıklılığı için şu şekilde ifade edilir: Bir parametrenin $M-$tahmin edicisinin etki fonksiyonunun sınırlı olması tahmin edicinin dayanıklı olması, sınırlı olmaması ise tahmin edicinin dayanıklı olmaması anlamına gelir. Örneğin, u_i rasgele değişkenleri bilinen ν parametresi ile bağımsız ve aynı dağılımlı Student t (t_ν) dağılımına sahip olduğunda, θ ve σ parametrelerinin skor fonksiyonları sınırlı ise bu parametrelerin ML tahmin edicilerinin etki fonksiyonu sınırlı olacaktır. Görülmektedir ki, u_i hata rasgele değişkenlerinin uygun bir dağılım ile modellenmesiyle θ ve σ parametreleri için dayanıklı tahmin ediciler elde etmek mümkündür. Benzer olarak, dayanıklılık literatüründe kabul edilmiş ve dağılım bilgisine sahip olmayan ρ amaç fonksiyonları ve bu amaç fonksiyonları türevlenebilir olmak üzere $\psi_\tau(x) = \frac{\partial}{\partial\tau}\rho(x;\tau)$ fonksiyonları, θ ve σ parametrelerinin $M-$tahmini için kullanılabilecektir. Böylelikle, dayanıklı tahmin ediciler elde edilebilecektir. Bu noktada, Welsch, Cauchy, Geman ile McClure ve Lorenzian amaç fonksiyonları kullanılarak elde edilen dayanıklı tahmin ediciler önerilebilir (Bhar 2008). Bu dayanıklı tahmin ediciler içinde, ortada normal dağılım kuyruklarda Laplace dağılımı olan Huber $M-$tahmin edicisi konum modeli için Huber (1964) tarafından önerilmiştir (Hampel vd. 1986).

Veri setinde çarpıklık olduğunda, Huber $M-$tahmin edicisi veriyi modellemede etkinliğini kaybeder. Allende vd. (2006) asimetrik etki fonksiyonunu kullanarak $\mathcal{G}_A^0$ dağılımınındaki α parametresini dayanıklı tahmin etmiştir. Wang ve Lee (2011) asimetrik etki fonksiyonlu $M-$tahmin edicilerini kullanarak sapan gözlem olması durumunda Burr III dağılımının parametrelerini dayanıklı tahmin etmiştir. Bu noktada, dağılım varsayımı yapılmadan çarpık veriyi modelleyen asimetrik bir $M-$tahmin yönteminin tanımlanması gerekmektedir. Her iki kuyrukta sapan gözlem sayıları farklıysa aşağı yönlü veya yukarı yönlü bir tahmin söz konusu olabilir. Simetrik etki fonksiyonunun ise, sağ ve sol kuyruktaki verilere aynı etkiyi uygulayacağı açıktır. Bu nedenle, gerçek hayattaki verileri daha iyi modelleyen asimetrik bir fonksiyona ihtiyaç duyulur. Bu ihtiyaç doğrultusunda, dağılım yapısı asimetrik olan veriler için daha iyi sonuç verebileceği düşünülen asimetrik $M-$tahmin yöntemi bu tez çalışmasında önerilmiştir. Buradaki asimetrik $M-$tahmin yöntemi, Huber tarafından önerilen ρ fonksiyonunun çarpık formda genelleştirilmesi olarak gerçekleştirilmiştir. Bu tanımlama yapılırken, ε-çarpık normal ile ε-çarpık Laplace dağılımlarının log-yoğunluk fonksiyonları kullanılmıştır. Bu iki dağılım, literatürde sıkça kullanılan aynı zamanda Elsalloukh (2005) tarafından incelenen $\varepsilon-$çarpık üstel kuvvet dağılımlar ailesinin özel halleridir.

1.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri

$X_1, X_2, ..., X_n$ aynı $f(x;\tau)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenler olsun. $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p)^T$ parametre vektörünü göstermek üzere $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p$ parametrelerinin eş anlı tahmini durumunda ML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri ele alınacaktır. Bunun için gerekli koşullar aşağıda verilmiştir ve düzgünlük koşulları olarak bilinmektedir (Chanda 1954, Lehmann ve Casella 1998):

(i) $\boldsymbol{\tau} = (\tau_j, \tau_k, \tau_l)$ olmak üzere $\boldsymbol{\tau} \neq \boldsymbol{\tau}'$ ise $f(x;\boldsymbol{\tau}) \neq f(x;\boldsymbol{\tau}')$ dır. Burada $j, k, l = 1, 2, ..., p$ dir.

(ii) $f(x;\boldsymbol{\tau})$ her $\boldsymbol{\tau}$ için genel bir destek kümesine sahip olsun.

(iii) $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem olmak üzere her bir X rasgele değişkeni bağımsız ve aynı $f(x;\boldsymbol{\tau})$ dağılımlı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun.

(iv) Ω parametre uzayı gerçek parametre değeri $\boldsymbol{\tau}$'nun bir iç nokta olduğu bir açık ω kümesini içerir. $\boldsymbol{\tau} \in \omega$ olmak üzere her bir τ_j, τ_k, τ_l için $logf(x;\boldsymbol{\tau})$ fonksiyonunun $\frac{\partial}{\partial\tau_j}logf(x;\tau_j,\tau_k,\tau_l)$, $\frac{\partial^2}{\partial\tau_i\partial\tau_j}logf(x;\tau_j,\tau_k,\tau_l)$ ve $\frac{\partial^3}{\partial\tau_j\partial\tau_k\partial\tau_l}logf(x;\tau_j,\tau_k,\tau_l)$ kısmi türevlerinin var olduğu varsayılsın.

(v) $f(x;\boldsymbol{\tau})$ fonksiyonunun logaritmasının birinci ve ikinci türevinin sırasıyla $E[\frac{\partial}{\partial\tau_j}logf(x;\boldsymbol{\tau})] = 0$, $I(\boldsymbol{\tau}) = E[-\frac{\partial^2}{\partial\tau_j\partial\tau_k}logf(x;\boldsymbol{\tau})]$ olduğu varsayılsın. Burada $I(\boldsymbol{\tau})$ Fisher bilgi matrisidir.

(vi) $det(I(\boldsymbol{\tau})) < \infty$ olduğu varsayılsın.

(vii) $M_{jkl}(x)$ fonksiyonunun var olduğu varsayılsın. $|\frac{\partial^3}{\partial\tau_j\partial\tau_k\partial\tau_l}logf(x;\boldsymbol{\tau})| \leq M_{jkl}(x)$ olmak üzere $E[M_{jkl}(X)] < \infty$ olsun.

Teorem 1.1. *$X_1, ..., X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olup yukarıdaki varsayımları sağlasın. Bu durumda, olabilirlik denkleminin $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ çözümleri vardır ve bu çözümler tahmin ediciler olup*

1. *$\hat{\tau}_j$, tahmin edicisi τ_j için tutarlı bir tahmin edicidir,*
2. *$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau})$ ortalaması* $\mathbf{0}$ *ve kovaryans matrisi $[I(\boldsymbol{\tau})]^{-1}$ olan asimptotik normal dağılıma sahiptir,*
3. *$\hat{\tau}_j$ tahmin edicisi asimptotik etkindir,*

özelliklerini sağlamaktadır.

Bu tez çalışmasında, veride çarpıklık ve sapan gözlem olması durumunda ML tahmin ve asimetrik $M-$tahmin yöntemleri kullanılarak konum, ölçek ve çarpıklık parametreleri için tahmin ediciler elde edilmiştir. Özel olarak, $\varepsilon-$çarpık üstel dağılım ailesi ile ilgilenilmiş ve bu ailedeki $\varepsilon-$çarpık normal, $\varepsilon-$çarpık Laplace ve ölçek karması olan $\varepsilon-$çarpık t dağılımları ele alınmıştır. Bu dağılımların konum, ölçek ve çarpıklık parametreleri için ML tahmin edicilerinin dayanıklılık ve asimptotik özellikleri verilmiştir. Dağılım varsayımı olmaksızın asimetrik $M-$tahmin yöntemi kullanılarak konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri bulunmuştur. Asimetrik $M-$tahmin edicilerini tanımlamak için ρ amaç fonksiyonu önerilmiştir. Önerilen asimetrik ρ fonksiyonu, Huber ρ fonksiyonunun genelleştirmesidir. Ayrıca, çarpıklık parametresinin asimetrik $M-$tahmin edicisi de verilmektedir. Önerilen asimetrik $M-$tahmin edicilerinin dayanıklılık ve asimptotik özellikleri incelenmiştir. Bu tahmin ediciler analitik olarak kapalı formda olduklarından tahmin değerlerinin elde edilmesi için sayısal yöntemlerden biri olan iteratif ağırlıklandırılmış algoritması (Iteratively Reweighting Algorithm, IRA) kullanılmıştır. Önerilen asimetrik $M-$tahmin yönteminden elde edilen tahmin edicilerin performansı ile ML ve M tahmin edicilerinin performansı simülasyon çalışması yapılarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca, gerçek veri seti üzerinde uygulaması yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında ele alınan bölümlerin detayları aşağıda verilmektedir. Birinci bölümde, ML tahmin edicileri ve bu tahmin edicilerin asimptotik özellikleri (tutarlılık, asimptotik normallik) için literatür özeti verilmektedir.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde $M-$tahmin yöntemi ve $M-$tahmin edicilerinin hesaplama yöntemlerinden biri olan IRA verilmektedir. Ayrıca $M-$tahmin edicilerinin etki fonksiyonu, kırılma noktası ve bilgi-standardize duyarlılığı gibi dayanıklı olma özellikleri ve asimptotik özellikleri verilmektedir.

Üçüncü bölümde, $\varepsilon-$çarpık üstel kuvvet dağılım ailesi (ESEP) incelenmiştir. Ayrıca, Arslan ve Genç (2009) tarafından önerilen değişken dönüştürmesi ile $\varepsilon-$çarpık genelleştirilmiş t dağılımı (ESGt) elde edilmiştir. ESEP dağılımlar ailesinin özel halleri olan $\varepsilon-$çarpık normal (ESN) ve $\varepsilon-$çarpık Laplace (ESL) dağılımları ve ESGt dağılımının özel hali olan $\varepsilon-$çarpık t (ESt) dağılımının θ konum, σ ölçek ve ε çarpıklık parametreleri için ML tahmin edicilerinin dayanıklı olup olmadıkları araştırılmıştır. Öne sürülen dağılımların bu parametreleri için ML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri Chanda (1954) ve Lehmann ve Casella (1998) kaynaklarında verilen koşullara göre incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Huber (1964) tarafından önerilen $M-$tahmin edicisinin genelleştirilmesi yapılmıştır. Buradaki tanımlama yapılırken, ε-çarpık normal ve ε-çarpık Laplace dağılımlarının log-yoğunluk fonksiyonları kullanılmıştır. Böylelikle, asimetrik ρ fonksiyonu oluşturulmuştur. Bu fonksiyondan elde edilen asimetrik $M-$tahmin edicileri kapalı formdadır. Tahmin değerlerini elde etmek için sayısal yöntem kullanılması gereklidir. Bu sayısal yöntemlerden ise IRA kullanılmıştır. Bu tahmin edicilere ilişkin algoritmanın adımları verilmiştir. Asimetrik $M-$tahmin edicilerinin dayanıklılık özellikleri verilmiştir. Konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, regresyon parametreleri ile dağılım parametreleri olan σ ölçek ve ε çarpıklık parametreleri için ML ve asimetrik $M-$tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen bu tahmin ediciler kapalı formda olduklarından sayısal yöntemlerin kullanılması gereklidir. Bu sayısal yöntemden ise, IRA kullanılmıştır. Bu tahmin edicilere ilişkin algoritmanın adımları verilmiştir.

Altıncı bölüm, simülasyon çalışması ve gerçek veri seti üzerinde uygulamalara ayrılmıştır. Gerçek veri setlerinden elde edilen sonuçlar ile simülasyon sonuçları desteklenmiştir.

Son bölümde ise bulgulara ve yapılması planlanan çalışmalara yer verilmiştir.

2. M-TAHMİN YÖNTEMİ

Huber (1964) tarafından konum parametresinin tahmini için $M-$tahmin yöntemi önerilmiştir. $M-$tahmin edicilerinin sınıfı Huber (1964,1965,1967) tarafından verilmiştir. Aynı zamanda, Andrews vd. (1972) ve Antoch vd. (1998) tarafından yapılan çalışmalarda $M-$tahmin edicileri incelenmiştir.

Bu tahmin yönteminden elde edilen tahmin edicilerin asimptotik özellikleri ilk olarak Huber (1967) tarafından incelenmiştir. Haberman (1989) çalışması, konkav veya negatif ile çarpımı sonucu konveks formda oluşan ρ amaç fonksiyonlarının kullanılarak parametreler için elde edilen $M-$tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri ile ilgili koşullar vermiştir. Haberman (1989) ile Stefanski ve Boos (2002) birden fazla parametrenin olması durumunda bu parametreler için elde edilen $M-$tahmin edicilerinin $p-$boyutlu asimptotik normal dağıldığını belirtmiştir. Bu bölümde, $M-$tahmin yöntemi, bu yöntemden elde edilen tahmin edicilerin hesaplanması ile birlikte tahmin edicilerin dayanıklılığı ve asimptotik özelliği verilecektir.

2.1 M-Tahmin Edicileri

$M-$tahmin yönteminde yer alan kavramlar aşağıda tanımlanmaktadır.

Tanım 2.1. *$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olmak üzere*

1. $\rho(x) > 0$,
2. $\rho(0) = 0$,
3. $\rho(x)$, $x > 0$ *için artan,*

olma koşullarını sağlasın. Bu durumda ρ fonksiyonuna $M-$tahmin yöntemi için bir amaç fonksiyonu denir.

Tanım 2.2. *ρ fonksiyonu $M-$tahmin yöntemi için türevlenebilir bir amaç fonksiyonu ve $\psi : \mathcal{X} \times \tau \to \mathbb{R}^p$ olmak üzere*

$$\psi(x;\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\rho(x;\tau), \quad x \in \mathbb{R}$$

ile tanımlanan fonksiyona ψ fonksiyonu denir.

$M-$tahmin yöntemi ML tahmin yönteminin bir genelleştirmesidir. $M-$tahmin edicisi

$$\hat{\tau} = \underset{\tau}{argmin} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i;\tau) \tag{2.1}$$

olarak bulunur. Burada x_i'ler rasgele gözlemler ve τ parametredir. Eğer ρ türevlenebilir ise, (2.1) ifadesinin τ parametresine göre türevi alınarak τ için $M-$tahmin edicisi

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i;\tau) = 0 \tag{2.2}$$

denkleminin τ parametresine göre çözümü olarak elde edilir. Denklem (2.2)'den elde edilen $M-$tahmin edicisi ML tahmin edicisine karşılık gelmeyebilir.

Eğer ψ fonksiyonu sürekli ve $\psi(-\infty) < 0 < \psi(\infty)$ olacak şekilde monoton azalmayan bir fonksiyon ise çözüm tektir. Aksi halde, birden fazla çözüm olabilir.

2.1.1 Konum parametresinin M-Tahmin edicisi

Konum modelini sağlayan x_i gözlemleri

$$x_i = \theta + u_i, i = 1, ..., n \tag{2.3}$$

olarak ele alınsın. u_i'ler rasgele değişkenlerdir ve bağımsız oldukları varsayılmaktadır. $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem olmak üzere θ parametresinin $M-$tahmin edicisi

$$Q(\theta; X_n) = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i - \theta) \tag{2.4}$$

fonksiyonunun θ parametresine göre minimum yapılması ile elde edilir. Eğer ρ fonksiyonu türevlenebilir ise, θ için $M-$tahmin edicisi

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i - \theta) = 0 \tag{2.5}$$

denkleminin çözümü ile elde edilir. Genelde (2.5) denklemi analitik olarak çözülemez. Bu durumda, iteratif yöntem ile çözülebilmesini sağlayan kullanışlı bir araç ağırlık fonksiyonudur. Bu fonksiyon $w(u_i) = \psi(u_i)/u_i$ olarak tanımlanır. Burada $u_i = x_i - \theta$ olmak üzere θ konum parametresinin M-tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(x_i - \hat{\theta}) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} w(x_i - \hat{\theta})} \tag{2.6}$$

denkleminin çözümü ile de elde edilebilir.

2.1.2 Ölçek parametresinin M-Tahmin edicisi

Ölçek modelini sağlayan x_i gözlemleri

$$x_i = \sigma u_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.7}$$

olarak ele alınsın. u_i'ler rasgele değişkenlerdir ve bağımsız oldukları varsayılmaktadır. $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem olmak üzere σ ölçek parametresinin $M-$tahmin edicisi

$$Q(\sigma; X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(\frac{x_i}{\sigma}) + log(\sigma) \tag{2.8}$$

fonksiyonunun σ parametresine göre minimum yapılması ile elde edilir ya da eğer $\rho(\frac{x_i}{\sigma})$ fonksiyonu türevlenebilir ise, $M-$tahmin edicisi

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi(\frac{x_i}{\sigma}) \frac{x_i}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma} = 0 \tag{2.9}$$

denkleminin çözümü ile elde edilir. Konum parametresinin $M-$tahmin edicisinde tanımlandığı gibi burada da w ağırlık fonksiyonu $w(u_i) = \psi(u_i)/u_i$ biçiminde tanımlanabilir. Burada $u_i = x_i/\sigma$ olmak üzere ölçek parametresinin $M-$tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i}{\hat{\sigma}}) x_i^2 \tag{2.10}$$

olarak elde edilir.

2.1.3 Konum ve ölçek parametrelerinin M-Tahmin edicileri

Konum ve ölçek modelini sağlayan x_i gözlemleri

$$x_i = \theta + \sigma u_i, \quad i = 1, ..., n \tag{2.11}$$

olarak ele alınsın. u_i'ler rasgele değişkenlerdir ve bağımsız oldukları varsayılmaktadır. Bu modelin θ ve σ parametreleri için $M-$tahmin edicileri eşanlı olarak elde edilebilir. $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem olmak üzere,

$$Q(\theta, \sigma; X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho(\frac{x_i - \theta}{\sigma}) + log(\sigma) \tag{2.12}$$

fonksiyonunun θ ve σ parametrelerine göre eşanlı minimum yapılmasıyla $M-$tahmin edicileri elde edilir. Eğer $\rho(\frac{x_i-\theta}{\sigma})$ fonksiyonu türevlenebilir ise, θ parametresinin $M-$tahmin edicisi,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}Q(\theta, \sigma; X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(\frac{x_i - \theta}{\sigma})(\frac{-1}{\sigma}) = 0 \tag{2.13}$$

denkleminin çözümü ile elde edilir. Konum/ölçek parametrelerinin $M-$tahmin edicisinde tanımladığı gibi $w(u_i) = \psi(u_i)/u_i$ ağırlık fonksiyonu yardımıyla (2.13) denkleminden θ için $M-$tahmin edicisi,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i-\hat{\theta}}{\hat{\sigma}})x_i}{\sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i-\hat{\theta}}{\hat{\sigma}})} \tag{2.14}$$

olarak elde edilir. σ parametresinin $M-$tahmin edicisi ise,

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}Q(\theta, \sigma; X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(\frac{x_i - \theta}{\sigma})\frac{x_i - \theta}{-\sigma^2} + \frac{1}{\sigma} = 0 \tag{2.15}$$

denkleminin σ'ya göre çözümü ile elde edilir. $w(u_i) = \psi(u_i)/u_i$ ağırlık fonksiyonu yardımıyla (2.15) denkleminden σ^2'nin $M-$tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}})(x_i - \hat{\theta})^2 \tag{2.16}$$

olarak bulunur. (Maronna 1976, Huber 1981, Hampel vd. 1986, Kent ve Tyler 1991, 1996, Jureckova ve Picek 2006, Maronna vd. 2006).

2.2 Monoton M-Tahmin Edicisi

Tanım 2.3. *ψ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon ise bu tür $M-$tahmin edicilerine monoton $M-$tahmin edicileri denir.*

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i; \hat{\tau}) = 0 \tag{2.17}$$

Huber $M-$tahmin edicisi monoton $M-$tahmin edicisine bir örnektir. Huber $M-$tahmin edicisine ilişkin ρ ve ψ fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\rho_H(x) = \begin{cases} x^2 & , |x| \leq k; \\ 2k|x| - k^2 & , x \geq k; \end{cases} \tag{2.18}$$

ve $\rho^{'}(x) = 2\psi(x)$ olmak üzere,

$$\psi_H(x) = \begin{cases} x & , |x| \leq k; \\ sign(x)k & , x \geq k. \end{cases} \tag{2.19}$$

dır (Huber 1964, Hampel 2000, Maronna vd. 2006, Jureckova ve Picek 2006). Huber (1964) çalışması, (2.19) fonksiyonu tarafından üretilen tahmin edicinin dayanıklı bir tahmin edici olduğunu göstermiştir. Burada k katsayısı ayarlama katsayısı olarak adlandırılır.

2.3 Azalan (Redescending) M-Tahmin Edicileri

Tanım 2.4. *ψ fonksiyonu azalan bir fonksiyon ise bu tür $M-$tahmin edicilerine azalan $M-$tahmin edicileri denir.*

ρ amaç fonksiyonu konveks bir fonksiyon olmayabilir. $x > 0$ azalmayan bir fonksiyon buna örnek olarak verilebilir. ψ fonksiyonunun azalan olduğu durumda, (2.1) ile verilen amaç fonksiyonunun bir genel (global) minimum noktasına sahip olmasının yanı sıra yerel (local) minimum noktalara da sahip olabilir. Bu durum (2.2) denkleminin birden çok kökü olabileceği anlamına gelmektedir.

Azalan $M-$tahmin edicileri keskin ve yumuşak azalan $M-$tahmin edicileri olarak ikiye ayrılmaktadır. Bu iki durum aşağıda verilmektedir.

2.3.1 Keskin azalan M-tahmin edicisi

Sapan gözlemi tamamen göz ardı eden azalan $M-$tahmin edicilerine keskin azalan $M-$tahmin edicileri denir. Burada, ψ fonksiyonu belli bir aralığın dışında sıfır değerini alır ve matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\Psi_r = \{\psi \in \Psi : \psi(x) = 0 \text{ için } |x| \geq r\}, \tag{2.20}$$

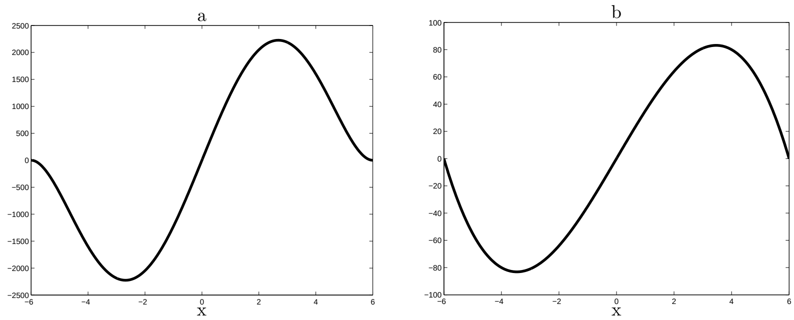
burada r sabit bir katsayıdır.

Bu tür $M-$tahmin edicilerine ilişkin örnekler aşağıda verilmiştir. Azalan iki ağırlıklı (Biweight) ve Smith $M-$tahmin edicileri sırasıyla,

$$\psi_{bi(r)}(x) = x(r^2 - x^2)^2, -r \leq x \leq r, \tag{2.21}$$

$$\psi_{Sm(r)}(x) = x(r^2 - x^2), -r \leq x \leq r. \tag{2.22}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda verilmektedir (Hampel vd. 1986, Shevlyakov vd. 2008).



(a) $\psi_{bi(r)}(x)$ (b) $\psi_{Sm(r)}(x)$

Şekil 2.1 ψ fonksiyonları

2.3.2 Yumuşak azalan M-tahmin edicisi

Sapan gözlem ya da gözlemlerin etkisini tamamen göz ardı etmeyip bunların etkisini indirgeyen $M-$tahmin edicilerine yumuşak azalan $M-$tahmin edicileri denir. Bu azalan ψ fonksiyonu, $x \to \pm\infty$ iken 0'a gitme eğilimindedir. Böyle bir fonksiyona örnek olarak, t

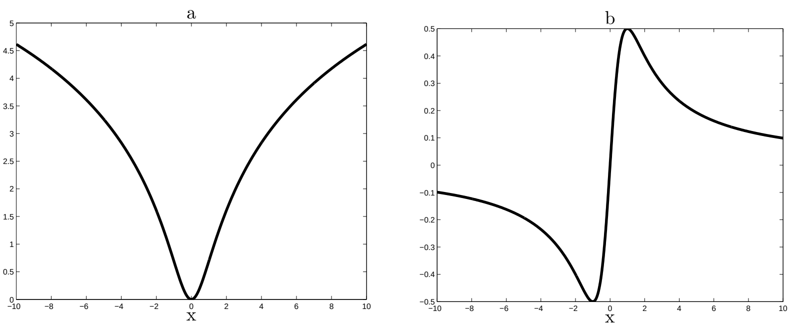
dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_\nu(x) = c(\nu)(1 + \frac{x^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2} \tag{2.23}$$

verilebilir. Burada, $c(\nu)$ normalleştirme sabiti (normalizing constant) olmak üzere $c(\nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}$ dır. Γ gamma fonksiyonunu göstermektedir. Bu dağılım, farklı ν değerleri için farklı kuyruk kalınlığına sahiptir. $\rho(x) = -log(f(x))$ olmak üzere $\rho(x) = \frac{\nu+1}{2} log(1 + x^2/\nu)$ t_ν dağılımının amaç fonksiyonudur. Böylece ψ fonksiyonu

$$\psi(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + \nu}$$

olarak bulunur. $x \to \infty$ iken bu fonksiyon sıfıra gider. Bu fonksiyon, $s > 0$ olmak üzere $0 \leq x \leq s$ aralığında artan, $s < x < \infty$ aralığında azalan olup, $-s \leq x < 0$ aralığında artan ve $-\infty < x < -s$ aralığında ise azalandır. Bu durum, simetrik kalın kuyruklu dağılımlar için sonsuzda sıfıra giden azalan ψ fonksiyonlarının kullanılması sonucunda, dayanıklı tahmin ediciler elde edilebileceğini gösterir. Yumuşak bir azalan $M-$tahmin edicisinin ψ fonksiyonu (2.19) ifadesinde verilen Huber ψ fonksiyonundan daha yavaş bir şekilde artmaktadır (Jureckova ve Picek 2006, Maronna vd. 2006). Simetrik olan bu fonksiyonlar aşağıdaki grafiklerde verilmektedir. Bhar (2008) tarafından yapılan çalışmada ρ ve bunların

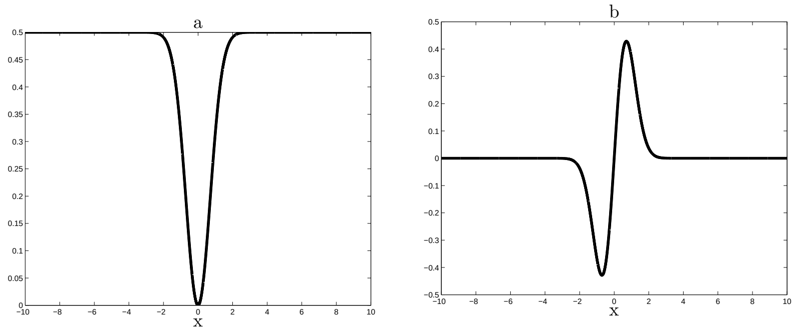


(a) $\rho(x) = \frac{\nu+1}{2} log(1 + \frac{x^2}{\nu})$ (b) $\psi(x) = \frac{x}{x^2+\nu}$

Şekil 2.2 Student $t_{\nu=1}$ dağılımının ρ amaç ve ψ fonksiyonları

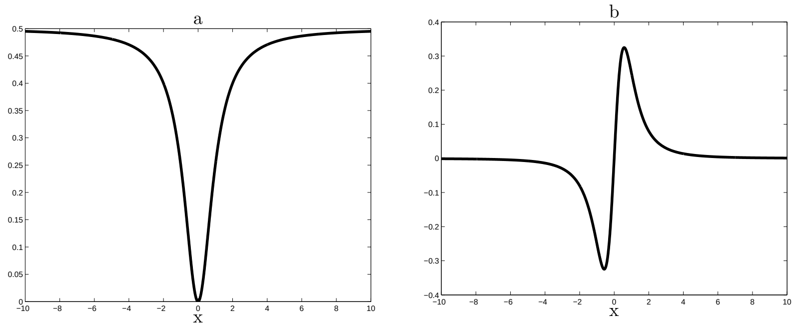
türevi olan ψ fonksiyonları verilmiştir ve bu fonksiyonların hepsi simetriktir.

Simetrik fonksiyonlar içinde yer alan Welsch, German ve Maclure ile Lorenzian fonksiyonları şekil (2.3)-(2.5)'de verilmektedir.



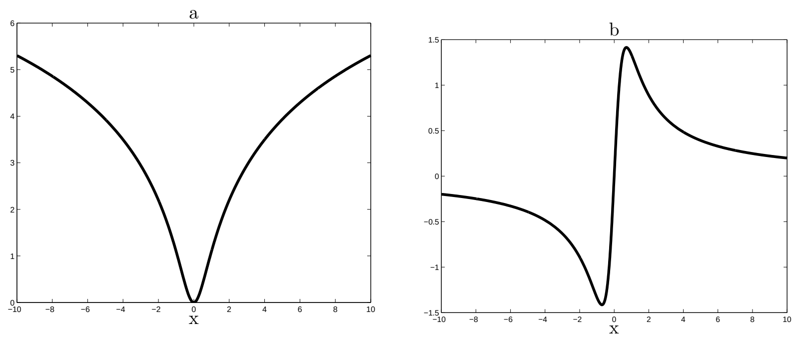
(a) $\rho(x)=\frac{c^2}{2}[1-e^{-(\frac{x}{c})^2}]$ (b) $\psi(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{c^2}}$

Şekil 2.3 Welsch ρ amaç ve ψ fonksiyonları, $c=1$



(a) $\rho(x)=1/2\,\frac{x^2}{x^2+1}$ (b) $\psi(x)=\frac{x}{x^2+1}-\frac{x^3}{(x^2+1)^2}$

Şekil 2.4 German ve Maclure ρ amaç ve ψ fonksiyonları



(a) $\rho(x)=\ln\left(1+\frac{x^2}{2s^2}\right)$ (b) $\psi(x)=\frac{2x}{2\,s^2+x^2}$

Şekil 2.5 Lorenzian ρ amaç ve ψ fonksiyonları, $s=0.5$

2.4 M-Tahmin Edicilerinin Hesaplanması

Konum ve/veya ölçek parametrelerinin $M-$tahmin edicilerinin elde edilmesi aşamasında, ele alınan ρ fonksiyonunun türevi olan ψ fonksiyonunun analitik ifadesinden dolayı tahmin denklemleri kapalı formda olabilir. Bu durumda, bu denklemlerden ilgili parametrelere ilişkin tahmin değerlerini elde etmek için bazı sayısal yöntemlerin kullanılması gerekir. Sayısal yöntem olarak, dayanıklılık literatüründe kabul edilmiş olan IRA bu tahmin değerlerini elde etmek için kullanılacaktır. θ konum ve σ ölçek parametrelerinin tahmin değerlerini elde etmek için IRA adımları aşağıda verilmektedir.

$X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere θ parametresinin tahmin değerini elde etmek için izlenecek adımlar aşağıda verilmektedir:

1. Adım $\theta^{(1)}$ başlangıç değeri olarak alınır.

2. Adım $w(x_i - \hat{\theta}^{(k)}) = \psi(x_i - \hat{\theta}^{(k)})/(x_i - \hat{\theta}^{(k)})$ ağırlık fonksiyonu değerleri hesaplanır.

3. Adım Konum parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i - \hat{\theta}^{(k)}}{\sigma_0})x_i}{\sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i - \hat{\theta}^{(k)}}{\sigma_0})}$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım $|\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}| < e$ olana kadar algoritma yürütülür. Aksi halde $2-3$ adımları tekrarlanır. Burada $e > 0$ önceden belirlenmiş sayısal hatadır. σ_0 ölçek parametresinin bilinen veya önceden kabul edilmiş bir değerini gösterir. Ölçek parametresinin tahmin değeri olarak kullanılabilen MAD ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$MAD(X_n) = Medyan(|X_n - Medyan(X_n)|). \tag{2.24}$$

θ ve σ parametrelerinin $M-$tahmin edicileri sırasıyla (2.14) ve (2.16) denklemlerindeki gibi tanımlanmıştır. Bu denklemler kullanılarak ilgili parametrelerin tahmin değerlerini elde etmek için IRA adımları aşağıda verilmektedir:

1. Adım $\theta^{(1)}$ ve $\sigma^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Ağırlık fonksiyonu değerleri

$$w^{(k)}(\frac{x_i - \hat{\theta}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}}) = \psi(\frac{x_i - \hat{\theta}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})/(\frac{x_i - \hat{\theta}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})$$

şeklinde hesaplanır.

3. Adım Konum parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i - \hat{\theta}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})x_i}{\sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i - \hat{\theta}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})}$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\sigma}^{2^{(k)}} = \sum_{i=1}^{n} w(\frac{x_i - \hat{\theta}^{(k+1)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2$$

şeklinde hesaplanır.

5. Adım Eğer $(\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}, \hat{\sigma}^{(k+1)} - \hat{\sigma}^{(k)})^T$ vektörünün normu kabul edilen sayısal hata $e > 0$ değerinden büyük ise, $2 - 4$ adımları tekrarlanır. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır (Huber 1981, Arslan 2004, Maronna vd. 2006, Arslan ve Genç 2009, Huber ve Ronchetti 2009).

2.5 M-Tahmin Edicisinin Dayanıklılığı

$M-$tahmin edicisinin dayanıklılığını ölçmek için kullanılan iki yöntem vardır. Bu yöntemlerden birincisi yerel dayanıklılık ölçüsü olan etki fonksiyonu, diğeri ise genel (global) duyarlılık ölçüsü olan kırılma noktasıdır (breakdown point).

2.5.1 M-Tahmin edicisinin etki fonksiyonu

θ konum ve σ ölçek parametrelerinin $M-$tahmin edicileri için etki fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.5. *F_τ dağılımındaki $\hat{\tau}$ tahmin edicisinin etki fonksiyonu (influence function) IF ile gösterilmek üzere*

$$IF(x; \hat{\tau}, F_\tau) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\hat{\tau}((1-\xi)F_\tau - \xi\delta_x) - \hat{\tau}(F_\tau)}{\xi} \tag{2.25}$$

olarak tanımlanır. $\hat{\tau}$ tahmin edicisinin yerel dayanıklılık özelliği etki fonksiyonu ile ölçülür. Sınırlı etki fonksiyonuna sahip tahmin edici yerel dayanıklı tahmin edici olarak tanımlanır.

Buradaki türev tanımı kullanılarak herhangi bir parametrenin etki fonksiyonu oluşturulur. Örneğin, konum parametresinin $M-$tahmin edicisi için etki fonksiyonunun elde edilmesi için gerekli ifadeler aşağıda verilmektedir:

$$F_\xi = (1-\xi)F_\theta + \xi\delta_x \tag{2.26}$$

kontaminasyon komşuluğu ele alınsın. Burada,

$$\delta_x = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}; \\ 0, & x \notin \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.27}$$

tek noktada yoğunlaşmış dağılım ve ξ kontaminasyon oranıdır. Tahmin denkleminden dolayı $E_{F_\xi}[\psi(x-\hat{\theta}_\xi)] = 0$ olur (Ek 1'de 1.5 kısmına bkz). F_ξ yerine yazılırsa, $\int \psi(x-\hat{\theta}_\xi)d((1-\xi)F_\theta + \xi\delta_x) = 0$ olur. Buradan $(1-\xi)E_{F_\theta}[\psi(x-\hat{\theta}_\xi)] + \xi\psi(x-\hat{\theta}_\xi) = 0$ eşitliği elde edilir. Burada, ξ'ye göre türev alınır ve ξ yerine sıfır yazılırsa θ konum parametresinin $M-$tahmin edicisi için etki fonksiyonu $\dot{\psi} = \frac{\partial}{\partial\theta_0}\psi$ olmak üzere,

$$IF(x, F_\theta) = \frac{-\psi(x-\hat{\theta}_0)}{E_{F_\theta}[\dot{\psi}(x-\hat{\theta}_0)]} \tag{2.28}$$

şeklinde bulunur. Ölçek parametresinin $M-$tahmin edicisi için etki fonksiyonunun elde edilirken $F_\xi = (1-\xi)F_\sigma + \xi\delta_x$ kontamiasyon komşuluğu ele alınsın. Tahmin denkleminden dolayı $E_{F_\xi}[\psi(x/\hat{\sigma}_\xi)] = 0$ olur (Ek 1'de 1.5 kısmına bkz). F_ξ yerine yazılırsa, $\int \psi(x/\hat{\sigma}_\xi)d((1-\xi)F_\sigma + \xi\delta_x) = 0$ olur. Buradan $(1-\xi)E_{F_\sigma}[\psi(x/\hat{\sigma}_\xi)] + \xi\psi(x/\hat{\sigma}_\xi) = 0$ dır. Burada, ξ'ye göre türev alınır ve ξ yerine sıfır yazılırsa σ ölçek parametresinin $M-$tahmin edicisi için etki fonksiyonu $\dot{\psi} = \frac{\partial}{\partial\sigma_0}\psi$ olmak üzere

$$IF(x, F_\sigma) = \hat{\sigma}_0 \frac{-\psi(x/\hat{\sigma}_0)}{E_{F_\sigma}[\dot{\psi}(x/\hat{\sigma}_0)(x/\hat{\sigma}_0)]} \tag{2.29}$$

biçiminde elde edilir. Etki fonksiyonu, (2.28) ve (2.29) ifadelerinde verildiği gibi aşağıda verilen formül aracılığı ile herhangi bir τ parametre vektörü için genelleştirilebilir:

$$IF(x; \hat{\tau}, F) = M(\psi, F)^{-1}\Psi(x; \hat{\tau}). \tag{2.30}$$

Burada $p \times p$ boyutlu M matrisi

$$M(\psi, F) = -\int \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \psi(x, \tau) \right] f(x) dx \tag{2.31}$$

olarak ifade edilir ve $\Psi = (\psi_1, ..., \psi_p)$ dır. IF etki fonksiyonunun karesinin beklenen değeri

$$V(\hat{\tau}, F) = \int IF(x; \hat{\tau}, F) IF(x; \hat{\tau}, F)^T f(x) dx \tag{2.32}$$

olmak üzere ilgilenilen parametrelerin $M-$tahmin edicilerinin asimptotik varyansıdır (Hampel 1974, Hampel vd. 1986, Rieder 1994, Jureckova ve Picek 2006, Maronna vd. 2006). Etki fonksiyonundan türetilen dayanıklılık ölçüleri büyük hata duyarlılığı (gross error sensivity) ve bilgi-standardize duyarlılıktır (information-standardized sensivity). Bunlara ilişkin tanımlar aşağıda verilmektedir.

Tanım 2.6. *$\hat{\tau}$ tahmin edicisinin büyük hata duyarlılığı,*

$$GES(\hat{\tau}, F) = \underset{x}{sup} ||IF(x; \hat{\tau}, F)|| \tag{2.33}$$

dır.

Tanım 2.7. *Eğer her τ için $I(\tau)$ mevcut ise, bilgi-standardize duyarlılık*

$$\gamma_i^*(\hat{\tau}, F) = \underset{x}{sup} \{IF(x; \hat{\tau}, F)^T I(\tau) IF(x; \hat{\tau}, F)\}^{1/2} \tag{2.34}$$

ile tanımlanır (Hampel vd. 1986).

2.5.2 M-Tahmin edicisinin kırılma noktası

Dayanıklı istatistik literatüründe önemli bir kavram olan kırılma noktası bir tahmin edicinin veri setinde var olan sapan gözlem ya da gözlemlere karşı dayanıklılığını ölçer. $x^{(0)} = (x_1, ..., x_n)$ rasgele örneklemi ele alınsın. $x^{(0)}$ gözlem vektörüne ilişkin $\hat{\tau}_n$ tahmin edicisi $\hat{\tau}$ olsun. Bu gözlem vektöründeki m tane keyfi gözlemin değiştirildiği durum incelensin. Bu gözlemler n tane gözlemden farklı hatta çok büyük gözlemleri bile içerebilir olsun. Bu m gözlem ile oluşan yeni vektör $x^{(m)}$ ile gösterilsin ve bu yeni vektöre ilişkin tahmin edici $\hat{\tau}_m$ ile gösterilsin. $x^{(0)}$ gözlem vektörüne ilişkin $\hat{\tau}_n$ tahmin edicisinin kırılma noktası

$$\varepsilon_n^*(\hat{\tau}_n, x^{(0)}) = \frac{m^*(x^{(0)})}{n}$$

değeridir. Burada $m^*(x^{(0)})$ en küçük tam sayıdır. Bu durum $\hat{\tau}_m$ tahmin edicisinin sonsuza gidebileceğini göstermektedir ve

$$\sup_{x^{(m)}} ||\hat{\tau}_m - \hat{\tau}_n|| = \infty$$

şeklinde ifade edilmektedir. Böylelikle, ε^* limit değeri $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^*$ elde edilir ve kırılma noktası olarak ifade edilecektir. $\bar{X}$ örneklem ortalamasının kırılma noktası $1/n$ olup, $n \to \infty$ iken sıfırdır. Diğer yandan, örneklem medyanının kırılma noktası $1/2$'dir. Yani verilerin yarısına yakını sapan gözlem olsa bile örneklem medyanı kırılma noktası yüksek olan bir tahmin edicidir (Hampel vd. 1986, Jureckova ve Picek 2006, Maronna vd. 2006). Donoho vd. (1983), Huber (1984) ile Zhang ve Li (1998) tarafından konum parametresinin tahmininde kullanılan monoton ve azalan $M-$tahmin edicilerinin kırılma noktası incelenmiştir. Tez kapsamında, bu çalışmalar tarafından verilen koşulların ML ($\rho = -log(f)$ alınmak üzere ML tahmin edicileri $M-$tahmin edicileri olarak değerlendirilebilir) ve asimetrik $M-$tahmin edicileri için sağlanıp sağlanmadığı araştırılmıştır.

2.6 M-Tahmin Edicisinin Asimptotik Özellikleri

Sonlu örneklemde $M-$tahmin edicilerinin dağılımı için açık bir ifade mevcut değildir. Dolayısıyla, asimptotik teori ve Taylor açılımı kullanılarak $M-$tahmin edicilerinin dağılımının asimptotik normal (N) olduğu gösterilebilir (Haberman 1989, Rieder 1994, Stefanski ve Boos 2002, Shao 2003, Maronna vd. 2006). $\psi(x;\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\rho(x;\tau)$ fonksiyonunun τ parametresi etrafında birinci dereceden Taylor açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\psi(x_i, \hat{\tau}) = \psi(x_i, \tau) + (\hat{\tau} - \tau)\dot{\psi}(x_i, \tau) + o_p(1). \tag{2.35}$$

Eşitliğin her iki tarafında toplamlar alınmasıyla

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, \hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, \tau) + (\hat{\tau} - \tau) \sum_{i=1}^{n} \dot{\psi}(x_i, \tau) + o_p(1) \tag{2.36}$$

elde edilir. Tahmin denkleminden dolayı $E_F \psi(X_i, \tau) = 0$ dır. Örneklem durumunda ise $\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, \hat{\tau}) = 0$ dır (Tahmin denkleminin beklenen değerinin sıfır olduğuna ilişkin ispat için Ek 1'de kısım 1.5'e bkz).

$$\frac{1}{n} \cdot 0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, \tau) + (\hat{\tau} - \tau) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dot{\psi}(x_i, \tau) + o_p(1) \tag{2.37}$$

olup buradan $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, \tau)$ ve $B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dot{\psi}(x_i, \tau)$ olmak üzere

$$0 = A_n + (\hat{\tau} - \tau) B_n + o_p(1) \tag{2.38}$$

şeklinde yazılsın. $n \to \infty$ iken limit alınmasıyla

$$-\frac{A_n}{B_n} \sqrt{n} \approx \sqrt{n} (\hat{\tau} - \tau) \tag{2.39}$$

ifadesi elde edilir. $\psi(X_i, \hat{\tau})$ sıfır ortalamalı bağımsız ve aynı dağılımlıdır. Zayıf büyük sayılar yasası B_n'nin

$$B_n \xrightarrow{P} E\dot{\psi}(X, \tau) \tag{2.40}$$

eğiliminde olduğunu gösterir. Burada $E\dot{\psi}(X, \tau) = E\frac{\partial}{\partial \tau} \psi(X, \tau)$ dır. Merkezi limit teoremi A_n'nın dağılımının

$$N(0, Var(A_n)) \tag{2.41}$$

dağılımına gitme eğiliminde olduğunu gösterir. Böylelikle, Slutsky'nin yardımcı teoremi aracılığı ile büyük n'ler için $\frac{A_n}{B_n}$, $\frac{A_n}{b}$'ye yakınsayacağından

$$\frac{A_n}{B_n} \xrightarrow{D} N(0, Var(\frac{A_n}{b})) \tag{2.42}$$

dır. Burada $Var(\frac{A_n}{b}) = \frac{1}{b^2} Var(A_n) = \frac{1}{b^2} E(A_n - 0)^2 = \frac{1}{b^2} E(A_n^2)$ ve $E(A_n^2) = E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi(X_i, \tau))^2 = E(\frac{1}{n^2} (\sum \psi(X_i, \tau))^2) = \frac{1}{n} E\psi(X_i, \tau)^2$ dır. Sonuç olarak,

$M-$tahmin edicisinin asimptotik varyansı

$$\frac{n^{-1}E\psi(X_i,\tau)^2}{(E\dot{\psi}(X_i,\tau))^2} \tag{2.43}$$

biçiminde elde edilir. Şimdi de p parametrenin eşanlı tahmini ele alınsın. Bu durumda, $\tau = (\tau_1, ..., \tau_p)^T$ parametre vektörünü göstermek üzere bu parametrelerin $M-$ tahmin edicileri

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i, \hat{\tau_{\mathbf{n}}}) = \mathbf{0} \tag{2.44}$$

denklemini sağlar. Aşağıda verilen Taylor açılımına göre,

$$\Psi(x_i,\hat{\tau}) = \Psi(x_i,\tau) + (\hat{\tau}-\tau)\dot{\Psi}(x_i,\tau) + \mathbf{R}_n^* \tag{2.45}$$

(2.44) denkleminden dolayı,

$$\mathbf{0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Psi(x_i,\tau) + (\hat{\tau}-\tau)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\Psi}(x_i,\tau) + \mathbf{R}_n$$

olur. $\dot{\Psi}(x_i,\tau) = \frac{\partial\Psi(x_i,\tau)}{\partial\tau^T}$ dır. $[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\Psi}(x_i,\tau)]^{-1}$ mevcut olmak üzere,

$$\begin{aligned} -(\hat{\tau}-\tau)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\Psi}(x_i,\tau) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Psi(x_i,\tau) + \mathbf{R}_n \\ (\hat{\tau}-\tau)B_n &= A_n + \mathbf{R}_n \\ \sqrt{n}(\hat{\tau}-\tau) &= B_n^{-1}\sqrt{n}A_n + \sqrt{n}\mathbf{R}_n \end{aligned} \tag{2.46}$$

dır. Burada $\sqrt{n}\mathbf{R}_n \xrightarrow{P} \mathbf{0}$ dır. Düzgünlük koşulları altında $n \to \infty$ iken, zayıf büyük sayılar yasası B_n'nin

$$B_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\dot{\Psi}(x_i,\tau)) \xrightarrow{P} E[-\dot{\Psi}(X,\tau)] = B \tag{2.47}$$

olduğunu gösterir. Merkezi limit teoremi A_n'nin,

$$\sqrt{n}A_n \xrightarrow{D} N_p(0,A), \quad A = E[\Psi(X,\tau)\Psi(X,\tau)^T] \tag{2.48}$$

olduğunu gösterir. Ψ $p \times 1$ boyutlu fonksiyondur. Böylelikle, Slutsky'nin çok değişkenli yardımcı teoremi aracılığı ile

$$\sqrt{n}(\hat{\tau}-\tau) \xrightarrow{D} N_p(0, B^{-1}A(B^T)^{-1}), \tag{2.49}$$

yani $p-$boyutlu asimptotik normal dağılıma sahiptir (Haberman 1989, Stefanski ve Boos 2002, Shao 2003, Maronna vd. 2006). Haberman (1989) çalışması ρ amaç fonksiyonunun simetrik veya asimetrik olması yerine konkav ya da ρ fonksiyonunun negatif ile çarpımı sonucu elde edilen konveks formunu kullanarak parametrelerin M-tahmin edicileri için asimptotik özelliklerinin (tutarlılık, asimptotik normallik) söylenebilmesinde koşullar vermiştir. Bu koşullar tez çalışmasının dördüncü bölümünde yer almaktadır. Konveks olan asimetrik ρ amaç fonksiyonu ele alınıp, incelenen parametreler için elde edilen asimetrik $M-$tahmin edicilerinin asimptotik özelliklerinin söylenebilmesinde bu koşullar kullanılabilir. Lehmann ve Casella (1998) çalışması, konveks veya konkav fonksiyonları (ρ) ve bu tür fonksiyonların ilgili parametrelere göre minimizasyonu (konveks fonksiyonlarda) veya maksimizasyonu (konkav fonksiyonlarda) sonucu bu parametreler için elde edilen $M-$tahmin edicilerinin asimptotik normalliği ve tutarlılığı ile ilgili koşulların, Haberman (1989) çalışması tarafından verildiğini de belirtmiştir. Aynı zamanda, Stefanski ve Boos (2002) çalışması da ψ fonksiyonu üzerinde simetriklik koşulunu vermeden birden fazla parametrenin $M-$tahmin edicileri için çok değişkenli Taylor açılımını vermiş ve parametrelerin $M-$tahmin edicilerinin dağılımının $p-$boyutlu asimptotik normal dağılıma sahip olduğunu belirtmiştir. Asimptotik teori ve Taylor açılımına dayalı olarak oluşturulan $p-$tane parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicileri içinde bu yaklaşım kullanılabilir.

3. $\varepsilon-$ÇARPIK ÜSTEL KUVVET DAĞILIMLAR AİLESİ

O'Hagan ve Leonhard (1976) tarafından yayınlanan makalede ilk defa çarpık normal dağılımdan söz edilmiştir. Azzalini (1985) tarafından yapılan çalışmada çarpık normal dağılım farklı bir formda oluşturulmuştur. Azzalini (1985, 1986), Henze (1986) ve Chiogna (1998) tarafından çarpık normal dağılımın çıkarımları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Mudholkar ve Hutson (2000) $\varepsilon-$çarpık normal dağılımı tanımlamıştır. Elsalloukh (2005) $\varepsilon-$çarpık normal dağılımın genelleştirmesi olan $\varepsilon-$çarpık üstel kuvvet dağılım ailesi (ESEP) ile çalışmıştır. Bu dağılımın özel bir hali olan $\varepsilon-$çarpık Laplace dağılımı Elsalloukh (2008) tarafından incelenmiştir. Çankaya vd. (2015) $\varepsilon-$çarpık üstel kuvvet dağılım ailesini çift tepeli forma taşımış olup, daha geniş bir aile oluşturmuştur. $\varepsilon-$ çarpık türünde literatürde öne sürülen dağılımların bir çoğu, önerilen bu dağılımın özel hallerinden elde edilebilmektedir.

Alışılageldik modelleme varsayımı normallik üzerinedir. Özellikle, normallik yerine uygun model seçimleri gerçekleştirilebilir. İstatistiksel çıkarımlarda varsayımlardan biri gözlemlerin aynı dağılımlı olmasıdır. Bu varsayım ve dağılım bilgisi, gerçek hayatı modellemede öne sürülen önemli kısıtlar olarak yer almaktadır. Diğer bir ifadeyle, dağılımın büyük bir çoğunluğu (underlying) ve buna bulaşmış (contaminated) olan bir başka dağılım veya dağılım bilgisi olmayan bir veri seti noktasında, uygun modeller oluşturmak dayanıklı istatistiğin amacıdır. Bu teori, normallikten sapmaların yanı sıra herhangi uygun parametrik modellerin oluşturulmasında da yer almaktadır (Hampel vd. 1986, Hampel 2000). Özellikle bu konuda, Arslan ve Genç (2003, 2009), Arslan (2004, 2009) tarafından yapılan çalışmalarda simetrik uzun kuyruklu ve asimetrik uzun kuyruklu dağılımların genelleştirilmesi ile oldukça esnek yapılı yeni dağılımlar elde edilerek ilgili genelleştirme parametreleri dayanıklılık ölçütü bazında ayarlama (tuning) katsayısı olarak kullanılmaktadır.

Veri setinde çarpıklık olduğunda modelleme problemi ile karşılaşılması kaçınılmazdır. Böyle bir durumda, ilgilenilen konum ve/veya ölçek parametrelerinin ML tahminlerinde etkinliğin düşeceğini beklemek yerinde olacaktır. Bu noktada, çarpıklık durumunu modelleyebilmek için ilgili bir parametre ile dağılıma esnekliğin kazandırılması gereklidir. Bu bölümde, çarpık veri setlerini modellemede etkin olduğu kabul edilen $\varepsilon-$çarpık dağılımlar ailesi ile ilgilenilecektir. Bu ailenin özel halleri olan $\varepsilon-$çarpık normal (ESN), $\varepsilon-$çarpık Laplace (ESL) ve $\varepsilon-$çarpık t (ESt) dağılımları kullanılacaktır. Eğer çarpıklık parametresi $\varepsilon = 0$ ise bu dağılımlar bilinen normal ve Laplace dağılımlarına dönüşmektedir. Bu bölümde, ESN, ESL ve ESt dağılımlarının $\theta \in \mathbb{R}$ konum, $\sigma > 0$ ölçek ve $\varepsilon \in (-1, 1)$ çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri verilmektedir. Bu ML tahmin edicileri ilgilenilen parametreler için kapalı formda elde edilmektedir. Dolayısıyla, sayısal yöntemlerin kullanılması gereklidir. Tez çalışmasında, bu sayısal yöntemlerden IRA kullanılacaktır. ESEP ailesinin kalın kuyruklu formlarından olan ESL ve ölçek karması olan $\varepsilon-$çarpık genelleştirilmiş t (ESGt) dağılımı ele alınmıştır. ESGt dağılımı, Arslan ve Genç (2009) tarafından önerilen değişken dönüştürmesi ile elde edilmiştir. Bu dağılım aynı zamanda Arslan ve Genç (2009) tarafından da incelenmiştir. $\varepsilon-$çarpık üstel kuvvet dağılım ailesinin Fisher bilgi matrisi Elsalloukh (2005) tarafından elde edilmiştir. Gomez vd. (2007) çalışmasında ESt dağılımı için Fisher bilgi matrisi elde edilmiştir. Bu bölümde, ESN ve ESt dağılımlarının θ konum, σ ölçek ve ε çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri verilecektir. ESL dağılımının düzgünlük koşullarını sağlamadığı gösterilecektir.

