ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA LİNEER POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLELERİYLE YAKLAŞIMIN ASİMPTOTİK DEĞERİ

Yusuf ZEREN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2002

Bu çalışma TÜBİTAK-NATO A2** Bursu Tarafından Desteklenmiştir.

[illegible]

Prof. Dr. Elgiz BAYRAM danışmanlığında, Yusuf ZEREN tarafından hazırlanan bu çalışma 25/10/2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Cihan ORHAN

Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Prof. Dr. Varga KALANTAROV

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Doç. Dr. Ertan İBİKLİ

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA LİNEER POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLELERİYLE YAKLAŞIMIN ASİMPTOTİK DEĞERİ

Yusuf ZEREN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümünde, tez için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümünde türevlenebilir fonksiyonlara lineer pozitif integral operatörler aileleriyle yaklaşımın asimptotik değerleri bulunmuş, bazı sonuçlar inşa edilmiştir.

Dördüncü bölümünde üçüncü bölümde bulunan sonuçlar Peano anlamında türevlenebilir fonksiyonlara uygulanmıştır.

Son bölümünde daha genel olarak Schwartz anlamında türevlenebilir fonksiyonlara lineer pozitif integral operatörler aileleriyle yaklaşımın asimptotik değerleri bulunmuştur.

2002, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Singüler integraller, Peano türev, Schwartz türev.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ASYMPTOTIC VALUE OF APPROXIMATION TO DIFFERENTIABLE FUNCTIONS BY FAMILIES OF LINEAR POSITIVE INTEGRAL OPERATORS

Yusuf ZEREN

Ankara University
Graduate School of Natural Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This Thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter deal with the preliminaries, fundamental definitions and theorems that will be needed for this thesis.

In chapter three, asymptotic values of approximation to differentiable functions by families of linear positive integral operators are found and some corollaries are established.

In chapter four, are applied the results that are found in the third chapter to differentiable functions in the meaning of Peano.

In the final chapter , it is found more generally, asymptotic values of approximation to differentiable functions in the meaning of Schwartz by families of linear positive integral operators.

2002, 50 pages

Key Words: Singular integrals, Peano differentiable, Schwartz differentiable.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında beni yönlendiren E. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Akif HACIYEV (Bakü, A. İlimler Akademisi) e, yeni Danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (Ank. Üniv. Fen Fak.) a teşekkürü bir borç bilirim.

Yusuf ZEREN

Ankara, Eylül 2002

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$f'_{+}(x_0)$	: f fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan 1. mertebeden türevi
$f'_{-}(x_0)$	: f fonksiyonunun x_0 noktasında soldan 1. mertebeden türevi
$f^{(n)}_{+}(x_0)$	: f fonksiyonunun x_0 noktasında n. mertebeden sağdan türevi
$f^{(n)}_{-}(x_0)$	: f fonksiyonunun x_0 noktasında n. mertebeden soldan türevi
$f'_{s}(x_0)$	: f fonksiyonunun x_0 noktasında 1. mertebeden Schwartz türevi
$H(\varphi, f_s)$	: Schwartz anlamında türevlenebilir fonksiyonlar sınıfı

1. GİRİŞ

Pozitif çekirdekli integral operatörlere fonksiyonlar teorisi ve diferensiyel denklemler teorisinin bir çok probleminde karşılaşılmaktadır. Örneğin Fourier serilerinin bazı toplanabilme yöntemleri ile yakınsaklığının incelenmesi bu tür integrallerin yakınsaklığına indirgenir. Dirichlet probleminin çözümü ve ısı denklemi için sınır değer probleminin çözümü pozitif çekirdekli integraller şeklinde verilebilmektedir. Bundan dolayı pozitif çekirdekli integral operatörler dizisinin yakınsaklık probleminin incelenmesi hem teorik hem de uygulama açısından önem taşımaktadır.

