GENELLEŞTİRİLMİŞ HOBSON TEORİSİ

Fatma TAŞDELEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

1994

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ HOBSON TEORİSİ

Fatma TAŞDELEN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 13 / 9 / 1994 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 100 (YÜZ) not takdir edilerek

Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah ALTIN (Danışman)	Prof. Dr. Akif HACIYEV	M. Tezer Prof. Dr. Münevver TEZER

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ HOBSON TEORİSİ

Fatma TAŞDELEN

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah ALTIN

1994, sayfa : 112

Jüri : Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Prof. Dr. Akif HACIYEV
Prof. Dr. Münevver TEZER

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Legendre katsayıları, Laplace katsayıları, küresel harmonikler tanımlanmıştır. Daha sonra üç boyutlu uzayda Laplace operatörü ile ilgili Hobson ve Clerk-Maxwell teorileri verilmiştir [8], [9], [10].

İkinci bölümde p boyutlu uzayda, Laplace operatörü, Öklid uzaklığı ve homogen polinomlar arasındaki bazı bağıntılar, Hobson ve Clerk-Maxwell teorileri yardımıyla verilmiştir [5], [8], [9], [10].

Üçüncü ve dördüncü bölümler çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde, Laplace operatörü yerine ultrahiperbolik operatör, Öklid uzaklığı yerine de Lorentz uzaklığı alınması halinde, Hobson ve Clerk-Maxwell teorilerinin yine geçerli kaldığı, teoremlerle ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise $(M+m+N+n)$ -boyutlu uzayda hiperbolik-parabolik tipten lineer bir kısmi türevli denklem ele alınmıştır. Bu denklem, önce $(m+n)$ -boyutlu uzayda ultrahiperbolik tipten bir denkleme dönüştürülmüş sonra da Hobson ve Clerk-Maxwell teorilerinin bu denklem için de geçerli kaldığı gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Harmonik fonksiyon, katı küresel harmonik, yüzey küresel harmonik, homogen polinom, Laplace operatörü, ultrahiperbolik operatör, Öklid uzaklığı, Lorentz uzaklığı, hiperbolik-parabolik operatör.

ABSTRACT

Ph.. D. Thesis

GENERALIZED HOBSON THEORY

Fatma TAŞDELEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah ALTIN

1994, Page: 112

Jury : Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Prof. Dr. Akif HACIYEV
Prof. Dr. Münevver TEZER

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to definitions of Legendre coefficients, Laplace coefficients and spherical harmonics. Additionally, in three dimensional space, Hobson ve Clerk-Maxwell theories for Laplace operator are given [8], [9], [10].

In the second chapter, some relations between Laplace operator Euclidean distance and homogeneous polynomials in p dimensional space are given by using Hobson and Clerk-Maxwell theories [5], [8], [9], [10].

The third and fourth chapters are the original parts of the study. In the third chapter, Hobson and Clerk-Maxwell theories in terms of Laplace operator and Euclidean distance are expanded and proved for ultrahyperbolic operator and Lorentzian distance.

Finally, in the fourth chapter, a linear partial differential equation of hyperbolic-parabolic type in $(M+m+N+n)$ dimensional space is considered. This equation is first transformed into on ultrahyperbolic type equation in $(m+n)$-dimensional space. Then it is proved that, Hobson and Clerk-Maxwell theories are still valid for the solutions of considered equation.

KEY WORDS : Harmonic function, solid spherical harmonics, surface spherical harmonics, homogen function, Laplace operator, ultrahyperbolic operator, Euclidean distance, Lorentzian distance, hyperbolic-parabolic operator.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah ALTIN 'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

* Bu çalışma Ankara Üniversitesi Araştırma Fonu tarafından desteklenmiştir (Proje Kod. No: 92-25-00-25)

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

C	: Sürekli fonksiyonların sınıfı
$\nabla^2 = \Delta$	: Laplace operatörü
$T_n^m(x)$	: Birinci çeşit Ferrer geliştirilmiş Legendre fonksiyonu
$f_n(x, y, z)$	: n-yinci dereceden homogen polinom
$P_n(x)$	: Legendre polinomu
L	: Ultrahiperbolik operatör
$\mathcal{L}$	: Hiperbolik-parabolik tipten operatör

BÖLÜM 1

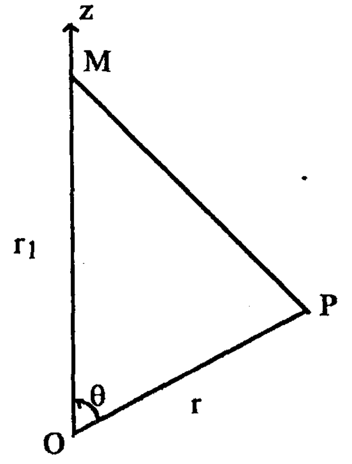
KÜRESEL HARMONİKLER ve HOMOGEN DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

1.1. Giriş

Bu bölümde, katı küresel harmonikler, yüzey küresel harmonikleri ve Laplace operatörünün bazı özellikleri tanımlanıp, daha sonra homogen bir polinom tarafından tanımlanan homogen diferensiyel operatörlerin bazı özellikleri incelenecek ve bu tip operatörler ile küresel harmonikler arasındaki bazı önemli bağıntılar Clerk-Maxwell ve Hobson teorilerindeki yöntemlerle iki farklı yoldan verilecektir.

1.2. Legendre Katsayıları

Üç boyutlu uzayda herhangi bir P noktası ve Oz ekseni üzerinde bir M noktası gözönüne alalım. Bu noktaların O orjin noktasına uzaklıkları sırasıyla $OP = r$ ve $OM = r_1$ olsunlar. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi POM açısı θ ile, $\cos\theta$ da μ ile gösterilsin. (Şekil 1.1.)



Şekil 1.1.

Bu taktirde, cosinüs teoreminden dolayı

$$(PM)^2 = r^2 - 2 r r_1 \mu + r_1^2$$

olacağından

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 r r_1 \mu + r_1^2}}$$

yazılabilir. Eğer $r < r_1$ ise bu ifade r nin artan kuvvetleri cinsinden

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - 2\frac{r}{r_1}\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

şeklinde yada daha açık olarak

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 r r_1 \mu + r_1^2}} = P_0(\mu)\frac{1}{r_1} + P_1(\mu)\frac{r}{r_1^2} + P_2(\mu)\frac{r^2}{r_1^3} + \cdots \tag{1}$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer $r > r_1$ ise, benzer durumlar dikkate alınarak $\frac{1}{PM}$ aşağıdaki şekilde seriye açılabilir.

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 r r_1 \mu + r_1^2}} = P_0(\mu)\frac{1}{r} + P_1(\mu)\frac{r_1}{r^2} + P_2(\mu)\frac{r_1^2}{r^3} + \cdots \tag{2}$$

(1) ve (2) deki $P_0(\mu), P_1(\mu), P_2(\mu), \ldots$ katsayıları μ nün polinomları olup n-yinci dereceden Legendre katsayıları veya n-yinci dereceden Legendre polinomları

olarak bilinirler. Daha sonra görüleceği gibi Legendre katsayıları yüzey küresel harmoniklerinin özel durumlarına karşılık gelirler.

1.3. Laplace Katsayıları

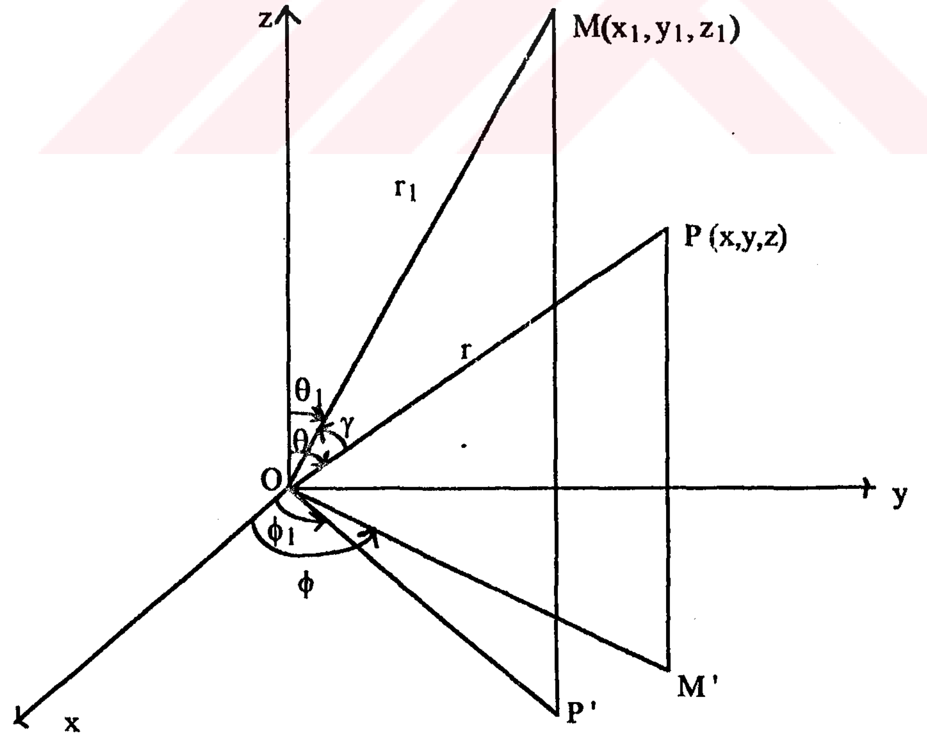
Şekil 1.1. deki P ve M noktalarını üç boyutlu uzayın herhangi iki noktası olarak yeniden gözönüne alalım. P ve M nin dik koordinatları (x, y, z) ve (x_1, y_1, z_1) olsunlar. Eğer (r, θ, ϕ) ve (r_1, θ_1, ϕ_1) ler sırasıyla bu noktalara karşılık gelen küresel koordinatlar iseler

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad x_1 = r_1\sin\theta_1\cos\phi_1$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad y_1 = r_1\sin\theta_1\sin\phi_1$$

$$z = r\cos\theta \qquad z_1 = r_1\cos\theta_1$$

yazılabilirler. Bu konumdaki POM açısı γ ile gösterilsin. (Şekil 1.2.)



Şekil 1.2.

Vektörler için skaler çarpım tanımından

$$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OP}\right|.\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\gamma = r\,r_1\cos\gamma$$

olup, buradan

$$\cos\gamma = \frac{1}{r\,r_1}\left(\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM}\right) = \frac{1}{r\,r_1}(x x_1 + y y_1 + z z_1)$$

$$= \frac{1}{r\,r_1}(r\,r_1\sin\theta\sin\theta_1\cos\phi\cos\phi_1 + r\,r_1\sin\theta\sin\theta_1\sin\phi\sin\phi_1 + r\,r_1\cos\theta\cos\theta_1)$$

$$= \sin\theta\sin\theta_1(\cos\phi\cos\phi_1 + \sin\phi\sin\phi_1) + \cos\theta\cos\theta_1$$

yani,

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\phi - \phi_1) \tag{3}$$

eşitliği elde edilir.

$\cos\gamma$ nın bu değeri dikkate alındığında $\frac{1}{PM}$ için elde edilen (1) ve (2) serileri aşağıdaki biçimde yazılabilirler.

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\,r\,r_1\cos\gamma + r_1^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{r_1^{n+1}} \quad , \quad r < r_1 \ \text{ise} \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\,r\,r_1\cos\gamma + r_1^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{r_1^n}{r^{n+1}} \quad , \quad r > r_1 \ \text{ise} \tag{5}$$

$P_n(\cos\gamma)$, θ ve ϕ değişkenlerinin bir fonksiyonu olup " n-yinci dereceden Laplace katsayısı " adını alır. $\theta_1 = 0$ olduğu zaman bu fonksiyon $P_n(\cos\theta)$ Legendre katsayısına karşılık gelir.

1.4. Küresel Harmonikler

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{6}$$

Laplace denkleminin, x,y,z değişkenlerine göre n-yinci dereceden homogen herhangi bir $V_n(x,y,z)$ çözümü " n-yinci dereceden katı küresel harmonik " olarak adlandırılır.

Örneğin, $r^{-1}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, 1, $ax+by+cz$, x^2-y^2+yz, $(z+ix)^n$ ler sırasıyla -1,0,1,2,n -yinci dereceden katı küresel harmoniklerdir. Bunları görmek için x,y ve z lere göre ikinci basamaktan türevlerini alıp, (6) da yerlerine yazmak yeterlidir.

Şimdi $\nabla^2=\Delta$ Laplace operatörünün özelliklerini içeren bazı teoremler verelim.

Teorem 1.4.1. $D\subset R^3$ ve $u,v\in C^2(D)$ olan herhangi iki fonksiyon olsunlar. O taktirde

$$\nabla^2(u\,v)=v\nabla^2u+u\nabla^2v+2(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z) \tag{7}$$

dir. Burada $u=u(x,y,z)$ ve $v=v(x,y,z)$ dir.

İspat : $\frac{\partial}{\partial x}(u\,v)=u\,v_x+v\,u_x$ ve $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u\,v)=v\,u_{xx}+u\,v_{xx}+2u_x\,v_x$

olup, simetriden dolayı

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u\,v)=v\,u_{yy}+u\,v_{yy}+2u_y\,v_y \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(u\,v)=v\,u_{zz}+u\,v_{zz}+2u_z\,v_z$$

dir. Buradan

$$\nabla^2(u\,v)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(u\,v)$$

$$=v(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+u(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz})+2(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)$$

$$=v\nabla^2u+u\nabla^2v+2(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)$$

elde edilir ki bu istenilendir.

Teorem 1.4.2. $V_n(x,y,z)\in C^2(D)$, n-yinci dereceden homogen bir polinom ve $r^2=x^2+y^2+z^2$ olsunlar. m herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\nabla^2(r^mV_n)=m(m+2n+1)r^{m-2}V_n+r^m\nabla^2V_n \tag{8}$$

dir.

İspat : Teorem 1.4.1. ile verilen (7) ifedesinde $u = r^m$ ve $v = V_n$ alırsak $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ve $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ olduklarından

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(r^m) = m\,x\,r^{m-2} \;,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m\,r^{m-4}\left(r^2 + (m-2)x^2\right)$$

olup, simetriden dolayı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = m\,r^{m-4}\left(r^2 + (m-2)y^2\right) \;,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = m\,r^{m-4}\left(r^2 + (m-2)z^2\right)$$

dir. Diğer taraftan Euler teoreminden dolayı $v = V_n(x, y, z)$, n-yinci dereceden homogen fonksiyonu için

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z} = nV_n$$

eşitliğinin sağlandığı gözönünde tutulursa

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = \frac{\partial r^m}{\partial x}\frac{\partial V_n}{\partial x} + \frac{\partial r^m}{\partial y}\frac{\partial V_n}{\partial y} + \frac{\partial r^m}{\partial z}\frac{\partial V_n}{\partial z}$$

$$= m\,r^{m-2}\left(x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z}\right) = m\,n\,r^{m-2}V_n$$

yazılabilir. Bu sonuçlar (7) de yerlerine konursa

$$\nabla^2(r^m V_n) = m\,V_n r^{m-4}\left(3r^2 + (m-2)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right) + r^m \nabla^2 V_n + 2\,m\,n\,r^{m-2}V_n$$

$$= m\,r^{m-4}\left(3\,r^2 + (m-2)r^2\right)V_n + 2\,m\,n\,r^{m-2}V_n$$

$$\nabla^2(r^m V_n) = m(m + 2n + 1)r^{m-2}V_n + r^m \nabla^2 V_n$$

elde edilir ki bu istenilen (8) eşitliğidir.

Teorem 1.4.3. (Kelvin Teoremi) Eğer V_n ; n-yinci dereceden homogen bir katı küresel harmonik ise, o taktirde $r^{-2n-1}V_n$, de -n-1 -inci dereceden homogen bir katı küresel harmoniktir.

İspat : (8) eşitliğinde, hipotezden $\nabla^2(V_n)=0$ olduğu gözönünde tutulursa

$$\nabla^2(r^m V_n)=m(m+2n+1)r^{m-2}V_n$$

bulunur. Böylece $r^m V_n$ nin Laplace denklemini sağlayabilmesi için m nin sıfır yada -2n-1 olması gerektiği görülür. O halde $r^{-2n-1}V_n$ bir katı küresel harmoniktir.

Örnek : $V_0=1$ ve $V_1=x$ fonksiyonları sırasıyla 0 ve 1-inci dereceden katı küresel harmoniklerdir.

$\frac{1}{r}=r^{-2.0-1}V_0$ ve $\frac{x}{r^3}=r^{-2.1-1}V_1$ olarak yazılabildiklerinden, $\frac{1}{r}$ ve $\frac{x}{r^3}$ fonksiyonları sırasıyla -1 ve -2 inci dereceden katı küresel harmoniklerdir.

Şimdi, yüzey küresel harmoniklerini konu alan bazı özellikleri verelim. Bu amaca yönelik önce, Laplace denkleminin (r,θ,ϕ) küresel koordinatlarında ifadesini elde edelim. Bunun için (6) denkleminde

$$x=r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y=r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z=r\cos\theta$$

dönüşümü yapılırsa

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0 \tag{9}$$

elde edilir. (9) denkleminin her iki yanı r^2 ile çarpılırsa

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0 \tag{10}$$

olur. Bu denklemin birinci yanındaki ilk iki teriminin toplamı ile üçüncü ve dördüncü terimler toplamının, sırası ile

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2r\frac{\partial V}{\partial r}=r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}$$

ve

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

şeklinde ifade edilebilecekleri dikkate alınırsa, (10) denklemi

$$r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0 \tag{11}$$

şeklinde yazılabilir.

U_n yalnızca θ ve ϕ değişkenlerinin bir fonksiyonu olmak üzere $V_n = r^n U_n$, n-yinci dereceden bir katı küresel harmonik olsun. Eğer (11) denkleminde V yerine $r^n U_n$ yazılır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra tüm terimler r^n ile bölünürse r^n ortadan kalkar ve (11) denklemi

$$n(n+1)U_n+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\phi^2}=0 \tag{12}$$

şekline dönüşür. Bu denklemde $\cos\theta$ yerine μ yazılırsa

$$n(n+1)U_n+\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\left(1-\mu^2\right)\frac{\partial U_n}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\phi^2}=0 \tag{13}$$

elde edilir.

1.5. Yüzey Küresel Harmonikleri

V_n nin r^n ile bölünmesinden elde edilen U_n fonksiyonuna n-yinci dereceden bir yüzey küresel harmonik denir. θ ve ϕ ye bağlı U_n fonksiyonunun bir yüzey küresel harmonik olabilmesi için gerek ve yeter şart (12) denklemini sağlamasıdır.

Tanımını 1.3. de verdiğimiz n-yinci dereceden Laplace katsayısı olan $P_n(\cos\gamma)$, n-yinci dereceden bir yüzey küresel harmoniktir. Bunu görmek için önce

$$T=\frac{1}{PM}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

ifadesini

$$T=\frac{1}{PM}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_1\cos\gamma+r_1^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{r_1^{n+1}}$$

formunda yazalım. (12) denkleminde U_n yerine T nin yukarıdaki eşiti yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r_1^{n+1}}\left[n(n+1)P_n(\cos\gamma)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial P_n(\cos\gamma)}{\partial\theta}\right\}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P_n(\cos\gamma)}{\partial\phi^2}\right]\equiv 0$$

elde edilir.

Nitekim bu denklem r_1 den küçük olan tüm r değerleri için sağlanır ve de r nin farklı kuvvetlerinin katsayılarının hepsi de özdeş olarak sıfır olur.

O halde,

$$n(n+1)P_n(\cos\gamma)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial P_n(\cos\gamma)}{\partial\theta}\right\}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P_n(\cos\gamma)}{\partial\phi^2}=0 \qquad (14)$$

yazılabilir. Yani $P_n(\cos\gamma)$ fonksiyonu (12) denklemini sağlar ve dolayısıyla bir yüzey küresel harmoniktir.

1.6. Geliştirilmiş Legendre Denklemi

(13) denkleminde $U_n=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ yazarak elde edilen denklemin tüm terimleri $\Theta\Phi$ ile bölünürse,

$$n(n+1)+\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\mu}\left\{\left(1-\mu^2\right)\frac{d\Theta}{d\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0$$

elde edilir. Değişkenlerin ayrılması metodu gereğince, $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$ nin değeri sabit alınabilir. Böylece, m genellikle bir tamsayı olmak üzere

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2\Phi$$

yazabiliriz ki bunun genel çözümü, A ve B keyfi sabitler olmak üzere

$$\Phi = A\cos m\phi + B\sin m\phi$$

dir. Böyle bir durumda Θ fonksiyonu da

$$\frac{d}{d\mu}\left\{\left(1-\mu^2\right)\frac{d\Theta}{d\mu}\right\} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}\Theta = 0 \qquad (15)$$

denkleminin bir çözümü olmalıdır. Bu denklem " Geliştirilmiş Legendre Denklemi " olarak bilinir. Eğer Θ , bu denklemin bir çözümü ise o taktirde $(A\cos m\phi + B\sin m\phi)\Theta$ biçimindeki her fonksiyon (12) denklemini sağlar ve bundan dolayı n-yinci dereceden bir yüzey küresel harmoniktir. Buna paralel olarak da

$$r^n(A\cos m\phi + B\sin m\phi)\Theta$$

fonksiyonu n-yinci dereceden bir katı küresel harmoniktir.

1.7. $P_n(\mu)$ nün Sıfırları

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left(\mu^2-1\right)^n$$

formülüne, $P_n(\mu)$ Legendre polinomları için Rodrigues formülü denir. Rodrigues formülünden dolayı $P_n(\mu)$ polinomunun -1 ve +1 arasındaki tüm reel μ değerleri için n tane sıfıra sahip olduğu sonucu elde edebiliriz. Gerçekten, $f(\mu) = \left(\mu^2-1\right)^n$ fonksiyonu -1 ve +1 de n katlı sıfır yerlerine sahiptir. Rolle teoreminden dolayı $f'(\mu)$ fonksiyonunun -1 ve +1 arasında en az bir sıfır yeri vardır. $f'(\mu)$ fonksiyonu -1 ve +1 de n-1 katlı, -1 ile +1 arasında sadece bir tane sıfır yerine sahiptir. Benzer şekilde $f''(\mu)$ fonksiyonu -1 ve +1 de n-2 katlı -1 ile +1 arasında 2 tane sıfır yerine sahiptir. İşleme bu şekilde devam edilirse $f^{(n)}(\mu)$ veya$P_n(\mu)$ fonksiyonunun -1 ve +1 arasında n tane sıfıra sahip olduğu görülür. $P_n(\mu)$, Legendre polinomlarının klasik özelliklerinden biri de n nin tek yada çift pozitif tamsayı olmasına göre tek fonksiyon yada çift fonksiyon özelliği taşımasıdır. Bu nedenle $P_n(\mu)$ nün sıfırları $\mu = 0$ civarında simetrik olarak yer alırlar.

Teorem 1.7.1. Eğer $z = z(x)$

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Legendre denkleminin bir çözümü ise, o taktirde

$$\left(x^2-1\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m z}{dx^m} \quad \text{ifadesi de}$$

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0$$

geliştirilmiş Legendre denkleminin bir çözümüdür.

İspat : z, Legendre denkleminin bir çözümü olduğundan

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2 z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0$$

denklemi sağlanır. Bu denklemin her iki yanının x e göre m kez türevi alınırsa (Bir çarpımın türevi için Leibnitz teoremi kullanılacak) kısaltmalardan sonra

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} + (n-m)(n+m+1)\frac{d^m z}{dx^m} = 0 \qquad (16)$$

bulunur. $\frac{d^m z}{dx^m} = z_1$ denirse (16) eşitliği

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2 z_1}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dz_1}{dx} + (n-m)(n+m+1)z_1 = 0 \qquad (17)$$

olarak yazılabilir.

$$z_2 = \left(x^2-1\right)^{\frac{m}{2}} z_1 \quad \text{yada} \quad z_1 = \left(x^2-1\right)^{-\frac{m}{2}} z_2$$

diyelim. z_1 in bu değeri (17) formülünde yerine yazılırsa

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\left\{\left(x^2-1\right)^{-\frac{m}{2}} z_2\right\} - 2(m+1)x\frac{d}{dx}\left\{\left(x^2-1\right)^{-\frac{m}{2}} z_2\right\}$$

$$+(n-m)(n+m+1)\left(x^2-1\right)^{-\frac{m}{2}} z_2 = 0$$

olur. Bu denklem açık yazıldıktan sonra $\left(x^2-1\right)^{-\frac{m}{2}}$ ile kısaltılırsa

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2z_2}{dx^2}-2x\frac{dz_2}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}z_2=0$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi z_2 Geliştirilmiş Legendre diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. Geliştirilmiş Legendre diferensiyel denklemi iki lineer bağımsız çözüme sahip olup, m nin pozitif bir tamsayı olması halinde bu çözümler

$$P_n^m(x)=\left(x^2-1\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m} \tag{18}$$

$$Q_n^m(x)=(-1)^m\left(x^2-1\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m} \tag{19}$$

lerdir. $P_n^m(x)$ ve $Q_n^m(x)$ fonksiyonları n-yinci dereceden m-yinci basamaktan geliştirilmiş Legendre fonksiyonları olarak bilinirler.

x reel ve $-1<x<1$ olduğu zaman $P_n^m(x)$ lerin yerine bazen Ferrer fonksiyonunu kullanmak daha uygundur. Bu fonksiyon

$$T_n^m(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m} \tag{20}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Teorem 1.7.2. Eğer m ve n pozitif tamsayılar $m \le n$ ise, o taktirde

$$T_n^m(\mu)=(-1)^m\frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}\left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \tag{21}$$

$$\cdot\left\{\mu^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-m-2}+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-m-4}-\ldots\right\}$$

dir.

