ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

34895

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ İLE ELDE EDİLEN RİESZ DÖNÜŞÜMLERİ

İsmail EKİNCİOĞLU

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 28.12.94 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından (100/100) Not Takdir Edilerek Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ İle Kabul Edilmiştir.

Prof.Dr.İ. Kaya ÖZKIN	Prof.Dr.Akif HACIYEV	Doç.Dr.Cemil YILDIZ
Danışman		

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ
İLE ELDE EDİLEN
RİESZ DÖNÜŞÜMLERİ

İsmail EKİNCİOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.İ.Kaya ÖZKIN
1994, sayfa: 57

Jüri: Prof.Dr.İ.Kaya ÖZKIN
Prof.Dr.AKİF HACIYEV
Doç.Dr.Cemil YILDIZ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm temel kavramlara ayrıldı. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan öteleme operatörleri ile ilgili bilgiler verildi. Üçüncü bölümde, Laplace-Bessel denkleminin çözümü için Ortalama Değer formülü elde edildi. Dördüncü bölümde, ilk $(n-2)$ değişkeni adi ve son iki değişkeni R^+ ötelemesi olan genelleştirilmiş öteleme operatörü ele alınmıştır. Bu ötelemenin Fourier-Bessel dönüşümü ile ilişkisi incelendi. Ayrıca Laplace-Bessel denklemini sağlayan homojen polinomların Fourier-Bessel dönüşümü bulundu. Bu incelemeler sonucunda genelleştirilmiş öteleme ile ilgili Riesz dönüşümleri tanımlandı. Bu Riesz dönüşümlerin, klasik Riesz dönüşümlerinin sağladığı koşulları sağladığı gösterildi.

ANAHTAR KELİMELER: Laplace-Bessel Operatörü, Fourier-Bessel dönüşümü, Homojen Polinomlar
Genelleştirilmiş öteleme
Riesz dönüşümü .

ABSTRACT

PhD Thesis

RIESZ TRANSFORMATIONS GENERATED BY A GENERALIZED SHIFT OPERATOR

İsmail EKİNCİOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof.Dr. İ.Kaya ÖZKIN
1994, sayfa: 57

Jury: Prof.Dr. İ.Kaya ÖZKIN
Prof.Dr. AKİF HACIYEV
Associate Prof.Dr. Cemil YILDIZ

This thesis consists of four chapters. The first chapter devoted to the fundemantel concepts. In the second chapter is mainly concerned with the basic definitions and background material related to the shift operators required for our study. In Chapter 3, we prove the mean value teorem for solution Laplace-Bessel equation. In the final chapter, we consider generalized shift operator which has first $n-2$ terms are ordinary shift and last two terms are R^+-shift. Also we study relations between the Fourier-Bessel operator and this generalized shift operator. Then we give the Fourier-Bessel transformation of homogeneous polinomial which holds Laplace-Bessel equations. Finally, we define Riesz transformations related to the shift operators and so we show that this Riesz transformations holds the conditon of classical Riesz transformation.

KEY WORDS: Laplace-Bessel Operators, Fourier-Bessel Transforms, Homogeneous Polynomial, Generalized shift operator Riesz transformations.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım sayın Prof.Dr. İ. Kaya ÖZKIN'a ve sayın Prof.Dr. Akif HACIYEV 'e teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbf{B_t}$	:	Bessel operatörü
D	:	Bölge
$\mathbf{D^+}$	:	D bölgesinin R_n^+da kalan kısmı
$\mathbf{D^{++}}$	:	D bölgesinin R_n^{++} da kalan kısmı
$\mathbf{d\Gamma}$	:	Kürenin hacim elemanı
dw	:	Kürenin yüzey elemanı
dg	:	Lebesgue ölçüsü
$\mathbf{\Delta}$	:	Laplasyen
$\mathbf{\Delta_B}$	:	Laplace-Bessel operatörü
$\hat{\mathbf{f}}$	:	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$\mathbf{F_B}$	:	Fourier-Bessel operatörü
$\hat{\hat{\mathbf{f}}}$	:	f fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümü
$\mathbf{f * K}$	:	Konvolüsyon
$\mathbf{\Gamma}$	:	Gamma fonksiyonu
$\mathbf{\Gamma^{00}}$	:	Son iki bileşeni sıfır olan düzlem
$\mathbf{J_\nu}$	:	ν. mertebeden bessel fonksiyonu
$\mathbf{K_j}$	:	Çekirdek
$\mathbf{K_R}$	:	R yarı çaplı kürenin içi
$\mathbf{K_R^+}$	:	K_R nin D^+ de kalan kısmı
p.v.	:	Esas değer (integralin)
$\mathbf{P_k}$	:	k mertebeli polinom

$\mathbf{R}_n^+$	: Üst yarı uzay
$\mathbf{R}^+$	: $(0, \infty)$ aralığı
$\mathbf{R_j}$	: Riesz dönüşümü (operatörü)
$\mathbf{S_1^{++}}$	: Birim kürenin R_n^{++} da kalan kısmı
$\mathbf{T^y}$	: Genelleştirilmiş öteleme
$\mathbf{T^{t_1 t_2}}$	: Son iki değişkene göre R_n^+ öteleme olan genelleşmiş öteleme
$\tau_{\mathbf{y}}$	: Adi öteleme
$\mathbf{W_R}$	: R yarı çaplı kürenin yüzeyi
$\mathbf{W_R^+}$	: W_R nin D^+ de kalan kısmı
$\mathbf{Z}_+$	: Schwartz Uzayı

Giriş

Riesz dönüşümleri ilk defa **1949** yılında **F.Riesz** tarafından incelenmiştir. Riesz dönüşümleri, Singüler integral teorisinde ve Potansiyel teoride çok önemli bir yer tutmaktadır. Çünkü, Riesz dönüşümleri, konjüge harmonik fonksiyonlar ile yakından ilgilidir. Diğer taraftan, bu dönüşümler en basit n-boyutlu singüler integrallerdir. Ayrıca Riesz dönüşümlerinin Fourier dönüşümleri yardımıyla bir çok kısmi diferensiyel operatör ile ilişkisi bulunmuştur. Örneğin, eğer $R_j f \quad (j = 1, 2 \ldots, n)$, f fonksiyonun Riesz dönüşümü ve Δf Laplasyeni ise, bu durmda

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \ \partial x_k} \right)^{\wedge}(x) \ = \ -(R_j \ R_k \ \Delta f)^{\wedge}$$

dir. Burada $^{\wedge}$ Fourier dönüşümüdür. Riesz dönüşümleri

$$(R_j \ f)(x) \ = \ \lim_{\varepsilon \to 0} \ c_n \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \ f(x-y) \ dy \ , \qquad (j = 1, 2 \ldots, n) \tag{1}$$

konvolüsyon tipli operatördür, burada $c_n \ = \ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ dir. Bu integral operatörün çekirdeği $K_j(x) \ = \ \dfrac{\Omega_j}{|x|^n}$ dir, burada $\Omega_j \ = \ c_n \ \dfrac{x_j}{|x|}$ dir. Yani $\Omega_j(x)$ sıfırıncı mertebeden homojen fonksiyon ($\Omega_j(\lambda x) = \Omega_j(x), \quad \lambda > 0$) olmak üzere $K_j(x)$ çekirdeğinin $x = 0$ noktasında n. mertebeden singülerliği vardır. Kısaca Riesz dönüşümü bir singüler integraldir. Bu nedenle singüler integral teorisinin tüm önermeleri Riesz dönüşümleri için de geçerlidir.

Singüler integral teorisi uygulamalarında singüler integralin çekirdeğinin Fourier dönüşümü çok önemli bir yer tutmaktadır. Çekirdeğin Fourier dönüşümüne integralin **sembolü** denir. Sembolün özellikleri singüler integral denklemlerin çözümünün varlığı hakkında bilgi vermektedir. Singüler integraller konvolüsyon operatörler olduğundan bunların Fourier dönüşümleri, iki fonksiyonun (Çekirdeğin ve integral altı fonksiyonun) Fourier dönüşümlerinin çarpımıdır. Bu yöntemle, Riesz dönüşümlerinin Fourier dönüşümü kolayca bulunmaktadır. Çekirdeğin Fourier dönüşümü elde edildikten sonra Riesz dönüşümünün kendi Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(R_j\ f)\ (x)\hat{} = i\ \frac{x_j}{|x|}\ \hat{f}(x), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

dir, burada Riesz dönüşümünün sembolü $i\ x_j\ |x|^{-1}$ dir. (1) biçimindeki Riesz dönüşümleri aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$(R_j\ f)\ (x)\ =\ \lim_{\varepsilon \to 0}\ c_n \int\limits_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\ f(y)\, dy, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

dir. Dikkat edilirse, Riesz dönüşümünün çekirdeği x ve y nin farkıyla ilgilidir. Bu farka bir öteleme olarak bakılırsa diyebiliriz ki, Riesz dönüşümlerinin R^+ uzayında tanımlanmış öteleme ile ilişkisi vardır. Bu nedenle şöyle bir problem ortaya çıkmıştır: Açaba farklı bir öteleme tanımlamakla Riesz dönüşümü elde edilebilir mi ? Yani, genelleştirilmiş öteleme ile ilişkili ve yukarıda verilen Riesz dönüşümünün tüm özelliklerini sağlayan bir singüler integral bulunabilir mi ? Böyle bir problemin çözümü **1987** yılında **I.Aliev** tarafından verilmiştir. Bu makalede, ilk defa **1951** yılında **M.Levitan**'nın makalesinde verilen genelleştirilmiş öteleme ile ilgili olan Riesz dönüşümleri R_n^+'da elde edilmiştir. Bu makalede tanımlanmış olan Riesz dönüşümleri çekirdeğinin öteleme ile ilişkisi şu şekildedir. $(n-1)$ tane değişkene adi ve n.değişkene ise genelleştirilmiş öteleme uygulanmıştır. Yani

$$T_x^y\ f(x)\ =\ c_\nu \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha}\right)\ \sin^{2\nu-1}\alpha\ d\alpha$$

dir, burada $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ve

$$c_\nu\ =\ \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})}$$

dir.

Genelleştirilmiş ötelemeyle ilişkili potansiyeller ve singüler integraller **A.Hacıyev** ve **I.Aliev**'in makalelerinde incelenmştir. Bu çalışmalardaki potansiyel ve singüler integraller, $n-1$ değişkene göre adi ve n.değişkene göre R^+ öteleme olan genelleştirilmiş öteleme ile ilşkili fonksiyonlardır.

Bu çalışmaların incelenmesinden sonra şu problem ortaya çıkmıştır. *Genelleştirilmiş öteleme birden fazla değişkene göre uygulanırsa Riesz dönüşümünün sağladığı koşullar sağlanır mı ?* Çalışmamızda bu problemin çözümü araştırılmıştır ve bu çalışmada $(n-2)$ tane değişkene göre adi ve son iki değişkene göre R^+- öteleme olan genelleştirilmiş öteleme ile elde edilen Riesz dönüşümleri tanımlanmıştır.

Çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, adi ve genelleştirilmiş öteleme ile bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Çalışmamızın üçüncü ve dördüncü bölümü orijinal kısmı oluşturmaktadır. Problemimizin çözümü için gerekli olan ortalama değer formülü üçüncü bölümde elde edilmiştir. **1985** yılında **N.I. Kipriyanova**, Laplace-Bessel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad \nu > 0$$

olmak üzere $\Delta_B u + \lambda u = 0$ denkleminin çözümü için ortalama değer formülünü bulmuştur. Çalışmamızın bu kısmında Laplace-Bessel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} + \frac{\nu_1}{x_{n-1}}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\nu_2}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad \nu_1, \nu_2 > 0$$

olmak üzere, $\Delta_B u = 0$ denkleminin çözümü için ortalama değer formülü elde edilmiştir.

Çalışmamızın dördüncü bölümünde ilk $(n-2)$ değişkene göre adi ve son iki değişkene göre R^+- öteleme olan genelleştirilmiş ötelemeyle elde edilen Riesz dönüşümleri elde edilmiştir. Yani son iki değişkene göre Bessel diferensiyel operatörü ve ilk $(n-2)$ değişkene göre de Laplace diferensiyel operatör olarak uygulanan bir Laplace-Bessel diferensiyel operatörü için üçüncü bölümde elde edilen ortalama değer teoreminin kullanılmasıyla genelleştirilmiş öteleme ile ilişkili Riesz dönüşümleri tanımlanmıştır. Böylece genelleştirilmiş ötelemenin birden fazla değişkene göre uygulanması halinde Riesz dönüşümlerinin elde edilebileceği gösterilmiş olmaktadır.

BÖLÜM 1

1 Temel Kavramlar

1.1 Laplace Operatörü

Tanım 1.1.1: Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

Tanım 1.1.2:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

operatörüne R^n'de Laplace operatörü denir.

Tanım 1.1.3: G, R^n' nin açık irtibatlı alt cümlesi ve $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ da G de tanımlı n-değişkenli, bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

denklemine Laplace denklemi veya potansiyel denklemi denir. Bu denklemin çözümlerine potansiyel fonksiyonları veya harmonik fonksiyonlar denir.