Kabul edelim ki $\Lambda \subseteq R$ sayılar cümlesi, (a,b) sınırlı yada sınırsız aralık ve λ_0, Λ cümlesinin bir yığılma noktası olsun. $\forall\lambda \in \Lambda$ ve $x \in (a,b)$ için

$$L_\lambda(f,x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t-x)dt \qquad (1)$$

biçimindeki integral operatörler ailesini ele alalım. Burada $K_\lambda(t-x)$ operatörün çekirdeğidir. $L_\lambda : f(t) \to L_\lambda(f,x)$ operatörleri f fonksiyonuna $L_\lambda(f,x)$ fonksiyonlar ailesini karşılık getirmektedir.

Bu operatörler ailesinin çekirdeği $t=0$ noktasında $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} K_\lambda(t) = \infty$ oluyorsa (1) operatörler ailesine singüler integral operatörler ailesi denir. Özel halde $\Lambda = N$ ve $\lambda_0 = \infty$ olduğunda ise singüler integral operatörler dizisi denir.

Bu tür integral operatörler ailesinin yakınsaklıklarıyla ilgili esas problemler şöyledir:

1. Belirli bir x_0 noktasında, $\lambda \to \lambda_0$ için $L_\lambda(f,x_0) \to f(x_0)$ yakınsaklığının incelenmesi,

2. X bir lineer normlu uzay, $f \in X$, $L_\lambda : X \to X$ olduğunda $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \|L_\lambda f - f\|_X = 0$ yakınsaklığının incelenmesi,

3. 1 ve 2 deki problemlerin yakınsaklık hızlarının bulunması, yani $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$, $\lambda \to \lambda_0$ iken sıfır dizileri olmak üzere,

$$| L_\lambda(f, x_0) - f(x_{0)}) | = o(\alpha_\lambda),$$

$$\|L_\lambda f - f\|_X = o(\beta_\lambda),$$

$$| L_\lambda(f, x_0) - f(x_0) | = O(\alpha_\lambda),$$

$$\|L_\lambda f - f\|_X = O(\beta_\lambda)$$

gibi önermelerin ispatlanması,

4. Yaklaşım hızının bulunması probleminden daha genel problem, yaklaşımın asimptotik değerinin bulunması problemidir. L_λ integral operatörler ailesinin f fonksiyonuna x_0 noktasında yaklaşımın asimptotik değeri $A(x_0)$ ise bu

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{L_\lambda(f, x_0) - f(x_0)}{\alpha_\lambda} = A(x_0)$$

biçiminde gösterilir.

Konvolüsyon tipli olan bu tür problemler Weierstrass, Gauss, Perron, Landau, Picard, Lebesgue, Faddeev, Romanovsky, Natanson, Korovkin, Butzer gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir. Sözü edilen çalışmalarda, f fonksiyonunun bir noktada n. mertebeden türevlenebilir olmasının yaklaşım hızına etkisi problemi araştırılmıştır. Fakat bu durumda $L_\lambda(f, x_0)$ ın $f(x_0)$ değerine değil, sadece $\sum_{k=0}^{m} C_k f^{(k)}(x_0)$ toplamına yakınsaklığı gösterilebilmiştir. $L_\lambda(f, x_0)$ ın $f(x_0)$ değerine yakınsamasını elde etmek için Gadjiev, A.D., Djafarov, A.S., Labsker, L.G. (1962) çalışmalarında yeni bir singüler integral operatörler ailesi olarak

$$L_\lambda(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} . f(x + \alpha_{k,\lambda} t)\right] K_\lambda(t) dt$$

tanımlamışlar ve bu ailenin $f(x_0)$ değerine yaklaşımının asimptotik değerini bulmuşlardır, burada $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ belirli özellikleri sağlayan reel değerli sayılar olmak üzere $R_{n,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^{n}$ için $|R_{n,\lambda}| \geq \mu > 0$ kabulü yapılmıştır.

Bu çalışmada ise, $\lim_{\lambda \to \infty} R_{n,\lambda} = 0$ kabul ettigimizde yukarıda sözü geçen çalışmadaki $P_{k,\lambda}$ ve $\alpha_{k,\lambda}$ sayılar ailesinin yaklaşım hızını etkiledigi yeni bir teorem verdik. Verdiğimiz bu teoremdeki yakınsaklık hızı sözü geçen çalışmadaki yakınsaklık hızından daha hızlı olduğu gösterdik. Ayrıca bu teoremin sonuçlarını özel olarak Abel-Poisson, Fejer ve Weierstrass çekirdekli integral operatörler aileleriyle yaklaşımını inceledik.