İspat : $P_n(\mu)$ Legendre polinomları için Rodrigues formülü olarak verilen

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left(\mu^2-1\right)^n$$

bağıntısı ve (20) numaralı formül gözönünde tutulursa

$$T_n^m(\mu)=(-1)^m\left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\mu^m}\left\{\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left(\mu^2-1\right)^n\right\}$$

$$=\frac{(-1)^m\left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\left(\mu^2-1\right)^n$$

yazılabilir. Binom teoreminden dolayı

$$\left(\mu^2-1\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mu^{2n-2k}$$

olup, bu ifadenin ikinci yanının n+m kez türevi alınırsa

$$\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mu^{2n-2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\mu^{2n-2k}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m=\binom{m}{n}n!\,x^{m-n}$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\mu^{2n-2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\binom{2n-2k}{m+n}(m+n)!\,\mu^{n-2k-m}$$

$$=\binom{n}{0}\binom{2n}{m+n}(m+n)!\,\mu^{n-m}-\binom{n}{1}\binom{2n-2}{m+n}(m+n)!\,\mu^{n-2-m}+\cdots$$

$$=\frac{(2n)!}{(n-m)!}\mu^{n-m}-\frac{(2n-1)(2n)(2n-2)!\,(n-m-1)(n-m)n}{(2n)(2n-1)(n-m-1)(n-m)(n-m-2)!}\mu^{n-m-2}+\cdots$$

$$=\frac{(2n)!}{(n-m)!}\left\{\mu^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-m-2}+\cdots\right\}$$

bulunur. $\left(\mu^2-1\right)^n$ nin $(n+m)$yinci türevine eşit olan bu değer $T_n^m(\mu)$ nün son ifedesinde yerine yazılırsa

$$T_n^m(\mu)=\frac{(-1)^m\left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}\left\{\mu^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-m-2}+\cdots\right\}$$

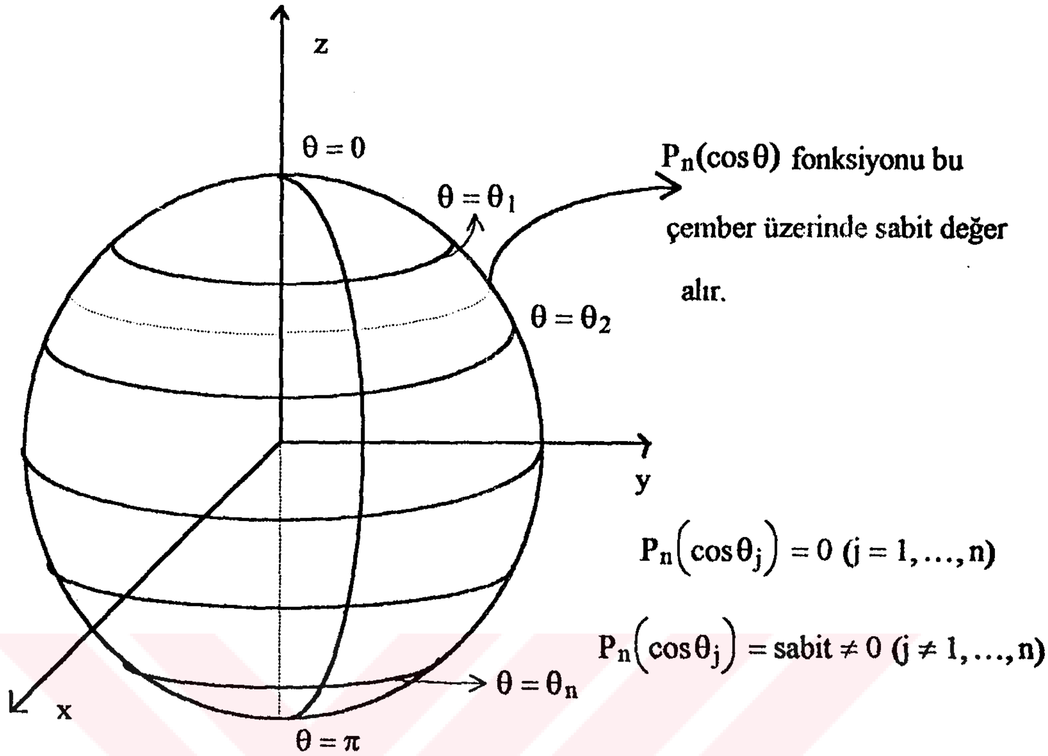
elde edilir ki bu (21) ifadesinin kendisidir.

1.8. Tam Dereceden Küresel Harmonikler

1.6. numaralı paragraftan görülmektedir ki , m ve n pozitif tamsayılar $(m \leq n)$ise

$$(A\cos m\phi + B\sin m\phi)T_n^m(\cos\theta)$$

n-yinci dereceden bir yüzey küresel harmoniktir. $m=0$ olması halinde yüzey küresel harmonik, $P_n(\cos\theta)$ Legendre katsayısının bir sabit katıdır. 1.7. de gösterildi ki $P_n(\mu)$, $-1\leq\mu\leq 1$ aralığında $\mu=0$ civarında simetrik olarak düzenlenmiş n tane sıfır yerine sahiptir. Buna bağlı olarak $P_n(\cos\theta)$ fonksiyonu da $0\leq\theta\leq\pi$ aralığında $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetrik olarak düzenlenmiş n tane sıfır yerine sahiptir. Buna göre $P_n(\cos\theta)$ fonksiyonu, $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ noktalarında kutupları olan orijin merkezli bir küre üzerinde bulunan n tane çember üzerinde sıfırlanır. Bu çemberler küre ile aynı kutuplara sahip büyük çembere (ekvator çemberine) göre simetriktirler, n tek sayı olduğu zaman büyük çember bu çember ailesinden biridir. Küre üzerinde n tane paralel çember tarafından ayrılan bölgelerin herbirine "kuşak" (zon) denir. Bu bölgelerde tanımlanan $P_n(\cos\theta)$ fonksiyonlarına da "kuşaksal" (zonal) harmonikler adı verilmektedir. (Şekil 1.3.). $P_n(\cos\theta)$lar $\theta=\theta_1,\ldots,\theta=\theta_n$ çemberleri üzerinde sıfır olmakta, Ekvatora paralel diğer çemberler üzerinde ise sıfırdan farklı sabit değerler almaktadır.



Şekil 1.3.

Eğer $0 < m < n$ ise, küresel harmonikler

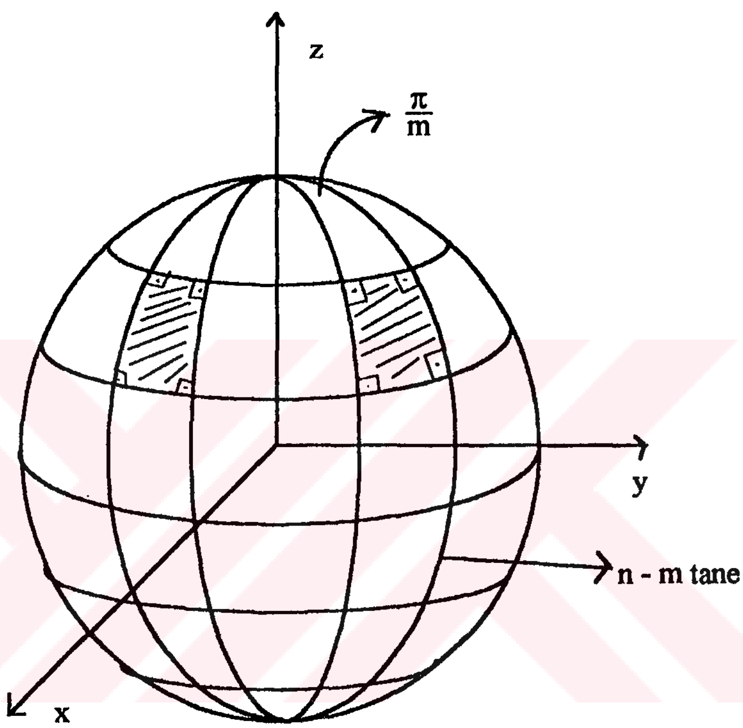
$$(A\cos m\phi + B\sin m\phi)T_n^m(\cos\theta) = (A\cos m\phi + B\sin m\phi)(-1)^m\left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\mu^m}P_n(\mu)$$

$$= (A\cos m\phi + B\sin m\phi)(-1)^m\left(\sin^2\theta\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\mu^m}P_n(\mu)$$

$$= (-1)^m\frac{1}{2^n n!}(A\cos m\phi + B\sin m\phi)\sin^m\theta\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\left(\mu^2-1\right)^n$$

şeklinde yazılabilirler. Burada sırası ile ϕ, θ ve μ ye bağlı üç çarpan vardır. $A\cos m\phi + B\sin m\phi = 0$ yani $\tan m\phi = -\frac{A}{B}$ olduğunda ϕ yi içeren çarpan sıfırdır. Bu değer küre üzerinde $\theta = 0$ kutbu boyunca m tane büyük çembere karşılık gelir. Herhangi iki ardışık çember düzlemi arasındaki açı $\frac{\pi}{m}$ olur. İkinci çarpan olan $\sin^m\theta$, $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ noktalarında sıfırlanır. μ ye bağlı olan üçüncü çarpan ise zonal harmoniklerde olduğu gibi n-m tane çember üzerinde sıfırlanır.

Böylece, küre üzerinde biri enlemden, diğeri boylamlardan oluşan iki çember ailesinin dik kesişmesiyle meydana gelen bölgelerin herbirine tesseral bölge, bu bölgelerde tanımlanan küresel harmoniklere de tesseral harmonikler adı verilmektedir (Şekil 1.4.).

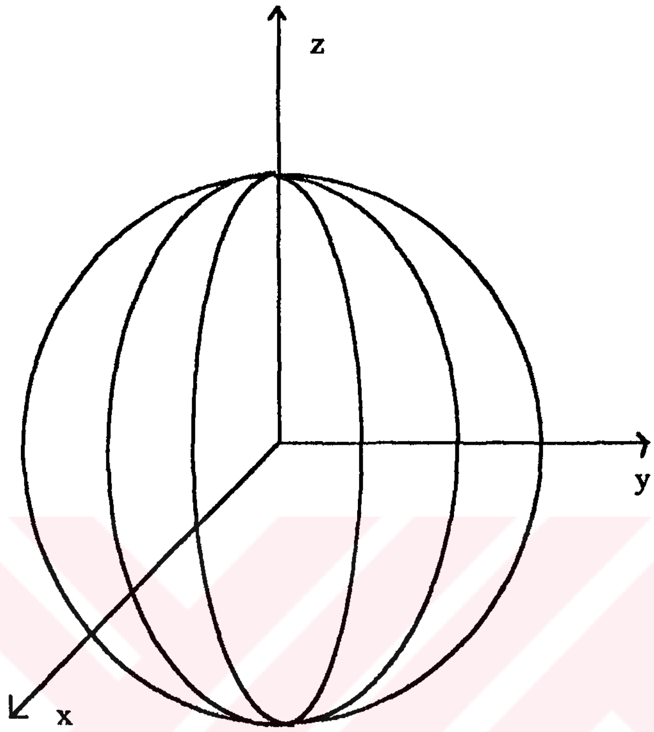


Şekil 1.4.

Eğer m = n ise küresel harmonik

$$(A\cos n\phi + B\sin n\phi)\sin^n\theta$$

biçimindedir. Bu ifade $\tan n\phi = -\frac{A}{B}$ yada $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ olduğu zaman sıfırdır. Bu durum küre üzerinde $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ noktalarına ve n büyük çembere karşılık gelir. Herhangi iki ardışık çember düzlemi arasındaki açı $\frac{\pi}{n}$ dir. Küre 2n sektör ile bölünmüştür. Bu sektörler üzerinde tanımlı yüzey küresel harmonik fonksiyonlarına "sektörel harmonikler" denilmektedir (Şekil 1.5.).



Şekil 1.5.

1.9. Hobson Teorisine Giriş

Bu kısımda, üç boyutlu uzayın değişkenleri kullanılarak homogen polinomlar ile homogen diferensiyel operatörler arasındaki ilişkileri inceleyen Hobson teorisine bir giriş yapılacaktır. İleriki bölümlerde daha yüksek boyutlu uzaylarda tekrar ele alınacak olan bu teori ile ilgili, amaca yönelik bazı teoremler bu kısımda verilecektir. Bunun için önce homogen polinomlar hakkında kısa bir bilgi vererek işe başlayalım.

Homogen Polinomlar :

n-yinci dereceden homogen herhangi bir $f_n(x, y, z)$ polinomu n bir doğal sayı olmak üzere

$$f_n(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N} A_i\, x^{p_i}\, y^{q_i}\, z^{n-p_i-q_i}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki N sayısı $1\le N\le \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ olmak üzere üç değişkenli n-yinci dereceden homogen bir polinomun içereceği terim sayısıdır. Gerçekten üç değişkenli n-yinci dereceden homogen bir polinom en fazla $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ tane terim içerir. n-yinci dereceden homogen bir polinom olan bir $f_n(x_1,\ldots,x_p)$ polinomunun terim sayısı $s(n,p)$ ile gösterilsin. $n\ge 2\,,p=2$ ise

$$f_n(x_1,x_2)=A_0x_1^0x_2^n+A_1x_1^1x_2^{n-1}+\cdots+A_nx_1^nx_2^0$$

şeklinde yazılabileceğinden $f_n(x_1,x_2)$ polinomunun terim sayısı $s(n,2)=n+1$ dir. $n\ge 2$, $p=3$ olması halinde ise

$$f_n(x_1,x_2,x_3)=[s(n,2)\ \text{tane terim}]x_3^0+[s(n-1,2)\ \text{tane terim}]x_3^1$$

$$+[s(n-2,2)\ \text{tane terim}]x_3^2+\cdots+[s(n-n,2)\ \text{tane terim}]x_3^n$$

şeklinde yazılabileceğinden $f_n(x_1,x_2,x_3)$ polinomunun terim sayısı

$$s(n,3)=[s(n,2)+s(n-1,2)+\cdots+s(0,2)]=\sum_{k=0}^{n} s(k,2)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(k+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

olur. $n\ge 2$, $p=4$ olması durumunda ise

$$f_n(x_1,x_2,x_3,x_4)=[s(n,3)\ \text{tane terim}]x_4^0+[s(n-1,3)\ \text{tane terim}]x_4^1$$

$$+[s(n-2,3)\ \text{tane terim}]x_4^2+\cdots+[s(n-n,3)\ \text{tane terim}]x_4^n$$

şeklinde yazılabileceğinden $f_n(x_1,x_2,x_3,x_4)$ polinomunun terim sayısı

$$s(n,4)=[s(n,3)+s(n-1,3)+\cdots+s(0,3)]=\sum_{k=0}^{n} s(k,3)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(k^2+3k+2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\frac{n(n+1)}{2}+2(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}(n+1)\left(2n^2+19n+12\right)$$

dir. Buna göre p değişkenli homogen bir polinomun bulunduracağı terim sayısı

$$s(n,p)=\sum_{k=0}^{n} s(k,p-1)$$

dir.

Lemma 1.9.1. Eğer $f_n(x,y,z)$ n-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)r^{-w}=(-1)^n w(w+2)\ldots(w+2n-2)\left[\frac{f_n(x,y,z)}{r^{w+2n}}+\frac{f_{n-2}(x,y,z)}{r^{w+2n-2}}+\cdots\right] \quad (22)$$

dir. İkinci yandaki terim sayısı $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ dir.

Burada

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{n çift ise}\\ \frac{n-1}{2} & \text{n tek ise}\end{cases}$$

olup, w reel bir parametredir.

İspat : n bir doğal sayı $1\leq N\leq\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ve A_i ler reel sabitler olmak üzere f_n polinomu açık olarak

$$f_n(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N} A_i x^{p_i} y^{q_i} z^{n-p_i-q_i} \quad (23)$$

şeklinde yazılabilir. Burada p_i, q_i ler $\{0,1,2,3,\ldots,n\}$ cümlesi elemanları olup,

$p_i+q_i\leq n$ dir. (23) den dolayı

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)r^{-w}=\sum_{i=1}^{N}A_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p_i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{q_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-p_i-q_i}r^{-w} \tag{24}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $r^{-w}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{w}{2}}$ nin ardışık türevleri

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p_i}r^{-w}=(-1)^{p_i}w(w+2)\ldots(w+2p_i-2)x^{p_i}r^{-w-2p_i}$$

$$+a_1(w)x^{p_i-2}r^{-w-2p_i+2}+a_2(w)x^{p_i-4}r^{-w-2p_i+4}+\ldots$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{q_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p_i}r^{-w}=(-1)^{p_i+q_i}w(w+2)\ldots(w+2p_i+2q_i-2)x^{p_i}y^{q_i}r^{-w-2p_i-2q_i}$$

$$+\left\{a_1^*(w)x^{p_i-2}y^{q_i}+a_2^*(w)x^{p_i}y^{q_i-2}+\ldots\right\}r^{-w-2p_i-2q_i+2}$$

$$+\left\{b_1^*(w)x^{p_i-4}y^{q_i}+b_2^*(w)x^{p_i-2}y^{q_i-2}+\ldots\right\}r^{-w-2p_i-2q_i+4}+\ldots$$

ve nihayet

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-p_i-q_i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{q_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p_i}r^{-w}=(-1)^{n}w(w+2)\ldots(w+2n-2)\ \{x^{p_i}y^{q_i}z^{n-p_i-q_i}r^{-w-2n}$$

$$+\left\{a_1^{**}(w)x^{p_i}y^{q_i-2}z^{n-p_i-q_i}+a_2^{**}(w)x^{p_i-2}y^{q_i}z^{n-p_i-q_i}+\ldots\right\}r^{-w-2n+2}$$

$$+\left\{b_1^{**}(w)x^{p_i-2}y^{q_i-2}z^{n-p_i-q_i}+b_2^{**}(w)x^{p_i-4}y^{q_i}z^{n-p_i-q_i}+\ldots\right\}r^{-w-2n+4}+\ldots\}$$

dir. Burada a_i, a_i^*, a_i^{**} ve b_i, b_i^*, b_i^{**} katsayıları w ye bağlı sabitlerdir. Bulunan bu son türev değeri (24) de yerine yazılır ve (23) tanımı dikkate alınırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)r^{-w}=\sum_{i=1}^{N}A_i\,(-1)^{n}w(w+2)\ldots(w+2n-2)\left\{x^{p_i}y^{q_i}z^{n-p_i-q_i}r^{-w-2n}\right.$$

$$+\left\{a_1^{**}(w)x^{p_i}y^{q_i-2}z^{n-p_i-q_i}+a_2^{**}(w)x^{p_i-2}y^{q_i}z^{n-p_i-q_i}+\ldots\right\}r^{-w-2n+2}$$

$$\left.+\left\{b_1^{**}(w)x^{p_i-2}y^{q_i-2}z^{n-p_i-q_i}+b_2^{**}(w)x^{p_i-4}y^{q_i}z^{n-p_i-q_i}+\ldots\right\}r^{-w-2n+4}+\ldots\right\}$$

olup

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)r^{-w}=(-1)^n w(w+2)\ldots(w+2n-2)\left\{\frac{f_n(x,y,z)}{r^{w+2n}}+\frac{f_{n-2}(x,y,z)}{r^{w+2n-2}}+\cdots\right\}$$

elde edilir. Bu ise istenilen (22) formülüdür.

Teorem 1.9.2. Eğer $f_n(x,y,z)$ n-yinci dereceden homogen bir polinom ise o taktirde,

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left(1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)}-\cdots\right)f_n(x,y,z) \tag{25}$$

dir. Burada r Öklid uzaklığı ve $\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplace operatörüdür.

İspat : (22) ifadesinde $w=-1$ yazalım. Bu durumda

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)\left[\frac{f_n(x,y,z)}{r^{2n+1}}+\frac{f_{n-2}}{r^{2n-1}}+\frac{f_{n-4}}{r^{2n-3}}+\cdots\right]$$

$$=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}r^{-2n-1}\left[f_n+r^2 f_{n-2}+r^4 f_{n-4}+\cdots\right] \tag{26}$$

dır. Sabit katsayılı ∇^2 ve f_n lineer operatörlerinin

$$\nabla^2 f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\nabla^2 \tag{27}$$

değişme özelliğinden ve de $\nabla^2\left(r^{-1}\right)=0$ olmasından dolayı

$$\nabla^2 f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\nabla^2\left(r^{-1}\right)=0$$

dır. Yani (26) nın birinci yanındaki $f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$ ifadesi bir katı küresel harmoniktir. O halde (26) nın ikinci yanı da bir katı küresel harmonik olacaktır. Teorem 1.4.3. den dolayı, ikinci yandaki r^{-2n-1} in önündeki çarpan olan

$$V_n=f_n(x,y,z)+r^2 f_{n-2}+r^4 f_{n-4}+\cdots \tag{28}$$

ifadesi de n-yinci dereceden bir katı küresel harmonik olmalıdır. (8) numaralı formülden aşağıdakiler yazılabilir.

$$\nabla^2\left(r^2 f_{n-2}\right) = 2(2n-1)f_{n-2} + r^2\nabla^2 f_{n-2}$$

$$\nabla^2\left(r^4 f_{n-4}\right) = 4(2n-3)r^2 f_{n-4} + r^4\nabla^2 f_{n-4}$$

$$\nabla^2\left(r^6 f_{n-6}\right) = 6(2n-5)r^4 f_{n-6} + r^6\nabla^2 f_{n-6}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Yukarıdaki eşitlikler dikkate alınarak (28) in her iki yanına ∇^2 operatörü uygulanır ve $\nabla^2(V_n) \equiv 0$ olduğu gözönünde tutulursa

$$\nabla^2(V_n) = \nabla^2(f_n) + \nabla^2\left(r^2 f_{n-2}\right) + \nabla^2\left(r^4 f_{n-4}\right) + \nabla^2\left(r^6 f_{n-6}\right) + \cdots$$

$$= \left[\nabla^2 f_n + 2(2n-1)f_{n-2}\right]r^0 + \left[\nabla^2 f_{n-2} + 4(2n-3)f_{n-4}\right]r^2$$

$$+\left[\nabla^2 f_{n-4} + 6(2n-5)f_{n-6}\right]r^4 + \left[\nabla^2 f_{n-6} + 8(2n-7)f_{n-8}\right]r^6 + \cdots \equiv 0$$

elde edilir. Bu ifadenin her r için sıfır olması $r^0, r^2, r^4, \ldots$ ün katsayılarının sıfır olması ile mümkündür. Bu durumda

$$f_{n-2} = -\frac{1}{2(2n-1)}\nabla^2 f_n \quad , \quad f_{n-4} = -\frac{1}{4(2n-3)}\nabla^2 f_{n-2}$$

$$f_{n-6} = -\frac{1}{6(2n-5)}\nabla^2 f_{n-4} \quad , \ldots$$

olarak bulunurlar. Bu değerler (26) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left(1 - \frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)} + \frac{r^4\nabla^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)} - \cdots\right)f_n(x, y, z)$$

elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Şimdi de bulunan $f_{n-2}, f_{n-4}, f_{n-6}, \ldots$ değerlerinin (28) ifadesini katı küresel harmonik yapabilen tek değerler olduğunu gösterelim.

$$V_n = f_n + r^2 f_{n-2} + r^4 f_{n-4} + r^6 f_{n-6} + \cdots$$

$$V_n^* = f_n + r^2 f_{n-2}^* + r^4 f_{n-4}^* + r^6 f_{n-6}^* + \cdots$$

ifadeleri n-yinci dereceden katı küresel harmonikler olsunlar. Bu iki katı küresel harmoniğin farkı olan

$$V_n - V_n^* = (f_n - f_n) + r^2\left\{\left(f_{n-2} - f_{n-2}^*\right) + r^2\left(f_{n-4} - f_{n-4}^*\right) + r^4\left(f_{n-6} - f_{n-6}^*\right) + \cdots\right\}$$

ya da kısaca

$$V_n - V_n^* = r^2 g_{n-2} \tag{29}$$

ifadesi de bir katı küresel harmonik olmalıdır. Burada

$$g_{n-2} = \left\{\left(f_{n-2} - f_{n-2}^*\right) + r^2\left(f_{n-4} - f_{n-4}^*\right) + r^4\left(f_{n-6} - f_{n-6}^*\right) + \cdots\right\}$$

dır. $\nabla^2(V_n - V_n^*) = \nabla^2 V_n - \nabla^2 V_n^* = 0$ olduğu ve (8) formülü dikkate alınarak (29) ifadesinin her iki yanına Laplace operatörü uygulanırsa

$$\nabla^2(V_n - V_n^*) = \nabla^2\left(r^2 g_{n-2}\right) = 2(2n-1)g_{n-2} + r^2\nabla^2 g_{n-2} = 0$$

olur ki buradan

$$g_{n-2} = r^2\left[-\frac{1}{2(2n-1)}\nabla^2 g_{n-2}\right] = r^2 h_{n-4}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\nabla^2\left(r^2 g_{n-2}\right) = \nabla^2\left(r^4 h_{n-4}\right) = 4(2n-3)r^2 h_{n-4} + r^4\nabla^2 h_{n-4} = 0$$

dan

$$h_{n-4} = r^2\left[-\frac{1}{4(2n-3)}\nabla^2 h_{n-4}\right] = r^2 h_{n-6}$$

olur. Aynı uygulamaya devam edilirse

$$h_{n-6} = r^2 h_{n-8}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

olarak elde edilirler. Bu durumda

$$g_{n-2} = r^2 h_{n-4} = r^4 h_{n-6} = r^6 h_{n-8} = \cdots = r^{2m} h_{n-2m-2}$$

olur. Burada n nin tek veya çift sayı olması durumuna göre g_{n-2} yi ayrı ayrı inceleyelim ve her iki halde de sıfır olduğunu görelim.

(i) $n = 2(m+1)$ çift sayı olsaydı ,

$$g_{n-2} = r^{2m} h_0$$

olup,

$$0 \equiv \nabla^2\left(r^2 g_{n-2}\right) = \nabla^2\left(r^4 h_{n-4}\right) = \cdots = \nabla^2\left(r^{2m+2} h_{n-2m-2}\right)$$

$$= \nabla^2\left(r^{2m+2} h_0\right)$$

$$= (2m+2)(2m+3) r^{2m} h_0 + r^{2m+2} \nabla^2 h_0 = 0$$

elde edilir. $\nabla^2 h_0 = 0$ olduğundan bu eşitliğin sağlanması $h_0 = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise $g_{n-2} \equiv 0$ verir.

(ii) $n = 2m+3$ tek sayı olsaydı ,

$$g_{n-2} = r^{2m} h_1$$

olup,

$$0 \equiv \nabla^2\left(r^2 g_{n-2}\right) = \nabla^2\left(r^4 h_{n-4}\right) = \cdots = \nabla^2\left(r^{2m+2} h_{n-2m-2}\right)$$

$$= \nabla^2\left(r^{2m+2} h_1\right)$$

$$= (2m+2)(2m+3) r^{2m} h_1 + r^{2m+2} \nabla^2 h_1 = 0$$

bulunur ki bu $h_1 = 0$ olması halinde sağlanan bir eşitliktir. Buradan $g_{n-2} = 0$ olur. Bu durumda (29) dan $V_n - V_n^* = 0$ olup $V_n = V_n^*$ dır. Böylece bulunan $f_{n-2}, f_{n-4}, \ldots$ değerleri V_n ifadesini katı küresel harmonik yapabilen tek değerlerdir.

Sonuç 1.9.3. Eğer $f_n(x,y,z)$ n-yinci dereceden bir katı küresel harmonik ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}} f_n(x,y,z)$$

dir.

İspat : $f_n(x,y,z)$ bir katı küresel harmonik olduğundan

$\nabla^2 f_n(x,y,z) = \nabla^4 f_n(x,y,z) = \cdots = 0$ dır. Bu değerler (25) ifadesinde yerlerine yazılırlarsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}} f_n(x,y,z)$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Şimdi de Teorem 1.9.2. yi kullanarak zonal ve tesseral harmonikler ile ilgili aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 1.9.4. $P_n(\mu)$ Legendre polinomları (zonal harmonikler)

$$P_n(\mu) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada $\mu = \cos\theta = \frac{z}{r}$ ve $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ dir.