1.2 Green Teoremi ve Formülleri

Teorem 1.2.1: *R^2 de bir G bölgesini sınırlayan basit kapalı pürüzsüz bir eğri, Γ olsun. P ve Q, G bölgesinde x ve y değişkenlerine göre birinci basamaktan kısmi türevleri sürekli herhangi iki fonksiyon ise bu durmda,*

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int\int_{G} [Q_x - P_y] dxdy$$

dir. Burada eşitliğin birinci terimi Γ *nın pozitif yönde bir eğrisel integraldir.*

R^3 de bir G bölgesini sınırlayan basit kapalı ve pürüzsüz bir eğri Γ ve u ile v G bölgesinde iki fonksiyon ise bu durumda,

$$\int\int\int_{G} [u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z] dg \; + \int\int\int_{G} v \Delta u \; dg \; = \int\int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

ve

$$\int\int\int_{G} [u \Delta v - v \Delta u] \; dg \; = \int\int_{\Gamma} [u \frac{\partial v}{\partial n} \; - \; v \frac{\partial u}{\partial n}] ds$$

birinci ve ikinci Green özdeşlikleri elde edilir. Burada $dg = dxdydz$, G nin hacim elemanı, n dış normalleridir. Ayrıca birinci formülde, u ve v fonksiyonları ile u nun birinci kısmi türevleri $G + \Gamma$ kapalı bölgesinde sürekliliği, u nun ikinci türevi ile v nin birinci kısmi türevleri G de de birinci türevlerinin sürekliliği kabul edilmiştir. İkinci formülde ise u ve v nin $G + \Gamma$ da birinci türevleri ile birlikte G deki ikinci türevlerinin sürekliliği kabul edilmiştir.

Tanım 1.2.2: Bir G bölgesinde sürekli ikinci türevlere sahip potansiyel denklemin çözümlerine G de regülerdir denir.

Teorem 1.2.3: **(Gauss İntegral Teoremi)** *Eğer bir u harmonik fonksiyonu bir G bölgesinde regüler ve* $G + \Gamma$ *da sürekli türevlenebilir ise bu durumda normal türevlerinin yüzey integrali sıfırdır.*

Kısaca bunu göstermek için eğer $\Delta u = 0$ ve $v = 1$ ise birinci Green özdeşliğinden,

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

bulunur.

1.3 Bessel Operatörü ve Fonksiyonu

Tanım 1.3.1:

$$B_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\nu}{r}\frac{d}{dr}, \quad \nu > 0, \quad t > 0$$

şeklinde ifade edilen B_r operatörüne Bessel operatörü denir.

Tanım 1.3.2: ν parametreli Laplace-Bessel operatörü,

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + Bx_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi aşağıdaki diferensiyel denklemi ele alalım.

$$-B_r u = \lambda^2 u, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0 \qquad (\lambda > 0)$$

bu denklemin çözümünü bulalım.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2\nu}{r}\frac{du}{dr} + \lambda^2 u = 0 \tag{1.1.1}$$

olur. Bu durumda $u = r^m w$ dönüşümünü uygulayalım.

$$\frac{du}{dr} = r^m \frac{dw}{dr} + mr^{m-1} w$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = r^m \frac{d^2w}{dr^2} + 2m\frac{dw}{dr}r^{m-1} + m(m-1)wr^{m-2}$$

olur. Bu ifadeler (1.1.1)' de yerine yazılırsa bu durumda,

$$\begin{aligned} & r^m \frac{d^2w}{dr^2} + 2m\frac{dw}{dr}r^{m-1} + m(m-1)wr^{m-1} + \frac{2\nu}{r}r^m \frac{dw}{dr} \\ & + \frac{2\nu}{r}mr^{m-1} w + \lambda^2 r^m w = 0 \end{aligned}$$

olur ve bu denklemden,

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{2(m+\nu)}{r}\frac{dw}{dr} + [\frac{m(m-1)+2\nu m}{r^2} + \lambda^2]w = 0$$

bulunur. Eğer $2(m+\nu) = 1$, $m = \frac{1}{2} - \nu$ ve $m(m-1) + 2\nu m = s^2$ ise bu durumda, $s = \pm(\nu - \frac{1}{2})$ bulunur. Şimdi $x = \lambda r$ dönüşümünü ele alırsak,

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + [\lambda^2 - \frac{s^2}{r^2}]w &= 0 \\ \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + [1 - \frac{s^2}{x^2}]w &= 0 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

s. mertebeden bessel denklemini elde ederiz. $x = 0$ noktası bu denklemin düzgün aykırı noktasıdır. Ohalde,

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}$$

serisini alalım. Bu durumda,

$$\frac{dw}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n\, x^{m+n-1}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n\, x^{m+n-2}$$

dir. Bu ifadeleri x^2 ile çarpıp (1.1.2) denkleminde yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n\, x^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n\, x^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{m+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} s^2 a_n\, x^{m+n} = 0$$

bulunur. Bu serileri düzenlersek,

$$[m(m-1)+m-s^2]a_0x^m + [m(m+1)+(m+1)-s^2]a_1x^{m+1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}[(m+n)+(n+m)(n+m-1)-s^2]a_n\, x^{m+n} = 0$$
$$(m^2-s^2)a_0x^m + [(m+1)^2-s^2]a_1x^{m+1} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\{[(m+n)^2-s^2]a_n + a_{n-2}\}\, x^{m+n} = 0$$

elde edilir. Bu denklemin sağlanması için,

$$(m^2-s^2)a_0 = 0, \qquad [(m+1)^2-s^2]a_1 = 0$$

ve

$$[(m+n)^2-s^2]a_n + a_{n-2} = 0 \qquad (n \geq 2)$$

olmalıdır. $a_0 \neq 0$ olduğundan, $m_1 = +s$ ve $m_2 = -s$ bulunur. İkinci denklemin sağlanması için $a_1 = 0$ olmalıdır. $m_1 = s$ değeri üçüncü denklemde yerine yazılırsa,

$$n(n+2s)a_n = -a_{n-2} \qquad n \geq 2$$

katsayılar bağıntısı elde edilir. Buradan $a_1 = a_3 = \ldots = 0$ olup,

$$a_2 = \frac{-1}{2(2+2s)}a_0 \quad , a_4 = \frac{-1}{4(4+2s)}a_2 \quad , a_6 = \frac{-1}{6(6+2s)}a_4, \quad \ldots \quad , a_{2n} = \frac{-1}{2n(2n+2s)}a_{2n-2}$$

dir. Bu katsayılar taraf tarafa çarpılarak,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n\ n!\ (1+s)(2+s)\ldots(n+s)}\ a_0 \qquad n \geq 1$$

bulunur. Ohalde birinci bağımsız çözüm,

$$w_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\ n!\ (1+s)(2+s)\ldots(n+s)}\ x^{2n+s} a_0 w_1(x)$$

$$= a_0\ x^s\ [1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!(1+s)\ldots(n+s)}]$$

elde edilir. Eğer,

$$a_0 = \frac{1}{2^s \Gamma(1+s)}$$

şeklinde seçilirse s. basamaktan birinci çeşit Bessel fonksiyonu olarak bilinen,

$$j_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(n+s+1)}$$

fonksiyonu bulunur. Burada,

$$\Gamma(n+s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{(s+1)(s+2)\ldots(s+k)}$$

formülü kullanılmıştır. Ohalde $s = \nu - \frac{1}{2}$ alırsak bu durumda,

$$j_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(n+\nu+\frac{1}{2})}$$

bulunur.

Tanım 1.3.3: n pozititif sayı olmak üzere Bessel fonksiyonu,

$$J_\nu(x) = \frac{(\frac{x}{2})^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{ix\cos\alpha}(\sin\alpha)^{2\nu} d\alpha$$

şeklindedir. Burada $\Gamma(\nu) = \int_0^\pi e^{-x}x^{\nu-1}dx$ ve $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ dir.

1.4 Fourier-Bessel Dönüşümü

Tanım 1.4.1: f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$L^p = L^p(\mathbf{R^n}) = \left\{ f : \int_{R^n} |f(x)|^p \, dx < \infty, \qquad 1 \leq p \leq \infty \right\}$$

p. mertebeden integrallenebilen fonksiyonların cümlesidir.

Tanım 1.4.2: (Fourier Dönüşümü) $x, y \in \mathbf{R^n}$ ve $x.y = <x, y> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ olmak üzere $f \in L(\mathbf{R^n})$ için, f fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$Ff(x) := \hat{f}(x) = \int_{R^n} e^{-2\pi ixy} \; f(y) \, dy$$

ile verilir.

Tanım 1.4.3: ($\mathcal{Z}_+$ **Schwartz Uzayı**) $\mathbf{R_n^+}$ da C^∞ sınıfına ait ve tüm türevleri bir polinom ile çarpıldığında sınırlı kalan fonksiyonlar uzayıdır ve $\mathcal{Z}_+$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathbf{R_n^+} = \{x : x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad , \quad x_n \geq 0\}$$

ise

$$\mathcal{Z}_+ = \left\{ f : \sup_{x \in R_n^+} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \;\; ve \;\; \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \right\}$$

dir. Burada $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ dir.

Tanım 1.4.4: $\mathbf{R_n^+} = \{x : x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \ , \quad x_n \geq 0\}$ olsun. $\nu > 0$ pozitif parametre ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $L_{p,\nu}$ uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L_{p,\nu} = \left\{ f(x) \ : \ \|f(x)\|_{p,\nu} = \left(\int_{R_n^+} |f(x)|^p \, x_n^{2\nu} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

dir.

Tanım 1.4.5: $\varphi(x) \in \mathcal{Z}_+(\mathbf{R_n^+}) = \mathcal{Z}_+ \ , \quad x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \ , \ y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ve $< x', y' > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_{n-1} y_{n-1}$ olsun . Bu durumda $\mathcal{Z}_+$ uzayında Fourier-Bessel dönüşümü,

$$[F_B \ \varphi](y) = c_\nu \int\limits_{R_n^+} \varphi(x) e^{-i<x',y'>} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n, y_n) x_n^{2\nu} dx$$

biçiminde tanımlanır. Burada $j_{\nu-\frac{1}{2}}$ (1.1.1) denkleminin çözümü ve

$$c_\nu = \left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \right]^{-1}$$

dir.

Lemma 1.4.6: *Eğer u D^{++}'da sürekli bir fonksiyon ise bu durumda,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m(\Gamma_\varepsilon)} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(s) \, ds = u(0)$$

dir. Burada $m(\Gamma_\varepsilon)$, Γ_ε nun lebesque ölçüsüdür.

İspat . $D^{++} \subset \mathbf{R_n^+}$ ve u D^{++}'da sürekli bir fonksiyon olduğundan, her $\eta > 0$ için en az bir δ_η vardır öyle ki $|s| < \delta$ iken $|u(s) - u(0)| < \eta$ dır. Bu durumda, $\varepsilon < \delta$ iken,

$$|\frac{1}{m(\Gamma_\varepsilon)}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(s)\,ds - u(0)| = |\frac{1}{m(\Gamma_\varepsilon)}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(s)\,ds - \frac{1}{m(\Gamma_\varepsilon)}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(0)\,ds|$$

$$\leq \frac{1}{m(\Gamma_\varepsilon)}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |u(s) - u(0)|\,ds$$

$$< \eta\,\frac{1}{m(\Gamma_\varepsilon)}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} ds = \eta$$

elde edilir. η keyfi bir sayı olduğu için,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{m(\Gamma_\varepsilon)}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(s)\,ds = u(0)$$

sonucu bulunur.

1.5 R^n de Singüler İntegraller

Tanım 1.5.1: f, $\mathbf{R^n}$ de ölçülebilir ve lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x \in \mathbf{R^n}$ için

$$(v.p\ f,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0<\varepsilon<|x|} f(x)\varphi(x)x_n^{2\nu}dx$$

ifadesine $f(x)$ in esas değeri denir.

Tanım 1.5.2: Her $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbf{R^n}$ için eğer $K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$ ise, $K(x)$ çekirdeğine α mertebeden homojendir denir.

Tanım 1.5.3: f ve K , $\mathbf{R^n}$ de tanımlı ve ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$h(x) = (f * K)\,(x) = \int\limits_{R^n} f(y)\,K(x-y)\,dy \tag{1.5.1}$$

biçimindeki $h(x)$ fonksiyonuna f ve K nın konvolüsyonu denir. Eğer $\alpha = n$ ise (1.5.1) integraline singüler integral denir, burada α , K nın homojenlik mertebesi ve n uzayın boyutudur.

Ayrıca,

$$(f * g)\hat{} = \hat{f}\,\hat{g}$$

biçiminde konvolüsyon ile Fourier operatörü arasında bir ilişki vardır. Aynı şekilde konvolüsyon ile Fourier-Bessel operatörü arasında böyle bir ilişki vardır.

Tanım 1.5.4: $f \in \mathbf{R^n}$ olsun. Bu durumda

$$(R_j\, f)(x) = c_n \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y|>\varepsilon} f(x-y)\, \frac{|y_j}{|y|^{n+1}}\, dy (j = 1, 2, \ldots, n)$$

n fonksiyonlarına Riesz dönüşümleri denir.

Eğer $K_j(x) = \Omega_j(x)|x|^{-n}$ $(\Omega_j(x) = c_n\, x_j\, |x|^{-1})$ ise $K_j(x)$ e Riesz çekirdeği denir. Burada

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

dir. Ohalde $R_j\, f = f * K_j$ dir.

Genelleştirilmiş öteleme ile ilgili singüler integraller ve bunların operatör özellikleri [Kipriyanov 1970] , [Kipriyanov ve Kuluchantsev 1970] ve [Aliev ve Gadjiev 1992] çalışmalarında incelemişlerdir.