Daha sonra, Peano anlamında türevlenebilir fonksiyonlar için benzer bir teorem elde edip, Peano anlamında türevlenebilir fonksiyonlara lineer pozitif integral operatörler aileleriyle yaklaşımın hızını ve asimptotik değerlerini bulduk.

Son olarak, ikinci mertebeden Schwartz anlamında türevlenebilir fonksiyonlara lineer pozitif integral operatörler aileleriyle yaklaşımın hızı ve asimptotik değerleri için benzer sonuçları elde ettik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. Tanım bölgesi bir F vektör uzayında, değer bölgesi ise F nin K skaler cismi içinde bulunan bir Φ operatörüne fonksiyonel denir.

Bu çalışma boyunca F vektör uzayını özel olarak fonksiyon uzayı olarak ele alacağız.

Tanım 2.2. Φ fonksiyonelinin tanım kümesinde bulunan f,g fonksiyonları ve herhangi a,b reel sayıları için

$$\Phi(af+bg)=a\Phi(f)+b\Phi(g)$$

eşitliği sağlanıyorsa Φ ye lineer fonksiyonel denir.

Tanım 2.3 Φ lineer fonksiyonelinin tanım kümesinde bulunan negatif olmayan f fonksiyonu için $\Phi(f)\geq 0$ ise, Φ fonksiyoneline lineer pozitif fonksiyonel denir.

F kümesi üzerinde tanımlı lineer pozitif bir Φ fonksiyoneli için $f,g\in F$ ve F deki fonksiyonların tanım kümesi T olmak üzere, her $x\in T$ için $f(x)\geq g(x)$ olsun. $f(x)-g(x)\geq 0$ olduğundan $\Phi\ (f(x)-g(x))\geq 0$ olmaktadır.
Φ fonksiyonelinin lineerliğinden

$$\Phi\ (f)-\Phi\ (g)\geq 0$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan

$$\Phi\ (f)\geq\Phi\ (g)$$

olur. Bu da Φ lineer pozitif fonksiyonelinin monoton artan olduğunu gösterir.

Teorem 2.1. (Korovkin, P.P.)

$\{\Phi_n\}$ lineer pozitif fonksiyoneller dizisi için ;

$\Psi(x)=(x-\alpha)^2$ olmak üzere,

i. $\Phi_n(1)\rightarrow 1$ $\qquad n\rightarrow\infty$

ii. $\Phi_n(\Psi) \to 0 \qquad n \to \infty$

bu iki şart sağlanıyorsa, tüm reel eksende sınırlı ve $x = \alpha$ noktasında sürekli her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(f) = f(\alpha) \tag{2}$$

dır.

İspat:

f fonksiyonunun özelliğini kullanarak iki eşitsizlik elde edebiliriz. f fonksiyonunun sınırlılığından $-M < f(x) < M$ dir ve tüm x ler için

$$-2M < f(x) - f(\alpha) < 2M \tag{3}$$

olur. $x = \alpha$ noktasında f fonksiyonunun sürekliliğinden,

$$|x-\alpha| < \delta \text{ için } -\varepsilon < f(x) - f(\alpha) < \varepsilon \tag{4}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.
Bu eşitsizliklerden, her x için

$$-\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}\Psi(x) < f(x) - f(\alpha) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\Psi(x) \tag{5}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Gerçekten, eğer $|x-\alpha| < \delta$ ise $\Psi(x) = (x-\alpha)^2 \geq 0$, olduğundan (4) eşitsizliğinden (5) elde edilir.
Eğer $|x-\alpha| \geq \delta$ ise

$$\frac{2M}{\delta^2}\Psi(x) \geq \frac{2M}{\delta^2}\delta^2 = 2M$$

olur. Ayrıca $\forall\varepsilon > 0$ için (3) eşitsizliğinden (5) elde edilir.