İspat : (25) formülünde $f_n(x,y,z) = z^n$ yazılırsa

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left(1 - \frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)} + \frac{r^4\nabla^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)} - \cdots\right)z^n$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left(z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}r^2 z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}r^4 z^{n-4} - \ldots\right)$$

olur. Bu eşitliğin ikinci yanında z nin küresel koordinatlardaki değeri olan $z = r\mu$ konulursa

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{n+1}}\left(\mu^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}-\ldots\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $\dfrac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}$ ile çarpılırsa

$$(-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left(\mu^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}-\ldots\right)$$

bulunur. Bu son eşitliğin ikinci yanının $P_n(\mu)$ Legendre polinomlarının açık ifadesi olduğu görülmektedir. O halde eşitliğin birinci yanı da $P_n(\mu)$ yü verecektir, yani

$$(-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)=P_n(\mu)$$

dir ki bu istenilendir. Bu eşitlik

$$P_n\left(\frac{z}{r}\right)=(-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

şeklinde de yazılabilir.

Teorem 1.9.5.

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\frac{1}{r}=\frac{(-1)^{n-m}(n-m)!}{r^{n+1}}(\cos m\phi\pm i\sin m\phi)P_n^m(\mu)$$

dür. Burada $\mu=\cos\theta=\frac{z}{r}$, $\tan\phi=\frac{y}{x}$ ve $r^2=x^2+y^2+z^2$ dir.

İspat : (25) eşitliğinde $f_n(x,y,z)=(x\pm iy)^m z^{n-m}$ alınırsa

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\frac{1}{r}=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}$$

$$.\left\{1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)}-\ldots\right\}(x\pm iy)^m z^{n-m}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} = m(m-1)(x \pm iy)^{m-2} z^{n-m}$$

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} = -m(m-1)(x \pm iy)^{m-2} z^{n-m}$$

oldukları dikkate alınırsa

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}(x \pm iy)^m$$

$$.\left\{1 - \frac{r^2}{2(2n-1)}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{r^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\frac{d^4}{dz^4} - \cdots\right\} z^{n-m}$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}(x \pm iy)^m \left\{z^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} r^2 z^{n-m-2} + \cdots\right\}$$

olur. Bu eşitliğin ikinci yanında x,y,z nin küresel koordinatlardaki değerleri olan,

$x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ konulursa

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{n+1}}(\cos m\phi \pm i\sin m\phi)\sin m\theta$$

$$\left\{\mu^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-m-2} + \cdots\right\}$$

bulunur. (21) numaralı formül dikkate alınarak

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = (-1)^{n-m}\frac{(n-m)!}{r^{n+1}}(\cos m\phi \pm i\sin m\phi) T_n^m(\mu)$$

elde edilir ki bu ise istenilendir.

1.10. Küresel Harmonikler için Clerk-Maxwell Teorisi

Bu kesimde homogen diferensiyel operatörlerin bazı özelliklerini vererek Teorem 1.9.2. nin ispatını Clerk-Maxwell teorisi yardımıyla yeniden vereceğiz.

Teorem 1.10.1. Eğer $f_n(h,k,\ell)$ ve $\psi_n(h,k,\ell)$ n-yinci dereceden homogen polinomlar iseler o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\psi_n(h,k,\ell)=\psi_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)f_n(h,k,\ell) \tag{30}$$

dir.

İspat : n ve N ler birer doğalsayı , $1 \le N \le \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, A_i, B_j ler reel sabitler olmak üzere f_n ve ψ_n fonksiyonları açık olarak

$$f_n(h,k,\ell)=\sum_{i=1}^{N} A_i h^{p_i} k^{q_i} \ell^{n-p_i-q_i} \tag{31}$$

$$\psi_n(h,k,\ell)=\sum_{j=1}^{N} B_j h^{p_j} k^{q_j} \ell^{n-p_j-q_j} \tag{32}$$

şeklinde yazılabilirler. Burada p_i, q_i ve p_j, q_j ler $\{0,1,2,...n\}$ cümlesinin elemanları olup $i \neq j$ için $(p_i,q_i) \neq (p_j,q_j)$ ve $p_i+q_i \le n$, $p_j+q_j \le n$ dir. Kısmi türevler hakkındaki bilgiler gözönüne alınarak (31) ve (32) den aşağıdakileri yazabiliriz.

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\psi_n(h,k,\ell)=\left\{\sum_{i=1}^{N} A_i\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{p_i}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_i}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{n-p_i-q_i}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{N} B_j h^{p_j} k^{q_j} \ell^{n-p_j-q_j}\right\}$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_i B_j \frac{\partial^n}{\partial h^{p_i}\partial k^{q_i}\partial \ell^{n-p_i-q_i}} h^{p_j} k^{q_j} \ell^{n-p_j-q_j}$$

$$+\sum_{j=1}^{N} A_j B_j \frac{\partial^n}{\partial h^{p_j}\partial k^{q_j}\partial \ell^{n-p_j-q_j}} h^{p_j} k^{q_j} \ell^{n-p_j-q_j}$$

$$=0+\sum_{j=1}^{N} A_j B_j \left(p_j\right)!\left(q_j\right)!\left(n-p_j-q_j\right)! \tag{33}$$

Benzer şekilde

$$\psi_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)f_n(h,k,\ell)$$

$$=\left\{\sum_{j=1}^{N}B_j\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{p_j}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_j}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{n-p_j-q_j}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{N}A_i h^{p_i}k^{q_i}\ell^{\,n-p_i-q_i}\right\}$$

$$=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{i=1}^{N}B_jA_i\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{p_j}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_j}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{n-p_j-q_j}h^{p_i}k^{q_i}\ell^{\,n-p_i-q_i}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}B_iA_i\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{p_i}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_i}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{n-p_i-q_i}h^{p_i}k^{q_i}\ell^{\,n-p_i-q_i}$$

$$=0+\sum_{i=1}^{N}B_iA_i(p_i)!(q_i)!(n-p_i-q_i)! \tag{34}$$

elde edilir. İkinci yanları eşit olan (33) ve (34) ün birinci yanları da eşit olacağından teorem ispatlanmış olur.

Teorem 1.10.2. Eğer $\psi_s(h,k,\ell)$ s-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$\left(x\frac{\partial}{\partial h}+y\frac{\partial}{\partial k}+z\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{s}\psi_s(h,k,\ell)=s!\,\psi_s(x,y,z) \tag{35}$$

dir.

İspat : $1\leq N\leq\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ ve p_i, q_i ler Teorem 1.10.1. de tanımlandığı gibi olmak üzere, binom teoreminden dolayı

$$\left(x\frac{\partial}{\partial h}+y\frac{\partial}{\partial k}+z\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{s}=\sum_{i=1}^{N}\frac{s!}{p_i!q_i!(s-p_i-q_i)!}\left(x\frac{\partial}{\partial h}\right)^{p_i}\left(y\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_i}\left(z\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{s-p_i-q_i} \tag{36}$$

yazılabilir. $\psi_s(h,k,\ell)$ fonksiyonu ise açık olarak

$$\psi_s(h,k,\ell)=\sum_{j=1}^{N}B_jh^{p_j}k^{q_j}\ell^{\,s-p_j-q_j} \tag{37}$$

şeklinde yazılabilecektir. Böylece (36) nın (37) ye uygulanması ile

$$\left(x\frac{\partial}{\partial h}+y\frac{\partial}{\partial k}+z\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{s}\psi_s(h,k,\ell)$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N}B_j\frac{s!}{p_i!q_i!(s-p_i-q_i)!}x^{p_i}y^{q_i}z^{s-p_i-q_i}\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{p_i}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_i}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{s-p_i-q_i}h^{p_j}k^{q_j}\ell^{s-p_j-q_j}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}B_j\frac{s!}{p_j!q_j!\left(s-p_j-q_j\right)!}x^{p_j}y^{q_j}z^{s-p_j-q_j}\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{p_j}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_j}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{s-p_j-q_j}h^{p_j}k^{q_j}\ell^{s-p_j-q_j}$$

$$=0+\sum_{j=1}^{N}B_j\frac{s!}{p_j!q_j!\left(s-p_j-q_j\right)!}x^{p_j}y^{q_j}z^{s-p_j-q_j}\left(p_j\right)!\left(q_j\right)!\left(s-p_j-q_j\right)!$$

$$=s!\sum_{j=1}^{N}B_jx^{p_j}y^{q_j}z^{s-p_j-q_j}=s!\psi_s(x,y,z)$$

istenilen (35) eşitliği elde edilmiş olur.

Teorem 1.10.3. $f_n(x,y,z)$ n-yinci dereceden homogen bir polinom olsun. $w=\phi(x,y,z)$ ve $F=F(w)$ ler n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi fonksiyonlar iseler, o taktirde,

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)F(w)=\chi_0\frac{d^nF}{dw^n}+\chi_1\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}+\chi_2\frac{d^{n-2}F}{dw^{n-2}}+\cdots+\chi_{n-1}\frac{dF}{dw} \tag{38}$$

dir. Burada $\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_{n-1}$ ler sadece x,y,z değişkenlerine bağlı belirli fonksiyonlar olup, kesin ifadeleri daha sonra elde edilecektir.

İspat : A_i ler sabitler ve $1\leq N\leq\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ olmak üzere $f_n(x,y,z)$ fonksiyonu açık olarak

$$f_n(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N}A_ix^{p_i}y^{q_i}z^{n-p_i-q_i}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)F(w)=\sum_{i=1}^{N}A_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p_i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{q_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-p_i-q_i}F(w) \tag{39}$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{\partial F(w)}{\partial x}=\frac{dF}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F(w)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dF}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{d^2F}{dw^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{dF}{dw}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 F(w)}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^2F}{dw^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{dF}{dw}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$=\frac{d^3F}{dw^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3+\frac{d^2F}{dw^2}\left(3\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{dF}{dw}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial^{p_i} F(w)}{\partial x^{p_i}}=B_0^i\frac{d^{p_i}F}{dw^{p_i}}+B_1^i\frac{d^{p_i-1}F}{dw^{p_i-1}}+\cdots+B_{p_i-1}^i\frac{dF}{dw}$$

dır. Burada $B_0^i, B_1^i, \ldots, B_{p_i-1}^i$ katsayıları x,y,z nin fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde y ye göre q_i defa türev alınırsa

$$\frac{\partial^{q_i}}{\partial y^{q_i}}\left(\frac{\partial^{p_i} F(w)}{\partial x^{p_i}}\right)=C_0^i\frac{d^{p_i+q_i}F(w)}{dw^{p_i+q_i}}+\cdots+C_{p_i+q_i-1}^i\frac{dF(w)}{dw}$$

olur. $C_0^i, C_1^i, \ldots, C_{p_i+q_i-1}^i$ lerin x,y,z nin fonksiyonu olduğu bu eşitliğin her iki yanının z ye göre $n-p_i-q_i$ defa türevi alınırsa

$$\frac{\partial^{n-p_i-q_i}}{\partial z^{n-p_i-q_i}}\left(\frac{\partial^{p_i+q_i}}{\partial x^{p_i}\partial y^{q_i}}F(w)\right)=\frac{\partial^n F(w)}{\partial x^{p_i}\partial y^{q_i}\partial z^{n-p_i-q_i}}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p_i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{q_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-p_i-q_i}F(w)$$

$$=D_0^i\frac{d^nF}{dw^n}+D_1^i\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}+\cdots+D_{n-1}^i\frac{dF}{dw}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}D_j^i\frac{d^{n-j}F(w)}{dw^{n-j}}$$

elde edilir. D_j^i lerin x,y,z ye bağlı fonksiyonlar olduğu bu son türev ifadesini (39) da yerine yazarsak

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)F(w)=\sum_{i=1}^{N}A_i\sum_{j=0}^{n-1}D_j^i\frac{d^{n-j}F(w)}{dw^{n-j}}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N}A_iD_j^i\frac{d^{n-j}F(w)}{dw^{n-j}}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\chi_j\,\frac{d^{n-j}F(w)}{dw^{n-j}}$$

bulunur. Burada $\chi_j=\sum_{i=1}^{N}A_iD_j^i$, $(j=0,1,2,\dots,n-1)$ olup , χ_j ler sadece x,y,z nin fonksiyonlarıdır. Böylece istenilen (38) eşitliği elde edilmiş olur.

Şimdi $\chi_j\,(x,y,z)$ lerin f_n ve ϕ fonksiyonlarına bağlı kesin ifadelerini elde edelim. Bununla ilgili teoremi vermeden önce hazırlık olması bakımından aşağıdaki iki lemmayı vereceğiz.

Lemma 1.10.4. s pozitif tamsayı ve $s\le n$ olmak üzere

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)w^s=s!\chi_{n-s}+\frac{s!}{1!}\chi_{n-s+1}w+\frac{s!}{2!}\chi_{n-s+2}w^2+\cdots+\frac{s!}{(s-2)!}\chi_{n-2}w^{s-2}+$$

$$+\frac{s!}{(s-1)!}\chi_{n-1}w^{s-1}\tag{40}$$

dır.

İspat : (38) eşitliğinde $F(w)=w^s$ alalım. Bu durumda

$$\frac{dF}{dw}=\frac{d}{dw}(w^s)=sw^{s-1}=\frac{s!}{(s-1)!}w^{s-1}$$

$$\frac{d^2F}{dw^2}=\frac{d^2}{dw^2}(w^s)=\frac{s!}{(s-2)!}w^{s-2}$$

. . . .

$$\frac{d^sF}{dw^s}=\frac{d^s}{dw^s}(w^s)=\frac{s!}{(s-s)!}w^{s-s}=s!$$

$$\frac{d^{s+j}F}{dw^{s+j}}=\frac{d^{s+j}}{dw^{s+j}}(w^s)=0 \quad ; \quad j=1,2,\ldots,n-s$$

oldukları dikkate alınarak (38) de bu türev değerleri yerlerine yazılırlarsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)w^s=s!\chi_{n-s}+\frac{s!}{1!}\chi_{n-s+1}w+\cdots+\frac{s!}{(s-2)!}\chi_{n-2}w^{s-2}+\frac{s!}{(s-1)!}\chi_{n-1}w^{s-1}$$

elde edilir ki bu ise istenilen (40) eşitliğidir.

Lemma 1.10.5. f_n ve ϕ ler Teorem 1.10.3. deki özelliklere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\{\phi(x,y,z)\}^s=\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^s \qquad (41)$$

dir.

İspat : (40) da $w=\phi(x,y,z)$ konulursa,

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\{\phi(x,y,z)\}^s=s!\chi_{n-s}+\frac{s!}{1!}\chi_{n-s+1}\phi(x,y,z)$$

$$+\frac{s!}{2!}\chi_{n-s+2}\{\phi(x,y,z)\}^2+\cdots+\frac{s!}{(s-1)!}\chi_{n-1}\{\phi(x,y,z)\}^{s-1} \qquad (42)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (40) da $w=\phi(x,y,z)$ alarak (x,y,z) noktası komşuluğunda aşağıdaki işlemleri yapalım. x,y,z ler yerine sırasıyla $x+h, y+k, z+\ell$ konulur ve

$\dfrac{\partial}{\partial(x+h)}=\dfrac{\partial}{\partial h}$, $\dfrac{\partial}{\partial(y+k)}=\dfrac{\partial}{\partial k}$, $\dfrac{\partial}{\partial(z+\ell)}=\dfrac{\partial}{\partial \ell}$ olacakları gözönünde tutulursa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial(x+h)},\frac{\partial}{\partial(y+k)},\frac{\partial}{\partial(z+\ell)}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^s$$

$$=f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^s=s!\chi_{n-s}(x+h,y+k,z+\ell)$$

$$+\frac{s!}{1!}\chi_{n-s+1}(x+h,y+k,z+\ell)\,\phi(x+h,y+k,z+\ell)+\cdots+$$

$$+\frac{s!}{(s-1)!}\chi_{n-1}(x+h,y+k,z+\ell)\,\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^{s-1}$$

yazılabilecektir. Bu eşitliğin her iki yanında $(h,k,\ell)\to(0,0,0)$ için limite geçilirse

$$\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^s =$$

$$\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} \{s!\chi_{n-s}(x+h,y+k,z+\ell)+\frac{s!}{1!}\chi_{n-s+1}(x+h,y+k,z+\ell)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}$$

$$+\frac{s!}{2!}\chi_{n-s+2}(x+h,y+k,z+\ell)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^2+\cdots+$$

$$+\frac{s!}{(s-1)!}\chi_{n-1}\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^{s-1}$$

$$=s!\chi_{n-s}+\frac{s!}{1!}\chi_{n-s+1}\,\phi(x,y,z)+\frac{s!}{2!}\chi_{n-s+2}\{\phi(x,y,z)\}^2+\cdots+\frac{s!}{(s-1)!}\chi_{n-1}\{\phi(x,y,z)\}^{s-1} \tag{43}$$

elde edilir. (42) ve (43) eşitliklerinin sağ tarafları eşit olduklarından sol tarafları da eşit olmalıdır, bu istenilen (41) eşitliğidir.

Şimdi (38) deki χ_j lerin kesin ifadelerini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 1.10.6. (38) eşitliğindeki $\chi_m=\chi_m(x,y,z)$ $(m=1,2,\ldots,n-1)$ katsayıları

$$\chi_m=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^{n-m} \tag{44}$$

olarak verilebilirler.

İspat : Bu teoremi ispatlayabilmek için önce

$$\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^s=\{\phi(x,y,z)+\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^s$$

yazıp eşitliğin sağ tarafına binom teoremini uygulayalım.

Bu durumda

$$\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)\}^s=\sum_{t=0}^{s}\frac{s!}{t!(s-t)!}\{\phi(x,y,z)\}^t\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^{s-t}$$

elde edilir. (41) eşitliğinde bu değer yerine konulursa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)w^s=\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\sum_{t=0}^{s}\frac{s!}{t!(s-t)!}\{\phi(x,y,z)\}^t$$

$$.\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^{s-t}$$

olur. İkinci yanı açarak yazarsak,

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)w^s=\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^s$$

$$+\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\frac{s!}{(s-1)!}\{\phi(x,y,z)\}\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^{s-1}$$

$$+\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\frac{s!}{2!(s-2)!}\{\phi(x,y,z)\}^2\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^{s-2}$$

$$+\cdots+\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x,y,z)\}^s\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^{s-s} \quad (45)$$

bulunur. (40) ve (45) eşitlikleri karşılaştırılırsa aynı kuvvetteki $w=\phi(x,y,z)$ lerin katsayılarının eşitliğinden aşağıdaki eşitlikler yazılabilecektir.

$$\frac{s!}{(s-1)!}\chi_{n-1}=\frac{s!}{(s-1)!1!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}$$

$$\Rightarrow\ \chi_{n-1}=\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}$$

$$\frac{s!}{(s-2)!}\chi_{n-2}=\frac{s!}{(s-2)!2!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^2$$

$$\Rightarrow\ \chi_{n-2}=\frac{1}{2!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^2$$

. . . .

$$\frac{s!}{(s-m)!}\chi_{n-m}=\frac{s!}{(s-m)!m!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^m$$

$$\Rightarrow\ \chi_{n-m}=\frac{1}{m!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^m$$

Bu son eşitlikte, m yerine $n-m$ konursa

$$\chi_m=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\{\phi(x+h,y+k,z+\ell)-\phi(x,y,z)\}^{n-m}$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

Bir özel hal olarak $\phi=r^2$ olması durumunda χ katsayılarının Laplace operatörü cinsinden ifadeleri bir teorem olarak aşağıda verilecektir.

Teorem 1.10.7. $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ olması durumunda

$$\chi_m=\frac{2^{n-2m}}{m!}\nabla^{2m}f_n(x,y,z) \tag{46}$$

dir. Burada $\nabla^{2m}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^m$ dir.

İspat : $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ olması halinde (45) eşitliği

$$\chi_m=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\left\{2(hx+ky+\ell z)+\left(h^2+k^2+\ell^2\right)\right\}^{n-m}$$

şeklinde ya da ikinci tarafa binom teoremi uygulanarak

$$\chi_m=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\sum_{\mu=0}^{n-m}\binom{n-m}{\mu}\left(h^2+k^2+\ell^2\right)^{\mu}\{2(hx+ky+\ell z)\}^{n-m-\mu}$$

biçiminde yazılabilecektir. Bu ifadede sadece $\mu=m$ ye karşılık gelen terim sıfırdan farklı olacağından

$$\chi_m=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h},\frac{\partial}{\partial k},\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\binom{n-m}{m}\left(h^2+k^2+\ell^2\right)^{m}\{2(hx+ky+\ell z)\}^{n-2m}$$

$$= \frac{1}{m!(n-2m)!} \lim_{(h,k,\ell)\to(0,0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h}, \frac{\partial}{\partial k}, \frac{\partial}{\partial \ell}\right)\left(h^2+k^2+\ell^2\right)^m \{2(hx+ky+\ell z)\}^{n-2m} \quad (47)$$

elde edilir. Teorem 1.10.1. den dolayı (47) eşitliği

$$\chi_m = \frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!m!}\left(x\frac{\partial}{\partial h}+y\frac{\partial}{\partial k}+z\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{n-2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial h^2}+\frac{\partial^2}{\partial k^2}+\frac{\partial^2}{\partial \ell^2}\right)^m f_n(h,k,\ell) \quad (48)$$

şeklini alır. Diğer taraftan Teorem 1.10.2. den

$$\left(x\frac{\partial}{\partial h}+y\frac{\partial}{\partial k}+z\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{n-2m} g_{n-2m}(h,k,\ell) = (n-2m)!g_{n-2m}(x,y,z)$$

olduğu ve

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial h^2}+\frac{\partial^2}{\partial k^2}+\frac{\partial^2}{\partial \ell^2}\right)^m f_n(h,k,\ell) = g_{n-2m}(h,k,\ell) \quad (49)$$

(g_{n-2m}, $n-2m$ -yinci dereceden homogen bir polinom) olacağı dikkate alınarak (48) den

$$\chi_m = \frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!m!}\left(x\frac{\partial}{\partial h}+y\frac{\partial}{\partial k}+z\frac{\partial}{\partial \ell}\right)^{n-2m} g_{n-2m}(h,k,\ell)$$

$$= \frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!m!}(n-2m)!g_{n-2m}(x,y,z)$$

$$= \frac{2^{n-2m}}{m!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^m f_n(x,y,z)$$

$$= \frac{2^{n-2m}}{m!}\nabla^{2m} f_n(x,y,z)$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Teorem 1.10.8. f_n n-yinci dereceden homogen bir polinom, F n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi bir fonksiyon ve $w=\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ olmak üzere

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)F(w)=2^n\frac{d^nF}{dw^n}f_n(x,y,z)+\frac{2^{n-2}}{1!}\nabla^2 f_n(x,y,z)\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}$$

$$+\frac{2^{n-4}}{2!}\nabla^4 f_n(x,y,z)\frac{d^{n-2}F}{dw^{n-2}}+\cdots+\frac{2^{n-2m}}{m!}\nabla^{2m}f_n(x,y,z)\frac{d^{n-m}F}{dw^{n-m}}+\cdots \quad (50)$$

dir.

İspat : (46) eşitliğindeki χ_m fonksiyonunda $m=1,2,\cdots,n-1$ konularak bulunan bu $\chi_1,\ldots,\chi_{n-1}$ değerleri (38) eşitliğinde yerlerine yazılırsa istenilen (50) ifadesi elde edilmiş olur.

Teorem 1.10.9. Eğer $f_n(x,y,z)$ n-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left(1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)}-\cdots\right)f_n(x,y,z) \quad (51)$$

dir Burada r Öklid uzaklığı ve $\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplace operatörüdür.

İspat : (50) eşitliğinde $F(w)=F(r^2)=\phi(r)$ yazılırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(r)=2^n\frac{d^n\phi(r)}{d(r^2)^n}f_n(x,y,z)+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}\phi(r)}{d(r^2)^{n-1}}\nabla^2 f_n(x,y,z)$$

$$+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}\phi(r)}{d(r^2)^{n-2}}\nabla^4 f_n(x,y,z)+\cdots+\frac{2^{n-2m}}{m!}\nabla^{2m}f_n(x,y,z)\frac{d^{n-m}\phi(r)}{d(r^2)^{n-m}}+\cdots \quad (52)$$

elde edilir. (52) eşitliğinde $\phi(r)=\frac{1}{r}$ alınırsa bu durumda

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=2^n\frac{d^n(r^{-1})}{d(r^2)^n}f_n(x,y,z)+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}(r^{-1})}{d(r^2)^{n-1}}\nabla^2 f_n(x,y,z)$$

$$+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}(r^{-1})}{d(r^2)^{n-2}}\nabla^4 f_n(x,y,z)+\cdots+\frac{2^{n-2m}}{m!}\frac{d^{n-m}(r^{-1})}{d(r^2)^{n-m}}\nabla^{2m}f_n(x,y,z)+\cdots \quad (53)$$

yazılabilir. $r^2=w$ olduğundan $r^{-1}=w^{-\frac{1}{2}}$ olup

$$\frac{d(r^{-1})}{d(r^2)}=\frac{d(w^{-\frac{1}{2}})}{dw}=-\frac{1}{2}w^{-\frac{3}{2}}=(-1)\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}$$

$$\frac{d^2(r^{-1})}{d(r^2)^2}=\frac{d^2(w^{-\frac{1}{2}})}{dw^2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)w^{-\frac{5}{2}}=(-1)^2\frac{1.3}{2^2}\frac{1}{r^5}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^{n-2}(r^{-1})}{d(r^2)^{n-2}}=\frac{d^{n-2}(w^{-\frac{1}{2}})}{dw^{n-2}}=(-1)^{n-2}\frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{2^{n-2}}\frac{1}{r^{2n-3}}$$

$$\frac{d^{n-1}(r^{-1})}{d(r^2)^{n-1}}=\frac{d^{n-1}(w^{-\frac{1}{2}})}{dw^{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(2n)!}{2^n n!(2n-1)}\frac{1}{r^{2n-1}}$$

$$\frac{d^{n}(r^{-1})}{d(r^2)^{n}}=\frac{d^{n}(w^{-\frac{1}{2}})}{dw^{n}}=(-1)^{n}\frac{1}{2^{n}}\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}$$

dir. Bu türev değerleri (53) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{1}{r^{2n+1}}f_n(x,y,z)$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{2^{n-2}(2n)!}{2^{n-1}2^n n!(2n-1)}\frac{1}{r^{2n-1}}\nabla^2 f_n(x,y,z)$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{2^{n-4}(2n)!}{2^{n-2}2!2^n n!(2n-3)(2n-1)}\frac{1}{r^{2n-3}}\nabla^4 f_n(x,y,z)$$

$$+\cdots$$

ya da kısa olarak

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left(1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n-1)}+\frac{r^4\nabla^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)}-\cdots\right)f_n(x,y,z)$$

elde edilir. Bu ise istenilen (51) ifadesidir.

Hatırlatalım ki, Clerk-Maxwell teorisini kullanarak elde ettiğimiz (54) bağıntısı, daha önce Teorem 1.9.2. de Hobson teorisi kullanılarak ispatlanmıştı.

Teorem 1.10.8. in bir sonucu aşağıdadır.