Log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametreye göre türevi sonucu elde edilen skor fonksiyonlarının oluşturduğu $\Psi(x)$ vektöründeki bir skor fonksiyonunun $x \to \infty$ iken sınırlı olmaması, etki fonksiyonunun her bir bileşeninin sınırlı olmamasına neden olur ve böylelikle ML tahmin edicilerinin etki fonksiyonu sınırlı olmaz. Bu durum, aynı zamanda ilgili parametrelere ilişkin ML tahmin edicileri için etki fonksiyonunun normu olan büyük hata duyarlılığının da sınırlı olmamasına neden olacaktır. Dolayısıyla, bu bölümde ESEP ailesinin α parametresi ile ESt dağılımının ν parametresinin skor fonksiyonları sınırlı olmadığından ilgili parametrelerin bilindiği kabul edilmek üzere, ESEP ve ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin etki fonksiyonunun sınırlı olup olmadığı incelenecektir. Bu bölümde ele alınan dağılımların θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri ilgili parametrelerin $M-$tahmin edicileri olarak değerlendirilebilir. Bu durum, $\rho = -log(f)$ olarak alınırsa gerçekleşir. Bunlara ilişkin örnek, Arslan ve Genç (2009) çalışmasında önerilen dağılımın konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri için verilmiştir. Aynı zamanda, Hampel vd. (1986) kaynağında normal dağılımın konum ve ölçek parametrelerinin ML tahmin edicileri için de bu durum ele alınmıştır. Dolayısıyla, bölüm 2'de verilen $M-$tahmin edicilerinin dayanıklılık özellikleri bu bölümde kullanılabilir.

3.1 $\varepsilon-$Çarpık Üstel Kuvvet Dağılım Ailesinin Tanımlanması

α bir şekil parametresi olmak üzere $Gamma(1/\alpha, 1)$ dağılımına sahip U rasgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} u^{1/\alpha-1} exp(-u), \quad u \in \mathbb{R}^+, \;\; \alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{3.1}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1. *U rasgele değişkeni $Gamma(1/\alpha, 1)$ dağılımına sahip olsun. I kesikli bir rasgele değişken olmak üzere*

$$I = \begin{cases} -\sqrt{2}(1+\varepsilon) & , \frac{1+\varepsilon}{2} \\ \sqrt{2}(1-\varepsilon) & , \frac{1-\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{3.2}$$

olasılık fonksiyonuna sahip olsun. Burada $\varepsilon \in (-1, 1)$'dır. I ve U rasgele değişkenlerinin bağımsız oldukları varsayılsın. Bu durumda,

$$X = I \cdot U^{1/\alpha} \tag{3.3}$$

olarak tanımlanan rasgele değişken aşağıda verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\Gamma(1/\alpha)} exp(-\frac{(-x)^\alpha}{2^{\alpha/2}(1+\varepsilon)^\alpha}), \; x < 0 \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\Gamma(1/\alpha)} exp(-\frac{(x)^\alpha}{2^{\alpha/2}(1-\varepsilon)^\alpha}), \; x \geq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Burada $\alpha > 0$ dağılımın basıklığını belirleyen parametre ve $\varepsilon \in (-1, 1)$ dağılımın çarpıklık parametresidir.

Tanım 3.1. *Eğer bir X rasgele değişkeni denklem* (3.4)*'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse X rasgele değişkenine $ESEP(\varepsilon, \alpha)$ dağılımına sahiptir denir.*

Elsalloukh (2005) tarafından tanımlanan bu dağılımın konum ölçek formu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Önerme 3.1. *$Z \sim ESEP(\varepsilon, \alpha)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda, $\theta \in \mathbb{R}$ konum, $\sigma > 0$ ölçek, $\varepsilon \in (-1, 1)$ çarpıklık ve $\alpha > 0$ basıklığını belirleyen parametreleri olmak üzere,*

$X = \theta + \sigma Z$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\sigma\Gamma(1/\alpha)} exp(-\frac{(\theta-x)^\alpha}{2^{\alpha/2}(1+\varepsilon)^\alpha\sigma^\alpha}), \ x < \theta \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\sigma\Gamma(1/\alpha)} exp(-\frac{(x-\theta)^\alpha}{2^{\alpha/2}(1-\varepsilon)^\alpha\sigma^\alpha}), \ x \geq \theta. \end{cases} \tag{3.5}$$

Bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir X rasgele değişkeni $X \sim ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ ile gösterilir.

Yukarıda tanımlanan $ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $sign$ fonksiyonu aracılığıyla

$$f_{ESEP}(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\sigma\Gamma(1/\alpha)} exp\{-(\frac{|x-\theta|}{2^{1/2}(1-sign(x-\theta)\varepsilon)\sigma})^\alpha\}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

olarak da yazılabilir.

Eğer $X \sim ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ ise X'in r'inci momenti

$$E(X-\theta)^r = \frac{2^{r/2}\sigma^r\Gamma((r+1)/\alpha)[(-1)^{-r}(1+\varepsilon)^{r+1} + (1-\varepsilon)^{r+1}]}{2\Gamma(1/\alpha)}, \quad r > 0 \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Burada beklenen değer çözülürken $\int_0^\infty x^m e^{-\beta x^n} dx = \frac{\Gamma(\gamma)}{n\beta^\gamma}$, $\gamma = \frac{m+1}{n}$, $\beta > 0, m > 0, n > 0$ eşitliklerinden yararlanılmıştır (Gradshteyn vd. 2007).

Eğer $X \sim ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ ise bu dağılım için $E(X)$ ve $Var(X)$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$E(X) = \theta - \frac{4\varepsilon\sigma\Gamma(2/\alpha)}{\sqrt{2}\Gamma(1/\alpha)} \tag{3.8}$$

$$Var(X) = \frac{2\sigma^2}{\Gamma(1/\alpha)}\left[\Gamma(3/\alpha) + \left(3\Gamma(3/\alpha) - \frac{4\Gamma^2(2/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)}\right)\varepsilon^2\right]. \tag{3.9}$$

3.2 $\varepsilon-$Çarpık Üstel Kuvvet Dağılımının θ, σ ve ε Parametreleri için ML Tahmin Edicileri

$X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ dağılımına sahip olsun ve α parametresinin bilindiği kabul edilsin. Biliniyor kabul edilmesinin nedeni, $\psi_\alpha(x)$ skor fonksiyonunun sınırlı olmamasındandır (Teorem 3.2'ye bkz).

Bu dağılımın θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerini elde etmek için

$$log(L(\theta,\sigma,\varepsilon;x)) = nlog\left[\frac{\alpha}{2^{3/2}\Gamma(1/\alpha)\sigma}\right] - \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i-\theta|^{\alpha}}{[2^{1/2}(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)\sigma]^{\alpha}} \tag{3.10}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre maksimum yapılması gereklidir. Bunun için log-olabilirlik fonksiyonunun θ, σ ve ε parametrelerine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle

$$\frac{\partial}{\partial\theta}logL = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha|x_i-\theta|^{\alpha-1}sign(x_i-\theta)}{(\sqrt{2}(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)\sigma)^{\alpha}} = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}logL = -\frac{n}{\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha|x_i-\theta|^{\alpha}}{(\sqrt{2}(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)\sigma)^{\alpha}\sigma} = 0, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}logL = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha|x_i-\theta|^{\alpha}sign(x_i-\theta)}{(\sqrt{2}(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)\sigma)^{\alpha}(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)} = 0, \tag{3.13}$$

denklemleri elde edilmiştir. (3.11)-(3.13) denklemlerinin ilgilenilen parametreye göre analitik olarak çözülmesi mümkün değildir. Dolayısıyla bu denklemlerde analitik düzenlemeler yapıldığında elde edilen ağırlık yardımıyla aşağıda verilen tahmin ediciler elde edilir:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}w(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n}w(x_i)}, \tag{3.14}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2, \tag{3.15}$$

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n}\frac{w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2 sign(x_i-\hat{\theta})}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2}\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2}. \tag{3.16}$$

Burada w ağırlık fonksiyonu

$$w(x_i) = \frac{\alpha|x_i-\hat{\theta}|^{\alpha-2}}{(2^{1/2}(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon}))^{\alpha}\hat{\sigma}^{\alpha-2}} \tag{3.17}$$

dır. (3.14)-(3.16) denklemleri kullanılarak θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için hesaplama yöntemi aşağıdaki kısımda verilmektedir.

3.3 $\varepsilon-$Çarpık Üstel Kuvvet Dağılımının θ, σ ve ε Parametreleri için ML Tahmin Edicilerinin Hesaplanması

$X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere IRA'nın adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım $\theta^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ ve $\varepsilon^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Ağırlık fonksiyonunun değerleri

$$w^{(k)}(x_i) = \frac{\alpha|x_i - \hat{\theta}^{(k)}|^{\alpha-2}}{(2^{1/2}(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)}))^{\alpha}\hat{\sigma}^{\alpha-2^{(k)}}}$$

şeklinde hesaplanır.

3. Adım Konum parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)}$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\sigma}^{2^{(k+1)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2$$

şeklinde hesaplanır.

5. Adım Çarpıklık parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\varepsilon}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w^{(k+1)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2 sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{w^{(k+1)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\theta}^{(k+1)}$, $\hat{\sigma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(k)}$ kullanılarak $2.$ adımdaki ağırlık yeniden hesaplanır.

6. Adım Eğer $(\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}, \hat{\sigma}^{(k+1)} - \hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\varepsilon}^{(k+1)} - \hat{\varepsilon}^{(k)})^T$ vektörünün norm değeri kabul edilen sayısal hata $e > 0$ değerinden büyük ise, $2 - 5$ adımları tekrar edilir. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır.

3.4 $\varepsilon-$Çarpık Üstel Kuvvet Dağılımının Özel Durumları

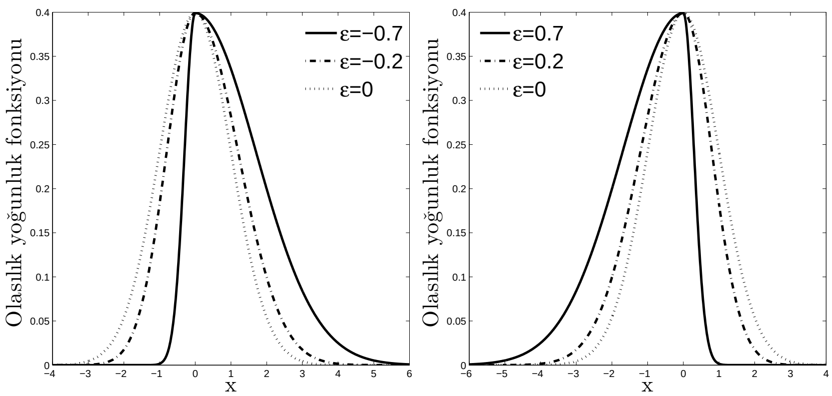
$ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ ailesinde $\alpha = 2$ için ESN dağılımı ve $\alpha = 1$ için ise ESL dağılımı elde edilmektedir. Bu dağılımlar hakkında detaylı bilgi aşağıdaki alt bölümlerde verilecektir.

3.4.1 $\varepsilon-$Çarpık normal dağılım

$\varepsilon-$çarpık normal (ESN) dağılım, denklem (3.6)'da verilen ESEP dağılımının $\alpha = 2$ için özel halidir. Bu dağılım, tek tepeli ve kuyrukları ince olan $\varepsilon-$çarpık bir dağılımdır ve aşağıda verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir:

$$f_{ESN}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\{-\frac{(x-\theta)^2}{2((1-sign(x-\theta)\varepsilon)\sigma)^2}\} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Tanım 3.2. *Eğer bir X rasgele değişkeni denklem* (3.18)*'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse X rasgele değişkenine $ESN(\theta, \sigma, \varepsilon)$ dağılımına sahiptir denir.*



(a) Pozitif eksene çarpık dağılım (b) Negatif eksene çarpık dağılım

Şekil 3.1 ESN dağılımı

(3.14)-(3.17) denklemlerinde $\alpha = 2$ için (3.19)-(3.21) denklemlerine ulaşılır. Burada, θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)}, \tag{3.19}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2, \tag{3.20}$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2 sign(x_i-\hat{\theta})}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2}. \tag{3.21}$$

Burada w ağırlık fonksiyonu

$$w(x_i) = \frac{1}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta})\varepsilon)^2}$$

dır. $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere (3.19)-(3.21) denklemleri kullanılarak θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için IRA'nın adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım $\theta^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ ve $\varepsilon^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Ağırlık fonksiyonunun değerleri

$$w^{(k)}(x_i) = \frac{1}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır.

3. Adım Konum parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)}$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2$$

şeklinde hesaplanır.

5. Adım Çarpıklık parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\varepsilon}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w^{(k+1)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2 sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{w^{(k+1)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\theta}^{(k+1)}$, $\hat{\sigma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(k)}$ kullanılarak 2. adımdaki ağırlık yeniden hesaplanır.

6. Adım Eğer $(\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}, \hat{\sigma}^{(k+1)} - \hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\varepsilon}^{(k+1)} - \hat{\varepsilon}^{(k)})^T$ vektörünün norm değeri kabul edilen sayısal hata $e > 0$ değerinden büyük ise, $2 - 5$ adımları tekrar edilir. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır.

3.4.2 $\varepsilon-$Çarpık Laplace dağılımı

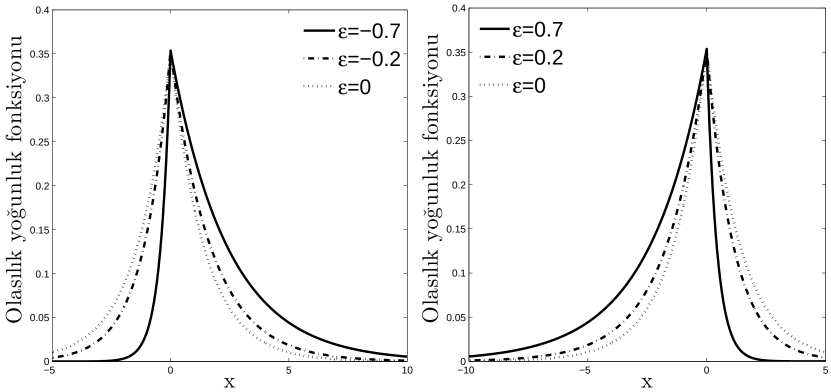
$\varepsilon-$çarpık Laplace dağılımı, denklem (3.6)'da verilen ESEP dağılımının $\alpha = 1$ için özel halidir. ESL dağılımı, keskin ve tek tepeli, kalın kuyruklu ve ε-çarpık bir dağılımdır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{ESL}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma} exp\{-(\frac{|x-\theta|}{2^{1/2}(1-sign(x-\theta)\varepsilon)\sigma})\} \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.22}$$

ile verilmektedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.3. *Eğer bir X rasgele değişkeni denklem* (3.22)*'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse X rasgele değişkenine $ESL(\theta, \sigma, \varepsilon)$ dağılımına sahiptir denir.*

$\theta = 0$, $\sigma = 1$ ve farklı çarpıklık parametre değerleri için ESL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun şekli aşağıdaki gibi verilmektedir.



(a) Pozitif eksene çarpık dağılım (b) Negatif eksene çarpık dağılım

Şekil 3.2 ESL dağılımı

(3.14)-(3.17) denklemlerinde $\alpha = 1$ için (3.23)-(3.25) denklemlerine ulaşılır. Böylece, θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)}, \tag{3.23}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2, \tag{3.24}$$

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2 sign(x_i-\hat{\theta})}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2} \tag{3.25}$$

olarak elde edilir. Burada w ağırlık fonksiyonu

$$w(x_i) = \frac{|x_i-\hat{\theta}|}{(2^{1/2}(1-sign(x-\theta)\varepsilon))\sigma^{-1}}$$

dır. $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere (3.23)-(3.25) denklemleri kullanılarak θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için IRA'ya ilişkin adımlar aşağıdaki gibidir:

$X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere IRA'nın adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım $\theta^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ ve $\varepsilon^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Ağırlık fonksiyonunun değerleri

$$w^{(k)}(x_i) = \frac{|x_i-\hat{\theta}^{(k)}|^{-1}}{(2^{1/2}(1-sign(x_i-\hat{\theta}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)}))\hat{\sigma}^{-1^{(k)}}}$$

şeklinde hesaplanır.

3. Adım Konum parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)}$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\sigma}^{2^{(k+1)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)(x_i-\hat{\theta}^{(k+1)})^2$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\theta}^{(k+1)}$, $\hat{\sigma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(k)}$ kullanılarak 2. adımdaki ağırlık yeniden hesaplanır.

5. Adım Çarpıklık parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\varepsilon}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w^{(k+1)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2 sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{w^{(k+1)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır.

6. Adım Eğer $(\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}, \hat{\sigma}^{(k+1)} - \hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\varepsilon}^{(k+1)} - \hat{\varepsilon}^{(k)})^T$ vektörünün norm değeri kabul edilen sayısal hata $e > 0$ değerinden büyük ise, $2 - 5$ adımları tekrar edilir. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır.

3.5 $\varepsilon-$Çarpık Üstel Kuvvet Dağılımının Parametreleri için ML Tahmin Edicilerinin Dayanıklılık Özelliği

Bu kısımda, ESEP dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin yerel dayanıklılık ölçüsü olarak etki fonksiyonu elde edilecektir. İlgilenilen parametrelerden en az birinin skor fonksiyonu sınırlı değilse etki fonksiyonuda sınırlı olmayacaktır (Hampel vd. 1986, Arslan ve Genç 2009).

$\tau = (\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ ESEP dağılımının parametrelerini gösteren bir vektör olsun. Bu dağılımın parametrelerinin ML tahmin edicileri $\hat{\tau}$ olsun. $\hat{\tau}$ tahmin edicisinin etki fonksiyonu $IF(x; \hat{\tau}, F_{ESEP}) = -[E(\frac{\partial}{\partial \tau}\psi(x;\tau))]^{-1}\Psi(x;\tau)$ dır. Burada $\Psi = \frac{\partial}{\partial \tau}(-log f)$ skor fonksiyonlarının oluşturduğu vektördür. Bu vektörde yer alan α basıklık parametresinin ψ_α skor fonksiyonunun sınırlı olmadığı gösterilecektir. ψ_α skor fonksiyonu IF vektöründen çıkarılmıştır. Böylelikle de α parametresinin bilindiği kabul edilmiş olup; $\hat{\theta}, \hat{\sigma}$ ve $\hat{\varepsilon}$ ML tahmin edicileri için etki fonksiyonu aşağıda verilen alt bölümde yeniden açık bir formda elde edilecektir.

ESEP dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için büyük hata duyarlılığı elde edilecek ve θ parametresinin ML tahmin edicisinin kırılma noktası da incelenecektir.

3.5.1 $\varepsilon-$Çarpık üstel kuvvet dağılımının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicilerinin etki fonksiyonu

ML tahmin edicilerinin yerel dayanıklılığı (2.30) denkleminde verilen etki fonksiyonu aracılığı ile incelenecektir. ESEP dağılımlar ailesinin özel halleri olan ESN, ESL dağılımlarının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için etki fonksiyonunun sınırlı olup olmadığı aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 3.2. *(Skor fonksiyonları) $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda, θ, σ, ε ve α parametrelerinin skor fonksiyonları*

$$\begin{aligned}
\psi_\theta(x) &= \frac{\alpha|x|^{\alpha-1}sign(x)}{[2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon)]^\alpha} \\
\psi_\sigma(x) &= -1+\frac{\alpha|x|^\alpha}{[2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon)]^\alpha} \\
\psi_\varepsilon(x) &= \frac{\alpha|x|^\alpha sign(x)}{2^{\alpha/2}(1-sign(x)\varepsilon)^{\alpha+1}} \\
\psi_\alpha(x) &= -\frac{\Gamma(1/\alpha)+\Gamma'(1/\alpha)\alpha^{-1}}{\alpha\Gamma(1/\alpha)}+\frac{|x|^\alpha\{log|x|-log[2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon)]\}}{[2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon)]^\alpha}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

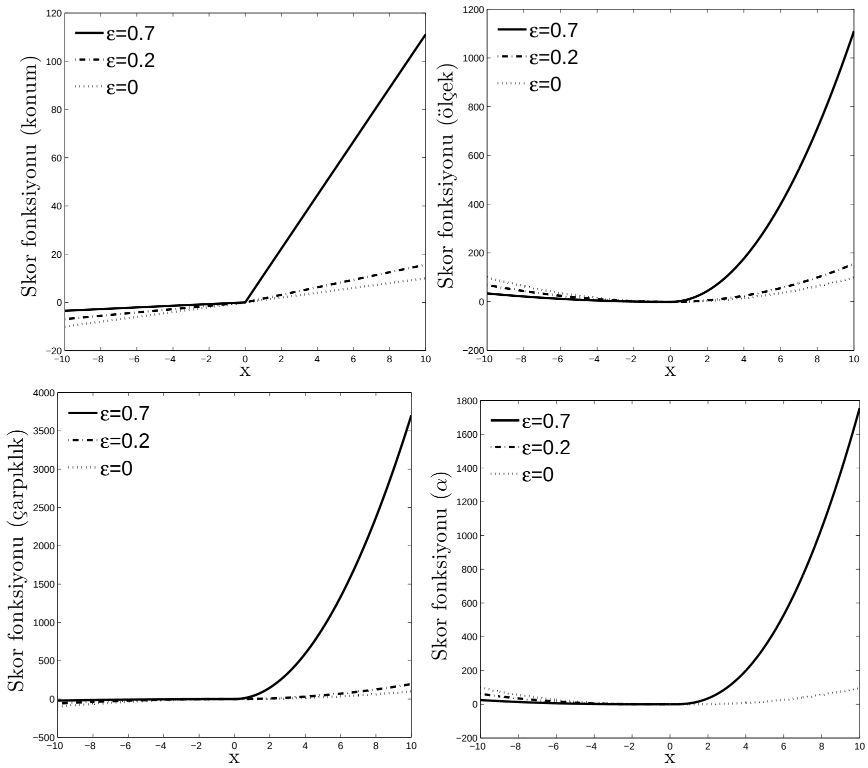
olup $\alpha > 1$ için $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\theta(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\sigma(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\varepsilon(x)=\infty$ ve $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\alpha(x)=\infty$ olduğundan, θ, σ, ε ve α parametrelerinin skor fonksiyonları sınırlı değildir. $\alpha < 1$ için $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\theta(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\sigma(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\varepsilon(x)=\infty$ ve $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\alpha(x)=\infty$ dır. $\alpha = 1$ için $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\theta(x)=\frac{sign(x)}{2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon)}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\sigma(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\varepsilon(x)=\infty$ ve $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\alpha(x)=\infty$ olarak bulunmuştur.

Sonuç Teoremi 3.1. *(Etki Fonksiyonu) $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ dağılımına sahip olsun. θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için etki fonksiyonu*

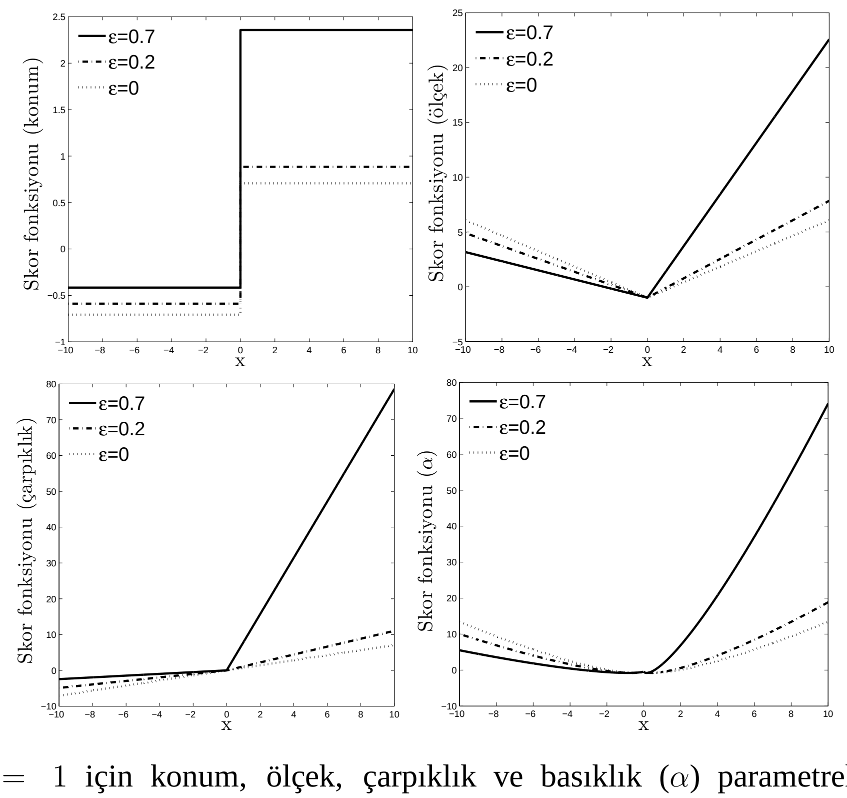
$$IF(x;\hat\theta,\hat\sigma,\hat\varepsilon)=\begin{bmatrix} T_{11}\psi_\theta(x)+T_{12}\psi_\sigma(x)+T_{13}\psi_\varepsilon(x) \\ T_{21}\psi_\theta(x)+T_{22}\psi_\sigma(x)+T_{23}\psi_\varepsilon(x) \\ T_{31}\psi_\theta(x)+T_{32}\psi_\sigma(x)+T_{33}\psi_\varepsilon(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} IF_1(x;\hat\theta,\hat\sigma,\hat\varepsilon) \\ IF_2(x;\hat\theta,\hat\sigma,\hat\varepsilon) \\ IF_3(x;\hat\theta,\hat\sigma,\hat\varepsilon) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

şeklinde bulunur. Burada T_{ij}, M matrisinin tersinin i. satırını ve j. sütununu gösterir ($i, j = 1, 2, 3$) ve M matrisinin tanımı denklem (2.31)'de verilmektedir. Verilen ML tahmin edicilerinin $IF(x;\hat\theta,\hat\sigma,\hat\varepsilon)$ etki fonksiyonu sınırlı değildir. Çünkü, $\psi_\sigma(x)$ ve $\psi_\varepsilon(x)$ skor fonksiyonları sınırlı değildir. Bu durumda, ESEP dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri dayanıklı değildir.

Büyük Hata Duyarlılığı: $ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon)$ dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin



Şekil 3.3 $\alpha = 2$ için konum, ölçek, çarpıklık ve basıklık (α) parametreleri için skor fonksiyonları



Şekil 3.4 $\alpha = 1$ için konum, ölçek, çarpıklık ve basıklık (α) parametreleri için skor fonksiyonları

edicilerinin $IF(x, \hat{\tau})$ etki fonksiyonunun normu büyük hata duyarlılığıdır:

$$GES(\hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, F_{ESEP}) = \{(IF_1)^2 + (IF_2)^2 + (IF_3)^2\}^{1/2}. \tag{3.28}$$

IF_1, IF_2 veya IF_3 etki fonksiyonunun bileşenlerinden herhangi biri sınırlı olmadığından $GES(\hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, F_{ESEP})$ fonksiyonu da sınırlı olmayacaktır.

3.5.2 $\varepsilon-$Çarpık üstel kuvvet dağılımının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicilerinin bilgi standardize duyarlılığı

Denklem (2.34)'de verilen formül kullanılarak θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için bilgi-standardize duyarlılık fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \gamma_i^*(\hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, F_{ESEP}) &= \{IF_1^2 I(\theta) + IF_2 IF_1 I(\sigma,\theta) + IF_3 IF_1 I(\varepsilon,\theta) \\ &+ IF_1 IF_2 I(\theta,\sigma) + IF_2^2 I(\sigma) + IF_3 IF_2 I(\varepsilon,\sigma) \\ &+ IF_1 IF_3 I(\theta,\varepsilon) + IF_2 IF_3 I(\sigma,\varepsilon) + IF_3^2 I(\varepsilon)\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Burada IF vektöründeki IF_1, IF_2 ve IF_3 bileşenlerinin yukarıda verildiği gibi birbirleri ile çarpımı sonucu $\psi_\theta^2, \psi_\theta\psi_\sigma, \psi_\theta\psi_\varepsilon, \psi_\sigma^2, \psi_\sigma\psi_\varepsilon$ ve ψ_ε^2 fonksiyonları elde edilmektedir. Bu skor fonksiyonlarının çarpımı sonucu oluşan ifadeler sınırlı ve aynı zamanda Fisher bilgi matrisinin her bir elemanı var olmalı ve elde edilen Fisher bilgi matrisinin her bir değerinin parametre veya parametrelerinin bazı değerleri için sınırlı olması gereklidir. Bu durumda, bilgi-standardize duyarlılık fonksiyonu sınırlıdır. Denklem (3.29) kullanılarak ESEP ve ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için bilgi standardize duyarlılık ile ilgili sonuç teoremi verilecektir.

Sonuç Teoremi 3.2. *(Bilgi-standardize duyarlılık) $X \sim ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ olsun ve α parametresinin bilindiği kabul edilsin. Bu durumda,*

1. *$\alpha = 1$ için $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\theta^2(x) = (2^{1/2}(1 - sign(x)\varepsilon))^{-1}$ dır.*

2. *$\alpha \in (0,1)$ için $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\theta^2(x) = 0$ dır.*

3. *$\alpha \in (1,\infty)$ için $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\theta^2(x) = \infty$ dır.*

4. *$\alpha = 1/2$ için $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\theta(x)\psi_\varepsilon(x) = (4\sqrt{2}(1 - sign(x)\varepsilon)^2)^{-1}$ dır.*

5. $\alpha \in (0, 1/2)$ *için* $\lim\limits_{x\to\infty}[\psi_\theta(x)\psi_\varepsilon(x)] = 0$ *dır.*

6. $\alpha \in (1/2, \infty)$ *için* $\lim\limits_{x\to\infty}[\psi_\theta(x)\psi_\varepsilon(x)] = \infty$ *dır.*

7. $2.$ *ve* $5.$ *durumlarında yer alan* $\psi_\theta^2(x)$ *ve* $\psi_\theta(x)\psi_\varepsilon(x)$ *fonksiyonları birlikte değerlendirildiğinde,* $\alpha \in (0, 1/2)$ *iken* $\lim\limits_{x\to\infty}[\psi_\theta(x)\psi_\varepsilon(x)] = 0$ *ve* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\theta^2(x) = 0$ *olmaktadır.*

8. $3.$ *ve* $6.$ *durumlarında yer alan* α *için* $\alpha \in (1, \infty)$ *iken* $\lim\limits_{x\to\infty}[\psi_\theta(x)\psi_\varepsilon(x)] = \infty$*,* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\theta^2(x) = \infty$ *olmaktadır.*

9. $\alpha > 0$ *olduğundan* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\varepsilon^2(x) = \infty$*,* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\sigma^2(x) = \infty$*,* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\sigma(x)\psi_\varepsilon(x) = \infty$*,* $\alpha \in (0, 1/2)$ *için* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\theta(x)\psi_\sigma(x) = 0$*,* $\alpha = 1/2$ *için* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\theta(x)\psi_\sigma(x) = \frac{\alpha^2 sign(x)}{(2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon))^{2\alpha}}$ *ve* $\alpha > 1/2$ *için* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\theta(x)\psi_\sigma(x) = \infty$ *dır.*

10. $\alpha = 1/2$ *için* $\psi_\theta(x)$ *ve* $\psi_\varepsilon(x)$ *fonksiyonlarının çarpımı sınırlıdır. Ancak,* $\alpha = 1/2$ *için* $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_\varepsilon(x)$ *fonksiyonu sınırlı değildir.*

olduğundan, $ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ *dağılımının* θ*,* σ *ve* ε *parametrelerinin ML tahmin edicileri dayanıklı değildir. Ancak,* $\alpha \in (0, 1]$ *için* θ *parametresinin skor fonksiyonu sınırlıdır. Dolayısı ile,* $\sigma > 0$ *ve* $\varepsilon \in (-1, 1)$ *olup bu parametreler bilinmek üzere* θ *parametresinin ML tahmin edicisi dayanıklıdır.*

3.5.3 $\varepsilon-$Çarpık üstel kuvvet dağılımının θ parametresi için ML tahmin edicisinin kırılma noktası

Simetrik olma koşulu burada kaldırılabilir. Çünkü, $\varepsilon-$çarpık durumda da ilgili dağılımın ML tahmin edicisi dayanıklı olabilmektedir. Ayrıca, asimetrik durumda da konvekslik korunmaktadır. Dolayısıyla, Huber (1984) çalışmasında azalan, Zhang ve Li (1998) çalışmasında ise monoton ψ fonksiyonlarının kırılma noktasının $1/2$ olması için gerekli koşullar burada da kullanılabilir ve aşağıda verilmektedir.

1. $\rho(0) = 0$ dır (Huber 1984, Zhang ve Li 1998).

2. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\rho(x) = \infty$ dır (Huber 1984, Zhang ve Li 1998).

3. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\rho(x)}{|x|} = 0$ dır (Huber 1984).

4.i (Monoton ψ için) ψ fonksiyonu $0 < x \leq x_0$ aralığında azalmayan, $x_0 < x < \infty$ aralığında artmayan olacak şekilde bir x_0 noktası var olsun (Zhang ve Li 1998).

4.ii (Azalan ψ için) ψ fonksiyonu $0 < x \leq x_0$ aralığında zayıf artarken, $x_0 < x < \infty$ aralığında zayıf azalan olacak şekilde bir x_0 noktası var olsun (Huber 1984).

Burada, θ konum parametresinin ML tahmin edicisinin kırılma noktası incelenecektir. $X \sim ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ olsun. Bu durumda, bu dağılımın amaç fonksiyonu $\rho = -log(f)$ olmak üzere $\rho_{ESEP}(x) = \frac{|x|^{\alpha}}{(2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon))^{\alpha}}$ olarak elde edilir. Bu amaç fonksiyonuna ilişkin $\psi_{ESEP}(x) = \frac{d}{dx}\rho_{ESEP}(x)$ fonksiyonu $\psi_{ESEP}(x) = \frac{\alpha|x|^{\alpha-1}sign(x)}{(2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon))^{\alpha}}$ olarak elde edilir. Denklem (3.26)'da verilen θ parametresinin ML tahmin edicisi ile x'e göre türevi alınarak elde edilen ψ_{ESEP} fonksiyonu aynıdır. ψ_{ESEP} fonksiyonunun monoton bir fonksiyon olduğu varsayılsın ve θ parametresinin ML tahmin edicisinin kırılma noktasına ilişkin yukarıda verilen $1, 2, 3$ ve $4.i$ koşulları ele alınsın. Bu koşullar

1. $\rho(0) = 0$ dır,

2. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \rho_{ESEP}(x) = \infty$ dır,

3. $$\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\rho_{ESEP}(x)}{|x|} = \begin{cases} 0, & \alpha < 1; \\ \frac{1}{2^{1/2}(1-\varepsilon)}, & \alpha = 1; \\ \infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

4.i ψ_{ESEP} fonksiyonunun bir x_0 noktası için $0 < x \leq x_0$ aralığında azalmayan, $x_0 < x < \infty$ aralığında artmayan olup olmadığını incelemek için birinci mertebeden türevini ele alalım. $\psi'_{ESEP}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)|x|^{\alpha-2}}{(2^{1/2}(1-sign(x)\varepsilon))^{\alpha}} = 0$ olmak üzere $\psi'_{ESEP}(x) = 0$ denkleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm $x_0 = 0$ noktasıdır. Burada $4.i$ koşulunun sağlanmadığı açıktır,

şeklindedir. Bu durumda ESEP dağılımlar ailesinin θ parametresi için ML tahmin edicisinin kırılma noktası ile ilgili sonuç teoremi aşağıdaki gibidir.

Sonuç Teoremi 3.3. *(Kırılma Noktası) $X \sim ESEP(\theta,\sigma,\varepsilon,\alpha)$ olsun. $\alpha > 1$ için yukarıdaki koşullar sağlanmadığından θ parametresinin ML tahmin edicisinin kırılma noktası $1/2$ değildir. Ancak, $\alpha \leq 1$ için θ parametresinin ML tahmin edicisinin kırılma noktası $1/2$'dir.*

3.6 $\varepsilon-$Çarpık Üstel Kuvvet Dağılımlar Ailesindeki θ, σ ve ε Parametreleri için ML Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri

$X \sim ESEP(\theta,\sigma,\varepsilon,\alpha)$ olsun. Burada α parametresinin bilindiği varsayılmıştır. θ, σ ve ε parametreleri için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbf{I}_{ESEP} = n\begin{bmatrix} \frac{\alpha(\alpha-1)\Gamma(1-1/\alpha)}{2\sigma^2\Gamma(1/\alpha)(1-\varepsilon^2)} & 0 & \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}\sigma\Gamma(1/\alpha)(1-\varepsilon^2)} \\ & \frac{-1}{\sigma^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(1+1/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)\sigma^2} & 0 \\ & & \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(1+1/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)(1-\varepsilon^2)} \end{bmatrix}$$

dır. Bu Fisher bilgi matrisi kullanılarak θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için asimptotik varyans kovaryans değerleri aşağıda verilmiştir.

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{2(\alpha+1)\Gamma(1+1/\alpha)\Gamma(1/\alpha)\sigma^2(1-\varepsilon^2)}{\alpha n[\Gamma(1+1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)\alpha^2 - \Gamma(1-1/\alpha)\Gamma(1+1/\alpha) - \alpha^2]} \tag{3.30}$$

$$Cov(\hat{\theta},\hat{\sigma}) = 0 \tag{3.31}$$

$$Cov(\hat{\theta},\hat{\varepsilon}) = \frac{\sqrt{2}\sigma\Gamma(1/\alpha)(\varepsilon^2-1)}{n[\Gamma(1+1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)\alpha^2 - \Gamma(1-1/\alpha)\Gamma(1+1/\alpha) - \alpha^2]} \tag{3.32}$$

$$Var(\hat{\sigma}) = -\frac{\Gamma(1/\alpha)\sigma^2}{n[-\alpha^2\Gamma(1+1/\alpha) - \alpha\Gamma(1+1/\alpha) + \Gamma(1/\alpha)]} \tag{3.33}$$

$$Cov(\hat{\sigma},\hat{\varepsilon}) = 0 \tag{3.34}$$

$$Var(\hat{\varepsilon}) = \frac{(\alpha-1)\Gamma(1-1/\alpha)\Gamma(1/\alpha)(1-\varepsilon^2)}{\alpha n[\Gamma(1+1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)\alpha^2 - \Gamma(1-1/\alpha)\Gamma(1+1/\alpha) - \alpha^2]} \tag{3.35}$$

Elsalloukh (2005) ESEP dağılımının Fisher bilgi matrisini elde etmiştir. Bu kısımda, yeniden elde edilmiş ve farklı bulunmuştur.

3.6.1 ESN dağılımının parametreleri için ML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri

$X \sim ESN(\theta, \sigma, \varepsilon)$ olsun. θ, σ ve ε parametreleri için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbf{I}_{ESN} = n \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2(1-\varepsilon^2)} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}(1-\varepsilon^2)} \\ & \frac{2}{\sigma^2} & 0 \\ & & \frac{3}{1-\varepsilon^2} \end{bmatrix}$$

dır. Bölüm 1.1'de verilen (iv), (v), (vi) ve (vii) koşullarının sağlanması durumunda ML tahmin edicileri, asimptotik normal dağılımlı, tutarlı ve asimptotik etkindir. (iv) koşulu üçüncü mertebeye kadar parametreye göre kısmi türevlerinin var olmasını gerektirir. ESN dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun $log(f)$ fonksiyonunda parametrelere göre elde edilen kısmi türevleri, Ek 1'de (1.2)-(1.11) denklemlerinde verilmektedir. (iv) koşulu sağlanmıştır. (v) koşulu ise Fisher bilgi matrisinin var olmasını gerektirir. ESN dağılımının Fisher bilgi matrisi var olduğundan bu koşul da sağlanmıştır. (vi) koşulu Fisher bilgi matrisinin determinantının sonlu olmasını gerektirir. Burada $det(\mathbf{I}_{ESN}) = \frac{2n^3(3\pi-8)}{\sigma^4\pi(1-\varepsilon^2)^2}$ olup (vi) koşulu sağlanmıştır. (iv) koşulunun sağlandığı bilinmektedir. Bu koşuldaki üçüncü mertebeye kadar olan kısmi türevleri sonucu elde edilen ifadelerden büyük eşit herhangi bir M_{jkl} fonksiyonunun beklenen değeri sonlu ise bu koşulda sağlanmış olacaktır. $M_{jkl} = (X - \theta)^r$ olarak seçilebilir. Bu ise, $E(X - \theta)^r$'dır ve denklem (3.7)'de sonlu bir beklenen değer vardır. Dolayısıyla, (vii) koşulu da sağlanmıştır.

Denklem (3.10)'da verilen olabilirlik fonksiyonunun maksimum değerine ulaşıp ulaşmadığını test etmek için ikinci türev testi yapılmıştır. İkinci türev testi için gerekli olan Hessian matrisi Ek 1'de (1.13)'de verilmiştir. Bu matrisin öz değerlerinin negatif olması analitik olarak gösterilemeyeceği için sayısal olarak hesaplanan öz değerlerinin negatif olup olmadığı simülasyon çalışmasında incelenecektir.

Teorem 3.3. *$\tau = (\theta, \sigma, \varepsilon)$ parametre vektörü olmak üzere $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenleri $ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda, α parametresi bilinmek üzere θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

1. $\sqrt{n}(\hat{\tau}-\tau) \xrightarrow{D} N_3(\mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}(\tau))$ *dır. Burada*

$$\mathbf{I}^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} Var(\hat{\theta}) & Cov(\hat{\theta},\hat{\sigma}) & Cov(\hat{\theta},\hat{\varepsilon}) \\ & Var(\hat{\sigma}) & Cov(\hat{\sigma},\hat{\varepsilon}) \\ & & Var(\hat{\varepsilon}) \end{bmatrix}$$

dır. Böylelikle, θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin $\%100(1-\delta)$ güven aralıkları $\hat{\theta} \pm z_{\frac{\delta}{2}}(Var(\hat{\theta})/n)^{1/2}$, $\hat{\sigma} \pm z_{\frac{\delta}{2}}(Var(\hat{\sigma})/n)^{1/2}$ ve $\hat{\varepsilon} \pm z_{\frac{\delta}{2}}(Var(\hat{\varepsilon})/n)^{1/2}$ biçimindedir. Burada $z_{\frac{\delta}{2}}$ standard normal dağılımın üst $\delta/2$ıncı yüzdeliğidir.

2. *Bu parametrelerin ML tahmin edicileri tutarlıdır.*

3. *Bu parametrelerin ML tahmin edicileri asimptotik etkindir.*

N_3, θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin ortak dağılımının $3-$boyutlu asimptotik normal dağılım olduğunu göstermektedir. Asimptotik varyans değerleri Fisher bilgi matrisinin tersi olup, $\theta = \theta_0 \in \mathbb{R}, \sigma = 1$ ve $\varepsilon = -0.2, -0.5, -0.8$ parametre değerleri için aşağıdaki Çizelge 3.1'de verilmektedir. Bu değerler, simülasyon çalışmasında seçilen parametre değerleri için hesaplanmıştır.

Çizelge 3.1 ESN dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için asimptotik varyans değerleri ($\alpha = 2$)

	$Var(\hat{\tau})/n$	$n=30$	$n=50$	$n=100$	$n=150$
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.211680	0.127008	0.063504	0.042336
$\varepsilon=-0.2$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.016667	0.010000	0.005000	0.003333
	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.070560	0.042336	0.021168	0.014112
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.165375	0.099225	0.049612	0.033075
$\varepsilon=-0.5$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.016667	0.010000	0.005000	0.003333
	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.055125	0.033075	0.016538	0.011025
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.079380	0.047628	0.023814	0.015876
$\varepsilon=-0.8$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.016667	0.010000	0.005000	0.003333
	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.026460	0.015876	0.007938	0.005292

$\varepsilon-$çarpık Laplace dağılımının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicilerinin asimptotik varyans değerleri verilememektedir. Çünkü, $\alpha = 1$ için Γ fonksiyonu sonsuz değerini vermektedir. $\alpha = 1$ ve $\varepsilon = 0$ için elde edilen Laplace dağılımının düzgünlük koşullarını sağlamadığı Hogg vd. (2005) çalışmasında belirtilmiştir. Dolayısıyla, düzgünlük koşulları sağlanamadığından asimptotik özellikleri de incelenememiştir.

3.7 $\varepsilon-$Çarpık t Dağılımı

$ESEP(\varepsilon,\alpha)$ dağılımı bazı parametre değerlerinde ince kuyruklu bir dağılımdır. Sapan gözlem olması durumunda, kalın kuyruklu dağılımlar ince kuyruklu dağılımlara göre veriyi daha iyi modelleyebilirler. Bu sebeple, kalın kuyruklu bir dağılım elde etmek önem arz etmektedir. Bunun için $ESEP(\varepsilon,\alpha)$ dağılımı ile uygun başka bir dağılımın ölçek karması yapılabilir. Burada, ölçek rasgele değişkeni olarak McDonald ve Butler (1987) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş gamma (GG) dağılımı kullanılabilir. GG dağılımı şu şekilde tanımlıdır:

Z bir rasgele değişken olmak üzere $GG(\alpha/2,1,q)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{GG}(z;\frac{\alpha}{2},1,q)=\frac{\alpha}{2\Gamma(q)}z^{(\alpha q)/2-1}exp(-z^{\alpha/2})\quad z>0,\alpha>0,q>0 \tag{3.36}$$

şeklindedir. Bu bilgiler yardımıyla, kalın kuyruklu bir dağılım Arslan ve Genç (2009) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Teorem 3.4. *Y ve Z iki bağımsız rasgele değişken olmak üzere $Y\sim ESEP(\varepsilon,\alpha)$ ve $Z\sim GG(\alpha/2,1,q)$ olsun. Bu durumda*

$$X=\theta+q^{1/\alpha}\sigma YZ^{-1/2} \tag{3.37}$$

ile tanımlanan X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\varepsilon-$ çarpık genelleştirilmiş t dağılımına sahiptir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{2}B(1/\alpha,q)q^{1/\alpha}\sigma}\left(1+\frac{|x-\theta|^{\alpha}}{2^{\alpha/2}(1-sign(x-\theta)\varepsilon)^{\alpha}q\sigma^{\alpha}}\right)^{-(\frac{\alpha q+1}{\alpha})},x\in\mathbb{R} \tag{3.38}$$

dır. Burada $a,b>0$ olmak üzere $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ Beta fonksiyonudur. $\theta\in\mathbb{R}$ konum parametresi, $\sigma>0$ ölçek parametresi, $\varepsilon\in(-1,1)$ çarpıklık parametresi, $\alpha>0$ dağılımın basıklığını ve $q>0$ ise dağılımın kuyruklarını belirleyen şekil parametreleridir.

Tanım 3.4. *Eğer bir X rasgele değişkeni denklem* (3.38)*'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse X rasgele değişkenine $ESGt(\theta,\sigma,\varepsilon,\alpha,q)$ dağılımına sahiptir denir.*

Eğer $X \sim ESGt(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha, q)$ ise X'in r. merkezi momenti

$$E((X-\theta)^r) = \frac{2^{r/2-1} q^{r/\alpha} \sigma^r \Gamma(\frac{r+1}{\alpha}) \Gamma(q - r/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(q)} [(1-\varepsilon)^{r+1} + (1+\varepsilon)^{r+1}(-1)^{-r}], q\alpha > r \tag{3.39}$$

olarak elde edilir. Beklenen değer çözümünde

$$\int_0^\infty y^r (1+uy^k)^{-m} dy = \frac{B(\frac{r+1}{k}, m - \frac{r+1}{k})}{ku^{\frac{r+1}{k}}}, \;\; 0 < \frac{r+1}{k} < m$$

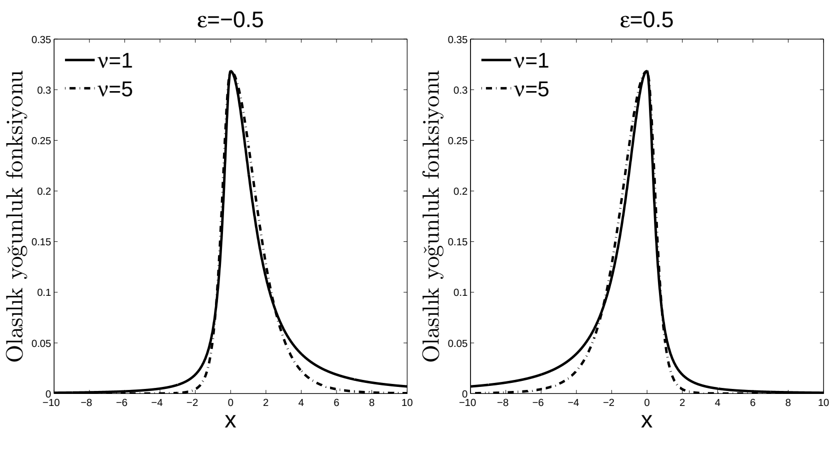
eşitliğinden yararlanılmıştır (Gradshteyn vd. 2007).

Tanım 3.5. *$ESGt$ dağılımında özel olarak $\alpha = 2$ ve $q = \nu/2$ seçilmesi ile elde edilen dağılıma $\varepsilon-$çarpık t dağılımı denir (Arslan ve Genç 2009).*

Bir X rasgele değişkeni $ESt(\theta, \sigma, \varepsilon, \nu)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{ESt}(x) = \frac{c(\nu)}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x-\theta}{\sigma(1 - sign(x-\theta)\varepsilon)} \right)^2 \right]^{-(\nu+1)/2} \tag{3.40}$$

şeklindedir. Burada $c(\nu) = \frac{\Gamma(v/2+1/2)}{(\nu\pi)^{(1/2)}\Gamma(\nu/2)}$ dır. $\theta \in \mathbb{R}$ konum, $\sigma > 0$ ölçek, $\varepsilon \in (-1, 1)$ çarpıklık ve $\nu > 0$ kalın kuyruklu olup olmamasını belirleyen parametrelerdir. Aşağıdaki şekillerde farklı ν ve ε değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonunun şekilleri verilmektedir.



(a) Pozitif eksene çarpık dağılım (b) Negatif eksene çarpık dağılım

Şekil 3.5 ESt dağılımı

Eğer $X \sim ESt(\theta, \sigma, \varepsilon, \nu)$ ise, bu dağılım için $E(X)$ ve $Var(X)$

$$E(X) = \theta - \frac{4c(v)\varepsilon\sigma\nu}{\nu - 1}, \nu > 1 \quad (3.41)$$

$$Var(X) = \sigma^2[\frac{\nu(1 + 3\varepsilon^2)}{\nu - 2} - \frac{16(c(\nu)\varepsilon\nu)^2}{(\nu - 1)^2}], \nu > 2 \quad (3.42)$$

dır.

3.7.1 $\varepsilon-$Çarpık t dağılımının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri

$X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $ESt(\theta, \sigma, \varepsilon, \nu)$ dağılımına sahip olsun ve ν parametresinin bilindiği kabul edilsin. ν parametresinin biliniyor kabul edilmesinin nedeni ν'ye ilişkin skor fonksiyonunun sınırlı olmamasıdır (Teorem 3.5'e bkz) (Arslan ve Genç 2009). Bu durumda, log-olabilirlik fonksiyonu

$$log(L) = -nlog(\sigma) + nlog(c(\nu)) + \sum_{i=1}^{n} log\left[1 + \frac{(x_i - \theta)^2}{\nu[(1 - sign(x_i - \theta)\varepsilon)\sigma]^2}\right]^{-(\frac{\nu+1}{2})} \quad (3.43)$$

olarak bulunur. Buradan θ, σ ve ε için ML tahmin edicileri $logL$ fonksiyonunun ilgili parametrelere göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. Bunun için log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial}{\partial\theta} logL = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu + 1)(x_i - \theta)}{\nu((1 - sign(x_i - \theta)\varepsilon)\sigma)^2 + (x_i - \theta)^2} = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} logL = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu + 1)(x_i - \theta)^2}{\nu\sigma^3(1 - sign(x_i - \theta)\varepsilon)^2 + (x_i - \theta)^2\sigma} = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} logL = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu + 1)sign(x_i - \theta)(x_i - \theta)^2}{\nu\sigma^2(1 - sign(x_i - \theta)\varepsilon)^3 + (1 - sign(x_i - \theta)\varepsilon)(x_i - \theta)^2} = 0 \quad (3.46)$$

denklemleri elde edilir. (3.44)-(3.46) denklemleri ilgilenilen parametreye göre analitik olarak çözülemez. Dolayısıyla, bu denklemlerde gerekli düzenlemeler yapıldığında θ, σ ve ε

parametrelerinin ML tahmin edicileri (3.47)-(3.49) denklemlerindeki gibi elde edilmektedir:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)}, \tag{3.47}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2, \tag{3.48}$$

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2 sign(x_i-\hat{\theta})}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2} / \sum_{i=1}^{n} \frac{w(x_i)(x_i-\hat{\theta})^2}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2}. \tag{3.49}$$

Burada w ağırlık fonksiyonu

$$w(x_i) = \frac{\nu+1}{\nu(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2 + (\frac{x_i-\hat{\theta}}{\hat{\sigma}})^2}.$$

dır. (3.47)-(3.49) denklemlerinin çözümü için IRA adımları aşağıda verilmiştir. Böylelikle, ilgili parametrelerin tahmin değerleri yaklaşık olarak elde edilebilir.

3.8 $\varepsilon-$Çarpık t Dağılımının θ, σ ve ε Parametrelerinin ML Tahmin Edicilerinin Hesaplanması

$X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere IRA'nın adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım $\theta^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ ve $\varepsilon^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Ağırlık fonksiyonunun değerleri

$$w^{(k)}(x_i) = \frac{\nu+1}{\nu(1-sign(x_i-\hat{\theta}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2 + (\frac{x_i-\hat{\theta}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})^2}$$

şeklinde hesaplanır.

3. Adım Konum parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)}$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\sigma}^{2^{(k+1)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w^{(k)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2$$

şeklinde hesaplanır.

5. Adım Çarpıklık parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\varepsilon}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w^{(k+1)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2 sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} / \sum_{i=1}^{n} \frac{w^{(k+1)}(x_i)(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})^2}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\theta}^{(k+1)}$, $\hat{\sigma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(k)}$ kullanılarak $2.$ adımdaki ağırlık yeniden hesaplanır.

Eğer $(\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}, \hat{\sigma}^{(k+1)} - \hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\varepsilon}^{(k+1)} - \hat{\varepsilon}^{(k)})^T$ vektörünün norm değeri kabul edilen sayısal hata $e > 0$ değerinden büyük ise, $2-5$ adımları tekrar edilir. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır (Arslan ve Genç 2009).

3.9 $\varepsilon-$Çarpık t Dağılımının Parametreleri için ML Tahmin Edicilerinin Dayanıklılık Özelliği

Bölüm 3.1'de verilen ESEP dağılımının ölçek karması ile elde edilen ESGt dağılımının özel hali olan ESt dağılımının $\theta, \sigma, \varepsilon$ ve ν parametrelerinin ML tahmin edicilerinin dayanıklı olup olmadıkları bu bölümde incelenmiştir. İlgilenilen parametrelerden birinin skor fonksiyonu sınırlı değilse, ML tahmin edicilerinin (M-tahmin edicilerinin) etki fonksiyonu sınırlı olmaz. Bu kısımda, ESt dağılımının kuyruk kalınlığını belirleyen parametrenin (ν) ψ_ν skor fonksiyonunun sınırlı olmadığı gösterilmiştir. Bu dağılımın θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin etki fonksiyonu, büyük hata duyarlılığı elde edilmiş ve θ parametresinin ML tahmin edicisinin kırılma noktası da incelenmiştir.