Lineer pozitif fonksiyonellerin monotonluğunu kullanarak (5) eşitsizliğine uygularsak.

$$-\varepsilon\Phi_n(1) - \frac{2M}{\delta^2}\Phi_n(\Psi) \leq \Phi_n(f) - f(\alpha)\cdot\Phi_n(1) \leq \varepsilon\Phi_n(1) + \frac{2M}{\delta^2}\Phi_n(\Psi) \tag{6}$$

elde edilir.

Böylece bir $N(\varepsilon)$ sayısı bulabiliriz ki,

$$-2\varepsilon < \Phi_n(f) - f(\alpha)\Phi_n(1) < 2\varepsilon$$

eşitsizliği $\forall n > N(\varepsilon)$ için doğru olur. O halde

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{için} \quad \Phi_n(f) - f(\alpha)\Phi_n(1) = \gamma_n \to 0$$

$\Phi_n(1) \to 1$ olduğundan $\Phi_n(f) = f(\alpha)\cdot\Phi_n(1) + \gamma_n \to f(\alpha)$

olur ve bu da ispatı tamamlar.

2.1. Fonksiyonlara Lineer Pozitif Fonksiyonellerle Yaklaşımın Hızı

F, tanım kümesi [a,b] aralığı olan fonksiyonların bir sınıfı olmak üzere, $\{\Phi_n\}$ lineer pozitif fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Bu fonksiyonellerin değeri f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

$\{\Phi_n\}$ dizisinde $a \le \alpha \le b$ $\Psi(x) = (x-\alpha)^2$ olmak üzere $\Phi_n(1) \to 1$, $\Phi_n(\Psi) \to 0$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Teorem 2.1 den biliyoruz ki, eğer bu şartlar sağlanıyor ve f fonksiyonu $x = \alpha$ noktasında sürekli, $[a,b]$ aralığında sınırlı ise

$$\Phi_n(f) \to f(\alpha) \qquad \text{dır.}$$

Farzedelim ki, herhangi parçalı sürekli ve $[a,b]$ aralığında sınırlı fonksiyonlar da bu fonksiyonellerin tanım kümesine aittir.

$$\lambda_\delta(x) = \begin{cases} 1, & |x-\alpha| \ge \delta > 0 \\ 0, & |x-\alpha| < \delta \end{cases} \tag{7}$$

fonksiyonunu ele alalım.

Parçalı sürekli λ_δ fonksiyonu $x = \alpha$ noktasında süreklidir ve

$\alpha_n(\delta) = \Phi_n(\lambda_\delta, \alpha) \to \lambda_\delta(\alpha) = 0$ dır.

Eğer $\delta_1 < \delta_2$ ise, $\lambda_{\delta_1}(x) \ge \lambda_{\delta_2}(x)$ dır. $\alpha_n(\delta_1) \ge \alpha_n(\delta_2)$ olduğundan $\alpha_n(\delta)$ azalmayandır.

Biz göstereceğiz ki

$\alpha_n(\delta)$, $\Phi_n(f)-f(\alpha)$ farkından daha büyük hıza sahiptir.

Lemma 2.1

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve

$f(x)>f(\alpha)$, $x\neq\alpha$ ise bu durumda

$$\Phi_n(f)-f(\alpha)\geq m_\delta\alpha_n(\delta) \tag{8}$$

dır, burada m_δ, $\{x:|x-\alpha|\geq\delta\}$ kümesi üzerinde $f(x)-f(\alpha)$ farkının en küçük değeridir.

İspat:

Önce

$$f(x)-f(\alpha)\geq m_\delta\lambda_\delta(x) \tag{9}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Gerçekten, eğer $|x-\alpha|<\delta$ ise, o zaman (7) den dolayı (9) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra eşittir. Başka bir deyişle (9) un sol tarafı sıfırdan küçük değildir. Fakat, eğer $|x-\alpha|\geq\delta$ ise, o zaman (7) ye göre (9) un sağ tarafı m_δ ya eşittir. Bu da sol tarafın m_δ dan küçük olmadığını gösterir. Φ_n fonksiyonellerinin monotonluk özelliğini kullanarak

$$f(x)-f(\alpha)\geq m_\delta\lambda_\delta(x)$$

eşitsizliğine uygularsak

$$\Phi_n(f(x)-f(\alpha))\geq\Phi_n(m_\delta\lambda_\delta(x))$$

eşitsizliğini elde ederiz. Φ_n fonksiyonelinin linerliğinden

$$\Phi_n(f)-f(\alpha)\cdot\Phi_n(1)\geq m_\delta\cdot\Phi_n(\lambda_\delta)$$

biçiminde yazabiliriz.