Sonuç 1.10.10. Eğer $Y_n(x,y,z)$ derecesi n pozitif tamsayısı olan bir katı küresel harmonik ise, o taktirde

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(r)=2^n\frac{d^n\phi(r)}{d(r^2)^n}Y_n(x,y,z) \qquad (54)$$

dür.

İspat : f_n yerine Y_n alırsak (52) ifadesi

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(r)=2^n\frac{d^n\phi(r)}{d(r^2)^n}Y_n(x,y,z)+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}\phi(r)}{d(r^2)^{n-1}}\nabla^2Y_n(x,y,z)$$

$$+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}\phi(r)}{d(r^2)^{n-2}}\nabla^4Y_n(x,y,z)+\cdots$$

şeklinde yazılabilir. $Y_n(x,y,z)$ bir katı küresel harmonik olduğundan

$$\nabla^2Y_n(x,y,z)=\nabla^4Y_n(x,y,z)=\cdots=0$$

dır. Bu nedenle

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(r)=2^n\frac{d^n\phi(r)}{d(r^2)^n}Y_n(x,y,z)$$

elde edilir ki bu (54) ün kendisidir.

BÖLÜM 2

p -BOYUTLU UZAYDA HOBSON ve CLERK-MAXWELL TEORİLERİ

2.1. Giriş

Bu bölümde, p değişkenli homogen bir polinom tarafından tanımlanmış, homogen diferensiyel operatörlerin bazı özelliklerini inceleyip, bu tip operatörler ile p değişkenli Laplace operatörü arasındaki önemli bazı bağıntıların gösterilmesi için iki farklı yol izlenecektir. Bunlar Habson teorisi ve Clerk-Maxwell teorisidir.

2.2. p Boyutlu Uzayda Hobson Teorisi

Bu kısımda Hobson teorisindeki metodlar izlenecek ve bunun için de önce yardımcı teoremlerle işe başlanacaktır.

Teorem 2.2.1. $D \subset R^p$ ve $u, v \in C^2(D)$ olan herhangi iki fonksiyon olsunlar. O taktirde,

$$\nabla^2(u\,v) = v\nabla^2 u + u\nabla^2 v + 2\left(u_{x_1} v_{x_1} + \cdots + u_{x_p} v_{x_p}\right) \qquad (55)$$

dir. Burada $u(x) = u(x_1, \ldots, x_p)$, $v(x) = v(x_1, \ldots, x_p)$ ve

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$$

dir.

İspat: $\dfrac{\partial}{\partial x_1}(uv) = u\,v_{x_1} + v\,u_{x_1}$ ve $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}(uv) = v\,u_{x_1 x_1} + u\,v_{x_1 x_1} + 2u_{x_1} v_{x_1}$

olup, simetriden dolayı

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(uv) = v\,u_{x_2 x_2} + u\,v_{x_2 x_2} + 2u_{x_2} v_{x_2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}(uv) = v\,u_{x_p x_p} + u\,v_{x_p x_p} + 2u_{x_p} v_{x_p}$$

dir. Buradan

$$\nabla^2(u\,v) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)(u\,v)$$

$$= v\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_px_p}\right) + u\left(v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} + \cdots + v_{x_px_p}\right)$$

$$+2\left(u_{x_1}v_{x_1} + \cdots + u_{x_p}v_{x_p}\right)$$

$$= v\nabla^2 u + u\nabla^2 v + 2\left(u_{x_1}v_{x_1} + \cdots + u_{x_p}v_{x_p}\right)$$

elde edilir ki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.2. $V_n(x_1,\ldots,x_p) \in C^2(D)$, n-yinci dereceden homogen bir polinom ve $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_p^2$ olsunlar. m herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\nabla^2(r^m V_n) = m(m+2n+p-2)r^{m-2}V_n + r^m \nabla^2 V_n \tag{56}$$

dır.

İspat: Teorem 2.1.1. ile verilen (55) ifadesinde $u = r^m$ ve $V = V_n$ alalım. $j = 1,2,\ldots,p$ için

$$u_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(r^m) = m r^{m-1}\frac{x_j}{r} = m\,x_j\,r^{m-2}$$

$$u_{x_jx_j} = m\,r^{m-2} + m(m-2)x_j\,r^{m-3}\frac{x_j}{r} = m\,r^{m-4}\left[r^2 + (m-2)x_j^2\right]$$

dir. Diğer taraftan Euler teoreminden dolayı $V = V_n(x_1,\ldots,x_p)$ n-yinci dereceden homogen polinomu için

$$x_1\frac{\partial V_n}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial V_n}{\partial x_2} + \cdots + x_p\frac{\partial V_n}{\partial x_p} = nV_n$$

eşitliğinin sağlandığı gözönünde tutulursa

$$u_{x_1}v_{x_1}+u_{x_2}v_{x_2}+\cdots+u_{x_p}v_{x_p}=\frac{\partial r^m}{\partial x_1}\frac{\partial V_n}{\partial x_1}+\frac{\partial r^m}{\partial x_2}\frac{\partial V_n}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial r^m}{\partial x_p}\frac{\partial V_n}{\partial x_p}$$

$$=m\,r^{m-2}\Big(x_1\frac{\partial V_n}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial V_n}{\partial x_2}+\cdots+x_p\frac{\partial V_n}{\partial x_p}\Big)$$

$$=m\,n\,r^{m-2}\,V_n$$

yazılabilir. Bu sonuçlar (55) de yerlerine konursa

$$\nabla^2(r^mV_n)=V_nmr^{m-4}\Big[pr^2+(m-2)\Big(x_1^2+\cdots+x_p^2\Big)+r^m\nabla^2(V_n)+2mnr^{m-2}V_n\Big]$$

$$=mr^{m-4}\big[pr^2+(m-2)r^2\big]V_n+2mnr^{m-2}V_n+r^m\nabla^2V_n$$

$$=m(m+2n+p-2)r^{m-2}V_n+r^m\nabla^2V_n$$

elde edilir ki bu ise istenilen (56) eşitliğidir.

Sonuç 2.2.3. Eğer $V_n(x_1,\ldots,x_p)$ n-yinci dereceden homogen bir harmonik fonksiyon ise, yani

$$\nabla^2V=\frac{\partial^2V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2V}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2V}{\partial x_p^2}=0 \tag{57}$$

Laplace denkleminin bir çözümü ise, o taktirde $r^{-2n-p+2}V_n$ de (57) denkleminin $(-p-n+2)$-inci dereceden homogen bir çözümüdür.

Burada $r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2$ dir.

İspat: m belirlenecek bir reel sabit olmak üzere hipotezden $\nabla^2(V_n)=0$ olduğu gözönünde tutulursa (56) ifadesi

$$\nabla^2(r^mV_n)=m(m+2n+p-2)r^{m-2}V_n \tag{58}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece r^mV_n nin Laplace denklemini sağlayabilmesi için m nin sıfır yada $m=2-2n-p$ olması gerektiği görülür. O halde $r^{2-2n-p}V_n$ (57) denkleminin bir çözümüdür. Homogen fonksiyonların bilinen özelliklerinden dolayı bu çözümün homogenlik derecesi $(2-2n-p)+n=2-p-n$ olur.

Lemma 2.2.4. Eğer $f_n(x_1,\ldots,x_p)$ n-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)r^{-w}=(-1)^n w(w+2)\ldots(w+2n-2)\Big[\frac{f_n(x_1,\ldots,x_p)}{r^{w+2n}}+\frac{f_{n-2}(x_1,\ldots,x_p)}{r^{w+2n-2}}+$$

$$+\frac{f_{n-4}(x_1,\ldots,x_p)}{r^{w+2n-4}}+\frac{f_{n-6}(x_1,\ldots,x_p)}{r^{w+2n-6}}+\cdots\Big] \tag{59}$$

dur. İkinci yandaki terim sayısı $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ dir. Burada

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{n çift ise}\\[2ex] \dfrac{n-1}{2} & \text{n tek ise}\end{cases}$$

olup, w reel bir parametredir.

İspat: n bir doğal sayı, A_i ler reel sabitler, $M=\{1,2,\ldots,N\}$ ve N, n-yinci dereceden p değişkenli homogen bir polinomun bulunduracağı maksimum terim sayısı olmak üzere $f_n(x_1,\ldots,x_p)$ fonksiyonu açık olarak

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\sum_{i\in M}A_i x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i}, \tag{60}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $k_1^i,\ldots,k_p^i$ ler $\{0,1,2,\ldots,n\}$ cümlesinin elemanları olup, $k_1^i+\cdots+k_p^i=n$ dir (60) dan dolayı

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)r^{-w}=\sum_{i\in M}A_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i}r^{-w} \tag{61}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $r^{-w}=\left(x_1^2+\cdots+x_p^2\right)^{-\frac{w}{2}}$ nin ardışık türevleri

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i} r^{-w} = (-1)^{k_1^i} w(w+2)\ldots(w+2k_1^i-2)x^{k_1^i} r^{-w-2k_1^i}$$

$$+a_1(w)x_1^{k_1^i-2} r^{-w-2k_1^i+2} + a_2(w)x^{k_1^i-4} r^{-w-2k_1^i+4} + \ldots$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2^i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i} r^{-w} = (-1)^{k_1^i+k_2^i} w(w+2)\ldots(w+2k_1^i+2k_2^i-2)x_1^{k_1^i} x_2^{k_2^i} r^{-w-2k_1^i-2k_2^i}$$

$$+\left\{a_1^1(w)x_1^{k_1^i-2} x_2^{k_2^i} + a_2^1(w)x_1^{k_1^i} x_2^{k_2^i-2} + \ldots\right\} r^{-w-2k_1^i-2k_2^i+2}$$

$$+\left\{a_1^2(w)x_1^{k_1^i-4} x_2^{k_2^i} + a_2^2(w)x_1^{k_1^i-2} x_2^{k_2^i-2} + \ldots\right\} r^{-w-2k_1^i-2k_2^i+4} + \ldots$$

ve nihayet

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2^i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i} r^{-w} = (-1)^n w(w+2)\ldots(w+2n-2)\Big[x_1^{k_1^i} x_2^{k_2^i}\ldots x_p^{k_p^i} r^{-w-2n}$$

$$+\left\{a_1^p(w)x_1^{k_1^i-2} x_2^{k_2^i}\ldots x_p^{k_p^i} + a_2^p(w)x_1^{k_1^i} x_2^{k_2^i-2}\ldots x_p^{k_p^i} + \ldots\right\} r^{-w-2n+2} + \ldots\Big]$$

dir. Bulunan bu son türev değeri (61) de yerine yazılır ve (60) tanımı dikkate alınırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) r^{-w} = \sum_{i\in M} A_i(-1)^n w(w+2)\ldots(w+2n-2)\ \Big[x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i} r^{-w-2n}$$

$$+\left\{a_1^p(w)x_1^{k_1^i-2} x_2^{k_2^i}\ldots x_p^{k_p^i} + a_2^p(w)x_1^{k_1^i} x_2^{k_2^i-2}\ldots x_p^{k_p^i} + \ldots\right\} r^{-w-2n+2} + \ldots\Big]$$

olup

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) r^{-w} = (-1)^n w(w+2)\ldots(w+2n-2)\left[\frac{f_n(x_1,\ldots,x_p)}{r^{w+2n}} + \frac{f_{n-2}(x_1,\ldots,x_p)}{r^{w+2n-2}} + \ldots\right]$$

elde edilir. Bu ise istenilen (59) formülüdür.

Teorem 2.2.5. Eğer $f_n(x_1,\ldots,x_p)$, n-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\frac{1}{r^{p-2}}=(-1)^n(p-2)p(p+2)\dots(p+2n-4)\frac{1}{r^{2n+p-2}}$$

$$\cdot\left\{1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n+p-4)}+\frac{r^4\nabla^4}{2.4.(2n+p-4)(2n+p-6)}-\cdots\right\}f_n(x_1,\dots,x_p) \qquad (62)$$

dir. Burada $r^2=x_1^2+\cdots+x_p^2$ ve $\Delta=\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_p^2}$

dir.

İspat : (59) ifadesinde $w=p-2$ yazalım. Bu durumda

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\frac{1}{r^{p-2}}=(-1)^n(p-2)p(p+2)\dots(p+2n-4)r^{2-2n-p}$$

$$\cdot\left[f_n(x_1,\dots,x_p)+r^2f_{n-2}(x_1,\dots,x_p)+r^4f_{n-4}(x_1,\dots,x_p)+\cdots\right] \qquad (63)$$

dir. f_n ve ∇^2 sabit katsayılı lineer operatörlerinin

$$\nabla^2 f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)=f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\nabla^2$$

değişme özelliğinden ve de $\nabla^2\left(r^{2-p}\right)=0$ olmasından dolayı

$$\nabla^2 f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\frac{1}{r^{p-2}}=f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\nabla^2\left(\frac{1}{r^{p-2}}\right)=0$$

dır. Yani (63) ün birinci yanındaki $f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\frac{1}{r^{p-2}}$ ifadesi (57) Laplace denkleminin bir çözümüdür. O halde (63) ün ikinci yanı da (57) denkleminin bir çözümü olacaktır. Sonuç 2.2.3. den dolayı, ikinci yandaki r^{2-2n-p} nin önündeki çarpan olan

$$V_n=f_n(x_1,\dots,x_p)+r^2f_{n-2}(x_1,\dots,x_p)+r^4f_{n-4}(x_1,\dots,x_p)+\cdots \qquad (64)$$

ifadesi de (57) denkleminin bir çözümü olmalıdır. (56) numaralı formülden dolayı aşağıdakiler yazılabilir.

$$\nabla^2\left(r^2f_{n-2}\right)=2(2n+p-4)f_{n-2}+r^2\nabla^2f_{n-2}$$

$$\nabla^2\left(r^4 f_{n-4}\right) = 4(2n+p-6)\, r^2 f_{n-4} + r^4 \nabla^2 f_{n-4}$$

$$\nabla^2\left(r^6 f_{n-6}\right) = 6(2n+p-8)\, r^4 f_{n-6} + r^6 \nabla^2 f_{n-6}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Yukarıdaki eşitlikler dikkate alınarak (64) ün her iki yanına ∇^2 operatörü uygulanır ve $\nabla^2(V_n) \equiv 0$ olduğu gözönünde tutulursa

$$\nabla^2(V_n) = \nabla^2(f_n) + \nabla^2\left(r^2 f_{n-2}\right) + \nabla^2\left(r^4 f_{n-4}\right) + \nabla^2\left(r^6 f_{n-6}\right) + \cdots$$

$$= \left(\nabla^2 f_n + 2(2n+p-4) f_{n-2}\right) r^0 + \left(\nabla^2 f_{n-2} + 4(2n+p-6) f_{n-4}\right) r^2$$

$$+ \left(6(2n+p-8) f_{n-6} + \nabla^2 f_{n-4}\right) r^6 + \cdots \quad \equiv 0$$

elde edilir. Bu ifadenin her r için sıfır olması $r^0, r^2, r^4, \ldots$ ün katsayılarının sıfır olması ile mümkündür. Bu durumda

$$f_{n-2} = -\frac{1}{2(2n+p-4)} \nabla^2 f_n$$

$$f_{n-4} = -\frac{1}{4(2n+p-6)} \nabla^2 f_{n-2} = (-1)^2 \frac{1}{2.4.(2n+p-4)(2n+p-6)} \nabla^4 f_n$$

$$f_{n-6} = -\frac{1}{6(2n+p-8)} \nabla^2 f_{n-4} = (-1)^3 \frac{1}{2.4.6.(2n+p-4)(2n+p-6)(2n+p-8)} \nabla^6 f_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot$$

olarak bulunurlar. Bu değerler (63) ifadesinde yerlerine yazılırlarsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) \frac{1}{r^{p-2}} = (-1)^n (p-2)p(p+2)\ldots(p+2n-4)\, \frac{1}{r^{2n+p-2}}$$

$$\cdot \left\{ 1 - \frac{r^2 \nabla^2}{2(2n+p-4)} + \frac{r^4 \nabla^4}{2.4.(2n+p-4)(2n+p-6)} - \cdots \right\}$$

elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Şimdi de bulunan $f_{n-2}, f_{n-4}, f_{n-6}, \ldots$ değerlerinin (64) ifadesini (57) denkleminin çözümü (küresel harmonik) yapabilen tek değerler olduğunu gösterelim.

$$V_n = f_n + r^2 f_{n-2} + r^4 f_{n-4} + r^6 f_{n-6} + \cdots$$

$$V_n^* = f_n + r^2 f_{n-2}^* + r^4 f_{n-4}^* + r^6 f_{n-6}^* + \cdots$$

ifadeleri (57) denkleminin n-yinci dereceden homogen iki farklı polinom çözümü olsunlar. Bu iki çözümün farkı olan

$$V_n - V_n^* = (f_n - f_n) + r^2\left\{\left(f_{n-2} - f_{n-2}^*\right) + r^2\left(f_{n-4} - f_{n-4}^*\right) + r^4\left(f_{n-6} - f_{n-6}^*\right) + \cdots\right\}$$

ya da kısaca

$$V_n - V_n^* = r^2 g_{n-2} \tag{65}$$

de (57) denkleminin bir çözümü olmalıdır. Burada

$$g_{n-2} = \left\{\left(f_{n-2} - f_{n-2}^*\right) + r^2\left(f_{n-4} - f_{n-4}^*\right) + r^4\left(f_{n-6} - f_{n-6}^*\right) + \cdots\right\}$$

dır. $\nabla^2(V_n - V_n^*) = \nabla^2(V_n) - \nabla^2(V_n^*) = 0$ olduğu ve (56) formülü dikkate alınarak (65) eşitliğinin her iki yanına Laplace operatörü uygulanırsa

$$\nabla^2(V_n - V_n^*) = \nabla^2\left(r^2 g_{n-2}\right) = 2(2 + 2(n-2) + p - 2)r^{2-2} g_{n-2} + r^2 \nabla^2 g_{n-2}$$

$$= 2(2n - 4 + p)g_{n-2} + r^2 \nabla^2 g_{n-2} = 0$$

olur ki buradan

$$g_{n-2} = r^2\left[-\frac{1}{2(2n-4+p)}\nabla^2 g_{n-2}\right] = r^2 h_{n-4}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\nabla^2\left(r^2 g_{n-2}\right)=\nabla^2\left(r^4 h_{n-4}\right)=4(4+2(n-4)+p-2)r^{4-2}h_{n-4}+r^4\nabla^2 h_{n-4}=0$$

dan

$$h_{n-4}=r^2\left[-\frac{1}{4(2n+p-6)}\nabla^2 h_{n-4}\right]=r^2 h_{n-6}$$

olur. Aynı uygulamaya devam edilirse

$$h_{n-6}=r^2 h_{n-8}\ ,\ \ldots,\ h_{n-2m}=r^{2m}h_{n-2m-2}$$

olarak elde edilirler. Bu durumda

$$g_{n-2}=r^2 h_{n-4}=r^4 h_{n-6}=\cdots=r^{2m}h_{n-2m-2}$$

olur. Burada n nin tek veya çift olması durumuna göre g_{n-2} yi ayrı ayrı inceleyelim ve her iki halde de sıfır olduğunu gösterelim.

(i) $n=2(m+1)$ çift sayı olsaydı,

$$g_{n-2}=r^{2m}h_0$$

olup, (65) ve bu son eşitlikten ve de (56) dan

$$0\equiv\nabla^2\left(r^2 g_{n-2}\right)=\nabla^2\left(r^4 h_{n-4}\right)=\cdots=\nabla^2\left(r^{2m+2}h_{n-2m-2}\right)$$

$$=\nabla^2\left(r^{2m+2}h_0\right)$$

$$=(2m+2)(2m+2+p-2)r^{2m}h_0+r^{2m+2}\nabla^2 h_0$$

elde edilir. $\nabla^2 h_0=0$ olduğundan bu eşitliğin sağlanması $h_0=0$ olmasını gerektirir. Bu ise $g_{n-2}=0$ verir.

(ii) $n=2m+3$ tek sayı olsaydı.

$$g_{n-2}=r^{2m}h_1$$

olup, benzer şekilde

$$0 \equiv \nabla^2\left(r^2 g_{n-2}\right) = \nabla^2\left(r^4 h_{n-4}\right) = \cdots = \nabla^2\left(r^{2m+2} h_{n-2m-2}\right)$$

$$= \nabla^2\left(r^{2m+2} h_1\right)$$

$$= (2m+2)(2m+2+2+p-2)r^{2m} h_1 + r^{2m+2}\nabla^2 h_1$$

bulunur ki bu $h_1 = 0$ olması halinde sağlanan bir eşitliktir. Buradan $g_{n-2} = 0$ olur. Bu durumda (65) den $V_n - V_n^* = 0$ olup , $V_n = V_n^*$ bulunur. Böylece bulunan $f_{n-2}, f_{n-4}, \ldots$ değerleri V_n ifadesini (57) denkleminin çözümü yapabilen tek değerlerdir.

2.3. p Boyutlu Uzayda Clerk-Maxwell Teorisi

Bu kesimde p değişkenli homogen diferensiyel operatörlerin bazı özelliklerini vererek, Teorem 2.2.5. in ispatını Clerk-Maxwell teorisi yardımıyla yeniden vereceğiz.

Teorem 2.3.1. Eğer $f_n(h_1,\ldots,h_p)$ ve $\psi_n(h_1,\ldots,h_p)$ n-yinci dereceden homogen polinomlar iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\psi_n(h_1,\ldots,h_p) = \psi_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)f_n(h_1,\ldots,h_p) \tag{66}$$

dır.

İspat : n bir doğal sayı, A_i, B_j ler reel sabitler $M = \{1,2,3,\ldots,N\}$ ve N n-yinci dereceden p değişkenli homogen bir polinomun bulunduracağı maksimum terim sayısı olmak üzere, $f_n(h_1,\ldots,h_p)$ fonksiyonu açık olarak,

$$f_n(h_1,\ldots,h_p) = \sum_{i\in M} A_i\, h_1^{k_1^i}\ldots h_p^{k_p^i} \tag{67}$$

ve

$$\psi_n(h_1,\ldots,h_p) = \sum_{j\in M} B_j\, h_1^{k_1^j}\ldots h_p^{k_p^j} \tag{68}$$

şeklinde yazılabilirler. Burada $k_1^i,...,k_p^i$, $k_1^j,...,k_p^j$ ler $\{0,1,2,...,n\}$ cümlesinin elemanları olup, $k_1^i+\cdots+k_p^i=n$ ve $k_1^j+\cdots+k_p^j=n$ dir. Kısmi türevler hakkındaki bilgiler gözönüne alınarak (67) ve (68) den aşağıdakileri yazabiliriz.

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},...,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\psi_n(h_1,...,h_p)=\left\{\sum_{i\in M}A_i\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{k_p^i}\right\}\left\{\sum_{j\in M}B_j h_1^{k_1^j}...h_p^{k_p^j}\right\}$$

$$=\sum_{\substack{i\in M\\ i\neq j}}\sum_{j\in M}A_iB_j\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{k_p^i}h_1^{k_1^j}...h_p^{k_p^j}+\sum_{j\in M}A_jB_j\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{k_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{k_p^j}h_1^{k_1^j}...h_p^{k_p^j}$$

$$=0+\sum_{j\in M}A_jB_j\left(k_1^j\right)!...\left(k_p^j\right)!$$

$$=\sum_{i\in M}A_iB_i\left(k_1^i\right)!...\left(k_p^i\right)! \tag{69}$$

Benzer şekilde

$$\psi_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},...,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)f_n(h_1,...,h_p)=\left\{\sum_{j\in M}B_j\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{k_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{k_p^j}\right\}\left\{\sum_{i\in M}A_i h_1^{k_1^i}...h_p^{k_p^i}\right\}$$

$$=\sum_{\substack{i\in M\\ i\neq j}}\sum_{j\in M}B_jA_i\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{k_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{k_p^j}h_1^{k_1^i}...h_p^{k_p^i}+\sum_{j\in M}B_iA_i\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{k_p^i}h_1^{k_1^i}...h_p^{k_p^i}$$

$$=0+\sum_{i\in M}B_iA_i\left(k_1^i\right)!...\left(k_p^i\right)! \tag{70}$$

elde edilir. İkinci yanları eşit olan (69) ve (70) in birinci yanları da eşit olacağından teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.2. Eğer $\psi_s(h_1,...,h_p)$ s-yinci dereceden homogen bir polinom ise o taktirde

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^s\psi_s(h_1,...,h_p)=s!\,\psi_s(x_1,...,x_p) \tag{71}$$

dir.

İspat : s bir doğal sayı , $M=\{1,2,...N\}$ ve N, s-yinci dereceden homogen p değişkenli bir polinomun bulunduracağı maksimum terim sayısı ve $k_1^i+k_2^i+\cdots+k_p^i=s$ olmak üzere, binom teoreminden dolayı

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^s=\sum_{i\in M}\frac{s!}{\left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{k_p^i} \tag{72}$$

yazılabilir. $\psi_s(h_1,...,h_p)$ homogen polinomu ise, açık olarak

$$\psi_s(h_1,...,h_p)=\sum_{j\in M}B_j h_1^{k_1^j}\ldots h_p^{k_p^j}\quad;\quad k_1^j+\cdots+k_p^j=s \tag{73}$$

şeklinde yazılabilecektir. Böylece (72) nin (73) e uygulanması ile

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^s\psi_s(h_1,...,h_p)$$

$$=\sum_{\substack{i\in M\\ i\neq j}}\sum_{j\in M}B_j\frac{s!}{\left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!}x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i}\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{k_p^i}h_1^{k_1^j}\ldots h_p^{k_p^j}$$

$$+\sum_{j\in M}B_j\frac{s!}{\left(k_1^j\right)!\ldots\left(k_p^j\right)!}x_1^{k_1^j}\ldots x_p^{k_p^j}\left(k_1^j\right)!\ldots\left(k_p^j\right)!$$

$$=s!\sum_{j\in M}B_j x_1^{k_1^j}\ldots x_p^{k_p^j}=s!\,\psi_s(x_1,...,x_p)$$

istenilen (71) eşitliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.3.3. $f_n(x_1,...,x_p)$, n-yinci dereceden homogen bir polinom olsun. $w=\phi(x_1,x_2,...,x_p)$ ve $F=F(w)$ ler n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi fonksiyonlar iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},...,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)F(w)=\chi_0\frac{d^nF}{dw^n}+\chi_1\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}+\chi_2\frac{d^{n-2}F}{dw^{n-2}}+\cdots+\chi_{n-1}\frac{dF}{dw} \tag{74}$$

dir. Burada $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$ ler sadece $x_1, \ldots, x_p$ değişkenlere bağlı belirli fonksiyonlar olup , kesin ifadeleri daha sonra elde edilecektir (bkz. (80) numaralı formül).