$\tau = (\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ ESt dağılımının parametrelerini gösteren bir vektör olsun. Bu dağılımın parametrelerinin ML tahmin edicileri $\hat{\tau}$ olsun. $\hat{\tau}$ tahmin edicisinin etki fonksiyonu $IF(x; \hat{\tau}, F_{ESt}) = -[E(\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(x;\tau))]^{-1}\Psi(x;\tau)$ dır. Burada $\Psi = \frac{\partial}{\partial\tau}(-log f)$ skor fonksiyonlarının oluşturduğu vektördür. Bu vektörde yer alan ν parametresinin ψ_ν skor fonksiyonunun sınırlı olmadığı gösterilecektir. ψ_ν skor fonksiyonu IF vektöründen çıkarılıp ve böylelikle de ν parametresinin bilindiği kabul edilerek $\hat{\theta}, \hat{\sigma}$ ve $\hat{\varepsilon}$ ML tahmin edicileri için etki fonksiyonu aşağıda verilen kısımda yeniden açık bir formda elde edilecektir.

3.9.1 $\varepsilon-$Çarpık t dağılımının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicilerinin etki fonksiyonu

ESt dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin etki fonksiyonunun sınırlı olup olmadığı aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 3.5. *(Skor fonksiyonları) $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $ESt(\theta, \sigma, \varepsilon, \nu)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda, θ, σ, ε ve ν parametrelerinin skor fonksiyonları*

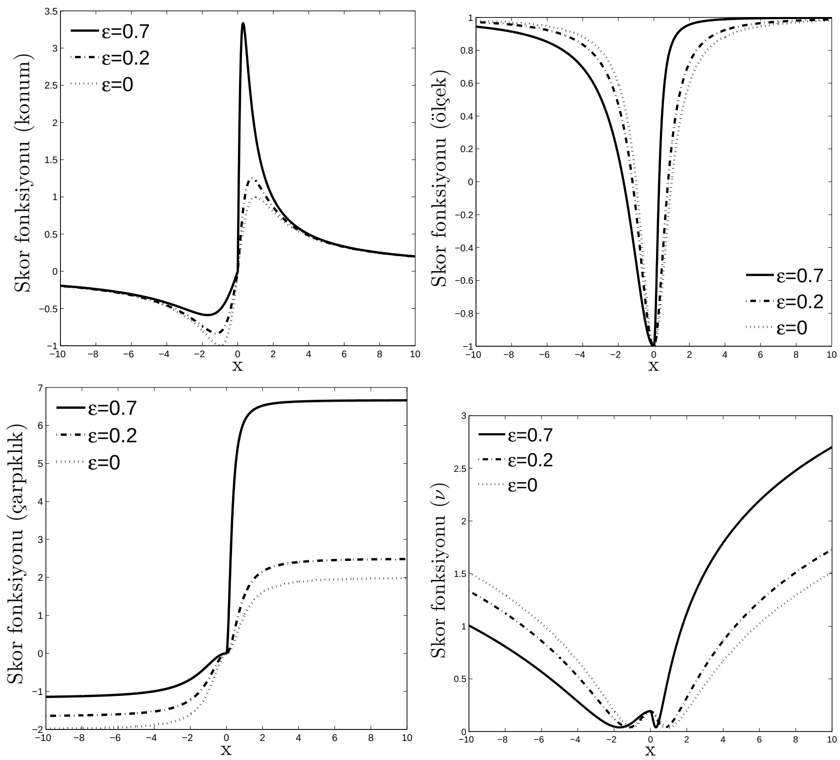
$$\begin{aligned}
\psi_\theta(x) &= \frac{(\nu+1)x}{\nu[(1-sign(x)\varepsilon)]^2+x^2}, \qquad (3.50)\\
\psi_\sigma(x) &= \frac{(\nu+1)x^2}{\nu(1-sign(x)\varepsilon)^2+x^2}-1,\\
\psi_\varepsilon(x) &= \frac{(\nu+1)x^2 sign(x)}{\nu(1-sign(x)\varepsilon)^3+(1-sign(x)\varepsilon)x^2},\\
\psi_\nu(x) &= k(\nu)+\frac{1}{2}log\left[1+\frac{x^2}{\nu(1-sign(x)\varepsilon)^2}\right]-\frac{x^2}{\nu^2(1-sign(x)\varepsilon)^2+\nu x^2}\frac{\nu+1}{2}
\end{aligned}$$

dır. Burada $k(\nu)=\frac{\Gamma'(\frac{\nu+1}{2})0.5(\nu\pi)^{1/2}\Gamma(\nu/2)-\pi^{1/2}\Gamma(\frac{\nu+1}{2})[0.5\nu^{-1/2}\Gamma(\nu/2)+\Gamma'(\nu/2)0.5\nu^{1/2}]}{(\nu\pi)^{1/2}\Gamma(\nu/2)\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}$ dır. Ayrıca, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\theta(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\sigma(x)=\nu$ ve $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\varepsilon(x)=((\nu+1)sign(x))/(1-sign(x)\varepsilon)$ olduğundan sırasıyla, θ, σ ve ε parametrelerinin skor fonksiyonları sınırlıdır ancak $\psi_\nu(x)$ sınırlı değildir, yani $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_\nu(x)=\infty$'dır (Arslan ve Genç 2009).

Sonuç Teoremi 3.4. *(Etki Fonksiyonu) $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $ESt(\theta, \sigma, \varepsilon, \nu)$ dağılımına sahip olsun. θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için etki fonksiyonu*

$$IF(x;\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon})=\begin{bmatrix}T_{11}\psi_\theta(x)+T_{12}\psi_\sigma(x)+T_{13}\psi_\varepsilon(x)\\ T_{21}\psi_\theta(x)+T_{22}\psi_\sigma(x)+T_{23}\psi_\varepsilon(x)\\ T_{31}\psi_\theta(x)+T_{32}\psi_\sigma(x)+T_{33}\psi_\varepsilon(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}IF_1(x;\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon})\\ IF_2(x;\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon})\\ IF_3(x;\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon})\end{bmatrix} \qquad (3.51)$$

şeklinde bulunur. Burada T_{ij}, M matrisinin tersinin i. satırını ve j. sütununu gösterir ($i,j=1,2,3$) ve M matrisinin tanımı denklem (2.31)'de verilmektedir. ν bilinen parametre



Şekil 3.6 $\nu = 1$ için konum, ölçek, çarpıklık ve serbestlik derecesi (kuyruk kalınlığını belirleyen) parametreleri için skor fonksiyonları

değeri ile σ parametresinin skor fonksiyonu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \psi_\sigma(x) = \nu$ olarak elde edilir ve sınırlıdır, ε parametresinin skor fonksiyonu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \psi_\varepsilon(x) = ((\nu + 1)sign(x))/(1 - sign(x)\varepsilon)$ olarak elde edilir ve sınırlıdır. θ parametresinin skor fonksiyonu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \psi_\theta(x) = 0$ olarak elde edilir ve skor fonksiyonu yumuşak azalan ve sınırlıdır. Aynı zamanda, asimptotik varyans-kovaryans matrisi var ve sınırlı olan her bir parametre değeri için asimptotik varyans-kovaryans matrisinin her bir elemanı sınırlıdır. Dolayısı ile, ε-çarpık t dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri dayanıklıdır.

Büyük Hata Duyarlılığı: ESt dağılımının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicilerinin $IF(x, \hat{\tau})$ etki fonksiyonunun normu

$$GES(\hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, F_{ESt}) = \{(IF_1)^2 + (IF_2)^2 + (IF_3)^2\}^{1/2} \tag{3.52}$$

büyük hata duyarlılığıdır. IF_1, IF_2 ve IF_3 etki fonksiyonunun bileşenleri sınırlı olduğundan $GES(\hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, F_{ESt})$ fonksiyonu da sınırlı olacaktır.

3.9.2 $\varepsilon-$Çarpık t dağılımının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicilerinin bilgi standardize duyarlılığı

Sonuç Teoremi 3.5. *(Bilgi-standardize duyarlılık) $X \sim ESt(\theta,\sigma,\varepsilon,\nu)$ olsun ve ν parametresinin bilindiği kabul edilsin. Bu durumda,*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\theta^2(x) = 0$ *dır.*
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\theta(x)\psi_\sigma(x) = 0$ *dır.*
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\theta(x)\psi_\varepsilon(x) = 0$ *dır.*
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\sigma^2(x) = \nu^2$ *dır.*
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\sigma(x)\psi_\varepsilon(x) = \frac{\nu(\nu+1)}{1-sign(x)\varepsilon}$ *dır.*
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_\varepsilon^2(x) = \frac{(\nu+1)^2}{(1-sign(x)\varepsilon)^2}$ *dır.*

Ayrıca, I_{ESt} matrisinin elemanları var ve $\sigma < \infty, \nu < \infty$ için sınırlı olduğunda bu matrisin elemanları sınırlıdır. Dolayısıyla, $ESt(\theta,\sigma,\varepsilon,\nu)$ dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri dayanıklıdır.

3.9.3 $\varepsilon-$Çarpık t dağılımının θ parametresi için ML tahmin edicisinin kırılma noktası

Bölüm 3.5.3'de verilen $1, 2, 3$ ve $4.ii$ koşulları ESt dağılımının θ parametresi için ML tahmin edicisinin kırılma noktasını belirlemede kullanılacaktır. $X \sim ESt(\theta,\sigma,\varepsilon,\nu)$ olsun. $\rho = -log(f)$ olmak üzere, $\rho_{ESt}(x) = \frac{\nu+1}{2} log\left[1 + \frac{x^2}{\nu(1-sign(x)\varepsilon)^2}\right]$ amaç fonksiyonudur. Bu amaç fonksiyonuna ilişkin $\psi_{ESt} = \frac{d}{dx}\rho_{ESt}(x)$ fonksiyonu olmak üzere $\psi_{ESt}(x) = \frac{(\nu+1)x}{\nu(1-sign(x)\varepsilon)^2+x^2}$'dır. ψ_{ESt} fonksiyonunun azalan bir fonksiyon olduğu varsayılsın ve θ parametresinin ML tahmin edicisinin kırılma noktasına ilişkin $1, 2, 3$ ve $4.ii$ koşulları ele alınsın.

Bu koşullar,

1. $\rho_{ESt}(0) = 0$,

2. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \rho_{ESt}(x) = \infty$,

3. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\rho_{ESt}(x)}{|x|} = 0$,

4.ii $\psi_{ESt}(x)$ fonksiyonunun x'e göre birinci türevi $\psi'_{ESt}(x) = \frac{(\nu+1)[\nu(1-sign(x)\varepsilon)^2+x^2]-2x^2(\nu+1)}{[\nu(1-sign(x)\varepsilon)^2+x^2]^2}$ dir. Bu denklemin x'e göre çözümü $x \geq 0$ için $x_0 = \sqrt{\nu}(1-\varepsilon)$, $x < 0$ için $x_0 = -\sqrt{\nu}(1+\varepsilon)$ noktalarıdır. Bu fonksiyon, $0 \leq x \leq \sqrt{\nu}(1-\varepsilon)$ için artan ve $\sqrt{\nu}(1-\varepsilon) < x < \infty$ için azalan olup, $-\sqrt{\nu}(1+\varepsilon) \leq x < 0$ için artan, $-\infty < x < -\sqrt{\nu}(1+\varepsilon)$ için azalandır. Böylelikle, azalan bir fonksiyon yapısına sahiptir. ψ_{ESt} fonksiyonunun yapısı asimetriktir. Burada ε asimetrikliği sağlayan bir parametredir,

şeklinde olup sağlanmıştır. Bu durumda, ESt dağılımının θ parametresi için ML tahmin edicisinin kırılma noktası ile ilgili sonuç teoremi aşağıdaki gibidir.

Sonuç Teoremi 3.6. *(Kırılma Noktası) $X \sim ESt(\theta,\sigma,\varepsilon,\nu)$ olsun. Yukarıdaki koşullar sağlandığından θ parametresinin ML tahmin edicisinin kırılma noktası $1/2$'dir.*

3.10 ε-Çarpık t Dağılımının θ, σ ve ε Parametreleri için ML Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri

$X \sim ESt(\theta,\sigma,\varepsilon,\nu)$ olsun. Burada, ν parametresinin bilindiği kabul edilsin. θ,σ ve ε parametreleri için Fisher bilgi matrisi

$$\mathbf{I}_{ESt} = n \begin{bmatrix} \frac{\nu+1}{\sigma^2(1-\varepsilon^2)(\nu+3)} & 0 & -\frac{4c(\nu)(\nu+1)}{\sigma(1-\varepsilon^2)(\nu+3)} \\ & \frac{\nu}{2\sigma^4(\nu+3)} & 0 \\ & & \frac{3(\nu+1)}{(1-\varepsilon^2)(\nu+3)} \end{bmatrix}$$

dır. Burada $\nu > 0$ ve $c(\nu) = \frac{\Gamma(\nu/2+1/2)}{(\nu\pi)^{1/2}\Gamma(\nu/2)}$ normalleştirme sabitidir (normalizing constant). Bu Fisher bilgi matrisi kullanılarak θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için asimptotik varyans kovaryans değerleri aşağıda verilmiştir (Gomez vd. 2007).

$$\mathbf{I}_{ESt}^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 3\,\frac{(\varepsilon^2-1)(\nu+3)\sigma^2}{(16\,c^2-3)(\nu+1)} & 0 & 4\,\frac{(\varepsilon^2-1)(\nu+3)\sigma\, c}{(16\,c^2-3)(\nu+1)} \\ 0 & 2\,\frac{\sigma^4(\nu+3)}{\nu} & 0 \\ 4\,\frac{(\varepsilon^2-1)(\nu+3)\sigma\, c}{(16\,c^2-3)(\nu+1)} & 0 & \frac{(\varepsilon^2-1)(\nu+3)}{(16\,c^2-3)(\nu+1)} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Bölüm 1.1'de verilen (iv), (v), (vi) ve (vii) koşullarının sağlanması durumunda ML tahmin edicileri asimptotik normal dağılımlı, tutarlı ve asimptotik etkindir. (iv) koşulu üçüncü mertebeye kadar parametreye göre kısmi türevlerinin var olmasını gerektirir. ESt dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun $log(f)$ fonksiyonunda parametrelere göre elde edilen kısmi türevleri Ek 1'de (1.15)-(1.25) denklemlerinde verilmektedir. (v) koşulu ise Fisher bilgi matrisinin var olmasını gerektirir. ESt dağılımının Fisher bilgi matrisi var olduğundan bu koşul da sağlanmıştır. (vi) koşulu Fisher bilgi matrisinin determinantının sonlu olmasını gerektirir. Burada $det(\mathbf{I}_{ESt}) = -1/2\,\frac{n^3(\nu+1)^2\nu\,(16\,c^2-3)}{\sigma^6(\varepsilon^2-1)^2(\nu+3)^3}$ olup (v) koşulu sağlanmıştır. (iv) koşulunun sağlandığı bilinmektedir. Bu koşuldaki üçüncü mertebeye kadar olan kısmi türevleri sonucu elde edilen ifadelerden büyük eşit herhangi bir M_{jkl} fonksiyonunun beklenen değeri sonlu ise bu koşulda sağlanmış olacaktır. $M_{jkl} = (X-\theta)^r$ olarak seçilebilir. Bu ise, $E(X-\theta)^r$'dır ve denklem (3.39)'da sonlu bir beklenen değer vardır. Dolayısıyla, (vii) koşulu da sağlanmıştır.

Teorem 3.6. *$\tau = (\theta, \sigma, \varepsilon)$ parametre vektörü olmak üzere $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenleri $ESt(\theta, \sigma, \varepsilon, \nu)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda, ν parametresi bilinmek üzere θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

1. $\sqrt{n}(\hat{\tau}-\tau) \xrightarrow{D} N_3(\mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}(\tau))$ *dır. Burada*

$$\mathbf{I}^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} Var(\hat{\theta}) & Cov(\hat{\theta},\hat{\sigma}) & Cov(\hat{\theta},\hat{\varepsilon}) \\ & Var(\hat{\sigma}) & Cov(\hat{\sigma},\hat{\varepsilon}) \\ & & Var(\hat{\varepsilon}) \end{bmatrix}$$

dır. Böylelikle, θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin $\%100(1-\delta)$ güven aralıkları $\hat{\theta} \pm z_{\frac{\delta}{2}}(Var(\hat{\theta})/n)^{1/2}$, $\hat{\sigma} \pm z_{\frac{\delta}{2}}(Var(\hat{\sigma})/n)^{1/2}$ ve $\hat{\varepsilon} \pm z_{\frac{\delta}{2}}(Var(\hat{\varepsilon})/n)^{1/2}$ biçiminde elde edilir. Burada $z_{\frac{\delta}{2}}$ standard normal dağılımın üst $\delta/2$ıncı yüzdeliğidir.

2. *Bu parametrelerin ML tahmin edicileri tutarlıdır.*

3. *Bu parametrelerin ML tahmin edicileri asimptotik etkindir.*

N_3 θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin ortak dağılmının $3-$ boyutlu asimptotik normal dağılım olduğunu göstermektedir. Asimptotik varyans değerleri Fisher bilgi matrisinin tersi olup, $\theta = \theta_0 \in \mathbb{R}, \sigma = 1$ ve $\varepsilon = -0.2, -0.5, -0.8$ parametre değerleri için Çizelge 3.2'de verilmektedir. Bu değerler, simülasyon çalışmasında seçilen parametre değerleri için hesaplanmıştır.

Çizelge 3.2 ESt dağılımının $\nu = 3$ parametre değerinde θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için asimptotik varyans değerleri

	$Var(\hat{\tau})/n$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 150$
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.17173	0.103040	0.051520	0.034347
$\varepsilon = -0.2$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.13333	0.080000	0.040000	0.026667
	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.05725	0.034347	0.017173	0.011449
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.13417	0.080500	0.040250	0.026834
$\varepsilon = -0.5$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.13333	0.080000	0.040000	0.026667
	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.04472	0.026834	0.013417	0.008945
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.06440	0.038640	0.019320	0.012880
$\varepsilon = -0.8$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.13333	0.080000	0.040000	0.026667
	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.02147	0.012880	0.006440	0.004293

Denklem (3.43)'de verilen olabilirlik fonksiyonunun maksimum değerine ulaşıp ulaşmadığını test etmek için ikinci türev testi yapılmıştır. İkinci türev testi için gerekli olan Hessian matrisinin elemanları Ek 1'de (1.27)'de H_{ESt} olarak verilmiştir. Bu matrisin öz değerlerinin negatif olması analitik olarak gösterilemeyeceği için sayısal olarak hesaplanan öz değerlerinin negatif olup olmadığı simülasyon çalışmasında incelenecektir.

4. ASİMETRİK M-TAHMİN YÖNTEMİ

Bir veri setine ilişkin θ konum, σ ölçek ve ε çarpıklık parametreleri tahmin edilirken bir dağılım varsayımında bulunmak kısıtlayıcı olabilir. Bu yüzden, dağılım varsayımı olmadan da tahmin yapabilmek önem arz etmektedir. Dağılım varsayımı olmadan parametre tahmini yapmak için dayanıklı yöntemler kullanılabilir. Fakat literatürde verilen ρ amaç fonksiyonları simetrik olduğundan veri setindeki çarpıklık modellenemez.

Bu bölümde, simetrik amaç fonksiyonları yerine asimetrik amaç fonksiyonu tanımlanmıştır. Bunun için Huber'in ρ_H fonksiyonu asimetrik forma genelleştirilmiştir. Genelleştirilmiş bu fonksiyon asimetrik ρ amaç fonksiyonu olarak ifade edilecektir. Bu fonksiyon ile oluşturulan tahmin yöntemi ise asimetrik $M-$tahmin yöntemi olarak adlandırılacaktır. Asimetrik ρ fonksiyonu oluşturulurken ESEP ailesi içinde yer alan ESN ile ESL dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

4.1 Asimetrik M-Tahmin Edicisinin Tanımlanması

Huber'ın ρ fonksiyonunu doğrudan asimetrik forma genişletmek kolay değildir. Bu yüzden, doğrudan asimetrik forma genişletmeye çalışmak yerine, asimetrik (çarpık) dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonlarından yararlanılmıştır. Bu çerçevede, aşağıdaki yaklaşım ele alınmıştır.

Dayanıklı istatistik literatüründe bir dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması $\rho = -log(f)$ amaç fonksiyonu olarak tanımlanır. Bölüm 3'de tanımlanan asimetrik dağılımlardan ESN ve ESL'nin $-log(f)$ fonksiyonları sırası ile $\rho_{ESN}(u) = \frac{u^2}{2(1-sign(u)\varepsilon)^2}$ ve $\rho_{ESL}(u) = \frac{|u|}{2^{1/2}(1-sign(u)\varepsilon)}$ şeklindedir. Huber'ın ρ fonksiyonunun sıfır etrafında normal dağılımın kuyruklarda ise Laplace dağılımının amaç fonksiyonuna benzediği göz önüne alınarak asimetrik amaç fonksiyonu sıfır etrafında ρ_{ESN}, kuyruklarda ise ρ_{ESL} olacak şekilde düşünülebilir.

Asimetrik amaç fonksiyonunu formal olarak tanımlayabilmek için $c_1 < 0$ ve $c_2 > 0$ katsayılarına ihtiyaç duyulur. c_1 ve c_2 katsayıları hem asimetrikliği hem de kuyrukların hangi noktalarda başladığını belirlemeye yarar. Böylelikle, bu tahmin yöntemi ile elde edilen tahmin edicilerin etkinliği de sağlanmış olur.

Verilen bu bilgiler yardımıyla önerilen asimetrik amaç fonksiyonu

$$\rho^*(u) = \begin{cases} \frac{u}{2^{1/2}(1+\varepsilon)}, & (-\infty, c_1); \\ \frac{u^2}{2(1+\varepsilon)^2}, & [c_1, 0); \\ \frac{u^2}{2(1-\varepsilon)^2}, & [0, c_2]; \\ \frac{u}{2^{1/2}(1-\varepsilon)}, & (c_2, \infty). \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Şekil 4.1'de ρ_{ESN} ve ρ_{ESL} amaç fonksiyonlarının grafikleri gösterilmiştir. Önerilen ρ^* asimetrik amaç fonksiyonu c_1 ve c_2 noktalarında sürekli değildir. ρ^* asimetrik amaç fonksiyonu üzerinde sürekliliği sağlayacak şekilde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\rho^{**}(u) = \begin{cases} \frac{c_1 u}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}, & (-\infty, c_1); \\ \frac{u^2}{2(1+\varepsilon)^2}, & [c_1, 0); \\ \frac{u^2}{2(1-\varepsilon)^2}, & [0, c_2]; \\ \frac{c_2 u}{(1-\varepsilon)^2} - \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}, & (c_2, \infty). \end{cases} \tag{4.2}$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.1. *Eşitlik* (4.2)*'de verilen ρ^{**} fonksiyonuna asimetrik ρ fonksiyonu denir. Buradaki $c_1 < 0$ ve $c_2 > 0$ katsayıları da ayarlama (tuning) katsayıları olarak adlandırılır.*

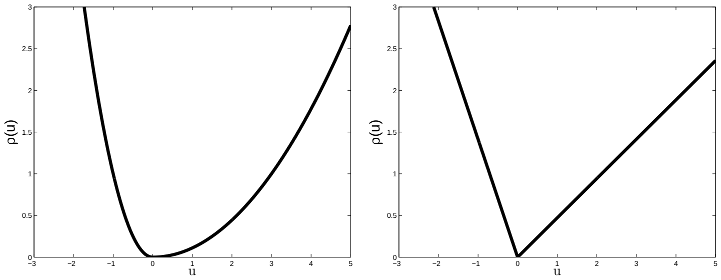
Bundan sonra asimetrik amaç fonksiyonu ρ_{ESH} ile gösterilecektir. Burada $c_1 = c_2$ ve $\varepsilon = 0$ alındığında, (2.18) ifadesinde verilen Huber'ın ρ_H fonksiyonu elde edilir. Şekil 4.2'de ε parametresi ile c_1 ve c_2 katsayıları için ρ_{ESH} ve ρ_H amaç fonksiyonlarının grafikleri yer almaktadır.

ρ_{ESH} fonksiyonunun u'ya göre türevinin alınmasıyla

$$\psi(u) = \begin{cases} \frac{c_1}{(1+\varepsilon)^2}, & (-\infty, c_1); \\ \frac{u}{(1+\varepsilon)^2}, & [c_1, 0); \\ \frac{u}{(1-\varepsilon)^2}, & [0, c_2]; \\ \frac{c_2}{(1-\varepsilon)^2}, & (c_2, \infty). \end{cases} \tag{4.3}$$

olarak elde edilir.

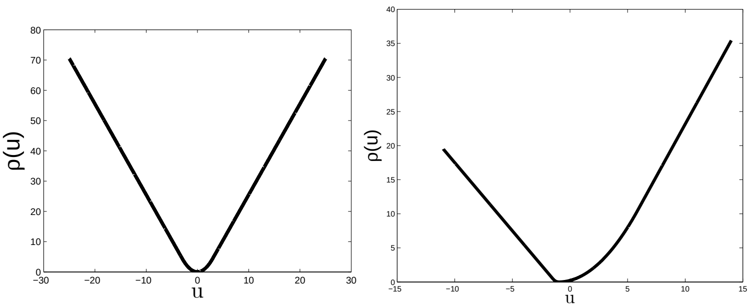
$\varepsilon = -0.5$ için şekil 4.1'de ESN ve ESL dağılımlarından elde edilen ρ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



(a) ESN dağılımının amaç fonksiyonu (ρ_{ESN}) (b) ESL dağılımının amaç fonksiyonu (ρ_{ESL})

Şekil 4.1 Amaç fonksiyonları, $\varepsilon = -0.5$

ESN ve ESL dağılımlarından elde edilen $\rho(u)$ fonksiyonlarının düzenlenmiş hali olan ρ^{**} yani ρ_{ESH} fonksiyonu aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.

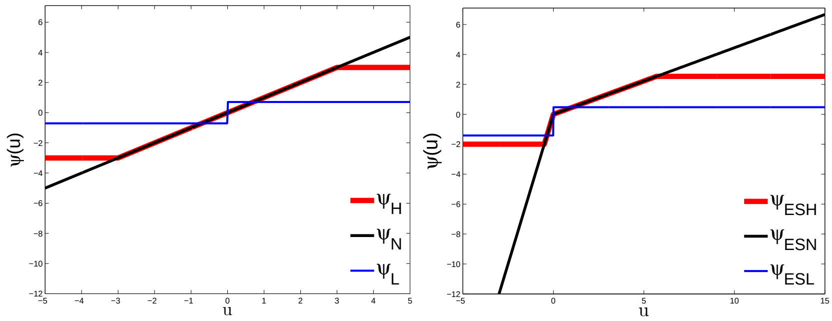


(a) ρ_{ESH} fonksiyonu: $\varepsilon = 0 : c_1 = -3, c_2 = 3$ (b) ρ_{ESH} fonksiyonu: $\varepsilon = -0.5 : c_1 = -0.5, c_2 = 5.7$

Şekil 4.2 ESH amaç fonksiyonu

Denklem (4.2)'de verilen asimetrik amaç fonksiyonu ile θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri elde edilmektedir. Huber $M-$tahmin edicisinde etkinliği ayarlayan k noktası simetrik durum için geçerlidir. Asimetrik $M-$tahmin edicisinde ise, asimetriklikten dolayı oluşan yeni etkinlik noktaları $c_1 < 0$ ve $c_2 > 0$ katsayılarıdır. Bu katsayılar, ayarlama (tuning) katsayıları olarak değerlendirilecektir. Dağılım asimetrik olduğunda $-c_1 \neq c_2$'dir. $k > 0$ olmak üzere $c_1 = -k, c_2 = k$ ve $\varepsilon = 0$ olarak alındığında (2.18) ifadesinde tanımlanan Huber $M-$tahmin edicisi elde edilir. Huber $M-$tahmin edicisinin ve asimetrik $M-$tahmin edicisinin ψ fonksiyonları şekil 4.3'de verilmiştir. Bu şekillerdeki ψ_{ESH}, ψ_{ESN} ve ψ_{ESL}

fonksiyonları ρ_{ESH}, ρ_{ESN} ve ρ_{ESL} amaç fonksiyonlarının ψ fonksiyonlarıdır. $\varepsilon = 0$ için bu fonksiyonlar simetrik formda olurlar ve ψ_H, ψ_N ve ψ_L ile gösterilmektedir.



(a) $\varepsilon = 0 : c_1 = -3, c_2 = 3$ (b) $\varepsilon = -0.5 : c_1 = -0.5, c_2 = 5.7$

Şekil 4.3 ψ fonksiyonları

4.2 Asimetrik ρ Fonksiyonuna Dayalı M-Tahmin Edicileri (Asimetrik M-Tahmin Edicileri)

$X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenleri f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. f fonksiyonunda θ, σ ve ε parametrelerinin var olduğu ve bunların sırasıyla olasılık yoğunluk fonksiyonunun konum, ölçek ve çarpıklık parametreleri olarak tanımlı olduğu bilinsin. Bu f fonksiyonunda diğer parametreler de olabilir ancak bunlarla ilgilenilmemiştir.

Bu kısımdaki amacımız, $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklemi için bilinmeyen θ, σ ve ε parametrelerini tahmin etmek olacaktır. Bu rasgele örneklemin herhangi bir çarpık dağılıma sahip olduğu da varsayılabilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu bilinmediği için de ML tahmin yöntemini kullanmak mümkün olamayacaktır. θ, σ ve ε parametrelerinin çarpık veri seti için tahmini ile ilgilenilmek istenmektedir. Bu durumda ise, aşağıda verilen Q fonksiyonu ele alınacaktır.

Bu Q fonksiyonu kullanılarak θ, σ ve ε parametreleri için tahmin ediciler bulunacaktır. Bu tahmin ediciler asimetrik $M-$tahmin edicileri olarak adlandırılacaktır. Bu tahmin edicileri bulmak için

$$\begin{aligned} Q(\theta, \sigma, \varepsilon; X_n) &= \sum_{i=1}^{n} \rho_{ESH}\left(\frac{x_i - \theta}{\sigma(1 - sign(x_i - \theta)\varepsilon)}\right) + nlog(\sigma) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} log(1 - sign(x_i - \theta)\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.4}$$

fonksiyonu parametrelere göre minimum yapılacaktır. Bunun için aşağıda verilen türevlerin ele alınması gereklidir. Bu türevler ise, ilgilenilen θ, σ ve ε parametrelerine göre aşağıda verilmektedir.

$u_i = \frac{x_i-\theta}{\sigma(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)}$ olmak üzere $Q(\theta,\sigma,\varepsilon;X_n)$ fonksiyonunun θ'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesi ile

$$\frac{\partial}{\partial\theta}Q(\theta,\sigma,\varepsilon;X_n) = \sum_{i=1}^{n}\psi_\theta\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)}\right)\frac{-1}{\sigma(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)} = 0 \tag{4.5}$$

denklemi elde edilir. $w(u_i) = \psi_\theta(u_i)/u_i$ olarak tanımlı olduğundan θ konum parametresi için asimetrik $M-$tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{x_i}{(\hat{\sigma}(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon}))^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{1}{(\hat{\sigma}(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon}))^2} \tag{4.6}$$

olarak elde edilir. Burada $w_i = w(\frac{x_i-\hat{\theta}}{\hat{\sigma}(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})})$ dır. $Q(\theta,\sigma,\varepsilon;X_n)$ fonksiyonunun σ'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesi ile

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}Q(\theta,\sigma,\varepsilon;X_n) = -\sum_{i=1}^{n}\psi_\sigma\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)}\right)\frac{x_i-\theta}{\sigma^2(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)} + \frac{n}{\sigma} = 0 \tag{4.7}$$

denklemi elde edilir. $w(u_i) = \psi_\sigma(u_i)/u_i$ olarak tanımlı olduğundan σ ölçek parametresi için asimetrik $M-$tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{(x_i-\hat{\theta})^2}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2} \tag{4.8}$$

olarak elde edilir. Burada $w_i = w(\frac{x_i-\hat{\theta}}{\hat{\sigma}(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon})})$ dır. $Q(\theta,\sigma,\varepsilon;X_n)$ fonksiyonunun ε'a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesi ile

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q(\theta,\sigma,\varepsilon;X_n) &= \sum_{i=1}^{n}\psi_\varepsilon\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)}\right)\frac{(x_i-\theta)sign(x_i-\theta)}{\sigma(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)^2} \\ &- \sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i-\theta)}{(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)} = 0\end{aligned} \tag{4.9}$$

denklemi elde edilir. $w(u_i) = \psi_\varepsilon(u_i)/u_i$ olarak tanımlı olduğundan ε çarpıklık parametresi için asimetrik $M-$tahmin edicisi

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{sign(x_i - \hat{\theta})}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2} - w_i \frac{(x_i - \hat{\theta})^2 sign(x_i - \hat{\theta})}{\hat{\sigma}^2 (1 - sign(x_i - \hat{\theta})\hat{\varepsilon})^3} \right] \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - sign(x_i - \hat{\theta})\hat{\varepsilon})^2} \tag{4.10}$$

olarak elde edilir. Burada $w_i = w(\frac{x_i - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}(1 - sign(x_i - \hat{\theta})\hat{\varepsilon})})$ dır.

Asimetrik $M-$tahmin edicisinde θ, σ ve ε parametreleri için ortak ağırlık fonksiyonu ise

$$w(u) = \begin{cases} \frac{c_1}{(1+\varepsilon)^2 u}, & (-\infty, c_1]; \\ \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}, & [c_1, 0); \\ \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}, & [0, c_2]; \\ \frac{c_2}{(1-\varepsilon)^2 u}, & [c_2, \infty). \end{cases} \tag{4.11}$$

şeklindedir. Böylelikle θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri ve aynı zamanda bu parametrelerin eş anlı tahmin edicileri elde edilmiştir. Denklem (4.11)'de verilen ağırlık fonksiyonu, pozitif ve negatif eksendeki gözlemlere asimetriklikten dolayı farklı ağırlıklar verecektir.

4.2.1 Asimetrik M-Tahmin edicilerinin hesaplanması

$X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere IRA'nın adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım $\theta^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ ve $\varepsilon^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Denklem (4.11)'de verilen w ağırlık fonksiyonu

$$u_i^{(k)} = \frac{x_i - \hat{\theta}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}(1 - sign(x_i - \hat{\theta}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})}$$

ifadesi aracılığı ile hesaplanır.

3. Adım $w_i^{(k)} = w(u_i^{(k)})$ olmak üzere konum parametresinin tahmin değeri

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^{(k+1)} &= \sum_{i=1}^{n} w_i^{(k)} \frac{x_i}{(\hat{\sigma}^{(k)})^2(1-sign(x_i-\hat{\theta}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} \\ &\quad / \sum_{i=1}^{n} w_i^{(k)} \frac{1}{(\hat{\sigma}^{(k)})^2(1-sign(x_i-\hat{\theta}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$(\hat{\sigma}^2)^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i^{(k)} \frac{(x_i-\hat{\theta}^{(k+1)})^2}{(1-sign(x_i-\hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır.

5. Adım $w_i^{(k+1)} = w(u_i^{(k+1)})$ olmak üzere çarpıklık parametresinin tahmin değeri

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}^{(k+1)} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{sign(x_i-\hat{\theta}^{(k+1)})}{(1-sign(x_i-\hat{\theta})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} - w_i^{(k+1)}\frac{(x_i-\hat{\theta}^{(k+1)})^2 sign(x_i-\hat{\theta}^{(k+1)})}{(\hat{\sigma}^{(k+1)})^2(1-sign(x_i-\hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^3}\right] \\ &\quad / \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-sign(x_i-\hat{\theta}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\theta}^{(k+1)}$, $\hat{\sigma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(k)}$ kullanılarak w ağırlık fonksiyonu 2. adımda yeniden hesaplanır.

6. Adım Eğer $(\hat{\theta}^{(k+1)}-\hat{\theta}^{(k)}, \hat{\sigma}^{(k+1)}-\hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\varepsilon}^{(k+1)}-\hat{\varepsilon}^{(k)})^T$ vektörünün norm değeri kabul edilen sayısal hata $e > 0$ değerinden büyük ise, $2-5$ adımları tekrar edilir. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır.

4.3 Asimetrik M-Tahmin Edicilerinin Dayanıklılığı

Bu kısımda, θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik M-tahmin edicilerinin dayanıklılık özelliklerini veren etki fonksiyonu ve θ parametresinin asimetrik M-tahmin edicisinin kırılma noktası incelenmiştir. Etki fonksiyonundan elde edilen büyük hata duyarlılığı bulunmuştur.

4.3.1 Asimetrik M-tahmin edicilerinin etki fonksiyonu

Denklem (4.2)'de verilen asimetrik ρ fonksiyonunda θ, σ ve ε parametreleri için $\psi_\theta(x) = \frac{\partial}{\partial\theta}\rho_{ESH}(\frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x)\varepsilon)})$, $\psi_\sigma(x) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\rho_{ESH}(\frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x)\varepsilon)})$ ve $\psi_\varepsilon(x) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\rho_{ESH}(\frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x)\varepsilon)})$

fonksiyonları aşağıda verilmiştir. Bu fonksiyonlar da $\theta = 0$ ve $\sigma = 1$ için

$$\psi_\theta(x) = \begin{cases} \frac{-c_1}{(1+\varepsilon)^3}, & (-\infty, c_1(1+\varepsilon)]; \\ \frac{-x}{(1+\varepsilon)^4}, & [c_1(1+\varepsilon), 0); \\ \frac{-x}{(1-\varepsilon)^4}, & [0, c_2(1-\varepsilon)]; \\ \frac{-c_2}{(1-\varepsilon)^3}, & [0 + c_2(1-\varepsilon), \infty). \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\psi_\sigma(x) = \begin{cases} \frac{-c_1 x}{(1+\varepsilon)^3}, & (-\infty, c_1(1+\varepsilon)]; \\ \frac{-x^2}{(1+\varepsilon)^4}, & [c_1(1+\varepsilon), 0); \\ \frac{-x^2}{(1-\varepsilon)^4}, & [0, c_2(1-\varepsilon)]; \\ \frac{-c_2 x}{(1-\varepsilon)^3}, & [c_2(1-\varepsilon), \infty). \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{-3c_1 x}{(1+\varepsilon)^4} + \frac{c_1^2}{(1+\varepsilon)^3}, & (-\infty, c_1(1+\varepsilon)]; \\ \frac{-2x^2}{(1+\varepsilon)^5}, & [c_1(1+\varepsilon), 0); \\ \frac{2x^2}{(1-\varepsilon)^5}, & [0, c_2(1-\varepsilon)]; \\ \frac{3c_2 x}{(1-\varepsilon)^4} - \frac{c_2^2}{(1-\varepsilon)^3}, & [c_2(1-\varepsilon), \infty). \end{cases} \tag{4.14}$$

olarak elde edilir. $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi_\theta(x) = \frac{-c_1}{(1+\varepsilon)^3} < \infty$ ancak $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi_\sigma(x) = -\infty$ ve $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi_\varepsilon(x) = -\infty$ olmak üzere sınırlı değildir. σ ve ε bilindiğinde θ için etki fonksiyonu sınırlı olur. Fakat üç parametreyi aynı anda ele alıp etki fonksiyonuna bakıldığında, etki fonksiyonunun sınırlı olmadığı aşağıda gösterilmiştir. θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri için etki fonksiyonu

$$B = \begin{bmatrix} E[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_\theta(X)] & E[\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi_\theta(X)] & E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\theta(X)] \\ & E[\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi_\sigma(X)] & E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\sigma(X)] \\ & & E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\varepsilon(X)] \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

ve $\Psi(x) = (\psi_\theta(x), \psi_\sigma(x), \psi_\varepsilon(x))^T$ olmak üzere

$$IF(x; \hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}) = -B^{-1}\Psi(x) \tag{4.16}$$

dır. Burada E_{ESN} etki fonksiyonundaki B matrisinin elemanları elde edilirken ESN dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun kullanıldığını göstermektedir. $u = \frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x-\theta)\varepsilon)}$ ve $\tau \in (\theta, \sigma, \varepsilon)$ parametreleri göstermek üzere $\psi_\tau(x) = \frac{\partial}{\partial \tau}\rho_{ESH}(u)$ dır. Ayrıca buradaki B matrisi için $det(B) \neq 0$ olduğundan B^{-1}'in var olduğu açıktır (Detaylı bilgi için asimptotik özellikler bölümüne bkz). Bu da asimetrik $M-$tahmin edicileri için etki fonksiyonunun var olduğunu gösterir. B matrisi denklem (2.31)'deki M matrisi ile aynıdır.

Denklem (4.16)'daki ifade düzenlendiğinde,

$$IF(x;\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} T_{11}\psi_\theta(x) + T_{12}\psi_\sigma(x) + T_{13}\psi_\varepsilon(x) \\ T_{21}\psi_\theta(x) + T_{22}\psi_\sigma(x) + T_{23}\psi_\varepsilon(x) \\ T_{31}\psi_\theta(x) + T_{32}\psi_\sigma(x) + T_{33}\psi_\varepsilon(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IF_1(x;\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon}) \\ IF_2(x;\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon}) \\ IF_3(x;\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon}) \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

elde edilir. Burada T_{ij}, B^{-1} matrisinin $i.$ satırını ve $j.$ sütununu gösterir ($i, j = 1, 2, 3$). $\psi_\theta(x), \psi_\sigma(x)$ ve $\psi_\varepsilon(x)$ fonksiyonları x'e göre sınırlı olmalıdır. Ayrıca, B^{-1} matrisinin elemanlarının her birinde yer alan Γ ve γ fonksiyonlarınının sınırlı olması için c_1 ve c_2 katsayıları sınırlı olmalıdır ve $\varepsilon \in (-1, 1)$ olduğundan dolayı Γ ve γ fonksiyonları sınırlı olacaktır. Dolayısı ile IF_1, IF_2 ve IF_3 bileşenleri de sınırlı değildir. Bu durumda θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etki fonksiyonu sınırlı değildir. θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri için elde edilen etki fonksiyonunun normu

$$GES(\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon},\rho_{ESH}) = \{(IF_1)^2 + (IF_2)^2 + (IF_3)^2\}^{1/2} \tag{4.18}$$

büyük hata duyarlılığıdır. IF_1, IF_2 ve IF_3 etki fonksiyonunun bileşenleri sınırlı olmadığından $GES(\hat{\theta},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon},\rho_{ESH})$ fonksiyonu da sınırlı değildir.

4.3.2 θ konum parametresi için asimetrik M-tahmin edicisinin kırılma noktası

Asimetrik durumda da konvekslik korunmaktadır. Dolayısıyla, Huber (1984) ile Zhang ve Li (1998) çalışmaları tarafından verilen koşullar, θ parametresinin asimetrik $M-$tahmin edicisi için kullanılabilir. Buradan, bu tahmin edicinin kırılma noktasının belirlenmesi için aşağıda verilen koşulların sağlanıp sağlanmadığı incelenecektir.

1. $\rho(0) = 0$ dır (Huber 1984, Zhang ve Li 1998).

2. $\lim\limits_{|u|\to\infty} \rho(u) = \infty$ dır (Huber 1984, Zhang ve Li 1998).

3. $\lim\limits_{|u|\to\infty} \frac{\rho(u)}{|u|} = 0$ dır (Huber 1984).

4 (Monoton ψ için) $\psi(u)$ fonksiyonu $0 < u \leq u_0$ aralığında azalmayan, $u_0 < u < \infty$ aralığında artmayan olacak şekilde bir u_0 noktası var olsun. (Zhang ve Li 1998).
Tez çalışmasında önerilen ρ_{ESH} fonksiyonu için bu koşullar aşağıdaki gibidir:

1. $\rho_{ESH}(0) = 0,$
2. $\lim\limits_{|u|\to\infty} \rho_{ESH}(u) = \infty,$
3. $\lim\limits_{|u|\to\infty} \frac{\rho_{ESH}(u)}{|u|} = \frac{c_2}{(1-\varepsilon)^2},$
4. Verilmiş bir c_2 noktası için $\psi(u)$ fonksiyonu $[0, c_2]$ aralığında artandır, (c_2, ∞) için $\psi(u) = \frac{c_2}{(1-\varepsilon)^2}$ olup sabittir,

yukarıda verilen koşullar sağlandığından, asimetrik ρ_{ESH} fonksiyonundan elde edilen θ konum parametresinin asimetrik $M-$tahmin edicisinin kırılma noktası $1/2$'dir.

4.4 Asimetrik M-tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri

Bu kısımda, θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri incelenmiştir. Bunlar tutarlılık ve asimptotik normalliktir. Bu tahmin ediciler kısım 4.2'de verilen amaç fonksiyonunun minimum yapılması ile elde edilir. Bu amaç fonksiyonu türevlenebilir olmak üzere (4.4) ifadesinde verilen Q fonksiyonunun θ, σ ve ε parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen denklemler aşağıda verilmiştir.

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_\theta(x_i; \theta, \sigma, \varepsilon) = 0 \tag{4.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_\sigma(x_i; \theta, \sigma, \varepsilon) = 0 \tag{4.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_\varepsilon(x_i; \theta, \sigma, \varepsilon) = 0 \tag{4.21}$$

Bu denklemlerin açık hali (4.5), (4.7) ve (4.9) denklemlerinde verilmiştir.

θ, σ ve ε parametrelerinin eş anlı tahminleri

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i; \hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}) = \mathbf{0} \tag{4.22}$$

denklemini sağlar. Burada $\Psi = (\psi_\theta, \psi_\sigma, \psi_\varepsilon)$ dır. Denklem 4.22'nin en az bir çözümünün var olması için Scholz (1965) tarafından yapılan yaklaşım asimetrik duruma uyarlanarak aşağıda verilmiştir.

Her bir $\hat{\sigma}$ için $\hat{\theta}$ var olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_\theta(x_i; \theta, \sigma, \varepsilon) = 0 \tag{4.23}$$

$\hat{\theta}$ konum tahmini

$$\min_{1\le i\le n}(x_i) \le \hat{\theta} \le \max_{1\le i\le n}(x_i)$$

ifadesini sağlar. Dolayısıyla, konum tahmini için en az bir çözüm bulunabilir. $\hat{\sigma}$ sıfırdan sonsuza değiştikçe,

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_\sigma(x_i; \theta, \sigma, \varepsilon) = 0 \tag{4.24}$$

ifadesi $sup\{\psi_\sigma(x_i; \theta, \sigma, \varepsilon) : x \in \mathbb{R}\}$'den 0'a değişim gösterir. ε parametresinin tahmini ise

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_\varepsilon(x_i; \theta, \sigma, \varepsilon) = 0 \tag{4.25}$$

denkleminin çözümüdür. $\varepsilon \in (-1, 1)$ olduğundan $(-1, 1)$ aralığındadır.

Dolayısıyla, denklem (4.22)'nin en az bir çözümü vardır. Bu çözümün tek olduğunu göstermek için aşağıda verilen 1. ve 2. koşulların sağlanması gereklidir (Fujimoto ve Herrero 2000):

1. ρ_{ESH} fonksiyonu türevlenebilir olsun.

2. Denklem (4.22)'deki ifadenin Jakobianı var, sol üst köşe temel bileşenleri (upper-left corner principal minors) sıfırdan farklı olsun.

Bu koşulların sağlanıp sağlanmadığı aşağıda incelenmektedir.

1. Önerilen ρ_{ESH} fonksiyonu $[c_1, c_2]$ aralığındaki her bir noktada türevlenebilir bir fonksiyondur. Ancak $(-\infty, c_1)$ ve (c_2, ∞) aralıklarında ise türev sıfırdır.

2. Denklem (4.22)'deki ifadenin Jakobianını oluşturmak için

   $$\lambda(\tau) = E_F \Psi(X, \tau), \quad \tau = (\theta, \sigma, \varepsilon)$$

   olmak üzere

   $$B_{jk} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial \tau_k}, \qquad j, k = 1, 2, 3$$

   elemanlarına sahip olan türev matrisinin var olması gereklidir.

$2.$ koşuldaki B matrisini oluşturma önerisi, Huber (1981) kaynağında bölüm 6.4 ve Maronna vd. (2006) kaynağında bölüm 10'da yer almaktadır.

Bu matris asimptotik normallik ele alınırken verilecektir. Bu matrisin sol üst köşe temel bileşenleri aşağıda verilmektedir.

$$K_1 = |B_{11}|, \quad K_2 = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}, \quad K_3 = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}$$

Burada K_1, K_2 ve K_3 değerlerinin sıfırdan farklı olması gereklidir. Maple 18 programı kullanılarak K_2 ve K_3 determinant değerleri elde edilmiştir. Ancak ifadeler çok uzun olduğundan tezde yer verilmemiştir. Ancak, Ek 3.13'deki Maple kodları kullanılarak bu determinantlar elde edilebilir. Parametrelerin bazı değerlerinde sıfır olabileceği durumu göz ardı edilmek üzere 2. koşulunda sağlandığı varsayılmıştır.

Dolayısıyla, $1.$ ve $2.$ koşullar sağlandığından denklem (4.22)'nin çözümü tektir.

Çözüm tek olduğuna göre, $\hat{\theta}, \hat{\sigma}$ ve $\hat{\varepsilon}$ tahmin edicilerinin tutarlı olup olmadığı incelenebilir. Bunun için Haberman (1989) tarafından verilen koşullar aşağıda verilmektedir:

1. $E_F[\rho_{ESH}(X)] < \infty$

2. $E_F[\psi_\theta(X)] < \infty$, $E_F[\psi_\sigma(X)] < \infty$, $E_F[\psi_\varepsilon(X)] < \infty$

olması gereklidir. 1. koşulda yer alan $E[\rho_{ESH}(X)]$ beklenen değeri Ek 2'de (2.3) eşitliğinde verilmiştir. Bu beklenen değerin sonlu olması sadece ekte verilen Γ ve γ fonksiyonlarının sınırlı olmasına bağlıdır. 2. koşulda yer alan $E_F[\psi_\theta(X)]$, $E_F[\psi_\sigma(X)]$ ve $E_F[\psi_\varepsilon(X)]$ beklenen değerleri Ek 2'de (2.5)-(2.7) eşitliklerinde verilmiştir. Γ ve γ fonksiyonlarının sınırlı ve σ ölçek parametresinin sonlu olduğu durumda 2. şart sağlanır.

$\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}$ ve $\hat{\varepsilon}$ tahmin edicilerinin eş anlı durumda tutarlı oldukları belirlendikten sonra, asimptotik normalliği incelenebilir. Bunun için denklem (4.22)'de verilen Ψ fonksiyonunun Taylor açılımı ele alınsın.

$$\Psi(x_i, \hat{\tau}) = \Psi(x_i, \tau) + (\hat{\tau} - \tau)\dot{\Psi}(x_i, \tau) + \mathbf{R}_n^* \tag{4.26}$$

her iki tarafın toplamı alınıp $1/n$ ile çarpılmak üzere

$$\mathbf{0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Psi(x_i, \tau) + (\hat{\tau} - \tau)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\Psi}(x_i, \tau) + \mathbf{R}_n$$

ifadesi elde edilir. Burada $\dot{\Psi}(x_i, \tau) = \frac{\partial \Psi(x_i,\tau)}{\partial \tau^T}$ dır. $[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\Psi}(x_i, \tau)]^{-1}$ mevcut olmak üzere,

$$\begin{aligned} -(\hat{\tau} - \tau)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\Psi}(x_i, \tau) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Psi(x_i, \tau) + \mathbf{R}_n \\ \sqrt{n}(\hat{\tau} - \tau) &= B_n^{-1}\sqrt{n}A_n + \sqrt{n}\mathbf{R}_n \end{aligned} \tag{4.27}$$

dır. Burada $\sqrt{n}\mathbf{R}_n \xrightarrow{P} \mathbf{0}$ dır. Düzgünlük koşulları altında $n \to \infty$ iken, zayıf büyük sayılar yasasından

$$B_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\dot{\Psi}(x_i, \tau)) \xrightarrow{P} E[-\dot{\Psi}(X, \tau)] = B \tag{4.28}$$

olduğu görülür. Merkezi limit teoremi aracılığı ile

$$\sqrt{n}A_n \xrightarrow{D} N_3(0, A), \quad A = E[\Psi(X, \tau)\Psi(X, \tau)^T] \tag{4.29}$$

olduğu görülür. Ψ 3×1 boyutlu bir fonksiyondur. Böylelikle, Slutsky'nin çok değişkenli yardımcı teoremi aracılığı ile

$$\sqrt{n}(\hat{\tau} - \tau) \xrightarrow{D} N_3(0, B^{-1}A(B^T)^{-1}) \tag{4.30}$$

olup $3-$boyutlu asimptotik normal dağılıma sahiptir.

Buna göre, A ve B matrislerinin var olması ve B matrisinin tersinin mevcut olması gereklidir. Buradan hareketle, A ve B matrisleri ESN dağılımı altında elde edilmiştir. Bu matrisler

$$A = \begin{bmatrix} E[\psi_\theta^2(X)] & E[\psi_\sigma(X)\psi_\theta(X)] & E[\psi_\varepsilon(X)\psi_\theta(X)] \\ & E[\psi_\sigma^2(X)] & E[\psi_\varepsilon(X)\psi_\sigma(X)] \\ & & E[\psi_\varepsilon^2(X)] \end{bmatrix}$$

ve

$$B = -\begin{bmatrix} E[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_\theta(X)] & E[\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi_\theta(X)] & E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\theta(X)] \\ & E[\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi_\sigma(X)] & E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\sigma(X)] \\ & & E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\varepsilon(X)] \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

A matrisinin elemanları Ek 2'de (2.9)-(2.14) eşitliklerinde verilmiştir. σ parametresinin sonlu ve Γ ve γ fonksiyonlarının sınırlı olması halinde A matrisi mevcuttur. B matrisinin elemanları Ek 2'de (2.16)-(2.21) eşitliklerinde verilmiş olup σ parametresinin sonlu ve Γ, γ fonksiyonlarının sınırlı olması halinde B matrisi mevcuttur. B matrisinin tersinin mevcut olması için $det(B) \neq 0$ olmalıdır. Maple 18 programı kullanılarak bu matrisin determinantı bulunmuştur. Ancak, ifadeler çok uzun olduğundan yer verilmemiştir. B matrisinin determinantının parametrelerin bazı değerlerinde sıfır veya sonsuz olabileceği durumu göz ardı edilmiştir.