BÖLÜM 2

2 Genelleştirilmiş Öteleme ve Özellikleri

M.Levitan 1951 yılında bir çalışmasında $(0,\infty)$ üst yarı uzayında R^+ nın bir ötelemesinin var olduğunu makalesinde göstermiştir [Levitan 1967] . Daha sonra Bessel diferensiyel operatörleri ile ilişkisini inceleyerek bu ötelemenin $(0,\infty)$ aralığındaki noktaları yine bu aralıktaki noktalara dönüştürdüğünü göstermiştir. **I.Kipriyanv 1967** yılında $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{+}$ n-boyutlu yarı uzayında genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır [Kipriyanov 1967] . Çalışmalarında, bu ötelemnin $(n-1)$ değişkene göre adi ve n.değişkene göre R^+ daki öteleme olarak ele almış, daha sonra Fourier-Bessel operatörü ile ilişkisini incelemiştir. R ve R^+ öttelemeleri bu bölümde verilmiştir.

2.1 Adi Öteleme

Tanım 2.1.1: $\tau_y\, f(x) = f(x+y)$ ile gösterilen x noktasını $x+y$ noktasına öteleyen operatöre R de adi öteleme denir.

Adi öteleme $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Dolayısıyla $\tau : R \rightarrow R$ dir. Bu şekildeki adi öteleme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ u(x,y) &= f(x) \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin çözümünün değişkenleri adi ötelemeye bağlıdır.

2.2 Genelleştirilmiş Öteleme

Şimdi R^+ daki ötelemeyi inceleyelim. B_t Bessel operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_x u &= B_y u \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_y(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin yani,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2p+1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.1.1}$$

denkleminin,

$$u|_{y=0} = f(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$u(x,y) = T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(2p+1)}{2^{2p-1}\Gamma^2(p+\frac{1}{2})}\cdot \int_0^\pi f[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]\ \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

şeklindedir. Bu formülde φ yi $\pi-\varphi$ ye dönüştürürsek ve Γ fonksiyonlarına ait olan,

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\frac{\Gamma(a)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$$

formülünü kullanırsak bu durumda,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot \int_0^\pi f[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]\ \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

elde edilir. Bu öteleme $(0,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Bu ötelemeye R^+ daki öteleme denir. Bu ifade de $T_x^0 f(x) = f(x)$ olduğu aşikardır. Ayrıca eğer $f(x)$ fonksiyonunun sürekli türevi varsa bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial y}T_x^y f(x)|_{y=0} = 0 \tag{2.1.2}$$

dir ve $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevi varsa bu durumda $T_x^y\ f(x)$, (2.1.1) denkleminin çözümüdür ve (2.1.2) başlangıç koşulları elde edilebilir. Ayrıca $x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$, $x, y \in R^n$ ve $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ve

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_{x_n}$$

Laplace-Bessel operatörü olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \frac{2p+1}{x_n}\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \frac{2p+1}{y_n}\ \frac{\partial u}{\partial y_n}$$

denkleminin yukarıda verilen başlangıç koşulları altındaki çözümü

$$T_x^y\ f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}. \int_0^{\pi} f[x' - y',\ \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cos\varphi}]\ \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

şeklindedir. Bu operatöre genelleştirilmiş öteleme operatörü denir [Levitan 1973].

Şimdi de T^y operatörünün aşağıdaki özelliklerini verelim T^y operatörünün özellikleri adi ötelemenin özelliklerine benzerdir.

1.Lineerlik Özelliği:

$$T_x^y\ \{af(x)\ +\ bg(x)\}\ =\ aT_x^y\ f(x)\ +\ bT_x^y g(x)$$

dir. Bu eşitliği şu şekilde gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} T_x^y \{af(x)\ +\ bg(x)\} &= T_x^y\ \{(af\ +\ bg)(x)\} \\[2ex] &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} (af+bg)\ [\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]\ \sin^{2p}\varphi d\varphi \\[2ex] &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}. \int_0^{\pi} af[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}] \end{aligned}$$

$$+ \; bg[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]\sin^{2p}\varphi d\varphi$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}. \; a\int_0^{\pi} f[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]\sin^{2p}\varphi d\varphi$$

$$+ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}. \; b\int_0^{\pi} g[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]\sin^{2p}\varphi d\varphi$$

$$= aT_x^y \; f(x) \; + \; bT_x^y g(x)$$

bulunur.

2.Pozitiflik özelliği: Eğer $f(x) \geq 0$ ise $T_x^y \; f(x) \geq 0$ dır.

$$T_x^y \; f(x) \; = \; \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}. \int_0^{\pi} f[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}] \; \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

ele alalım. $f[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}] \geq 0$ ve $\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ aralığında pozitif olduğundan yukarıdaki eşitliğin sag tarafıda pozitiftir. Ohalde,

$$T_x^y \; f(x) \geq 0$$

dir.

3. $T_x^y \; (1) = 1$ dir.

$$\int_0^{\pi} \sin^{2p}\varphi d\varphi \; = \; \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}$$

yukarıdaki formülü kullanırsak, $f(x) = 1$ için,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)} = 1$$

elde edilir.

4. Eğer $x \geq a$, $f(x) \equiv 0$ ise bu durumda $|x-y| \geq a$ için $T_x^y\ f(x) \equiv 0$ dır.

5. **T^y operatörü süreklidir:** Eğer $f_n(x)$ sürekli fonksiyonlar dizisi her bir sonlu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise, bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar dizisi $T_x^y f_n(x)$ her bir sonlu bölgede $T_x^y f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

6. **T^y operatörü sınırlıdır:**

$$|T_x^y\ f(x)| = \left|\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]\ \sin^{2p}\varphi d\varphi\right|$$

$$\leq \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} |f[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]|\ \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

$$\leq \sup_{x\geq 0} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} |f[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}]|\ \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

$$\leq \sup_{x\geq 0}|f(x)|\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

elde edilir. Buradan

$$|T_x^y\ f(x)| \leq T_x^y\ |f(x)| \leq \sup_{x\geq 0}|f(x)|$$

olur.

7. **T^y operatörünün yer değiştirme özelliği:**

$$T_x^y T_x^z f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$$

dir.

8. Değişme özelliği:

$$T_y^z T_x^y f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$$

dir.

9. Eşlenik özelliği: Eğer sürekli $f(x)$ fonksiyon için

$$\int_0^\infty x^{2p+1}|f(x)|dx < \infty$$

ve $g(x)$, tüm $x \geq 0$ için sürekli ve sınırlı fonksiyon ise,

$$\int_0^\infty T_x^y f(x).g(x)\ x^{2p+1}\ dx = \int_0^\infty f(x).T_x^y g(x)\ x^{2p+1}\ dx$$

olur.

İspat . Kabul edelim ki $f(x)$ fonksiyonu sonlu bir aralıkta ikinci mertebeden türevlenebilir ise $f(x) = 0$ dır ve $g(x) = J_p(\sqrt{\lambda}x)$ $(\lambda \leq 0)$ dır.

$$K(y) = \int_0^\infty T_x^y f(x) J_p(\sqrt{\lambda}x) x^{2p+1} dx$$

olsun. Şimdi $K(y)$ fonksiyonuna $B_x = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{2p+1}{x}.\dfrac{d}{dx}$ operatörünü uyğulayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty B_x(T_x^y\ f(x)) \,.\, g(x).\ x^{2p+1}dx &= \int_0^\infty [\frac{d^2}{dx^2}T_x^y\ f(x)\ +\ \frac{2p+1}{x}\ \frac{d}{dx}T_x^y\ f(x)]\ g(x).\ x^{2p+1}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{d^2}{dx^2}\ T_x^y\ f(x)\ g(x).x^{2p+1}dx \\ &+ \int_0^\infty \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}T_x^y\ f(x)\ g(x).x^{2p+1}dx = I_1 + I_2\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağındaki birinci integrali hesaplayalım.

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x)\right) g(x).\, x^{2p+1}\, dx$$

de

$$dv = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x)\right) ve \qquad u = g(x) x^{2p+1}$$

alarak kısmi integrasyon uygulanırsa bu durumda,

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x} T_x^y\, f(x)\, g(x)\, x^{2p+1}|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} T_x^y\, f(x) \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\, x^{2p+1}\right)\, dx$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} T_x^y\, f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}\, x^{2p+1} dx - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} T_x^y\, f(x)\, g(x) \frac{2p+1}{x}\, x^{2p+1} dx$$

elde edilir. Ohalde,

$$I_1 + I_2 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x} x^{2p+1} dx$$

olur. Buna kısmi integrasyon uygularsak sonuç olarak,

$$\int_0^\infty B_x\, (T_x^y\, f(x)).\, g(x).\, x^{2p+1} dx = \int_0^\infty T_x^y\, f(x)\, B_x\, g(x).\, x^{2p+1}\, dx$$

bulunur.

10.

$$T_x^{-y} f(x) = T_x^y f(x)$$

dir.

11.

$$\int\limits_{R_n} T^y\, f(x)\, x_n^{2p} dx = \int\limits_{R_n} f(x)\, x_n^{2p} dx$$

dir.

BÖLÜM 3

3 Ortalama Değer Teoremi

I.Kipriyanova 1985 yılında makalesinde

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad \nu > 0$$

Laplace-Bessel operatörü olmak üzere $\Delta_B u + \lambda u = 0$ denkleminin çözümü için ortalama değer formülünü bulmuştur [Kipriyanova 1985]. Çalışmamızın bu kısmında,

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2\nu_1}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2\nu_2}{z}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \nu_1, \ \nu_2 > 0 \tag{1}$$

Laplace operatörü için sınır probleminin adi öteleme ile bağımlı olduğu gibi Laplace-Bessel operatörü ile ilgili sınır probleminin çözümü de genelleştirilmiş öteleme ile bağlı olduğu gösterilmektedir. Bu nedenle (1) operatörü ile ilgili sınır probleminin çözümü için genelleştirilmiş öteleme ile ilgili ortalama değer formülü bulmak gerekir. Dolayısiyla bu bölümde bu formül bulunarak genelleştirilmiş öteleme cinsinden elde edilerek sonraki bölümde kullanılmıştır.

3.1 Laplace-Bessel Denklemi için Ortalama Değer Formülü

$R_n^{++} = \{x = (x', y, z) : x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}), \quad y = x_{n+1} \ ve \ z = x_n \quad , y, z > 0\}$ olsun. $D^{++} \subset R_n^{++}$ bir bölge ve Γ bu bölgenin sınırı olsun. Kabul edelim ki bu bölge $y = 0$ ve $z = 0$ hiper düzlemleri ile sınırlıdır. Γ nın R_n^{++} da olan kısmını Γ ile, $y = 0$, $z = 0$ hiper düzlemleri üzerinde olan kısmını ise Γ^{00} ile gösterelim. Bu bölgede Laplace-Bessel operatörünü gözönüne alalım. Yani,

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2\nu_1}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2\nu_2}{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

dır. Burada ν_1 ve ν_2 pozitif sayılardır. Şimdi aşağı daki teoremi ve ispatını verelim.

Teorem 3.1.1: *Kabul edelim ki S_1^{++} merkezi Γ^{00} da olan birim yarıçaplı kürenin R_n^{++} da kalan kısmıdır. Bu durumda $\Delta_B u = 0$ denkleminin y ve z değişkenlerine göre çift fonksiyon olan çözümleri u için aşağıdaki ortalama değer formülü mevcuttur.*

$$\int\limits_{S_1^{++}} u(s' + r\theta', r\theta_{n-1}, r\theta_n)\theta_{n-1}^{2\nu_1}\theta_n^{2\nu_2} dw_1 = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} u(s', 0, 0) \qquad (3.1.1)$$

Burada $x' = s' + r\theta'$, $y = r\theta_{n-1}$, $z = r\theta_n$ dir ve S_1^{++} birim yarıçaplı kürenin üst kısmıdır.

(3.1.1) formülünü $\Delta_B u = 0$ denkleminin, D^{++} bölgesinin bir iç noktasındaki çözümü için de alabiliriz. Bunun için genelleştirilmiş öteleme operatörünü kullanmak gerekir. Bu durumda,

$$\int\limits_{S_1^{++}} T_{r\theta_{n-1} r\theta_n}^{t_1,t_2} x(s' + r\theta', r\theta_{n-1}, r\theta_n)\theta_{n-1}^{2\nu_1}\theta_n^{2\nu_2} dw_1 = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \qquad (3.1.2)$$
$$. \, x(s', t_1, t_2)$$

dir. Burada $T_{y,z}^{t_1,t_2}$, $(n-2)$ tanesi adi, son iki degişkene göre R^+ öteleme olan genelleştirilmiş öteleme operatörünü göstermektedir.

Genelleştirilmiş öteleme operatörünün özeliğine göre $t_1 = t_2 = 0$ için (3.1.2) $\Rightarrow$ (3.1.1) elde edilir.