Bu eşitsizliği (8) eşitsizliğiyle karşılaştırırsak, görürüz ki

$$\Phi_n(1)=1 \qquad \text{ve} \qquad \Phi_n(\lambda_\delta)=\alpha_n(\delta)$$

olmalıdır. Yani

Bu lemma bize gösteriyor ki [a, b] aralığında sürekli $x=\alpha$ noktasında mutlak minimuma sahip herhangi bir f fonksiyonu için $\delta>0$ iken $\Phi_n(f)-f(\alpha)$ farkının hızı $\alpha_n(\delta)$ dizisinden daha hızlı değildir.

Örneğin $\psi(x)=(x-\alpha)^2$ olmak üzere ψ fonksiyonunu diferansiyellenebilir olmasına rağmen $\Phi_n(\Psi)$ dizisi $\alpha_n(\delta)$ dizisinden daha hızlı sıfıra gitmez. Bu lemmayı uygulayalım.

, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon, $x=\alpha$ noktasında sıfıra eşit, $x\neq\alpha$ iken $(x)>0$ olsun. Farzedelim ki, f fonksiyonu $[a,b]$ de sınırlı ve

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{\Psi(x)}=A<\infty \tag{10}$$

şeklinde limiti mevcut olsun.

Bu eşitlik f fonksiyonunun $x=\alpha$ noktasında sürekliliğini gösterir, gerçekten $x\neq\alpha$ için

$$\frac{|f(x)-f(\alpha)|}{\Psi(x)}<M$$

$$0<|f(x)-f(\alpha)|<M\cdot\Psi(x)$$

$$0\leq\lim_{x\to\alpha}|f(x)-f(\alpha)|<\lim_{x\to\alpha}M\cdot\Psi(x)=M\cdot 0=0$$

ve buradan $\lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ dır.

f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sınırlılığını ve (10) eşitsizliğini kullanarak göstereceğiz ki, $\Phi_n(f)-f(\alpha)$ nın sıfıra gitme hızı, $\Phi_n(\Psi)$ nin sıfıra gitme hızından daha az değildir. Gerçekten, (10) eşitsizliğine göre;

Eğer $|x-\alpha|\leq\delta$ ise

$$(A-\varepsilon)\Psi(x)<f(x)-f(\alpha)<(A+\varepsilon)\Psi(x) \tag{11}$$

eşitsizliği doğrudur.

Eğer $|x-\alpha|\geq\delta$ ise, Ψ fonksiyonunun en küçük değerini m_δ ile, $\{x:|x-\alpha|>\delta\}$ kümesi üzerinde $|f(x)-f(\alpha)|$ nın üst sınırını M ile gösterirsek

$$-\frac{M}{m_\delta}\Psi(x)\leq f(x)-f(\alpha)\leq\frac{M}{m_\delta}\Psi(x)$$

dır. Böylece, B ile $|A-\varepsilon|$, $|A+\varepsilon|$, $\dfrac{M}{m_\delta}$ sayılarının en büyüğünü gösterirsek, tüm x ler için

$$-B\Psi(x) \le f(x) - f(\alpha) \le B\Psi(x)$$

elde ederiz. Φ_n fonksiyonelinin monotonluğundan dolayı

$$-B\varphi_n(\Psi) \le \varphi_n(f) - f(\alpha) \le B\varphi_n(\Psi)$$

biçiminde yazabiliriz.

Yani, $\Phi_n(f) - f(\alpha)$ nın sıfıra gitme hızı ,$\Phi_n(\Psi)$ nın sıfıra gitme hızından daha az değildir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_n(f) - f(\alpha)}{\Phi_n(\Psi)} = A \tag{12}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $[a\,,b]$ aralığında tanımlı her hangi f fonksiyonu için (10) eşitsizliği sağlanır.