Çizelge 4.1 θ, σ ve ε parametreleri için asimetrik $M-$tahmin edicilerinin asimptotik varyans değerleri

	$Var(\hat{\tau})/n$	$n=30$	$n=50$	$n=100$	$n=150$
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.190253	0.114152	0.057076	0.038051
$\varepsilon=-0.2$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.018747	0.011248	0.005624	0.003749
$c_1=-1.1, c_2=3.7$	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.021061	0.012637	0.006318	0.004212
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.059406	0.035644	0.017822	0.011881
$\varepsilon=-0.5$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.022944	0.013767	0.006883	0.004589
$c_1=-0.7, c_2=5.0$	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.016147	0.009688	0.004844	0.003229
	$Var(\hat{\theta})/n$	0.010032	0.006019	0.003010	0.002006
$\varepsilon=-0.8$	$Var(\hat{\sigma})/n$	0.035191	0.021114	0.010557	0.007038
$c_1=-0.1, c_2=6.4$	$Var(\hat{\varepsilon})/n$	0.023486	0.014091	0.007046	0.004697

$\theta=\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma=1$ ve $\varepsilon=-0.2,-0.5,-0.8$ parametre değerleri için çizelge 4.1'de bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicilerinin asimptotik varyans değerleri verilmektedir. c_1 ve c_2 ayarlama katsayıları olup, etkinliği ayarlayan değerlerdir. θ, σ ve ε parametreleri için asimetrik $M-$tahmin edicilerinin asimptotik varyans değerleri (4.30) ifadesindeki $n^{-1}B^{-1}A(B^T)^{-1}$ matrisinin köşegen elemanlarıdır.

Çizelge 3.1'deki ESN ve çizelge 3.2'deki ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicilerinin asimptotik varyans değerleri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicilerinin asimptotik varyans değerleri (çizelge 4.1'e bkz) yakın gelmiştir.

5. ASİMETRİK M-TAHMİN YÖNTEMİ İLE REGRESYON PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

Bu bölümde, bir lineer (doğrusal) regresyon modelinde regresyon parametreleri için tahmin ediciler elde edilecektir. Bunun için Bölüm 3'de verilen bazı çarpık dağılımlara dayalı ML tahmin yöntemi ve Bölüm 4'de verilen asimetrik $M-$tahmin yöntemi kullanılacaktır. Ayrıca, dağılım parametreleri olan σ ve ε parametrelerinin ML ve asimetrik $M-$tahmin edicileri bulunacaktır. Bu bölümde ele alınan regresyon modeli y bağımlı değişken ve $\mathbf{x}$'de bağımsız değişken vektörü olmak üzere

$$y_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{b} + u_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{5.1}$$

şeklindedir. Burada $b = (b_0, b_1, ..., b_{p-1})$ $p \times 1$ boyutlu parametre vektörü ve u_i hata terimleridir. $\mathbf{x}_{1\times p}$ açıklayıcı değişkenlerin rasgele olmadığı, açıklayıcı değişkenler ile hata terimlerinin ilişkisiz olduğu varsayılmaktadır.

5.1 $\varepsilon-$çarpık Üstel Kuvvet Dağılımına Dayalı ML Tahmin Edicileri

Denklem (5.1)'deki regresyon modelinde yer alan u_i hata terimlerinin $ESEP(0, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu varsayılsın. Burada simetrik dağılımdan farklı olarak $E(u_i) \neq 0$'dır. Yani $E(u_i) = -\frac{4\varepsilon\sigma\Gamma(2/\alpha)}{\sqrt{2}\Gamma(1/\alpha)}$ olduğundan, parametre tahmini yapılırken sadece kesim noktası etkilenir. Hataların $ESEP(0, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ dağıldığı varsayımı altında log-olabilirlik fonksiyonu

$$log(L) = nlog\left[\frac{\alpha}{2^{3/2}\Gamma(1/\alpha)\sigma}\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}|^\alpha}{[2^{1/2}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})\varepsilon)\sigma]^\alpha} \tag{5.2}$$

olarak elde edilir. Log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bu parametrelerin ML tahmin edicileri aşağıda verilen denklemlerin çözümünden elde edilir.

$$\frac{\partial logL}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha|y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}|^{\alpha-1} sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})(\mathbf{x}_i)}{(\sqrt{2}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})\varepsilon)\sigma)^\alpha} = 0, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial logL}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha |y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}|^{\alpha}}{(\sqrt{2}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})\varepsilon))^{\alpha} \sigma^{\alpha+1}} = 0, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial logL}{\partial \varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha |y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}|^{\alpha} sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})}{(\sqrt{2}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})\varepsilon)\sigma)^{\alpha} (1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})\varepsilon)^{\alpha+1}} = 0, \tag{5.5}$$

(5.3)-(5.5) denklemlerinin yeniden düzenlenmesiyle

$$\frac{\partial logL}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha |y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}|^{\alpha-2} (y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}) \mathbf{x}_i}{(2^{1/2}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})\varepsilon))^{\alpha} \sigma^{\alpha-2}} = 0, \tag{5.6}$$

$w_i = \frac{\alpha |y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}|^{\alpha-2}}{(2^{1/2}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon}))^{\alpha} \hat{\sigma}^{\alpha-2}}$ olmak üzere

$$\hat{\mathbf{b}} = [\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i w_i \mathbf{x}_i^T]^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i w_i y_i, \tag{5.7}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}})^2, \tag{5.8}$$

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i (y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}})^2 sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}})}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^2} / \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i (y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}})^2}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^2} \tag{5.9}$$

tahmin edicileri bulunur. Bu tahmin ediciler açık formda değildir. Dolayısıyla, bu denklemlerin çözümünde sayısal yöntemler kullanılmalıdır. Bu çözümlerin yaklaşık olarak elde edilebilmesini sağlayan IRA kullanılabilir. 3. bölümde ele alındığı gibi, ESEP dağılımının özel hali $\alpha = 2$ için ESN dağılımı ve $\alpha = 1$ için ise ESL dağılımı olarak elde edilir. Denklem (5.1)'deki u hata terimlerinin bu dağılımlara sahip olduğu varsayılarak; $\mathbf{b}$ regresyon parametreleri ile σ ve ε dağılım parametreleri için ML tahmin edicilerinin sayısal hesaplaması simülasyon çalışmasında ele alınmaktadır.

Denklem (5.1)'deki regresyon modelinde yer alan u_i hata terimlerinin $ESt(0, \sigma, \varepsilon)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu varsayılsın. Burada simetrik dağılımdan farklı olarak $E(u_i) \neq 0$'dır. Yani $E(u_i) = -\frac{4c(v)\varepsilon\sigma\nu}{\nu-1}, \nu > 1$ olduğundan, parametre tahmini yapılırken sadece kesim noktası etkilenir. Burada $c(\nu) = \frac{\Gamma(v/2+1/2)}{(\nu\pi)^{(1/2)}\Gamma(\nu/2)}$ dır. Hataların $ESt(0, \sigma, \varepsilon, \nu)$

dağıldığı varsayımı altında log-olabilirlik fonksiyonu aşağıda verilmektedir:

$$log(L) = -nlog(\sigma) + nlog(c(\nu)) + \sum_{i=1}^{n} log\left[1 + \frac{(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})^2}{\nu[(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)\sigma]^2}\right]^{-(\frac{\nu+1}{2})} \tag{5.10}$$

Bu fonksiyonun ilgili parametrelere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ML tahmin edicileri aşağıdaki denklemlerin çözümünden elde edilir.

$$\frac{\partial logL}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu+1)(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\mathbf{x}_i}{\nu[(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)\sigma]^2 + (y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})^2} = 0, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial logL}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu+1)(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})^2}{\nu(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)^2\sigma^3 + (y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})^2\sigma} = 0, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial logL}{\partial \varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu+1)(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})^2 sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})}{\nu[(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)\sigma]^2 + (y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})^2} \frac{1}{1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon} = 0 \tag{5.13}$$

(5.11)-(5.13) denklemlerinin yeniden düzenlenmesiyle

$$\frac{\partial logL}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu+1)(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\mathbf{x}_i}{\nu(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)^2 + (\frac{y_i - \mathbf{x}_i^T\mathbf{b}}{\sigma})^2} = 0, \tag{5.14}$$

$w_i = \frac{(\nu+1)}{\nu(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^2 + (\frac{y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\sigma}})^2}$ olmak üzere

$$\hat{\mathbf{b}} = [\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i w_i \mathbf{x}_i^T]^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i w_i y_i, \tag{5.15}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})^2, \tag{5.16}$$

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})^2 sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})^2}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^2} \tag{5.17}$$

tahmin edicileri bulunur. Bu tahmin ediciler açık formda değildir. Dolayısıyla, bu denklemlerin çözümünde sayısal yöntemler kullanılmalıdır. Bu çözümlerin yaklaşık olarak elde edilebilmesini sağlayan IRA kullanılabilir. ESEP dağılımının basıklığını belirleyen α ve ESt dağılımının kuyruk kalınlığını ayarlayan ν parametrelerinin bilindiği kabul edilmiştir. Çünkü, (3.26) denklemindeki ψ_α ve (3.50) denklemindeki ψ_ν skor fonksiyonları sınırlı değildir.

5.1.1 $\varepsilon-$çarpık üstel kuvvet dağılımına dayalı b regresyon ile σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin hesaplanması

$U_n = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere IRA'nın adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım $\hat{\mathbf{b}}^{(1)}$, $\hat{\sigma}^{(1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Ağırlık fonksiyonu değerleri

$$w_i^{(k)} = \frac{\alpha|y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k)}|^{\alpha-2}}{(2^{1/2}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)}))^{\alpha}\hat{\sigma}^{(k)^{\alpha-2}}}$$

şeklinde hesaplanır.

3. Adım Regresyon parametrelerinin tahmin değerleri

$$\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)} = [\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i w_i^{(k)}\mathbf{x}_i^T]^{-1}[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i w_i^{(k)} y_i]$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$(\hat{\sigma}^2)^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i^{(k)}(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})^2$$

şeklinde hesaplanır.

5. Adım Çarpıklık parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^{(k+1)}(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})^2 sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^{(k+1)}(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})^2}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)}$, $\hat{\sigma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(k)}$ kullanılarak 2. adımdaki ağırlık yeniden hesaplanır.

6. Adım Eğer $(\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)}-\hat{\mathbf{b}}^{(k)},\hat{\sigma}^{(k+1)}-\hat{\sigma}^{(k)},\hat{\varepsilon}^{(k+1)}-\hat{\varepsilon}^{(k)})$ vektörünün norm değeri kabul edilen sayısal hata $e>0$ değerinden büyük ise, $2-5$ adımları tekrar edilir. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır.

5.1.2 $\varepsilon-$çarpık t dağılımının b regresyon ile σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin hesaplanması

$U_n=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ rasgele örneklem ve $k\in\mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere IRA'nın adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım $\hat{\mathbf{b}}^{(1)}$, $\hat{\sigma}^{(1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Ağırlık fonksiyonu değerleri

$$w_i^{(k)} = \frac{(\nu+1)}{\nu(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2+(\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})^2}$$

şeklinde hesaplanır.

3. Adım Regresyon parametrelerinin tahmin değerleri

$$\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)} = [\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i w_i^{(k)}\mathbf{x}_i^T]^{-1}[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i w_i^{(k)} y_i]$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$(\hat{\sigma}^2)^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i^{(k)}(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})^2$$

şeklinde hesaplanır.

5. Adım Çarpıklık parametresinin tahmin değeri

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^{(k+1)}(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})^2 sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})}{(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^{(k+1)}(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})^2}{(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)}$, $\hat{\sigma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(k)}$ kullanılarak 2. adımdaki ağırlık yeniden hesaplanır.

6. Adım Eğer $(\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)}-\hat{\mathbf{b}}^{(k)},\hat{\sigma}^{(k+1)}-\hat{\sigma}^{(k)},\hat{\varepsilon}^{(k+1)}-\hat{\varepsilon}^{(k)})$ vektörünün norm değeri kabul edilen sayısal hata $e>0$ değerinden büyük ise, $2-5$ adımları tekrar edilir. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır.

Arslan ve Genç (2009) simetrik ve asimetrik durum için yukarıda verilen algoritmanın $\hat{\mathbf{b}}$ regresyon, σ ölçek ve ε çarpıklık parametrelerinin eş anlı tahmininde kullanılabileceğini önermektedir.

5.2 Asimetrik M-Tahmin Yöntemi ve Tahmin Edicileri

Denklem (5.1)'de verilen regresyon modeli ele alınsın. Bu model için u hata teriminin çarpık dağılıma sahip olduğu varsayılsın. $\mathbf{b}$, σ ve ε parametrelerini tahmin etmek için aşağıda verilen Q fonksiyonu ele alınsın:

$$Q(\mathbf{b},\sigma,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\rho_{ESH}\left(\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b}}{\sigma(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)}\right)+nlog(\sigma)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}log(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon) \tag{5.18}$$

Bu Q fonksiyonunun parametrelere göre minimizasyonu regresyon parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri ile dağılım parametreleri olan σ ve ε için asimetrik $M-$tahmin edicilerini verir. Bunun için $Q(\mathbf{b},\sigma,\varepsilon)$ fonksiyonunun $\mathbf{b}$ parametre vektörüne göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{b}}=\sum_{i=1}^{n}\psi_{\mathbf{b}}\left(\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b}}{\sigma(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)}\right)\frac{\mathbf{x}_i}{\sigma(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)}=0 \tag{5.19}$$

denklemi elde edilir. $r_i=\frac{u_i}{\sigma(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)}$ olmak üzere $w(r_i)=\psi_{\mathbf{b}}(r_i)/r_i$ olarak tanımlı olduğundan $\mathbf{b}$ parametresi için asimetrik $M-$tahmin edicisi

$$\hat{\mathbf{b}}=[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\frac{w_i}{(\hat{\sigma}(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon}))^2}\mathbf{x}_i^T]^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\frac{w_i}{(\hat{\sigma}(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon}))^2}y_i \tag{5.20}$$

şeklinde elde edilir. Burada $w_i=w(\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\sigma}(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})})$ ağırlık fonksiyonudur. $Q(\mathbf{b},\sigma,\varepsilon)$ fonksiyonunun σ parametresine göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\psi_{\sigma}\left(\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b}}{\sigma(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)}\right)\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b}}{(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)\sigma^2}=0 \tag{5.21}$$

denklemi elde edilir. $r_i=\frac{u_i}{\sigma(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)}$ olmak üzere $w(r_i)=\psi_{\sigma}(r_i)/r_i$ olarak tanımlı olduğundan σ ölçek parametresi için asimetrik $M-$tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})^2}{(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^2} \tag{5.22}$$

şeklinde bulunur. Burada $w_i=w(\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\sigma}(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})})$ dır. $Q(\mathbf{b},\sigma,\varepsilon)$ fonksiyonunun ε parametresine göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}=\frac{sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})}{1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\varepsilon}-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\psi_{\varepsilon}(r_i)\frac{(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})}{(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\varepsilon)^2}=0 \tag{5.23}$$

denklemi elde edilir. $r_i=\frac{u_i}{\sigma(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\mathbf{b})\varepsilon)}$ olmak üzere $w(r_i)=\psi_{\varepsilon}(r_i)/r_i$ olarak tanımlı olduğundan ε çarpıklık parametresi için asimetrik $M-$tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})}{(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^2}-w_i\frac{(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})^2 sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})}{\hat{\sigma}^2(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^3}\right] \\ &/ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})^2}\end{aligned} \tag{5.24}$$

olarak elde edillir. Burada $w_i=w(\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\sigma}(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})})$ olarak verilmektedir. $\mathbf{b},\sigma$ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri için ortak ağırlık fonksiyonu

$$w(r_i)=\begin{cases}\frac{c_1}{(1+\varepsilon)^2 r_i}, & (-\infty,c_1); \\ \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}, & [c_1,0); \\ \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}, & [0,c_2]; \\ \frac{c_2}{(1-\varepsilon)^2 r_i}, & (c_2,\infty).\end{cases} \tag{5.25}$$

şeklinde elde edilir. Burada $r_i=\frac{y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\sigma}(1-sign(y_i-\mathbf{x}_i^T\hat{\mathbf{b}})\hat{\varepsilon})}$ dır. Böylelikle, regresyon parametreleri ile dağılım parametreleri σ ve ε için asimetrik $M-$tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu tahmin ediciler kapalı formdadır. Tahmin değerlerini elde etmek için sayısal yöntemlerin kullanılması gereklidir. Bu sayısal yöntemlerden IRA kullanılarak, ilgili parametrelerin tahmin değerleri yaklaşık olarak elde edilebilir. Aşağıdaki bölümde IRA'nın adımları verilmiştir.

5.3 Asimetrik M-Tahmin Edicilerinin Hesaplanması

$U_n = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ rasgele örneklem ve $k \in \mathbb{N}^+$ iterasyon sayısını göstermek üzere IRA'nın adımları aşağıdaki gibidir:

1. Adım $\hat{\mathbf{b}}^{(1)}$, $\hat{\sigma}^{(1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(1)}$ başlangıç değerleri belirlenir.

2. Adım Denklem (5.25)'de verilen w ağırlık fonksiyonu

$$r_i^{(k)} = \frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}(1 - sign(\mathbf{x}_i - \hat{\theta}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})}$$

ifadesi aracılığı ile hesaplanır.

3. Adım $w_i^{(k)} = w(r_i^{(k)})$ olmak üzere regresyon parametrelerinin tahmin değeri

$$\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)} = [\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \frac{w_i^{(k)}}{[\hat{\sigma}^{(k)}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})]^2} \mathbf{x}_i^T]^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \frac{w_i^{(k)}}{[\hat{\sigma}^{(k)}(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k)})\hat{\varepsilon}^{(k)})]^2} y_i$$

şeklinde hesaplanır.

4. Adım Ölçek parametresinin tahmin değeri

$$(\hat{\sigma}^2)^{(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i^{(k)} \frac{(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})^2}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2}$$

şeklinde hesaplanır.

5. Adım $w_i^{(k+1)} = w(r_i^{(k+1)})$ olmak üzere çarpıklık parametresinin tahmin değeri

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}^{(k+1)} = & \sum_{i=1}^{n} [\frac{sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} - \\ & w_i^{(k+1)} \frac{(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})^2 sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})}{(\hat{\sigma}^{(k+1)})^2 (1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^3}] \\ & / \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - sign(y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)})\hat{\varepsilon}^{(k)})^2} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)}$, $\hat{\sigma}^{(k+1)}$ ve $\hat{\varepsilon}^{(k)}$ kullanılarak w ağırlık fonksiyonu $2.$ adımda yeniden hesaplanır.

6. Adım Eğer $(\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{b}}^{(k)}, \hat{\sigma}^{(k+1)} - \hat{\sigma}^{(k)}, \hat{\varepsilon}^{(k+1)} - \hat{\varepsilon}^{(k)})$ vektörünün norm değeri kabul edilen sayısal hata $e > 0$ değerinden büyük ise, $2 - 5$ adımları tekrar edilir. Aksi halde, program sonlandırılır ve son bulunan değerler tahmin değerleri olarak alınır.

6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI ve UYGULAMALAR

Bu bölümde, simülasyon çalışması yardımıyla ESN, ESL ve ESt dağılımlarının θ konum, σ ölçek ve ε çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri ve bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri hata kareler ortalamasına (mean squared error (MSE)) göre karşılaştırılmıştır. Aynı zamanda, θ ve σ parametrelerinin M ile θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri için de benzer şekilde bu karşılaştırma ele alınmıştır.

Regresyon uygulamasında, u hata terimlerinin ESN, ESL ve ESt dağılımlarına sahip olması durumunda; $\mathbf{b}$ regresyon parametreleri ile dağılım parametreleri olan σ ve ε'nun ML tahmin edicileri ve bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri için benzer şekildeki karşılaştırma ele alınmıştır.

Tez çalışmasında, ele alınan ML ve $M-$tahmin edicileri ile önerilen asimetrik $M-$tahmin edicilerinin gerçek veri seti üzerine uygulamaları yapılmış olup, kısım 6.3'de verilmektedir.

6.1 Konum, Ölçek ve Çarpıklık Parametrelerinin Eşanlı Tahminleri için Simülasyon Çalışması

ESN, ESL ve ESt dağılımlarının θ konum, σ ölçek ve ε çarpıklık parametrelerinin ML ve bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri simülasyon çalışması ile göreli etkinlikleri yönünden karşılaştırılacaktır. θ parametresinin tahmininde medyan, σ parametresinin tahmininde medyanın bir fonksiyonu olan MAD ve ε parametresinin tahmininde ise 0 değerleri başlangıç noktaları olarak seçilmiştir.

θ, σ ve ε parametreleri için asimetrik $M-$tahmin edicileri ile ESN, ESL ve ESt dağılımlarının aynı parametrelere ilişkin ML tahmin edicilerinin performans değerlendirmesi $\tau = (\theta, \sigma, \varepsilon)$ olmak üzere, tahmin edicinin varyansı ($Var(\hat{\tau})$), hata kareler ortalaması ($MSE(\hat{\tau})$) ve göreli etkinliği (relative efficiency (RE)) kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca, asimetrik $M-$tahmin edicileri ve $M-$tahmin edicileri için de bu karşılaştırma ele alınmıştır. ε-çarpık veriler için asimetrik $M-$tahmin edicisinin ML ve M tahmin edicilerine göre göreli etkinlikleri, sırasıyla

$$RE_{ESH}(\hat{\tau}) = \left(\frac{MSE_{ESH}(\hat{\tau})}{MSE_{ESN}(\hat{\tau})}\right)100 \tag{6.1}$$

$$RE_{ESH}(\hat{\tau}) = \left(\frac{MSE_{ESH}(\hat{\tau})}{MSE_{ESL}(\hat{\tau})}\right)100$$

$$RE_{ESH}(\hat{\tau}) = \left(\frac{MSE_{ESH}(\hat{\tau})}{MSE_{ESt}(\hat{\tau})}\right)100$$

$$RE_{ESH}(\hat{\tau}) = \left(\frac{MSE_{ESH}(\hat{\tau})}{MSE_{H}(\hat{\tau})}\right)100$$

ile hesaplanmıştır. Burada $\tau = (\theta, \sigma, \varepsilon)$ olmak üzere $MSE(\hat{\tau}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\tau} - \tau)^2$ dır. N tekrar sayısını göstermektedir.

Simülasyon çalışmasında, örneklem hacimleri $n = 30, 50, 100, 150$ olarak seçilmiş olup tekrar sayısı 1000 olarak alınmıştır. Bütün simülasyon çalışmaları MATLAB $R2013a$ programı kullanılarak yürütülmüştür. Asimptotik varyans değerleri elde edilirken Maple 18 programı kullanılmıştır.

ESN ve ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri kapalı formda elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin oluşturduğu $\hat{\tau} = (\hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon})$ tahmin vektörünün log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan vektör olduğunu test etmek için bu noktaların Hessian matrisinin özdeğerlerini negatif yapıp yapmadığı kontrol edilmiştir. 1000 tekrar sonucunda Hessian matrisinin her bir özdeğerinin negatif olduğu gözlenmiştir ve bu değerler D_1, D_2 ve D_3 olarak gösterilmiştir. ESN ve ESt dağılımları için bu D_1, D_2 ve D_3 değerleri $n = 30, 50, 100, 150$ örneklem hacimlerinde 1000 olarak elde edilmiştir. Böylelikle de elde edilen her tahmin vektörünün ilgili log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yaptığı simülasyon sonuçlarından gözlenmiştir.

Çizelge 6.1 - 6.3'de $\tau = (\theta, \sigma, \varepsilon)$ parametreleri göstermek üzere her bir parametrenin değeri, asimetrik $M-$tahmin değerleri, ML ve $M-$tahmin değerleri sırasıyla verilmektedir. Bu tahmin değerlerinin N kez tekrarının oluşturduğu simülasyon $Var(\hat{\tau})$, $MSE(\hat{\tau})$ değerleri de verilmektedir. Asimetrik $M-$tahmin edicisinin ESN, ESL, ESt ve Huber $M-$tahmin edicisine göre göreli etkinlikleri, (6.1) denklemindeki formül aracılığı ile elde edilmiş ve RE kısaltması olarak çizelgelerde verilmiştir. ESH başlığı altındaki göreli etkinliklerin 100 olarak elde edilmiş olmasının nedeni $RE = MSE_{ESH}(\hat{\tau})/MSE_{ESH}(\hat{\tau})$ dır. Çizelge 6.4 ve 6.36'da ise $M-$tahmin değerleri haricindeki tüm değerler yer almaktadır. Çizelgelerde ESH, ESN, ESL ve ESt ile Huber M başlıkları verilmiştir. θ, σ ve ε parametrelerinin tahmin edicilerinin sayısal değerleri ilgili başlıklar altında yer almaktadır. Bunlar içinden, ESH asimetrik $M-$tahmin edicilerini, Huber M ise $M-$tahmin edicilerini ve ayrıca ESN, ESL ve ESt ise bu parametrelerin ML tahmin edicilerini göstermektedir.

AIC (Akaike information criterion) ve BIC (Bayesian information criterion) bilgi kriterleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$
\begin{aligned}
AIC &= 2k - 2log(L(\hat{\tau}; x_1, x_2, ..., x_n)) \\
BIC &= -2log(L(\hat{\tau}; x_1, x_2, ..., x_n)) + klog(n)
\end{aligned}
$$

Burada k tahmin edilen parametre sayısını, n örneklem sayısını göstermektedir (Akaike 1974, Weakliem 1999).

Simülasyon çalışmasında kullanılan dört durum aşağıda verilmektedir:

Durum I $0.90ESN(\theta = 0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0) + 0.10ESL(\theta = 0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0)$ olmak üzere rasgele sayılar üretilmiştir.

Durum II $ESN(\theta = 0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0)$ dağılımından rasgele sayılar üretilmiştir.

Durum III $ESL(\theta = 0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0)$ dağılımından rasgele sayılar üretilmiştir.

Durum IV $ESt(\theta = 0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0)$ dağılımından rasgele sayılar üretilmiştir.

Durum I-IV'de, $\varepsilon_0 = -0.2, -0.5, -0.8$ olarak alınmıştır. Tablolarda, 1000 kez tekrar sonucu elde edilen tahmin değerlerinin ortalaması, bu tahmin değerlerinin varyansları ($Var(\hat{\tau})$) ve hata kareler ortalamaları ($MSE(\hat{\tau})$) verilmektedir. Durum I'de θ, σ ve ε parametreleri için asimetrik $M-$tahmin edicileri ile ESN, ESL ve ESt dağılımlarının bu parametreleri için ML tahmin edicileri ve θ, σ parametrelerinin $M-$tahmin edicileri göreli etkinlikleri yönünden karşılaştırılmıştır.

Durum I için rasgele sayı üretim algoritması aşağıdaki gibi verilmiştir:

- $[c_1, c_2]$ aralığında ESN dağılımından rasgele sayı üretimi: $\alpha = 2$ olsun.
  1. Adım : $\Gamma(1/\alpha, 1)$ dağılımından rasgele sayı üretilir.
  2. Adım: Düzgün dağılımdan ($d(0,1)$) rasgele sayı üretilir.
  3. Adım: Eğer $d < \frac{1-\varepsilon}{2}$ ise $i = \sqrt{2}(1-\varepsilon)$ aksi halde $i = -\sqrt{2}(1+\varepsilon)$ dır.
  4. Adım: $x_{\alpha=2} = \theta + \sigma i u^{1/\alpha}$.

- $c_1 < 0$ olmak üzere $x < c_1$, $c_2 > 0$ olmak üzere $x > c_2$ için ESL dağılımından rasgele sayı üretimi: $\alpha = 1$ olsun.
  1. Adım: $\Gamma(1/\alpha, 1)$ rasgele sayı üret.
  2. Adım: Düzgün dağılımdan ($d(0,1)$) rasgele sayı üret.
  3. Adım: Eğer $d < \frac{1-\varepsilon}{2}$ ise $i = \sqrt{2}(1-\varepsilon)$ aksi halde $i = -\sqrt{2}(1+\varepsilon)$ dır.
  4. Adım: $x_{\alpha=1} = \theta + \sigma i u^{1/\alpha}$.

- $x = (x_{\alpha=2}, x_{\alpha=1})$ olmak üzere rasgele sayılar elde edilir.

Durum II (ESN dağılımı) ve III (ESL dağılımı) için rasgele sayı üretim algoritması aşağıdaki gibi verilmiştir:

$x = \theta + \sigma i u^{1/\alpha}$ değişken dönüştürmesi kullanılarak $ESEP(\theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ dağılımından rasgele sayı üretimi aşağıdaki algoritma ile gerçekleştirilir:

1. Adım: $\Gamma(1/\alpha, 1)$ dağılımından rasgele sayı üretilir.

2. Adım: Düzgün dağılımdan ($d(0,1)$) dağılımından rasgele sayı üretilir.

3. Adım: Eğer $d < \frac{1-\varepsilon}{2}$ ise $i = \sqrt{2}(1-\varepsilon)$ aksi halde $i = -\sqrt{2}(1+\varepsilon)$ dır.

4. Adım: $x = \theta + \sigma i u^{1/\alpha}$ (Elsalloukh vd. 2005, 2009). $\alpha = 2$ için ESN ve $\alpha = 1$ için ESL dağılımlarından rasgele sayı üretilir.

Durum IV (ESt dağılımı) için rasgele sayı üretim algoritması aşağıdaki gibi verilmiştir:

1. Adım: $\Gamma(1/2, 1)$ dağılımından rasgele sayı üretilir.

2. Adım: Düzgün dağılımdan ($d(0,1)$) rasgele sayı üretilir.

3. Adım: Eğer $d < \frac{1-\varepsilon}{2}$ ise $i = \sqrt{2}(1-\varepsilon)$ aksi halde $i = -\sqrt{2}(1+\varepsilon)$ dır.

4. Adım: $y = \theta + \sigma i u^{1/2}$ olmak üzere ESN dağılımından rasgele sayı üretilir.

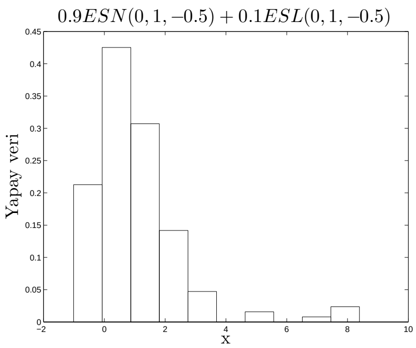
5. Adım: $z \sim \Gamma(\nu/2, 1)$ olmak üzere rasgele sayı üretilir.

6. Adım: $x = yz^{-1/2}(\nu/2)^{1/2}$ olmak üzere rasgele sayı üretilir.

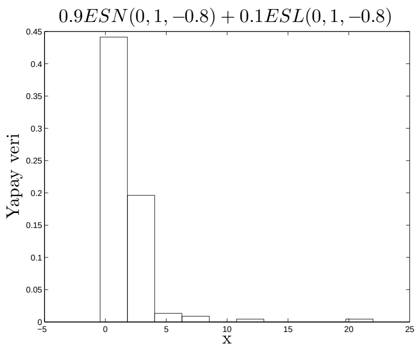
Aşağıda verilen kontamine model ele alınsın. Bu model, Durum I için örnek olarak verilebilir.

$$0.9ESN(0,1,\varepsilon_0) + 0.1ESL(0,1,\varepsilon_0) \tag{6.2}$$

Örneklem hacmi $n = 150$ olmak üzere, $\%10$'luk bir kontaminasyon için ESN dağılımından gelen örneklem hacmi $n_{ESN} = 135$ iken ESL dağılımından gelen örneklem hacmi $n_{ESL} = 15$'dir. Model (6.2), ESL kontaminasyonlu ESN dağılımı olarak adlandırılacaktır. Böylelikle, bu tür bir model ile oluşturulan rasgele sayıların histogramı aşağıda verilmiştir ve yapay veri seti (artificial data set) sapan gözlemler içermektedir.



(a) $\theta = 0, \sigma = 1, \varepsilon_0 = -0.5$



(b) $\theta = 0, \sigma = 1, \varepsilon_0 = -0.8$

Şekil 6.1 $0.9ESN(0,1,\varepsilon_0) + 0.1ESL(0,1,\varepsilon_0)$ modelinden üretilen rasgele sayıların histogramı

Çizelge 6.1 Durum I için asimetrik M (ESH), ML ve M (Huber) tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$):$c_1 = -1.10, c_2 = 3.70$, $k = 1.4$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	-0.0357	0.1645	0.1658	100	-0.0340	0.0944	0.0956	100
σ	1.0	1.1180	0.0633	0.0773	100	1.1566	0.0348	0.0594	100
ε	-0.2	-0.1603	0.0200	0.0216	100	-0.1804	0.0153	0.0160	100
				ESN					
θ	0.0	0.3057	0.0911	0.1846	90	0.3209	0.0181	0.1211	79
σ	1.0	1.2466	0.1105	0.1714	45	1.2999	0.0696	0.1595	37
ε	-0.2	-0.1462	0.0569	0.0598	36	-0.2200	0.0454	0.0455	35
				ESL					
θ	0.0	0.1736	0.1014	0.1315	126	0.1809	0.0565	0.0892	107
σ	1.0	0.6316	0.0137	0.1494	52	0.6499	0.0074	0.1300	46
ε	-0.2	-0.1306	0.0308	0.0356	61	-0.1263	0.0172	0.0226	71
				ESt					
θ	0.0	0.0096	0.2177	0.2178	76	0.0257	0.1335	0.1341	71
σ	1.0	0.6850	0.0145	0.1137	68	0.7136	0.0081	0.0902	66
ε	-0.2	-0.2156	0.0873	0.0876	25	-0.2007	0.0510	0.0510	31
				$Huber\ M$					
θ	0.0	0.3342	0.0714	0.1831	91	0.3640	0.0388	0.1714	56
σ	1.0	1.1378	0.0425	0.0615	126	1.0848	0.0222	0.0294	202
		$n=100$				$n=150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	-0.0080	0.0580	0.0581	100	0.0176	0.0364	0.0367	100
σ	1.0	1.1555	0.0197	0.0439	100	1.1702	0.0106	0.0396	100
ε	-0.2	-0.1708	0.0049	0.0057	100	-0.1891	0.0011	0.0012	100
				ESN					
θ	0.0	0.1596	0.0616	0.0871	67	0.1904	0.0213	0.0575	64
σ	1.0	1.2967	0.0421	0.1331	33	1.3220	0.0274	0.1311	30
ε	-0.2	-0.1810	0.0230	0.0234	24	-0.2346	0.0094	0.0106	11
				ESL					
θ	0.0	0.1711	0.0395	0.0688	84	0.1566	0.0223	0.0468	78
σ	1.0	0.6492	0.0043	0.1274	34	0.6531	0.0024	0.1228	32
ε	-0.2	-0.1352	0.0093	0.0135	42	-0.1321	0.0066	0.0112	11
				ESt					
θ	0.0	-0.0206	0.0741	0.0746	78	0.0004	0.0446	0.0446	82
σ	1.0	0.7239	0.0041	0.0804	55	0.7160	0.0030	0.0800	49
ε	-0.2	-0.2270	0.0252	0.0259	22	-0.2103	0.0156	0.0157	8
				$Huber\ M$					
θ	0.0	0.3298	0.0168	0.1256	46	0.3208	0.0112	0.1141	32
σ	1.0	1.0469	0.0184	0.0206	213	1.0640	0.0095	0.0136	291

Çizelge 6.2 Durum I için asimetrik M (ESH), ML ve M (Huber) tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$):$c_1 = -0.70, c_2 = 5.00$, $k = 1.4$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	-0.0828	0.1534	0.1602	100	-0.0741	0.1083	0.1138	100
σ	1.0	1.0458	0.0546	0.0567	100	1.0274	0.0369	0.0377	100
ε	-0.5	-0.4123	0.0294	0.0371	100	-0.4415	0.0137	0.0171	100
				ESN					
θ	0.0	0.4399	0.1043	0.2979	54	0.3843	0.0774	0.2251	50
σ	1.0	1.4055	0.2091	0.3735	15	1.4629	0.1720	0.3863	10
ε	-0.5	-0.3794	0.0520	0.0665	56	-0.4288	0.0341	0.0392	44
				ESL					
θ	0.0	0.4512	0.1137	0.3172	51	0.3933	0.0694	0.2241	51
σ	1.0	0.6787	0.0200	0.1233	46	0.6933	0.0118	0.1059	36
ε	-0.5	-0.2724	0.0353	0.0871	43	-0.3064	0.0207	0.0582	29
				ESt					
θ	0.0	0.1200	0.2063	0.2207	73	0.0367	0.1215	0.1228	93
σ	1.0	0.6934	0.0145	0.1085	52	0.7172	0.0068	0.0868	43
ε	-0.5	-0.4559	0.0777	0.0797	47	-0.4947	0.0443	0.0443	39
				$Huber\ M$					
θ	0.0	1.0894	0.1644	1.3512	12	1.0201	0.0895	1.1299	10
σ	1.0	1.2912	0.1274	0.2122	27	1.3318	0.0893	0.1994	19
			$n=100$				$n=150$		
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	-0.0824	0.0504	0.0572	100	-0.0692	0.0458	0.0506	100
σ	1.0	0.9851	0.0187	0.0189	100	0.9636	0.0106	0.0119	100
ε	-0.5	-0.4894	0.0047	0.0049	100	-0.4958	0.0028	0.0028	100
				ESN					
θ	0.0	0.3546	0.0472	0.1730	33	0.3134	0.0359	0.1341	38
σ	1.0	1.4866	0.0814	0.3181	6	1.5389	0.0716	0.3619	3
ε	-0.5	-0.4603	0.0191	0.0207	24	-0.4924	0.0109	0.0110	26
				ESL					
θ	0.0	0.3927	0.0350	0.1892	30	0.3832	0.0271	0.1739	29
σ	1.0	0.6942	0.0059	0.0994	19	0.7056	0.0045	0.0912	13
ε	-0.5	-0.3091	0.0109	0.0474	10	-0.3166	0.0071	0.0408	7
				ESt					
θ	0.0	-0.0568	0.0594	0.0626	91	-0.0796	0.0348	0.0509	99
σ	1.0	0.7204	0.0046	0.0828	23	0.7276	0.0032	0.0774	15
ε	-0.5	-0.5554	0.0218	0.0248	20	-0.5638	0.0121	0.0162	17
				$Huber\ M$					
θ	0.0	1.0369	0.0646	1.1398	5	1.0252	0.0588	1.1099	5
σ	1.0	1.4452	0.0589	0.2571	7	1.2744	0.0780	0.1533	8

Çizelge 6.3 Durum I için asimetrik M (ESH), ML ve M (Huber) tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$):$c_1 = -0.10, c_2 = 6.40$, $k = 1.4$

		n = 30				n = 50			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.0689	0.0886	0.0934	100	−0.0262	0.0377	0.0383	100
σ	1.0	1.0331	0.0899	0.0910	100	1.0235	0.0578	0.0584	100
ε	−0.8	−0.7178	0.0227	0.0294	100	−0.7189	0.0105	0.0171	100
				ESN					
θ	0.0	0.4769	0.1218	0.3492	27	0.3285	0.0700	0.1779	22
σ	1.0	1.7538	0.4441	1.0123	9	1.7556	0.2643	0.8352	7
ε	−0.8	−0.6577	0.0311	0.0513	57	−0.7121	0.0173	0.0250	68
				ESL					
θ	0.0	0.7885	0.1531	0.7748	12	0.7100	0.0721	0.5762	7
σ	1.0	0.8315	0.0406	0.0690	132	0.8008	0.0194	0.0591	99
ε	−0.8	−0.4075	0.0331	0.1872	16	−0.4351	0.0181	0.1513	11
				ESt					
θ	0.0	0.1809	0.1671	0.1999	47	0.1678	0.0788	0.1069	36
σ	1.0	0.7402	0.0156	0.0830	110	0.7365	0.0101	0.0795	73
ε	−0.8	−0.7586	0.0469	0.0486	61	−0.7262	0.0264	0.0319	53
				$Huber\ M$					
θ	0.0	1.8830	8.1574	11.7032	1	1.8797	6.1185	9.6521	0
σ	1.0	1.3302	0.8120	0.9209	10	1.9495	0.7885	1.6899	4
		n = 100				n = 150			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	−0.0811	0.0166	0.0232	100	−0.0959	0.0060	0.0152	100
σ	1.0	0.9754	0.0208	0.0214	100	0.9858	0.0171	0.0173	100
ε	−0.8	−0.7595	0.0038	0.0065	100	−0.7639	0.0028	0.0041	100
				ESN					
θ	0.0	0.2700	0.0371	0.1100	21	0.2194	0.0244	0.0726	21
σ	1.0	1.7370	0.1247	0.6679	3	1.8112	0.1056	0.7637	2
ε	−0.8	−0.7397	0.0089	0.0125	52	−0.7679	0.0060	0.0070	58
				ESL					
θ	0.0	0.6761	0.0425	0.4996	5	0.6810	0.0281	0.4918	3
σ	1.0	0.7981	0.0086	0.0494	43	0.8164	0.0062	0.0399	43
ε	−0.8	−0.4410	0.0097	0.1386	5	−0.4415	0.0066	0.1351	3
				ESt					
θ	0.0	0.0500	0.0433	0.0458	51	0.0323	0.0223	0.0234	65
σ	1.0	0.7362	0.0041	0.0737	29	0.7427	0.0033	0.0695	25
ε	−0.8	−0.7899	0.0141	0.0142	45	−0.8009	0.0076	0.0076	54
				$Huber\ M$					
θ	0.0	2.0201	1.8066	5.8874	0	2.1522	1.1568	5.7889	0
σ	1.0	1.8971	0.9565	1.7602	1	2.1260	0.6387	1.9067	1

Çizelge 6.1 - 6.3'de Durum I için konum (θ), ölçek (σ) ve çarpıklık (ε) parametrelerinin tahmin değerleri, varyans, MSE ve RE değerleri yer almaktadır.

Konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri: ESN, ESL ve ESt dağılımlarının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliğinin yüksek olduğu görülmüştür. Tüm parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri ile θ ve σ parametreleri için Huber $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, çarpıklık arttıkça ($\varepsilon = -0.5, -0.8$) Huber $M-$tahmin edicilerinin göreli etkinliği önemli ölçüde azalmıştır. Fakat, $\varepsilon = -0.2$ iken örneklem hacmi arttığında θ için asimetrik $M-$tahmin edicisinin göreli etkinliği yüksek iken σ için asimetrik $M-$tahmin edicisinin göreli etkinliği düşüktür.

ESN dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESN dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliği beklenildiği gibi yüksek çıkmıştır. Ancak, σ ve ε parametreleri için asimetrik $M-$tahmin edicileri ile ML tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicileri önemli derecede yüksek çıkmıştır.

ESL dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESL dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, genelde asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliği yüksektir. Çarpıklık arttıkça asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliği artmaktadır.

ESt dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESt dağılımının tüm parametreleri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, genelde asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliği yüksek çıkmıştır. ESt dağılımının kuyruk kalınlığını belirleyen parametre $\nu = 1.5$ olarak alınmıştır. Çünkü, bu durumda kuyruklar ESL dağılımının kuyruklarına benzer olabilecektir.

Çizelge 6.4 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$)

		c_1	$n=30$	c_2		c_1	$n=50$	c_2	
		-0.8		2.0		-1.8		2.7	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.0643	0.1955	0.1996	100	0.0376	0.1136	0.1150	100
σ	1.0	0.9319	0.0170	0.0216	100	0.9554	0.0113	0.0133	100
ε	-0.2	-0.1755	0.0257	0.0263	100	-0.1729	0.0124	0.0131	100
				ESN					
θ	0.0	-0.0055	0.1411	0.1411	141	-0.0250	0.0765	0.0771	149
σ	1.0	0.9535	0.0161	0.0182	119	0.9721	0.0107	0.0115	116
ε	-0.2	-0.2185	0.0496	0.0499	53	-0.2150	0.0298	0.0300	44
				ESL					
θ	0.0	0.4608	0.0768	0.2891	69	0.3635	0.0389	0.1710	67
σ	1.0	0.5493	0.0066	0.2097	10	0.5548	0.0047	0.2029	7
ε	-0.2	-0.0928	0.0280	0.0395	67	-0.0898	0.0147	0.0268	49
				ESt					
θ	0.0	0.0618	0.1882	0.1920	104	0.0378	0.1059	0.1073	107
σ	1.0	0.9425	0.0160	0.0193	112	0.9622	0.0106	0.0120	110
ε	-0.2	-0.1722	0.0647	0.0654	40	-0.1739	0.0370	0.0376	35
		c_1	$n=100$	c_2		c_1	$n=150$	c_2	
		-1.6		2.8		-2.0		3.5	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.0924	0.0623	0.0708	100	0.0321	0.0359	0.0369	100
σ	1.0	0.9739	0.0050	0.0056	100	0.9865	0.0035	0.0037	100
ε	-0.2	-0.1592	0.0061	0.0078	100	-0.1750	0.0034	0.0040	100
				ESN					
θ	0.0	0.0531	0.0421	0.0449	158	0.0008	0.0249	0.0249	148
σ	1.0	0.9846	0.0048	0.0050	113	0.9980	0.0033	0.0033	111
ε	-0.2	-0.1786	0.0139	0.0143	54	-0.2050	0.0087	0.0088	46
				ESL					
θ	0.0	0.3740	0.0254	0.1653	43	0.3607	0.0260	0.1561	24
σ	1.0	0.5624	0.0029	0.1944	3	0.5624	0.0010	0.1925	2
ε	-0.2	-0.0868	0.0071	0.0199	39	-0.0882	0.0063	0.0188	21
				ESt					
θ	0.0	0.1026	0.0518	0.0623	114	0.0421	0.0304	0.0321	115
σ	1.0	0.9750	0.0047	0.0053	106	0.9882	0.0033	0.0034	108
ε	-0.2	-0.1453	0.0162	0.0192	40	-0.1760	0.0099	0.0104	38

Çizelge 6.5 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$)

		c_1	$n = 30$	c_2		c_1	$n = 50$	c_2	
		-0.5		2.9		-1.1		3.8	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.2284	0.2299	0.2821	100	0.1864	0.1335	0.1682	100
σ	1.0	0.9101	0.0188	0.0268	100	0.9247	0.0113	0.0170	100
ε	-0.5	-0.4449	0.0321	0.0351	100	-0.4495	0.0157	0.0182	100
				ESN					
θ	0.0	0.0211	0.1140	0.1145	246	-0.0061	0.0681	0.0682	247
σ	1.0	0.9703	0.0175	0.0184	146	0.9772	0.0101	0.0106	160
ε	-0.5	-0.5040	0.0373	0.0373	94	-0.5108	0.0234	0.0235	78
				ESL					
θ	0.0	0.4929	0.1430	0.3859	73	0.4284	0.1235	0.3070	55
σ	1.0	0.5568	0.0096	0.2060	13	0.5722	0.0045	0.1875	9
ε	-0.5	-0.2059	0.0371	0.1296	27	-0.1718	0.0185	0.1262	14
				ESt					
θ	0.0	0.2426	0.1890	0.2478	114	0.1717	0.1008	0.1303	129
σ	1.0	0.9620	0.0174	0.0188	143	0.9708	0.0102	0.0110	154
ε	-0.5	-0.3564	0.0626	0.0832	42	-0.3970	0.0333	0.0439	42
		c_1	$n = 100$	c_2		c_1	$n = 150$	c_2	
		-1.5		3.7		-1.2		4.1	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.1007	0.0717	0.0886	100	0.0604	0.0478	0.0503	100
σ	1.0	0.9323	0.0054	0.0100	100	0.9461	0.0037	0.0066	100
ε	-0.5	-0.4726	0.0086	0.0094	100	-0.4552	0.0043	0.0063	100
				ESN					
θ	0.0	0.1330	0.0328	0.0504	176	0.1131	0.0204	0.0332	157
σ	1.0	1.0001	0.0050	0.0050	201	1.0045	0.0033	0.0034	196
ε	-0.5	-0.5214	0.0225	0.0229	41	-0.5127	0.0061	0.0081	78
				ESL					
θ	0.0	0.5017	0.0437	0.2954	30	0.5052	0.0288	0.2840	18
σ	1.0	0.5704	0.0022	0.1867	5	0.5755	0.0010	0.1812	4
ε	-0.5	-0.1699	0.0094	0.1184	8	-0.1710	0.0083	0.1165	5
				ESt					
θ	0.0	0.0562	0.0530	0.0562	158	0.0298	0.0294	0.0303	173
σ	1.0	0.9786	0.0047	0.0051	194	0.9849	0.0032	0.0034	193
ε	-0.5	-0.4725	0.0192	0.0199	47	-0.4876	0.0101	0.0103	61

Çizelge 6.6 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$)

		c_1	$n = 30$	c_2		c_1	$n = 50$	c_2	
		-0.1		4.2		-0.2		3.8	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
θ	0.0	0.2592	0.1576	0.2248	100	0.2350	0.1240	0.1792	100
σ	1.0	0.8480	0.0906	0.1013	100	0.8295	0.0192	0.0483	100
ε	-0.8	-0.9069	0.0592	0.0707	100	-0.8461	0.0362	0.0383	100
					ESN				
θ	0.0	0.1721	0.0846	0.2231	101	0.1337	0.0599	0.1712	105
σ	1.0	1.0188	0.0215	0.0218	465	1.0215	0.0102	0.0107	452
ε	-0.8	-0.7223	0.0415	0.0476	148	-0.7487	0.0274	0.0301	127
					ESL				
θ	0.0	0.4206	0.1873	0.3660	61	0.4114	0.0976	0.2619	68
σ	1.0	0.6214	0.0457	0.1876	54	0.6243	0.0295	0.1703	28
ε	-0.8	-0.6119	0.1689	0.2048	35	-0.6583	0.1578	0.1828	21
					ESt				
θ	0.0	0.1818	0.1602	0.1933	116	0.1099	0.0814	0.1034	173
σ	1.0	0.9278	0.0325	0.0343	295	0.9750	0.0086	0.0092	525
ε	-0.8	-0.7098	0.0819	0.0968	73	-0.7306	0.0496	0.0516	74
		c_1	$n = 100$	c_2		c_1	$n = 150$	c_2	
		-0.2		6.1		-0.3		6.3	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
θ	0.0	0.1185	0.0705	0.1060	100	0.0920	0.0347	0.0472	100
σ	1.0	0.8228	0.0078	0.0392	100	0.8234	0.0058	0.0370	100
ε	-0.8	-0.8398	0.0163	0.0179	100	-0.8218	0.0080	0.0114	100
					ESN				
θ	0.0	0.0233	0.0252	0.0357	297	0.0183	0.0102	0.0103	458
σ	1.0	1.0222	0.0062	0.0066	594	1.0243	0.0038	0.0043	860
ε	-0.8	-0.7530	0.0177	0.0199	90	-0.7716	0.0076	0.0084	136
					ESL				
θ	0.0	0.3789	0.0990	0.2411	44	0.3878	0.0889	0.2385	20
σ	1.0	0.6397	0.0063	0.1320	30	0.6388	0.0041	0.1307	28
ε	-0.8	-0.6620	0.0896	0.1114	16	-0.6907	0.0030	0.0156	73
					ESt				
θ	0.0	0.0939	0.0388	0.0476	223	0.0490	0.0171	0.0195	242
σ	1.0	0.9809	0.0054	0.0058	675	0.9863	0.0033	0.0035	1057
ε	-0.8	-0.7587	0.0137	0.0154	116	-0.7653	0.0142	0.0148	77

Çizelge 6.4 - 6.6’da Durum II için konum (θ), ölçek (σ) ve çarpıklık (ε) parametrelerinin tahmin değerleri, varyans, MSE ve RE değerleri yer almaktadır.

Konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri: Tüm parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri parametre değerlerine yakın sonuçlar vermiştir.

ESN dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: Rasgele sayılar ESN dağılımından üretildiğinden, beklenildiği gibi parametre değerlerine yakın sonuçlar vermiştir. Ancak, ESN dağılımının ε parametresinin ML tahmin edicisi ile asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliği genelde yüksektir.

ESL dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESL dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin göreli etkinliği yüksektir.

ESt dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESt dağılımının θ ve σ parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, ML tahmin edicilerinin etkinliği yüksektir. Ancak, ESt dağılımının ε parametresinin ML tahmin edicisinin etkinliği asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliğinden daha düşüktür. Ayrıca, $\nu \to \infty$ iken ESt dağılımının ESN dağılımına yakınsadığı göz önüne alınırsa, $\nu = 100$ seçilmesi ile ESt dağılımının parametreleri için ML tahmin edicilerinin, parametre değerlerine yakın sonuçlar vermesi açısından yeterli olduğu görülmüştür.