İspat . Eğer $u(x', y, z)$ ve $v(x', y, z)$, D^{++} da iki kez sürekli türevleri olan ve y, z ye göre çift fonksiyon ise, bu durumda kısmi integrasyon formülünü kullanarak Δ_B için Green formülünü buluruz. Bunun için,

$$\int\int\limits_{\Gamma} (P dy dz + Q dx' dy + R dy dz) = \int\int\int\limits_{D^{++}} (P_{x'} + Q_y + R_z)\, dx' dy dz$$

Green formülününde $p = uv_{x'}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}, Q = uv_y y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}$ ve $R = uv_z y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}$ olarak alınırsa bu durumda,

$$\int_\Gamma uv_{x'}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dydz + uv_y y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dx'dz + uv_z y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dydz$$

$$= \int\int_{D++} \Big(u_{x'}v_{x'}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2} + uv_{x',x'}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2} + 2\nu_1 uv_y y^{2\nu_1-1}z^{2\nu_2} + u_y v_y y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}$$

$$+uv_{yy}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2} + 2\nu_2 uv_z y^{2\nu_1}z^{2\nu_2-1} + u_z v_z y^{2\nu_1}z^{2\nu_2} + uv_{zz}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}\Big)\, dx'dydz$$

olur. Buradan,

$$\int_\Gamma u\left[\frac{v_y y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}}{ds}dx'dz + \frac{v_z y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}}{ds}dx'dy + \frac{v_{x'}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}}{ds}dydz\right]ds$$

$$= \int\int_{D++} \Big\{uy^{2\nu_1}z^{2\nu_2}\left[v_{x',x'} + v_{yy} + v_{zz} + \frac{2\nu_1}{y}v_y + \frac{2\nu_2}{z}v_z\right]$$

$$+ u_{x'}v_{x'}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2} + u_y v_y y^{2\nu_1}z^{2\nu_2} + u_z v_z y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}\Big\}\, dx'dydz$$

elde edilir. $\Delta_B v = v_{x',x'} + v_{yy} + v_{zz} + \frac{2\nu_1}{y}v_y + \frac{2\nu_2}{z}v_z$ olduğundan,

$$\int_\Gamma uy^{2\nu_1}z^{2\nu_2}\frac{\partial v}{\partial n}ds = \int\int_{D++} [(u\Delta_B v y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}) + y^{2\nu_1}z^{2\nu_2} (u_{x'}v_{x'} + u_y v_y + u_z v_z)]\, dx'dydz \tag{3.1.3}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\int_\Gamma vy^{2\nu_1}z^{2\nu_2}\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int\int_{D++} [(v\Delta_B u y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}) + y^{2\nu_1}z^{2\nu_2} (u_{x'}v_{x'} + u_y v_y + u_z v_z)]\, dx'dydz \tag{3.1.4}$$

bulunur. (3.1.3) ve (3.1.4) taraf tarafa çıkartılırsa bu durumda,

$$\int_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma = \int\int_{D^{++}} (u\Delta_B v - v\Delta_B u) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg \tag{3.1.5}$$

olur. Burada $dg = dx' dydz$ ve $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ dir.

Şimdi Γ nın keyfi bir iç noktasını $s' = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-2})$ olacak şekilde $P' = (s', 0, 0)$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$v = \left[(n + 2\nu_1 + 2\nu_2 - 2) r^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}\right]^{-1} + w(r)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $w \in C^2$ y ve z ye göre çift fonksiyondur. r değişkeni ise $Q(x', y, z)$ noktasından P' ye kadar uzaklıktır. D^{++} bölgesinde merkezi P' noktasında olan küçük bir ε yarıçaplı yarı küreyi çıkaralım. D^{++}nın geri kalan kısmını D_ε^{++} ile gösterelim.D_ε^{++} bölgesinde, u ve v fonksiyonları iki kez sürekli türevleri var ve y, z ye göre çift fonksiyonlardır. Buna göre $D^{++} - D_\varepsilon^{++}$ bölgesine (3.1.5) formülünü uygulayıp, v fonksiyonunu yerine yazarak ε na göre limit alınır ve $(r^{n+2\nu_1+2\nu_2-2})$ nin Δ_B nin temel çözümü olması göz önüne alınırsa bu durumda,

$$\begin{aligned}\int\int_{D^{++}-D_\varepsilon^{++}} [u\Delta_B v - v\Delta_B u] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dx' dydz &= \int_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte v fonksiyonu yazılırsa bu durumda,

$$\int\int_{D^{++}} [u\Delta_B w - v\Delta_B u] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dx' dydz \ - \int\int_{D_\epsilon^{++}} [u\Delta_B w - w\Delta_B u] \ y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dx' dydz$$

$$- \int\int_{D_\epsilon^{++}} \frac{1}{(n+2\nu_1+2\nu_2-2) r^{(n+2\nu_1+2\nu_2-2)}} \Delta_B u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dx' dydz$$

$$= \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n} \right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma - \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{(n+2\nu_1+2\nu_2-2) r^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}} \frac{\partial u}{\partial n} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int\int_{D^{++}} [u\Delta_B w - v\Delta_B u] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg \ &= \ \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma \\
&+ \ \frac{1}{(n+2\nu_1+2\nu_2-2)\varepsilon^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}} \int_{D_\epsilon^{++}} \Delta_B u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg \\
&- \ \frac{1}{(n+2\nu_1+2\nu_2-2)\varepsilon^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma \\
&+ \ \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma
\end{aligned}$$

elde edilir. Ohalde

$$\int\limits_{D^{++}}\int [u\Delta_B w - v\Delta_B u] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg \;=\; \int\limits_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_\epsilon} u \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma$$

elde dilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki integrallerden ikincisi Lemma 1.4.6' e göre hesaplanırsa, sonuç olarak, $\Delta_B v = \Delta_B w$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\int\limits_{D^{++}}\int [u\Delta_B w - v\Delta_B u] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg \;=\; \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} u(s',0,0) \tag{3.1.6}$$

$$+ \int_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma$$

elde dilir. Ayrıca burada kürenin yüzey elemanı hesaplanmıştır. Yani,

$$\int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma \;=\; \int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{S^{n-1}} \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} (r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1})^{2\nu_1}$$

$$.\;(r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1})^{2\nu_2} r^{n-1} dr dw$$

olur. Burada $dw = \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1}, d\tau = r^{n-1}dw$ kürenin yüzey elemanı ve $d\Gamma = r^{n-1}drdw$ hacim elemanıdır. Ohalde,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma = \int_0^\varepsilon dr \int_{S^{n-1}} \sin^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}\theta_1 \sin^{n+2\nu_1+2\nu_2-3}\theta_2 \ldots$$

$$\sin^{2\nu_1+2\nu_2+1}\theta_{n-2} \sin^{2\nu_2}\theta_{n-1} cos^{2\nu_1}\theta_{n-1} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1}$$

bulunur. Bu kürenin yüzey eleması için eşitliğin sağ tarafındaki integraller hesaplanırsa sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} d\Gamma &= \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \\ &= m(\Gamma_\varepsilon) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ve $m(\Gamma_\varepsilon)$, Γ_ε nun ölçüsüdür. Ohalde Lemma 1.4.6'e göre,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{m(\Gamma_\varepsilon)} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \, \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} \, y^{2\nu_1} \, z^{2\nu_2} d\Gamma \right] = u(s',0,0)$$

eşitliğinden

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} u \, \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} \, y^{2\nu_1} \, z^{2\nu_2} d\Gamma \right] = m(\Gamma_\varepsilon) u(s',0,0)$$

bulunur. Dolayısıyla bu eşitlik göz önüne alındığında (3.1.6) elde edilmiş olur. Şimdi (3.1.6) formülünde D^{++} bölgesi yerine R yarıçaplı P' merkezli ve D^{++} da bulunan bir K_R yarı kürenin içini alalım. Bu kürenin yüzeyini W_R ile gösterelim ve kabul edelim ki,

$$v = (n+2\nu_1+2\nu_2-2)^{-1} \left[r^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} - R^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} \right] \qquad (3.1.6')$$

dir. Bu durumda,

$$\int_{K_R} \left\{ u\Delta_B (n+2\nu_1+2\nu_2-2)^{-1} \left[r^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} - R^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} \right] - v\Delta_B u \right\} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

$$= \int_{W_R} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw + \frac{\pi^{\frac{n-2}{n}} \Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} u(s',0,0)$$

olur. Şimdi R nin sabit ve $r^{(n+2\nu_1+2\nu_2-2)}$ nin Δ_B nin temel çözümü olduğu, ayrıca Teorem 2.2.2 gözönüne alınırsa bu durumda,

$$-\int_{K_R} v\Delta_B u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg = \frac{\pi^{\frac{n-2}{n}} \Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \; u(s',0,0)$$

$$+ \int_{W_R} \left\{ u \frac{\partial (n+2\nu_1+2\nu_2-2)^{-1} \left[r^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} - R^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} \right]}{\partial n} \right.$$

$$\left. - (n+2\nu_1+2\nu_2-2)^{-1} \left[r^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} - R^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} \right] \frac{\partial u}{\partial n} \right\} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-2}{n}} \Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \; u(s',0,0)$$

$$+ \int_{W_R} u \frac{\partial (n+2\nu_1+2\nu_2-2)^{-1} r^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)}}{\partial n} y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-2}{n}} \Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \; u(s',0,0)$$

$$- \frac{1}{R^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} \int_{W_R} u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})R^{n+2\nu_1+2\nu_2}}\int\limits_{W_R^+} u(x',y,z)y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dw$$

$$= \quad u(s',0,0)+\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}\int\limits_{K_R^+} v\Delta_B u y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dg \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Şimdi de (3.1.5) formülünde,

$$v = \quad c\,\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}\left[(n+2\nu_1+2\nu_2-2)r^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}\right]^{-1}+W(r) \tag{3.1.8}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada $W\in C^2$ y ve z ye göre çifttir. Ayrıca $r\le R$ ve

$$v|_{W_R^+}=\frac{\partial v}{\partial r}|_{W_R^+}=0 \tag{3.1.9}$$

ise bu durumda

$$\int\limits_{K_R^+}[u\Delta_B v-v\Delta_B u]\,y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dg \quad = \quad \int\limits_{W_R^+}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} \; - \; v\frac{\partial u}{\partial n}\right)y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dw = \int\limits_{W_R^+}u\frac{\partial v}{\partial n}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dw$$

$$= \quad c\,\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}\int\limits_{W_R^+}u\frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}}y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dw$$

$$= \quad cu(s',0,0)$$

elde edilir. Bu eşitlik her u için doğru olacağından, u nun yerine C^2 de bulunan (y ve z ye göre çift) keyfi bir fonksiyon alabiliz. Kabul edelim ki $u \in C^{(2m+2)}(K_R^+)$ ve Δ_B^η, Δ_B nin η. mertebesini gösterir. Bu durumda her $\eta \leq m$ için,

$$c\Delta_B^\eta u(s',0,0) = \int\limits_{K_R^+} \left[\Delta_B^\eta u \Delta_B v - v\Delta_B^{\eta+1} u\right] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg \tag{3.1.10}$$

alınabilir. (3.1.8) de olduğu gibi öyle v_η fonksiyonlar dizisi tanımlanabilir ki bu fonksiyonlar aşağıdaki diferensiyel denklem,

$$\Delta_B v_{\eta+1} = v''_{\eta+1} + \frac{(n+2\nu_1+2\nu_2-1)}{r} v'_{\eta+1} = v_\eta \quad (\eta = 0,1,2\ldots) \tag{3.1.11}$$

ve (3.1.9) sınır şartları ile verilsin. Başlangıç fonksiyonunu da

$$v_0 = \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}(n+2\nu_1+2\nu_2-2)^{-1}\left[r^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)} - R^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)}\right]$$

ile gösterelim. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$v'_{\eta+1} = u_{\eta+1}$$

için

$$u'_{\eta+1} + \frac{(n+2\nu_1+2\nu_2-1)}{r} u_{\eta+1} = v_\eta$$

ise, bu durumda $\lambda = r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}$ bulunur ve

$$v'_{\eta+1} = \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} \int_r^R r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1} v_\eta dr$$

$$v_{\eta+1} = \int_r^\rho \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}} \int_r^R \rho^{n+2\nu_1+2\nu_2-1} v_\eta(\rho) dr$$

$$v_{\eta+1} = \frac{-1}{n+2\nu_1+2\nu_2-2}\int_r^R \rho^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}$$

$$\left[\frac{1}{\rho^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}} - \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}}\right] v_\eta(\rho)d\rho \tag{3.1.12}$$

$$v_{\eta+1} = \left[(n+2\nu_1+2\nu_2-2)r^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}\right]^{-1}$$

$$\int_r^R \rho v_\eta(\rho).\left[\rho^{n+2\nu_1+2\nu_2-2} - r^{n+2\nu_1+2\nu_2-2}\right] d\rho$$

olacak biçimde elde edilebilir.