İspat : A_i ler sabitler, $M = \{1,2,3,\ldots,N\}$ ve N , n-yinci dereceden p değişkenli homogen bir polinomun bulunduracağı maksimum terim sayısı olmak üzere $f_n(x_1,\ldots,x_p)$ polinomu açık olarak

$$f_n(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{i \in M} A_i x_1^{k_1^i} \ldots x_p^{k_p^i}, \quad k_1^i + \cdots + k_p^i = n$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right) F(w) = \sum_{i \in M} A_i \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i} F(w) \tag{75}$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{\partial F(w)}{\partial x_1} = \frac{dF}{dw}\frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 F(w)}{\partial x_1^2} = \frac{d^2F}{dw^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{dF}{dw}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial^3 F(w)}{\partial x_1^3} = \frac{d^3F}{dw^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^3 \frac{d^2F}{dw^2}\left(3\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) + \frac{dF}{dw}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial^{k_1^i} F(w)}{\partial x_1^{k_1^i}} = B_0^i \frac{d^{k_1^i}F}{dw^{k_1^i}} + B_1^i \frac{d^{k_1^i-1}F}{dw^{k_1^i-1}} + \cdots + B_{k_1^i-1}^i \frac{dF}{dw}$$

olup, burada $B_0^i, B_1^i, \ldots, B_{k_1^i-1}^i$ katsayıları $x_1, \ldots, x_p$ nin fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde x_2 ye göre k_2^i defa türev alınırsa

$$\frac{\partial^{k_2^i}}{\partial x_2^{k_2^i}}\left(\frac{\partial^{k_1^i} F(w)}{\partial x_1^{k_1^i}}\right) = C_0^i \frac{d^{k_1^i+k_2^i} F(w)}{dw^{k_1^i+k_2^i}} + \cdots + C^i_{k_1^i+k_2^i-1} \frac{dF(w)}{dw}$$

olur. $C_0^i, C_1^i, \ldots, C^i_{k_1^i+k_2^i-1}$ ler $x_1, \ldots, x_p$ nin fonksiyonu olup, bu ifadenin x_3 e göre k_3^i defa türevi alınırsa

$$\frac{\partial^{k_3^i}}{\partial x_3^{k_3^i}}\left(\frac{\partial^{k_1^i+k_2^i} F(w)}{\partial x_1^{k_1^i} \partial x_2^{k_2^i}}\right) = D_0^i \frac{d^{k_1^i+k_2^i+k_3^i} F(w)}{dw^{k_1^i+k_2^i+k_3^i}} + \cdots + D_{k_1^i+k_2^i+k_3^i-1} \frac{dF(w)}{dw}$$

olup, burada $D_0^i, D_1^i, \ldots, D^i_{k_1^i+k_2^i+k_3^i-1}$ katsayıları $x_1, \ldots, x_p$ nin fonksiyonlarıdır. İşleme benzer şekilde devam edilip, eşitliğin her iki yanının son kez x_p ye göre k_p^i defa türevi alınırsa

$$\frac{\partial^{k_p^i}}{\partial x_p^{k_p^i}}\left(\frac{\partial^{k_1^i+k_2^i+\cdots+k_{p-1}^i} F(w)}{\partial x_1^{k_1^i} \partial x_2^{k_2^i} \cdots \partial x_{p-1}^{k_{p-1}^i}}\right) = K_0^i \frac{d^n F(w)}{dw^n} + K_1^i \frac{d^{n-1} F(w)}{dw^{n-1}} + \cdots + K^i_{n-1} \frac{dF(w)}{dw}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} K_j^i \frac{d^{n-j} F(w)}{dw^{n-j}}$$

elde edilir. K_j^i lerin $x_1, \ldots, x_p$ ye bağlı fonksiyonlar olduğu bu son türev ifadesini (75) de yerine koyarsak,

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) F(w) = \sum_{i \in M} A_i \sum_{j=0}^{n-1} K_j^i \frac{d^{n-j} F(w)}{dw^{n-j}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i \in M} A_i K_j^i\right) \frac{d^{n-j} F(w)}{dw^{n-j}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \chi_j \frac{d^{n-j} F(w)}{dw^{n-j}}$$

bulunur. Burada $\chi_j = \sum_{i \in M} A_i K_j^i$, $(j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ olup, χ_j ler sadece $x_1, \ldots, x_p$

nin fonksiyonlarıdır. Böylece istenilen (74) eşitliği elde edilmiş olur.

Şimdi $\chi_j(x_1,\ldots,x_p)$ lerin f_n ve ϕ fonksiyonlarına bağlı kesin ifadelerini elde edelim. Bununla ilgili teoremi vermeden önce hazırlık olması bakımından aşağıdaki iki lemmayı vereceğiz.

Lemma 2.3.4. $f_n(x_1,\ldots,x_p)$ n-yinci dereceden homogen bir polinom ve ϕ, $x_1,\ldots,x_p$ nin herhangi bir fonksiyonu ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\{\phi(x_1,\ldots,x_p)\}^n$$

$$= n!\left\{\chi_0+\chi_1\phi+\cdots+\frac{1}{m!}\chi_m\phi^m+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}\right\} \qquad (76)$$

dır.

İspat : (75) eşitliğinde $F\{\phi(x_1,\ldots,x_p)\}=\{\phi(x_1,\ldots,x_p)\}^n$ alalım. Bu durumda

$$\frac{dF}{d\phi}=n\phi^{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!}\phi^{n-1}$$

$$\frac{d^2F}{d\phi^2}=n(n-1)\phi^{n-2}=\frac{n!}{(n-2)!}\phi^{n-2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^{n-m}F}{d\phi^{n-m}}=n(n-1)\ldots(m+1)\phi^m=\frac{n!}{m!}\phi^m$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^{n-1}F}{d\phi^{n-1}}=n(n-1)\ldots 2.1\phi^{n-(n-1)}=n!\,\phi$$

$$\frac{d^nF}{d\phi^n}=\frac{n!}{(n-n)!}\phi^{(n-n)}=n!$$

$$\frac{d^{n+1}F}{d\phi^{n+1}}=0$$

oldukları dikkate alınarak (75) de bu türev değerleri yerlerine yazılırlarsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^n = n!\left\{\chi_0+\chi_1\phi+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\phi^{n-1}\right\}$$

elde edilir ki, bu ise istenilen (76) eşitliğidir.

Lemma 2.3.5. f_n ve ϕ ler Teorem 2.3.3. deki özelliklere sahip fonksiyonlar ve $x=(x_1,\dots,x_p)$, $h=(h_1,\dots,h_p)$ olmak üzere

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^n = \lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\}^n \quad (77)$$

dır.

İspat : (76) dan dolayı (77) eşitliğinin sol tarafı

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^n$$

$$= n!\left\{\chi_0+\chi_1\phi(x_1,\dots,x_p)+\cdots+\frac{1}{m!}\chi_m\phi^m(x_1,\dots,x_p)+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}(x_1,\dots,x_p)\right\} \quad (78)$$

şeklindedir. Diğer taraftan (76) da sabit bir $(x_1,\dots,x_p)$ noktası, komşuluğunda aşağıdaki işlemleri yapalım. $x_1,x_2,\dots,x_p$ ler yerine sırasıyla x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_p+h_p konulur ve $\frac{\partial}{\partial(x_1+h_1)}=\frac{\partial}{\partial h_1}$, $\frac{\partial}{\partial(x_2+h_2)}=\frac{\partial}{\partial h_2}$, ..., $\frac{\partial}{\partial(x_p+h_p)}=\frac{\partial}{\partial h_p}$ olacakları gözönünde tutulursa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial(x_1+h_1)},\frac{\partial}{\partial(x_2+h_2)},\dots,\frac{\partial}{\partial(x_p+h_p)}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\}^n$$

$$=f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\}^n$$

$$= n!\Big\{\chi_0(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)+\chi_1(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}(x_1+h_1,\dots,x_ph_p)\phi^{n-1}(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\Big\}$$

yazılabilecektir. Bu eşitliğin her iki yanında $h \to 0$ için limite geçilirse

$$\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\}^n$$

$$=\lim_{h\to 0} n!\left\{\chi_0(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)+\chi_1(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}(x_1+h_1,\dots,x_ph_p)\phi^{n-1}(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\right\}$$

$$=n!\left\{\chi_0+\chi_1\phi(x_1,\dots,x_p)+\frac{1}{2!}\chi_2\phi^2(x_1,\dots,x_p)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}(x_1,\dots,x_p)\right\} \quad (79)$$

elde edilir. (78) ve (79) eşitliklerinin sağ tarafları eşit olduklarından sol tarafları da eşit olmalıdır, bu istenilen (77) eşitliğini verir. Şimdi (74) deki χ_j lerin kesin ifadelerini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 2.3.6. (74) eşitliğindeki $\chi_m=\chi_m(x_1,\dots,x_p)$ $(m=1,2,\dots,n-1)$ katsayıları

$$\chi_m(x_1,\dots,x_p)=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^{n-m} \quad (80)$$

olarak verilebilirler.

İspat : Bu teoremi ispatlayabilmek için önce

$$\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\}^n=\{\phi(x_1,\dots,x_p)+[\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)]\}^n$$

yazıp eşitliğin sağ tarafına binom teoremi uygulanırsa

$$\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)\}^n$$
$$=\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!(n-t)!}\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^t\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^{n-t}$$

elde edilir. (77) eşitliğinde bu değer yerine konulursa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^n$$

$$=\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!(n-t)!}\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^t$$

$$.\ \{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^{n-t}$$

olur. İkinci yanı açarsak

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^n$$

$$=\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^n$$

$$+\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\frac{n!}{(n-1)!}\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^{n-1}$$

$$+\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^2\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^{n-2}+\dots$$

$$+\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1,\dots,x_p)\}^n\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^{n-n} \quad (81)$$

bulunur. (78) ve (81) eşitlikleri karşılaştırılırsa aynı kuvvetteki $\phi(x_1,\dots,x_p)$ lerin katsayılarının eşitliğinden aşağıdaki eşitlikler yazılabilecektir.

$$\frac{n!}{(n-1)!}\chi_{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}$$

$$\Rightarrow\quad \chi_{n-1}=\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!}\chi_{n-2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^2$$

$$\Rightarrow\quad \chi_{n-2}=\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^2$$

. . . .

$$\frac{n!}{(n-m)!}\chi_{n-m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^m$$

$$\Rightarrow\quad \chi_{n-m}=\frac{1}{m!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^m$$

Bu son eşitlikte, m yerine $n-m$ konursa

$$\chi_m=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\{\phi(x_1+h_1,\dots,x_p+h_p)-\phi(x_1,\dots,x_p)\}^{n-m}$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

Bir özel hal olarak $\phi=r^2=x_1^2+\dots+x_p^2$ olması durumunda χ katsayılarının Laplace operatörü cinsinden ifadeleri aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 2.3.7. $\phi(x_1,\dots,x_p)=x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2$ olması durumunda, Teorem 2.3.6. daki χ_m ler

$$\chi_m=\frac{2^{n-2m}}{m!}\nabla^{2m} f_n(x_1,\dots,x_p) \tag{82}$$

olarak verilebilirler.

İspat : $\phi(x_1,\dots,x_p)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2$ olması halinde (80) eşitliği

$$\chi_m(x_1,\dots,x_p)=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\left\{2(x_1h_1+\cdots+x_ph_p)+\left(h_1^2+\cdots+h_p^2\right)\right\}^{n-m}$$

şeklinde, yada ikinci tarafa binom teoremi uygulanarak

$$\chi_m(x_1,\dots,x_p)=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\sum_{\mu=0}^{n-m}\binom{n-m}{\mu}\left(h_1^2+\cdots+h_p^2\right)^{\mu}$$

$$\cdot\{2(x_1h_1+\cdots+x_ph_p)\}^{n-m-\mu}$$

biçiminde yazılabilecektir. Bu ifadede sadece $\mu=m$ ye karşılık gelen terim sıfırdan farklı olacağından

$$\chi_m(x_1,\dots,x_p)=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\binom{n-m}{m}\left(h_1^2+\cdots+h_p^2\right)^m$$

$$\{2(x_1h_1+\cdots+x_ph_p)\}^{n-2m}$$

$$=\frac{1}{m!\,(n-2m)!}\lim_{h\to 0} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\dots,\frac{\partial}{\partial h_p}\right)\left(h_1^2+\cdots+h_p^2\right)^m$$

$$\{2(x_1h_1+\cdots+x_ph_p)\}^{n-2m} \tag{83}$$

elde edilir. Teorem 2.3.1. den dolayı (83) eşitliği

$$\chi_m(x_1,\dots,x_p)=\frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!\,m!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}+x_2\frac{\partial}{\partial h_2}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{n-2m}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial h_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial h_p^2}\right)^m f_n(h_1,\dots,h_p) \tag{84}$$

şeklini alır. g_{n-2m}, $n-2m$-yinci dereceden homogen bir polinom olmak üzere

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial h_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial h_p^2}\right)^m f_n(h_1,\dots,h_p)=g_{n-2m}(h_1,\dots,h_p) \tag{84.a}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan Teorem 2.3.2. den dolayı

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{n-2m} g_{n-2m}(h_1,\dots,h_p)=(n-2m)!\,g_{n-2m}(x_1,\dots,x_p)$$

olacağı dikkate alınarak (84) den

$$\chi_m=\frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!\,m!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial h_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial h_p}\right)^{n-2m} g_{n-2m}(h_1,\dots,h_p)$$

$$=\frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!\,m!}(n-2m)!\;g_{n-2m}(x_1,\dots,x_p) \tag{84.b}$$

olacaktır. g_{n-2m} nin (84.a) ifadesinde $(h_1,\dots,h_p)$ yerine $(x_1,\dots,x_p)$ konulmuş şekli (84.b) de yerine yazılırsa

$$\chi_m = \frac{2^{n-2m}}{m!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)^m f_n(x_1, ..., x_p)$$

$$= \frac{2^{n-2m}}{m!} \nabla^{2m} f_n(x_1, ..., x_p)$$

elde edilir. Bu ise istenilendir. Bu son eşitlikte m yerine sıra ile $0, 1, ..., m-1$ değerleri kullanarak $\chi_0, \chi_1, ..., \chi_{m-1}$ lerin ifadeleri açık bir şekilde

$$\chi_0 = 2^n f_n(x_1, x_2, ..., x_p)$$

$$\chi_1 = \frac{2^{n-2}}{1!} \nabla^2 f_n(x_1, x_2, ..., x_p)$$

$$\chi_2 = \frac{2^{n-4}}{2!} \nabla^4 f_n(x_1, ..., x_p)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\chi_{m-1} = \frac{2^{n-2m+2}}{(m-1)!} \nabla^{2m-2} f_n(x_1, ..., x_p)$$

olarak bulunurlar.

Teorem 2.3.8. f_n , n-yinci dereceden homogen bir polinom, F , n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi bir fonksiyon ve $w = \phi(x_1, ..., x_p) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2$ iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_p}\right) F(w) = 2^n \frac{d^n F}{dw^n} f_n(x_1, ..., x_p) + \frac{2^{n-2}}{1!} \frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}} \nabla^2 f_n(x_1, ..., x_p)$$

$$+ \frac{2^{n-4}}{2!} \frac{d^{n-2}F}{dw^{n-2}} \nabla^4 f_n(x_1, ..., x_p) + \cdots + \frac{2^{n-2m}}{m!} \frac{d^{n-m}F}{dw^{n-m}} \nabla^{2m} f_n(x_1, ..., x_p) + \cdots \qquad (85)$$

dir.

İspat : (82) eşitliğindeki χ_m fonksiyonunda $m = 1, 2, ..., n-1$ konularak bulunan bu $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_m, ..., \chi_{n-1}$ değerleri (74) eşitliğinde yerlerine yazılırsa istenilen (85) eşitliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.3.9. Eğer $f_n(x_1,...,x_p)$, n-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\frac{1}{r^{p-2}}=(-1)^n(p-2)p(p+2)\dots(p+2n-4)\frac{1}{r^{2n+p-2}}$$

$$\left\{1-\frac{r^2\nabla^2}{2(2n+p-4)}+\frac{r^4\nabla^4}{2.4.(2n+p-4)(2n+p-6)}-\cdots\right\}f_n(x_1,...,x_p) \tag{86}$$

dir. Burada $r^2=x_1^2+...+x_p^2$ ve $\Delta=\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_p^2}$ Laplace operatörüdür.

İspat : (85) eşitliğinde $F(w)=F\left(r^2\right)=\phi(r)$ yazılırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\phi(r)=2^n\frac{d^n\phi(r)}{d\left(r^2\right)^n}f_n(x_1,...,x_p)+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}\phi(r)}{d\left(r^2\right)^{n-1}}\nabla^2 f_n(x_1,...,x_p)$$

$$+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}\phi(r)}{d\left(r^2\right)^{n-2}}\nabla^4 f_n(x_1,...,x_p)+\cdots+\frac{2^{n-2m}}{m!}\frac{d^{n-m}\phi(r)}{d\left(r^2\right)^{n-m}}\nabla^{2m}f_n(x_1,...,x_p)+\cdots \tag{87}$$

elde edilir. (87) eşitliğinde $\phi(r)=\dfrac{1}{r^{p-2}}$ alınırsa bu durumda

$$\frac{d\left(r^{-p+2}\right)}{dr^2}=\frac{d\left(w^{\frac{-p+2}{2}}\right)}{dw}=(-1)\,\frac{(p-2)}{2}\,r^{-p}$$

$$\frac{d^2\left(r^{-p+2}\right)}{d\left(r^2\right)^2}=\frac{d^2\left(w^{\frac{-p+2}{2}}\right)}{dw^2}=(-1)^2\,\frac{(p-2)p}{2^2}\,r^{-p-2}$$

. . . .

$$\frac{d^n\left(r^{-p+2}\right)}{d\left(r^2\right)^n}=\frac{d^n\left(w^{\frac{-p+2}{2}}\right)}{dw^n}=(-1)^n\,\frac{(p-2)p(p+2)\dots(p+2n-4)}{2^n}r^{-2n-p+2}$$

olurlar. Bu türev değerleri (87) eşitliğinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (86) eşitliği elde edilir.

Hatırlatalım ki Clerk-Maxwell teorisini kullanarak elde ettiğimiz (86) bağıntısı, daha önce Teorem 2.2.5. de Hobson teorisi kullanılarak ispatlanmıştı.

Sonuç 2.3.10. Eğer $Y_n(x_1,\dots,x_p)$, (57) Laplace denkleminin bir çözümü, yani harmonik bir fonksiyon ise, o taktirde

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\phi(r)=2^n\frac{d^n\phi(r)}{d\left(r^2\right)^n}Y_n(x_1,\dots,x_p) \tag{88}$$

dir.

İspat : f_n yerine Y_n alırsak (87) eşitliği

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\phi(r)=2^n\frac{d^n\phi(r)}{d\left(r^2\right)^n}Y_n(x_1,\dots,x_p)+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}\phi(r)}{d\left(r^2\right)^{n-1}}\nabla^2Y_n(x_1,\dots,x_p)$$

$$+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}\phi(r)}{d\left(r^2\right)^{n-2}}\nabla^4Y_n(x_1,\dots,x_p)+\cdots$$

şeklinde yazılabilir. $Y_n(x_1,\dots,x_p)$, (57) Laplace denkleminin bir çözümü olduğundan

$\nabla^2Y_n(x_1,\dots,x_p)=\nabla^4Y_n(x_1,\dots,x_p)=\cdots=0$ dır. Bu nedenle

$$Y_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)\phi(r)=2^n\frac{d^n\phi(r)}{d\left(r^2\right)^n}Y_n(x_1,\dots,x_p)$$

elde edilir ki bu (88) in kendisidir.

BÖLÜM 3

ULTRAHİPERBOLİK OPERATÖRLER İÇİN HOBSON ve CLERK-MAXWELL TEORİLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde, $p+q$ değişkenli homogen bir polinom tarafından tanımlanmış, homogen diferensiyel operatörlerin bazı özelliklerini inceleyip, bu tip operatörler ile ultrahiperbolik bir kısmi türev operatörü arasındaki önemli bazı bağıntıların gösterilmesi için iki farklı yol izlenecektir. Bunlar Hobson teorisi ve Clerk-Maxwell teorisidir.

3.2. Ultrahiperbolik Operatörler İçin Hobson Teorisi

Bu kısımda Hobson teorisindeki metodlar izlenecek ve bunun için de önce

$$L=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \tag{89}$$

ultrahiperbolik operatörü ile ilgili yardımcı teoremlerle işe başlanacaktır.

Tanım 3.2.1. $x=(x_1,\dots,x_p)\in R^p$, $y=(y_1,\dots,y_q)\in R^q$ ve $|x|=\left(x_1^2+\dots+x_p^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $|y|=\left(y_1^2+\dots+y_q^2\right)^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere $D=\{(x,y):|x|\geq|y|\}\subset R^{p+q}$ bölgesinde

$$r^2=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{j=1}^{q}y_j^2=|x|^2-|y|^2 \tag{90}$$

eşitliği ile tanımlanan r ye Lorentz uzaklığı ya da Lorentz metriği denilmektedir.

Teorem 3.2.1. $V_n(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ n-yinci dereceden homogen herhangi bir polinom ve m herhangi bir reel sayı olsunlar. O taktirde r Lorentz uzaklığı olmak üzere

$$L(r^mV_n)=m(m+p+q+2n-2)r^{m-2}V_n+r^mL(V_n) \tag{91}$$

dir.

İspat : $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(r^m V_n) = r^m \dfrac{\partial V_n}{\partial x_i} + mV_n x_i r^{m-2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(r^m V_n) = r^m \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_i^2} + 2m\frac{\partial V_n}{\partial x_i} r^{m-2} x_i + m(m-2)V_n r^{m-4} x_i^2 + mV_n r^{m-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(r^m V_n) = r^m \frac{\partial V_n}{\partial y_j} - my_j r^{m-2} V_n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}(r^m V_n) = r^m \frac{\partial^2 V_n}{\partial y_j^2} - 2my_j\, r^{m-2}\frac{\partial V_n}{\partial y_j} + m(m-2)V_n y_j^2 r^{m-4} - mV_n r^{m-2}$$

dir. Diğer taraftan Euler teoreminden dolayı $V = V_n(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ n-yinci dereceden homogen polinomu için

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial V_n}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{q} y_j \frac{\partial V_n}{\partial y_j} = nV_n$$

eşitliğinin sağlandığı gözönünde tutulursa

$$L(r^m V_n) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(r^m V_n) - \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}(r^m V_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left\{ r^m \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_i^2} + 2mx_i r^{m-2}\frac{\partial V_n}{\partial x_i} + m(m-2)V_n x_i^2 r^{m-4} + mV_n r^{m-2} \right\}$$

$$- \sum_{j=1}^{q} \left\{ r^m \frac{\partial^2 V_n}{\partial y_j^2} - 2my_j r^{m-2}\frac{\partial V_n}{\partial y_j} + m(m-2)V_n y_j^2 r^{m-4} - mV_n r^{m-2} \right\}$$

$$= r^m \left\{ \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 V_n}{\partial y_j^2} \right\} + 2mr^{m-2} \left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial V_n}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{q} y_j \frac{\partial V_n}{\partial y_j} \right\}$$

$$+ m(m-2)V_n r^{m-4} \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=1}^{q} y_j^2 \right) + mr^{m-2} V_n \left(\sum_{i=1}^{p} 1 + \sum_{j=1}^{q} 1 \right)$$

$$= r^m L(V_n) + 2mnr^{m-2} + m(m-2)V_n r^{m-2} + mV_n r^{m-2}(p+q)$$

$$= m(m+p+q+2n-2)V_n r^{m-2} + r^m L(V_n)$$

elde edilir ki bu istenilen (91) eşitliğidir.

Sonuç 3.2.2. $L(r^m) = m(m+p+q-2)r^{m-2}$ (92)

dir. Burada $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum\limits_{j=1}^{q} y_j^2$ ve m herhangi bir reel sayıdır.

İspat : (91) eşitliğinde $V_n = 1$ alınırsa ispat açıktır.

Sonuç 3.3.3. Eğer $V_n(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ n-yinci dereceden homogen polinomu

$$Lu = \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} = 0 \tag{93}$$

ultrahiperbolik denkleminin bir çözümü ise, o taktirde $r^{2-p-q-2n}V_n$ de (93) denkleminin $(2-p-q-n)$-yinci dereceden homogen bir çözümüdür. Burada r, (90) ile tanımlanan Lorentz uzaklığıdır.

İspat : m belirlenecek herhangi bir reel sabit olmak üzere hipotezden $L(V_n) = 0$ olduğu gözönünde tutularak (91) eşitliğinden

$$L(r^m V_n) = m(m+p+q+2n-2)V_n r^{m-2} \tag{94}$$

yazılabilir. Böylece $r^m V_n$ nin (93) Ultrahiperbolik denklemini sağlayabilmesi için m nin sıfır ya da $m = 2-p-q-2n$ olması gerektiği görülür. O halde $r^{2-p-q-2n}V_n$ (93) denkleminin bir çözümüdür. Homogen fonksiyonların bilinen özelliklerinden dolayı bu çözümün homogenlik derecesi $(2-p-q-2n)+n = 2-p-q-n$ olur.

Lemma 3.3.4. Eğer $f_n(x,y)$ fonksiyonu $k+\ell = n$ olmak üzere $x = (x_1,\dots,x_p)$ ve $y = (y_1,\dots,y_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ -yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) r^{-w} = (-1)^k w(w+2)\dots(w+2n-2)\left[\frac{f_n(x,y)}{r^{w+2n}} + \frac{f_{n-2}(x,y)}{r^{w+2n-2}} + \frac{f_{n-4}(x,y)}{r^{w+2n-4}} + \cdots\right] \tag{95}$$

dir. Burada $\frac{\partial}{\partial x}=(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_p}),\ \frac{\partial}{\partial y}=(\frac{\partial}{\partial y_1},...,\frac{\partial}{\partial y_q}),\ r^2=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{j=1}^{q}y_j^2$

ve $f_{n-2}, f_{n-4}, ...$ fonksiyonları altlarındaki indis derecelerinden homogen polinomlar ve de w bir reel parametredir.