2.2. Fejer Operatörler Dizisinin Fonksiyonlara Yaklaşım Hızı

Fejer çekirdeği hakkında kısa bilgi verelim.

2π periyotlu f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamı olan

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ifadesinde a_k ve b_k Fourier katsayılarının açık ifadeleri

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \qquad k = 0,1,2,...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \qquad k = 1,2,...$$

kullanılırsa

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx)dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right] dt$$

formülü elde edilir. Şimdi integranttaki parantez içindeki ifadeyi ele alalım.

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

olduğundan,

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{(t-x)}{2}} dt \qquad n = 0,1,2,...$$

elde edilir.

Fejer, f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğunda, bu kısmi toplamların f fonksiyonuna yakınsamayabildiğinden dolayı onların

$$\sigma_n(f,x) = \frac{S_0(f,x) + S_1(f,x) + ... + S_{n-1}(f,x)}{n}$$

aritmetik ortalamasını ele alıp, bu ortalamanın f fonksiyonuna yakınsadığını göstermiştir.

$S_n(f,x)$ toplamların ifadesini kullanarak $\sigma_n(f,x)$ toplamını hesaplayalım.

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f,x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[\cos kt-\cos(k+1)t\right]}{\sin^2\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\frac{1-\cos nt}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt$$

integraline Fejer integral operatörü denir ve bundan dolayı

$$F_n(t)=\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

fonksiyonuna da Fejer çekirdeği denir.

Kolayca görülmektedir ki, Fejer çekirdeği negatif olmayan, çift fonksiyondur. Ayrıca, $f(x)\equiv 1$ fonksiyonu için

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=1$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt=0\ ,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt=0$$

olduğundan her k için $S_k(1,x)=1$ olduğu görülür. Buna göre,

$$\sigma_n(1,x)=\frac{1+1+\ldots+1}{n}=\frac{n}{n}=1$$

dir ve bundan dolayı $\sigma_n(f,x)$ de $f(t)\equiv 1$ alınırsa

$$1=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2dt=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt$$

elde edilir. Tüm bunlar Fejer çekirdeği için

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1, \qquad \forall n = 1,2,...$$

olduğunu göstermektedir.

Şimdi F_n çekirdeğinin $n \to \infty$ iken limitini inceleyelim. $t \neq 0$ için $\sin^2 \frac{nt}{2} \leq 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = 0$$

dır.

$F_n(0)$ değerini bulmak için önce $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ formülünü kullanarak her n için

$$F_n(0) = \lim_{t\to 0} F_n(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2} \cdot \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cdot \frac{nt}{2}} \right)^2 = \frac{n}{2\pi} \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\frac{nt}{2}} \cdot \frac{1}{\lim_{t\to 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}} \right)^2 = \frac{n}{2\pi}$$

yani, $F_n(0) = \frac{n}{2\pi}$ olduğu elde edilir.

Buradan da, $\lim_{n\to\infty} F_n(0) = \infty$ dur.

Dolayısıyla, Fejer çekirdeği için ;

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1 \qquad \forall n = 1,2,...$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(0) = \infty \qquad t = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

özellikleri sağlanır. (Altomare, 94)

Gelecek bölümlerde çalışmalarımıza temel teşkil edecek Nikolsky teoremini verelim. Nikolsky teoremi bir noktada birinci mertebeden $f_+^{'}(x_0)$, $f_-^{'}(x_0)$ sağ ve sol türevleri mevcut olan fonksiyonların Fejer operatörü ile yaklaşımın asimptotik değerini vermektedir.

Teorem 2.2. (S. M. Nikolsky)

Eğer f fonksiyonunun x_0 noktasında sağ ve sol türevleri mevcut ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n(f,x_0)-f(x_0)}{\sigma_n\left(\left|\sin\frac{t}{2}\right|,0\right)}=f_+'(x_0)-f_-'(x_0) \tag{13}$$

dır.