Çizelge 6.7 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$):$c_1 = -0.4, c_2 = 2.9$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	-0.0842	0.1224	0.1295	100	-0.1219	0.0622	0.0771	100
σ	1.0	1.4630	0.1246	0.3390	100	1.4277	0.0814	0.2643	100
ε	-0.2	-0.3085	0.0056	0.0174	100	-0.3095	0.0036	0.0156	100
				ESN					
θ	0.0	0.1599	0.1896	0.2151	60	0.1379	0.1179	0.1369	56
σ	1.0	1.9114	0.1322	0.9628	35	1.9102	0.0858	0.9143	29
ε	-0.2	-0.1862	0.0421	0.0423	41	-0.1817	0.0303	0.0307	51
				ESL					
θ	0.0	0.0443	0.0416	0.0435	298	0.0396	0.0203	0.0219	352
σ	1.0	0.9821	0.0297	0.0300	1128	0.9731	0.0196	0.0203	1302
ε	-0.2	-0.1964	0.0190	0.0190	91	-0.1888	0.0125	0.0126	123
				ESt					
θ	0.0	0.0218	0.2342	0.2347	55	0.0180	0.1263	0.1266	61
σ	1.0	0.8830	0.0350	0.0487	696	0.8844	0.0230	0.0364	726
ε	-0.2	-0.2066	0.0554	0.0554	31	-0.1958	0.0333	0.0333	47
		$n=100$				$n=150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	-0.1551	0.0300	0.0541	100	-0.1642	0.0207	0.0476	100
σ	1.0	1.4517	0.0368	0.2408	100	1.4446	0.0258	0.2234	100
ε	-0.2	-0.3124	0.0014	0.0140	100	-0.3141	0.0010	0.0139	100
				ESN					
θ	0.0	0.1282	0.0597	0.0762	71	0.1260	0.0452	0.0611	78
σ	1.0	1.9770	0.0451	0.9996	24	1.9725	0.0323	0.9779	23
ε	-0.2	-0.1790	0.0118	0.0122	115	-0.1822	0.0090	0.0093	150
				ESL					
θ	0.0	0.0395	0.0095	0.0110	489	0.0319	0.0055	0.0065	729
σ	1.0	0.9971	0.0100	0.0100	2417	0.9936	0.0065	0.0065	3414
ε	-0.2	-0.1845	0.0051	0.0053	264	-0.1888	0.0035	0.0036	386
				ESt					
θ	0.0	0.0157	0.0601	0.0603	90	0.0098	0.0377	0.0378	126
σ	1.0	0.9098	0.0127	0.0208	1157	0.9122	0.0075	0.0152	1467
ε	-0.2	-0.1925	0.0140	0.0141	100	-0.1956	0.0092	0.0092	151

Çizelge 6.8 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$):$c_1 = -0.2, c_2 = 3.2$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	−0.1141	0.1015	0.1146	100	−0.1998	0.0926	0.1126	100
σ	1.0	1.2992	0.0788	0.1683	100	1.3170	0.0700	0.1574	100
ε	−0.5	−0.5238	0.0052	0.0057	100	−0.5190	0.0018	0.0022	100
				ESN					
θ	0.0	0.3792	0.1248	0.2686	43	0.3511	0.0853	0.2085	54
σ	1.0	1.9238	0.1085	0.9619	17	1.9945	0.1104	1.0994	14
ε	−0.5	−0.4394	0.0268	0.0305	19	−0.4214	0.0186	0.0248	9
				ESL					
θ	0.0	0.1163	0.0314	0.0449	255	0.0774	0.0182	0.0242	465
σ	1.0	0.9635	0.0235	0.0248	678	1.0045	0.0235	0.0235	670
ε	−0.5	−0.4675	0.0158	0.0169	34	−0.4564	0.0076	0.0095	23
				ESt					
θ	0.0	0.1235	0.1789	0.1941	59	−0.0144	0.1155	0.1157	97
σ	1.0	0.8511	0.0289	0.0511	330	0.9236	0.0232	0.0290	543
ε	−0.5	−0.4598	0.0489	0.0505	11	−0.4886	0.0194	0.0195	11
		$n=100$				$n=150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.1642	0.0501	0.0770	100	0.1356	0.0142	0.0326	100
σ	1.0	1.6555	0.0722	0.5018	100	1.6235	0.0563	0.4451	100
ε	−0.5	−0.4846	0.0014	0.0016	100	−0.4748	0.0010	0.0016	100
				ESN					
θ	0.0	0.3687	0.0547	0.1907	40	0.3585	0.0241	0.1526	21
σ	1.0	1.9945	0.0315	1.0204	49	1.9954	0.0393	1.0301	43
ε	−0.5	−0.4272	0.0070	0.0123	13	−0.4238	0.0040	0.0098	16
				ESL					
θ	0.0	0.0810	0.0112	0.0177	434	0.0779	0.0060	0.0121	269
σ	1.0	0.9960	0.0090	0.0090	5585	0.9922	0.0077	0.0078	5719
ε	−0.5	−0.4691	0.0035	0.0044	36	−0.4675	0.0023	0.0033	49
				ESt					
θ	0.0	0.0060	0.0622	0.0622	124	0.0202	0.0244	0.0248	132
σ	1.0	0.9040	0.0173	0.0265	1895	0.9064	0.0084	0.0172	2588
ε	−0.5	−0.4964	0.0116	0.0116	14	−0.4904	0.0061	0.0061	26

Çizelge 6.9 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$):$c_1 = -0.01, c_2 = 6.0$

		$n = 30$				$n = 50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
θ	0.0	0.2496	0.1215	0.1838	100	0.0900	0.0142	0.0223	100
σ	1.0	1.1985	0.1044	0.1438	100	1.2521	0.0657	0.1292	100
ε	-0.8	-0.7619	0.0279	0.0293	100	-0.8371	0.0047	0.0061	100
					ESN				
θ	0.0	0.8998	0.1922	1.0019	18	0.7649	0.0804	0.6655	3
σ	1.0	1.9528	0.1292	1.0370	14	2.1150	0.0959	1.3392	10
ε	-0.8	-0.5531	0.0283	0.0893	33	-0.6090	0.0042	0.0407	15
					ESL				
θ	0.0	0.1810	0.0466	0.0794	232	0.1757	0.0160	0.0469	48
σ	1.0	0.9392	0.0222	0.0259	555	0.9993	0.0155	0.0155	832
ε	-0.8	-0.7598	0.0050	0.0066	443	-0.7456	0.0050	0.0060	102
					ESt				
θ	0.0	0.3752	0.3153	0.4561	40	0.0959	0.0573	0.0664	34
σ	1.0	0.8469	0.0227	0.0461	312	0.8801	0.0179	0.0323	400
ε	-0.8	-0.6591	0.0926	0.1124	26	-0.7839	0.0155	0.0157	38
		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
θ	0.0	0.1001	0.0172	0.0205	100	0.0684	0.0095	0.0141	100
σ	1.0	1.1428	0.0769	0.0973	100	1.2076	0.0172	0.0603	100
ε	-0.8	-0.8421	0.0018	0.0036	100	-0.8525	0.0006	0.0034	100
					ESN				
θ	0.0	0.8093	0.0821	0.7370	3	0.7350	0.0436	0.5838	2
σ	1.0	1.9753	0.0878	1.0390	9	2.1203	0.0275	1.2824	5
ε	-0.8	-0.5824	0.0074	0.0548	7	-0.6184	0.0040	0.0370	9
					ESL				
θ	0.0	0.1692	0.0075	0.0361	57	0.1575	0.0095	0.0343	41
σ	1.0	0.9686	0.0102	0.0109	893	1.0070	0.0056	0.0056	1068
ε	-0.8	-0.7380	0.0046	0.0059	61	-0.7494	0.0021	0.0046	73
					ESt				
θ	0.0	0.1074	0.0261	0.0376	55	0.0559	0.0181	0.0212	67
σ	1.0	0.8950	0.0198	0.0308	316	0.9193	0.0080	0.0145	415
ε	-0.8	-0.7548	0.0097	0.0117	31	-0.7865	0.0033	0.0035	97

Çizelge 6.7 - 6.9'da Durum III için konum (θ), ölçek (σ) ve çarpıklık (ε) parametrelerinin tahmin değerleri, varyans, MSE ve RE değerleri yer almaktadır.

Konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri: ESL dağılımının bütün parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, genelde ML tahmin edicilerinin etkinliğinin yüksek geldiği gözlenmiştir. Ancak $\varepsilon = -0.5, -0.8$ iken, ε parametresinin asimetrik $M-$tahmin edicisi ile ESL dağılımının bu parametresi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliğinin genelde yüksek geldiği gözlenmiştir.

ESN dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESN dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliğinin yüksek geldiği gözlenmiştir. Ancak, $\varepsilon = -0.2$ ve $n = 100$ ile $n = 150$ için ESN dağılımın ε parametresi için ML tahmin edicisi ile asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, ML tahmin edicisinin etkinliğinin nispeten yüksek geldiği gözlenmiştir. Bu durumun, uygun c_1 ve c_2 seçimlerinin yeterince iyi yapılamamasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

ESL dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESL dağılımının bütün parametrelerinin ML tahmin edicileri ile asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliğinin genelde düşük geldiği gözlenmiştir. Ancak, $\varepsilon = -0.5$ iken ESL dağılımının ε parametresi için ML tahmin edicisi ile bu parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliğinin daha yüksek geldiği gözlenmiştir. $\varepsilon = -0.8$ ve örneklem hacimleri $n = 50, 100, 150$ iken ESL dağılımının θ parametresinin ML tahmin edicisi ile bu parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliği yüksektir.

ESt dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: Veriler ESL dağılımından üretildiğinde, ESt dağılımında θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmininde $\nu = 1$

olarak seçilmiştir. Çünkü, bu durumda ESt dağılımı ESL dağılımı olmaktadır ve böylelikle ESt dağılmının ML tahminleri de iyi gelebilecektir. Buna rağmen, çarpık veri seti için uygun c_1 ve c_2 ayarlama (tuning) değerlerinin seçimi ile birlikte, $\varepsilon = -0.2$ $n = 100, 150$ değerleri dışında, ESt dağılımının ε parametresi için ML tahmin edicisi ile bu parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliğinin daha yüksek çıktığı görülmüştür. $\varepsilon = -0.5$ için $n = 100, n = 150$ değerleri dışında ESt dağılımının θ parametresi ile bu parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliği yüksek çıkmıştır. ESt dağılımının σ parametresi için ML tahmin edicisi ile bu parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, ML tahmin edicisinin göreli etkinliği yüksektir.

Çizelge 6.10 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$):$c_1 = -1.2, c_2 = 4.0$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
θ	0.0	-0.2301	0.1518	0.2047	100	-0.2168	0.0860	0.1330	100
σ	1.0	1.3614	0.1341	0.2648	100	1.3701	0.1121	0.2490	100
ε	-0.2	-0.1688	0.0118	0.0128	100	-0.1800	0.0075	0.0079	100
					ESN				
θ	0.0	-0.0901	0.2850	0.2931	70	-0.0811	0.2167	0.2233	60
σ	1.0	1.4877	0.1651	0.4030	66	1.5247	0.1705	0.4458	56
ε	-0.2	-0.2203	0.0711	0.0715	18	-0.2396	0.0573	0.0589	13
					ESL				
θ	0.0	-0.0173	0.0269	0.0272	754	-0.0259	0.0162	0.0169	787
σ	1.0	0.7506	0.0215	0.0837	316	0.7601	0.0183	0.0759	328
ε	-0.2	-0.1866	0.0180	0.0181	70	-0.2091	0.0137	0.0138	57
					ESt				
θ	0.0	-0.0631	0.1751	0.1779	115	-0.0624	0.1044	0.1083	123
σ	1.0	0.8609	0.1210	0.1395	189	0.8768	0.1071	0.1223	203
ε	-0.2	-0.2054	0.0602	0.0602	21	-0.2316	0.0364	0.0374	21
		$n=100$				$n=150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
θ	0.0	-0.1362	0.0573	0.0758	100	-0.1654	0.0375	0.0649	100
σ	1.0	1.3953	0.0458	0.2021	100	1.3956	0.0283	0.1848	100
ε	-0.2	-0.1665	0.0035	0.0046	100	-0.1718	0.0030	0.0038	100
					ESN				
θ	0.0	-0.0253	0.2066	0.2073	37	-0.0337	0.1167	0.1178	55
σ	1.0	1.5824	0.1089	0.4481	45	1.5748	0.0541	0.3844	48
ε	-0.2	-0.2176	0.0456	0.0459	10	-0.2213	0.0343	0.0348	11
					ESL				
θ	0.0	0.2158	0.0048	0.0113	671	0.2146	0.0174	0.0635	102
σ	1.0	0.7704	0.0083	0.0610	331	0.7745	0.0046	0.0555	333
ε	-0.2	-0.1020	0.0057	0.0103	45	-0.1009	0.0044	0.0142	27
					ESt				
θ	0.0	0.0021	0.0617	0.0617	123	-0.0206	0.0395	0.0399	163
σ	1.0	0.9573	0.0391	0.0411	492	0.9867	0.0266	0.0268	690
ε	-0.2	-0.2062	0.0177	0.0178	26	-0.2147	0.0134	0.0137	28

Çizelge 6.11 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$):$c_1 = -1.0, c_2 = 4.4$

		$n = 30$				$n = 50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.0544	0.1650	0.1680	100	-0.0339	0.0831	0.0843	100
σ	1.0	1.4655	0.4780	0.6948	100	1.3830	0.0926	0.2393	100
ε	-0.5	-0.3112	0.0157	0.0513	100	-0.3244	0.0100	0.0408	100
				ESN					
θ	0.0	0.0750	0.2281	0.2338	72	-0.0406	0.2087	0.2103	40
σ	1.0	1.6636	2.7930	3.2334	21	1.5652	0.2535	0.5729	42
ε	-0.5	-0.4964	0.0634	0.0635	81	-0.5299	0.0500	0.0509	80
				ESL					
θ	0.0	0.6049	0.1277	0.4935	34	0.5630	0.0610	0.3780	22
σ	1.0	0.8260	0.1078	0.1380	503	0.8073	0.0240	0.0611	392
ε	-0.5	-0.2193	0.0228	0.1015	51	-0.2262	0.0120	0.0869	47
				ESt					
θ	0.0	0.0270	0.2015	0.2023	83	-0.0021	0.0826	0.0826	102
σ	1.0	0.9368	0.1295	0.1335	520	0.9169	0.0808	0.0889	269
ε	-0.5	-0.5095	0.0570	0.0571	90	-0.5081	0.0325	0.0326	125
		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	-0.0812	0.0445	0.0572	100	-0.0756	0.0496	0.0508	100
σ	1.0	1.2754	0.0455	0.1213	100	1.3029	0.0326	0.1101	100
ε	-0.5	-0.3462	0.0035	0.0271	100	-0.3517	0.0032	0.0252	100
				ESN					
θ	0.0	0.3432	0.0796	0.1974	29	0.2831	0.0513	0.1315	39
σ	1.0	1.5884	0.2322	0.5784	21	1.6761	0.0801	0.5372	20
ε	-0.5	-0.4065	0.0228	0.0316	86	-0.4247	0.0212	0.0268	94
				ESL					
θ	0.0	0.4131	0.0433	0.2140	27	0.3690	0.0190	0.1552	33
σ	1.0	0.7712	0.0095	0.0610	199	0.7957	0.0062	0.0479	230
ε	-0.5	-0.2850	0.0115	0.0577	47	-0.3052	0.0072	0.0451	56
				ESt					
θ	0.0	0.0139	0.0466	0.0468	122	-0.0199	0.0361	0.0365	139
σ	1.0	0.9820	0.0090	0.0093	1304	0.9921	0.0058	0.0059	1866
ε	-0.5	-0.4874	0.0138	0.0140	194	-0.5002	0.0109	0.0109	231

Çizelge 6.12 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$):$c_1 = -0.05, c_2 = 5.5$

		$n = 30$				$n = 50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.1327	0.0701	0.0877	100	0.0390	0.0358	0.0374	100
σ	1.0	0.8596	0.0487	0.0684	100	0.8834	0.0327	0.0463	100
ε	-0.8	-0.7373	0.0101	0.0141	100	-0.7385	0.0072	0.0110	100
				ESN					
θ	0.0	0.2598	0.0828	0.1503	58	0.1407	0.0745	0.0943	40
σ	1.0	1.5128	0.3251	0.5881	12	1.5953	0.1131	0.4675	10
ε	-0.8	-0.5893	0.0135	0.0579	24	-0.6533	0.0141	0.0365	30
				ESL					
θ	0.0	0.8903	0.1692	0.9752	10	0.8949	0.1518	0.9617	5
σ	1.0	0.7636	0.0182	0.0741	92	0.7988	0.0130	0.0535	87
ε	-0.8	-0.3481	0.0915	0.2980	6	-0.3661	0.0899	0.2830	5
				ESt					
θ	0.0	0.1861	0.1262	0.1609	55	0.0217	0.0786	0.0791	47
σ	1.0	1.0403	0.1442	0.1458	47	0.9810	0.0510	0.0514	90
ε	-0.8	-0.7706	0.0329	0.0338	42	-0.8153	0.0205	0.0207	53
		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
θ	0.0	0.0533	0.0174	0.0202	100	0.0419	0.0085	0.0102	100
σ	1.0	0.9863	0.0251	0.0253	100	0.9876	0.0164	0.0166	100
ε	-0.8	-0.7311	0.0033	0.0081	100	-0.7350	0.0021	0.0063	100
				ESN					
θ	0.0	0.0686	0.0423	0.0470	43	0.0510	0.0335	0.0361	28
σ	1.0	1.6219	0.1414	0.5282	5	1.6493	0.1048	0.5263	3
ε	-0.8	-0.7858	0.0102	0.0104	78	-0.7914	0.0083	0.0083	76
				ESL					
θ	0.0	0.9430	0.0404	0.9297	2	0.9443	0.0269	0.9185	1
σ	1.0	0.8732	0.0118	0.0279	91	0.8798	0.0083	0.0228	73
ε	-0.8	-0.3158	0.0058	0.2403	3	-0.3174	0.0042	0.2371	3
				ESt					
θ	0.0	0.0181	0.0271	0.0274	74	0.0162	0.0178	0.0180	57
σ	1.0	0.9481	0.0468	0.0495	51	0.9956	0.0265	0.0266	62
ε	-0.8	-0.8000	0.0083	0.0083	98	-0.7984	0.0052	0.0052	120

Çizelge 6.10 - 6.12'de Durum IV için konum (θ), ölçek (σ) ve çarpıklık (ε) parametrelerinin tahmin değerleri, varyans, MSE ve RE değerleri yer almaktadır.

Konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri: ESt dağılımından rasgele sayı üretilirken $\nu = 3$ olarak alınmıştır. Uygun c_1 ve c_2 ayarlama (tuning) katsayılarının seçiminin önemli olduğu gözlenmiştir. $\varepsilon = -0.2$ iken ESt dağılımının ε parametresi ile bu parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliği yüksek çıkmıştır. $\varepsilon = -0.5$ ve $n = 30$ için ESt dağılımının θ parametresinin ML tahmin edicisi ile bu parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliği nispeten yüksek düzeyde gelmiştir. $\varepsilon = -0.8$ iken ESt dağılımının bütün parametreleri için ML tahmin edicileri ile asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliği yüksek gelmiştir. Ancak, $n = 150$ için ε parametresi için ML tahmin edicisinin etkinliği nispeten yüksektir.

ESN dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESN dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliği yüksek çıkmıştır.

ESL dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESL dağılımının ε parametresi için ML tahmin edicisi ile asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicisinin etkinliği daha yüksek çıkmıştır. Aynı zamanda, çarpıklık arttıkça asimetrik $M-$tahmin edicisinin göreli etkinliğinin arttığı gözlenmiştir. $\varepsilon = -0.2$ iken ESL dağılımının θ ve σ parametreleri için ML tahmin edicileri ile asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, ML tahmin edicilerinin etkinliği yüksek çıkmıştır. $\varepsilon = -0.5$ iken ESL dağılımının σ parametresi için ML tahmin edicileri ile asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, ML tahmin edicilerinin etkinliği yüksek çıkmıştır. $\varepsilon = -0.8$ iken ESL dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliği yüksek çıkmıştır.

ESt dağılımının konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESt dağılımının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri ile asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliği $\varepsilon = -0.8$ iken yüksek çıkmıştır.

Simülasyon çalışmasında, ESN, ESL ve ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri kendi içindeki tahmin değerlerinde beklenildiği gibi parametre değerlerine yakın gelmiştir. Uygun c_1 ve c_2 katsayılarının seçimi sonucu, ortada ESN ve kuyruklarda ESL olduğunda θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri de parametre değerlerine yakın tahmin değerleri vermiştir. Ancak; çarpıklık parametresinin tahmininde, asimetrik M-tahmin edicisi ile ESN, ESL ve ESt dağılımlarının ML tahmin edicileri karşılaştırıldığında, asimetrik M-tahmin edicisinin etkinliği genelde yüksektir. Böylesi bir durumun gözlenmiş olmasının nedeni uygun c_1 ve c_2 ayarlama katsayılarının seçiminden kaynaklanmakta olup aynı zamanda asimetrik M-tahmin edicisinin bu parametrenin tahmininde küçük MSE değeri verdiği şeklinde yorumlanabilir. ESL ve ESt dağılımlarından rasgele sayı üretildiğinde, uygun olabilecek c_1 ve c_2 ayarlama katsayıları seçilmiş olmasına karşın, asimetrik M-tahmin edicileri σ parametresinin tahmininde parametre değerinden uzak tahminler vermiştir. θ parametresinin tahmininde, $\varepsilon = -0.8$ iken ESL ve ESt dağılımlarının ML tahmin edicileri ile asimetrik M-tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik M-tahmin edicisi yüksektir. Bunun nedeninin ise, çarpıklık derecesi yüksek iken yarı (half) dağılım oluştuğu ve konumun asimetrik M-tahmin edicisi tarafından daha iyi tahmin edilebildiği olarak yorumlanabilir. Bazı parametreler için asimetrik M-tahmin edicileri ve bu parametreler için ESt dağılımının ML tahmin edicileri genelde yakın MSE değerlerine sahip olmasının nedeni, asimetrik M-tahmin edicilerinin kalın kuyruklu durumda da modelleyebilmesidir.

Kontaminasyon oranı $K = 0.1$ olduğundan, örneklem hacmi arttığında kontaminasyon örneklem hacmi de artacaktır. Örneklem hacmi arttığında $MSE(\hat{\tau})$ değerlerinin düşüş gösterdiği gözlenmektedir. Bu durum, gerek ML tahmin edicisinin gerekse de asimetrik $M-$tahmin edicisinin tutarlı olduğunu göstermektedir. Veriyi iyi modelleyemeyen dağılımların θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahminleri için MSE değerleri örneklem hacmi arttığında düşüş göstermemiştir. Verinin iyi modellenemediği durumda, aynı zamanda hesapsal hatanında oluşabileceği dikkate alınabilir. Simülasyon varyans değerleri asimptotik varyans değerleri civarında gözlenmiştir. Asimetrik $M-$tahmin edicilerinin asimptotik varyans değerleri ψ fonksiyonunun Taylor açılımından elde edilmektedir (4.30 ifadesine bkz). Gerek tahmin yapılması gerekse de Taylor açılımı ile bir yaklaşım yapıldığından dolayı, tam değerin altında veya üstünde asimptotik varyans değerlerine ulaşmak söz konusu olmaktadır. Sonuç olarak, θ, σ ve ε parametreleri için elde edilen asimetrik $M-$tahmin edicilerinin simülasyon varyans değerleri, asimptotik varyans değerleri civarında gözlenmiştir.

6.2 Regresyon ve Dağılım Parametrelerinin Eşanlı Tahminleri için Simülasyon Çalışması

Simülasyon çalışmasında aşağıdaki regresyon modeli ele alınacaktır.

$$y_i = 3x_{0i} + 5x_{1i} + x_{2i} - 4x_{3i} + 2x_{4i} - 2x_{5i} + u_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{6.1}$$

u hata terimlerinin çarpık bir dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Burada açıklayıcı değişkenlerin $x_0, x_1, x_2, ..., x_5$'in sabit değerler olduğu varsayılmaktadır. Ancak, bu gözlemlere ihtiyaç duyulduğu için MATLAB $R2013a$ programındaki $normrnd$ fonksiyonu kullanılarak $N(0,1)$ rasgele sayı üretimi gerçekleştirilmiştir. Burada da, $\mathbf{b}$, σ ve ε parametreleri için asimetrik $M-$tahmin edicileri ile ESN, ESL ve ESt dağılımlarının bu parametreler için ML tahmin edicileri önceki bölümdeki gibi karşılaştırılmıştır. $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ parametrelerinin tahmininde başlangıç noktası olarak $\mathbf{b} = (0,0,0,0,0,0)$ vektörü alınmıştır. σ ve ε parametrelerinin tahminlerinde ise sırasıyla MAD ve 0 değerleri başlangıç noktası olarak seçilmiştir. Hata terimlerinin dağılımı için aşağıda verilen dört durum ele alınmıştır. $\varepsilon_0 = -0.2, -0.5, -0.8$ değerleri seçilmiştir.

Model I $u \sim 0.9ESN(0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0) + 0.1ESL(0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0)$ olmak üzere rasgele sayılar üretilmiştir.

Model II $u \sim ESN(0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0)$ dağılımından rasgele sayılar üretilmiştir.

Model III $u \sim ESL(0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0)$ dağılımından rasgele sayılar üretilmiştir.

Model IV $u \sim ESt(0, \sigma = 1, \varepsilon = \varepsilon_0)$ dağılımından rasgele sayılar üretilmiştir.

Çizelge 6.13 Durum I için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$): $c_1 = -1.10, c_2 = 5.20$

		$n = 30$				$n = 50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	2.9675	0.1484	0.1495	100	2.8862	0.0841	0.0929	100
b_1	5.0	4.9565	0.0344	0.0362	100	5.0044	0.0253	0.0253	100
b_2	1.0	1.0536	0.0618	0.0647	100	0.9990	0.0230	0.0230	100
b_3	-4.0	-3.9775	0.0351	0.0356	100	-3.9779	0.0260	0.0265	100
b_4	2.0	1.9788	0.0458	0.0463	100	2.0315	0.0329	0.0339	100
b_5	-2.0	-1.9260	0.0457	0.0511	100	-1.9911	0.0236	0.0237	100
σ	1.0	1.0267	0.0135	0.0142	100	1.0364	0.0098	0.0112	100
ε	-0.2	-0.1685	0.0141	0.0151	100	-0.2003	0.0124	0.0124	100
					ESN				
b_0	3.0	3.3478	0.0591	0.1801	83	3.3773	0.0219	0.1642	57
b_1	5.0	5.0192	0.0807	0.0811	45	5.0420	0.0517	0.0535	47
b_2	1.0	1.0348	0.0929	0.0941	69	1.0235	0.0344	0.0350	66
b_3	-4.0	-3.9830	0.0779	0.0781	46	-3.9705	0.0473	0.0482	55
b_4	2.0	1.9189	0.1256	0.1322	35	2.0516	0.0344	0.0371	91
b_5	-2.0	-1.9313	0.0697	0.0745	69	-1.9883	0.0339	0.0340	70
σ	1.0	1.1339	0.0783	0.0963	15	1.2276	0.1005	0.1523	7
ε	-0.2	-0.0354	0.0068	0.0339	44	-0.0810	0.0089	0.0231	54
					ESL				
b_0	3.0	3.1078	0.1612	0.1728	87	3.1346	0.0803	0.0998	93
b_1	5.0	4.7403	0.1761	0.2435	15	4.6403	0.1550	0.2844	8
b_2	1.0	0.8516	0.0902	0.1122	58	0.9095	0.0978	0.1060	22
b_3	-4.0	-3.7824	0.2043	0.2517	14	-3.7205	0.1581	0.2363	11
b_4	2.0	1.7326	0.1880	0.2595	18	1.8225	0.0721	0.1071	32
b_5	-2.0	-1.8504	0.1347	0.1571	33	-1.8451	0.0905	0.1145	21
σ	1.0	0.6916	0.0384	0.1335	11	0.7090	0.0209	0.1056	11
ε	-0.2	-0.1064	0.0194	0.0282	53	-0.1351	0.0122	0.0164	76
					ESt				
b_0	3.0	3.1056	0.3187	0.3298	45	2.9574	0.2092	0.2111	44
b_1	5.0	4.9588	0.0862	0.0879	41	5.0119	0.0388	0.0390	65
b_2	1.0	1.0232	0.1097	0.1103	59	1.0038	0.0334	0.0334	69
b_3	-4.0	-4.0213	0.0663	0.0668	53	-3.9777	0.0398	0.0403	66
b_4	2.0	1.9617	0.0981	0.0996	46	1.9986	0.0354	0.0354	96
b_5	-2.0	-1.9408	0.0581	0.0616	83	-1.9755	0.0394	0.0400	59
σ	1.0	0.7318	0.2703	0.3422	4	0.6817	0.0086	0.1100	10
ε	-0.2	-0.1841	0.1730	0.1733	9	-0.2764	0.1022	0.1080	12

Çizelge 6.14 Durum I için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$): $c_1 = -1.10, c_2 = 5.20$

		$n=100$				$n=150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
b_0	3.0	2.7998	0.0428	0.0828	100	2.8049	0.0311	0.0692	100
b_1	5.0	5.0042	0.0099	0.0099	100	4.9814	0.0094	0.0098	100
b_2	1.0	0.9832	0.0066	0.0069	100	0.9984	0.0068	0.0068	100
b_3	-4.0	-4.0094	0.0144	0.0144	100	-3.9802	0.0065	0.0069	100
b_4	2.0	2.0029	0.0081	0.0081	100	2.0063	0.0064	0.0064	100
b_5	-2.0	-1.9821	0.0092	0.0095	100	-1.9935	0.0079	0.0079	100
σ	1.0	1.0473	0.0044	0.0066	100	1.0447	0.0025	0.0045	100
ε	-0.2	-0.2070	0.0044	0.0044	100	-0.2157	0.0039	0.0041	100
				ESN					
b_0	3.0	3.3573	0.0224	0.1501	55	3.3669	0.0093	0.1439	48
b_1	5.0	5.0270	0.0187	0.0194	51	4.9870	0.0181	0.0183	53
b_2	1.0	0.9920	0.0137	0.0138	50	1.0008	0.0096	0.0096	71
b_3	-4.0	-4.0387	0.0267	0.0282	51	-3.9871	0.0094	0.0095	72
b_4	2.0	2.0043	0.0215	0.0215	38	2.0051	0.0114	0.0114	56
b_5	-2.0	-1.9846	0.0155	0.0157	60	-1.9977	0.0131	0.0131	60
σ	1.0	1.2661	0.0389	0.1097	6	1.2943	0.0254	0.1120	4
ε	-0.2	-0.0951	0.0051	0.0161	27	-0.0980	0.0046	0.0150	27
				ESL					
b_0	3.0	3.0491	0.0971	0.0996	83	3.0047	0.0839	0.0840	82
b_1	5.0	4.6588	0.1551	0.2815	3	4.6069	0.1201	0.2746	4
b_2	1.0	0.8519	0.0355	0.0679	10	0.9336	0.0409	0.0453	15
b_3	-4.0	-3.6718	0.0844	0.1921	8	-3.6635	0.0846	0.1908	4
b_4	2.0	1.8236	0.0774	0.1065	8	1.8640	0.0835	0.1020	6
b_5	-2.0	-1.8170	0.0808	0.1143	8	-1.8302	0.0596	0.0884	9
σ	1.0	0.7443	0.0227	0.0881	8	0.7855	0.0212	0.0673	7
ε	-0.2	-0.1175	0.0079	0.0147	30	-0.1789	0.0130	0.0135	31
				ESt					
b_0	3.0	2.9470	0.0871	0.0982	84	2.8777	0.0823	0.0973	71
b_1	5.0	4.9989	0.0134	0.0134	74	4.9699	0.0128	0.0130	75
b_2	1.0	0.9859	0.0109	0.0111	62	1.0080	0.0092	0.0093	73
b_3	-4.0	-4.0174	0.0184	0.0187	77	-3.9771	0.0076	0.0081	85
b_4	2.0	2.0119	0.0162	0.0163	50	2.0060	0.0068	0.0069	93
b_5	-2.0	-1.9831	0.0142	0.0145	66	-2.0023	0.0127	0.0127	63
σ	1.0	0.7386	0.0042	0.0726	9	0.7685	0.0030	0.0566	8
ε	-0.2	-0.2604	0.0497	0.0513	9	-0.2935	0.0332	0.0419	10

Çizelge 6.15 Durum I için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$): $c_1 = -0.30, c_2 = 5.30$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.0629	0.1043	0.1083	100	2.9531	0.0506	0.0528	100
b_1	5.0	5.0174	0.0496	0.0499	100	5.0219	0.0193	0.0197	100
b_2	1.0	1.0027	0.0419	0.0419	100	1.0106	0.0163	0.0164	100
b_3	-4.0	-4.0016	0.0511	0.0511	100	-4.0097	0.0266	0.0267	100
b_4	2.0	2.0080	0.0472	0.0473	100	2.0126	0.0122	0.0123	100
b_5	-2.0	-1.9778	0.0446	0.0451	100	-2.0076	0.0171	0.0172	100
σ	1.0	1.0301	0.1086	0.1095	100	0.9721	0.0100	0.0108	100
ε	-0.5	-0.5097	0.0278	0.0279	100	-0.5230	0.0089	0.0094	100
					ESN				
b_0	3.0	3.9324	0.0643	0.9338	12	3.9961	0.0563	1.0485	5
b_1	5.0	5.0071	0.0898	0.0899	56	5.0391	0.0630	0.0645	31
b_2	1.0	1.0402	0.0853	0.0869	48	1.0118	0.0603	0.0605	27
b_3	-4.0	-4.0389	0.0957	0.0972	53	-4.0706	0.0783	0.0833	32
b_4	2.0	2.0174	0.0877	0.0880	54	2.0291	0.0631	0.0639	19
b_5	-2.0	-2.0281	0.1258	0.1266	36	-2.0227	0.0709	0.0714	24
σ	1.0	1.4340	0.3739	0.5623	19	1.5196	0.2371	0.5071	2
ε	-0.5	-0.1376	0.0126	0.1439	19	-0.1717	0.0098	0.1176	8
					ESL				
b_0	3.0	4.3295	0.1289	0.5785	19	3.6835	0.1095	0.5767	9
b_1	5.0	4.7333	0.1948	0.2659	19	4.7566	0.1906	0.2499	8
b_2	1.0	0.9364	0.1432	0.1473	28	0.8366	0.0845	0.1112	15
b_3	-4.0	-3.7703	0.2556	0.3084	17	-3.7676	0.1708	0.2248	12
b_4	2.0	1.9062	0.1776	0.1864	25	1.9135	0.1227	0.1302	9
b_5	-2.0	-1.9351	0.1649	0.1691	27	-1.8726	0.1472	0.1634	11
σ	1.0	0.7930	0.0520	0.0949	115	0.7978	0.0513	0.0922	12
ε	-0.5	-0.1640	0.0205	0.1334	21	-0.1658	0.0114	0.1231	8
					ESt				
b_0	3.0	3.0856	0.1987	0.2060	53	3.0557	0.1434	0.1465	36
b_1	5.0	4.9587	0.0886	0.0903	55	5.0196	0.0340	0.0344	57
b_2	1.0	0.9923	0.0832	0.0832	50	1.0168	0.0378	0.0381	43
b_3	-4.0	-4.0140	0.1452	0.1454	35	-4.0211	0.0310	0.0315	85
b_4	2.0	1.9574	0.1279	0.1297	36	2.0144	0.0359	0.0361	34
b_5	-2.0	-2.0362	0.0874	0.0887	51	-1.9977	0.0250	0.0250	69
σ	1.0	0.6531	0.0376	0.1580	69	0.6898	0.0104	0.1066	10
ε	-0.5	-0.5929	0.0841	0.0927	30	-0.5810	0.0680	0.0746	13

Çizelge 6.16 Durum I için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$): $c_1 = -0.30, c_2 = 5.30$

		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	2.8901	0.0155	0.0285	100	2.8595	0.0083	0.0280	100
b_1	5.0	5.0040	0.0039	0.0039	100	4.9915	0.0033	0.0034	100
b_2	1.0	1.0027	0.0053	0.0053	100	0.9958	0.0041	0.0041	100
b_3	-4.0	-3.9976	0.0037	0.0037	100	-3.9993	0.0029	0.0029	100
b_4	2.0	1.9966	0.0025	0.0025	100	2.0003	0.0014	0.0014	100
b_5	-2.0	-2.0032	0.0036	0.0036	100	-2.0024	0.0024	0.0024	100
σ	1.0	0.9736	0.0038	0.0045	100	0.9815	0.0028	0.0032	100
ε	-0.5	-0.5164	0.0027	0.0030	100	-0.5072	0.0016	0.0016	100
					ESN				
b_0	3.0	3.9450	0.0240	0.9171	3	3.9202	0.0151	0.8619	3
b_1	5.0	5.0383	0.0316	0.0331	12	5.0192	0.0206	0.0210	16
b_2	1.0	0.9864	0.0287	0.0289	18	1.0054	0.0171	0.0171	24
b_3	-4.0	-4.0314	0.0328	0.0338	11	-4.0368	0.0171	0.0184	16
b_4	2.0	1.9962	0.0234	0.0234	11	2.0151	0.0148	0.0150	9
b_5	-2.0	-2.0215	0.0220	0.0225	16	-2.0180	0.0107	0.0111	22
σ	1.0	1.5933	0.1231	0.4751	1	1.6149	0.0927	0.4807	1
ε	-0.5	-0.2053	0.0074	0.0942	3	-0.2249	0.0066	0.0823	2
					ESL				
b_0	3.0	3.5221	0.1011	0.3737	8	3.4696	0.0808	0.3014	9
b_1	5.0	4.5857	0.3390	0.5106	1	4.5264	0.1515	0.3757	1
b_2	1.0	0.8813	0.0979	0.1120	5	0.9225	0.0603	0.0663	6
b_3	-4.0	-3.6655	0.1793	0.2912	1	-3.6455	0.1292	0.2549	1
b_4	2.0	1.8401	0.0709	0.0965	3	1.8302	0.0605	0.0893	2
b_5	-2.0	-1.8937	0.1010	0.1119	3	-1.8087	0.0618	0.1009	2
σ	1.0	0.8658	0.1095	0.1275	4	0.8737	0.0444	0.0603	5
ε	-0.5	-0.2029	0.0118	0.1000	3	-0.2169	0.0107	0.0909	2
					ESt				
b_0	3.0	2.9438	0.0577	0.0608	47	2.9242	0.0342	0.0400	70
b_1	5.0	4.9897	0.0192	0.0192	20	4.9879	0.0099	0.0100	34
b_2	1.0	0.9879	0.0157	0.0158	33	0.9934	0.0075	0.0075	55
b_3	-4.0	-3.9983	0.0127	0.0127	30	-4.0147	0.0091	0.0093	31
b_4	2.0	1.9915	0.0091	0.0092	27	2.0051	0.0053	0.0053	26
b_5	-2.0	-2.0110	0.0085	0.0086	41	-1.9994	0.0074	0.0074	32
σ	1.0	0.7626	0.0052	0.0615	7	0.7793	0.0039	0.0526	6
ε	-0.5	-0.5857	0.0205	0.0279	11	-0.5775	0.0113	0.0173	9

Çizelge 6.17 Durum I için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$): $c_1 = -0.01, c_2 = 6.20$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.4040	0.2139	0.3771	100	3.1880	0.1209	0.1562	100
b_1	5.0	4.9738	0.1024	0.1031	100	5.0228	0.0768	0.0773	100
b_2	1.0	1.0093	0.1496	0.1496	100	1.0040	0.0468	0.0468	100
b_3	-4.0	-4.0286	0.1756	0.1764	100	-3.9875	0.0475	0.0476	100
b_4	2.0	1.8981	0.1859	0.1963	100	2.0424	0.0417	0.0435	100
b_5	-2.0	-1.9979	0.1245	0.1245	100	-1.9866	0.0307	0.0308	100
σ	1.0	1.1666	0.3282	0.3559	100	1.0377	0.1754	0.1768	100
ε	-0.8	-0.7395	0.0463	0.0500	100	-0.8319	0.0223	0.0233	100
					ESN				
b_0	3.0	4.6000	0.2060	2.7660	14	4.5671	0.0794	2.5350	6
b_1	5.0	5.0640	0.2286	0.2327	44	5.0713	0.1417	0.1468	53
b_2	1.0	1.0032	0.1768	0.1769	85	1.0373	0.1224	0.1238	38
b_3	-4.0	-4.0691	0.2639	0.2687	66	-4.0339	0.0845	0.0857	56
b_4	2.0	1.9688	0.2828	0.2837	69	2.0409	0.1182	0.1199	36
b_5	-2.0	-2.0679	0.2640	0.2686	46	-2.0494	0.0867	0.0892	35
σ	1.0	2.0024	0.8743	1.8791	19	2.1712	0.7601	2.1317	8
ε	-0.8	-0.1903	0.0095	0.3812	13	-0.2500	0.0109	0.3134	7
					ESL				
b_0	3.0	4.1359	0.2345	1.5248	25	4.0596	0.1143	1.2372	13
b_1	5.0	4.7404	0.3929	0.4602	22	4.7188	0.1857	0.2647	29
b_2	1.0	1.0128	0.1411	0.1412	106	0.9760	0.1342	0.1348	35
b_3	-4.0	-3.7965	0.3274	0.3688	48	-3.6758	0.1485	0.2536	19
b_4	2.0	1.8841	0.2825	0.2960	66	1.8651	0.1080	0.1262	35
b_5	-2.0	-1.9028	0.2800	0.2894	43	-1.9026	0.1127	0.1222	25
σ	1.0	0.9353	0.1219	0.1260	282	0.9547	0.0549	0.0570	310
ε	-0.8	-0.1981	0.0150	0.3773	13	-0.2408	0.0118	0.3245	7
					ESt				
b_0	3.0	3.2988	0.5966	0.6859	55	3.2092	0.1182	0.1619	96
b_1	5.0	4.8167	0.5956	0.6292	17	4.9793	0.0493	0.0497	155
b_2	1.0	0.9902	0.4074	0.4075	37	0.9896	0.0538	0.0539	87
b_3	-4.0	-3.7916	0.6577	0.7012	25	-3.9680	0.0785	0.0795	60
b_4	2.0	1.8722	0.2551	0.2714	72	2.0209	0.0895	0.0899	48
b_5	-2.0	-1.8194	0.4842	0.5168	24	-2.0189	0.0477	0.0480	64
σ	1.0	0.6930	0.0436	0.1379	258	0.7431	0.0278	0.0938	189
ε	-0.8	-0.6726	0.0726	0.0889	56	-0.7778	0.0458	0.0463	50

Çizelge 6.18 Durum I için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$): $c_1 = -0.01, c_2 = 6.20$

		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.0883	0.0105	0.0183	100	2.9272	0.0092	0.0145	100
b_1	5.0	5.0099	0.0081	0.0082	100	5.0020	0.0012	0.0012	100
b_2	1.0	0.9911	0.0115	0.0116	100	1.0028	0.0013	0.0014	100
b_3	-4.0	-4.0027	0.0060	0.0061	100	-4.0009	0.0022	0.0022	100
b_4	2.0	1.9883	0.0063	0.0064	100	1.9970	0.0023	0.0023	100
b_5	-2.0	-1.9932	0.0047	0.0047	100	-1.9987	0.0016	0.0016	100
σ	1.0	0.9697	0.0077	0.0086	100	0.9668	0.0034	0.0045	100
ε	-0.8	-0.7452	0.0042	0.0072	100	-0.7639	0.0045	0.0058	100
					ESN				
b_0	3.0	3.5584	0.3346	0.5631	3	3.5236	0.2240	0.4760	3
b_1	5.0	5.0601	0.0545	0.0581	14	5.0768	0.0218	0.0277	4
b_2	1.0	1.0179	0.0397	0.0400	29	1.0039	0.0320	0.0321	4
b_3	-4.0	-4.0586	0.0418	0.0452	13	-4.0589	0.0317	0.0352	6
b_4	2.0	2.0107	0.0409	0.0410	16	2.0366	0.0191	0.0205	11
b_5	-2.0	-2.0415	0.0511	0.0529	9	-2.0498	0.0295	0.0320	5
σ	1.0	2.1763	0.3331	1.7168	1	2.1919	0.2047	1.6253	0
ε	-0.8	-0.2917	0.0068	0.2652	2	-0.3090	0.0052	0.2462	2
					ESL				
b_0	3.0	3.9831	0.1062	1.0727	2	3.9723	0.1267	1.0721	1
b_1	5.0	4.6342	0.1360	0.2698	3	4.6800	0.1799	0.2563	1
b_2	1.0	0.9216	0.0817	0.0878	13	0.9271	0.0729	0.0782	2
b_3	-4.0	-3.6813	0.1384	0.2400	3	-3.6560	0.1091	0.2274	1
b_4	2.0	1.8291	0.0965	0.1257	5	1.8276	0.0551	0.0848	3
b_5	-2.0	-1.8124	0.0778	0.1130	4	-1.8239	0.0724	0.1035	2
σ	1.0	0.9879	0.0429	0.0430	20	0.9977	0.0327	0.0327	14
ε	-0.8	-0.2682	0.0125	0.2953	2	-0.2683	0.0116	0.2942	2
					ESt				
b_0	3.0	3.0865	0.0394	0.0469	39	3.0720	0.0270	0.0322	45
b_1	5.0	5.0086	0.0081	0.0082	100	5.0022	0.0046	0.0046	27
b_2	1.0	0.9993	0.0108	0.0108	107	0.9977	0.0031	0.0031	43
b_3	-4.0	-4.0001	0.0063	0.0063	97	-3.9974	0.0054	0.0054	40
b_4	2.0	1.9980	0.0082	0.0082	78	1.9895	0.0058	0.0059	39
b_5	-2.0	-1.9989	0.0073	0.0073	64	-2.0069	0.0046	0.0046	35
σ	1.0	0.7816	0.0055	0.0532	16	0.7993	0.0037	0.0440	10
ε	-0.8	-0.8105	0.0146	0.0147	49	-0.7969	0.0082	0.0082	71

Çizelge 6.13 - 6.18'de Durum I için regresyon ($\mathbf{b}$), ölçek (σ) ve çarpıklık (ε) parametrelerinin tahmin değerleri, varyans, MSE ve RE değerleri yer almaktadır.

$\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri: $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametreleri için asimetrik $M-$ tahmin değerleri parametre değerlerine yakın sonuçlar vermiştir.

ESN dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESN dağılımının $\mathbf{b}$ regresyon, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri ile $\mathbf{b}$ parametre vektörünün asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, beklenildiği gibi ML tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden düşük gelmiştir. Ayrıca, çarpıklık arttıkça ESN dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicileri önemli derecede yüksek gelmiştir.

ESL dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESL dağılımının regresyon parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, genelde asimetrik $M-$tahmin edicilerinin göreli etkinlik yönünden yüksek geldiği gözlenmiştir. $\varepsilon = -0.5, -0.8$ ve $n = 100, 150$ iken ESL dağılımının tüm parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden önemli derecede yüksek çıkmıştır. Ancak $\varepsilon = -0.8$ $n = 30, 50$'de σ parametresi için ML tahmin edicisinin göreli etkinliği yüksektir.

ESt dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESt dağılımının regresyon parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, genelde ML tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden düşük çıkmıştır. Burada $\nu = 2.1$ olarak alınmıştır.

Çizelge 6.19 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$)

		c_1	$n = 30$	c_2		c_1	$n = 50$	c_2	
		-1.3		3.3		-1.9		2.5	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
b_0	3.0	3.0703	0.0450	0.0499	100	3.0479	0.0194	0.0217	100
b_1	5.0	5.0284	0.0418	0.0426	100	4.9914	0.0214	0.0215	100
b_2	1.0	0.9916	0.0455	0.0456	100	1.0056	0.0249	0.0249	100
b_3	-4.0	-4.0414	0.0552	0.0570	100	-3.9909	0.0212	0.0213	100
b_4	2.0	2.0142	0.0508	0.0510	100	1.9940	0.0243	0.0243	100
b_5	-2.0	-2.0012	0.0481	0.0481	100	-1.9960	0.0239	0.0239	100
σ	1.0	0.8914	0.0156	0.0274	100	0.9320	0.0116	0.0162	100
ε	-0.2	-0.2181	0.0217	0.0220	100	-0.2182	0.0155	0.0159	100
				ESN					
b_0	3.0	3.0704	0.0452	0.0502	99	3.0481	0.0195	0.0218	99
b_1	5.0	5.0284	0.0420	0.0428	99	4.9913	0.0215	0.0216	99
b_2	1.0	0.9915	0.0458	0.0459	99	1.0056	0.0250	0.0251	99
b_3	-4.0	-4.0415	0.0556	0.0573	99	-3.9909	0.0214	0.0215	99
b_4	2.0	2.0142	0.0510	0.0512	99	1.9939	0.0244	0.0245	99
b_5	-2.0	-2.0012	0.0484	0.0484	99	-1.9959	0.0241	0.0241	99
σ	1.0	1.0040	0.0171	0.0171	160	0.9959	0.0130	0.0130	124
ε	-0.2	-0.2050	0.0105	0.0105	210	-0.2108	0.0067	0.0069	231
				ESL					
b_0	3.0	3.1089	0.1811	0.1930	26	3.0599	0.1658	0.1694	13
b_1	5.0	4.8385	0.1048	0.1309	33	4.7642	0.0753	0.1308	16
b_2	1.0	0.9637	0.1187	0.1201	38	0.9507	0.0664	0.0688	36
b_3	-4.0	-3.8927	0.1148	0.1264	45	-3.8500	0.0639	0.0864	25
b_4	2.0	1.9385	0.1062	0.1100	46	1.8925	0.0687	0.0802	30
b_5	-2.0	-1.9412	0.1119	0.1153	42	-1.8768	0.0601	0.0753	32
σ	1.0	0.6014	0.0135	0.1724	16	0.6218	0.0092	0.1522	11
ε	-0.2	-0.0819	0.0148	0.0288	77	-0.0980	0.0164	0.0268	59
				ESt					
b_0	3.0	2.9765	0.3225	0.3230	15	2.9521	0.1793	0.1815	12
b_1	5.0	5.0338	0.0458	0.0469	91	4.9886	0.0228	0.0229	94
b_2	1.0	0.9872	0.0512	0.0514	89	1.0067	0.0262	0.0263	95
b_3	-4.0	-4.0452	0.0609	0.0630	90	-3.9904	0.0228	0.0229	93
b_4	2.0	2.0162	0.0524	0.0526	97	1.9903	0.0236	0.0237	102
b_5	-2.0	-2.0065	0.0478	0.0478	101	-1.9965	0.0242	0.0242	99
σ	1.0	0.9182	0.2923	0.2990	9	0.9214	0.0130	0.0192	84
ε	-0.2	-0.2639	0.1855	0.1896	12	-0.2592	0.0852	0.0887	18

Çizelge 6.20 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$)

		c_1	$n = 100$	c_2		c_1	$n = 150$	c_2	
		-2.2		2.5		-1.9		3.3	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
b_0	3.0	3.0214	0.0112	0.0116	100	3.0163	0.0076	0.0078	100
b_1	5.0	4.9907	0.0117	0.0118	100	4.9908	0.0086	0.0087	100
b_2	1.0	1.0066	0.0095	0.0095	100	0.9874	0.0082	0.0084	100
b_3	-4.0	-3.9993	0.0098	0.0098	100	-3.9948	0.0079	0.0079	100
b_4	2.0	2.0130	0.0108	0.0110	100	1.9964	0.0074	0.0074	100
b_5	-2.0	-1.9998	0.0098	0.0098	100	-1.9990	0.0049	0.0049	100
σ	1.0	0.9641	0.0045	0.0058	100	0.9861	0.0034	0.0035	100
ε	-0.2	-0.2067	0.0061	0.0061	100	-0.1993	0.0042	0.0042	100
				ESN					
b_0	3.0	3.0214	0.0113	0.0117	99	3.0163	0.0076	0.0079	99
b_1	5.0	4.9906	0.0118	0.0118	99	4.9908	0.0087	0.0088	99
b_2	1.0	1.0067	0.0096	0.0096	99	0.9873	0.0083	0.0084	99
b_3	-4.0	-3.9994	0.0099	0.0099	99	-3.9948	0.0079	0.0080	99
b_4	2.0	2.0130	0.0109	0.0111	99	1.9964	0.0075	0.0075	99
b_5	-2.0	-1.9997	0.0098	0.0098	99	-1.9990	0.0049	0.0049	99
σ	1.0	0.9969	0.0048	0.0048	122	1.0102	0.0035	0.0036	99
ε	-0.2	-0.2069	0.0036	0.0036	168	-0.2052	0.0022	0.0023	185
				ESL					
b_0	3.0	2.9656	0.1230	0.1241	9	2.9787	0.1090	0.1107	7
b_1	5.0	4.7250	0.0586	0.1257	9	4.7976	0.0533	0.1106	8
b_2	1.0	0.9659	0.0464	0.0476	20	0.9330	0.0365	0.0410	20
b_3	-4.0	-3.7983	0.0501	0.0749	13	-3.8317	0.0595	0.0615	13
b_4	2.0	1.8919	0.0508	0.0625	18	1.8765	0.0454	0.0606	12
b_5	-2.0	-1.8832	0.0564	0.0700	14	-1.8581	0.0502	0.0699	7
σ	1.0	0.6470	0.0070	0.1316	4	0.6672	0.0087	0.1195	3
ε	-0.2	-0.1226	0.0111	0.0170	36	-0.1291	0.0127	0.0162	26
				ESt					
b_0	3.0	2.9779	0.0717	0.0721	16	3.0105	0.0554	0.0555	14
b_1	5.0	4.9913	0.0121	0.0121	97	4.9902	0.0085	0.0086	101
b_2	1.0	1.0052	0.0099	0.0100	96	0.9875	0.0083	0.0084	100
b_3	-4.0	-4.0005	0.0100	0.0100	98	-3.9949	0.0079	0.0079	100
b_4	2.0	2.0151	0.0106	0.0108	102	1.9957	0.0074	0.0074	100
b_5	-2.0	-2.0000	0.0102	0.0102	96	-1.9985	0.0051	0.0051	96
σ	1.0	0.9601	0.0045	0.0061	95	0.9844	0.0033	0.0036	99
ε	-0.2	-0.2235	0.0269	0.0275	22	-0.2011	0.0182	0.0182	23

Çizelge 6.21 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$)

		c_1	$n=30$	c_2		c_1	$n=50$	c_2	
		-0.9		4.2		-0.7		4.1	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
b_0	3.0	3.2011	0.1378	0.1782	100	3.1213	0.0965	0.1113	100
b_1	5.0	4.9592	0.0342	0.0358	100	5.0119	0.0207	0.0208	100
b_2	1.0	0.9970	0.0425	0.0425	100	0.9872	0.0213	0.0214	100
b_3	-4.0	-3.9991	0.0381	0.0381	100	-3.9899	0.0169	0.0170	100
b_4	2.0	1.9979	0.0469	0.0469	100	2.0096	0.0192	0.0192	100
b_5	-2.0	-2.0102	0.0477	0.0478	100	-2.0067	0.0235	0.0235	100
σ	1.0	0.8851	0.0294	0.0426	100	0.9400	0.0133	0.0169	100
ε	-0.5	-0.3622	0.1086	0.1275	100	-0.4124	0.0508	0.0585	100
				ESN					
b_0	3.0	3.4242	0.1724	0.3523	51	3.3065	0.0930	0.1870	59
b_1	5.0	4.9629	0.0321	0.0334	107	5.0110	0.0195	0.0196	106
b_2	1.0	0.9895	0.0434	0.0436	98	0.9822	0.0231	0.0234	92
b_3	-4.0	-3.9951	0.0379	0.0379	100	-3.9921	0.0164	0.0164	103
b_4	2.0	1.9941	0.0464	0.0464	101	2.0107	0.0194	0.0195	98
b_5	-2.0	-2.0095	0.0459	0.0460	104	-2.0030	0.0246	0.0246	96
σ	1.0	0.8908	0.0241	0.0360	118	0.9503	0.0135	0.0159	106
ε	-0.5	-0.4301	0.0556	0.0605	211	-0.4378	0.0310	0.0348	168
				ESL					
b_0	3.0	3.5414	0.1891	0.4822	37	3.5016	0.1143	0.3659	30
b_1	5.0	4.8227	0.1091	0.1405	25	4.8176	0.0946	0.1278	16
b_2	1.0	0.9713	0.1205	0.1213	35	0.9404	0.0667	0.0702	31
b_3	-4.0	-3.8456	0.1096	0.1334	29	-3.8375	0.0990	0.1254	14
b_4	2.0	1.9343	0.0943	0.0986	48	1.9519	0.0708	0.0731	26
b_5	-2.0	-1.9551	0.0926	0.0947	50	-1.9230	0.0783	0.0842	28
σ	1.0	0.6698	0.0134	0.1224	35	0.7177	0.0181	0.1078	17
ε	-0.5	-0.0837	0.0149	0.1882	68	-0.1070	0.0117	0.1662	35
				ESt					
b_0	3.0	3.2159	0.5072	0.5538	32	3.0255	0.1818	0.1824	61
b_1	5.0	4.8633	0.4911	0.5098	7	5.0084	0.0231	0.0232	90
b_2	1.0	0.9989	0.0528	0.0528	80	0.9911	0.0272	0.0272	79
b_3	-4.0	-3.9992	0.1048	0.1048	36	-3.9939	0.0218	0.0218	78
b_4	2.0	1.9514	0.1174	0.1198	39	2.0006	0.0222	0.0222	87
b_5	-2.0	-2.0048	0.0522	0.0522	92	-2.0061	0.0284	0.0284	83
σ	1.0	1.3643	0.2571	0.3898	11	1.2735	0.1237	0.1444	12
ε	-0.5	-0.4639	0.1979	0.1992	64	-0.5788	0.0907	0.0969	60