Şimdi bu sistemde v_η lar ve (3.1.8) formunda her bir η için v_η lara karşılık gelen c_η lar kolayca bulunabilir. Bunun için $\eta = (0,1,2,\ldots)$ için v_0, v_1, v_2, ... ler ve bunlara karşılık gelen $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ler tümavarımla bulunabilir. Dolayısıyla hesaplamalar sonucunda ,

$$c_\eta = \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \quad (\eta = 0,1,2\ldots)$$

elde edilir. (3.1.10) formülünde v fonksiyonunu v_η fonksiyonuna dönüştürürsek bu durumda,

$$c_\eta \Delta_B^\eta u(s',0,0) = \int\limits_{K_R^+} \left[\Delta_B^\eta u \Delta_B v_\eta - v_\eta \Delta_B^{\eta+1} u\right] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

olur.(3.1.11) formülünden, $\Delta_B v_\eta = v_{\eta-1}$ olduğundan yukarıda elde edilen eşitlik,

$$c_\eta \Delta_B^\eta u(s',0,0) = \int\limits_{K_R^+} \left[v_{\eta-1} \Delta_B^\eta u - v_\eta \Delta_B^{\eta+1} u\right] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

biçiminde elde edilir. Bu eşitlik her bir $\eta = (0,1,2,\ldots,m)$ için elde edilip toplanırsa, yani,

$$c_1\Delta_B^1 u(s',0,0)=\int\limits_{K_R^+}\left[v_0\Delta_B^1 u - v_1\Delta_B^2 u\right] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2}dg$$

$$c_2\Delta_B^2 u(s',0,0)=\int\limits_{K_R^+}\left[v_1\Delta_B^2 u - v_2\Delta_B^3 u\right] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2}dg$$

$$\vdots$$

$$c_{m-1}\Delta_B^{m-1} u(s',0,0)=\int\limits_{K_R^+}\left[v_{m-2}\Delta_B^{m-1} u - v_{m-1}\Delta_B^{m} u\right] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2}dg$$

$$c_{m}\Delta_B^{m} u(s',0,0)=\int\limits_{K_R^+}\left[v_{m-1}\Delta_B^{m} u - v_{m}\Delta_B^{m+1} u\right] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2}dg$$

dir. Sonuç olarak

$$\sum_{\eta=1}^{m} c_\eta\Delta_B^{\eta} u(s',0,0)=\int\limits_{K_R^+}\left[v_0\Delta_B u - v_{m}\Delta_B^{m+1} u\right] y^{2\nu_1} z^{2\nu_2}dg$$

formülünü elde ederiz. (3.1.7) formülü ve v_0 fonksiyonu gözönüne alınırsa bu durumda,

$$\begin{aligned}\int\limits_{K_R^+} v_0\Delta_B u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2}dg &= \sum_{\eta=1}^{m} c_\eta\Delta_B^{\eta} u(s',0,0)\\ &+\int\limits_{K_R^+} v_m\Delta_B^{m+1} u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2}dg\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}\int\limits_{K_R^+}(n+2\nu_1+2\nu_2-2)^{-1}$$
$$\left[r^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)}-R^{-(n+2\nu_1+2\nu_2-2)}\right]\Delta_B u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2}dg$$

$$= \sum_{\eta=1}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \Delta_B^{\eta} u(s',0,0)$$

$$+ \int\limits_{K_R^+} v_m \Delta_B^{m+1} u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

olur. (3.1.6$'$) deki fonksiyon gözönüne alındığında

$$\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})} \int\limits_{K_R^+} v\Delta_B u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg = \sum_{\eta=1}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \Delta_B^{\eta} u(s',0,0)$$

$$+ \int\limits_{K_R^+} v_m \Delta_B^{m+1} u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

ve

$$[c_{n,\nu_1,\nu_2} R^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}]^{-1} \int\limits_{W_R^+} u(x',y,z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw = u(s',0,0)$$

$$+ \sum_{\eta=1}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \Delta_B^{\eta} u(s',0,0)$$

$$+ \int\limits_{K_R^+} v_m \Delta_B^{m+1} u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

dir. Ohalde,

$$[c_{n,\nu_1,\nu_2} R^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}]^{-1} \int\limits_{W_R^+} u(x',y,z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw = \sum_{\eta=0}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \Delta_B^{\eta} u(s',0,0)$$

$$+ \int\limits_{K_R^+} v_m \Delta_B^{m+1} u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg \qquad (3.1.13)$$

formülü elde edilir. Burada $c_0 = 1$ ve

$$c_{n,\nu_1,\nu_2} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{n}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{n}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}$$

dir. Bu formül keyfi $u \in C^{2m+2}(D^{++})$ ve D^{++} da bulunan merkezi Γ^{00} da bulunan keyfi K_R^+ yuvarı için geçerlidir. Şimdi (3.1.7) formülünde $u(x',y,z)$ nin yerine $T_{y,z}^{t_1,t_2}u(x',y,z)$ alınırsa bu durumda,

$$\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})R^{n+2\nu_1+2\nu_2}}\int\limits_{W_R^+} T_{y,z}^{t_1,t_2}u(x',y,z)y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dw = u(s',t_1,t_2)$$

$$+\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}\int\limits_{K_R^+} v\Delta_B T_{y,z}^{t_1,t_2}uy^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dg$$

olur. (3.1.10) da v nin yerine v_η ve $u(x',y,z)$ nin yerine $T_{y,z}^{t_1,t_2}u(x',y,z)$ alınırsa bu durumda,

$$c\Delta_B^\eta u(s',t_1,t_2) = \int\limits_{K_R^+}\left[\Delta_B^\eta T_{y,z}^{t_1,t_2}u(x',y,z)\Delta_B v - v\Delta_B^{\eta+1}T_{y,z}^{t_1,t_2}u(x',y,z)\right]y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dg$$

$$c_\eta\Delta_B^\eta u(s',t_1,t_2) = \int\limits_{K_R^+}\left[\Delta_B^\eta T_{y,z}^{t_1,t_2}u(x',y,z)\Delta_B v_\eta - v_\eta\Delta_B^{\eta+1}T_{y,z}^{t_1,t_2}u(x',y,z)\right]y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dg$$

olur. Toplamları alınırsa bu taktirde,

$$\sum_{\eta=1}^{m} c_\eta\Delta_B^\eta u(s',t_1,t_2) = \int\limits_{K_R^+}\left[v_0\Delta_B T_{y,z}^{t_1,t_2}u - v_m\Delta_B^{m+1}T_{y,z}^{t_1,t_2}u\right]y^{2\nu_1}z^{2\nu_2}dg$$

elde edilir. (3.1.7) formülü ve v_0 fonksiyonuna göre,

$$\int\limits_{K_R^+} v_0 \Delta_B^{\eta} T_{y,z}^{t_1,t_2} u(x',y,z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg = \sum_{\eta=1}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}$$

$$.\Delta_B^{\eta} u(s',t_1,t_2) + \int\limits_{W_R^+} v_m \Delta_B^{m} T_{y,z}^{t_1,t_2} u y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw$$

ve

$$\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})} \int\limits_{K_R^+} v \Delta_B T_{y,z}^{t_1,t_2} u(x',y,z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

$$= \sum_{\eta=1}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \Delta_B^{\eta} u(s',t_1,t_2)$$

$$+ \int\limits_{K_R^+} v_m \Delta_B^{m+1} T_{y,z}^{t_1,t_2} u(x',y,z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

$$\left[c_{n,\nu_1,\nu_2} R^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}\right]^{-1} \int\limits_{K_R^+} u(x',y,z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw_R = u(s',t_1,t_2)$$

$$+ \sum_{\eta=1}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \Delta_B^{\eta} u(s',t_1,t_2)$$

$$+ \int\limits_{K_R^+} v_m \Delta_B^{m+1} T_{y,z}^{t_1,t_2} u(x',y,z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

ve

$$[c_{n,\nu_1,\nu_2} R^{n+2\nu_1+2\nu_2-1}]^{-1} \int\limits_{K_R^+} T_{y,z}^{t_1,t_2} u(x', y, z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dw_R$$

$$= \sum_{\eta=1}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \Delta_B^{\eta} u(s', t_1, t_2) \qquad (3.1.14)$$

$$+ \int\limits_{K_R^+} v_m \Delta_B^{m+1} T_{y,z}^{t_1,t_2} u(x', y, z) y^{2\nu_1} z^{2\nu_2} dg$$

olarak elde edilir. Burada $\Delta_B^0 u = u$ ve $c_0 = 1$ olarak ele alınmıştır.

Şimdi $x' = s' + R\theta', y = R\theta_{n-1}, z = R\theta_n$ ve $dw_R = R^{n-1} dw_1$ olduğu gözönüne alınır ve ayrıca $m \to \infty$ için sağ taraftaki integralin sıfır olduğu dikkate alınırsa bu durumda,

$$\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})R^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \int\limits_{S_1^+} T_{y,z}^{t_1,t_2} u(s'+R\theta', R\theta_{n-1}, R\theta_n) R^{2\nu_1}\theta_{n-1}^{2\nu_1} R^{2\nu_2}\theta_n^{2\nu_2} R^{n-1} dw_1$$

$$= \sum_{\eta=1}^{\infty} \left(\tfrac{R}{2}\right)^{2\eta} \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}{\eta!\Gamma(\eta+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \Delta_B^{\eta} u(s', t_1, t_2)$$

olur. Buradan da,

$$\int\limits_{S_1^{++}} T_{R\theta_{n-1}R\theta_n}^{t_1,t_2} u(s' + R\theta', R\theta_{n-1}, R\theta_n) \theta_{n-1}^{2\nu_1} \theta_n^{2\nu_2} dw_1 = \frac{\pi^{\frac{n-2}{n}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} u(s', t_1, t_2)$$

elde edilir. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur.

BÖLÜM 4

4 Riesz Dönüşümleri

I.Aliyev 1987 yılında [Aliev 1987] makalesinde $(n-1)$ değişkeni adi ve son değişkeni R^+ öteleme olan genelleştirilmiş öteleme ile ilgili Riesz dönüşümlerini ve özelliklerini vermiştir. Bu bölümde $(n-2)$ değişkeni adi ve son iki değişkeni R^+ öteleme olan genelleştirilmiş öteleme ile ilgili Riesz dönüşümleri verilmiştir ve bu dönüşümün özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu tür genelleşmiş Riesz dönüşümünün Laplace-Bessel operatörü ve kısmi diferensiyel operatörü ile ilişkisi gösterilmiştir.

4.1 Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü İle Elde Edilen Riesz Dönüşümleri

Teorem 4.1.1: $P_k(x) = P_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}^2, x_n^2)$, *k mertebeli homojen ve* $\Delta_B P_k(x) = 0$ *denklemini sağlayan polinom olsun. Bu durumda* $\hat{}$ *Fourier-Bessel operatörü olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \left[P_k(x)e^{-|x|^2}\right]^{\hat{}}(y) &= F_B\left(P_k(x)e^{-|x|^2}\right)(y) \\ &= 2^{-(k+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}\, i^k\, P_k(y)\, e^{\frac{-|x|^2}{4}} \end{aligned}$$

dir.

İspat . İlk önce $e^{-\alpha|x|^2}$ nin Fourier-Bessel dönüşümünü bulalım. Ohalde, $(x''.y'') = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n-2}y_{n-2}$ olmak üzere,

$$F_B\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(y) = c_{\nu_1}c_{\nu_2}\int\limits_{R_n^{++}} e^{-\alpha|x|^2-i(x''.y'')}\, j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(x_{n-1}\,y_{n-1})\, x_{n-1}^{2\nu_1}$$

$$\cdot\; j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\,(x_n\,y_n)\, x_n^{2\nu_2}dx$$

$$= \quad c_{\nu_1} c_{\nu_2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x_n^2} j_{\nu_2-\frac{1}{2}} \, (x_n \; y_n) \; x_n^{2\nu_2} dx_n$$

$$. \int_0^{\infty} e^{-\alpha x_{n-1}^2} j_{\nu_1-\frac{1}{2}} \, (x_{n-1} \; y_{n-1}) \; x_{n-1}^{2\nu_1} dx_{n-1} \tag{4.1.1}$$

$$. \int e^{-\alpha|x''|^2 - i(x''.y'')} \; dx''$$

olarak elde edilir. Bu ifadedeki integralleri hesaplamak için aşağıdaki eşitlikleri gözönüne alalım:

1) $x'', y'' \in, \alpha > 0$ olmak üzere,

$$(2\pi)^{\frac{2-n}{2}} \int e^{-\alpha|x''|^2 - i(x''.y'')} \quad dx'' = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n-2}{2}} e^{\frac{-|y''|^2}{4\alpha}} \tag{4.1.2}$$