İspat : $A_s$ler reel sabitler, $K=\{1,2,3,...,N\}$ ve N , n-yinci dereceden p+q değişkenli homogen bir polinomun bulunduracağı maksimum terim sayısı olmak üzere, $f_n(x,y)$ fonksiyonu açık olarak

$$f_n(x,y)=\sum_{s\in K}A_s x_1^{k_1^s}...x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}...y_q^{\ell_q^s};\qquad \sum_{i=1}^{p}k_i^s=k,\ \sum_{j=1}^{q}\ell_j^s=\ell \tag{96}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $k_1^s,...,k_p^s,\ell_1^s,...,\ell_q^s$ ler $\{0,1,2,...n\}$ cümlesinin elemanları olup $k+\ell=n$ dir. (96) dan dolayı

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)r^{-w}=\sum_{s\in K}A_s\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^s}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^s}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^s}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^s}r^{-w} \tag{97}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $r^{-w}=\left(\left(x_1^2+\cdots+x_p^2\right)-\left(y_1^2+\cdots+y_q^2\right)\right)^{-\frac{w}{2}}$ nin x_i ye göre k_i-yinci mertebeden türevi

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k_i}r^{-w}=(-1)^{k_i}w(w+2)...(w+2k_i-2)x_i^{k_i}r^{-w-2k_i}+a_1(w)x_i^{k_i-2}r^{-w-2k_i+2}$$

$$+a_2(w)x_i^{k_i-4}r^{-w-2k_i+4}+\cdots \tag{98}$$

ve benzer şekilde $r^{-\beta}$ nın y_j ye göre ℓ_j yinci mertebeden türevi

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^{\ell_j}r^{-\beta}=\beta(\beta+2)...(\beta+2\ell_j-2)y_j^{\ell_j}r^{-\beta-2\ell_j}+b_1(\beta)y_j^{\ell_j-2}r^{-\beta-2\ell_j+2}$$

$$+b_2(\beta)y_j^{\ell_j-4}r^{-\beta-2\ell_j+4}+\cdots \tag{99}$$

olurlar. (98) gözönünde tutularak r^{-w} nın, önce x_1 e göre k_1^s kez , sonra x_2 ye göre k_2^s kez ve nihayet x_p ye göre k_p^s kez ardışık türevleri alınırsa

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^s}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^s} r^{-w}=(-1)^{k_1^s+k_2^s+\ldots+k_p^s}w(w+2)\ldots\left(w+2\left(k_1^s+\cdots+k_p^s\right)-2\right)$$

$$\Big[x_1^{k_1^s}\ldots x_p^{k_p^s}r^{-w-2k_1^s\ldots-2k_p^s}+\{a_1^*(w)x_1^{k_1^s-2}x_2^{k_2^s}\ldots x_p^{k_p^s}+$$

$$+a_2^*(w)x_1^{k_1^s}x_2^{k_2^s-2}\ldots x_p^{k_p^s}+\cdots\}r^{-w-2k_1^s-\cdots-2k_p^s+2}+\cdots\Big]$$

olur. Benzer şekilde (99) gözönünde tutularak elde edilen bu son ifadenin y_1 re göre ℓ_1^s, y_2 ye göre ℓ_2^s,..., y_q ya göre ℓ_q^s kez ardışık türevleri alınırsa

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^s}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^s}\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^s}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^s}.r^{-w}$$

$$=(-1)^k w(w+2)\ldots(w+2n-2)[x_1^{k_1^s}\ldots x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}\ldots y_q^{\ell_q^s}r^{-w-2k_1^s\cdots-2\ell_q^s}$$

$$+\left(a_1^{**}(w)x_1^{k_1^s-2}x_2^{k_2^s}\ldots x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}\ldots y_q^{\ell_q^s}+a_2^{**}(w)x_1^{k_1^s}x_2^{k_2^s-2}\ldots x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}\ldots y_q^{\ell_q^s}+\cdots\right).$$

$$r^{-w-2k_1^s-\cdots-2k_p^s-\cdots-2\ell_q^s+2}$$

$$+\left(b_1^{**}(w)x_1^{k_1^s-4}x_2^{k_2^s}\cdots x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}\cdots y_q^{\ell_q^s}+b_2^{**}(w)x_1^{k_1^s}x_2^{k_2^s-4}\cdots x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}\cdots y_q^{\ell_q^s}+\cdots\right).$$

$$r^{-w-2k_1^s-\cdots-2\ell_q^s+4}+\cdots]$$

elde edilir. Bulunan bu son türev değeri (97) de yerine yazılır ve (96) tanımı dikkate alınırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)r^{-w}=\sum_{s\in K}A_s(-1)^k w(w+2)\ldots(w+2n-2)$$

$$.[x_1^{k_1^s}\ldots x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}\ldots y_q^{\ell_q^s}r^{-w-2k_1^s\cdots-2k_p^s-2\ell_1^s-\cdots-2\ell_q^s}+(a_1^{**}(w)x_1^{k_1^s-2}\ldots x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}\ldots y_q^{\ell_q^s}$$

$$+a_2^{**}(w)x_1^{k_1^s}x_2^{k_2^s-2}\ldots x_p^{k_p^s}y_1^{\ell_1^s}\ldots y_q^{\ell_q^s}+\cdots)r^{-w-2k_1^s-\cdots-2k_p^s-2\ell_1^s-\cdots-2\ell_q^s+2}+\cdots]$$

olup

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)r^{-w}=(-1)^k w(w+2)\ldots(w+2n-2).\left\{\frac{f_n(x,y)}{r^{w+2n}}+\frac{f_{n-2}(x,y)}{r^{w+2n-2}}+\cdots\right\}$$

elde edilir. Bu ise istenilen (95) formülüdür.

Tanım 3.3.5. (89) ile tanımlanan ultrahiperbolik kısmi türev operatörü L nin ardışık uygulanmış kuvvetleri

$$L^m = L\left(L^{m-1}\right) \quad , \quad m = 2,3,4,\ldots$$

şeklinde ifade edilen yüksek mertebeden lineer operatörlerdir.

Teorem 3.3.6. Eğer $f_n(x,y)$ fonksiyonu $k + \ell = n$ olmak üzere $x = (x_1,\ldots,x_p)$ ve $y = (y_1,\ldots,y_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ -yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) r^{2-p-q} = (-1)^k \frac{(p+q-2)(p+q)(p+q+2)\ldots(p+q+2n-4)}{r^{p+q+2n-2}}$$

$$.\left\{1 - \frac{r^2 L}{2(p+q+2n-4)} + \frac{r^4 L^2}{2.4.(p+q+2n-4)(p+q+2n-6)} - \cdots\right\} f_n(x,y) \qquad \textbf{(100)}$$

dir. Burada L, (89) ile tanımlanan ultrahiperbolik operatör ve r , (90) ile tanımlanan Lorentz uzaklığıdır.

İspat : (95) ifadesinde $w = p+q-2$ yazalım. Bu durumda

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) r^{2-p-q} = (-1)^k (p+q-2)(p+q)\ldots(p+q+2n-4) r^{-(p+q+2n-2)}$$

$$.\left(f_n + r^2 f_{n-2} + r^4 f_{n-4} + \cdots\right) \qquad \textbf{(101)}$$

dir. f_n ve L sabit katsayılı lineer operatörlerinin

$$L f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) L$$

değişme özelliğinden ve de $L\left(r^{-p-q+2}\right) = 0$ olmasından dolayı

$$L f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) r^{-p-q+2} = f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) L\left(r^{-p-q+2}\right)$$

dır. Yani (101) in birinci yanındaki $f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)r^{-p-q+2}$ ifadesi (93) Ultrahiperbolik denkleminin bir çözümüdür. O halde (101) in ikinci yanı da (93) denkleminin bir çözümü olacaktır. Sonuç 3.2.3 den dolayı (101) in ikinci yanındaki $r^{-(p+q+2n-2)}$ nin sağındaki çarpan olan

$$V_n = f_n + r^2 f_{n-2} + r^4 f_{n-4} + \cdots \tag{102}$$

ifadesi de (93) ultrahiperbolik denkleminin bir çözümü olmalıdır. (91) numaralı formülden dolayı aşağıdakiler yazılabilir.

$$L\left(r^2 f_{n-2}\right) = 2(p+q+2n-4)f_{n-2} + r^2 L(f_{n-2})$$

$$L\left(r^4 f_{n-4}\right) = 4(p+q+2n-6)r^2 f_{n-4} + r^4 L(f_{n-4})$$

$$L\left(r^6 f_{n-6}\right) = 6(p+q+2n-8)r^4 f_{n-6} + r^6 L(f_{n-6})$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Yukarıdaki eşitlikler dikkate alınarak (102) nin her iki yanına L ultrahiperbolik operatörü uygulanır ve $L(V_n) \equiv 0$ olduğu gözönünde tutulursa

$$L(V_n) = L(f_n) + L\left(r^2 f_{n-2}\right) + L\left(r^4 f_{n-4}\right) + L\left(r^6 f_{n-4}\right) + \cdots$$

$$= [Lf_n + 2(p+q+2n-4)f_{n-2}]\,r^0 + [L(f_{n-2}) + 4(p+q+2n-6)f_{n-4}]\,r^2$$

$$+[L(f_{n-4}) + 6(p+q+2n-8)f_{n-6}]r^4 + \cdots \quad \equiv 0$$

elde edilir. Bu ifadenin her r için sıfır olması $r^0, r^2, r^4, \ldots$ ün katsayılarının sıfır olması ile mümkündür. Bu durumda

$$f_{n-2} = -\frac{1}{2(p+q+2n-4)}L(f_n)$$

$$f_{n-4} = -\frac{1}{4(p+q+2n-6)}L(f_{n-2}) = (-1)^2\frac{1}{2.4.(p+q+2n-4)(p+q+2n-6)}L^2(f_n)$$

$$f_{n-6} = -\frac{1}{6(p+q+2n-8)}L(f_{n-4}) = (-1)^3\frac{1}{2.4.6.(p+q+2n-4)(p+q+2n-6)(p+q+2n-8)}L^3(f_n)$$

. . . .

olarak bulunurlar. Bu değerler (101) ifadesinde yerlerine yazılırlarsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)r^{2-p-q} = (-1)^k(p+q-2)(p+q)(p+q+2)\ldots(p+q+2n-4)r^{-(p+q+2n-2)}$$

$$\cdot\left\{1-\frac{r^2L}{2(p+q+2n-4)}+\frac{r^4L^2}{2.4.(p+q+2n-4)(p+q+2n-6)}-\cdots\right\}f_n(x,y)$$

elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Şimdi de bulunan $f_{n-2}, f_{n-4}, f_{n-6},\ldots$ değerlerinin (102) ifadesini (93) ultrahiperbolik denkleminin çözümü yapabilen tek değerler olduğunu gösterelim.

$$V_n = f_n + r^2 f_{n-2} + r^4 f_{n-4} + r^6 f_{n-6} + \cdots$$

$$V_n^* = f_n + r^2 f_{n-2}^* + r^4 f_{n-4}^* + r^6 f_{n-6}^* + \cdots$$

ifadeleri, (92) denkleminin n-yinci dereceden homogen iki farklı polinom çözümü olsunlar. L nin lineerliğinden dolayı bu iki çözümün farkı olan

$$V_n - V_n^* = (f_n - f_n) + r^2\left\{\left(f_{n-2}-f_{n-2}^*\right)+r^2\left(f_{n-4}-f_{n-4}^*\right)+r^4\left(f_{n-6}-f_{n-6}^*\right)+\cdots\right\}$$

ya da kısaca

$$V_n - V_n^* = r^2 g_{n-2} \tag{103a}$$

de (93) denkleminin bir çözümü olmalıdır. Burada

$$g_{n-2} = \left\{\left(f_{n-2}-f_{n-2}^*\right)+r^2\left(f_{n-4}-f_{n-4}^*\right)+r^4\left(f_{n-6}-f_{n-6}^*\right)+\cdots\right\}$$

dır. $L(V_n - V_n^*) = L(V_n) - L(V_n^*) = 0$ olduğu ve (91) formülü dikkate alınarak (103a) eşitliğinin her iki yanına L operatörü uygulanırsa

$$L(V_n - V_n^*) = L\left(r^2 g_{n-2}\right) = 2(p+q+2n-4)g_{n-2} + r^2 L(g_{n-2}) = 0$$

olur ki buradan

$$g_{n-2} = r^2\left[-\frac{L(g_{n-2})}{2(p+q+2n-4)}\right] = r^2 h_{n-4}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$L\left(r^2 g_{n-2}\right) = L\left(r^4 h_{n-4}\right) = 4(p+q+2n-6)r^2 h_{n-4} + r^4 L(h_{n-4}) = 0$$

dan

$$h_{n-4} = r^2\left[-\frac{L(h_{n-4})}{4(p+q+2n-6)}\right] = r^2 h_{n-6}$$

olur. Aynı uygulamaya devam edilirse

$$h_{n-6} = r^2 h_{n-8}$$

$$\cdots\cdots\cdot$$

$$h_{n-2m} = r^{2m} h_{n-2m-2}$$

olarak elde edilirler. Bu durumda

$$g_{n-2} = r^2 h_{n-4} = r^4 h_{n-6} = \cdots = r^{2m} h_{n-2m-2}$$

olur. Burada n nin tek veya çift olması durumuna göre g_{n-2} yi ayrı ayrı inceleyelim.

(i) $n = 2(m+1)$ çift sayı olsaydı ,

$$g_{n-2} = r^{2m} h_0$$

olup (103a) ve bu son eşitlikten ve de (91) den

$$0 \equiv L\left(r^2 g_{n-2}\right) = L\left(r^4 h_{n-4}\right) = \cdots = L\left(r^{2m+2} h_{n-2m-2}\right) = L\left(r^{2m+2} h_0\right)$$

$$= (2m+2)(2m+2+p+q-2)r^{2m}h_0 + r^2L(h_0)$$

$$= (2m+2)(2m+p+q)r^{2m}h_0 + r^2L(h_0)$$

elde edilir. Sıfırıncı dereceden homogen bir polinom olan h_0 sabiti için $L(h_0) = 0$ olduğundan bu eşitliğin sağlanması $h_0 = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise $g_{n-2} = 0$ verir.

(ii) $n = 2m+3$ tek sayı olsaydı

$$g_{n-2} = r^{2m}h_1$$

olup, benzer şekilde

$$0 \equiv L\left(r^2 g_{n-2}\right) = L\left(r^4 h_{n-4}\right) = \cdots = L\left(r^{2m+2}h_{n-2m-2}\right) = L\left(r^{2m+2}h_1\right)$$

$$= (2m+2)(2m+2+p+q+2-2)r^{2m}h_1 + r^{2m+2}L(h_1)$$

bulunur ki ancak bu $h_1 = 0$ olması halinde sağlanan bir eşitliktir. Buradan $g_{n-2} = 0$ olur. Bu durumda (103a) dan $V_n - V_n^* = 0$ olup, $V_n = V_n^*$ bulunur. Böylece bulunan $f_{n-2}, f_{n-4}, \ldots$ değerleri V_n ifadesini (93) denkleminin çözümü yapabilen tek değerlerdir.

3.3. Ultrahiperbolik Operatörler için Clerk-Maxwell Teorisi

Bu kesimde p + q değişkenli homogen diferensiyel operatörlerin bazı özelliklerini vererek Teorem 3.3.5. in ispatını Clerk-Maxwell teorisi yardımıyla yeniden ele alacağız.

Teorem 3.3.1. Eğer $f_n(x,y)$ ve $\psi_n(x,y)$ fonksiyonları $k+\ell = n$ olmak üzere $x = (x_1, \ldots, x_p)$ ve $y = (y_1, \ldots, y_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen polinomlar iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_n(x,y) = \psi_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)f_n(x,y) \tag{103}$$

dir. Burada $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_q}\right)$ dir.

İspat : n bir doğal sayı, A_i , B_j ler reel sabitler, $K=\{1,2,3,...,N\}$ ve N, n-yinci dereceden p + q değişkenli homogen bir polinomun bulunduracağı maksimum terim sayısı olmak üzere, f_n ve ψ_n fonksiyonları açık olarak

$$f_n(x,y)=\sum_{i\in K} A_i x_1^{k_1^i}...x_p^{k_p^i} y_1^{\ell_1^i}...y_q^{\ell_q^i}\ ,\ k_1^i+\cdots+k_p^i=k\ ,\ \ell_1^i+\cdots+\ell_q^i=\ell \tag{104}$$

$$\psi_n(x,y)=\sum_{j\in K} B_j x_1^{k_1^j}...x_p^{k_p^j} y_1^{\ell_1^j}...y_q^{\ell_q^j}\ ,\ k_1^j+\cdots+k_p^j=k\ ,\ \ell_1^j+\cdots+\ell_q^j=\ell \tag{105}$$

şeklinde yazılabilirler. Burada $k_1^i,...,k_p^i,\ell_1^i,...,\ell_q^i$, $k_1^j,...,k_p^j$, $\ell_1^j,...,\ell_q^j$ ler $\{0,1,2,...,n\}$ cümlesinin elemanları olup $k+\ell=n$ dir. Kısmi türevler hakkındaki bilgiler gözönüne alınarak (104) ve (105) ten aşağıdakileri yazabiliriz.

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_n(x,y)=\left\{\sum_{i\in K} A_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^i}\right\}$$

$$\cdot\left\{\sum_{j\in K} B_j x_1^{k_1^j}...x_p^{k_p^j} y_1^{\ell_1^j}...y_q^{\ell_q^j}\right\}$$

$$=\sum_{\substack{i\in K\\ i\neq j}}\sum_{j\in K} A_iB_j\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^i} x_1^{k_1^j}...x_p^{k_p^j} y_1^{\ell_1^j}...y_q^{\ell_q^j}$$

$$+\sum_{i\in K} A_iB_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^i} x_1^{k_1^i}...x_p^{k_p^i} y_1^{\ell_1^i}...y_q^{\ell_q^i}$$

$$=0+\sum_{i\in K} A_iB_i\left(k_1^i\right)!...\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!...\left(\ell_q^i\right)!$$

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_n(x,y)=\sum_{i\in K} A_iB_i\left(k_1^i\right)!...\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!...\left(\ell_q^i\right)! \tag{106}$$

Benzer şekilde

$$\psi_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)f_n(x,y)=\left\{\sum_{j\in K} B_j\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^j}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^j}\right\}$$

$$\cdot\left\{\sum_{i\in K} A_i x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i} y_1^{\ell_1^i}\ldots y_q^{\ell_q^i}\right\}$$

$$= \sum_{\substack{j\in K\\ j\neq i}} \sum_{i\in K} B_j A_i \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^j}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^j} x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i} y_1^{\ell_1^i}\ldots y_q^{\ell_q^i}$$

$$+\sum_{i\in K} B_i A_i \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^i} x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i} y_1^{\ell_1^i}\ldots y_q^{\ell_q^i}$$

$$= 0 + \sum_{i\in K} B_i A_i \left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!\ldots\left(\ell_q^i\right)!$$

$$\psi_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f_n(x,y) = \sum_{i\in K} A_i B_i \left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!\ldots\left(\ell_q^i\right)! \tag{107}$$

elde edilir. İkinci yanları eşit olan (106) ve (107) nin birinci yanları da eşit olacağından teorem ispatlanmış olur.

Uyarı : Bu teorem, x ve y değişkenlerinin herbirine göre ayrı ayrı homogenliğe ihtiyaç duyulmaksızın yine geçerlidir. Bu durum Bölüm 2 deki Teorem 2.3.1. de ispatlanmıştır.

Teorem 3.3.2. Eğer $\psi_s(u,v)$ fonksiyonu $k+\ell = s$ olmak üzere, $u=(u_1,\ldots,u_p)$ ve $v=(v_1,\ldots,v_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ -yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial u_1} + x_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots + x_p\frac{\partial}{\partial u_p} - y_1\frac{\partial}{\partial v_1} - \cdots - y_q\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^s \psi_s(u_1,\ldots,u_p,v_1,\ldots,v_q)$$

$$= (-1)^{\ell} s!\,\psi_s(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) \tag{108}$$

dir.

İspat : s bir doğal sayı, $K=\{1,2,\ldots,N\}$ ve N, p + q değişkenli s-yinci dereceden homogen bir polinomun bulunduracağı maksimum terim sayısı ve $k_1^i + \cdots + k_p^i + \ell_1^i + \cdots + \ell_q^i = s$ olmak üzere, binom teoreminden dolayı

$$(x_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial u_p}-y_1\frac{\partial}{\partial v_1}-\cdots-y_q\frac{\partial}{\partial v_q})^s$$

$$=\sum_{i\in K}\frac{s!}{\left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!\ldots\left(\ell_q^i\right)!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(x_p\frac{\partial}{\partial u_p}\right)^{k_p^i}\left(-y_1\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(-y_q\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^{\ell_q^i}$$

$$=(-1)^{\ell}\sum_{i\in K}\frac{s!}{\left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!\ldots\left(\ell_q^i\right)!}$$

$$\cdot\left(x_1\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(x_p\frac{\partial}{\partial u_p}\right)^{k_p^i}\left(y_1\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(y_q\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^{\ell_q^i} \tag{109}$$

yazılabilir. $\psi_s(u,v)$ fonksiyonu ise açık olarak

$$\psi_s(u,v)=\sum_{j\in K}B_j u_1^{k_1^j}\ldots u_p^{k_p^j}v_1^{\ell_1^j}\ldots v_q^{\ell_q^j}\ ,\ k_1^j+\cdots+k_p^j=k\ ,\ \ell_1^j+\cdots+\ell_q^j=\ell,\ k+\ell=s \tag{110}$$

şeklinde yazılabilecektir. Böylece (109) un (110) a uygulanması ile

$$(x_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial u_p}-y_1\frac{\partial}{\partial v_1}-\cdots-y_q\frac{\partial}{\partial v_q})^s\psi_s(u,v)$$

$$=(-1)^{\ell}\ s!\sum_{i\in K}\frac{1}{\left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!\ldots\left(\ell_q^i\right)!}x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i}y_1^{\ell_1^i}\ldots y_q^{\ell_q^i}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right)^{k_p^i}\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^{\ell_q^i}\cdot\sum_{j\in K}B_j u_1^{k_1^j}\ldots u_p^{k_p^j}v_1^{\ell_1^j}\ldots v_q^{\ell_q^j}$$

$$=(-1)^{\ell}\ s!\sum_{\substack{i\in K\\ i\neq j}}\sum_{j\in K}B_j\frac{1}{\left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!\ldots\left(\ell_q^i\right)!}x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i}y_1^{\ell_1^i}\ldots y_q^{\ell_q^i}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right)^{k_p^i}\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^{\ell_q^i}u_1^{k_1^j}\ldots u_p^{k_p^j}v_1^{\ell_1^j}\ldots v_q^{\ell_q^j}$$

$$+(-1)^{\ell} s! \sum_{j\in K} B_j \frac{x_1^{k_1^j}\ldots x_p^{k_p^j} y_1^{\ell_1^j}\ldots y_q^{\ell_q^j}}{\left(k_1^i\right)!\ldots\left(k_p^i\right)!\left(\ell_1^i\right)!\ldots\left(\ell_q^i\right)!}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{k_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right)^{k_p^j}\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^{\ell_1^j}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^{\ell_q^j}$$

$$.u_1^{k_1^j}\ldots u_p^{k_p^j} v_1^{\ell_1^j}\ldots v_q^{\ell_q^j}$$

$$=0+(-1)^{\ell} s! \sum_{j\in K} B_j x_1^{k_1^j}\ldots x_p^{k_p^j} y_1^{\ell_1^j}\ldots y_q^{\ell_q^j} = (-1)^{\ell} s!\, \psi_s(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$$

istenilen (108) eşitliği elde edilmiş olur.

Teorem 3.3.3. $k+\ell=n$ olmak üzere $f_n(x,y)$ fonksiyonu $x=(x_1,\ldots,x_p)$ ve $y=(y_1,\ldots,y_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom olsun. $w=\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$ ve $F=F(w)$ ler p + q boyutlu uzayın bir D bölgesinde n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi fonksiyonlar iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)F(w)=\chi_0\frac{d^nF}{dw^n}+\chi_1\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}+\cdots+\chi_{n-1}\frac{dF}{dw} \tag{111}$$

dır. Burada $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$ ler sadece $x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q$ değişkenlerine bağlı belirli fonksiyonlar olup, kesin ifadeleri daha sonra Teorem 3.3.6. da elde edilecektir.

İspat : A_i ler sabitler, $K=\{1,2,\ldots,N\}$ ve N, n-yinci dereceden p + q değişkenli homogen bir polinomun bulunduracağı maksimum terim sayısı ve $k_1^i+\cdots+k_p^i+\ell_1^i+\cdots+\ell_q^i=n$ olmak üzere, $f_n(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$ fonksiyonu açık olarak

$$f_n(x,y)=\sum_{i\in K} A_i x_1^{k_1^i}\ldots x_p^{k_p^i} y_1^{\ell_1^i}\ldots y_q^{\ell_q^i}\ ,\ k_1^i+\cdots+k_p^i=k\ ,\ \ell_1^i+\cdots+\ell_q^i=n\ ,\ k+\ell=n$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)F(w)=\sum_{i\in K} A_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^i}F(w) \tag{112}$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{\partial F(w)}{\partial x_1}=\frac{dF}{dw}\frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 F(w)}{\partial x_1^2}=\frac{d^2F}{dw^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{dF}{dw}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial^{k_1^i}F(w)}{\partial x_1^{k_1^i}}=B_0^i\frac{d^{k_1^i}F}{dw^{k_1^i}}+B_1^i\frac{d^{k_1^i-1}F}{dw^{k_1^i-1}}+\cdots+B_{k_1^i-1}^i\frac{dF}{dw}$$

olup, burada $B_0^i, B_1^i, \ldots, B_{k_1^i-1}^i$ katsayıları $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ değişkenlerinin fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde x_2 ye göre k_2^i defa türev alınırsa

$$\frac{\partial^{k_2^i}}{\partial x_2^{k_2^i}}\left(\frac{\partial^{k_1^i}F(w)}{\partial x_1^{k_1^i}}\right)=C_0^i\frac{d^{k_1^i+k_2^i}F(w)}{dw^{k_1^i+k_2^i}}+\cdots+C_{k_1^i+k_2^i-1}^i\frac{dF(w)}{dw}$$

olur. $C_0^i, C_1^i, \ldots, C_{k_1^i+k_2^i-1}^i$ lerin $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ lere bağlı fonksiyonlar olduğu bu ifadenin x_3 e göre k_3^i defa türevi alınırsa

$$\frac{\partial^{k_3^i}}{\partial x_3^{k_3^i}}\left(\frac{\partial^{k_1^i+k_2^i}F(w)}{\partial x_1^{k_1^i}\partial x_2^{k_2^i}}\right)=D_0^i\frac{d^{k_1^i+k_2^i+k_3^i}F(w)}{dw^{k_1^i+k_2^i+k_3^i}}+\cdots+D_{k_1^i+k_2^i+k_3^i-1}^i\frac{dF(w)}{dw}$$

olup, burada $D_0^i, D_1^i, \ldots, D_{k_1^i+k_2^i+k_3^i-1}$ katsayıları $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ nun fonksiyonlarıdır. İşleme benzer şekilde devam edilip, eşitliğin her iki yanının son kez y_q ya göre $\ell_q^{\,i}$ defa türevi alınırsa

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_q}\right)^{\ell_q^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\ell_1^i}\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{k_p^i}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1^i}F(w)$$

$$=P_0^i\frac{d^nF(w)}{dw^n}+P_1^i\frac{d^{n-1}F(w)}{dw^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}^i\frac{dF(w)}{dw}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}P_j^i\frac{d^{n-j}F(w)}{dw^{n-j}}$$

elde edilir. P_j^i lerin $x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q$ değişkenlerine bağlı fonksiyonlar olduğu bu son türev ifadesini (112) de yerine koyarsak,

$$
\begin{aligned}
f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)F(w) &= \sum_{i\in K} A_i \sum_{j=0}^{n-1} P_j^i \frac{d^{n-j}F(w)}{dw^{n-j}} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i\in K} A_i P_j^i\right)\frac{d^{n-j}F(w)}{dw^{n-j}} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\chi_j \frac{d^{n-j}F(w)}{dw^{n-j}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $\chi_j = \sum_{i\in K} A_i P_j^i$, $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ olup, χ_j ler sadece $x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q$ ların fonksiyonlarıdır. Böylece istenilen (111) eşitliği elde edilmiş olur.