Çizelge 6.22 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$)

		c_1	$n = 100$	c_2		c_1	$n = 150$	c_2	
		-1.4		4.6		-0.9		3.7	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.0548	0.0111	0.0141	100	3.0361	0.0062	0.0075	100
b_1	5.0	5.0053	0.0107	0.0108	100	4.9933	0.0059	0.0060	100
b_2	1.0	0.9945	0.0108	0.0108	100	0.9983	0.0058	0.0058	100
b_3	-4.0	-4.0108	0.0101	0.0102	100	-4.0033	0.0062	0.0062	100
b_4	2.0	1.9911	0.0110	0.0111	100	1.9975	0.0057	0.0057	100
b_5	-2.0	-2.0141	0.0094	0.0096	100	-2.0065	0.0067	0.0068	100
σ	1.0	0.9642	0.0050	0.0063	100	0.9742	0.0035	0.0041	100
ε	-0.5	-0.5131	0.0049	0.0051	100	-0.5083	0.0033	0.0034	100
					ESN				
b_0	3.0	3.0550	0.0111	0.0141	99	3.0362	0.0062	0.0075	99
b_1	5.0	5.0053	0.0108	0.0108	99	4.9933	0.0060	0.0060	99
b_2	1.0	0.9946	0.0108	0.0109	99	0.9983	0.0059	0.0059	99
b_3	-4.0	-4.0108	0.0101	0.0103	99	-4.0033	0.0063	0.0063	99
b_4	2.0	1.9911	0.0111	0.0112	99	1.9975	0.0058	0.0058	99
b_5	-2.0	-2.0142	0.0094	0.0096	99	-2.0066	0.0068	0.0068	99
σ	1.0	0.9977	0.0050	0.0050	126	0.9972	0.0036	0.0036	113
ε	-0.5	-0.5054	0.0027	0.0027	188	-0.5070	0.0018	0.0018	184
					ESL				
b_0	3.0	3.3769	0.1269	0.2689	5	3.3306	0.1486	0.2579	3
b_1	5.0	4.7615	0.0757	0.1133	10	4.8738	0.0853	0.1017	6
b_2	1.0	0.9615	0.0451	0.0465	23	0.9381	0.0446	0.0458	13
b_3	-4.0	-3.7740	0.0633	0.1144	9	-3.7490	0.0558	0.1140	5
b_4	2.0	1.9156	0.0480	0.0551	20	1.8939	0.0407	0.0456	13
b_5	-2.0	-1.8984	0.0598	0.0701	14	-1.8680	0.0538	0.0639	11
σ	1.0	0.6901	0.0114	0.1042	6	0.7290	0.0103	0.0837	8
ε	-0.5	-0.1422	0.0131	0.1412	4	-0.1521	0.0115	0.1325	3
					ESt				
b_0	3.0	2.9640	0.0970	0.0983	14	2.9489	0.0615	0.0641	12
b_1	5.0	4.9985	0.0210	0.0210	51	4.9921	0.0083	0.0084	71
b_2	1.0	0.9959	0.0119	0.0120	90	0.9993	0.0106	0.0106	55
b_3	-4.0	-4.0073	0.0128	0.0129	79	-3.9974	0.0104	0.0104	60
b_4	2.0	1.9932	0.0109	0.0109	102	1.9983	0.0086	0.0086	67
b_5	-2.0	-2.0134	0.0103	0.0105	91	-2.0085	0.0101	0.0102	67
σ	1.0	1.0134	0.1207	0.1212	5	1.0640	0.0687	0.0753	5
ε	-0.5	-0.5524	0.0367	0.0395	13	-0.5451	0.0220	0.0240	14

Çizelge 6.23 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$)

		c_1	$n=30$	c_2		c_1	$n=50$	c_2	
		-0.2		3.6		-0.2		5.2	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.3489	0.1866	0.3083	100	3.2072	0.1484	0.1913	100
b_1	5.0	5.0759	0.0371	0.0429	100	5.0413	0.0182	0.0199	100
b_2	1.0	0.9882	0.0576	0.0578	100	0.9812	0.0257	0.0261	100
b_3	-4.0	-3.9828	0.0580	0.0583	100	-3.9863	0.0375	0.0377	100
b_4	2.0	2.0228	0.0261	0.0266	100	2.0424	0.0159	0.0177	100
b_5	-2.0	-1.9830	0.0790	0.0793	100	-1.9997	0.0139	0.0139	100
σ	1.0	0.9880	0.0402	0.0404	100	0.9526	0.0046	0.0068	100
ε	-0.8	-0.6425	0.1118	0.1366	100	-0.7154	0.1043	0.1115	100
					ESN				
b_0	3.0	3.4727	0.2578	0.4812	64	3.3104	0.1873	0.2836	67
b_1	5.0	5.0704	0.0345	0.0394	109	5.0468	0.0151	0.0173	115
b_2	1.0	0.9683	0.0560	0.0570	101	0.9733	0.0250	0.0257	101
b_3	-4.0	-3.9855	0.0524	0.0526	111	-3.9787	0.0385	0.0390	97
b_4	2.0	2.0319	0.0286	0.0297	90	2.0382	0.0175	0.0190	93
b_5	-2.0	-1.9569	0.0603	0.0622	127	-1.9928	0.0135	0.0135	102
σ	1.0	0.9333	0.0194	0.0238	170	0.9697	0.0056	0.0065	105
ε	-0.8	-0.7142	0.0844	0.0918	149	-0.7158	0.0670	0.0741	150
					ESL				
b_0	3.0	3.9825	0.2219	1.1873	26	3.8843	0.2190	1.0010	19
b_1	5.0	4.8407	0.1188	0.1441	30	4.7893	0.0977	0.1421	14
b_2	1.0	1.0718	0.2091	0.2143	27	0.8151	0.1666	0.2008	13
b_3	-4.0	-3.8358	0.0857	0.1127	52	-3.8479	0.0905	0.1102	34
b_4	2.0	2.0136	0.1196	0.1198	22	1.8256	0.0428	0.0732	24
b_5	-2.0	-1.9469	0.1811	0.1839	43	-1.8469	0.0408	0.0643	22
σ	1.0	0.7525	0.0128	0.0740	55	0.8013	0.0135	0.0529	13
ε	-0.8	-0.1120	0.0151	0.4885	28	-0.1272	0.0151	0.4678	24
					ESt				
b_0	3.0	3.4218	0.1843	0.3623	85	3.2870	0.1179	0.2003	96
b_1	5.0	5.0897	0.0316	0.0396	108	5.0422	0.0138	0.0156	128
b_2	1.0	0.9953	0.0551	0.0551	105	0.9782	0.0227	0.0232	113
b_3	-4.0	-3.9772	0.0539	0.0544	107	-3.9899	0.0321	0.0322	117
b_4	2.0	2.0053	0.0267	0.0268	100	2.0433	0.0159	0.0178	99
b_5	-2.0	-1.9750	0.0638	0.0644	123	-1.9908	0.0144	0.0145	96
σ	1.0	1.0282	0.1115	0.1123	36	0.9873	0.0080	0.0081	84
ε	-0.8	-0.5857	0.1036	0.1495	91	-0.6233	0.0790	0.1102	101

Çizelge 6.24 Durum II için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$)

		c_1	$n = 100$	c_2		c_1	$n = 150$	c_2	
		-0.4		6.1		-0.5		5.6	
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.1357	0.0381	0.0565	100	3.1090	0.0218	0.0337	100
b_1	5.0	5.0009	0.0061	0.0061	100	5.0021	0.0037	0.0037	100
b_2	1.0	0.9966	0.0057	0.0057	100	0.9987	0.0038	0.0038	100
b_3	-4.0	-3.9996	0.0070	0.0070	100	-4.0009	0.0043	0.0043	100
b_4	2.0	2.0041	0.0057	0.0057	100	2.0004	0.0039	0.0039	100
b_5	-2.0	-2.0035	0.0062	0.0062	100	-2.0001	0.0034	0.0034	100
σ	1.0	0.9583	0.0049	0.0067	100	0.9777	0.0031	0.0036	100
ε	-0.8	-0.7554	0.0167	0.0187	100	-0.7550	0.0075	0.0096	100
					ESN				
b_0	3.0	3.3454	0.0356	0.0549	103	3.3031	0.0112	0.0131	257
b_1	5.0	4.9998	0.0061	0.0061	100	5.0029	0.0039	0.0039	94
b_2	1.0	0.9977	0.0059	0.0059	98	0.9995	0.0040	0.0040	96
b_3	-4.0	-4.0006	0.0071	0.0071	98	-4.0001	0.0048	0.0048	89
b_4	2.0	2.0031	0.0061	0.0061	93	1.9994	0.0044	0.0044	89
b_5	-2.0	-2.0025	0.0067	0.0067	92	-2.0001	0.0037	0.0037	92
σ	1.0	0.9828	0.0052	0.0055	121	0.9966	0.0033	0.0033	108
ε	-0.8	-0.7676	0.0106	0.0138	136	-0.7773	0.0055	0.0056	171
					ESL				
b_0	3.0	3.7517	0.1326	0.6976	8	3.6755	0.1631	0.6194	5
b_1	5.0	4.7353	0.0727	0.1406	4	4.8034	0.0786	0.1253	3
b_2	1.0	0.9539	0.0559	0.0580	10	0.9699	0.0406	0.0487	8
b_3	-4.0	-3.7864	0.0633	0.1089	6	-3.7922	0.0557	0.1022	4
b_4	2.0	1.8846	0.0545	0.0678	8	1.8754	0.0510	0.0665	6
b_5	-2.0	-1.9072	0.0600	0.0638	10	-1.9097	0.0537	0.0634	5
σ	1.0	0.8035	0.0136	0.0522	13	0.8332	0.0157	0.0436	8
ε	-0.8	-0.1711	0.0129	0.4085	5	-0.1891	0.0120	0.3853	2
					ESt				
b_0	3.0	3.1414	0.0382	0.0582	97	3.1117	0.0223	0.0347	97
b_1	5.0	5.0008	0.0061	0.0061	100	5.0021	0.0037	0.0037	100
b_2	1.0	0.9966	0.0057	0.0058	99	0.9988	0.0038	0.0038	100
b_3	-4.0	-3.9997	0.0069	0.0069	100	-4.0009	0.0043	0.0043	100
b_4	2.0	2.0040	0.0057	0.0057	100	2.0002	0.0039	0.0039	100
b_5	-2.0	-2.0034	0.0062	0.0062	100	-2.0001	0.0034	0.0034	100
σ	1.0	0.9606	0.0050	0.0065	102	0.9796	0.0031	0.0036	101
ε	-0.8	-0.7538	0.0165	0.0187	100	-0.7553	0.0076	0.0096	99

Çizelge 6.19 - 6.24'de Durum II için regresyon ($\mathbf{b}$), ölçek (σ) ve çarpıklık (ε) parametrelerinin tahmin değerleri, varyans, MSE ve RE değerleri yer almaktadır.

$\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri: ESN, ESL ve ESt dağılımlarının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, genelde asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden yüksek çıkmıştır. Aşağıda ise hangi durumlarda düşük geldiği ele alınmıştır.

ESN dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESN dağılımının regresyon parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicileri genelde aynı etkinliğe sahiptir. Ancak, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, ML tahmin edicilerinin göreli etkinliği yüksektir. $\varepsilon = -0.2, n = 150$ için σ parametresinin ML tahmin edicisi ile asimetrik $M-$tahmin edicisi aynı etkinliğe sahiptir.

ESL dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESL dağılımının $\mathbf{b}$ parametre vektörü, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin oldukça yüksek geldiği gözlenmiştir.

ESt dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESt dağılımının regresyon, σ ve ε parametrelerinin ML edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, $\varepsilon = -0.2, -0.5$ için genelde asimetrik $M-$tahmin edicilerinin göreli etkinliği yüksektir. $\varepsilon = -0.8$ için ise, aynı olduğu söylenebilir. Genelde, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin göreli etkinliği yüksektir. $\nu = 100$ olarak alınmıştır.

Çizelge 6.25 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$): $c_1 = -1.3, c_2 = 4.5$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
b_0	3.0	2.9733	2.5866	2.5873	100	2.8405	0.2898	0.3153	100
b_1	5.0	4.9784	0.2826	0.2831	100	4.9999	0.1352	0.1352	100
b_2	1.0	1.0044	0.2625	0.2625	100	0.9934	0.1292	0.1292	100
b_3	-4.0	-3.9927	0.2771	0.2772	100	-4.0046	0.1348	0.1349	100
b_4	2.0	1.9919	0.3535	0.3535	100	2.0212	0.1302	0.1306	100
b_5	-2.0	-1.9804	0.4145	0.4149	100	-1.9813	0.1495	0.1499	100
σ	1.0	1.2735	0.7564	0.8312	100	1.2865	0.0122	0.0943	100
ε	-0.2	-0.0866	0.0101	0.0230	100	-0.1050	0.0033	0.0123	100
				ESN					
b_0	3.0	4.3236	2.2154	3.9674	65	4.4661	1.5017	3.6512	9
b_1	5.0	6.1416	0.1557	1.4636	19	6.0609	0.1321	1.2577	11
b_2	1.0	1.8390	0.2512	0.9551	27	1.7982	0.1183	0.7553	17
b_3	-4.0	-3.1597	0.1666	0.8727	32	-3.1632	0.1068	0.8070	17
b_4	2.0	2.7621	0.2257	0.8064	44	2.8366	0.0952	0.7953	16
b_5	-2.0	-1.2251	0.1464	0.7468	56	-1.2929	0.1330	0.6330	24
σ	1.0	2.4383	1.0947	3.1635	26	2.3673	1.1037	2.9731	3
ε	-0.2	-0.0419	0.0054	0.0304	76	-0.0613	0.0038	0.0230	53
				ESL					
b_0	3.0	2.9409	0.4133	0.4168	621	2.9448	0.2451	0.2482	127
b_1	5.0	4.9546	0.1972	0.1993	142	4.9785	0.0946	0.0951	142
b_2	1.0	1.0018	0.2030	0.2030	129	0.9963	0.0974	0.0974	133
b_3	-4.0	-3.9769	0.1948	0.1953	142	-3.9918	0.0956	0.0957	141
b_4	2.0	2.0009	0.2189	0.2189	162	2.0122	0.0937	0.0939	139
b_5	-2.0	-1.9842	0.2049	0.2052	202	-1.9774	0.0970	0.0975	154
σ	1.0	0.6015	0.0265	0.1852	449	0.7483	0.0190	0.0823	115
ε	-0.2	-0.2973	0.1208	0.1302	18	-0.2687	0.0602	0.0649	19
				ESt					
b_0	3.0	2.9398	0.4341	0.4378	591	2.9461	0.2442	0.2471	128
b_1	5.0	4.9530	0.1996	0.2019	140	4.9833	0.0902	0.0905	149
b_2	1.0	1.0060	0.2011	0.2011	131	0.9977	0.0939	0.0939	138
b_3	-4.0	-3.9764	0.2054	0.2059	135	-3.9935	0.0906	0.0906	149
b_4	2.0	1.9993	0.2173	0.2173	163	2.0126	0.0904	0.0905	144
b_5	-2.0	-1.9930	0.1987	0.1987	209	-1.9798	0.0929	0.0933	161
σ	1.0	0.6480	0.0298	0.1537	541	0.7886	0.0202	0.0649	145
ε	-0.2	-0.2934	0.1231	0.1318	17	-0.2658	0.0600	0.0643	19

Çizelge 6.26 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$): $c_1 = -1.3, c_2 = 4.5$

		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
b_0	3.0	2.7863	0.0868	0.1324	100	2.7741	0.0536	0.1046	100
b_1	5.0	4.9950	0.0516	0.0517	100	5.0009	0.0315	0.0315	100
b_2	1.0	0.9993	0.0485	0.0485	100	1.0005	0.0299	0.0299	100
b_3	-4.0	-3.9987	0.0520	0.0520	100	-4.0007	0.0323	0.0323	100
b_4	2.0	2.0043	0.0476	0.0476	100	1.9973	0.0308	0.0308	100
b_5	-2.0	-1.9916	0.0510	0.0511	100	-1.9983	0.0303	0.0303	100
σ	1.0	1.3009	0.0043	0.0902	100	1.3089	0.0029	0.0900	100
ε	-0.2	-0.1097	0.0011	0.0093	100	-0.1093	0.0007	0.0089	100
				ESN					
b_0	3.0	3.7201	0.0359	0.5546	24	3.6737	0.0408	0.4947	21
b_1	5.0	5.5209	0.0871	0.3581	14	5.5525	0.0308	0.3361	9
b_2	1.0	1.5496	0.0413	0.3423	14	1.5112	0.0184	0.2802	11
b_3	-4.0	-3.4614	0.0638	0.3539	15	-3.5130	0.0910	0.3282	10
b_4	2.0	2.5486	0.0649	0.3657	13	2.4517	0.0164	0.2204	14
b_5	-2.0	-1.4452	0.0154	0.3232	16	-1.4935	0.0237	0.2801	11
σ	1.0	2.5723	0.0315	2.5031	4	2.4545	0.1313	2.2456	4
ε	-0.2	-0.0756	0.0052	0.0207	45	-0.0807	0.0012	0.0154	58
				ESL					
b_0	3.0	2.9783	0.0902	0.0907	146	2.9951	0.0546	0.0546	191
b_1	5.0	4.9955	0.0337	0.0337	153	5.0008	0.0199	0.0199	158
b_2	1.0	1.0001	0.0351	0.0351	138	1.0009	0.0182	0.0182	164
b_3	-4.0	-4.0001	0.0332	0.0332	157	-4.0048	0.0190	0.0190	170
b_4	2.0	1.9971	0.0327	0.0327	146	1.9973	0.0188	0.0188	164
b_5	-2.0	-1.9969	0.0339	0.0339	151	-1.9973	0.0184	0.0184	165
σ	1.0	0.8492	0.0110	0.0338	267	0.8780	0.0076	0.0225	400
ε	-0.2	-0.2284	0.0217	0.0225	41	-0.2114	0.0121	0.0123	72
				ESt					
b_0	3.0	2.9770	0.0903	0.0908	146	2.9948	0.0541	0.0541	193
b_1	5.0	4.9955	0.0330	0.0330	156	5.0008	0.0196	0.0196	161
b_2	1.0	0.9997	0.0342	0.0342	142	1.0008	0.0180	0.0180	167
b_3	-4.0	-4.0003	0.0325	0.0325	160	-4.0047	0.0187	0.0187	173
b_4	2.0	1.9974	0.0319	0.0320	149	1.9973	0.0185	0.0185	166
b_5	-2.0	-1.9972	0.0331	0.0331	154	-1.9974	0.0181	0.0181	167
σ	1.0	0.8847	0.0116	0.0249	362	0.9120	0.0080	0.0157	573
ε	-0.2	-0.2281	0.0214	0.0222	42	-0.2110	0.0119	0.0120	74

Çizelge 6.27 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$): $c_1 = -1.0, c_2 = 5.5$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.3587	1.5107	1.6394	100	3.0018	0.4203	0.4203	100
b_1	5.0	5.0204	0.4145	0.4150	100	4.9879	0.1471	0.1472	100
b_2	1.0	0.9669	0.5808	0.5819	100	0.9985	0.1388	0.1388	100
b_3	-4.0	-3.9672	0.3216	0.3226	100	-3.9711	0.1395	0.1403	100
b_4	2.0	1.9979	0.5607	0.5607	100	2.0007	0.1513	0.1513	100
b_5	-2.0	-2.0069	0.3574	0.3574	100	-1.9895	0.1427	0.1428	100
σ	1.0	1.2921	0.0366	0.1219	100	1.3139	0.0229	0.1215	100
ε	-0.5	-0.1600	0.0154	0.1309	100	-0.1915	0.0044	0.0996	100
					ESN				
b_0	3.0	4.3226	0.2003	1.9471	84	4.2446	0.2290	1.7779	24
b_1	5.0	6.0002	0.1943	1.1944	35	6.0034	0.1405	1.1474	13
b_2	1.0	1.8369	0.2836	0.9839	59	1.7879	0.2436	0.8658	16
b_3	-4.0	-3.1830	0.3286	0.9961	32	-3.0806	0.1194	0.9649	15
b_4	2.0	2.8369	0.1803	0.8805	64	2.8398	0.1380	0.8429	18
b_5	-2.0	-1.0928	0.1645	0.9875	36	-1.1044	0.1771	0.9791	15
σ	1.0	2.3678	0.1816	2.0528	6	2.3830	0.0798	1.9920	6
ε	-0.5	-0.1124	0.0039	0.1540	85	-0.1161	0.0034	0.1508	66
					ESL				
b_0	3.0	3.2281	0.3993	0.4513	363	3.0667	0.1996	0.2040	206
b_1	5.0	4.9285	0.3047	0.3098	134	4.9798	0.0910	0.0914	161
b_2	1.0	0.9767	0.2211	0.2216	263	0.9917	0.0817	0.0818	170
b_3	-4.0	-3.9270	0.2963	0.3016	107	-3.9715	0.0892	0.0901	156
b_4	2.0	1.9743	0.2061	0.2068	271	1.9847	0.0904	0.0906	167
b_5	-2.0	-1.9868	0.2016	0.2017	177	-1.9877	0.0802	0.0804	178
σ	1.0	0.6001	0.0335	0.1934	63	0.7443	0.0261	0.0915	133
ε	-0.5	-0.5202	0.0867	0.0871	150	-0.5571	0.0482	0.0514	194
					ESt				
b_0	3.0	3.2151	0.3710	0.4173	393	3.0430	0.2147	0.2165	194
b_1	5.0	4.9530	0.2495	0.2518	165	4.9687	0.1413	0.1423	103
b_2	1.0	0.9886	0.1983	0.1984	293	0.9954	0.0798	0.0798	174
b_3	-4.0	-3.9543	0.1964	0.1985	163	-3.9696	0.1038	0.1048	134
b_4	2.0	1.9850	0.1806	0.1808	310	1.9832	0.0905	0.0907	167
b_5	-2.0	-1.9938	0.1903	0.1903	188	-1.9881	0.0878	0.0880	162
σ	1.0	0.6473	0.0444	0.1688	72	0.7881	0.0341	0.0790	154
ε	-0.5	-0.5327	0.0876	0.0886	148	-0.5636	0.0488	0.0528	188

Çizelge 6.28 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$): $c_1 = -1.0, c_2 = 5.5$

		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	2.8701	0.1260	0.1429	100	2.7943	0.0757	0.1180	100
b_1	5.0	5.0004	0.0508	0.0508	100	5.0061	0.0287	0.0287	100
b_2	1.0	1.0101	0.0501	0.0502	100	1.0082	0.0296	0.0297	100
b_3	-4.0	-3.9979	0.0535	0.0536	100	-3.9968	0.0311	0.0311	100
b_4	2.0	1.9911	0.0601	0.0601	100	2.0028	0.0300	0.0300	100
b_5	-2.0	-2.0024	0.0558	0.0558	100	-1.9982	0.0326	0.0327	100
σ	1.0	1.3205	0.0061	0.1088	100	1.3242	0.0033	0.1084	100
ε	-0.5	-0.1987	0.0014	0.0922	100	-0.2036	0.0008	0.0887	100
					ESN				
b_0	3.0	4.2901	0.0513	1.7156	8	4.2875	0.0465	1.7042	7
b_1	5.0	6.0006	0.0570	1.0583	5	6.0003	0.0378	1.0384	3
b_2	1.0	1.8945	0.0591	0.8592	6	1.8369	0.0219	0.7223	4
b_3	-4.0	-3.0503	0.0388	0.9407	6	-3.1045	0.0533	0.8552	4
b_4	2.0	2.8374	0.0584	0.7596	8	2.8372	0.0330	0.7337	4
b_5	-2.0	-1.0513	0.0505	0.9505	6	-1.0833	0.0848	0.9252	4
σ	1.0	2.0635	0.0701	1.2011	9	2.0562	0.0419	1.1575	9
ε	-0.5	-0.1453	0.0020	0.1278	72	-0.1484	0.0014	0.1250	71
					ESL				
b_0	3.0	2.9988	0.0726	0.0726	197	2.9765	0.0492	0.0497	237
b_1	5.0	4.9970	0.0268	0.0268	190	5.0027	0.0155	0.0155	186
b_2	1.0	1.0087	0.0256	0.0257	195	1.0049	0.0169	0.0170	175
b_3	-4.0	-4.0006	0.0286	0.0286	187	-3.9938	0.0166	0.0166	187
b_4	2.0	1.9918	0.0307	0.0308	195	2.0022	0.0174	0.0174	173
b_5	-2.0	-2.0027	0.0276	0.0276	202	-2.0065	0.0168	0.0169	194
σ	1.0	0.8403	0.0113	0.0368	296	0.8760	0.0080	0.0234	463
ε	-0.5	-0.5390	0.0176	0.0191	482	-0.5289	0.0110	0.0118	752
					ESt				
b_0	3.0	2.9905	0.0721	0.0721	198	2.9712	0.0491	0.0499	236
b_1	5.0	4.9975	0.0262	0.0262	194	5.0030	0.0151	0.0151	190
b_2	1.0	1.0090	0.0252	0.0253	198	1.0050	0.0167	0.0167	178
b_3	-4.0	-4.0008	0.0281	0.0281	190	-3.9940	0.0163	0.0163	191
b_4	2.0	1.9918	0.0300	0.0301	200	2.0017	0.0170	0.0170	176
b_5	-2.0	-2.0030	0.0269	0.0270	207	-2.0064	0.0166	0.0166	197
σ	1.0	0.8759	0.0119	0.0273	398	0.9101	0.0084	0.0164	660
ε	-0.5	-0.5412	0.0175	0.0192	481	-0.5303	0.0108	0.0117	759

Çizelge 6.29 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$): $c_1 = -0.2, c_2 = 6.9$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	4.2180	2.3328	3.8162	100	3.5615	0.7514	1.0667	100
b_1	5.0	4.9499	0.6191	0.6217	100	5.0022	0.2179	0.2179	100
b_2	1.0	0.9732	0.5258	0.5265	100	1.0015	0.1949	0.1949	100
b_3	-4.0	-3.9467	0.5405	0.5433	100	-4.0101	0.2171	0.2172	100
b_4	2.0	2.0033	0.5407	0.5408	100	1.9939	0.1968	0.1969	100
b_5	-2.0	-1.9698	0.5750	0.5759	100	-2.0048	0.2176	0.2176	100
σ	1.0	1.3713	0.0677	0.2056	100	1.3439	0.0680	0.1863	100
ε	-0.8	-0.2019	0.0249	0.3826	100	-0.2643	0.0079	0.2949	100
					ESN				
b_0	3.0	5.9395	0.3785	9.0188	42	5.1704	0.2719	4.9827	21
b_1	5.0	6.5339	0.2749	2.6276	24	6.0072	0.2645	1.2799	17
b_2	1.0	1.8370	0.3985	1.0990	48	1.9323	0.1146	0.9848	20
b_3	-4.0	-3.2098	0.3587	0.9973	54	-3.1041	0.1418	0.9442	23
b_4	2.0	2.8507	0.3404	1.0641	51	2.8783	0.2121	0.9835	20
b_5	-2.0	-1.1283	0.2282	0.9883	58	-1.2582	0.2301	0.7804	28
σ	1.0	2.1674	0.3898	1.7538	12	2.2532	0.1503	1.7202	11
ε	-0.8	-0.1302	0.0069	0.4552	84	-0.1561	0.0027	0.4175	71
					ESL				
b_0	3.0	3.6040	0.4154	0.7802	489	3.3359	0.3410	0.4538	235
b_1	5.0	4.9168	0.4684	0.4753	131	4.9136	0.3679	0.3754	58
b_2	1.0	0.9694	0.2905	0.2914	181	0.9687	0.1252	0.1262	154
b_3	-4.0	-3.9383	0.2969	0.3007	181	-3.9235	0.3001	0.3005	72
b_4	2.0	1.9752	0.2213	0.2219	244	1.9603	0.1539	0.1555	127
b_5	-2.0	-1.9540	0.2500	0.2521	228	-1.9578	0.1672	0.1690	129
σ	1.0	0.6500	0.0486	0.1711	120	0.8026	0.0696	0.1086	172
ε	-0.8	-0.6831	0.0606	0.0742	516	-0.7476	0.0367	0.0394	748
					ESt				
b_0	3.0	3.6261	0.3523	0.7443	513	3.2985	0.3565	0.4456	239
b_1	5.0	4.8840	0.4985	0.5120	121	4.9229	0.3248	0.3307	66
b_2	1.0	0.9704	0.2445	0.2454	215	0.9669	0.1403	0.1413	138
b_3	-4.0	-3.9030	0.3887	0.3981	137	-3.9411	0.2639	0.2674	81
b_4	2.0	1.9800	0.2328	0.2332	232	1.9559	0.1803	0.1823	108
b_5	-2.0	-1.9263	0.2675	0.2729	211	-1.9419	0.1990	0.2023	108
σ	1.0	0.7112	0.0702	0.1536	134	0.8471	0.0750	0.0983	189
ε	-0.8	-0.6711	0.0647	0.0813	471	-0.7571	0.0339	0.0358	824

Çizelge 6.30 Durum III için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$): $c_1 = -0.2, c_2 = 6.9$

		$n=100$				$n=150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.2058	0.2156	0.2580	100	3.1075	0.1254	0.1370	100
b_1	5.0	5.0245	0.0690	0.0696	100	5.0124	0.0422	0.0423	100
b_2	1.0	0.9946	0.0650	0.0651	100	0.9961	0.0411	0.0412	100
b_3	-4.0	-4.0074	0.0669	0.0670	100	-3.9978	0.0392	0.0392	100
b_4	2.0	2.0031	0.0659	0.0659	100	2.0020	0.0392	0.0392	100
b_5	-2.0	-2.0052	0.0688	0.0688	100	-1.9959	0.0383	0.0383	100
σ	1.0	1.3231	0.0115	0.1159	100	1.3239	0.0067	0.1116	100
ε	-0.8	-0.2968	0.0024	0.2556	100	-0.3042	0.0015	0.2474	100
					ESN				
b_0	3.0	5.0276	0.0672	4.1794	6	5.0154	0.0404	4.1027	3
b_1	5.0	5.8425	0.0510	0.7604	9	5.7801	0.0493	0.6582	6
b_2	1.0	1.7098	0.0322	0.5361	12	1.7076	0.0305	0.5311	8
b_3	-4.0	-3.2492	0.0980	0.6614	10	-3.2223	0.0510	0.6558	6
b_4	2.0	2.7071	0.0893	0.5896	11	2.7102	0.0456	0.5500	7
b_5	-2.0	-1.3657	0.0588	0.4611	15	-1.3633	0.0349	0.4400	9
σ	1.0	2.2371	0.1219	1.6521	7	2.2470	0.0366	1.5920	7
ε	-0.8	-0.1794	0.0022	0.3871	66	-0.1901	0.0011	0.3732	66
					ESL				
b_0	3.0	3.0863	0.1043	0.1117	231	3.0322	0.0314	0.0324	422
b_1	5.0	4.9829	0.1516	0.1519	46	4.9965	0.0168	0.0168	252
b_2	1.0	0.9928	0.0333	0.0334	195	0.9946	0.0152	0.0152	271
b_3	-4.0	-3.9890	0.0874	0.0875	77	-3.9953	0.0115	0.0115	340
b_4	2.0	1.9974	0.0573	0.0573	115	1.9940	0.0263	0.0264	149
b_5	-2.0	-1.9898	0.0411	0.0412	167	-2.0008	0.0111	0.0111	346
σ	1.0	0.8416	0.0173	0.0424	273	0.8690	0.0083	0.0255	438
ε	-0.8	-0.8161	0.0122	0.0125	2052	-0.8203	0.0064	0.0068	3612
					ESt				
b_0	3.0	3.0653	0.1242	0.1285	201	3.0191	0.0307	0.0311	441
b_1	5.0	4.9656	0.2192	0.2204	32	4.9976	0.0147	0.0147	289
b_2	1.0	0.9984	0.0516	0.0516	126	0.9959	0.0121	0.0121	339
b_3	-4.0	-3.9721	0.1609	0.1617	41	-3.9956	0.0121	0.0121	324
b_4	2.0	1.9945	0.0474	0.0475	139	1.9967	0.0125	0.0125	314
b_5	-2.0	-1.9892	0.0451	0.0452	152	-1.9995	0.0121	0.0121	316
σ	1.0	0.8841	0.0261	0.0395	293	0.9038	0.0092	0.0184	605
ε	-0.8	-0.8225	0.0118	0.0123	2080	-0.8249	0.0061	0.0068	3664

Çizelge 6.25 - 6.30'da Durum III için regresyon ($\mathbf{b}$), ölçek (σ) ve çarpıklık (ε) parametrelerinin tahmin değerleri, varyans, MSE ve RE değerleri yer almaktadır.

$\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri: ESLve ESt dağılımlarının $\mathbf{b}$ parametre vektörü, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, ML tahmin edicilerinin yüksek geldiği gözlenmiştir. Seçilen c_1 ve c_2 katsayılarına göre simülasyon sonuçları bu şekilde gözlenmiştir.

ESN dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESN dağılımının regresyon parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliği yüksektir. Örneklem hacmi arttığında asimetrik $M-$tahmin edicilerinin etkinliğinin arttığı gözlenmiştir. Bu ise, beklenilen bir sonuçtur. ESN ince kuyruklu bir dağılım olup sapan gözlemlerden etkilenir.

ESL dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESL dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri beklenildiği gibi parametre değerine yakın tahminler vermiştir.

ESt dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESt dağılımında $\nu = 1$ için ESL dağılımı elde edilmektedir. Dolayısıyla, ESt ve ESL dağılımlarının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında ML tahmin edicileri yüksek çıkmıştır.

Çizelge 6.31 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$): $c_1 = -1.6, c_2 = 3.7$

		$n = 30$				$n = 50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	2.8736	0.2647	0.2807	100	2.6253	0.0835	0.2239	100
b_1	5.0	4.9245	0.0638	0.0695	100	5.1315	0.0315	0.0488	100
b_2	1.0	0.9222	0.0714	0.0774	100	0.9850	0.0274	0.0276	100
b_3	-4.0	-4.0390	0.0959	0.0974	100	-3.9761	0.0633	0.0638	100
b_4	2.0	2.0424	0.1143	0.1161	100	1.9992	0.0477	0.0477	100
b_5	-2.0	-1.9114	0.0831	0.0909	100	-2.0506	0.0520	0.0546	100
σ	1.0	1.3876	0.1452	0.2955	100	1.4006	0.1249	0.2854	100
ε	-0.2	-0.1969	0.0473	0.0473	100	-0.1462	0.0095	0.0124	100
					ESN				
b_0	3.0	3.4375	0.1187	0.3101	91	3.3852	0.0401	0.2885	78
b_1	5.0	4.9036	0.1131	0.1224	57	5.1368	0.0310	0.0571	85
b_2	1.0	0.9213	0.0771	0.0833	93	1.0207	0.0315	0.0319	86
b_3	-4.0	-4.0186	0.1148	0.1151	85	-3.9542	0.0642	0.0663	96
b_4	2.0	2.0997	0.1190	0.1390	84	2.0197	0.0617	0.0621	77
b_5	-2.0	-1.9308	0.0909	0.0957	95	-2.0062	0.0579	0.0580	94
σ	1.0	1.4946	0.1233	0.4152	71	1.4746	0.1509	0.4575	62
ε	-0.2	-0.0152	0.0101	0.0642	74	-0.1086	0.0083	0.0167	74
					ESL				
b_0	3.0	2.9974	0.4364	0.4364	64	3.2399	0.1752	0.2328	96
b_1	5.0	4.4525	0.5836	0.8833	8	4.3838	0.3460	0.7256	7
b_2	1.0	0.8746	0.1421	0.1578	49	1.0134	0.1519	0.1522	18
b_3	-4.0	-3.6909	0.3627	0.4582	21	-4.2796	0.3354	0.4136	15
b_4	2.0	1.9675	0.3231	0.3242	36	1.8742	0.1148	0.1306	37
b_5	-2.0	-1.8972	0.1484	0.1589	57	-1.8663	0.1087	0.1266	43
σ	1.0	0.8765	0.1564	0.1716	172	0.9201	0.0792	0.0841	339
ε	-0.2	-0.1272	0.0169	0.0282	168	-0.1302	0.0224	0.0272	45
					ESt				
b_0	3.0	3.1371	0.4987	0.5175	54	2.9514	0.1400	0.1424	157
b_1	5.0	4.8950	0.1425	0.1535	45	5.0836	0.0284	0.0354	138
b_2	1.0	0.9487	0.0640	0.0666	116	1.0474	0.0185	0.0208	133
b_3	-4.0	-4.0364	0.0967	0.0981	99	-3.9449	0.0433	0.0463	138
b_4	2.0	2.0457	0.0667	0.0688	169	2.0018	0.0434	0.0434	110
b_5	-2.0	-1.9443	0.0746	0.0777	117	-2.0152	0.0455	0.0457	119
σ	1.0	0.9714	0.3026	0.3035	97	0.8510	0.0176	0.0398	717
ε	-0.2	-0.2359	0.2321	0.2362	20	-0.2766	0.0535	0.0594	21

Çizelge 6.32 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.2$): $c_1 = -1.6, c_2 = 3.7$

		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	2.9328	0.0927	0.0972	100	2.9027	0.0520	0.0615	100
b_1	5.0	4.9929	0.0229	0.0229	100	4.9976	0.0153	0.0153	100
b_2	1.0	1.0297	0.0178	0.0187	100	0.9876	0.0173	0.0175	100
b_3	-4.0	-3.9936	0.0194	0.0195	100	-4.0047	0.0112	0.0112	100
b_4	2.0	2.0113	0.0215	0.0217	100	2.0029	0.0124	0.0124	100
b_5	-2.0	-1.9832	0.0260	0.0263	100	-1.9890	0.0148	0.0149	100
σ	1.0	1.3516	0.1019	0.2255	100	1.4065	0.0291	0.1943	100
ε	-0.2	-0.1699	0.0072	0.0081	100	-0.1553	0.0033	0.0053	100
					ESN				
b_0	3.0	3.4238	0.0281	0.2077	47	3.4020	0.0165	0.1781	35
b_1	5.0	5.0084	0.0356	0.0357	64	5.0082	0.0236	0.0237	64
b_2	1.0	1.0409	0.0292	0.0309	60	0.9955	0.0263	0.0263	66
b_3	-4.0	-4.0031	0.0321	0.0321	61	-4.0137	0.0173	0.0175	64
b_4	2.0	2.0056	0.0285	0.0285	76	2.0116	0.0203	0.0204	61
b_5	-2.0	-1.9932	0.0399	0.0400	66	-1.9905	0.0189	0.0190	79
σ	1.0	1.6680	0.1146	0.5607	40	1.6670	0.1637	0.6086	32
ε	-0.2	-0.0815	0.0116	0.0256	32	-0.0768	0.0087	0.0239	22
					ESL				
b_0	3.0	2.8245	0.1905	0.2213	44	2.9035	0.1823	0.1916	32
b_1	5.0	4.3105	0.2409	0.7162	3	4.4156	0.2759	0.6174	3
b_2	1.0	0.8617	0.1284	0.1475	13	0.8935	0.0555	0.0669	26
b_3	-4.0	-3.5631	0.2003	0.3912	5	-3.5558	0.1714	0.3687	3
b_4	2.0	1.7940	0.0822	0.1246	17	1.7768	0.0643	0.1141	11
b_5	-2.0	-2.2195	0.0656	0.1138	23	-1.8629	0.0881	0.1069	14
σ	1.0	0.9985	0.0703	0.0703	321	1.0412	0.0608	0.0625	311
ε	-0.2	-0.1731	0.0128	0.0136	60	-0.1887	0.0122	0.0123	43
					ESt				
b_0	3.0	2.9879	0.0955	0.0956	102	2.9976	0.0474	0.0474	130
b_1	5.0	5.0047	0.0172	0.0172	133	5.0015	0.0120	0.0120	128
b_2	1.0	1.0170	0.0163	0.0166	112	0.9847	0.0112	0.0114	153
b_3	-4.0	-3.9903	0.0163	0.0164	118	-4.0027	0.0105	0.0105	107
b_4	2.0	2.0040	0.0212	0.0212	102	1.9950	0.0089	0.0089	139
b_5	-2.0	-1.9908	0.0183	0.0183	143	-1.9972	0.0115	0.0115	130
σ	1.0	0.9642	0.0115	0.0127	1776	0.9778	0.0075	0.0079	2460
ε	-0.2	-0.2326	0.0327	0.0337	24	-0.2054	0.0141	0.0142	37

Çizelge 6.33 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$): $c_1 = -0.9, c_2 = 5.0$

		$n = 30$				$n = 50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.0108	0.1320	0.1321	100	2.9503	0.1163	0.1188	100
b_1	5.0	4.8816	0.0520	0.0660	100	4.9844	0.0362	0.0364	100
b_2	1.0	1.0687	0.0542	0.0589	100	0.9799	0.0375	0.0379	100
b_3	-4.0	-4.0523	0.0384	0.0412	100	-3.9804	0.0371	0.0374	100
b_4	2.0	1.9953	0.0315	0.0315	100	2.0262	0.0260	0.0267	100
b_5	-2.0	-2.0233	0.0488	0.0493	100	-1.9750	0.0287	0.0293	100
σ	1.0	1.2107	0.5664	0.6108	100	1.3967	0.0703	0.2277	100
ε	-0.5	-0.4899	0.0865	0.0866	100	-0.4542	0.0530	0.0551	100
					ESN				
b_0	3.0	3.8045	0.0325	0.8798	15	3.8929	0.0251	0.8224	14
b_1	5.0	4.8462	0.0432	0.0761	87	4.9962	0.0596	0.0596	61
b_2	1.0	1.0558	0.0726	0.0757	78	0.9829	0.0482	0.0485	78
b_3	-4.0	-3.9642	0.0904	0.0917	45	-3.9047	0.0824	0.0830	45
b_4	2.0	2.0860	0.0543	0.0617	51	2.0540	0.0465	0.0495	54
b_5	-2.0	-2.0383	0.0540	0.0555	89	-2.0371	0.0450	0.0462	63
σ	1.0	1.6460	1.5327	1.9348	32	1.6087	0.3141	0.6333	36
ε	-0.5	-0.0807	0.0029	0.1787	48	-0.1013	0.0016	0.1605	34
					ESL				
b_0	3.0	3.7053	0.1269	0.6244	21	3.6558	0.1123	0.5424	22
b_1	5.0	4.8747	0.4748	0.4905	14	4.8110	0.4491	0.4848	8
b_2	1.0	1.1009	0.1873	0.1975	30	0.9120	0.1543	0.1640	23
b_3	-4.0	-3.7829	0.2572	0.3043	14	-3.8779	0.2605	0.2754	14
b_4	2.0	2.0141	0.1966	0.1968	16	2.0332	0.1505	0.1516	17
b_5	-2.0	-1.8851	0.1915	0.2047	24	-1.9209	0.1640	0.1703	17
σ	1.0	0.8500	0.0844	0.1369	446	0.8665	0.0566	0.1179	193
ε	-0.5	-0.0638	0.0210	0.2113	41	-0.1451	0.0199	0.1458	38
					ESt				
b_0	3.0	3.0901	0.1983	0.2064	64	3.1072	0.0954	0.1069	111
b_1	5.0	4.9354	0.0655	0.0697	95	4.9243	0.0189	0.0246	148
b_2	1.0	1.0703	0.0711	0.0760	78	1.0517	0.0632	0.0659	58
b_3	-4.0	-4.0143	0.1048	0.1050	39	-3.9878	0.0470	0.0471	79
b_4	2.0	2.0249	0.0722	0.0729	43	2.0166	0.0212	0.0215	124
b_5	-2.0	-2.0034	0.0682	0.0683	72	-1.9562	0.0473	0.0492	60
σ	1.0	0.9416	0.2371	0.2472	247	0.9537	0.1533	0.1549	147
ε	-0.5	-0.5899	0.1083	0.1164	74	-0.5358	0.0508	0.0521	106

Çizelge 6.34 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.5$): $c_1 = -0.9, c_2 = 5.0$

		$n=100$				$n=150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	2.9750	0.1022	0.1028	100	2.8832	0.0290	0.0427	100
b_1	5.0	4.9584	0.0166	0.0183	100	4.9987	0.0104	0.0104	100
b_2	1.0	0.9792	0.0200	0.0205	100	1.0026	0.0128	0.0128	100
b_3	-4.0	-4.0317	0.0209	0.0219	100	-3.9905	0.0114	0.0115	100
b_4	2.0	2.0090	0.0257	0.0258	100	1.9962	0.0089	0.0089	100
b_5	-2.0	-2.0122	0.0193	0.0195	100	-1.9910	0.0132	0.0133	100
σ	1.0	1.2321	0.0803	0.1342	100	1.2728	0.0564	0.1308	100
ε	-0.5	-0.3318	0.0098	0.0381	100	-0.3530	0.0041	0.0257	100
					ESN				
b_0	3.0	4.0176	0.0293	1.0647	10	4.0255	0.0222	1.0739	4
b_1	5.0	5.0084	0.0257	0.0258	71	5.0668	0.0331	0.0375	28
b_2	1.0	0.9897	0.0307	0.0308	67	0.9970	0.0344	0.0344	37
b_3	-4.0	-4.0632	0.0345	0.0385	57	-4.0609	0.0163	0.0200	58
b_4	2.0	2.0245	0.0351	0.0357	72	1.9976	0.0218	0.0218	41
b_5	-2.0	-2.0436	0.0279	0.0298	65	-2.0159	0.0292	0.0295	45
σ	1.0	1.6911	0.1042	0.5819	23	1.8815	0.4514	1.2285	11
ε	-0.5	-0.1566	0.0064	0.1243	31	-0.1949	0.0092	0.1022	25
					ESL				
b_0	3.0	3.4771	0.1694	0.3971	26	3.5715	0.0689	0.3955	11
b_1	5.0	4.4917	0.2134	0.4717	4	4.5133	0.1068	0.3436	3
b_2	1.0	0.8680	0.0675	0.0849	24	0.8795	0.0665	0.0810	16
b_3	-4.0	-3.6304	0.1378	0.2743	8	-3.7102	0.0610	0.1449	8
b_4	2.0	1.8353	0.1047	0.1318	20	1.7487	0.0686	0.1317	7
b_5	-2.0	-1.8689	0.0913	0.1085	18	-1.8448	0.0940	0.1047	13
σ	1.0	0.9528	0.0503	0.0526	255	0.9548	0.0235	0.0255	513
ε	-0.5	-0.1959	0.0175	0.1100	35	-0.1960	0.0103	0.1027	25
					ESt				
b_0	3.0	3.0184	0.0733	0.0736	140	2.9652	0.0364	0.0376	113
b_1	5.0	4.9802	0.0104	0.0108	171	4.9925	0.0080	0.0080	129
b_2	1.0	0.9751	0.0099	0.0105	195	1.0045	0.0093	0.0093	137
b_3	-4.0	-4.0127	0.0141	0.0142	154	-3.9804	0.0104	0.0108	107
b_4	2.0	1.9990	0.0175	0.0175	147	1.9953	0.0093	0.0093	96
b_5	-2.0	-2.0191	0.0116	0.0120	162	-1.9912	0.0107	0.0108	123
σ	1.0	0.9593	0.0128	0.0145	926	0.9720	0.0064	0.0072	1817
ε	-0.5	-0.5167	0.0186	0.0188	202	-0.5376	0.0135	0.0149	172

Çizelge 6.35 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$): $c_1 = -0.2, c_2 = 5.6$

		$n=30$				$n=50$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
					ESH				
b_0	3.0	3.1933	0.6788	0.7162	100	2.9596	0.0565	0.0582	100
b_1	5.0	4.9379	0.1938	0.1977	100	5.0258	0.0485	0.0491	100
b_2	1.0	0.8896	0.1405	0.1527	100	0.9177	0.0646	0.0713	100
b_3	−4.0	−4.0217	0.2389	0.2394	100	−4.0535	0.0543	0.0572	100
b_4	2.0	2.0615	0.1504	0.1542	100	2.0420	0.0309	0.0327	100
b_5	−2.0	−1.9943	0.2578	0.2578	100	−1.9712	0.0496	0.0505	100
σ	1.0	1.1844	0.0910	0.1250	100	1.2278	0.0696	0.1215	100
ε	−0.8	−0.7299	0.1037	0.1086	100	−0.7314	0.0302	0.0349	100
					ESN				
b_0	3.0	4.6872	0.1484	2.9951	24	4.6677	0.0983	2.8796	2
b_1	5.0	4.8975	0.5571	0.5676	35	4.9153	0.5000	0.5072	10
b_2	1.0	1.0022	0.1794	0.1794	85	0.9678	0.1294	0.1305	55
b_3	−4.0	−4.3282	0.1447	0.4611	52	−4.1606	0.1335	0.1593	36
b_4	2.0	2.0380	0.2109	0.2124	73	2.0517	0.0686	0.0713	46
b_5	−2.0	−2.0912	0.3663	0.3699	70	−2.0257	0.0949	0.0956	53
σ	1.0	1.7234	0.2697	0.7930	16	1.7924	0.2260	0.8538	14
ε	−0.8	−0.1353	0.0047	0.4465	24	−0.1626	0.0051	0.4114	8
					ESL				
b_0	3.0	4.3262	0.1586	1.9173	37	4.1980	0.1377	1.5728	4
b_1	5.0	4.7516	0.3638	0.4255	47	4.7471	0.2723	0.3968	12
b_2	1.0	0.9717	0.2012	0.2020	76	0.9411	0.0979	0.1013	70
b_3	−4.0	−3.7245	0.2620	0.3379	71	−3.7983	0.2724	0.3131	18
b_4	2.0	1.8716	0.1926	0.2091	74	1.8220	0.1770	0.2087	16
b_5	−2.0	−1.8715	0.2317	0.2610	99	−1.8014	0.2139	0.2534	20
σ	1.0	0.9417	0.0556	0.0590	212	0.9921	0.0529	0.0530	229
ε	−0.8	−0.1573	0.0115	0.4246	26	−0.1994	0.0132	0.3739	9
					ESt				
b_0	3.0	3.3268	0.4471	0.5539	129	3.3038	0.2368	0.3291	18
b_1	5.0	5.0213	0.1316	0.1321	150	5.0489	0.0870	0.0894	55
b_2	1.0	0.9287	0.0998	0.1049	146	0.9470	0.1009	0.1019	70
b_3	−4.0	−3.9194	0.4144	0.4209	57	−4.0080	0.1706	0.1707	33
b_4	2.0	1.9833	0.1574	0.1577	98	1.9949	0.0541	0.0541	60
b_5	−2.0	−1.9936	0.1757	0.1757	147	−1.9832	0.0862	0.0865	58
σ	1.0	1.1408	0.1063	0.1261	99	1.0146	0.0428	0.0430	283
ε	−0.8	−0.6899	0.0549	0.0671	162	−0.7780	0.0397	0.0464	75

Çizelge 6.36 Durum IV için asimetrik M (ESH) ve ML tahmin edicilerinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerleri ($\varepsilon = -0.8$): $c_1 = -0.2, c_2 = 5.6$

		$n = 100$				$n = 150$			
	τ	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE	$\hat{\tau}$	$Var(\hat{\tau})$	$MSE(\hat{\tau})$	RE
				ESH					
b_0	3.0	3.1392	0.0306	0.0500	100	3.1775	0.0172	0.0487	100
b_1	5.0	5.0069	0.0182	0.0182	100	4.9896	0.0055	0.0056	100
b_2	1.0	1.0070	0.0107	0.0107	100	0.9916	0.0105	0.0106	100
b_3	-4.0	-3.9992	0.0229	0.0229	100	-4.0040	0.0090	0.0090	100
b_4	2.0	2.0263	0.0285	0.0292	100	1.9924	0.0094	0.0095	100
b_5	-2.0	-2.0202	0.0200	0.0204	100	-2.0185	0.0086	0.0090	100
σ	1.0	1.0104	0.1108	0.1109	100	1.0686	0.0909	0.0956	100
ε	-0.8	-0.7765	0.0215	0.0221	100	-0.7238	0.0117	0.0175	100
				ESN					
b_0	3.0	4.6375	0.0346	2.7161	2	4.6315	0.0248	2.6868	2
b_1	5.0	4.9148	0.2553	0.2625	7	4.9816	0.0548	0.0566	10
b_2	1.0	1.0007	0.0289	0.0289	37	0.9876	0.0276	0.0278	38
b_3	-4.0	-4.0296	0.0368	0.0377	61	-4.0472	0.0301	0.0323	28
b_4	2.0	2.0569	0.0518	0.0550	53	2.0222	0.0253	0.0258	37
b_5	-2.0	-2.0766	0.0336	0.0394	52	-2.0552	0.0257	0.0287	31
σ	1.0	1.8955	0.1622	0.9641	12	2.1913	0.4593	1.8785	5
ε	-0.8	-0.2090	0.0048	0.3541	6	-0.2656	0.0089	0.2946	6
				ESL					
b_0	3.0	4.1271	0.1123	1.3826	4	3.9964	0.0881	1.0810	5
b_1	5.0	4.5634	0.1721	0.3628	5	4.5223	0.1143	0.3425	2
b_2	1.0	0.9126	0.0564	0.0641	17	0.9070	0.0499	0.0586	18
b_3	-4.0	-3.5975	0.0917	0.2538	9	-3.7250	0.1427	0.2183	4
b_4	2.0	1.9408	0.1469	0.1504	19	1.7621	0.0684	0.1250	8
b_5	-2.0	-1.8444	0.0986	0.1228	17	-1.8637	0.0988	0.1174	8
σ	1.0	0.9979	0.0423	0.0423	262	1.0613	0.0346	0.0384	249
ε	-0.8	-0.2130	0.0108	0.3554	6	-0.2775	0.0082	0.2812	6
				ESt					
b_0	3.0	3.0141	0.0818	0.0910	55	2.9869	0.0437	0.0443	110
b_1	5.0	5.0697	0.0301	0.0350	52	5.0568	0.0315	0.0347	16
b_2	1.0	0.9517	0.0814	0.0848	13	0.9736	0.0260	0.0267	40
b_3	-4.0	-3.9250	0.1473	0.1529	15	-3.9568	0.0254	0.0323	28
b_4	2.0	2.0133	0.0416	0.0428	68	1.9894	0.0193	0.0210	45
b_5	-2.0	-1.9626	0.0602	0.0616	33	-1.9739	0.0176	0.0183	49
σ	1.0	1.0412	0.0332	0.0349	318	1.0196	0.0201	0.0205	466
ε	-0.8	-0.8274	0.0149	0.0156	142	-0.8165	0.0081	0.0113	155

Çizelge 6.31 - 6.36’da Durum IV için regresyon $(\mathbf{b})$, ölçek (σ) ve çarpıklık (ε) parametrelerinin tahmin değerleri, varyans, MSE ve RE değerleri yer almaktadır.

$\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri: Asimetrik $M-$tahmin edicileri parametre değerlerine yakın tahmin değerleri vermiştir. Uygun c_1 ve c_2 katsayılarının seçilebilmiş olmasının bu durumu oluşturduğu simülasyon çalışmasından gözlenmektedir. Ancak, $\varepsilon = -0.2, -0.5$ için σ parametresinin asimetrik $M-$tahmin edicisi parametre değerine yakın tahmin değerleri vermemiştir.

ESN dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESN dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, uygun c_1 ve c_2 katsayılarının seçimi sonucu beklenildiği gibi asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden yüksek çıkmıştır. ESN dağılımı ince kuyruklu bir dağılım olduğundan, bu dağılımın parametrelerinin ML tahmin edicileri sapan gözlemlerden beklenildiği gibi etkilenmiştir.

ESL dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: ESL dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etklinlik yönünden karşılaştırıldığında, asimetrik $M-$tahmin edicileri yüksek çıkmıştır. Ancak $\varepsilon = -0.8$ iken ESL dağılımının σ parametresinin ML tahmin edicisi ile bu parametrenin asimetrik $M-$tahmin edicisi göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, ML tahmin edicisi yüksek çıkmıştır.