2) $\nu > -1, \alpha > 0$ ve $J_\nu(br)$ Bessel fonksiyonu ise bu durumda,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} \; r^{\nu+1} J_\nu(br) dr = \frac{b^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} e^{\frac{-b^2}{4\alpha}} \tag{4.1.3}$$

dir [Gray 1931]. Ayrıca $J_\nu(r) = [2^\nu \; \Gamma(\nu+1)]^{-1} r^\nu \; j_\nu(r)$ olduğundan,

$$J_{\nu_1-\frac{1}{2}}(as) = \quad [2^{\nu_1-\frac{1}{2}} \;\; \Gamma(\nu_1 + \frac{1}{2})]^{-1} \;\; s^{\nu_1-\frac{1}{2}} \; j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(as) \;\; a^{\nu_1-\frac{1}{2}}$$

$$J_{\nu_2-\frac{1}{2}}(br) = \quad [2^{\nu_2-\frac{1}{2}} \;\; \Gamma(\nu_2 + \frac{1}{2})]^{-1} \;\; b^{\nu_2-\frac{1}{2}} \; j_{\nu_2-\frac{1}{2}}(br) \;\; r^{\nu_2-\frac{1}{2}}$$

dir. Burada $a = y_{n-1}$, $b = y_n$, $s = x_{n-1}$ ve $r = x_n$ dir. Şimdi yukarıdaki eşitliklerden, (4.1.1) deki integrallerin herbirini hesaplayalım. Ohalde,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x_n^2} j_{\nu_2-\frac{1}{2}} \, (x_n \; y_n) \; x_n^{2\nu_2} dx_n = \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} j_{\nu_2-\frac{1}{2}} \, (br) \; r^{2\nu_2} dr$$

olur. J yerine j cinsinden değerini yazarsak,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r^2}\ r^{\nu_2^*+1}\ J_{\nu_2^*}(br)\ dr = \frac{b^{\nu_2^*}}{(2\alpha)^{\nu_2^*+1}}\ e^{\frac{-b^2}{4\alpha}}$$

eşitliğinde de $\nu_2^* = \nu_2 - \frac{1}{2}$ alındığında,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r^2}\ r^{\nu_2+\frac{1}{2}}\ J_{\nu_2-\frac{1}{2}}(br)\ dr = \frac{b^{\nu_2-\frac{1}{2}}}{(2\alpha)^{\nu_2^*+\frac{1}{2}}}\ e^{\frac{-b^2}{4\alpha}}$$

olur. Böylece

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r^2}\ r^{\nu_2+\frac{1}{2}}\ [2^{\nu-\frac{1}{2}}\ \Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1} r^{\nu_2-\frac{1}{2}}\ j_{\nu_2-\frac{1}{2}}(br)\ b^{\nu_2-\frac{1}{2}} dr = \frac{b^{\nu_2-\frac{1}{2}}}{(2\alpha)^{\nu_2^*+1}}\ e^{\frac{-b^2}{4\alpha}} \tag{4.1..4}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r^2}\ r^{2\nu_2}\ j_{\nu_2-\frac{1}{2}}(br)\ dr = \frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{2\alpha^{\nu_2+\frac{1}{2}}} e^{\frac{-b^2}{4\alpha}}$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r^2} s^{2\nu_2} j_{\nu_2-\frac{1}{2}}(as)\ ds = \frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{2\alpha^{\nu_2+\frac{1}{2}}} e^{\frac{-b^2}{4\alpha}} \tag{4.1.4'}$$

bulunur. Elde edilen bu $(4.1.2), (4.1.4)$ ve $(4.1.4')$ eşitliklerini $(4.1.1)$ de yazılırsa bu durumda,

$$F_B\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(y) \ = \ e^{\frac{-|y|^2}{4\alpha}}\ (2\alpha)^{-\frac{n+2\nu_1+2\nu_2}{2}}$$

bulunur. Burada $y = (y'', a, b)$ $(a = y_{n-1}, b = y_n)$ dir. Eğer $\alpha \to 1$ ve $y \to -2y$ alınırsa

bu durumda,

$$F_B\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(y) \ = \ (2)^{-\frac{n+2\nu_1+2\nu_2}{2}} e^{-|y|^2}$$

olur. Ohalde aşağıdaki eşitliği kolayca elde edebiliriz.

$$F_B\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(y) \;\grave{=}\; c_{\nu_1}c_{\nu_2}\int\limits_{R_n^{++}} e^{|x|^2+2i(x''.y'')}\, j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(x_{n-1}\; 2y_{n-1})\, x_{n-1}^{2\nu_1}$$

$$.\; j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\,(x_n\; 2y_n)\; x_n^{2\nu_2}dx$$

$$= \; c_{\nu_1}c_{\nu_2}\int_0^\infty e^{-\alpha x_n^2} j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\,(x_n\; 2y_n)\; x_n^{2\nu_2}dx_n$$

$$.\; \int_0^\infty e^{-x_{n-1}^2} j_{\nu_1-\frac{1}{2}}\,(x_{n-1}\; 2y_{n-1})\; x_{n-1}^{2\nu_1}dx_{n-1}$$

$$.\; \int e^{-|x''|^2-i(x''.y'')}\; dx''$$

Burada $(x''.y'') = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots + x_{n-2}.y_{n-2}$ dir. Yukarıda elde edilen eşitlikteki integralleri ayrı ayrı hesaplayalım. Ohalde,

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-x_n^2} j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\,(x_n\; 2y_n)\; x_n^{2\nu_2}dx_n$$

ve

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-x_{n-1}^2} j_{\nu_1-\frac{1}{2}}\,(x_{n-1}\; 2y_{n-1})\; x_{n-1}^{2\nu_1}dx_{n-1}$$

olarak gözönüne alalım. Önce birinci integrali hesap edelim. Eğer I_1 de $x_n \to r$ ve $y_n \to b$ olarak alınırsa bu durumda,

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-r_n^2} j_{\nu_{2-\frac{1}{2}}}\,(2br)\; r^{2\nu_2}dr$$

olur. Eğer (4.1.4) $\alpha \to 1$ ve $b \to 2b$ olarak alınırsa,

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-r_n^2} j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\,(2br)\; r^{2\nu_2}dr \;=\; \frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{2}e^{-b^2} \qquad (4.1.5)$$

bulunur. Benzer şekilde I_2 de ,

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-s_n^2} j_{\nu_1-\frac{1}{2}}\,(2as)\, s^{2\nu_2} ds \;=\; \frac{\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{2} e^{-a^2} \tag{4.1.6}$$

dir. Ayrıca (4.1.4) deki üçüncü integrali I_3 olarak ele alırsak bu integrali kolayca hesaplayabiliriz. Ohalde,

$$I_3 = \int e^{-\alpha|x''|^2 - i(x''.y'')}\, dx''$$

olsun. (4.1.2) de $\alpha \to 1$ ve $y \to -2y$ $(y, = cift)$ olarak alınırsa bu durumda,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{R_{n-2}} e^{-\alpha|x''|^2 - i(x''.y'')}\, dx'' \\ &= \pi^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-|y''|^2} \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

bulunur. Ohalde (4.1.5), (4.1.6) ve (4.1.7) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} &\int_{R_n^{++}} e^{|x|^2 + 2i(x''.y'')} \quad j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(x_{n-1}\, 2y_{n-1})\, x_{n-1}^{2\nu_1}.\ j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\,(x_n\, 2y_n)\, x_n^{2\nu_2} dx \\ &= \frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{2} e^{-b^2} \frac{\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{2} e^{-a^2}\ \pi^{\frac{n-2}{2}}\ e^{-|y''|^2} \\ &= \frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{2^2} \pi^{\frac{n-2}{2}}\ e^{-|y|^2} \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

sonucunu elde ederiz. Şimdi,

$$P_k(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_{n-2}}, Bt_{n-1}, Bt_n)$$

diferensiyel operatörünü (4.1.8) e uygularsak bu durumda,

$$\int_{R_n^{++}} P_k(x)\, e^{|x|^2+2i(x''.t'')} \quad j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(x_{n-1}\; 2t_{n-1})\; x_{n-1}^{2\nu_1}.\; j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\;(x_n\; 2t_n)\; x_n^{2\nu_2} dx \tag{4.1.9}$$

$$= \quad Q(t)\, \frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})\; \Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{2^2} \pi^{\frac{n-2}{2}}\; e^{-|t|^2}$$

sonucu elde edilir. Burada $Q(t)$ herhangi bir polinomdur. Aynı zamanda Bessel fonksiyonlar için var olan,

$$j_{\nu-\frac{1}{2}}(r) \;=\; \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\;\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \; e^{i\; r\; \cos\alpha}\, (\sin\alpha)^{2\nu-1}\; d\alpha \tag{4.1.10}$$

formülünü kullanırsak,

$$Q(t) \quad = \; 2^2\;[\pi^{\frac{n-2}{2}}\;\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1} \int_{R_n^{++}} P_k(x)\; e^{|t|^2-|x|^2+2i(x''.t'')}$$

$$j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(x_{n-1} 2t_{n-1}) x_{n-1}^{2\nu_1}\; j_{\nu_2-\frac{1}{2}}(x_n\; 2t_n)\; x_n^{2\nu_2} dx$$

$$= 2^2\;[\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1} \int_{R_n^{++}} P_k(x)$$

$$.e^{-(x_1^2+x_2^2,\ldots,x_n^2)} + (t_1^2+t_2^2,\ldots,t_n^2) + (2ix_1t_1,\ldots,2ix_{n-2}t_{n-2})$$

$$.\; j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(x_{n-1} 2t_{n-1}) x_{n-1}^{2\nu_1}\; j_{\nu_2-\frac{1}{2}}(x_n 2t_n) x_n^{2\nu_2} dx$$

olur. Buradan,

$$Q(t) = \quad 2^2\,[\pi^{\frac{n-2}{2}}\ \Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1}\ \frac{\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\int\limits_{R_n^{++}} P_k(x)e^{|t|^2-|x|^2+2i(x''.t'')}$$

$$\cdot\left(\int_0^\pi e^{2i\ x_n\ t_n\cos\varphi}(\sin\varphi)^{2\nu-1}d\varphi\int_0^\pi e^{2ix_{n-1}t_{n-1}\cos\alpha}(\sin\alpha)^{2\nu-1}\ d\alpha\right)\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ dx$$

$$= \ 2^2\,[\pi^{\frac{n-2}{2}}\ \Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\ \Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1}\ \int\limits_{R_n^{++}} P_k(x)\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}dx$$

$$\cdot\ \frac{\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\frac{1}{2})}\ \frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi\int_0^\pi e^{-|x''-it''|^2}e^{-(x_n^2+i^2t_n^2-2ix_nt_n\cos\varphi)}(\sin\varphi)^{2\nu_1-1}$$

$$e^{-(x_{n-1}^2+i^2t_{n-1}^2-2ix_{n-1}t_{n-1}\cos\alpha)}(\sin\alpha)^{2\nu_2-1}d\varphi d\alpha$$

dir. Ohalde sonuç olarak,

$$Q(t)\ = \ 2^2\,[\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1}.\ \int\limits_{R_n^{++}} P_k(x)\left[T^{-it}_{x_n,x_{n-1}}\quad e^{-|x'|^2}\right]x_n^{2\nu_2}x_{n-1}^{2\nu_1}dx$$

elde edilir. Bu eşitlikte $t\to -it$ alınırsa ve genelleştirilmiş ötelemenin 9. özelliği kullanılarak,

$$Q(-it)\ = \ 2^2\,[\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1}\int\limits_{R_n^{++}}\left[T^{-t}_{x_n,x_{n-1}}P_k(x)\right]e^{-|x'|^2}x_n^{2\nu_2}x_{n-1}^{2\nu_1}dx$$

elde edilir. Eğer $x = r\theta$ $(0<r<\infty, \theta\in S^+ = |x| = 1, x_{n-1}, x_n \geq 0)$ olarak alınırsa bu durumda,

$$Q(-it) = 2^2\,[\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1}$$

$$\int\limits_{R_n^{++}} \left[T^{-t}_{r\theta,r\theta'}\; P_k(r\theta,r\theta')\right] e^{-r^2|\theta'|^2}\theta_n^{2\nu_2}\theta_{n-1}^{2\nu_1}\; r^{2\nu_1}\; r^{2\nu_2}\; r^{n-1}\; dr \tag{4.1.11}$$

$$= c_{\nu^*} \int_0^\infty r^{2\nu_1+2\nu_2+n-1} \left(\int\limits_{S+} T^{-t}_{r\theta,r\theta'}\; P_k(r\theta,r\theta')\theta_n^{2\nu_2}\;\theta_{n-1}^{2\nu_1} \right) e^{-r^2}dr$$

elde edilir. Burada, $c_{\nu^*} = 2^2[\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})]^{-1}$ dir. Şimdi,

$$\int_0^\infty r^{2\nu_1+2\nu_2+n-1}\; e^{-r^2}dr$$

integralini hesaplayalım. Eğer $r^2 = u$ olarak alınırsa bu durumda,

$$\int_0^\infty r^{2\nu_1+2\nu_2+n-2}\; e^{-r^2}\; rdr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\; \left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{2\nu_1+2\nu_2+n-2}\; du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\; (u)^{\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2}-1}\; du \tag{4.1.12}$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})$$

elde edilir. Şimdi bu son eşitlik ile birlikte (4.1.11)'ne ortalama değer teoremini uyğulayalım.

$$Q(-it) = \frac{2}{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}P_k(t)\int_0^\infty r^{2\nu_1+2\nu_2+n-1}\; e^{-r^2}dr$$

olur. (4.1.12) den,

$Q(-it) = P_k(t) \Rightarrow Q(t) = P_k(it)$ olur. $Q(t)$ yi (4.1.9) de yazarsak,

$$F_B[P_k(x)\,e^{-|x'|^2}](t) = c_{\nu_1}c_{\nu_2}\int\limits_{R_n^{++}} P_k(x)\,e^{|x|^2+2i(x''.t'')}$$

$$j_{\nu_1-\frac{1}{2}}\,(x_{n-1}\;2t_{n-1})\;x_{n-1}^{2\nu_1}\;j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\,(x_n\;2t_n)\;x_n^{2\nu_2}dx$$

$$= P_k(it)\,e^{-|t|^2}\;\pi^{\frac{n-2}{2}}\;\frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{2^2}$$

$$= (2\pi)^{\frac{2-n}{2}}\;2^{-\nu_1+\frac{1}{2}}[\Gamma(\nu_1+\tfrac{1}{2})]^{-1}\;2^{-\nu_2+\frac{1}{2}}[\Gamma(\nu_2+\tfrac{1}{2})]^{-1}$$

$$= P_k(it)\,e^{-|t|^2}\;\pi^{\frac{n-2}{2}}\;\frac{\Gamma(\nu_2+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{2}^2$$

$$= 2^{-(k+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}\;i^k\;P_k(t)\;e^{-\frac{|t|^2}{4}}$$

bulunur. Burada $t \to \frac{t}{2}$ dönüşümü uygulanmıştır. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Şimdi aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1.2: *$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_n)$ olmak üzere eğer,*

$$\int\limits_{S^+} f(\theta)\;\theta_{n-1}^{2\nu_1}\;\theta_n^{2\nu_2}dS^+ = 0$$

ise bu durumda $\varepsilon \to 0$ için

$$\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}} \to v.p\;\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}}$$

dir. Burada,

$$(v.pf,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x|\\0\le x_n<\infty\\0\le x_{n-1}<\infty}} f(x)\ \varphi(x)x_{n-1}^{2\nu_1}x_n^{2\nu_2}dx \qquad\qquad \varphi\in\mathcal{Z}_+$$

dir.