Şimdi $\chi_j(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$ ların f_n ve ϕ fonksiyonlarına bağlı kesin ifadelerini elde edelim. Bununla ilgili teoremi vermeden önce hazırlık olması bakımından aşağıdaki iki lemmayı vereceğiz.

Lemma 3.3.4. $f_n(x,y)$ fonksiyonu $k+\ell=n$ olmak üzere, $x=(x_1,\ldots,x_p)$ ve $y=(y_1,\ldots,y_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom ve $\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$, $p+q$ boyutlu uzayın bir D bölgesinde n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi bir fonksiyon ise, o taktirde

$$
f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_q}\right)\{\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^n
$$

$$
= n!\left\{\chi_0+\chi_1\phi+\cdots+\frac{1}{m!}\chi_m\phi^m+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}\right\} \tag{113}
$$

dir.

İspat : (111) eşitliğinde $F\{\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}=\{\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^n$ alalım.

Bu durumda

$$
\frac{dF}{d\phi}=n\phi^{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!}\phi^{n-1}
$$

$$\frac{d^2F}{d\phi^2}=n(n-1)\phi^{n-2}=\frac{n!}{(n-2)!}\phi^{n-2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^{n-m}F}{d\phi^{n-m}}=n(n-1)\ldots(n-n+m+1)\phi^{m}=\frac{n!}{m!}\phi^{m}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^nF}{d\phi^n}=n!$$

$$\frac{d^{n+1}F}{d\phi^{n+1}}=0$$

oldukları dikkate alınarak (111) de bu türev değerleri yerlerine yazılırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_q}\right)\{\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^n=n!\ \{\chi_0+\chi_1\phi+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}\}$$

elde edilir ki bu istenilen (113) eşitliğidir.

Lemma 3.3.5. f_n ve ϕ ler Teorem 3.3.3. deki özelliklere sahip fonksiyonlar ve $u=(u_1,\ldots,u_p)$ ve $v=(v_1,\ldots,v_q)$ olmak üzere

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_q}\right)\{\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^n$$

$$=\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)\}^n \tag{114}$$

dir.

İspat : (112) den dolayı (113) eşitliğinin sol tarafi

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\{\phi(x,y)\}^n=\ n!\ \{\chi_0+\chi_1\phi+\cdots+\frac{1}{m!}\chi_m\phi^m+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}\} \tag{115}$$

şeklindedir. Diğer taraftan (113) de $(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$ noktasını sabit tutarak bu nokta komşuluğunda aşağıdaki işlemleri yapalım. $(x+u,y+v)\in D$ kalmak koşulu ile $x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q$ lar yerine sırası ile $x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q$ konulur ve

$$\frac{\partial}{\partial(x_1+u_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1},\ \frac{\partial}{\partial(x_2+u_2)}=\frac{\partial}{\partial u_2},\ \frac{\partial}{\partial(x_p+u_p)}=\frac{\partial}{\partial u_p},\ldots,\ \frac{\partial}{\partial(y_q+v_q)}=\frac{\partial}{\partial v_q}$$

olacakları gözönünde tutulursa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial(x_1+u_1)},\ldots,\frac{\partial}{\partial(x_p+u_p)},\frac{\partial}{\partial(y_1+v_1)},\ldots,\frac{\partial}{\partial(y_q+v_q)}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)\}^n$$

$$=f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)\}^n$$

$$=n!\ \{\chi_0(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)+\chi_1(x_1+u_1,\ldots,y_q+v_q)$$

$$.\phi(x_1+u_1,\ldots,y_q+v_q)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)$$

$$.\phi^{n-1}(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)\}$$

yazılabilecektir. Bu eşitliğin her iki yanında $(u,v)\to(0,0)$ için limite geçilirse

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)\}^n$$

$$=\lim_{(u,v)\to(0,0)} n!\ \{\chi_0(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)$$

$$+\chi_1(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)\phi(x_1+u_1,\ldots,y_q+v_q)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$\chi_{n-1}(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)\phi^{n-1}(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)\}$$

$$=n!\ \{\chi_0+\chi_1\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)+\frac{1}{2!}\chi_2\phi^2(x_1,\ldots,y_q)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}(x_1,\ldots,y_q)\}\tag{116}$$

elde edilir. (115) ve (116) eşitliklerinin sağ tarafları eşit olduklarından sol tarafları da eşit olmalıdır. Bu istenilen (114) eşitliğini verir. Şimdi (111) deki χ_j lerin kesin ifadelerini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.3.6. (111) eşitliğindeki $\chi_m = \chi_m(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)$, $(m = 0,1,...,n-1)$ katsayıları

$$\chi_m(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q) = \frac{1}{(n-m)!} \lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},...,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},...,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,...,x_p+u_p,...,y_q+v_q) - \phi(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)\}^{n-m} \qquad (117)$$

olarak verilebilirler.

İspat : Bu teoremi ispatlayabilmek için önce

$$\{\phi(x_1+u_1,...,x_p+u_p,y_1+v_1,...,y_q+v_q)\}^n$$

$$= [\phi(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q) + \{\phi(x_1+u_1,...,y_q+v_q) - \phi(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)\}]^n$$

yazılıp eşitliğin sağ tarafina Binom teoremi uygulanırsa

$$\{\phi(x_1+u_1,...,x_p+u_p,y_1+v_1,...,y_q+v_q)\}^n = \sum_{t=0}^{n} \frac{n!}{t!(n-t)!}\{\phi(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)\}^t$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,...,x_p+u_p,y_1+v_1,...,y_q+v_q) - \phi(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)\}^{n-t}$$

elde edilir. (114) eşitliğinde bu değer yerine konulursa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},...,\frac{\partial}{\partial y_q}\right)\{\phi(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)\}^n$$

$$= \lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},...,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},...,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!(n-t)!}\{\phi(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)\}^t$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,...,x_p+u_p,y_1+v_1,...,y_q+v_q) - \phi(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)\}^{n-t}$$

olur. İkinci yanı açarsak

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_q}\right)\{\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^n$$

$$=\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)\{\phi(x_1+u_1,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,y_q)\}^n$$

$$+\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)\frac{n!}{(n-1)!}\{\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\} \qquad (117a)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^{n-1}+\cdots$$

$$+\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)\{\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^n$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^{n-n}$$

bulunur. (114) ve (117a) eşitlikleri karşılaştırılırsa aynı kuvvetteki $\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$ ların katsayılarının eşitliğinden aşağıdaki eşitlikler yazılabilecektir.

$$\frac{n!}{(n-1)!}\chi_{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}$$

$$\Rightarrow \chi_{n-1}=\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,y_1+v_1,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!}\chi_{n-2}=\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^2$$

$$\Rightarrow \chi_{n-2}=\frac{1}{2!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^2$$

. . . .

$$\frac{n!}{(n-m)!}\chi_{n-m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^m$$

$$\Rightarrow \chi_{n-m}=\frac{1}{m!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^m$$

Bu son eşitlikte , m yerine n-m konulursa,

$$\chi_m=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\{\phi(x_1+u_1,\ldots,x_p+u_p,\ldots,y_q+v_q)-\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\}^{n-m}$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

Bir özel hal olarak $\phi=r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_q^2$ olması durumunda χ katsayılarının L ultrahiperbolik operatörü cinsinden ifadeleri aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 3.3.7. $\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots y_q)=\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_q^2$ olması durumunda Teorem 3.3.6. daki χ_m ler

$$\chi_m=\frac{(-1)^{\ell}\,2^{n-2m}}{m!}L^m f_n(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots y_q)\ ,\ (m=0,1,\ldots,n-1) \tag{118}$$

olarak verilebilirler. Burada $L^m f_n=L\left(L^{m-1}f_n\right)$, $m=1,\ldots,n-1$ ve $L^0 f_n=f_n$ dir.

İspat : $\phi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots y_q)=\left(x_1^2+\cdots+x_p^2\right)-\left(y_1^2+\cdots+y_q^2\right)$ olması halinde (117) eşitliği

$$\chi_m=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$.\left[2(x_1u_1+\cdots+x_pu_p-y_1v_1-\cdots-y_qv_q)+\left(u_1^2+\cdots+u_p^2-v_1^2-\cdots-v_q^2\right)\right]^{n-m}$$

şeklinde yada ikinci tarafa binom teoremi uygulanarak

$$\chi_m = \frac{1}{(n-m)!} \lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\dots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{n-m}\binom{n-m}{\mu}\left(u_1^2+\cdots+u_p^2-v_1^2-\cdots-v_q^2\right)^{\mu}$$

$$\cdot\{2(x_1u_1+\cdots+x_pu_p-y_1v_1-\cdots-y_qv_q)\}^{n-m-\mu}$$

biçiminde yazılabilecektir. Bu ifadede sadece $\mu = m$ ye karşılık gelen terim sıfırdan farklı, diğerleri sıfır olacağından

$$\chi_m = \frac{1}{(n-m)!} \lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\dots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)\binom{n-m}{m}$$

$$\cdot\left(u_1^2+\cdots+u_p^2-v_1^2-\cdots-v_q^2\right)^{m}\cdot\{2(x_1u_1+\cdots+x_pu_p-y_1v_1-\cdots-y_qv_q)\}^{n-2m}$$

$$= \frac{1}{m!\,(n-2m)!} \lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial}{\partial u_p},\frac{\partial}{\partial v_1},\dots,\frac{\partial}{\partial v_q}\right)$$

$$\cdot\left(u_1^2+\cdots+u_p^2-v_1^2-\cdots-v_q^2\right)^{m}\cdot\{2(x_1u_1+\cdots+x_pu_p-y_1v_1-\cdots-y_qv_q)\}^{n-2m} \quad (119)$$

elde edilir. Teorem 3.3.1. den dolayı (119) eşitliği

$$\chi_m(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q) = \frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!\,m!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial u_p}-y_1\frac{\partial}{\partial v_1}-\cdots-y_q\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^{n-2m}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial u_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial v_q^2}\right)^{m} f_n(u_1,\dots,v_q) \quad (120)$$

şeklini alır. f_n den türetilen $n-2m$ -yinci dereceden homogen bir polinom g_{n-2m} olmak üzere

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial u_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial v_q^2}\right)^{m} f_n(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$$

$$= g_{n-2m}(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q) \quad (121)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan Teorem 3.3.2. den dolayı

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial u_p}-y_1\frac{\partial}{\partial v_1}-\cdots-y_q\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^{n-2m} g_{n-2m}(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$$

$$=(-1)^{\ell} s!\, g_{n-2m}(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q) \qquad (122)$$

olacağı dikkate alınarak (120) den

$$\chi_m(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)=\frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!\,m!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial u_p}-y_1\frac{\partial}{\partial v_1}-\cdots-y_q\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^{n-2m}$$

$$\cdot g_{n-2m}(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$$

$$=(-1)^{\ell}\frac{2^{n-2m}}{(n-2m)!\,m!}(n-2m)!\, g_{n-2m}(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q) \qquad (123)$$

olacaktır. g_{n-2m} nin (121) ifadesinde $(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$ yerine $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ konulmuş şekli (123) de yerine yazılırsa

$$\chi_m(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)=(-1)^{\ell}\frac{2^{n-2m}}{m!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial y_q^2}\right)^{m}$$

$$.f_n(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$$

$$=(-1)^{\ell}\frac{2^{n-2m}}{m!}L^m f_n(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Teorem 3.3.8. f_n , n-yinci dereceden homogen bir polinom, $F(w)$, n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip, w nın herhangi bir fonksiyonu ve

$$w=\phi(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)=x_1^2+\cdots+x_p^2-y_1^2-\cdots-y_q^2$$

iseler , o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_q}\right)F(w)=(-1)^{\ell}\ \Big\{2^n\frac{d^nF}{dw^n}f_n(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$$

$$+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}L f_n(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}F}{dw^{n-2}}L^2 f_n(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)+\cdots$$

$$+\frac{2^{n-2m}}{m!}\frac{d^{n-m}F}{dw^{n-m}}L^m f_n(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)+\cdots\Big\} \qquad (124)$$

dir.

İspat : (118) eşitliğindeki χ_m fonksiyonunda $m=0,1,2,\ldots,n-1$ konularak bulunan bu $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m, \chi_{n-1}$ değerleri (111) eşitliğinde yerlerine yazılırsa istenilen (124) eşitliği elde edilmiş olur.

Teorem 3.3.9. Eğer $f_n(x,y)$ polinomu $k+\ell=n$ olmak üzere $x=(x_1,\ldots,x_p)$ ve $y=(y_1,\ldots,y_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)r^{2-p-q}=(-1)^k\frac{(p+q-2)(p+q)(p+q+2)\ldots(p+q+2n-4)}{r^{p+q+2n-2}}$$

$$\left\{1-\frac{r^2L}{2(p+q+2n-4)}+\frac{r^4L^2}{2.4.(p+q+2n-4)(p+q+2n-6)}-\cdots\right\}f_n(x,y) \qquad (125)$$

dir. Burada $r^2=x_1^2+\cdots+x_p^2-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_q^2$ ve $L=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$ dir.

İspat : (124) eşitliğinde $F(w)=F(r^2)=\phi(r)$ yazılırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_q}\right)\phi(r)=(-1)^{\ell}\ \Big\{2^n\frac{d^n\phi(r)}{d\left(r^2\right)^n}+2^{n-2}\frac{d^{n-1}\phi(r)}{d\left(r^2\right)^{n-1}}L$$

$$+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}\phi(r)}{d\left(r^2\right)^{n-2}}L^2+\cdots+\frac{2^{n-2m}}{m!}\frac{d^{n-m}\phi(r)}{d\left(r^2\right)^{n-m}}L^m+\cdots\Big\}f_n(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) \qquad (126)$$

elde edilir. (126) eşitliğinde özel olarak $\phi(r)=r^{2-p-q}$ seçilirse

$$\frac{d\left(r^{2-p-q}\right)}{d\left(r^{2}\right)}=\frac{d\left(w^{\frac{2-p-q}{2}}\right)}{dw}=\frac{2-p-q}{2}\,r^{-p-q}$$

$$\frac{d^{2}\left(r^{2-p-q}\right)}{d\left(r^{2}\right)^{2}}=\frac{d^{2}\left(w^{\frac{2-p-q}{2}}\right)}{dw^{2}}=(-1)^{2}\frac{(p+q-2)(p+q)}{2^{2}}\,r^{-p-q-2}$$

$$\frac{d^{3}\left(r^{2-p-q}\right)}{d\left(r^{2}\right)^{3}}=\frac{d^{3}\left(w^{\frac{2-p-q}{2}}\right)}{dw^{3}}=(-1)^{3}\frac{(p+q-2)(p+q)(p+q+2)}{2^{3}}\,r^{-p-q-4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^{n}\left(r^{2-p-q}\right)}{d\left(r^{2}\right)^{n}}=\frac{d^{n}\left(w^{\frac{2-p-q}{2}}\right)}{dw^{n}}=(-1)^{n}\frac{(p+q-2)(p+q)\ldots(p+q+2n-4)}{2^{n}}\,r^{-p-q-2n+2}$$

olurlar. Bu türev değerleri (126) eşitliğinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen (125) eşitliği elde edilmiş olur.

Hatırlatalım ki Clerk-Maxwell teorisini kullanarak elde ettiğimiz (125) bağıntısı daha önce Teorem 3.2.5. de Hobson teorisi kullanılarak ispatlanmıştı.

Sonuç 3.3.10. $k+\ell=n$ olmak üzere $x=(x_1,\ldots,x_p)$ ve $y=(y_1,\ldots,y_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen olan $f_n(x,y)$ polinomu, eğer (93) ultrahiperbolik denkleminin bir çözümü ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_q}\right)r^{2-p-q}=(-1)^{k}\frac{(p+q-2)(p+q)(p+q+2)\ldots(p+q+2n-4)}{r^{p+q+2n-2}}$$

$$.f_n(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) \qquad (126a)$$

dır.

İspat : $f_n(x,y)$, (93) Ultrahiperbolik denkleminin bir çözümü olduğundan

$$Lf_n(x,y) = L^2 f_n(x,y) = \cdots = 0$$

dır. Bu değerler (126) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p},\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_q}\right) r^{2-p-q} = (-1)^k \frac{(p+q-2)(p+q)(p+q+2)\dots(p+q+2n-4)}{r^{p+q+2n-2}}$$

$$.f_n(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$$

elde edilir ki bu (126a) nın kendisidir.

3.4. $L^* = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$ Ultrahiperbolik Operatörü için Hobson Teorisi

Bu ve bundan sonraki kısımda daha önce Kısım 3.2. de ele almış olduğumuz L^* operatöründen daha genel olan ve L^* yi içeren

$$L^* = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \tag{127}$$

ultrahiperbolik operatörünü gözönüne alarak, bu operatör ile ilgili Hobson ve Clerk-Maxwell teorilerinin geçerli kaldığını göstereceğiz. a_i ve b_j lerin pozitif reel sabitler olduğu L^* operatörü ile ilgili teoremlerin ispatlarında L^* operatörününkilere benzer yollar izleneceğinden teoremlerin bazılarında ispatlar tekrarlanmayacak, sadece açıklamalar verilecektir.

Tanım 3.4.1. $\frac{x}{a} = \left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p}\right) \in R^p$, $\frac{y}{b} = \left(\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right) \in R^q$ ve

$$\left|\frac{x}{a}\right| = \left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_p}{a_p}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ ve } \left|\frac{y}{b}\right| = \left(\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y_q}{b_q}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$D = \left\{\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right) : \left|\frac{x}{a}\right| \geq \left|\frac{y}{b}\right|\right\} \subset R^{p+q} \text{ bölgesinde}$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{j=1}^{q}\left(\frac{y_j}{b_j}\right)^2 = \left|\frac{x}{a}\right|^2 - \left|\frac{y}{b}\right|^2 \tag{128}$$

eşitliği ile tanımlanan r ye yine Lorentz uzaklığı yada Lorentz metriği diyeceğiz.

Teorem 3.4.2.

$$L^*(r^m) = m(m+p+q-2)\,r^{m-2} \tag{129}$$

dir. Burada r , (128) ile tanımlanan Lorentz uzaklığı L* ise (127) ile tanımlanan ultrahiperbolik operatördür.

İspat :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(r^m) = m\,r^{m-2}\,\frac{x_i}{a_i^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(r^m) = m(m-2)\,r^{m-4}\,\frac{x_i^2}{a_i^4} + m\,r^{m-2}\,\frac{1}{a_i^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(r^m) = -m\,r^{m-2}\,\frac{y_j}{b_j^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}(r^m) = m(m-2)\,r^{m-4}\,\frac{y_j^2}{b_j^4} - m\,r^{m-2}\,\frac{1}{b_j^2}$$

dir. Diğer taraftan

$$L^*(r^m) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2\,\frac{\partial^2(r^m)}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2\,\frac{\partial^2(r^m)}{\partial y_j^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i^2\left[m(m-2)r^{m-4}\frac{x_i^2}{a_i^4} + mr^{m-2}\frac{1}{a_i^2}\right] - \sum_{j=1}^{q} b_j^2\left[m(m-2)r^{m-4}\frac{y_j^2}{b_j^4} - mr^{m-2}\frac{1}{b_j^2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\left\{m(m-2)\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 r^{m-4} + mr^{m-2}\right\} - \sum_{j=1}^{q}\left\{m(m-2)r^{m-4}\left(\frac{y_j}{b_j}\right)^2 - mr^{m-2}\right\}$$

$$= m(m-2)r^{m-2} + mpr^{m-2} + mqr^{m-2}$$

$$= m(m+p+q-2)r^{m-2}$$

elde edilir ki bu istenilen (129) eşitliğidir.

Teorem 3.4.3. $D \subset R^{p+q}$ ve $u, v \in C^2(D)$ olan herhangi iki fonksiyon olsunlar. O taktirde

$$L^*(uv) = vLu + uLv + 2\left\{\sum_{i=1}^{p} a_i^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2 \frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_j}\right\} \tag{130}$$

dır. Burada $u = (u_1, ..., u_p)$, $v = (v_1, ..., v_q)$ dur.

İspat : $\dfrac{\partial(uv)}{\partial x_i} = v\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + u\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2(uv)}{\partial x_i^2} = 2\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial v}{\partial x_i} + v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$

olup simetriden dolayı

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y_j} = v\frac{\partial u}{\partial y_j} + u\frac{\partial v}{\partial y_j} \quad , \quad \frac{\partial^2(uv)}{\partial y_j^2} = 2\frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_j} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2}$$

dir. Diğer taraftan

$$L^*(uv) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2\left(2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right) - \sum_{j=1}^{q} b_j^2\left(2\frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_j} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2}\right)$$

olup, bulunan türev değerleri yukarıda yerlerine yazılırlarsa

$$L^*(uv) = v\left\{\sum_{i=1}^{p} a_i^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}\right\} + u\left\{\sum_{i=1}^{p} a_i^2\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2\frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2}\right\}$$

$$+2\left\{\sum_{i=1}^{p} a_i^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2 \frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_j}\right\}$$

$$= vL^*u + uL^*v + 2\left\{\sum_{i=1}^{p} a_i^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2 \frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_j}\right\}$$

elde edilir ki bu istenilen (130) eşitliğidir.

Teorem 3.4.4. $V_n(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$, n-yinci dereceden homogen herhangi bir polinom ve m herhangi bir reel sayı olsun. O taktirde

$$r^2=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2-\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{y_j}{b_j}\right)^2$$

olmak üzere

$$L^*(r^m V_n)=m(m+p+q+2n-2)\,r^{m-2}V_n+r^m L(V_n) \tag{131}$$

dir.

İspat : (130) eşitliğinde $u=r^m$, $v=V_n$ alalım

$$\frac{\partial r^m}{\partial x_i}=mr^{m-2}\frac{x_i}{a_i^2}\quad,\quad\frac{\partial r^m}{\partial y_j}=-mr^{m-2}\frac{y_j}{b_j^2}$$

dir. Diğer taraftan Euler teoreminden dolayı herhangi bir $V=V_n(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ homogen fonksiyonu için

$$\sum_{i=1}^{p}x_i\frac{\partial V_n}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{q}y_j\frac{\partial V_n}{\partial y_j}=nV_n$$

eşitliğinin sağlandığı ve

$$L^*(r^m)=m(m+p+q-2)\,r^{m-2}$$

olduğu gözönünde tutulursa

$$L^*(r^m V_n)=V_nL^*(r^m)+r^mL^*(V_n)+2\left\{\sum_{i=1}^{p}a_i^2\frac{\partial r^m}{\partial x_i}\frac{\partial V_n}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{q}b_j^2\frac{\partial r^m}{\partial y_j}\frac{\partial V_n}{\partial y_j}\right\}$$

$$=m(m+p+q-2)r^{m-2}V_n+r^mL^*(V_n)+2\left\{\sum_{i=1}^{p}a_i^2mr^{m-2}\frac{x_i}{a_i^2}\frac{\partial V_n}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{q}b_j^2mr^{m-2}\frac{y_j}{b_j^2}\frac{\partial V_n}{\partial y_j}\right\}$$

$$= m(m+p+q-2)r^{m-2}V_n + r^m L^*(V_n) + 2mnr^{m-2}V_n$$

$$= m(m+p+q+2n-2)r^{m-2}V_n + r^m L^*(V_n)$$

elde edilir. Bu ise istenilen (131) eşitliğini verir.

Lemma 3.4.5. Eğer $f_n(x,y)$ fonksiyonu $k+\ell=n$ olmak üzere $x=\left(\frac{x_1}{a_1},\ldots,\frac{x_p}{a_p}\right)$ ve $y=\left(\frac{y_1}{b_1},\ldots,\frac{y_q}{b_q}\right)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) r^{-w} = (-1)^k w(w+2)\ldots(w+2n-2)\left[\frac{f_n(x,y)}{r^{w+2n}} + \frac{f_{n-2}(x,y)}{r^{w+2n-2}} + \cdots\right] \tag{132}$$

dir. Burada $\frac{\partial}{\partial x}=\left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,a_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}=\left(b_1\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,b_q\frac{\partial}{\partial y_q}\right)$

$r^2=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2-\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{y_j}{b_j}\right)^2$ ve $f_{n-2}, f_{n-4},\ldots$ fonksiyonları altlarındaki indis derecelerinden homogen polinomlar ve w bir reel parametredir.

İspat : (132) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i$, $\frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümü yapıldığında (95) eşitliğinin x, y ler yerine ξ, η gelmiş şekli elde edilir. Bu teoremin ispatı Lemma 3.3.4. dekine benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.4.5. Eğer $f_n(x,y)$ fonksiyonu $k+\ell=n$ olmak üzere $x=\left(\frac{x_1}{a_1},\ldots,\frac{x_p}{a_p}\right)$ ve $y=\left(\frac{y_1}{b_1},\ldots,\frac{y_q}{b_q}\right)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) r^{2-p-q} = \frac{(-1)^k(p+q-2)(p+q)\ldots(p+q+2n-4)}{r^{p+q+2n-2}}$$

$$\cdot\left\{1-\frac{r^2L^*}{2(p+q+2n-4)}+\frac{r^4L^{*2}}{2.4.(p+q+2n-4)(p+q+2n-6)}-\cdots\right\} f_n(x,y) \tag{133}$$

dir. Burada L* , (127) ile tanımlanan ultrahiperbolik operatör ve r , (128) ile tanımlanan Lorentz uzaklığıdır.

İspat : (133) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümü yapıldığında (101) eşitliğinin x , y ler yerine ξ , η konulmuş şekli elde edilir. Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.6. dakine benzer şekilde yapılabilir.

3.5. $L^* = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} b_j^2 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$ **Ultrahiperbolik Operatörü için Clerk-Maxwell Teorisi**

Teorem 3.5.1. Eğer $f_n(x,y)$ ve $\psi_n(x,y)$ fonksiyonları $k+\ell=n$ olmak üzere $x=\left(\frac{x_1}{a_1},\ldots,\frac{x_p}{a_p}\right)$ ve $y=\left(\frac{y_1}{b_1},\ldots,\frac{y_q}{b_q}\right)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen polinomlar iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_n(x,y)=\psi_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)f_n(x,y) \qquad (134)$$

dir. Burada $\frac{\partial}{\partial x}=\left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,a_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}=\left(b_1\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,b_q\frac{\partial}{\partial y_q}\right)$ dur.

İspat : (134) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümü yapıldığında (103) ifadesinin ξ , η değişkenlerine bağlı olan ifadesi elde edilir. Teorem 3.3.1. dekine benzer şekilde ispat yapılır.