ESt dağılımının $\mathbf{b}, \sigma$ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri: Kalın kuyruklu olma derecesini düşürmek için $\nu = 3$ seçilmiştir. ESt dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, $\varepsilon = -0.2, -0.5$ ve $n = 30, 50$ için asimetrik $M-$tahmin edicilerinin yüksek geldiği durumlar vardır. $\varepsilon = -0.8$ iken asimetrik $M-$tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden genelde yüksek gelmiştir.

Simülasyon çalışmasında, ESN, ESL ve ESt dağılımlarının $\mathbf{b}$, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri kendi içindeki tahmin değerlerinde beklenildiği gibi parametre değerlerine yakın gelmiştir. Uygun c_1 ve c_2 katsayılarının seçimi sonucu, ortada ESN ve kuyruklarda ESL olduğunda **b**, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri beklenildiği gibi küçük MSE değerleri vermiştir. Veriyi iyi modelleyemeyen dağılımların σ parametresinin ML tahmini için MSE değeri örneklem hacmi arttığında düşüş göstermemiştir. Durum I için uygun c_1 ve c_2 katsayılarının seçimi sonucunda parametre değerlerine yakın tahmin değerleri elde edilmiştir. Regresyonda, birbirine alternatif olabilecek tahmin ediciler daha belirgin biçimde kendini göstermiştir. Örneğin ESN dağılımından rasgele sayı üretildiğinde, ESt dağılımının **b**, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametrelerin asimetrik M-tahmin edicileri genelde aynı etkinliğe sahiptir. Benzer şekilde, ESL dağılımından rasgele sayı üretildiğinde, ESL dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicileri ve $\nu = 1$ olarak alındığında ESt dağılımının tüm parametreleri için ML tahmin edicilerinin MSE değerleri yakın sonuçlar vermiştir. ESt dağılımının **b** parametre vektörü ve bu parametre vektörünün asimetrik M-tahmin edicileri göreli etkinlik yönünden karşılaştırıldığında, çarpıklık arttığında asimetrik M-tahmin edicisinin etkinliği yüksek çıkmıştır. Bunun nedeninin ise, çarpıklık derecesi yüksek iken yarı (half) dağılım oluştuğu ve regresyon parametrelerinin asimetrik M-tahmin edicisi tarafından daha iyi tahmin edilebildiği olarak yorumlanabilir. Bazı parametreler için asimetrik M-tahmin edicileri ve bu parametreler için ESt dağılımının ML tahmin edicileri genelde yakın MSE değerlerine sahip olmasının nedeni, asimetrik M-tahmin edicilerinin kalın kuyruklu durumda da modelleyebilmesidir.

Kontaminasyon oranı $K = 0.1$ olduğundan, örneklem hacmi arttığında kontaminasyon örneklem hacmi de artacaktır. Örneklem hacmi arttığında $MSE(\hat{\tau})$ değerlerinin düşüş gösterdiği gözlenmektedir. Bu durum, gerek ML tahmin edicisinin gerek de asimetrik $M-$tahmin edicisinin regresyon durumunda da tutarlı olduğunu göstermektedir.

6.3 Uygulamalar

Bu bölümde, ESN, ESL ve ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametreleri için ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicilerinin gerçek veri setine uygulamaları verilmektedir. Ayrıca normal (N) dağılımın θ konum ve σ ölçek parametreleri ve bu parametreler için Huber $M-$tahmin edicileri bu gerçek veri setlerine uygulanmıştır.

Normalleştirme sabiti denklem (3.5)'de verildiği üzere $\alpha = 2$ için $1/\sqrt{2\pi}$ olarak belirlenmiştir. Benzer durum, Huber (1981) kaynağında vardır. Ayrıca, (4.4) ifadesindeki Q fonksiyonunun minimizasyon problemi $Log-$olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyon problemine denktir. Dolayısı ile, en büyük $Log-$olabilirlik, en küçük AIC veya BIC bilgi kriterleri ile seçilen modelin veri setinde en iyi eğri uydurma (fitting) işlemini gerçekleştirdiği sonucuna ulaşılır. AIC veya BIC değerlerinin de aynı zamanda kullanılması ile parametre sayısı etkisi ortadan kaldırabilmiş olur. Aşağıda bununla ilgili olarak dört gerçek veri seti örneği verilmektedir. Bu örneklerden ilk iki tanesi θ, σ ve ε parametrelerinin yukarıda söz edilen tahmin ediciler ile elde edilmesine ilişkindir. Üçüncü ve dördüncü örnekler ise, regresyon parametreleri ile dağılım parametreleri olan σ ve ε parametrelerinin benzer şekilde bu yöntemler ile tahmin edilmesi için kullanılacaktır. Dördüncü örnekte veri setine sapan gözlem eklenmiştir. Sapan gözlem olduğu ve olmadığı durumlarda, tahmin ediciler kullanılarak bu tahmin edicilerin dayanıklılık özelliklerinin tahmin değerlerindeki değişime olan etkisi incelenmiştir. Aynı zamanda, AIC veya BIC bilgi kriterlerinde bu değişimin nasıl olduğu da inceleme kapsamında yer almaktadır.

Asimetrik $M-$tahmin edicisinde c_1 ve c_2, $M-$tahmin edicisinde k ile ESt dağılımında ν kuyruk kalınlığını belirleyen parametrenin ayarlama katsayıları olarak verildiği bilinmektedir. Bu katsayıların değerlerinin belirlenmesi için AIC veya BIC değerlerinden yararlanılmıştır. Bunun için ise en küçük AIC veya BIC değerleri elde edilene kadar gerçek veri setinde bu katsayıların farklı değerleri denenmiştir.

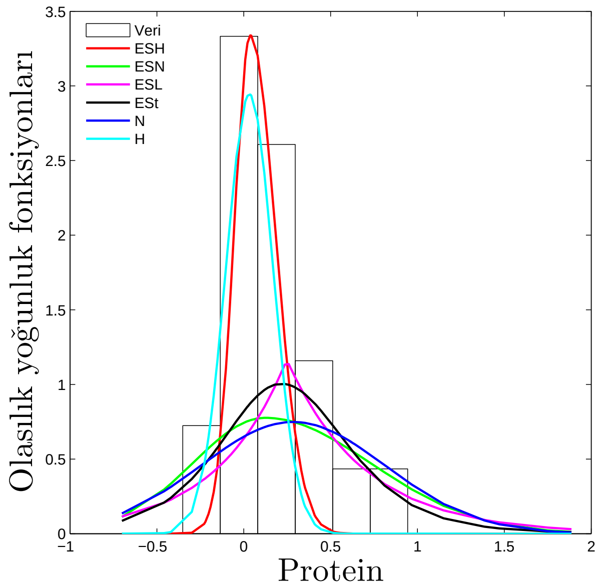
Örnek 1 (Protein Miktarı):

Bu örnekte yer alan veri setine http://discover.nci.nih.gov/datasetsNature2000.jsp linkinden ulaşılabilmektedir. Kanser hücrelerindeki protein miktarlarına ilişkin cDNA microarray verisi, 60 bireyin kanserli hücrelerinde yapılan ölçümler sonucu elde edilen veri setlerinden oluşmaktadır. Bu proteinlerden 60 insan için elde edilen "ZINC-BINDING PROTEIN A33" değişkeni ele alınmıştır. Arslan (2009) çalışması tarafından farklı değişkenler ele alınarak ilgili dağılımların parametrelerinin tahminleri ile birlikte konum, ölçek ve çarpıklık parametrelerinin tahminleri de yapılmıştır. Böylelikle, bu veri setleri çarpık ve uzun kuyruklu dağılım ile modellenmiştir. Aynı zamanda, bu cDNA microarray veri setleri Purdom ve

Holmes (2005) tarafından da incelenmiştir. Bu çalışma ise, bu veri setlerini çarpık Laplace dağılımı ile modellemiştir. Bu örnekte ise, dağılım bilgisini kullanmadan asimetrik $M-$tahmin yöntemi ile θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicilerinin bu veri seti için değerleri elde edilecektir. Aynı zamanda bu gerçek veri seti ESN, ESL, ESt ve N dağılımları ile modellenmeye çalışılacaktır. Ayarlama katsayı değerleri ESH: $c_1 = -0.1, c_2 = 0.3$, H: $k = 0.2$ ve ESt: $\nu = 5$ olarak alınmıştır. Çizelge 6.37'de bu veri seti için tahmin değerleri, $logL$, Akaike ve Bayesian bilgi kriterleri verilmektedir.

Çizelge 6.37 Örnek 1: Tahmin değerleri, $logL$, AIC ve BIC

	ESH	ESN	ESL	ESt	N	H
$\hat{\theta}$	0.0386(0.0815)	0.1240(0.1677)	0.2480	0.2157(0.1170)	0.2838(0.0047)	0.0332(0.1606)
$\hat{\sigma}$	0.1195(0.0491)	0.5139(0.0469)	0.3033	0.3778(0.0329)	0.5330(0.0023)	0.1355(0.0875)
$\hat{\varepsilon}$	-0.2049(0.2551)	-0.1839(0.1884)	-0.0452	-0.0373(0.1788)	-	-
$logL$	**27.1501**	-15.7852	8.2659	-45.3664	-17.8779	24.1149
AIC	**-48.3002**	37.5703	-10.5318	96.7328	39.7559	-44.2297
BIC	**-42.0171**	43.8534	-4.2487	103.0159	43.9446	-40.0410



Şekil 6.2 Protein verisi

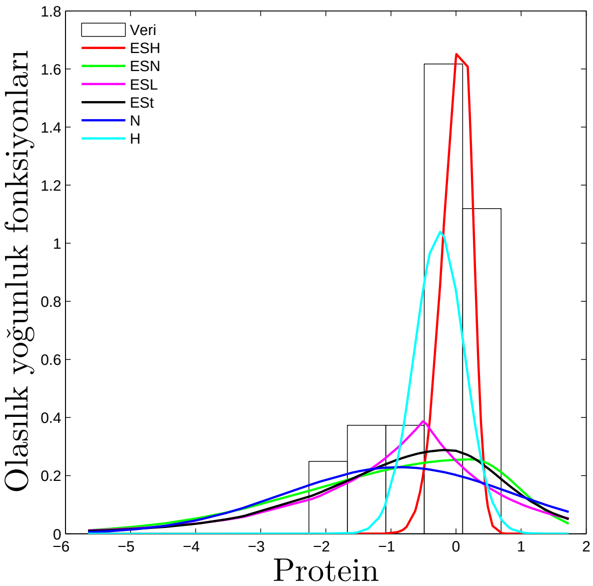
Bu örnekte en küçük AIC veya BIC değerleri asimetrik $M-$tahmin edicisinde (ESH) elde edilmiştir. AIC veya BIC bilgi kriterlerine göre sıralama yapılırsa bir sonraki tahmin ediciler Huber M (H), ESL, ESN, N ve ESt şeklindedir. Asimetrik $M-$tahmin edicisi çarpıklığı da modelleyebildiği için Huber $M-$tahmin edicisinden daha iyi bir AIC veya BIC değeri verdiği gözlenmiştir.

Örnek 2 (Protein Miktarı):

Bu örnekte yer alan veri setine http://discover.nci.nih.gov/datasetsNature2000.jsp linkinden ulaşılabilmektedir. Kanser hücrelerindeki protein miktarlarına ilişkin verileri içermektedir. Bu proteinlerden 60 insan için elde edilen ”CCAAT displacement protein” değişkeni ele alınmıştır. Ayarlama katsayı değerleri ESH: $c_1 = -0.25, c_2 = 0.1$, H: $k = 0.25$ ve ESt: $\nu = 5$ olarak alınmıştır. Çizelge 6.38’de bu veri seti için tahmin değerleri, $logL$, AIC ve BIC verilmektedir.

Çizelge 6.38 Örnek 2: Tahmin değerleri, $logL$, AIC ve BIC

	ESH	ESN	ESL	ESt	N	H
$\hat{\theta}$	0.1130(0.1287)	0.2371(0.4414)	-0.4931	-0.1179(0.3899)	-0.8721(0.0505)	-0.2550(0.3717)
$\hat{\sigma}$	0.2260(0.0928)	1.5598(0.1423)	0.9042	1.3172(0.4006)	1.7419(0.0252)	0.3837(0.1983)
$\hat{\varepsilon}$	0.3144(0.2286)	0.5231(0.1633)	0.1345	0.2950(0.1709)	-	-
$logL$	**-20.5648**	-82.3323	-57.3653	-113.2674	-88.9332	-48.8577
AIC	**47.1297**	170.6645	120.7305	232.5347	181.8664	101.7154
BIC	**53.4127**	176.9476	127.0135	238.8178	186.0551	105.9041



Şekil 6.3 Protein verisi

Bu örnekte en küçük AIC veya BIC değerleri asimetrik $M-$tahmin edicisinde (ESH) elde edilmiştir. AIC veya BIC bilgi kriterlerine göre sıralama yapılırsa bir sonraki tahmin ediciler Huber M (H), ESL, ESN, N ve ESt şeklindedir. Asimetrik $M-$tahmin edicisi çarpıklığı da modelleyebildiği için Huber $M-$tahmin edicisinden daha iyi bir AIC veya BIC değeri verdiği gözlenmiştir.

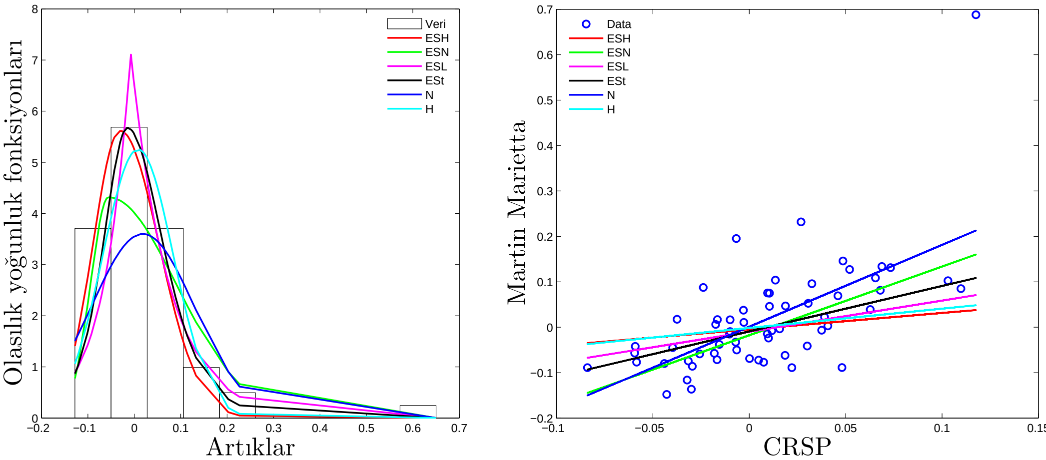
Örnek 3 (Martin Marietta):

Bu veri seti, Ocak 1982 ve Aralık 1986 arasında aylık gözlemlerden elde edilen 60 veriden oluşmaktadır. Bu veri seti için $y = b_0 + b_1 CRSP + u$ regresyon modeli ele alınacaktır. y değişkeni Martin Marietta şirketinin aşan oranlarıdır. CRSP, New York piyasasındaki dönüşlerin aşan oran indeksidir. u ise hata terimini göstermektedir. u hata terimlerinin ESN, ESL, ESt ve N dağılımlarına sahip olduğu varsayılarak regresyon parametre tahmin değerleri ile σ ve ε parametreleri için ML tahmin değerleri elde edilmiştir. Aynı zamanda, tez çalışmasında önerilen asimetrik $M-$tahmin edicileri (ESH) ve $M-$tahmin edicilerinin (H) ilgili parametreler için tahmin değerleri elde edilmiştir. Bu veri setine Lye ve Martin (1993), Azzalini ve Capitanio (2003), DiCiccio ve Monti (2004), Genç (2007), Arslan (2009), Arslan ve Genç (2009), Acıtaş vd. (2009), çalışmaları tarafından u hata terimlerinin bu çalışmalardaki öne sürülen modellere sahip olduğu varsayılarak b_0 ve b_1 parametrelerinin tahmin değerleri elde edilmiştir. Ayarlama katsayı değerleri ESH: $c_1 = -0.015, c_2 = 0.03$, H: $k = 0.03$ ve ESt: $\nu = 1.5$ olarak alınmıştır. Çizelge 6.39'da bu veri seti için tahmin değerleri, $logL$, AIC ve BIC verilmektedir.

Çizelge 6.39 Örnek 3: Tahmin değerleri, $logL$, AIC ve BIC

	ESH	ESN	ESL	ESt	N	H
$\hat{b}_0$	-0.0047	-0.0177	-0.0099	-0.0092	0.0011	-0.0016
$\hat{b}_1$	0.3607	1.5118	0.6846	1.0009	1.8025	0.4241
$\hat{\sigma}$	0.1240	0.1105	0.0546	0.0633	0.1210	0.1373
$\hat{\varepsilon}$	-0.1116	-0.2581	-0.1093	-0.0459	-	-
$logL$	**70.1209**	58.8884	63.7627	66.1233	53.9302	63.0189
AIC	**-134.2418**	-111.7768	-121.5255	-126.2466	-101.8604	-120.0377
BIC	**-127.9588**	-105.4938	-115.2424	-119.9636	-95.5774	-113.7547

Bu örnekte en küçük AIC veya BIC değerleri asimetrik $M-$tahmin edicisinde (ESH) elde edilmiştir. AIC veya BIC bilgi kriterlerine göre sıralama yapılırsa bir sonraki tahmin ediciler ESt, ESL, Huber M (H), ESN ve N şeklindedir. Asimetrik $M-$tahmin edicisi çarpıklığı da modelleyebildiği için Huber $M-$tahmin edicisinden daha iyi bir AIC veya BIC değeri verdiği gözlenmiştir. $\nu = 1.5$ alınmış olması kuyrukların kalın olmasını sağlar. ESL ve ESt dağılımlarının AIC veya BIC değerleri yakın gelmiştir. Çünkü $\nu = 1.5$ alınmıştır. Bir sonraki AIC değeri ise, $k = 0.03$ seçilmiş olması itibari ile Huber $M-$tahmin edicisidir. ESN ve N



Şekil 6.4 Martin Marietta verisi

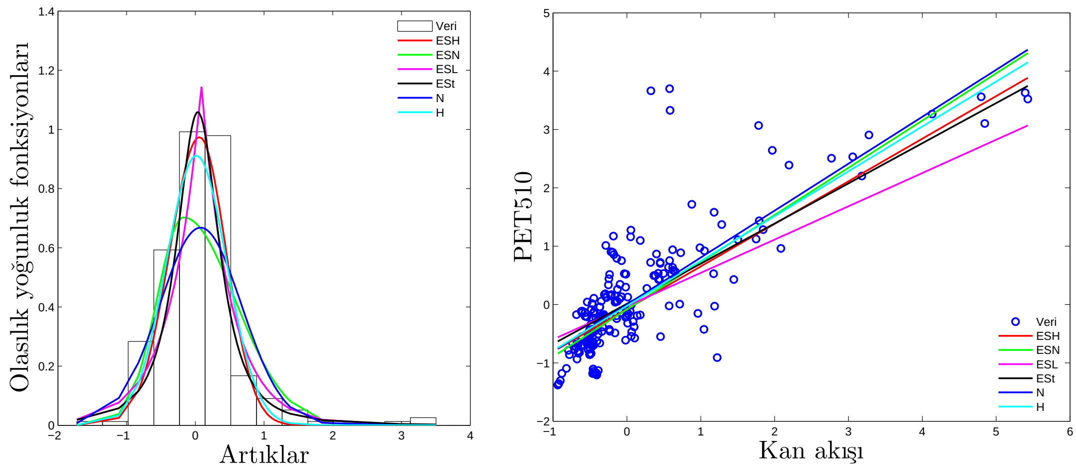
dağılımları AIC değerleri açısından incelendiğinde, çarpıklık parametresinin olması daha iyi bir modellemenin gerçekleştirilebildiğini göstermektedir.

Örnek 4 (Kan akışına karşılık PET verisi):

Bu örnekte, üçüncü örnekte ele alındığı gibi benzer durumlar yapılmıştır. İncelenen veri seti R 3.2.1 sürümünde yer almaktadır ve Toft (2015) tarafından hazırlanan PET paketindeki ”la” isimli veri vektörünün yer aldığı bağımlı değişkenin ”y=la$PET510” ve açıklayıcı değişkenin ise ”x=la$bflow” olduğu veriler öncelikle standartlaştırılmıştır. ”PET510” değişkeni PET (Positron Emission Tomography) cihazı kullanılarak noninvasif yöntem ile elde edilen değişkendir. ”bflow” ise kan akışını gösteren değişkendir. Bu değişken invasif (bireye ilaç verilmesi veya ameliyat ortamı oluşturulması) teknikle elde edilmiştir. R programındaki gamlss.nl paketinde detaylı bilgiler verilmektedir. Bu veri seti, Lange vd. (1989), Jones ve Faddy (2003) ile Rigby ve Stasinopoulos (2006) tarafından yapılan çalışmalarda u hata terimleri farklı dağılımlar kullanılarak modellenmiştir. Ancak, bu çalışmalar lineer olmayan regresyon modelini kullanmışlardır. Burada ise, $y = b_0 + b_1x + u$ basit doğrusal regresyon modeli kullanılarak standartlaştırılmış olan bu veriler arasındaki doğrusal ilişki araştırılmıştır. Ayarlama katsayı değerleri ESH: $c_1 = -1, c_2 = 0.7$, H: $k = 1$ ve ESt: $\nu = 2$ olarak alınmıştır. $Q_3 + 1.5IQR = 1.6686$ değerinden büyük bir gözlem eklenirse, bu değer sapan olarak değerlendirilecektir. Burada Q_3 üçüncü çeyreği ve IQR çeyrekler arası genişliği göstermektedir (interquartile range). Buradan hareketle, veri setine y yönünde 12 değeri eklenmiş olması ile sapan değer oluşturulmuş olur. x yönünde en büyük değer 5.4276'dır. x yönünde ise 5 değeri eklenmiştir. Böylelikle, sadece y yönünde bir sapan gözlem oluşturulmuştur ve sapan gözlemden hangi tahmin edicilerin etkilendiği araştırılmıştır. Ayarlama katsayı değerleri ESH: $c_1 = -1, c_2 = 0.7$, H: $k = 1$ ve ESt: $\nu = 2$ olarak alınmıştır ve örneklem hacmi $n = 251$ dir. Sapan gözlem eklenmiş hali ise $n = 252$ olmuştur. Çizelge 6.40'da bu veri seti için tahmin değerleri, $logL$, AIC ve BIC verilmektedir. Çizelge 6.41'de ise sapan gözlem olması durumunda elde edilenler verilmektedir.

Çizelge 6.40 Örnek 4: Sapan gözlem olmadığı durumda tahmin değerleri, $logL$, AIC ve BIC

	ESH	ESN	ESL	ESt	N	H
$\hat{b}_0$	-0.0773	-0.0841	-0.0280	0.0118	-0.0000	-0.0229
$\hat{b}_1$	0.7299	0.8094	0.4586	0.6881	0.8046	0.7688
$\hat{\sigma}$	0.6013	0.9618	0.4908	0.5486	0.9980	0.6629
$\hat{\varepsilon}$	-0.0320	-0.1599	0.0000	0.0813	-	-
$logL$	**-176.1575**	-265.8107	-258.1030	-223.6345	-274.4067	-191.9880
AIC	**360.3149**	539.6215	524.2060	455.2690	554.8134	389.9761
BIC	**374.4167**	553.7233	538.3078	469.3708	565.3897	400.5524

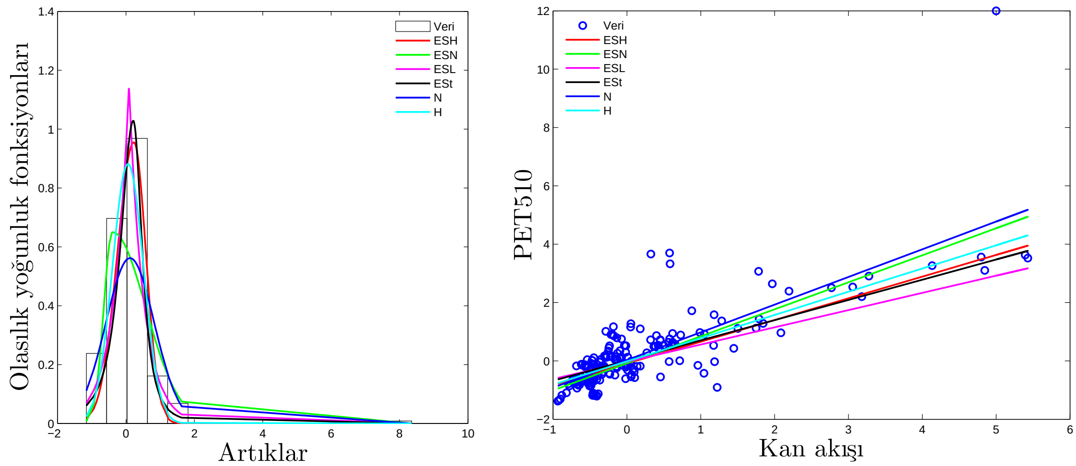


Şekil 6.5 Sapan gözlem olmadığı durumda kan akışına karşılık PET510 verisine uydurulmuş (fitting) farklı modeller

Bu örnekte en küçük AIC veya BIC değerleri asimetrik $M-$tahmin edicisinde (ESH) elde edilmiştir. AIC veya BIC bilgi kriterlerine göre sıralama yapılırsa bir sonraki tahmin ediciler Huber M (H), ESt, ESL, ESN ve N şeklindedir. Asimetrik $M-$tahmin edicisi çarpıklığı da modelleyebildiği için Huber $M-$tahmin edicisinden daha iyi bir AIC veya BIC değeri

Çizelge 6.41 Örnek 4: Sapan gözlem olduğu durumda tahmin değerleri, $logL$, AIC ve BIC

	ESH	ESN	ESL	ESt	N	H
$\hat{b}_0$	-0.0876	-0.0850	-0.0316	0.0103	0.0288	-0.0175
$\hat{b}_1$	0.7440	0.9262	0.4746	0.6930	0.9491	0.7959
$\hat{\sigma}$	0.6305	1.1451	0.5220	0.5538	1.2504	0.6943
$\hat{\varepsilon}$	-0.0528	-0.2532	-0.0323	0.0734	-	-
$logL$	**-189.6646**	-314.7171	-273.7550	-231.9491	-334.5094	-207.4125
AIC	**387.3292**	637.4342	555.5100	471.8983	675.0188	420.8250
BIC	**401.4469**	651.5519	569.6277	486.0160	685.6070	431.4133



Şekil 6.6 Sapan gözlem olduğu durumda kan akışına karşılık PET510 verisine uydurulmuş (fitting) farklı modeller

verdiği gözlenmiştir. $\nu = 2$ alınmış olması kuyrukların kalın olması durumunu biraz düşürür. ESL ve ESt'den elde edilen AIC değerleri incelendiğinde, ESt dağılımının basıklığı iyi modelleyebilmiş olması itibari ile ESL dağılımından daha küçük bir AIC değeri verdiği gözlenmiştir. ESN ve N, AIC değerleri açısından incelendiğinde; çarpıklık parametresinin olması daha iyi bir modellemenin gerçekleştirilebildiğini göstermektedir. **b**, σ ve ε parametrelerinin tahmin değerleri için asimetrik M (ESH) ve M tahmin edicileri (H) ile ESL, ESt dağılımlarının bu parametreleri için ML tahmin edicileri önemli bir değişim göstermemiştir.

7. SONUÇLAR

Elsalloukh (2005) $\varepsilon-$çarpık üstel kuvvet dağılım ailesini (ESEP) önermektedir. Arslan ve Genç (2009) tarafından önerilen değişken dönüştürmesi ile bu aileden yeni bir dağılım (ESGt) elde edilmiştir. Bu dağılım, α ve q parametrelerinin özel değerlerinde t dağılımına karşılık gelmiştir. ESGt, Arslan ve Genç (2009) çalışması tarafından önerilen bir dağılımdır.

Bölüm 3'de, ESEP ailesinin α parametresi ayarlama sabiti seçildikten sonra, θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri elde edilmiştir. ML tahmin edicilerinden elde edilen tahmin denklemleri kapalı formda olduğundan dolayı, sayısal yöntem kullanılması gereklidir. Bunun için, bu tahmin denklemlerinde gerekli analitik düzenlemeler yapıldıktan sonra eş anlı olarak IRA ile tahmin değerleri elde edilmiştir. ESGt dağılımının α ve q parametreleri ayarlama sabitleri olarak seçildikten sonra, θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri elde edilmiştir. İlgili parametrelere göre denklemler kapalı formda olduğundan, gerekli analitik düzenlemeler yapıldıktan sonra, parametre tahminleri eş anlı olarak IRA ile elde edilmiştir. Bu dağılımların θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmininde, ilgili dağılımlardan rasgele sayılar üretilerek sonlu örneklem için eşanlı tahminlerinin performansları incelenmiştir. Aynı zamanda, ESN, ESL ve ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri ile bu parametreler için asimetrik $M-$tahmin edicilerinin performansları simülasyon aracılığı ile karşılaştırılmıştır. ESN, ESL ve ESt dağılımlarından geldiği durumda, asimetrik $M-$tahmin edicilerinin parametre değerlerine yakın tahminler verebilmesi için, uygun c_1 ve c_2 değerleri simülasyon aracılığı ile belirlenmeye çalışılmıştır. ESEP ailesi ve bu ailenin özel halleri olan ESN, ESL ile ölçek karmasının özel hali olan ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicileri için dayanıklılık özellikleri ele alınmıştır. Bu kapsamda, bu parametrelerin ML tahmin edicilerinin etki fonksiyonu, büyük hata duyarlılığı ve bilgi standardize duyarlılık olmak üzere dayanıklılık özellikleri incelenmiştir. ESt dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin her birinin yerel dayanıklı olduğu gösterilmiştir. Ancak, ESN dağılımının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin her biri yerel dayanıklı değildir. ESL dağılımının σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin her biri yerel dayanıklı olmayıp, θ parametresinin ML tahmin edicisi yerel dayanıklıdır. Ayrıca, ESN ve ESt dağılımlarının θ, σ ve ε parametrelerinin ML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri incelenmiştir. Laplace dağılımı düzgünlük koşullarını sağlamadığından dolayı, ML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri elde edilememiştir.

Bölüm 4'de, Huber $M-$tahmin edicisinin ε asimetrik formu ile ilgilenilmiştir. Böylelikle, Huber $M-$tahmin edicisine ε-çarpıklık parametresi eklenerek Huber $M-$tahmin edicisi genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme yapılırken, Bölüm 3'de ele alınan ESN ve ESL dağılımlarının $-log(f)$ fonksiyonları kullanılıp, asimetrik ρ fonksiyonu oluşturulmuştur. Bu asimetrik ρ fonksiyonu aracılığı ile, θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri elde edilmiştir. Kontaminasyon sınır değerleri c_1 ve c_2 sabit olmak koşulu ile, çarpık veriler için θ, σ ve ε parametrelerinin asimetrik $M-$tahmin edicileri, θ ve σ için elde edilen Huber $M-$tahmin edicilerinden daha etkin olduğu simülasyon sonuçlarından gözlenmiştir. İlgili tahmin ediciler kapalı formda olduğundan, sayısal yöntemlerden biri olan IRA kullanılarak θ, σ ve ε parametrelerinin eş anlı tahmin değerleri elde edilmiştir. Asimetrik $M-$tahmin edicilerinin dayanıklılık (etki fonksiyonu, büyük hata duyarlılığı) ve asimptotik özellikleri incelenmiştir. Bu noktada, öncelikle Scholz (1965) ile Fujimoto ve Herrero (2000) çalışmaları tarafından varlık ve teklik için gerekli olan koşulların asimetrik $M-$tahmin edicileri içinde sağlandığı gösterilmiştir. Daha sonra, Haberman (1989), Stefanski ve Boos (2002) ile Maronna vd. (2006) çalışmaları tarafından verilen koşullar (tutarlılık, asimptotik normallik) ele alınıp, asimetrik $M-$tahmin edicileri içinde incelenmiştir.

Bölüm 5'de ise, regresyon uygulamasına yer verilmiştir. Bu noktada ise, bölüm 3'de verilen ESEP ailesi ile ESt dağılımlarının ve bölüm 4'de verilen asimetrik $M-$tahmin yönteminin $\mathbf{b}$ regresyon parametreleri ile dağılım parametreleri olan σ ve ε için, sırasıyla ML ve asimetrik $M-$tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu iki tahmin edicinin performansı yukarıda söz edildiği gibi karşılaştırılmıştır.

Bu tez çalışmasının devamında, asimetrik $M-$tahmin yöntemindeki c_1 ve c_2 ayarlama katsayılarının optimizasyon yöntemleri kullanılarak belirlenmesi ayrıca gerçekleştirilecektir. Bu bağlamda, en iyi c_1 ve c_2 katsayılarının seçimi için literatürde yer alan diğer bilgi kriterleri kullanılacaktır. Çünkü, simülasyon ortamında parametre değerine yakın tahminler vermesi için uygun c_1 ve c_2 seçimi belirlenebilmektedir. Fakat, bu avantaj gerçek veri seti için söz konusu değildir. Bu noktada, en optimal tahmin değerlerini elde etmek için bilgi kiritelerden yararlanılmalı ve bu şekilde c_1 ve c_2 katsayıları belirlenmeye çalışılmalıdır.

Ayrıca, regresyon uygulamasında asimptotik özellikler gelecek çalışmalar olarak yapılacaktır. (4.4) ifadesinde verilen minizasyon probleminin çok değişkenli formları gelecekte çalışılacaktır. Aynı zamanda, çok değişkenli durumdaki regresyon uygulaması da ele alınacaktır.

Tez kapsamında ele alınan asimetrik $M-$tahmin yönteminin R istatistik yazılımı ortamında bir paketinin oluşturulması planlanmaktadır. Litatürde yer alan Welsch, Hampel ve diğer fonksiyonların gerek ε türü gerekse de diğer asimetrik türleri için asimetrik $M-$tahmin edicileri elde edilip, paket içerisine dahil edilecektir.

KAYNAKLAR

Acıtaş, S. Kasap, P. Şenoğlu, B. and Arslan, O. 2013. One-step M-estimators: Jones and Faddy's skewed t-distribution. Journal of Applied Statistics, Vol. 40(7), 1545-1560.

Adichie, J.N. 1967. Estimates of Regression Parameters Based On Rank Tests. The Annals of Mathematical Statistics, JSTOR, 894-904.

Akaike, H. 1974. A new Look at the Statistical Model Identification. IEEE Transactions Automatic Control, Vol. 19(6), 716-723.

Allende, H. Frery, A.C., Galbiati J., and Pizarro L. 2006. M-Estimators with Asymmetric Influence Functions: The $\mathcal{G}_A^0$ Distribution Case. Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 76(11), 941-956.

Andrews, D.F., Bickel, P.J., Hampel, F.R. and Huber, P.J. 1972. Robust Estimates of Location: Survey and Advances. Princeton University Press Princeton, 373, USA.

Antoch, J. Ekblom, H. and Visek, J.A. 1998. Robust Estimation in Linear Mode. XploRe Macros.

Arslan, O. and Genç, A.İ. 2003. Robust location and scale estimation based on the univariate generalized t (GT) distribution. Communications in Statistics Theory and Methods, Vol. 32(8), 1505-1525.

Arslan, O. 2004. Convergence behavior of an iterative reweighting algorithm to compute multivariate M-estimates for location and scatter. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 118(1), 115 - 128.

Arslan, O. and Genç A.İ. 2009. The skew generalized t distribution as the scale mixture of a skew exponential power distribution and its applications in robust estimation. Statistics, Vol.43(5), 481-498.

Arslan, O. 2009. Maximum likelihood parameter estimation for the multivariate skew slash distribution. Statistics & Probability Letters, Vol.79(20), 2158-2165.

Azzalini, A. 1985. A class of distributions which includes the normal ones. Scand. Journal of Statistics, Vol. 12(2), 171-178.

Azzalini, A. 1986. Further results on a class of distributions which includes the normal ones. Statistica, Vol. 46(2), 199-208.

Azzalini, A. and Capitanio, A. 2003. Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution. J. R. Stat. Soc. Ser. B 65, 367–389.

Bhar, P.J. 2008. Robust regression. New Delhi: IASRI. Vol. 70(350), 70-78.

Chanda, K.C. 1954. A Note on the Consistency and Maxima of the Roots of Likelihood Equations. Vol. 41(1), 56-61.

Chiogna, M. 1998. Some results on the scalar skew-normal distribution. J. Ital. Statist. Soc. Vol. 7(1), 1-13.

Çankaya, M.N., Bulut, Y.M., Doğru F.Z. and Arslan, O. 2015. A Bimodal Extension of the Generalized Gamma Distribution. Revista Colombiana de Estadistica. Vol. 2(1), 1-14.

DiCiccio, T.J., and Monti, A.C., 2004. Inferential aspects of the skew exponential power distribution. Journal of the American Statistical Association Vol. 99(466), 439-450.

Donoho, D.L., Huber, P.J. and Lehmann L. 1983. The Notion of Breakdown Point. A Festschrift for Erich L. Lehmann.

Elsalloukh, H. 2005. Further Results on the Epsilon-Skew Exponential Power Distribution. University of Arkansas at Little Rock, Department of Mathematics and Statistics, 1-15.

Elsalloukh, H. 2008. The Epsilon-Skew Laplace Distribution. University of Arkansas at Little Rock, Department of Mathematics and Statistics, 5-19.

Elsalloukh, H., Guardiola, J.H. and Young, M. 2005. The Epsilon-Skew Exponential Power Distribution Family. Far East Journal of Theoretical Statistics. Pushpa Publishing. Vol. 17(1), 97-112.

Fujimoto, T., and Herrero, C. 2000. A Univalence Theorem for Nonlinear Mappings: An Elementary Approach. http://ousar.lib.okayama-u.ac.jp/file/41521/oer_031_4_277_283.pdf, 2015.

Genç, A.İ. 2007. A generalization of the univariate slash by a scale mixtured exponential power distribution. Communications in Statistics Simulation and Computation. Vol. 36(5), 937-947.

Godambe, V.P. 1960. An Optimum Property of Regular Maximum Likelihood Estimation. The Annals of Mathematical Statistics. Vol. 31(4), 1208-1211.

Godambe, V.P. and Thompson, M.E. 1978. Some aspects of the theory of estimating equations. Journal of Statistical Planning and Inference. Vol. 2(1), 95-104.

Gomez, H.W., Torres F.J. and Bolfarine H. 2007. Large-sample inference for the epsilon-skew-t distribution. Communications in Statistics Theory and Methods. Vol. 36(1), 73-81.

Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., Jeffrey, A., and Zwillinger D. 2007. Table of Integrals, Series, and Products. Sixth Edition. Academic Press, 1171, USA.

Haberman, S.J. 1989. Concavity and Estimation. The Annals of Statistics. JSTOR, Vol.17(4), 1631-1661.

Hampel, F.R. 1968. Contributions to the theory of robust estimation. Ph.D. Thesis, Univ. of California, Berkeley.

Hampel, F. 1971. A general qualitative definition of robustness. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42(6), 1887-1896.

Hampel, F. 1974. The influence curve and its role in robust estimation. Journal of the American Statistical Association, Vol. 69(346), 383-393.

Hampel, F.R., Ronchetti, E.M., Rousseeuw, P.J. and Stahel, W.A. 1986. Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions. Wiley Series in Probability and Statistics, 36-39, New York.

Hampel, F.R. 2000. Robust Inference. Research Report, No. 93.

Henze, N. 1986. A probabilistic representation of the skew normal distribution. Scand. J. Statistics, Vol. 13(4), 271-275.

Hodges, J. Joseph, L. and Lehmann, E.L. 1963. Estimates of Location Based on Rank Tests. The Annals of Mathematical Statistics, JSTOR, Vol. 34(2), 598-611.

Hogg, R.V., McKean, J.W. and Craig, A.T. 2005. Introduction to Mathematical Statistics. Pearson New International Edition, 704, USA.

Huber, P.J. 1964. Robust Estimation of a Location Parameter. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 35(1), 73-101.

Huber, P.J. 1965. A robust version of the probability ratio test. Ann. Math. Statist. Vol. 36(6), 1753-1758.

Huber, P.J. 1967. The behavior of maximum likelihood estimates under nonstandard Conditions. Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Vol. 1(1), 221-233.

Huber, P.J. 1981. Robust Statistics. Wiley Series in Probability and Statistics, 308, New York.

Huber, P.J. 1984. Finite Sample Breakdown of M- and P-Estimators. Annals of Statistics, Vol.12(1), 119-126.

Huber, P.J. and Ronchetti, E.M. 2009. Robust Statistics. Second Edition, Wiley Series in Probability and Statistics, 354, USA.

Jaeckel, L.A. 1972. Estimating regression coefficients by minimizing the dispersion of residual. Ann. Statist. 43(5), 1449-1458.

Jones, M.C. and Faddy, M.J. 2003. A skew extension of the t distribution with applications. J. Roy. Statist. Soc B. 65(1), 159-174.

Jureckova, J. S. 1971. Nonparametric Estimate of Regression Coefficients. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42(4), JSTOR, 1328-1338.

Jureckova, J. and Picek, J. 2006. Robust statistical methods with R. Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 197, USA.

Jureckova, J. S. and Sen P.K. 1982. M-Estimators and L-estimators of location: uniform integrability and asymptotic risk-efficient sequential versions. Sequential Analysis, Vol.1(1), 27-56.

Kent, J.T. and Tyler, D.E. 1991. Redescending M-estimates of Multivariate Location and Scatter. The Annals of Statistics, Vol. 19(4), 2102-2119.

Kent, J.T. and Tyler, D.E. 1996. Constrained M-estimation for multivariate location and scatter. The Annals of Statistics, Vol. 24(3), 1346-1370.

Lange, K.L. Little, R.J.A. and Taylor, J.M.G. 1989. Robust statistical modelling using the t distribution. J. Am. Statist. Ass, Vol. 84(408), 881-896.

Lehmann, E.L. and Casella, G. 1998. Theory of Point Estimation. Wadsworth & Brooks/Cole. Pacific Grove, CA, 589. USA.

Maronna, R. 1976. Robust M-Estimators of Multivariate Location and Scatter. The Annals of Statistics, Vol. 4(1), 51-67.

Maronna, R. Martin, D. and Yohai, V. 2006. Robust Statistics: Theory and Methods. Wiley Series in Probability and Statistics, 403, UK.

McDonald, J.B. and Butler, R.J. 1987. Some Generalized Mixture Distributions with an Application to Unemployment Duration. The Review of Economics and Statistics, Vol. 69(2), 232-240.

Mudholkar, G.S. and Hutson, A.D. 2000. The epsilon-skew-normal distribution for analyzing near-normal data. Journal of statistical planning and inference, pp. Vol. 83(2), 291-309.

O’Hagan, A. and Leonard, T. 1976. Bayes Estimation Subject To Uncertainty About Parameter Constraints. Biometrika Trust, Vol. 63, 201-203.

Purdom, E., and Holmes, S.P., 2005. Error distribution for gene expression data. Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology, 4, Article 16,7-33.

Rieder, H. 1994. Robust Asymptotic Statistics. Springer, New York, 399, USA.

Rigby, R.A. and Stasinopoulos, D.M. 2006. Using the Box-Cox t distribution in GAMLSS to mode skewnees and and kurtosis. Statistical Modelling, Vol. 6(3), 209-229.

Scholz, F.W. 1965. Comparison of Optimal Location Estimators. PhD Thesis, University of California, Berkeley, 1-33.

Shao, J. 2003. Mathematical Statistics. Second edition, Springer, 591, USA.

Shevlyakov, G.L. Morgenthaler, S. and Shurygin, A. 2008. Redescending M-estimators. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 138(10), 2906-2917.

Stefanski, L. A. and Boos, D. 2002. The Calculus of M-Estimation. The American Statistician, Taylor & Francis, Vol. 56(1), 29-38.

Toft P. 2015. Simulation and Reconstruction of PET Images. PET Package in R.

Wang, F.K. and Lee, C.W. 2011. M-estimator with asymmetric influence function for estimating the Burr type III parameters with outliers. Computers & Mathematics with Applications, Vol. 62(4), 1896-1907.

Weakliem, D.L. 1999. A critique of the Bayesian information criterion for model selection. Sociological Methods Research, Vol. 27(3), 359-397.

Zhang, J.L. and Li, G. 1998. Breakdown properties of location M-estimators. Annals of Statistics, Vol. 26(3), 1170-1189.

EKLER

EK 1. θ, σ **ve** ε **Parametrelerinin ML Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri için Koşullar**

EK 2. θ, σ **ve** ε **Parametrelerinin Asimetrik M-Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri için Koşullar**

EK 3. θ**,** σ **ve** ε **Parametrelerinin Asimetrik M-Tahmin Edicileri, M ve ML Tahmin Edicileri için IRA Kodları**

EK 1. θ, σ ve ε Parametrelerinin ML Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri için Koşullar

EK 1.1 ESN Dağılımının θ, σ ve ε Parametrelerinin ML Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri için Koşul

ESN dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{ESN}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\{-\frac{(x-\theta)^2}{2((1-sign(x-\theta)\varepsilon)\sigma)^2}\} \tag{1.1}$$

olarak verilmişti.

Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması olan $logf$ fonksiyonu kullanılarak θ, σ ve ε parametreleri için kısmi türevler

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\theta^3} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\sigma\partial\theta^2} = \frac{2}{\sigma^3(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^2} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\varepsilon\partial\theta^2} = -\frac{2\text{sgn}(x-\theta)}{\sigma^2(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^3} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\sigma^2\partial\theta} = \frac{6(x-\theta)}{\sigma^4(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^2} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\theta\partial\sigma\partial\varepsilon} = -\frac{4(x-\theta)\text{sgn}(x-\theta)}{\sigma^3(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^3} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\theta\partial\varepsilon^2} = \frac{6(x-\theta)}{\sigma^2(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^4} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\sigma^3} = \frac{12(x-\theta)^2}{\sigma^5(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^2} - \frac{2}{\sigma^3} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\varepsilon\partial\sigma^2} = -\frac{6(x-\theta)^2\text{sgn}(x-\theta)}{\sigma^4(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^3} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\sigma\partial\varepsilon^2} = \frac{6(x-\theta)^2}{\sigma^3(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^4} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\varepsilon^3} = -\frac{12(x-\theta)^2\text{sgn}(x-\theta)^3}{\sigma^2(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^5} \tag{1.11}$$

şeklinde elde edilir.

EK 1.2 ESN Dağılımının θ, σ ve ε Parametreleri için Hessian Matrisi

ESN dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu için

$$log(L(\theta,\sigma,\varepsilon;x)) = nlog\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{[2^{1/2}(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)\sigma]^2} \tag{1.12}$$

log-olabilirlik fonksiyonu şeklinde elde edilir. Bu fonksiyonun Hessian matrisi

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2} & \sum_{i=1}^{n} \frac{-2(x_i-\theta)}{\sigma^3(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2} & \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i-\theta)\text{sgn}(x_i-\theta)}{\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^3} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{-2(x_i-\theta)}{\sigma^3(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2} & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3(x_i-\theta)^2}{\sigma^4(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2} & \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i-\theta)^2\text{sgn}(x_i-\theta)}{\sigma^3(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^3} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i-\theta)\text{sgn}(x_i-\theta)}{\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^3} & \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i-\theta)^2\text{sgn}(x_i-\theta)}{\sigma^3(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^3} & \sum_{i=1}^{n} -\frac{3(x_i-\theta)^2}{\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^4} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

şeklindedir. Kısaca H_{ESN} ile gösterilmektedir.

EK 1.3 ESt Dağılımının θ, σ ve ε Parametrelerinin ML Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri için Koşul

ESt dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{ESt}(x) = \frac{c(\nu)}{\sigma}\left[1+\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x-\theta)\varepsilon)}\right)^2\right]^{-(\nu+1)/2} \tag{1.14}$$

olarak verilmişti. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması olan $logf$ fonksiyonu kullanılarak θ, σ ve ε parametreleri için kısmi türevler

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\theta^3} = -\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(\frac{12(x-\theta)}{\nu^2\sigma^4(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^4\left(\frac{(x-\theta)^2}{\nu(\sigma(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon))^2}+1\right)^2}\right) \tag{1.15}$$

$$+\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(\frac{16(x-\theta)^3}{\nu^3\sigma^6(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^6\left(\frac{(x-\theta)^2}{\nu(\sigma(1-\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon))^2}+1\right)^3}\right) \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\sigma\partial\theta^2} = \frac{2\nu(\nu+1)\sigma(\text{sgn}(x-\theta)\varepsilon-1)^2[-3(x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2]}{((x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2)^3} \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\varepsilon\partial\theta^2} = \frac{2\nu(\nu+1)\sigma^2(\varepsilon-sgn(x-\theta))[-3(x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2]}{((x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2)^3} \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\sigma^2\partial\theta} = \frac{-2\nu(\nu+1)(x-\theta)(1-sgn(x-\theta)\varepsilon)^2[(x-\theta)^2-3\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2]}{((x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2)^3} \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\theta\partial\sigma\partial\varepsilon} = \frac{4\nu(\nu+1)\sigma(x-\theta)\mathrm{sgn}(x-\theta)(1-sgn(x-\theta)\varepsilon)}{((x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2)^3[(x-\theta)^2-\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2]^{-1}} \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\theta\partial\varepsilon^2} = \frac{-2\nu(\nu+1)\sigma^2(x-\theta)[(x-\theta)^2-3\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2]}{((x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2)^3} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 logf}{\partial\sigma^3} = & \frac{\nu+1}{2}\frac{16(x-\theta)^6}{\nu^3\sigma^9(1-\mathrm{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^6(\frac{(x-\theta)^2}{\nu(\sigma(1-\varepsilon\mathrm{sgn}(x-\theta)))^2}+1)^3} \\ & -\frac{\nu+1}{2}\frac{36(x-\theta)^4}{\nu^2\sigma^7(1-\varepsilon\mathrm{sgn}(x-\theta))^4\left(\frac{(x-\theta)^2}{\nu(\sigma(1-\varepsilon\mathrm{sgn}(x-\theta)))^2}+1\right)^2} \\ & -\frac{\nu+1}{2}\frac{24(x-\theta)^2}{\nu\sigma^5(1-\varepsilon\mathrm{sgn}(x-\theta))^2\left(\frac{(x-\theta)^2}{\nu(\sigma(1-\varepsilon\mathrm{sgn}(x-\theta)))^2}+1\right)}-\frac{2}{\sigma^3}\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\varepsilon\partial\sigma^2} = \frac{2\nu(\nu+1)(x-\theta)^2\mathrm{sgn}(x-\theta)(1-sgn(x-\theta)\varepsilon)}{((x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2)^3[(x-\theta)^2-3\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2]^{-1}} \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial^3 logf}{\partial\sigma\partial\varepsilon^2} = \frac{-2\nu(\nu+1)\sigma(x-\theta)^2[(x-\theta)^2-3\nu\sigma^2(1-sgn(x-\theta)\varepsilon)^2]}{((x-\theta)^2+\nu(\sigma(1-sgn(x-\theta)\varepsilon))^2)^3} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 logf}{\partial\varepsilon^3} = & -\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(\frac{16(x-\theta)^6\mathrm{sgn}(x-\theta)}{\nu^3\sigma^6(1-\mathrm{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^9\left(\frac{(x-\theta)^2}{\nu(\sigma(1-\mathrm{sgn}(x-\theta)\varepsilon))^2}+1\right)^3}\right) \\ & +\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(\frac{36(x-\theta)^4\mathrm{sgn}(x-\theta)}{\nu^2\sigma^4(1-\mathrm{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^7\left(\frac{(x-\theta)^2}{\nu(\sigma(1-\mathrm{sgn}(x-\theta)\varepsilon))^2}+1\right)^2}\right) \\ & -\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{24(x-\theta)^2\mathrm{sgn}(x-\theta)^3}{\nu\sigma^2(1-\mathrm{sgn}(x-\theta)\varepsilon)^5\left(\frac{(x-\theta)^2}{\nu(\sigma(1-\mathrm{sgn}(x-\theta)\varepsilon))^2}+1\right)}\right)\end{aligned} \tag{1.25}$$

şeklinde elde edilir.

EK 1.4 ESt Dağılımının θ, σ ve ε Parametreleri için Hessian Matrisi

ESt dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu için

$$log(L) = -nlog(\sigma)+nlog(c(\nu))+\sum_{i=1}^{n} log\left[1+\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu[(1-sign(x_i-\theta)\varepsilon)\sigma]^2}\right]^{-(\frac{\nu+1}{2})} \tag{1.26}$$

log-olabilirlik fonksiyonu şeklinde elde edilir. Bu fonksiyonun Hessian matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
H_{ESt}(1,1) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^2}{\nu^2\sigma^4(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^4\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2} \\
&\quad -\frac{2\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)} \qquad (1.27)\\
H_{ESt}(1,2) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^3}{\nu^2\sigma^5(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^4\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2} \\
&\quad -\frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)}{\nu\sigma^3(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)} \\
H_{ESt}(1,3) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)\text{sgn}(x_i-\theta)}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^3\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)} \\
&\quad -\frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^3\text{sgn}(x_i-\theta)}{\nu^2\sigma^4(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^5\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2} \\
H_{ESt}(2,1) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^3}{\nu^2\sigma^5(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^4\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2} \\
&\quad -\frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)}{\nu\sigma^3(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)} \\
H_{ESt}(2,2) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2}+\frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^4}{\nu^2\sigma^6(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^4\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2} \\
&\quad -\frac{6\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^4(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)} \\
H_{ESt}(2,3) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^2\text{sgn}(x_i-\theta)}{\nu\sigma^3(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^3\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)} \\
&\quad -\frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^4\text{sgn}(x_i-\theta)}{\nu^2\sigma^5(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^5\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_{ESt}(3,1) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)\text{sgn}(x_i-\theta)}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^3\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)} \\
&\quad -\frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^3\text{sgn}(x_i-\theta)}{\nu^2\sigma^4(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^5\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2} \\
H_{ESt}(3,2) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^2\text{sgn}(x_i-\theta)}{\nu\sigma^3(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^3\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)} \\
&\quad -\frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^4\text{sgn}(x_i-\theta)}{\nu^2\sigma^5(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^5\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2} \\
H_{ESt}(3,3) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^4}{\nu^2\sigma^4(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^6\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)^2} \\
&\quad -\frac{6\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^4\left(\frac{(x_i-\theta)^2}{\nu\sigma^2(1-\text{sgn}(x_i-\theta)\varepsilon)^2}+1\right)}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

EK 1.5 Tahmin Denkleminin Beklenen Değerinin Sıfır Olduğuna İlişkin İspat

Düzgünlük koşulları sağlanmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x,\tau)dx = c(\tau)$$

dır. Burada her iki taraf $c(\tau)$ ifadesine bölünürse

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c(\tau)} f^*(x,\tau)dx = 1$$

ifadesine ulaşılır. Burada $f(x,\tau) = \frac{1}{c(\tau)} f^*(x,\tau)$ dır. Herhangi bir ψ fonksiyonu için

$$E(\psi(X,\tau)) = 0$$

olduğu gösterilecektir. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\tau)dx = 1$ olarak elde edilmişti.