İspat . Lemmayı ispat etmek $\varphi\in\mathcal{Z}_+$ da sürekli olan test fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{R_n}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}}\ \varphi(x)\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ dx=\lim_{\alpha\to0}\int\limits_{|x|\ge\alpha}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}}\ \varphi(x)x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ dx$$

olduğunu gösterelim.

$$\int\limits_{R_n}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}}\ \varphi(x)\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ dx\ =\ \int\limits_{|x|\le1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}}\ [\varphi(x)-\varphi(0)]x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}dx$$

$$+\int\limits_{|x|\ge1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}}\ \varphi(x)\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ dx$$

olarak yazabiliriz. Bu ifadenin $\varepsilon\to0$ için limitini alalım. Bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{R_n}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}}\ \varphi(x)x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}dx\ =\ \int\limits_{|x|\le1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}}\ [\varphi(x)-\varphi(0)]\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ dx$$

$$+\int_{|x|\ge1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}}\ \varphi(x)\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ dx$$

olur. Eğer yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki birinci integrali hesaplarsak bu durumda,

$$\int\limits_{|x|\le 1} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} [\varphi(x)-\varphi(0)] x_{n-1}^{2\nu_1}\, x_n^{2\nu_2}\, dx = \int\limits_{|x|\le 1} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \varphi(x) x_{n-1}^{2\nu_1}\, x_n^{2\nu_2}\, dx$$

$$- \varphi(0) \int\limits_{|x|\le 1} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} x_{n-1}^{2\nu_1}\, x_n^{2\nu_2}\, dx$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $\alpha \to 0$ için limiti alınır ve bazı işlemlerden sonra sağ taraftaki ikinci integralin sıfır olduğu kolayca görülür. Çünkü,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} \varphi(0) \int\limits_{\alpha\le|x|\le 1} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} x_{n-1}^{2\nu_1}\, x_n^{2\nu_2}\, dx &= \varphi(0) \int_\alpha^1 \int\limits_{R_{n-1}} \frac{f(\theta)}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \theta_{n-1}^{2\nu_1} \theta_n^{2\nu_2} r^{n-1} d\theta dr \\
&= \varphi(0) \int_\alpha^1 \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \left\{ \int\limits_{R_{n-1}} f(\theta)\theta_{n-1}^{2\nu_1} \theta_n^{2\nu_2} r^{n-1} d\theta \right\} dr \\
&= \varphi(0) \int_\alpha^1 \frac{1}{r^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \left\{ \int\limits_{S^+} f(\theta)\theta_{n-1}^{2\nu_1} \theta_n^{2\nu_2} r^{n-1} dS^+ \right\} dr \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısiyla,

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\alpha\le|x|\le 1} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} [\varphi(x)-\varphi(0)] x_{n-1}^{2\nu_1}\, x_n^{2\nu_2}\, dx$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\alpha\le|x|\le 1} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \varphi(x) x_{n-1}^{2\nu_1}\, x_n^{2\nu_2} dx$$

dir. Buradan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R_n} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}} \varphi(x) x_{n-1}^{2\nu_1} x_n^{2\nu_2}\, dx = \lim_{\alpha\to 0} \int_{\alpha\le|x|\le 1} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \varphi(x) x_{n-1}^{2\nu_1} x_n^{2\nu_2}\, dx$$

$$+ \int_{|x|\ge 1} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \varphi(x) x_{n-1}^{2\nu_1} x_n^{2\nu_2} dx$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \int_{|x|\ge\alpha} \frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2\nu_1+2\nu_2}} \varphi(x) x_{n-1}^{2\nu_1} x_n^{2\nu_2} dx$$

sonucu bulunur. Yani, lemmanın ispatı tamamlanır. Şimdi verilen teorem ve lemmanın yardımı ile aşağıdaki teoremi ispat edelim.

Teorem 4.1.3:

$$\left[v.p \; \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2\nu_1+2\nu_2}} \right]^{\wedge}(y) = 2^{-\frac{n+2\nu_1+2\nu_2}{2}}\, i^k \, \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2}{2})} \frac{P_k(y)}{|y|^k}$$

dir.

İspat . Teoremin ispatını yapmak için ilk önce, ispatta kullanacağımız aşağıdaki eşitliği göste rerek başlayalım. Her $\alpha > 0$ için,

$$F_B[f(\alpha x)](t) = \alpha^{-n-2\nu_1-2\nu_2} F_B[f(x)](\frac{t}{\alpha})$$

dir. Bu eşitliği elde etmek için Fourier-Bessel dönüşüm tanımını kullanalım. Ohalde,

$$[F_B\varphi](y) = c_\nu \int_{\mathbf{R}_n^+} \varphi(x)\, e^{-i(x'.y')}\, j_{\nu-\frac{1}{2}}\,(x_n y_n)\, x_n^{2\nu}\, dx$$

ve

$$[F_B\varphi](y) = c_{\nu_1}c_{\nu_2} \int\limits_{\mathbf{R}_n^+} \varphi(x)\ e^{-i(x'',y'')}\ j_{\nu_1-\frac{1}{2}}\ (x_{n-1}y_{n-1})\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\ (x_n y_n)\ x_n^{2\nu_2}dx$$

den,

$$F_B[f(\alpha x)](t) = c_{\nu_1}c_{\nu_2} \int\limits_{\mathbf{R}_n^+} f(\alpha x)\ e^{-i(x'',y'')}\ j_{\nu_1-\frac{1}{2}}\ (x_{n-1}t_{n-1})\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\ (x_n t_n)\ x_n^{2\nu_2}dx$$

olur. Buradan eğer $x \to \frac{x}{\alpha}$ olarak alınırsa budurumda,

$$\begin{aligned} F_B[f(\alpha x)](t) &= c_{\nu_1}\ c_{\nu_2} \int\limits_{\mathbf{R}_n^+} f(x)\ e^{\frac{-i(x''.t'')}{\alpha}}\ j_{\nu_1-\frac{1}{2}}\ (x_{n-1}\frac{t_{n-1}}{\alpha}) \\ &\cdot j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\ (x_n\frac{t_n}{\alpha})\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ \alpha^{-2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ \alpha^{-2\nu_2}\ \frac{dx}{\alpha} \\ &= \alpha^{-n-2\nu_1-2\nu_2}\ c_{\nu_1}\ c_{\nu_2} \int\limits_{\mathbf{R}_n^+} f(x)\ e^{\frac{-i(x''.t'')}{\alpha}} \\ &\cdot j_{\nu_1-\frac{1}{2}}\ (x_{n-1}\frac{t_{n-1}}{\alpha})\ j_{\nu_2-\frac{1}{2}}\ (x_n\frac{t_n}{\alpha})\ x_{n-1}^{2\nu_1}\ x_n^{2\nu_2}\ dx \\ &= \alpha^{-n-2\nu_1-2\nu_2}\ F_B[f(\alpha x)](t) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $dx = \alpha^{-n}dx$ dir. Teorem 4.1.1 den dolayı,

$$[\ P_k(x)\ e^{-\alpha|x|^2}\ \hat{]}(y) = (2\alpha)^{-(k+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}\ i^k\ e^{\frac{-|y|^2}{4\alpha}}\ P_k(y)$$

bulunur. Eğer $\varphi \in \mathcal{Z}_+$ ise bu durumda

$$\int_{\mathbf{R}_n^+} P_k(x)\, e^{\frac{-\alpha|x|^2}{4\alpha}}\, \varphi(x)\, x_n^{2\nu_2}\, x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx \;=\; (2\alpha)^{-(k+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}\; i^k$$

$$.\int_{\mathbf{R}_n^+} P_k(x)\, e^{-\alpha|x|^2}\, \varphi(x)\, x_n^{2\nu_2}\, x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafını $\alpha^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon-2}{2}}$ ile çarpıp α ya göre 0 dan ∞ kadar integral alırsak,

$$\int_0^\infty \left[\int_{\mathbf{R}_n^+} P_k(x)\, e^{-\alpha|x|^2}\, \alpha^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon-2}{2}} \varphi(x)\, x_n^{2\nu_2}\, x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx \right] d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \left[(2\alpha)^{-(k+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}\; i^k \alpha^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon-2}{2}} \right]. \tag{4.1.13}$$

$$.\left[\int_{\mathbf{R}_n^+} P_k(x)\, e^{\frac{-\alpha|x|^2}{4\alpha}}\, \varphi(x)\, x_n^{2\nu_2}\, x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx \right] d\alpha$$

olur. Şimdi yukarıdaki integralleri hesaplayalım.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha|x|^2} \alpha^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}-1} d\alpha$$

integrallerinde $\alpha|x|^2 = u$ diyelim bu durumda,

$$\int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{|x|^2}\right)^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}-1} \frac{du}{|x|^2} \;=\; \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}-1}$$

$$|x|^{-(k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon-2)}\; |x|^{-2}\; du$$

$$\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{|x|^2}\right)^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}-1}\frac{du}{|x|^2} = \int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}-1}\,|x|^{-(k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon)}\,du$$
$$= \Gamma\left(\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}\right)|x|^{-(k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon)}$$

bulunur. Böylece (4.1.13) ifadesinin sol tarafı,

$$\Gamma\left(\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}\right)\int\limits_{R_n+}\frac{P_k(x)}{|x|^{-(k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon)}}\;\varphi(x)\;x_n^{2\nu_2}\;x_{n-1}^{2\nu_1}\;dx \qquad (4.1.14)$$

biçiminde elde edilir. Şimdi (4.1.13) ifadesinin sag tarafını hesaplayalım.

$$\int_0^\infty\left\{(2\alpha)^{-(k+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})}\;i^k\;\alpha^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon-2}{2}}\left[\int\limits_{\mathbf{R}_n^+}P_k(x)e^{\frac{-\alpha|x|^2}{4\alpha}}\;\varphi(x)\;x_n^{2\nu_2}\;x_{n-1}^{2\nu_1}\;dx\right]\right\}d\alpha$$

$$= \int_0^\infty\int\limits_{R_n+}2^{-k-\nu_1-\nu_2-\frac{n}{2}}\;\alpha^{\frac{-k-\varepsilon-2}{2}}\;P_k(x)\;e^{\frac{-\alpha|x|^2}{4\alpha}}\;\varphi(x)\;x_n^{2\nu_2}\;x_{n-1}^{2\nu_1}\;dxd\alpha$$

$$= 2^{-k-\nu_1-\nu_2-\frac{n}{2}}\int_0^\infty\int\limits_{R_n+}\alpha^{\frac{-k-\varepsilon}{2}-1}e^{\frac{-\alpha|x|^2}{4\alpha}}\;P_k(x)\;i^k\;\varphi(x)\;x_n^{2\nu_2}\;x_{n-1}^{2\nu_1}\;dxd\alpha$$

$$= 2^{-k-\nu_1-\nu_2-\frac{n}{2}}\int_\infty^0\left(\frac{1}{4\alpha}\right)^{\frac{-k-\varepsilon}{2}-1}e^{-\alpha|x|^2}\left(\frac{-1}{4\alpha^2}\right)^{\frac{-k-\varepsilon}{2}-1}d\alpha$$

$$= \frac{-2^{-k-\nu_1-\nu_2-\frac{n}{2}}}{4}\int_\infty^0(4\alpha)^{\frac{k+\varepsilon}{2}+1}\;e^{-\alpha|x|^2}\alpha^{-2}\;d\alpha$$

$$= \frac{-2^{-k-\nu_1-\nu_2-\frac{n}{2}}}{4}4^{\frac{k+\varepsilon+2}{2}}\int_\infty^0 e^{-\alpha|x|^2}\alpha^{\frac{k+\varepsilon}{2}-1}\;d\alpha$$

$$= 2^{-\frac{2\nu_1+2\nu_2+n}{2}+\varepsilon}\;\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)|x|^{-k-\varepsilon}$$

bulunur. Ohalde sağ taraftaki integral,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}_n^+} \left[(2\alpha)^{-(k+\nu_1+\nu_2+\frac{n}{2})} \; i^k \; \alpha^{\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon-2}{2}} \; P_k(x)\, e^{\frac{-\alpha|x|^2}{4\alpha}} \; \varphi(x)\; x_n^{2\nu_2}\; x_{n-1}^{2\nu_1} dx\right] d\alpha$$

$$= 2^{-\frac{2\nu_1+2\nu_2+n}{2}+\varepsilon}\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right) |x|^{-k-\varepsilon} \quad i^k$$

$$. \int_{\mathbf{R}_n^+} \frac{P_k(x)}{|x|^{k+\varepsilon}} \; \varphi(x) \; x_n^{2\nu_2} \; x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla,

$$\Gamma\left(\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}\right) \quad \int_{\mathbf{R}_n^+} \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}} . \; \varphi(x) \; x_n^{2\nu_2} \; x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx$$

$$= 2^{-\frac{2\nu_1+2\nu_2+n}{2}+\varepsilon}\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right) \; i^k$$

$$\int_{\mathbf{R}_n^+} \frac{P_k(x)}{|x|^{k+\varepsilon}} \; \varphi(x) \; x_n^{2\nu_2} \; x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx$$

bulunur buradan,

$$\int_{\mathbf{R}_n^+} \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}} \; \varphi(x) \; x_n^{2\nu_2} \; x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx \;=\; 2^{-\frac{2\nu_1+2\nu_2+n+2\varepsilon}{2}} \; i^k \; \frac{\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}\right)}$$

$$. \int_{\mathbf{R}_n^+} \frac{P_k(x)}{|x|^{k+\varepsilon}} \; \varphi(x) \; x_n^{2\nu_2} \; x_{n-1}^{2\nu_1}\, dx$$

olur. Ohalde,

$$\left[\frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}}\hat{]}(y) = 2^{-\frac{2\nu_1+2\nu_2+n}{2}+\varepsilon}\, i^k \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}{2}\right)} \cdot \frac{P_k(y)}{|y|^{k+\varepsilon}}$$

sonucu elde edilir. Lemmayı bu sonuca uygularsak,

$$\left[v.p\ \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2\nu_1+2\nu_2-\varepsilon}}\hat{]}(y) = 2^{-\frac{2\nu_1+2\nu_2+n}{2}}\, i^k. \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n+2\nu_1+2\nu_2}{2}\right)}. \frac{P_k(y)}{|y|^k}$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi genelleştirilmiş öteleme ile doğurulmuş Riesz dönüşümünün tanımını verelim. Buna kısaca Riesz-Bessel dönüşümü diyecegiz.