Teorem 3.5.2. Eğer $\psi_s(u,v)$ fonksiyonu $k+\ell=s$ olmak üzere $u=(u_1,\ldots,u_p)$ ve $v=(v_1,\ldots v_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{x_2}{a_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\cdots+\frac{x_p}{a_p}\frac{\partial}{\partial u_p}-\frac{y_1}{b_1}\frac{\partial}{\partial v_1}-\cdots-\frac{y_q}{b_q}\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^s\psi_s(u_1,\ldots,u_p,v_1,\ldots v_q)$$

$$=(-1)^\ell\, s!\,\psi_s\left(\frac{x_1}{a_1},\ldots,\frac{x_p}{a_p},\frac{y_1}{b_1},\ldots,\frac{y_q}{b_q}\right) \qquad (135)$$

dir.

İspat : (135) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümü yapıldığında (108) eşitliğinin x_i, y_j ler yerine sırasıyla ξ_i, η_j ler konulmuş ifadesi elde edilir. Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.2. ye benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.5.3. $k+\ell=n$ olmak üzere $f_n(x,y)$ fonksiyonu $x=\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p}\right)$ ve $y=\left(\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom olsun. $w=\phi\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p},\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right)$ ve $F=F(w)$ ler p+q boyutlu bir uzayın D bölgesinde n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi fonksiyonlar iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)F(w)=\chi_0\frac{d^nF}{dw^n}+\chi_1\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}+\dots+\chi_{n-1}\frac{dF}{dw} \tag{136}$$

dır. Burada χ_0 , χ_1 ,..., χ_{n-1} ler sadece $\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p},\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}$ değişkenlerine bağlı belirli fonksiyonlar olup, kesin ifadeleri Teorem 3.5.6. da elde edilecektir.

İspat : Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.3. ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Lemma 3.5.4. $f_n(x,y)$ fonksiyonu $k+\ell=n$ olmak üzere $x=\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p}\right)$ ve

$y=\left(\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom ve $\phi(x,y)$ p+q boyutlu uzayın bir D bölgesinde n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi bir fonksiyon ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\{\phi(x,y)\}^n=n!\left\{\chi_0+\chi_1\phi+\dots+\frac{1}{m!}\chi_m\phi^m+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}\right\} \tag{137}$$

dir.

İspat : (137) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümleri yapıldığında (113) eşitliğinin x ,y değişkenleri yerine ξ, η lar konulmuş şekli elde edilir. Bu Lemmanın ispatı da Lemma

3.3.4. dekine benzer şekilde yapılabilir.

Lemma 3.5.5. f_n ve ϕ ler Teorem 3.5.3. deki özelliklere sahip fonksiyonlar ve $u=(u_1,\dots,u_p)$ ve $v=(v_1,\dots,v_q)$ olmak üzere

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\{\phi(x,y)\}^n=\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)\{\phi(x+u,y+v)\}^n \tag{138}$$

dir.

İspat : (138) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümü yapıldığında (115) eşitliğinin x ,y değişkenleri yerine ξ, η lar konulmuş şekli elde edilir. Lemma 3.3.5. dekine benzer şekilde ispat yapılır.

Teorem 3.5.6. (136) eşitliğindeki χ_m $(m=0,1,2,\dots,n-1)$ katsayıları

$$\chi_m(x,y)=\frac{1}{(n-m)!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)\{\phi(x+u,y+v)-\phi(x,y)\}^{n-m} \tag{139}$$

olarak verilebilir. Burada $x=\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p}\right)$ $y=\left(\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right)$

$u=(u_1,\dots,u_p)$ ve $v=(v_1,\dots,v_q)$ dur.

İspat : (139) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümü yapıldığında (117) eşitliğinin x ,y değişkenleri yerine ξ , η konulmuş şekli elde edilir. Bu teoremin ispatı da Teorem 3.3.6. dakine benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.5.7. $\phi\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p},\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right)=\frac{x_1^2}{a_1^2}+\dots+\frac{x_p^2}{a_p^2}-\frac{y_1^2}{b_1^2}-\dots-\frac{y_q^2}{b_q^2}$

olması durumunda Teorem 3.5.6. daki χ_m ler

$$\chi_m=\frac{(-1)^\ell}{m!}2^{n-2m}L^{*m} f_n\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p},\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right),\ (m=0,1,\dots,n-1) \tag{140}$$

olarak verilebilir. Burada $L^{*m}=\left(\sum_{i=1}^{p} a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{q} b_i^2\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)^m$ dir.

İspat : (140) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümleri yapıldığında (118) eşitliğinin x ,y değişkenleri yerine sırasıyla ξ , η lar konulmuş şekli elde edilir. Bu teoremin ispatı da Teorem 3.3.7. ye benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.5.8. f_n , n-yinci dereceden homogen bir polinom, F(w) , n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip, w nin herhangi bir fonksiyonu ve

$$w=\phi\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p},\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right)=\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{x_p}{a_p}\right)^2-\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^2-\dots-\left(\frac{y_q}{b_q}\right)^2$$

iseler , o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)F(w)$$

$$=(-1)^{\ell}\left\{2^n\frac{d^nF}{dw^n}f_n(x,y)+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}L^*f_n(x,y)+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}F}{dw^{n-2}}L^{*2}f_n(x,y)+\cdots\right\} \qquad (141)$$

dir. Burada $x=\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p}\right)$, $y=\left(\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right)$ ve L^* (127) ile tanımlanan ultrahiperbolik operatördür.

İspat : (141) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümleri yapıldığında (124) eşitliğinin x , y ler yerine ξ , η lar konulmuş şekli bulunur. Teoremin ispatı Teorem 3.3.8. dekine benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.5.9. Eğer $f_n(x,y)$ polinomu $k+\ell=n$ olmak üzere $x=\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_p}{a_p}\right)$ ve $y=\left(\frac{y_1}{b_1},\dots,\frac{y_q}{b_q}\right)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ-yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)r^{2-p-q}=(-1)^k\frac{(p+q-2)(p+q)(p+q+2)\dots(p+q+2n-4)}{r^{p+q+2n-2}}$$

$$.\left\{1-\frac{r^2L^*}{2(p+q+2n-4)}+\frac{r^4L^{*2}}{2.4.(p+q+2n-4)(p+q+2n-6)}-\cdots\right\}f_n(x,y) \qquad (142)$$

dir. Burada, L* (127) ile tanımlanan ultrahiperbolik operatör , r ise (128) ile tanımlanan Lorentz uzaklığıdır.

İspat : (142) eşitliğinde $\frac{x_i}{a_i}=\xi_i, \frac{y_j}{b_j}=\eta_j$ dönüşümleri yapıldığında (125) eşitliğinin x , y ler yerine ξ , η lar konulmuş şekli elde edilir. Bu teoremin ispatı da Teorem 3.3.9. dakine benzer şekilde yapılabilir.

BÖLÜM 4

YÜKSEK BOYUTLU UZAYLARDA HOBSON ve CLERK-MAXWELL TEORİLERİ

4.1. Giriş

Bu bölümde $N+p+M+q$ boyutlu uzayda tanımlı, hiperbolik-parabolik tipten singüler katsayılı ve lineer bir kısmi türevli denklem ele alınıp, aynı uzayın değişkenleri arasında uygun dönüşümler yapılacak ve verilen denklem $p+q$ boyutlu uzayda ultrahiperbolik bir denkleme indirgenecektir. Daha sonra, dönüşmüş denklem üzerinde önceki bölümde verilmiş olan teoremlerin, $N+p+M+q$ boyutlu denklemin çözümleri için de geçerli olabileceği açıklanacaktır.

Bu bölümde ele alınacak olan $N+p+M+q$ boyutlu hiperbolik-parabolik tipten denklem

$$\mathcal{L}v=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{N_i} a_{ik}^2\frac{\partial^2 v}{\partial t_{ik}^2}+\frac{\alpha_i}{x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{m=1}^{M_j} b_{jm}^2\frac{\partial^2 v}{\partial z_{jm}^2}+\frac{\beta_j}{y_j}\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)=0 \qquad (143)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $N=N_1+N_2+\cdots+N_p$, $M=M_1+\cdots+M_q$ olup a_{ik} ve b_{jm} ler sıfırdan farklı pozitif sabitler, α_i ve β_j ler herhangi reel parametrelerdir. (143) denklemi için vereceğimiz Hobson ve Clerk-Maxwell teorilerine yardımcı olması amacıyla, önce aşağıdaki iki lemmayı verelim.

Lemma 4.1.1. $r=\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2\right)^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere

$$\nabla^2 u=\Delta u=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{N-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \qquad (144)$$

dir.

İspat : $r^2 = \sum_{j=1}^{N} x_j^2$ olacağından $\dfrac{\partial r}{\partial x_j} = \dfrac{x_j}{r}$, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_j^2} = \dfrac{r^2 - x_j^2}{r^3}$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_j^2} = \left(\frac{x_j}{r}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\left(r^2 - x_j^2\right)}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} \qquad j = 1,\ldots N$$

olup, bu değer (144) ün sol yanında yerine konursa

$$\Delta u = \nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{x_j^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{r^2 - x_j^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sum_{j=1}^{N} x_j^2 + \frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}\left(r^2 - x_j^2\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} r^2 + \frac{1}{r^3}\left(Nr^2 - r^2\right)\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

elde edilir ki bu istenilendir.

Lemma 4.1.2. $a_1, a_2, \ldots, a_N$ ler sıfırdan farklı reel sabitler ve $\rho = \left(\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_N^2}{a_N^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{N} a_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{N-1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} \qquad \textbf{(145)}$$

dur.

İspat : $\rho^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{x_j}{a_j}\right)^2$ olacağından

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_j} = \frac{1}{a_j^2}\frac{x_j}{\rho}, \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial x_j^2} = \frac{1}{a_j^4}\frac{a_j^2\rho^2 - x_j^2}{\rho^3}$$

dir. u nun türevleri ise

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{1}{a_j^2}\frac{x_j}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{a_j^2}\frac{x_j}{\rho}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{1}{a_j^4}\frac{a_j^2\rho^2 - x_j^2}{\rho^3}$$

olup,

$$a_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{x_j^2}{a_j^2\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{1}{a_j^2}\frac{a_j^2\rho^2 - x_j^2}{\rho^3} \quad ; \quad j = 1, \ldots, N$$

bulunur. Bu değer (145) in sol yanında yerine yazılırsa

$$\sum_{j=1}^{N} a_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\left(\frac{x_j}{a_j}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{1}{a_j^2}\frac{a_j^2\rho^2 - x_j^2}{\rho^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j^2}{a_j^2} + \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial u}{\partial \rho}\sum_{j=1}^{N}\left[\rho^2 - \left(\frac{x_j}{a_j}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\rho^2 + \frac{1}{\rho^3}\left[N\rho^2 - \rho^2\right]\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{N-1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

elde edilir. Bu ise istenilen (145) eşitliğini verir.

Teorem 4.1.3. $\alpha_i = 1 - N_i$, $\beta_j = 1 - M_j$ alınmak üzere

$$\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2 \quad , \quad \sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2 \tag{146}$$

dönüşümleri altında (143) denklemi

$$\mathcal{L}v = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} = 0 \tag{147}$$

denklemine indirgenir.

İspat : Lemma 4.1.2. den dolayı

$$\sum_{k=1}^{N_i} a_{ik}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t_{ik}^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{N_i - 1}{x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{148}$$

ve

$$\sum_{m=1}^{M_j} b_{jm}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z_{jm}^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} + \frac{M_j - 1}{y_j} \frac{\partial v}{\partial y_j} \tag{149}$$

olacaklarından, (148) ve (149) un (143) denkleminde yerlerine konulmasıyla

$$\mathcal{L}v = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{N_i + \alpha_i - 1}{x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \sum_{j=1}^{q} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} + \frac{M_j + \beta_j - 1}{y_j} \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) = 0 \tag{150}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\alpha_i = 1 - N_i$, $\beta_j = 1 - M_j$ oldukları gözönünde tutulursa (150) eşitliği

$$\mathcal{L}v = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} = 0$$

olur. Bu ise istenilendir.

4.2. (143) Denklemi için Hobson Teorisi

Teorem 4.2.1. Eğer $f_n(x, y)$ fonksiyonu, $k + \ell = n$ olmak üzere

$$x=\left(\left(\sum_{k=1}^{N_1}\left(\frac{t_{1k}}{a_{1k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{k=1}^{N_p}\left(\frac{t_{pk}}{a_{pk}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

ve

$$y=\left(\left(\sum_{m=1}^{M_1}\left(\frac{z_{1m}}{b_{1m}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{m=1}^{M_q}\left(\frac{z_{qm}}{b_{qm}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ -yinci dereceden homogen bir polinom ise o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)r^{-w}=(-1)^k w(w+2)\ldots(w+2n-2)\left[\frac{f_n(x,y)}{r^{w+2n}}+\frac{f_{n-2}(x,y)}{r^{w+2n-2}}+\cdots\right] \tag{151}$$

dir. Burada $r^2,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ ler sırasıyla

$$r^2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2-\sum_{j=1}^{q}\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 \tag{152}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left[\sqrt{\left(\frac{t_{11}}{a_{11}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{t_{1N_1}}{a_{1N_1}}\right)^2}\left(\frac{a_{11}^2}{t_{11}}\frac{\partial}{\partial t_{11}}+\cdots+\frac{a_{1N_1}^2}{t_{1N_1}}\frac{\partial}{\partial t_{1N_1}}\right),\ldots,\right.$$

$$\left.,\sqrt{\left(\frac{t_{p1}}{a_{p1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{t_{pN_p}}{a_{pN_p}}\right)^2}\left(\frac{a_{p1}^2}{t_{p1}}\frac{\partial}{\partial t_{p1}}+\cdots+\frac{a_{pN_p}^2}{t_{pN_p}}\frac{\partial}{\partial t_{pN_p}}\right)\right] \tag{153}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\left[\sqrt{\left(\frac{z_{11}}{b_{11}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z_{1M_1}}{b_{1M_1}}\right)^2}\cdot\left(\frac{b_{11}^2}{z_{11}}\frac{\partial}{\partial z_{11}}+\cdots+\frac{b_{1M_1}^2}{z_{1M_1}}\frac{\partial}{\partial z_{1M_1}}\right),\ldots,\right.$$

$$\left.,\sqrt{\left(\frac{z_{q1}}{b_{q1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z_{qM_q}}{b_{qM_q}}\right)^2}\left(\frac{b_{q1}^2}{z_{q1}}\frac{\partial}{\partial z_{q1}}+\cdots+\frac{b_{qM_q}^2}{z_{qM_q}}\frac{\partial}{\partial z_{qM_q}}\right)\right] \tag{154}$$

ifadelerine sahiptirler.

İspat : (151) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2$, $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında, Bölüm 3. te verilen (95) eşitliği elde edilir. Bu teoremin ispatı Lemma 3.3.4. deki gibidir.

Teorem 4.2.2. Eğer $f_n(x,y)$ fonksiyonu $k+\ell=n$ olmak üzere Teorem 4.2.1. deki özelliklere sahip bir polinom ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) r^{2-p-q} = (-1)^k \frac{(p+q-2)(p+q)(p+q+2)\ldots(p+q+2n-4)}{r^{p+q+2n-2}}$$

$$\left\{1 - \frac{r^2\mathcal{L}}{2(p+q+2n-4)} + \frac{r^4\mathcal{L}^2}{2.4.(p+q+2n-4)(p+q+2n-6)} - \cdots\right\} f_n(x,y) \quad (155)$$

dir. Burada $r^2, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ ler (152) , (153) , (154) numaralarıyla tanımlı ifadelere sahip olup, $\mathcal{L}$ operatörü (143) de $\alpha_i = 1-N_i$, $\beta_j = 1-M_j$ olması özel hallerine karşılık gelmektedir.

İspat : (155) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2$, $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında Bölüm 3 te verilen (100) eşitliği elde edilir. Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.6. daki gibidir.

4.3. (143) Denklemi için Clerk-Maxwell Teorisi

Teorem 4.3.1. Eğer $f_n(x,y)$ ve $\psi_n(x,y)$ fonksiyonları $k+\ell=n$ olmak üzere Teorem 4.2.1. deki özelliklere sahip homogen polinomlar iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_n(x,y) = \psi_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) f_n(x,y) \quad (156)$$

dir. Burada $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ ler (153) ve (154) numaralarla tanımlı ifadelere sahiptirler.

İspat : (153) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2$, $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında Bölüm 3 te verilen (103) eşitliği elde edilir. Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.1

deki gibidir.

Teorem 4.3.2. Eğer $\psi_s(u,v)$ fonksiyonu $k+\ell=s$ olmak üzere $u=(u_1,\ldots,u_p)$, $v=(v_1,\ldots,v_q)$ değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ -yinci dereceden homogen bir polinom ise, o taktirde

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+x_p\frac{\partial}{\partial u_p}-y_1\frac{\partial}{\partial v_1}-\cdots-y_q\frac{\partial}{\partial v_q}\right)^s\psi_s(u_1,\ldots,u_p,v_1,\ldots v_q)$$

$$=(-1)^{\ell}s!\psi_s(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) \qquad (157)$$

dir. Burada

$$x=\left(\left(\sum_{k=1}^{N_1}\left(\frac{t_{1k}}{a_{1k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{k=1}^{N_p}\left(\frac{t_{pk}}{a_{pk}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

ve

$$y=\left(\left(\sum_{m=1}^{M_1}\left(\frac{z_{1m}}{b_{1m}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{m=1}^{M_q}\left(\frac{z_{qm}}{b_{qm}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

dir.

İspat : (157) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2=x_i^2$, $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2=y_j^2$ dönüşümü yapıldığında Bölüm 3 te verilen (108) eşitliği elde edilir. Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.2. deki gibidir.

Teorem 4.3.3. $k+\ell=n$ olmak üzere $f_n(x,y)$ fonksiyonu

$$x=\left(\left(\sum_{k=1}^{N_1}\left(\frac{t_{1k}}{a_{1k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{k=1}^{N_p}\left(\frac{t_{pk}}{a_{pk}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

ve

$$y=\left(\left(\sum_{m=1}^{M_1}\left(\frac{z_{1m}}{b_{1m}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{m=1}^{M_q}\left(\frac{z_{qm}}{b_{qm}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ -yinci dereceden homogen bir polinom olsun. $w=\phi(x,y)$ ve $F=F(w)$ ler $N_1+\cdots+N_p+p+M_1+\cdots+M_q+q$ boyutlu bir uzayın bir D bölgesinde n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi fonksiyonlar iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)F(w)=\chi_0\frac{d^nF}{dw^n}+\chi_1\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}+\cdots+\chi_{n-1}\frac{dF}{dw} \tag{158}$$

dir. Burada $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ ler (153) ve (154) numaralarla tanımlı ifadelere sahiptirler. $\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_{n-1}$ ler sadece x ve y değişkenlerine bağlı belirli fonksiyonlar olup kesin ifadeleri Teorem 4.3.6. da elde edilecektir.

İspat : (158) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2=x_i^2$ ve $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2=y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında Bölüm 3 te verilen (111) eşitliği elde edilir. Teoremin bundan sonraki kısmının ispatı Teorem 3.3.3 deki gibidir.

Lemma 4.3.4. $f_n(x,y)$ fonksiyonu $k+\ell=n$ olmak üzere

$$x=\left(\left(\sum_{k=1}^{N_1}\left(\frac{t_{1k}}{a_{1k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{k=1}^{N_p}\left(\frac{t_{pk}}{a_{pk}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

ve

$$y=\left(\left(\sum_{m=1}^{M_1}\left(\frac{z_{1m}}{b_{1m}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{m=1}^{M_q}\left(\frac{z_{qm}}{b_{qm}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

değişkenlerine göre sırasıyla k ve ℓ -yinci dereceden homogen bir polinom ve $\phi(x,y)$ $N_1+\cdots+N_p+p+M_1+\cdots+M_q+q$ boyutlu uzayın bir D bölgesinde n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip herhangi bir fonksiyon ise, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\{\phi(x,y)\}^n = n!\left\{\chi_0+\chi_1\phi+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\chi_{n-1}\phi^{n-1}\right\} \tag{159}$$

dır. Burada $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ ler (153) ve (154) numaralarla tanımlı ifadelere sahiptirler.

İspat : (159) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2$ ve $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında Bölüm 3 te verilen (113) eşitliği elde edilir. Lemmanın bundan sonraki kısmının ispatı Lemma 3.3.4. deki gibidir.

Lemma 4.3.5. f_n ve ϕ ler Teorem 4.3.3. deki özelliklere sahip fonksiyonlar ve $u=(u_1,\ldots,u_p)$ ve $v=(v_1,\ldots,v_q)$ olmak üzere

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\{\phi(x,y)\}^n = \lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)\{\phi(x+u,y+v)\}^n \tag{160}$$

dir.

İspat : (160) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2$ ve $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında Bölüm 3 te verilen (115) eşitliği elde edilir. Lemmanın bundan sonraki kısmının ispatı Lemma 3.3.5. deki gibidir.

Teorem 4.3.6. (158) eşitliğindeki χ_m , $(m=0,1,2,\ldots,n-1)$ katsayıları

$$\chi_m(x,y) = \frac{1}{(n-m)!}\lim_{(u,v)\to(0,0)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)\{\phi(x+u,y+v)-\phi(x,y)\}^{n-m} \tag{161}$$

olarak verilebilirler. Burada $x=\left(\left(\sum_{k=1}^{N_1}\left(\frac{t_{1k}}{a_{1k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{k=1}^{N_p}\left(\frac{t_{pk}}{a_{pk}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ ve

$y=\left(\left(\sum_{m=1}^{M_1}\left(\frac{z_{1m}}{b_{1m}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{m=1}^{M_q}\left(\frac{z_{qm}}{b_{qm}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ olup $u=(u_1,\ldots,u_p)$ ve $v=(v_1,\ldots,v_q)$

dur.

İspat : (161) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2$ ve $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında Bölüm 3 te verilen (117) eşitliği elde edilir. Teoremin bundan sonraki kısmının ispatı Teorem 3.3.6. daki gibidir.

Teorem 4.3.7. $\phi = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 - \sum_{j=1}^{q}\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2$ olması özel durumunda Teorem 4.3.6. daki χ_m ler,

$$\chi_m = \frac{(-1)^\ell}{m!} 2^{n-2m} \mathcal{L}^m f_n(x,y) \quad , \quad (m = 0, \ldots, n-1) \tag{162}$$

olarak verilebilirler. Burada $x = \left(\left(\sum_{k=1}^{N_1}\left(\frac{t_{1k}}{a_{1k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left(\sum_{k=1}^{N_p}\left(\frac{t_{pk}}{a_{pk}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

$y = \left(\left(\sum_{m=1}^{M_1}\left(\frac{z_{1m}}{b_{1m}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left(\sum_{m=1}^{M_q}\left(\frac{z_{qm}}{b_{qm}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ ve $\mathcal{L}$ operatörü (143) ile tanımlanan hiperbolik-parabolik operatörde $\alpha_i = 1 - N_i$, $\beta_j = 1 - M_j$ konulmuş özel halidir.

İspat : (162) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2$ ve $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında $\alpha_i = 1 - N_i$, $\beta_j = 1 - M_j$ olmak üzere Bölüm 3 te verilen (118) eşitliği elde edilir. Teoremin bundan sonraki kısmının ispatı Teorem 3.3.7. deki gibidir.

Teorem 4.3.8. f_n , n-yinci dereceden homogen bir polinom F(w), n-yinci mertebeden sürekli türevlere sahip w nin herhangi bir fonksiyonu ve

$$w = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 - \sum_{j=1}^{q}\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2$$

iseler, o taktirde

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)F(w) = (-1)^\ell \; \{2^n \frac{d^n F}{dw^n} f_n(x,y) + \frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}F}{dw^{n-1}}\mathcal{L} f_n(x,y)$$
$$+\frac{2^{n-4}}{2!}\frac{d^{n-2}F}{dw^{n-2}}\mathcal{L}^2 f_n(x,y) + \cdots\} \tag{163}$$

dir. Burada $x=\left(\left(\sum_{k=1}^{N_1}\left(\frac{t_{1k}}{a_{1k}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{k=1}^{N_p}\left(\frac{t_{pk}}{a_{pk}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

$y=\left(\left(\sum_{m=1}^{M_1}\left(\frac{z_{1m}}{b_{1m}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ldots,\left(\sum_{m=1}^{M_q}\left(\frac{z_{qm}}{b_{qm}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ olup $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ ler (153) ve (154) numaralarla tanımlanan ifadelerdir. $\mathcal{L}$ ise (143) de $\alpha_i = 1 - N_i$, $\beta_j = 1 - M_j$ özel hallerindeki operatördür.

İspat : (163) eşitliğinde $\sum_{k=1}^{N_i}\left(\frac{t_{ik}}{a_{ik}}\right)^2 = x_i^2$ ve $\sum_{m=1}^{M_j}\left(\frac{z_{jm}}{b_{jm}}\right)^2 = y_j^2$ dönüşümleri yapıldığında $\alpha_i = 1 - N_i$, $\beta_j = 1 - M_j$ olmak üzere Bölüm 3 te verilen (124) eşitliği elde edilir. Teoremin bundan sonraki kısmının ispatı Teorem 3.3.8. deki gibidir.

KAYNAKLAR

[1]. **ABROMOWITZ, M. and SEGUN, I. A. 1972.** Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover Publications, Inc. New York.

[2]. **ALTIN, A. 1982.** Some Exponsion Formulas for a Class of Singular Partial Differential Equations, Proc. Amer. Math. Soc. 85, No 1, 42-46.

[3]. **ALTIN, A. 1988.** Hobson's Theorem for Ultrahyperbolic operators. Bulletin Calcutta Mathematical Society.

[4]. **BATEMAN, H. 1944.** Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Dover Publications, New York.

[5]. **BATEMAN, H. 1955.** The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Mation. Dover Publications, Inc.

[6]. **BELL, W. 1968.** Special Functions for Scientists and Engineers. D. Van Rand Campany Ltd, Canada.

[7]. **CARLSON, B. C. 1977.** Special Functions of Applied Mathematics Academic Press, Inc. New York, London.

[8]. **HOBSON, E. W. 1894.** On a Theorem in Differentiation and its Application to Spherical Harmonics, Proc. London. Math. Soc. 24, p.55-67.

[9]. **HOBSON, E. W. 1965.** The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Chelsea Publishing Company, New York.

[10]. **MACROBERT, T. M. 1967.** Spherical Harmonics. Pergaman Press, Oxford, London, Edinburg.

[11]. **PRASAD, G. 1912.** Über das Gaußsche Verfahren für die Zerlegung einer ganzen homogenen Funcktion in Kugelfunktionen, Math. Ann. 72, 435-436.

[12]. **SNEDDON, I. N. 1979.** Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry. Longman Inc. , New York

[13]. **STENBERG, W. I. and SMITH, L.T. 1982.** The Theory of Potential and Spherical Harmonics. The University of Toronto Press. Toronto, Canada.

[14]. **TOMESCU, I. 1975.** Inctroduction to Combinatorics. Collet's (Publishers) Ltd. London.

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Gaziantep ' in Kilis ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kilis ' te tamamladı. 1982 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü ' nden 1986 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 1986-1989 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı ' nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

1986 yılından beri Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü ' nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.