Düzgünlük koşulları sağlandığı varsayılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\tau} f(x,\tau)dx = 0$$

dır ve denk bir şekilde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\tau}(-log(f(x,\tau))f(x,\tau)dx = 0$$

ifadesine ulaşılır. $-log(f(x,\tau) = \rho(x,\tau)$ olsun ve $\psi(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\rho(x,\tau)$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,\tau)f(x,\tau)dx = 0$$

olarak elde edilir. Burada oluşturulan ρ ve ψ fonksiyonlarının simetrik veya asimetrik olmasına gerek yoktur. Tahmin denklemi bu durumu sağlar. Benzer şekilde örneklem gösterimi ile $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i,\hat{\tau}) = 0$ olarakta yazılabilir. Tahmin denklemleri Godambe (1960, 1978) tarafından önerilmiştir.

EK 2. θ, σ ve ε Parametrelerinin Asimetrik M-Tahmin Edicilerinin Asimptotik Özellikleri için Koşullar

İlgili beklenen değerler elde edilirken aşağıdaki ifadelerden yararlanılmaktadır.

$$\Gamma(s) = \Gamma(s,\alpha) + \gamma(s,\alpha) \tag{2.1}$$

olduğu bilinmektedir. Bu fonksiyonda ilgili değişken dönüştürmeleri yapılarak aşağıdaki integraller elde edilir.

$\int_0^\infty y^{\alpha s} e^{-(py)^\alpha} \mathrm{d}y = \frac{1}{p^{\alpha s+1}\cdot\alpha} \cdot \Gamma(s+\frac{1}{\alpha})$, $\int_0^k y^{\alpha s} e^{-(py)^\alpha} \mathrm{d}y = \frac{1}{p^{\alpha s+1}\cdot\alpha} \cdot \gamma(s+\frac{1}{\alpha},(pk)^\alpha)$,
$\int_k^\infty y^{\alpha s} e^{-(py)^\alpha} \mathrm{d}y = \frac{1}{p^{\alpha s+1}\cdot\alpha} \cdot \Gamma(s+\frac{1}{\alpha},(pk)^\alpha)$, $\int_{-\infty}^0 y^{\alpha s} e^{-(-py)^\alpha} \mathrm{d}y = \frac{(-1)^{-\alpha s}}{p^{\alpha s+1}\cdot\alpha} \cdot \Gamma(s+\frac{1}{\alpha})$,
$\int_{-k}^0 y^{\alpha s} e^{-(-py)^\alpha} \mathrm{d}y = \frac{(-1)^{-\alpha s}}{p^{\alpha s+1}\cdot\alpha} \cdot \gamma(s+\frac{1}{\alpha},(pk)^\alpha)$,
$\int_{-\infty}^{-k} y^{\alpha s} e^{-(-py)^\alpha} \mathrm{d}y = \frac{(-1)^{-\alpha s}}{p^{\alpha s+1}\cdot\alpha} \cdot \Gamma(s+\frac{1}{\alpha},(pk)^\alpha)$.

EK 2.1 θ, σ ve ε Parametreleri için Asimetrik M-tahmin Edicilerinin Tutarlılığı için 1. Koşul

$\tau = (\theta,\sigma,\varepsilon)$ parametre vektörünü göstermek üzere $u = \frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x-\theta)\varepsilon)}$ için

$$E_{ESN}[\rho(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(u) \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)} e^{-\frac{u^2}{2(1-sign(u)\varepsilon)^2}} du \tag{2.2}$$

integralinin çözümleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} E[\rho(X)] \quad = \quad & \frac{-c_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma(1, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) - \frac{c_1^2}{4\sqrt{\pi}(1+\varepsilon)} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{(1+\varepsilon)}{2\sqrt{\pi}} \\ & \cdot\gamma(\frac{3}{2}, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{(1-\varepsilon)}{2\sqrt{\pi}} \cdot \gamma(\frac{3}{2}, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) + \frac{c_2}{\sqrt{2\pi}} \\ & \cdot\Gamma(1, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) - \frac{c_2^2}{4\sqrt{\pi}(1-\varepsilon)} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

EK 2.2 θ, σ ve ε Parametreleri için Asimetrik M-tahmin Edicilerinin Tutarlılığı için 2. Koşul

$\tau \in (\theta,\sigma,\varepsilon)$ parametreleri göstermek üzere $u = \frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x-\theta)\varepsilon)}$ için

$$E_{ESN}[\psi_\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\tau \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)} e^{-\frac{u^2}{2(1-sign(u)\varepsilon)^2}} du \tag{2.4}$$

integralinin çözümü aşağıda verilmektedir. Burada $\tau \in (\theta, \sigma, \varepsilon)$ parametreleri göstermek üzere $\psi_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}\rho(u)$ dır.

$$\begin{aligned} E[\psi_\theta(X)] &= \frac{-c_1}{\sigma(1+\varepsilon)^2 2\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{1}{\sigma(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}} \cdot \gamma(1, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &\quad -\frac{1}{\sigma(1-\varepsilon)\sqrt{2\pi}} \cdot \gamma(1, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) - \frac{c_2}{\sigma(1-\varepsilon)^2 2\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} E[\psi_\sigma(X)] &= \frac{c_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma(1, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) - \frac{(1+\varepsilon)}{\sigma\sqrt{\pi}} \cdot \gamma(\frac{3}{2}, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &\quad -\frac{(1-\varepsilon)}{\sigma\sqrt{\pi}} \cdot \gamma(\frac{3}{2}, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) - \frac{c_2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma(1, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} E[\psi_\varepsilon(X)] &= \frac{3c_1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma(1, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{c_1^2}{(1+\varepsilon)^2 2\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &\quad -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \gamma(\frac{3}{2}, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \gamma(\frac{3}{2}, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) \\ &\quad +\frac{3c_2}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\Gamma(1, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) - \frac{c_2^2}{(1-\varepsilon)^2 2\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

EK 2.3 θ, σ ve ε Parametreleri için A Matrisinin Elemanları

$\tau \in (\theta, \sigma, \varepsilon)$ parametreleri göstermek üzere $u = \frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x-\theta)\varepsilon)}$ için

$$E_{ESN}[\psi_\tau \psi_\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\tau \psi_\tau \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)} e^{-\frac{u^2}{2(1-sign(u)\varepsilon)^2}} du \quad (2.8)$$

integralinin çözümleri aşağıda verilmektedir. $\tau \in (\theta, \sigma, \varepsilon)$ parametreleri göstermek üzere $\psi_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}\rho(u)$ dır.

$$\begin{aligned} E[\psi_\theta^2(X)] &= \frac{c_1^2}{\sigma^2(1+\varepsilon)^5 2\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{1}{\sigma^2(1+\varepsilon)^3\sqrt{\pi}} \cdot \gamma(\frac{3}{2}, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &\quad +\frac{1}{\sigma^2(1-\varepsilon)^3\sqrt{\pi}} \cdot \gamma(\frac{3}{2}, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) + \frac{c_2^2}{\sigma^2(1-\varepsilon)^5 2\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} E[\psi_\sigma(X)\psi_\theta(X)] &= \frac{-c_1^2}{\sigma^2(1+\varepsilon)^3\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma(1, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) - \frac{2}{\sigma^2(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}} \cdot \gamma(2, \frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &\quad +\frac{2}{\sigma^2(1-\varepsilon)\sqrt{2\pi}} \cdot \gamma(2, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) + \frac{c_2^2}{\sigma^2(1-\varepsilon)^3\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma(1, \frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$
\begin{aligned}
E[\psi_\varepsilon(X)\psi_\theta(X)] &= \frac{-3c_1^2}{\sigma(1+\varepsilon)^4\sqrt{2\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})-\frac{c_1^3}{\sigma(1+\varepsilon)^5 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})\\
&-\frac{2\sqrt{2}}{\sigma(1+\varepsilon)^2\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(2,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})-\frac{2\sqrt{2}}{\sigma(1-\varepsilon)^2\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(2,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2})\\
&-\frac{3c_2^2}{\sigma(1-\varepsilon)^4\sqrt{2\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2})+\frac{c_2^3}{\sigma(1-\varepsilon)^5 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}),
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
E[\psi_\sigma^2(X)] &= \frac{c_1^2}{\sigma^2(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{3}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})+\frac{2(1+\varepsilon)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{5}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})\\
&+\frac{2(1-\varepsilon)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{5}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2})+\frac{c_2^2}{\sigma^2(1-\varepsilon)\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{3}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}),
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

$$
\begin{aligned}
E[\psi_\varepsilon(X)\psi_\sigma(X)] &= \frac{3c_1^2}{\sigma(1+\varepsilon)^2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{3}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})+\frac{c_1^3}{\sigma(1+\varepsilon)^3\sqrt{2\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})\\
&+\frac{4}{\sigma\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{5}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})-\frac{4}{\sigma\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{5}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2})\\
&-\frac{3c_2^2}{\sigma(1-\varepsilon)^2\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{3}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2})+\frac{c_2^3}{\sigma(1-\varepsilon)^3\sqrt{2\pi}}\Gamma(1,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}),
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

$$
\begin{aligned}
E[\psi_\varepsilon^2(X)] &= \frac{9c_1^2}{(1+\varepsilon)^3\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{3}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})+\frac{3\sqrt{2}c_1^3}{(1+\varepsilon)^4\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})\\
&+\frac{c_1^4}{(1+\varepsilon)^5 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})+\frac{8}{(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{5}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2})\\
&+\frac{8}{(1-\varepsilon)\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{5}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2})+\frac{9c_2^2}{(1-\varepsilon)^3\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{3}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2})\\
&-\frac{3\sqrt{2}c_2^3}{(1-\varepsilon)^4\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2})+\frac{c_2^4}{(1-\varepsilon)^5 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}).
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

EK 2.4 θ,σ ve ε Parametreleri için B Matrisinin Elemanları

$\tau\in(\theta,\sigma,\varepsilon)$ parametreleri göstermek üzere $u=\frac{x-\theta}{\sigma(1-sign(x-\theta)\varepsilon)}$ için

$$
E_{ESN}[\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_\tau]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_\tau\frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)}e^{-\frac{u^2}{2(1-sign(u)\varepsilon)^2}}du \tag{2.15}
$$

integralinin çözümleri aşağıda verilmektedir.

$$E[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_\theta(X)] = \frac{1}{(1+\varepsilon)^3\sigma^2 2\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{1}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{1}{(1-\varepsilon)^3\sigma^2 2\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{1}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} E[\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi_\theta(X)] &= \frac{c_1}{\sigma^2(1+\varepsilon)^2 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma^2(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(1,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &+\frac{\sqrt{2}}{\sigma^2(1-\varepsilon)\sqrt{\pi}}\gamma(1,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) + \frac{c_2}{\sigma^2(1-\varepsilon)^2 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \quad (2.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\theta(X)] &= \frac{3c_1}{\sigma(1+\varepsilon)^3 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) - \frac{2\sqrt{2}}{\sigma(1+\varepsilon)^2\sqrt{\pi}}\gamma(1,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &-\frac{2\sqrt{2}}{\sigma(1-\varepsilon)^2\sqrt{\pi}}\gamma(1,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) - \frac{3c_2}{\sigma(1-\varepsilon)^3 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \quad (2.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi_\sigma(X)] &= -\frac{\sqrt{2}c_1}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{3(1+\varepsilon)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{3}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &+\frac{3(1-\varepsilon)}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{3}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) + \frac{\sqrt{2}c_2}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \quad (2.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\sigma(X)] &= \frac{-3c_1}{\sigma(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{4}{\sigma\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{3}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &-\frac{4}{\sigma\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{3}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) - \frac{3c_2}{\sigma(1-\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}), \quad (2.20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\varepsilon(X)] &= \frac{-6\sqrt{2}c_1}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(1,\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) - \frac{3c_1^2}{(1+\varepsilon)^3 2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) \\ &+\frac{10}{(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{3}{2},\frac{c_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}) + \frac{10}{(1-\varepsilon)\sqrt{\pi}}\cdot\gamma(\frac{3}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) \\ &+\frac{6\sqrt{2}c_2}{(1-\varepsilon)^2\sqrt{\pi}}\Gamma(1,\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}) - \frac{3c_2^2}{(1-\varepsilon)^3 2\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2},\frac{c_2^2}{2(1-\varepsilon)^2}). \quad (2.21)\end{aligned}$$

c_1 ve c_2 ayarlama katsayılarıdır. $\varepsilon \in (-1,1)$ çarpıklık parametresidir.

EK 3. θ, σ ve ε Parametrelerinin Asİmetrik M-Tahmin Edicileri, M ve ML Tahmin Edicileri için IRA Kodları

EK 3.1 Asimetrik M-tahmin Edicilerinin IRA Kodları

```
Farkesh=5;k=2;ktesh=0;
while norm(Farkesh) > iter
thfn(k)=wESHth(epfn(k-1),thfn(k-1),sgfn(k-1),n,na1,c1(t),c2(t),x);
sgfn(k)=wESHsg(epfn(k-1),thfn(k),sgfn(k-1),n,na1,c1(t),c2(t),x);
epfn(k)=wESHep(epfn(k-1),thfn(k),sgfn(k),n,na1,c1(t),c2(t),x);
 fthfnesh(k)=thfn(k)-thfn(k-1);
  thfn(k-1)=thfn(k);
 fsgfnesh(k)=sgfn(k)-sgfn(k-1);
  sgfn(k-1)=sgfn(k);
 fepfnesh(k)=epfn(k)-epfn(k-1);
  epfn(k-1)=epfn(k);
Farkesh=[fthfnesh(k) fsgfnesh(k) fepfnesh(k)];
ktesh=ktesh+1;

function fESHthsgep=wESHth(me,m,sg,n,na1,c1,c2,x)
sspm1=0;ssdm1=0;sspm2=0;ssdm2=0;sspm3=0;ssdm3=0;sspm4=0;ssdm4=0;
wt=zeros(1,n+na1);
for i=1:length(x)
if x(i) < c1
    wt(i)=(c1/(1+me)^2)*((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))/(x(i)-m));
    sspm1=sspm1+((wt(i)*x(i))/((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))^2));
    ssdm1=ssdm1+(wt(i)/((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))^2));
     elseif x(i) >= c1 && x(i) < 0
    wt(i)=1/(1+me)^2;
    sspm2=sspm2+((wt(i)*x(i))/((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))^2));
    ssdm2=ssdm2+(wt(i)/((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))^2));
     elseif x(i) >= 0 && x(i) <= c2
    wt(i)=1/(1-me)^2;
```

```
    sspm3=sspm3+((wt(i)*x(i))/((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))^2));
    ssdm3=ssdm3+(wt(i)/((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))^2));
    elseif x(i) > c2
    wt(i)=(c2/(1-me)^2)*((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))/(x(i)-m));
    sspm4=sspm4+((wt(i)*x(i))/((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))^2));
    ssdm4=ssdm4+(wt(i)/((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))^2));
    end
end
m=((sspm1+sspm2+sspm3+sspm4)/(ssdm1+ssdm2+ssdm3+ssdm4));
fESHthsgep=m;

function fESHthsgep=wESHsg(me,m,sg,n,na1,c1,c2,x)
sq1=0;sq2=0;sq3=0;sq4=0;
wt=zeros(1,n+na1);
for i=1:length(x)
if x(i) < c1
    wt(i)=(c1/(1+me)^2)*((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))/(x(i)-m));
    sq1=sq1+((wt(i)*(x(i)-m)^2)/(1-sign(x(i)-m)*me)^2);
    elseif x(i) >= c1 && x(i) < 0
    wt(i)=1/(1+me)^2;
    sq2=sq2+((wt(i)*(x(i)-m)^2)/(1-sign(x(i)-m)*me)^2);
    elseif x(i) >= 0 && x(i) <= c2
    wt(i)=1/(1-me)^2;
    sq3=sq3+((wt(i)*(x(i)-m)^2)/(1-sign(x(i)-m)*me)^2);
     elseif x(i) > c2
    wt(i)=(c2/(1-me)^2)*((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))/(x(i)-m));
    sq4=sq4+((wt(i)*(x(i)-m)^2)/(1-sign(x(i)-m)*me)^2);
    end
end
sg=(sqrt((sq1+sq2+sq3+sq4)/length(x)));
fESHthsgep=sg;

function fESHthsgep=wESHep(me,m,sg,n,na1,c1,c2,x)
```

```
sep1=0;sed1=0;sep2=0;sed2=0;sep3=0;sed3=0;sep4=0;sed4=0;
wt=zeros(1,n+na1);
for i=1:length(x)
if x(i) < c1
    wt(i)=(c1/(1+me)^2)*((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))/(x(i)-m));
    sep1=sep1+((sign(x(i)-m)/(1-sign(x(i)-m)*me)^2)
    -((wt(i)*(x(i)-m)^2*sign(x(i)-m))/(sg^2*(1-sign(x(i)-m)*me)^3)));
    sed1=sed1+(1/((1-sign(x(i)-m)*me)^2));
    elseif x(i) >= c1 && x(i) < 0
    wt(i)=1/(1+me)^2;
    sep2=sep2+((sign(x(i)-m)/(1-sign(x(i)-m)*me)^2)
    -((wt(i)*(x(i)-m)^2*sign(x(i)-m))/(sg^2*(1-sign(x(i)-m)*me)^3)));
    sed2=sed2+(1/((1-sign(x(i)-m)*me)^2));
    elseif x(i) >= 0 && x(i) <= c2
    wt(i)=1/(1-me)^2;
    sep3=sep3+((sign(x(i)-m)/(1-sign(x(i)-m)*me)^2)
    -((wt(i)*(x(i)-m)^2*sign(x(i)-m))/(sg^2*(1-sign(x(i)-m)*me)^3)));
    sed3=sed3+(1/((1-sign(x(i)-m)*me)^2));
    elseif x(i) > c2
    wt(i)=(c2/(1-me)^2)*((sg*(1-sign(x(i)-m)*me))/(x(i)-m));
    sep4=sep4+((sign(x(i)-m)/(1-sign(x(i)-m)*me)^2)
    -((wt(i)*(x(i)-m)^2*sign(x(i)-m))/(sg^2*(1-sign(x(i)-m)*me)^3)));
    sed4=sed4+(1/((1-sign(x(i)-m)*me)^2));
    end
end
me=((sep1+sep2+sep3+sep4)/(sed1+sed2+sed3+sed4));
fESHthsgep=me;
```

EK 3.2 M-tahmin Edicilerinin IRA Kodları

```
%%Huber
FarkeshH=5;k=2;kteshH=0;
```

```
while norm(FarkeshH) > iter
thfnH(k)=wESHthH(0,thfnH(k-1),sgfnH(k-1),n,na1,-alus,alus,x);
sgfnH(k)=wESHsgH(0,thfnH(k),sgfnH(k-1),n,na1,-alus,alus,x);
 fthfneshH(k)=thfnH(k)-thfnH(k-1);
  thfnH(k-1)=thfnH(k);
 fsgfneshH(k)=sgfnH(k)-sgfnH(k-1);
  sgfnH(k-1)=sgfnH(k);
FarkeshH=[fthfneshH(k) fsgfneshH(k)];
kteshH=kteshH+1;
end
```

EK 3.3 ML Tahmin Edicilerinin IRA Kodları (ESN ve ESL)

```
Farka2=5;k=2;kta2=0;
while norm(Farka2) > itera2
thfna2(k)=wthsn(thfna2(k-1),2,sgfna2(k-1),epfna2(k-1),x);
sgfna2(k)=wsgsn(sgfna2(k-1),thfna2(k),epfna2(k-1),2,x);
epfna2(k)=wesn(2,x,thfna2(k),sgfna2(k),epfna2(k-1));
 fthfna2(k)=thfna2(k)-thfna2(k-1);
  thfna2(k-1)=thfna2(k);
 fsgfna2(k)=sgfna2(k)-sgfna2(k-1);
  sgfna2(k-1)=sgfna2(k);
 fepfna2(k)=epfna2(k)-epfna2(k-1);
  epfna2(k-1)=epfna2(k);
Farka2=[fthfna2(k) fsgfna2(k) fepfna2(k)];
 kta2=kta2+1;
end

Farka1=5;k=2;kta1=0;
while norm(Farka1) > itera1
thfna1(k)=wthsn(thfna1(k-1),1,sgfna1(k-1),epfna1(k-1),x);
sgfna1(k)=wsgsn(sgfna1(k-1),thfna1(k),epfna1(k-1),1,x);
epfna1(k)=wesn(1,x,thfna1(k),sgfna1(k),epfna1(k-1));
```

```
 fthfna1(k)=thfna1(k)-thfna1(k-1);
  thfna1(k-1)=thfna1(k);
 fsgfna1(k)=sgfna1(k)-sgfna1(k-1);
  sgfna1(k-1)=sgfna1(k);
 fepfna1(k)=epfna1(k)-epfna1(k-1);
  epfna1(k-1)=epfna1(k);
Farka1=[fthfna1(k) fsgfna1(k) fepfna1(k)];
 kta1=kta1+1;
end

function fthsn=wthsn(thb,a,sg,e,x)
n=length(x);
sp=0;sd=0;wt=zeros(1,n);z=zeros(1,n);
for i=1:n
        z(i)=abs(x(i)-thb)/sg;
        wt(i)=(a*z(i)^(a-2))/(sqrt(2)*(1-sign(x(i)-thb)*e))^a;
       sp=sp+wt(i)*x(i);
       sd=sd+wt(i);
end
thb=(sp/sd);
fthsn=thb;

function fsgsn=wsgsn(sg,th,e,a,x)
n=length(x);
t=0;
wt=zeros(1,n);z=zeros(1,n);
for i=1:n
      z(i)=abs(x(i)-th)/sg;
      wt(i)=(a*z(i)^(a-2))/(sqrt(2)*(1-sign(x(i)-th)*e))^a;
      t=t+wt(i)*(x(i)-th)^2;
end
sg=sqrt(t/n);
fsgsn=sg;
```

```
function fessn=wesn(a,x,th,sg,e)
tp=0;td=0;n=length(x);z=zeros(1,n);wt=zeros(1,n);
for i=1:n
      z(i)=abs(x(i)-th)/sg;
      wt(i)=(a*z(i)^(a-2))/(sqrt(2)*(1-sign(x(i)-th)*e))^a;
      tp=tp+(wt(i)*(x(i)-th)^2*sign(x(i)-th))/((1-sign(x(i)-th)*e)^2);
      td=td+(wt(i)*(x(i)-th)^2)/((1-sign(x(i)-th)*e)^2);
end
fesn=(tp/td);
fessn=fesn;
```

EK 3.4 ML Tahmin Edicilerinin IRA Kodları (ESt)

```
Farkest=5;k=2;ktest=0;
while norm(Farkest) > iterest
bst(k)=wthst(bst(k-1),sgst(k-1),est(k-1),v,x);
sgst(k)=wsgst(sgst(k-1),bst(k),est(k-1),v,x);
est(k)=west(est(k-1),bst(k),sgst(k),v,x);
 fbst(k)=bst(k)-bst(k-1);
  bst(k-1)=bst(k);
 fsgst(k)=sgst(k)-sgst(k-1);
  sgst(k-1)=sgst(k);
 fest(k)=est(k)-est(k-1);
  est(k-1)=est(k);
Farkest=[fbst(k) fsgst(k) fest(k)];
 ktest=ktest+1;
end

function fthst=wthst(thb,sg,ep,v,x)
n=length(x);
sp=0;sd=0;wt=zeros(1,n);z=zeros(1,n);
for i=1:n
       z(i)=(x(i)-thb)/sg;
```

```
        wt(i)=(v+1)/(v*(1-sign(x(i)-thb)*ep)^2+z(i)^2);
        sp=sp+wt(i)*x(i);
        sd=sd+wt(i);
end
thb=(sp/sd);
fthst=thb;

function fsgst=wsgst(sgb,th,ep,v,x)
t=0;n=length(x);
wt=zeros(1,n);z=zeros(1,n);
for i=1:n
        z(i)=(x(i)-th)/sgb;
        wt(i)=(v+1)/(v*(1-sign(x(i)-th)*ep)^2+z(i)^2);
        t=t+wt(i)*(x(i)-th)^2;
end
sgb=sqrt(t/n);
fsgst=sgb;

 function fesst=west(eb,th,sg,v,x)
 tp=0;td=0;n=length(x);z=zeros(1,n);wt=zeros(1,n);
 for i=1:n
        z(i)=abs(x(i)-th)/sg;
        wt(i)=(a*z(i)^(a-2))/(sqrt(2)*(1-sign(x(i)-th)*e))^a;
        tp=tp+(wt(i)*(x(i)-th)^2*sign(x(i)-th))/((1-sign(x(i)-th)*e)^2);
        td=td+(wt(i)*(x(i)-th)^2)/((1-sign(x(i)-th)*e)^2);
 end
 fest=(tp/td);
 fesst=fest;
```

EK 3.5 Regresyon Uygulamasında Asimetrik M-tahmin Edicilerinin IRA Kodları

```
Farkesh=5;k=2;ktesh=0;
while norm(Farkesh) > iter
b(:,k)=wESHregth(b(:,k-1),sg(k-1),me(k-1),c1(t),c2(t),x,z,y);
sg(k)=wESHregsg(b(:,k),me(k-1),sg(k-1),n,na1,c1(t),c2(t),x,z,y);
me(k-1)=wESHregme(b(:,k),me(k-1),sg(k),n,na1,c1(t),c2(t),x,z,y);
 fb(k)=b(k)-b(k-1);
  b(k-1)=b(k);
 fsg(k)=sg(k)-sg(k-1);
  sg(k-1)=sg(k);
 fme(k)=me(k)-me(k-1);
  me(k-1)=me(k);
Farkesh=[fb(:,k); fsg(k); fme(k)];
ktesh=ktesh+1
end

function fnwtheshreg=wESHregth(b,sg,me,c1,c2,x,z,y)
n=length(y);
idex=1;leb=length(b);wt=zeros(1,n);
 sspm1(:,idex)=zeros(leb,1);sspm2(:,idex)=zeros(leb,1);
 sspm3(:,idex)=zeros(leb,1);sspm4(:,idex)=zeros(leb,1);
 ssdm1(:,:,idex)=zeros(leb,leb);ssdm2(:,:,idex)=zeros(leb,leb);
 ssdm3(:,:,idex)=zeros(leb,leb);ssdm4(:,:,idex)=zeros(leb,leb);
 for i=1:length(y)
      if x(i) <  c1
        wt(idex,i)=((c1/(1+me)^2)*((sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))
        /(y(i)-z(i,:)*b)))/(sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))^2;
        sspm1(:,idex)=sspm1(:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*y(i);
        ssdm1(:,:,idex)=ssdm1(:,:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*z(i,:);
     elseif x(i) >= c1 && x(i) <  0
        wt(idex,i)=(1/(1+me)^2)/(sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))^2;
```

```
        sspm2(:,idex)=sspm2(:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*y(i);
        ssdm2(:,:,idex)=ssdm2(:,:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*z(i,:);
    elseif x(i) >= 0 && x(i) <= c2
        wt(idex,i)=(1/(1-me)^2)/(sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))^2;
        sspm3(:,idex)=sspm3(:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*y(i);
        ssdm3(:,:,idex)=ssdm3(:,:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*z(i,:);
    elseif x(i) > c2
        wt(idex,i)=((c2/(1-me)^2)*((sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))
        /(y(i)-z(i,:)*b)))/(sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))^2;
        sspm4(:,idex)=sspm4(:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*y(i);
        ssdm4(:,:,idex)=ssdm4(:,:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*z(i,:);
      end
 end
b=inv(ssdm1(:,:,idex)+ssdm2(:,:,idex)+ssdm3(:,:,idex)+ssdm4(:,:,idex))
*(sspm1(:,idex)+sspm2(:,idex)+sspm3(:,idex)+sspm4(:,idex));
fnwtheshreg=b;

function fESHthsgep=wESHregsg(b,me,sg,n,na1,c1,c2,x,z,y)
wt=zeros(1,n);
 idex=1;
 sq1=0;sq2=0;sq3=0;sq4=0;
 for i=1:n+na1
      if x(i) <  c1
         wt(idex,i)=((c1/(1+me)^2)*((sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))
         /(y(i)-z(i,:)*b)))
         /(((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))^2);
         sq1=sq1+(wt(idex,i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2);
     elseif x(i) >= c1 && x(i) <  0 %y(i)-z(i,:)*b
         wt(idex,i)=(1/(1+me)^2)/((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))^2;
        sq2=sq2+(wt(idex,i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2);
     elseif x(i) >= 0 && x(i) <= c2
         wt(idex,i)=(1/(1-me)^2)/((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))^2;
```

```
        sq3=sq3+(wt(idex,i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2);
    elseif x(i) > c2
         wt(idex,i)=((c2/(1-me)^2)*((sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))
         /(y(i)-z(i,:)*b)))
         /(((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))^2);
        sq4=sq4+(wt(idex,i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2);
      end
 end
 sg=(sqrt((sq1+sq2+sq3+sq4)/length(x)));
fESHthsgep=sg;

function fESHthsgep=wESHregme(b,me,sg,n,na1,c1,c2,x,z,y)
wt=zeros(1,n);
 idex=1;
sep1=0;sep2=0;sep3=0;sep4=0;sed1=0;sed2=0;sed3=0;sed4=0;
 for i=1:n+na1
      if x(i) <  c1
          wt(idex,i)=((c1/(1+me)^2)*((sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))
          /(y(i)-z(i,:)*b)));
        sep1=sep1+((sign(y(i)-z(i,:)*b)/(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^2)
        -((wt(i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2*sign(y(i)-z(i,:)*b))
        /(sg^2*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^3)));
        sed1=sed1+(1/((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^2));
     elseif x(i) >= c1 && x(i) <  0
           wt(idex,i)=(1/(1+me)^2);
        sep2=sep2+((sign(y(i)-z(i,:)*b)/(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^2)
        -((wt(i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2*sign(y(i)-z(i,:)*b))
        /(sg^2*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^3)));
        sed2=sed2+(1/((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^2));
    elseif x(i) >= 0 && x(i) <= c2
        wt(idex,i)=(1/(1-me)^2);
        sep3=sep3+((sign(y(i)-z(i,:)*b)/(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^2)
```

```
        -((wt(i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2*sign(y(i)-z(i,:)*b))
        /(sg^2*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^3)));
        sed3=sed3+(1/((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^2));
    elseif x(i) > c2
        wt(idex,i)=((c2/(1-me)^2)*((sg*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me))
        /(y(i)-z(i,:)*b)));
        sep4=sep4+((sign(y(i)-z(i,:)*b)/(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^2)
        -((wt(i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2*sign(y(i)-z(i,:)*b))
        /(sg^2*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^3)));
        sed4=sed4+(1/((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*me)^2));
      end
 end
 me=((sep1+sep2+sep3+sep4)/(sed1+sed2+sed3+sed4));
fESHthsgep=me;
```

EK 3.6 Regresyon Uygulamasında M-tahmin Edicilerinin IRA Kodları

```
FarkeshH=5;k=2;kteshH=0;
while norm(FarkeshH) > iter
bH(:,k)=wESHregthH(bH(:,k-1),sgH(k-1),0,-alus,alus,x,z,y);
sgH(k)=wESHregsgH(bH(:,k),0,sgH(k-1),n,na1,-alus,alus,x,z,y);
meH(k)=0;
 fbH(:,k)=bH(:,k)-bH(:,k-1);
  bH(:,k-1)=bH(:,k);
 fsgH(k)=sgH(k)-sgH(k-1);
  sgH(k-1)=sgH(k);
FarkeshH=[fbH(:,k); fsgH(k)];
kteshH=kteshH+1;
end
```

EK 3.7 Regresyon Uygulamasında ML tahmin Edicilerinin IRA Kodları (ESN)

```
Farka2=5;k=2;kta2=0;
```

```
while norm(Farka2) > itera2
bfna2(:,k)=wthsnrega2(bfna2(:,k-1),sgfna2(k-1),epfna2(k-1),2,z,y);
sgfna2(k)=wsgsnreg(sgfna2(k-1),bfna2(:,k),epfna2(k-1),2,z,y);
epfna2(k)=wesnreg(epfna2(k-1),bfna2(:,k),sgfna2(k),2,z,y);
  fba2(k)=bfna2(:,k)-bfna2(:,k-1);
  bfna2(:,k-1)=bfna2(:,k);
 fsgfna2(k)=sgfna2(k)-sgfna2(k-1);
  sgfna2(k-1)=sgfna2(k);
 fepfna2(k)=epfna2(k)-epfna2(k-1);
  epfna2(k-1)=epfna2(k);
Farka2=[fba2(:,k); fsgfna2(k); fepfna2(k)];
 kta2=kta2+1;
end
```

EK 3.8 Regresyon Uygulamasında ML Tahmin Edicilerinin IRA Kodları (ESL)

```
Farka1=5;k=2;kta1=0;
while norm(Farka1) > itera1
bfna1(:,k)=wthsnrega1(bfna1(:,k-1),sgfna1(k-1),epfna1(k-1),1,z,y);
sgfna1(k)=wsgsnreg(sgfna1(k-1),bfna1(:,k),epfna1(k-1),1,z,y);
epfna1(k)=wesnreg(epfna1(k-1),bfna1(:,k),sgfna1(k),1,z,y);
 fbfna1(:,k)=bfna1(:,k)-bfna1(:,k-1);
  bfna1(:,k-1)=bfna1(:,k);
 fsgfna1(k)=sgfna1(k)-sgfna1(k-1);
  sgfna1(k-1)=sgfna1(k);
 fepfna1(k)=epfna1(k)-epfna1(k-1);
  epfna1(k-1)=epfna1(k);
 Farka1=[fbfna1(:,k); fsgfna1(k); fepfna1(k)];
 kta1=kta1+1;
end

function fthsnreg=wthsnrega2(b,sg,ep,alp,z,y)
leb=length(b);
```

```
n=length(y);
b=zeros(leb,1);
idex=1;wt=zeros(1,n);u=zeros(1,n);
sspm=zeros(leb,1);ssdm=zeros(leb,leb);
for i=1:n
        u(i)=(abs(y(i)-z(i,:)*b)/sg);
        wt(idex,i)=(alp*u(i)^(alp-2))
        /((sqrt(2)*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*ep))^alp);
        sspm(:,idex)=sspm(:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*y(i);
        ssdm(:,:,idex)=ssdm(:,:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*z(i,:);
end
b(:,1)=inv(ssdm(:,:,idex))*(sspm(:,idex));
fthsnreg=b;

function fsgsnreg=wsgsnreg(sg,b,ep,alp,z,y)
n=length(y);
t=0;idex=1;wt=zeros(1,n);u=zeros(1,n);
for i=1:n
        u(i)=abs(y(i)-z(i,:)*b)/sg;
        wt(idex,i)=(alp*u(i)^(alp-2))
        /((sqrt(2)*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*ep))^alp);
        t=t+wt(idex,i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2;
end
sg=sqrt(t/n);
fsgsnreg=sg

 function fesst=wesnreg(epd,b,sgd,v,z,y)
 tp=0;td=0;n=length(x);z=zeros(1,n);wt=zeros(1,n);
 for i=1:n
       z(i)=abs(x(i)-th)/sg;
       wt(i)=(a*z(i)^(a-2))/(sqrt(2)*(1-sign(x(i)-th)*e))^a;
       tp=tp+(wt(i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2*sign(y(i)-z(i,:)*b))
```

```
      /((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*e)^2);
      td=td+(wt(i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2)/((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*e)^2);
 end
 fest=(tp/td);
 fesst=fest;
```

EK 3.9 Regresyon Uygulamasında ML Tahmin Edicilerinin IRA Kodları (ESt)

```
Farkest=5;k=2;ktest=0;
while norm(Farkest) > iterest
bst(:,k)=wthstreg(bst(:,k-1),sgst(k-1),est(k-1),v,z,y);
sgst(k)=wsgstreg(sgst(k-1),bst(:,k),est(k-1),v,z,y);
est(k)=westreg(est(k-1),bst(:,k),sgst(k),v,z,y);
 fbst(:,k)=bst(:,k)-bst(:,k-1);
  bst(:,k-1)=bst(:,k);
 fsgst(k)=sgst(k)-sgst(k-1);
  sgst(k-1)=sgst(k);
 fest(k)=est(k)-est(k-1);
  est(k-1)=est(k);
Farkest=[fbst(:,k); fsgst(k); fest(k)];
 ktest=ktest+1;
end

function fnwthstreg=wthstreg(b,sgir,epfn,v,z,y)
n=length(y);leb=length(b);
 idex=1;wt=zeros(1,n);
 sspm1(:,idex)=zeros(leb,1);ssdm1(:,:,idex)=zeros(leb,leb);
 for i=1:n
        wt(idex,i)=(v+1)/(v*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*epfn)^2
        +((y(i)-z(i,:)*b))^2/sgir^2);
        sspm1(:,idex)=sspm1(:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*y(i);
        ssdm1(:,:,idex)=ssdm1(:,:,idex)+wt(idex,i)*z(i,:)'*z(i,:);
 end
```

```
b=inv(ssdm1(:,:,idex))*(sspm1(:,idex));
fnwthstreg=b;

function fsgstreg=wsgstreg(sgb,b,ep,v,z,y)
n=length(y);
t=0;idex=1;
wt=zeros(1,n);
for i=1:n
        wt(idex,i)=(v+1)/(v*(1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*ep)^2
        +((y(i)-z(i,:)*b))^2/sgb^2);
        t=t+wt(idex,i)*((y(i)-z(i,:)*b))^2;
end
sgb=sqrt(t/n);
fsgstreg=sgb;

 function fesst=westreg(eb,b,sg,v,z,y)
 tp=0;td=0;n=length(x);z=zeros(1,n);wt=zeros(1,n);
 for i=1:n
       z(i)=abs(x(i)-th)/sg;
       wt(i)=(a*z(i)^(a-2))/(sqrt(2)*(1-sign(x(i)-th)*e))^a;
       tp=tp+(wt(i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2*sign(y(i)-z(i,:)*b))
       /((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*e)^2);
       td=td+(wt(i)*(y(i)-z(i,:)*b)^2)/((1-sign(y(i)-z(i,:)*b)*e)^2);
 end
 fest=(tp/td);
 fesst=fest;
```

EK 3.10 ESN Dağılımından Elde Edilen Log-olabilirlik Fonksiyonu için Hessian Matrisinin Sayısal Olarak Elde Edilmesine İlişkin Kod

```
function ozdegHa2=hessianesepa2(x,t,s,e)
n=length(x);
h11=0;h12=0;h13=0;h22=0;h23=0;h33=0;
```

```
for i=1:n
h11=h11+(-1/((1-sign(x(i)-t)*e)*s)^2);
h12=h12+((-2*(x(i)-t))/(s^3*(1-sign(x(i)-t)*e)^2));
h13=h13+((2*(x(i)-t)*sign(x(i)-t))/(s^2*(1-sign(x(i)-t)*e)^3));
h22=h22+(1/s^2-((3*(x(i)-t)^2)/(s^4*(1-sign(x(i)-t)*e)^2)));
h23=h23+((2*(x(i)-t)^2*sign(x(i)-t))/(s^3*(1-sign(x(i)-t)*e)^3));
h33=h33+((-3*(x(i)-t)^2)/(s^2*(1-sign(x(i)-t)*e)^4));
end
h21=h12;h31=h13;h32=h23;
Ha2=[h11 h12 h13;h21 h22 h23;h31 h32 h33];
ozdegHa2=eig(Ha2);
```

EK 3.11 ESt Dağılımından Elde Edilen Log-olabilirlik Fonksiyonu için Hessian Matrisinin Sayısal Olarak Elde Edilmesine İlişkin Kod

```
function ozdegHa2=hessianfest(x,t,s,e,v)
n=length(x);
h11=0;h12=0;h13=0;h22=0;h23=0;h33=0;
vf=v/2+1/2;
xf=zeros(1,n);ef=zeros(1,n);sn=zeros(1,n);asa=zeros(1,n);
for i=1:n
xf(i)=(x(i)-t);
ef(i)=(1-sign(x(i)-t)*e);
sn(i)=sign(x(i)-t);
asa(i)=v*s^2*(1-sign(x(i)-t)*e)^2;
h11=h11+(((4*xf(i)^2*vf)/(v^2*s^4*ef(i)^4*(1+xf(i)^2
/(v*s^2*ef(i)^2))^2))-((2*vf)/(v*s^2*ef(i)^2*(1+xf(i)^2
/(v*s^2*ef(i)^2)))));
h12=h12+(((4*xf(i)^3*vf)/(v^2*s^5*ef(i)^4*(1+xf(i)^2
/(v*s^2*ef(i)^2))^2))-((4*xf(i)*vf)/(v*s^3*ef(i)^2
*(1+xf(i)^2/(v*s^2*ef(i)^2)))));
h13=h13+(((-4*xf(i)^3*vf*sn(i))/(v^2*s^4*ef(i)^5
*(1+xf(i)^2/asa(i))^2))+((4*xf(i)*vf*sn(i))
```

```
/(v*s^2*ef(i)^3*(1+xf(i)^2/asa(i)))));
h22=h22+(1/s^2+((4*xf(i)^4*vf)/(v^2*s^6*ef(i)
^4*(1+xf(i)^2/asa(i))^2))-((6*xf(i)^2*vf)
/(v*s^4*ef(i)^2*(1+xf(i)^2/asa(i)))));
h23=h23+(((-4*xf(i)^4*vf*sn(i))/(v^2*s^5*ef(i)
^5*(1+xf(i)^2/asa(i))^2))+((4*xf(i)^2*vf*sn(i))
/(v*s^3*ef(i)^3*(1+xf(i)^2/asa(i)))));
h33=h33+(((4*xf(i)^4*vf)/(v^2*s^4*ef(i)^6
*(1+xf(i)^2/asa(i))^2))-((6*xf(i)^2*vf)
/(v*s^2*ef(i)^4*(1+xf(i)^2/asa(i)))));
end
h21=h12;h31=h13;h32=h23;
Ha2=[h11 h12 h13;h21 h22 h23;h31 h32 h33];
ozdegHa2=eig(Ha2);
```

EK 3.12 A Matrisinin Elemanlarının Maple 18 Ortamındaki Kodları

```
j11:=(c1^2/(s^2*(1+e)^5*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
+(GAMMA(3/2)-GAMMA(3/2,c1^2/(2*(1+e)^2)))/(s^2*(1+e)^3*Pi^0.5)
+(GAMMA(3/2)-GAMMA(3/2,c2^2/(2*(1-e)^2)))/(s^2*(1-e)^3*Pi^0.5)
+(c2^2/(s^2*(1-e)^5*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c2^2/(2*(1-e)^2)):
j12:=(-c1^2/(s^2*(1+e)^3*sqrt(2*Pi)))*GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2))
-(2/(s^2*(1+e)*sqrt(2*Pi)))*(GAMMA(2)-GAMMA(2,c1^2/(2*(1+e)^2)))
+(2/(s^2*(1-e)*sqrt(2*Pi)))*(GAMMA(2)-GAMMA(2,c2^2/(2*(1-e)^2)))
+(c2^2/(s^2*(1-e)^3*sqrt(2*Pi)))*GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2)):
j13:=((-3*c1^2)/(s*(1+e)^4*sqrt(2*Pi)))*GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2))
-(c1^3/(s*(1+e)^5*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c1^2/(2*(1+e)^2))-((2*2^.5)
/(s*(1+e)^2*Pi^.5))*(GAMMA(2)-GAMMA(2,c1^2/(2*(1+e)^2)))-((2*2^.5)
/(s*(1-e)^2*Pi^.5))*(GAMMA(2)-GAMMA(2,c2^2/(2*(1-e)^2)))-((3*c2^2)
/(s*(1-e)^4*sqrt(2*Pi)))*GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2))+(c2^3/(s*(1-e)
^5*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c2^2/(2*(1-e)^2)):
j23:=((3*c1^2)/(s*(1+e)^2*Pi^.5))*GAMMA(3/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
```

```
+(c1^3/(s*(1+e)^3*sqrt(2*Pi)))*GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2))
+(4/(s*Pi^.5))*(GAMMA(5/2)-GAMMA(5/2,c1^2/(2*(1+e)^2)))
-(4/(s*Pi^.5))*(GAMMA(5/2)-GAMMA(5/2,c2^2/(2*(1-e)^2)))
-((3*c2^2)/(s*(1-e)^2*Pi^.5))*GAMMA(3/2,c2^2/(2*(1-e)^2))
+(c2^3/(s*(1-e)^3*sqrt(2*Pi)))*GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2)):
j22:=((c1^2)/(s^2*(1+e)*Pi^.5))*GAMMA(3/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
+((2*(1+e))/(s^2*Pi^.5))*(GAMMA(5/2)-GAMMA(5/2,c1^2
/(2*(1+e)^2)))+((2*(1-e))/(s^2*Pi^.5))*(GAMMA(5/2)
-GAMMA(5/2,c2^2/(2*(1-e)^2)))+((c2^2)/(s^2*(1-e)*Pi^.5))
*GAMMA(3/2,c2^2/(2*(1-e)^2)):
j33:=((9*c1^2)/((1+e)^3*Pi^.5))*GAMMA(3/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
+((3*2^.5*c1^3)/((1+e)^4*Pi^.5))*GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2))
+(c1^4/((1+e)^5*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
+((9*c2^2)/((1-e)^3*Pi^.5))*GAMMA(3/2,c2^2/(2*(1-e)^2))
-((3*2^.5*c2^3)/((1-e)^4*Pi^.5))*GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2))
+(c2^4/((1-e)^5*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c2^2/(2*(1-e)^2))
+(8/((1+e)*Pi^.5))*(GAMMA(5/2)-GAMMA(5/2,c1^2/(2*(1+e)^2)))
+(8/((1-e)*Pi^.5))*(GAMMA(5/2)-GAMMA(5/2,c2^2/(2*(1-e)^2))):
j21:=j12:j31:=j13:j32:=j23:
```

EK 3.13 B Matrisinin Elemanlarının Maple 18 Ortamındaki Kodları

```
d11:=(GAMMA(1/2)-GAMMA(1/2,c1^2/(2*(1+e)^2)))/((1+e)^3
*s^2*2*sqrt(Pi))+(GAMMA(1/2)-GAMMA(1/2,c2^2/(2*(1-e)^2)))
/((1-e)^3*s^2*2*sqrt(Pi)):
d12:=(c1/(s^2*(1+e)^2*2*sqrt(Pi)))*GAMMA(1/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
-(sqrt(2)/(s^2*(1+e)*Pi^0.5))*(GAMMA(1)-GAMMA(1,c1^2
/(2*(1+e)^2)))+(sqrt(2)/(s^2*(1-e)*Pi^0.5))
*(GAMMA(1)-GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2)))
+(c2/(s^2*(1-e)^2*2*sqrt(Pi)))*GAMMA(1/2,c2^2/(2*(1-e)^2)):
d13:=((3*c1)/(s*(1+e)^3*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
-((2^1.5)/(s*(1+e)^2*Pi^.5))*(GAMMA(1)
```

```
-GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2)))-((2^1.5)/(s*(1-e)^2*Pi^.5))
*(GAMMA(1)-GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2)))-((3*c2)
/(s*(1-e)^3*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c2^2/(2*(1-e)^2)):
d21:=(c1/(s^2*(1+e)^2*2*sqrt(Pi)))*GAMMA(1/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
-(sqrt(2)/(s^2*(1+e)*Pi^0.5))*(GAMMA(1)-
GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2)))+(sqrt(2)/(s^2*(1-e)*Pi^0.5))
*(GAMMA(1)-GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2)))+(c2/(s^2*(1-e)
^2*2*sqrt(Pi)))*GAMMA(1/2,c2^2/(2*(1-e)^2)):
d22:=((-2^.5*c1)/(s^2*Pi^.5))*GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2))
+((3*(1+e))/(s^2*Pi^.5))*(GAMMA(3/2)-GAMMA(3/2,c1^2/(2*(1+e)^2)))
+((3*(1-e))/(s^2*Pi^.5))*(GAMMA(3/2)-GAMMA(3/2,c2^2/(2*(1-e)^2)))
+((2^.5*c2)/(s^2*Pi^.5))*GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2)):
d23:=((-3*c1)/(s*(1+e)*sqrt(2*Pi)))*GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2))
+(4/(s*Pi^.5))*(GAMMA(3/2)-GAMMA(3/2,c1^2/(2*(1+e)^2)))
-(4/(s*Pi^.5))*(GAMMA(3/2)-GAMMA(3/2,c2^2/(2*(1-e)^2)))
-((3*c2)/(s*(1-e)*sqrt(2*Pi)))*GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2)):
d31:=d13:d32:=d23:
d33:=((-6*2^.5*c1)/((1+e)^2*sqrt(Pi)))*GAMMA(1,c1^2/(2*(1+e)^2))
-((3*c1^2)/((1+e)^3*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c1^2/(2*(1+e)^2))
+(10/((1+e)*Pi^.5))*(GAMMA(3/2)-GAMMA(3/2,c1^2/(2*(1+e)^2)))
+(10/((1-e)*Pi^.5))*(GAMMA(3/2)-GAMMA(3/2,c2^2/(2*(1-e)^2)))
+((6*2^.5*c2)/((1-e)^2*sqrt(Pi)))*GAMMA(1,c2^2/(2*(1-e)^2))
-((3*c2^2)/((1-e)^3*2*Pi^.5))*GAMMA(1/2,c2^2/(2*(1-e)^2)):
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Niyazi ÇANKAYA
Doğum Yeri : Niğde
Doğum Tarihi : 31.01.1983
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Mersin Dumlupınar Lisesi (2000)
Lisans : Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2005)
Yüksek Lisans : Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (Şubat 2007 - Haziran 2010)

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Muğla Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Araş. Gör. (2007-2010)
Uşak Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Araş. Gör. (2010-2011)
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Araş. Gör. (2011-2015)

Yayınlar (SCI)

Çankaya, M.N, Bulut, Y.M., Doğru, F.Z., Arslan, O. 2015, A Bimodal Extension of the Generalized Gamma Distribution, Revista Colombiana de Estadística, Vol. 38, 371-378.

Yeniay, Ö., İşçi, Ö., Göktaş, A., **Çankaya, M.N**. 2014. Time Scales in Least Square Method, Abstract and Applied Analysis, Volume 2014 (2014), Article ID 354237, 1-6.

Acer, N., **Çankaya, M.N.**, İşçi, Ö., Baş O., Çamurdanoğlu, M., Turgut, M. 2010. Estimation of cerebral surface area using vertical sectioning and magnetic resonance imaging: A stereological study, Elsevier: Brain Research, Vol. 1310, 29-36.

Hakemli Dergilerdeki Yayınlar

Göktaş, A., İşçi, Ö., Atmaca, S.P., **Çankaya, M.N**. 2013. Zaman Skalasında Box-Cox Regresyon Yöntemi. Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi 27 (1), 57-70.

Acer, N., Ertekin, T., Küçük, A., Babaoğlu, C., **Çankaya, M.N.**, Çamurdanoğlu M. 2008. 20-25 Yaş Arası Sağlıklı Gençlerde Gri ve Beyaz Cevher Hacimlerinin İncelenmesi: Planimetrik Çalışma. Kocatepe Tıp Dergisi, Sayı 9, 45-51.

Uluslararası Kongre Sunum

Çankaya, M.N., Yalçınkaya, A., Altındağ, Ö., 2014. An Estimation for Parameters and Volumes of R in Systematic Sampling, Complex Dynamical Systems Conference 2014, 24-26 November, Ankara.

Çankaya, M.N., Tuaç, Y., Arslan, O. 2014. Robust Estimation for the Parameters of the Distributed Lag Models Based on Heavy Tailed Skew Distributions, ICORS 2014, Halle/Saale, 10-15 August, Almanya.

Çankaya, M.N., Bulut, Y.M., Doğru, F.Z., Arslan, O. 2014. A Bimodal Extension of the Generalized Gamma Distribution, 9th International Statistics Day Symposium, ISDS'2014 (IGS 2014), 10-14 May, Antalya.

Tuaç, Y. Arslan, O., **Çankaya, M.N.** 2013. Robust Estimators for the Distributed Lag Model based on t and skew t distributions, International 8th Statistics Congress 2013, 27-30 October, Antalya.

Yalçınkaya, A., **Çankaya, M.N.**, Altındağ, Ö., Tuaç, Y. 2013. Hipotez Testlerinde Normallik Varsayımı Bozulduğunda 1. Tip Hatanın Dayanıklılığının İncelenmesi, International 8th Statistics Congress 27-30 October, Antalya.

Çankaya, M.N. 2012. A proposition for Confidence Interval in Systematic Sampling on R, 8th World Congress in Probability and Statistics, 9-14 July, Koç University, Department of Mathematics, İstanbul.

Çankaya, M.N., Acer, N., Göktaş, A., Çamurdanoğlu, M., Palancı, Ö. 2009. The Effect of Sampling in a Section Thickness on The Estimation of Cerebral Volume by The Cavalieri Principle Using Magnetic Resonance Images, The 10th European Congress of Stereology and Image Analysis, 22 - 26 June, University of Milan, Department of Mathematics, Milano, Italy.

Acer, N., Göktaş, A., **Çankaya, M.N.**, İşçi, Ö., Ergür, H. 2009. A Comparison of Gold Standard and Stereological Method in Volume Estimation on MRI, 5th Conference of the Eastern Mediterranean Region of the International Biometric Society, 10-14 May, Military Museum, İstanbul.

Ulusal Kongre Sunum

İşçi, Ö., Göktaş, A., **Çankaya, M.N**. 2009. Türkiye'de işsizlik oranlarının temel bileşenli regresyon analizi ile belirlenmesi, 6. İstatistik Kongresi, 29 Nisan-Mayıs, Antalya.

Göktaş, A., İşçi, Ö., **Çankaya, M.N**. 2009. Türkiye'de enflasyon oranının temel bileşenli L_P yöntemi ile tahmini, 6. İstatistik Kongresi, 29 Nisan- Mayıs, Antalya.

Acer, N., **Çankaya, M.N.**, İşçi, Ö., Çamurdanoğlu, M., Belen, S. 2009. Comparison of Two Methods for the Estimation of Cerebral Volume: Planimetric and Point Counting Approaches, 8. Ulusal Sinir Bilimleri Kongresi, 18-22 Nisan, Bolu.

Acer, N., **Çankaya, M.N.**, İşçi, Ö., Çamurdanoğlu, M., Usanmaz, M. 2008. Mri Kullanılarak Beyin Hacmi ve Yüzey Alanının Cavalieri Prensibine Göre Tarafsız Olarak Hesaplanması, XI. Ulusal Anatomi Kongresi, 29 Ekim - 1 Kasım, Mersin.

İşçi, Ö., Göktaş, A., **Çankaya, M.N.** 2008. Türkiye’deki Savunma Harcamalarının Ekonomik Büyüme Üzerindeki Etkisinin Sağlam Yöntemler İle Elde Edilmesi, Dokuzuncu Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, 28-30 Mayıs, Aydın.

Göktaş, A., Atmaca, M., İşçi, Ö., Atmaca, S.P., **Çankaya, M.N**. 2008. Zaman Skalasında Box-Cox Regresyon Yöntemi, Dokuzuncu Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, 28-30 Mayıs, Aydın.

Atmaca, M., İşçi, Ö., **Çankaya, M.N**. 2007. Zaman Skalasında En Küçük Kareler Yöntemi. 20. Ulusal Matematik Sempozyumu, 3-6 Eylül, Erzurum.