Tanım 4.1.4: T_x^y genelleştirilmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda aşağıdaki dönüşüme $f(x) \in \mathcal{Z}_+$ fonksiyonunun k mertebeli Riesz-Bessel dönüşümü denir.

$$\left(R_B^{(k)}\ f\right)(\xi) = c_k\,(n,\nu_1,\nu_2)\left(v.p\ \frac{P_k\,(x)}{|x|^{k+n+2\nu_1+2\nu_2}} * f\right)(\xi)$$

$$\equiv c_k\,(n,\nu_1,\nu_2)\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x|\\ 0<x_n<\infty}} \frac{P_k\,(x)}{|x|^{k+n+2\nu_1+2\nu_2}}\ T_\xi^x\ f(\xi)\ x_{n-1}^{2\nu_1}x_n^{2\nu_2}\ dx$$

dir. Burada $k = 1, 2, \ldots,$ ve

$$c_k\,(n,\nu_1,\nu_2) = 2^{\frac{n+\nu_1+\nu_2}{2}}\ \Gamma\left(\frac{k+n+\nu_1+\nu_2}{2}\right)\left[\Gamma(\frac{k}{2})\right]^{-1}$$

dir.

$P_k(x)$, k. mertebeden homojen polinomdur ve $\Delta_B\ P_k\ =\ 0$ dır. Teorem 4.1.3 'e göre,

$$\left(\ R_B^{(k)}\ f\right)^{\hat{}}(\xi)\ =\ i^k\ \frac{P_k(\xi)}{|\xi|^k}\ \hat{f}(\xi) \tag{4.1.15}$$

yazabiliriz. Başka bir ifadeyle $R_B^{(k)}$ dönüşümüne karşılık gelen çarpan $i^k\ P_k\ |\xi|^{-k}$ dır.

Şimdi birinci mertebeli Riesz-Bessel dönüşümleri ele alalım. Bu dönüşümlerin sayısı $n-2$ tane ve R_{B_j}, $j=1,2,3\ldots,n-2$ ile gösterirsek bu durumda,

$$\left(\ R_{B_j}\ f\right)\ (\xi)\ =\ c_1\ (n,\nu_1,\nu_2)\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ \int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x|\\ 0<x_n<\infty\\ 0<x_{n-1}<\infty}}\ \frac{x_j}{|x|^{1+n+2\nu_1+2\nu_2}}\ T_\xi^x\ f(\xi)\ x_{n-1}^{2\nu_1}x_n^{2\nu_2}\ dx \tag{4.1.16}$$

olur. Burada

$$c_1\ (n,\nu_1,\nu_2)\ =\ 2^{\frac{n+\nu_1+\nu_2}{2}}\ \Gamma\left(\frac{1+n+\nu_1+\nu_2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

dir. Ayrıca bu dönüşümlerden başka iki tane de 2. mertebeli Riesz-Bessel dönüşümleri aşağidaki biçimdedir.

$$\left(\ R_{B_j}^2\ f\right)\ (\xi)\ =\ c_2\ (n,\nu_1,\nu_2)\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ \int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x|\\ 0<x_n<\infty\\ 0<x_{n-1}<\infty}}\ \frac{P_k(x)}{|x|^{2+n+2\nu_1+2\nu_2}}\ T_\xi^x\ f(\xi)\ x_{n-1}^{2\nu_1}x_n^{2\nu_2}\ dx \tag{4.1.17}$$

dir. Burada birincisi

$$P_2(x)\ =\ \frac{2\nu_1+2\nu_2+2}{\frac{n}{2}+\nu_1+\nu_2}\ |x|^2\ -\ 2x_{n-1}^2\ -\ 2x_n^2$$

dir ve ikincicisi de

$$P_2'(x)\ =\ -\frac{2\nu_1+2\nu_2+2}{n+2\nu_1+2\nu_2}\ |x|^2\ +\ x_{n-1}^2\ +\ x_n^2$$

şeklindedir. Burada

$$c_2\ (n,\nu_1,\nu_2)\ =\ 2^{\frac{n+\nu_1+\nu_2}{2}}\ \Gamma\left(\frac{2+n+\nu_1+\nu_2}{2}\right)$$

dir. Kolayca gösterilebilir ki $\Delta_B\ P_2 = 0$ dir. Bu durumda, (4.1.15)' e göre,

$$(R_{B_n}\ f)\hat{}(\xi) = = \left(\frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2}{\frac{n}{2} + \nu_1 + \nu_2} - \frac{2\xi_{n-1}^2}{|\xi|^2} - \frac{2\xi_n^2}{|\xi|^2}\right)\hat{f}(\xi)$$

ve

$$(R_{B_{n-1}}\ f)\hat{}(\xi) = = \left(-\frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2}{n + 2\nu_1 + 2\nu_2} + \frac{\xi_{n-1}^2}{|\xi|^2} + \frac{\xi_n^2}{|\xi|^2}\right)\hat{f}(\xi)$$

dir. (4.1.16) ve (4.1.17)' deki n-tane dönüşüm vardır. Bu dönüşümlere Riesz-Bessel dönüşümleri diyelim. Bu dönüşümler aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar:

1.

$$\sum_{j=1}^{n-2}\left(R_{B_j}\right)^2 + R_{B_{n-1}} + R_{B_n} = \left(-1 + \frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2}{2\nu_1 + 2\nu_2 + n}\right) E$$

dir. Burada E, $L_{p,\nu}(\mathbf{R}_n^+)$' da birim operatördür.

2. Eğer $1 \leq j, k \leq n-2$ ise,

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_k} = -R_{B_j}\ R_{B_k}\ \Delta_B\ f, \qquad f \in \mathcal{Z}_+$$

dir.

3.

$$[(B_{x_n} + B_{x_{n-1}})\ f] = \left[\frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2}{2\nu_1 + 2\nu_2 + n} - R_{B_n} - R_{B_{n-1}}\right]\Delta_B f$$

dir. Burada $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{2\nu_1}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ dir. Bu eşitliklerin sağlandığını göstermeden önce aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 4.1.5: $f \in \mathcal{Z}_+$ *için,*

$$F_B[\Delta_B\ f]\ (y) = -\ |x|^2\ (F_B\ f)\ (y)$$

dir.

İspat . 1. $f \in L_{p,\nu}(\mathbf{R}_n^+)$ ve $j = 1,2,3,\ldots,n-2$ için $(R_j\, f)\hat{}\ (x) \ = \ i\, \frac{x_j}{|x|}\, \hat{f}\ (x)$ dir. Ohalde,

$$\sum_{j=1}^{n-2} \left(R_j^2\, f\right)\hat{}\,(x) \ = \ \sum_{j=1}^{n-2} i\, \frac{x_j}{|x|}\, f\ (x)$$

den,

$$\left[\sum_{j=1}^{n-2} \left(R_j^2\right) \ + \ (R_{B_{n-1}} \ + \ R_{B_n})\ f\right]\hat{}\ (x) \ = \ \left[-\sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{x_j}{|x|}\right)^2 \ + \ \frac{x_n^2}{|x|^2} \ + \ \frac{x_{n-1}^2}{|x|^2}\right.$$

$$\left. - \ \frac{2x_n^2}{|x|^2} \ - \ \frac{2x_{n-1}^2}{|x|^2} \ + \ \frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2}{2\nu_1 + 2\nu_2 + n}\right]\ \hat{f}(x)$$

$$= \left(-1 + \frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2}{2\nu_1 + 2\nu_2 + n}\right)\ f\ (x)$$

elde edilir. Ters Fourier-Bessel dönüşümünün alınmasıyla sonuç olarak,

$$\left[\sum_{j=1}^{n-2} \left(R_{B_j}^2\right) \ + \ (R_{B_{n-1}} \ + \ R_{B_n})\ f\right] \ = \ \left(-1 \ + \ \frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2}{2\nu_1 + 2\nu_2 + n}\right)\ f$$

elde edilir.

İspat . 2. $\frac{\partial f}{\partial x_j}$' nin Fourier-Bessel dönüşümü ,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]\hat{}\ (y) \ = \ -x_j\ \hat{f}(y)$$

dir ve

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\ x_k}\right]\hat{}\ (y) \ = \ -x_j\ x_k \hat{f}(y)$$

olur. Buradan,

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\ x_k}\right]\hat{}\ (y) \ = \ \left(-\frac{x_j}{|x|}\right)\ \left(\frac{x_k}{|x|}\right)\ |x|^2\ \hat{f}(y)$$

$$= \ -\left[R_{B_j}\ R_{B_k}\ \Delta_B\ f\right]\hat{}\ (y)$$

olur. Ters Fourier-Bessel dönüşümünün alınmasıyla sonuç olarak,

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_k} = -R_{B_j}\ R_{B_k}\ \Delta_B\ f$$

bulunur.

İspat . 3.

$$\begin{aligned}
[(B_{x_n} + B_{x_{n-1}})\ f]\hat{}\ (y) &= (-x_n^2 - x_{n-1}^2)\ \hat{f}(y) \\
&= -\left(\frac{x_n^2}{|x|^2} + \frac{x_{n-1}^2}{|x|^2}\right)\ |x|^2\ \hat{f}(y) \\
&= \left[\frac{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2}{2\nu_1 + 2\nu_2 + n} - R_{B_n} - R_{B_{n-1}}\right]\ \Delta_B \hat{f}(y)
\end{aligned}$$

den sonuç elde edilir.

KAYNAKLAR

ALIEV, I.A. 1987. *On Riesz Transformations Generated by a Generalized Shift Operators.* Ivestiya Acad of Sciences of Azerbaydian , No:1, p. 7-13 .

ALIEV, I.A. and GADJIEV,A.D. 1992. *The Weighted Estimates for Multidimetional Singular Integrals Generated by The Generalized Shift Operators.* Matematika Sbornik Rossiyskaya Acad.Nauk ,Vol.183, No:9, p. 45-66 .

COURANT, R. and HILBERT, H. 1962. *Methods of Mathematical Physics.* Volume 2, Interscience Publishers , New York.

GADJIEV, A.D. and ALIEV, I.A. 1988. *Proc. Seminars of The Inst. Applied Math,* Vol.3, No:2, Tebilisi .

GRAY, A. and MATHEWS, G.B. 1931. *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics* . Mac. and Co.Lim. St.,London .

KIPRIYANOVA, N.I. 1985. *Differential Equations,* Vol.121, No:11 .

KIPRIYANOV, I.A. 1970. *Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential Operators.* Soviet Math.Dokl.II, p.1416-1419.

KIPRIYANOV, I.A. 1967. *Tr. Math.Im. V.A..* Steklova Akad.Nauk SSSR, Vol. NO:89, p.130-213.

KIPRIYANOV, I.A.and KLUCHANTSEV,M.I. 1970. *On Singular Integrals Generated by The Generalization Shift Operators.* Sibornik Mat.,Journal, Vol.11, N:5, p,1060-1083 (in Russian).

KLUCHANTSEV,M.I. 1970. *On Singular Integrals Generated by The Generalization Shift Operators.* Sibornik Mat.,Journal, Vol.11, N:4, p,810-821 (in Russian).

LEVITAN, B.M. 1973. *Generalized Shift Operators.* Moscow Nauva .

LEVITAN, B.M. 1967. *Ushki Math. Nauk* Vol.6, No: 2. p. 102-143 .

MCLACLTLAN, N.W. 1934. *Bessel Functions for Engineers.* Oxford Uni. Press, London .

MYINT-U, T. 1973. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* . American Elsevier Publishing Company, Inc.,New York .

NERI, N. 1971. *Lecture Notes in Mathematica*, Springer Verlag, Berlin-New York .

SADOSKY, C. 1979. *An Introduction of Harmonic Analysis* . Marcel Dekker, Inc., New York and Basel .

STEIN, E.M. and WEIS, G. 1971. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces* . Princeton New Jersey, Princeton Uni. Press .

STEIN, E.M. 1970. *Singular Integrals Differential Properties of Functions* . Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

ÖZGEÇMİŞ

1966 yılında Bayburt'ta doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Bayburt'ta tamamladı. 1983 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1987 yılında mezun oldu. 1988-1990 yılları arasında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 1990-1994 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimini tamamladı.

1987 yılından 1990 yılına kadar Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde ve 1990 yılından itibaren Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosunda Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.