İspat.

f fonksiyonunun sağ ve sol türevleri,

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(t+x_0)-f(x_0)}{t}=f_+'(x_0)$$

$$\lim_{t\to-0}\frac{f(t+x_0)-f(x_0)}{t}=f_-'(x_0)$$

biçimindedir,

$$\varphi(t)=\frac{f(t+x_0)+f(x_0-t)}{2}-f(x_0) \text{ ve } \Psi(t)=\frac{f(t+x_0)-f(x_0-t)}{2}$$

şeklinde tanımlanmış φ , Ψ fonksiyonları göz önüne alalım.

Buna göre $f(t+x_0)-f(x_0)=\varphi(t)+\Psi(t)$ dir.

$$\lim_{t\to0}\frac{\varphi(t)}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}=f_+'(x_0)-f_-'(x_0) \tag{14}$$

eşitliğinin sağlandığını göstereceğiz. Önce $t\to+0$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-0}\frac{\varphi(t)}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}&=\lim_{t\to-0}\frac{\varphi(t)}{-\sin\frac{t}{2}}\\ &=\frac{1}{2}\lim_{t\to-0}\frac{f(t+x_0)-f(x_0)}{t}\cdot\frac{t}{-\sin\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\lim_{t\to-0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t}\cdot\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\\ &=\frac{1}{2}\{(-2)f_-'(x_0)+2f_+'(x_0)\}\\ &=f_+'(x_0)-f_-'(x_0)\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde $t\to+0$ için de eşitliğin sağlandığı gösterilebilir.

$$\sigma_n(f;x_0)-f(x_0)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x_0+t)-f(x_0)\}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

dir ve Ψ fonksiyonu tek olduğundan dolayı buradaki son integral sıfıra eşittir.

$$\sigma_n(f;x_0)-f(x_0)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt=\sigma_n(\varphi;0)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n(f;x_0)-f(x_0)}{\sigma_n\left(\left|\sin\frac{t}{2}\right|;0\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n(\varphi;0)}{\sigma_n\left(\left|\sin\frac{t}{2}\right|;0\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}=f_+'(x_0)-f_-'(x_0)$$

eşitliğini elde edilmiş olur.

3. Bölümde bir noktada n. sağ ve sol türevi olan fonksiyonların Pozitif çekirdekli integral operatörler aileleriyle yaklaşımın asimptotik değerine ait genel bir teorem ispatlayacağız. Bu ispatlayacağımız teoremden özel durumlarda bazı belirli Abel Poisson ve Weierstrass çekirdekli İntegral operatörleri için yeni asimptotik formüller elde edeceğiz. Önce bu operatörlerin çekirdekleri hakkında bazı hatırlatmalar yapalım.

2.3. Abel-Poisson Çekirdeği

Üst yarı düzlem için Dirichlet probleminin çözümü,

$$f_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1}{\varepsilon^2+(t-x)^2}dt \quad , \quad \varepsilon>0$$

bir integral şeklinde verilmektedir.

$$A_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2+x^2} \tag{15}$$

ifadesine Abel-Poisson çekirdeği denir.

Görüldüğü gibi A_ε, negatif olmayan bir çift fonksiyondur. Onun integralinin değeri

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(x)dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = 1$$

olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(x)dx = 1$$

olarak elde edilir.

Şimdi $\varepsilon \to 0$ iken A_ε çekirdeğinin limitini inceleyelim. Eğer $x \neq 0$ ise

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x) = 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca, $x = 0$ ise

$$A_\varepsilon(0)\frac{\varepsilon}{\pi\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi\varepsilon}$$

olduğundan

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(0) = \infty \text{ dur.}$$

Dolayısıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon(x)dx = 1\ ,\ \lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x) = 0\ ,\ x \neq 0 \text{ ise, } \lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(0) = \infty$$

olduğu görülür.

2.4. Gauss-Weierstrass Çekirdeği

Tüm reel eksende

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ısı denklemini sağlayan ve f verilmiş fonksiyon olmak üzere,

$$u(x,0) = f(x)$$

başlangıç koşulunu sağlayan $u = u(x,t)$ fonksiyonu

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}d\xi$$

İntegrali biçiminde verilmektedir. Burada,

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} = \lambda,\ u(x,t) = u_\lambda(x)$$

yazılırsa

$$u_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\lambda^2(\xi - x)^2} d\xi, \qquad \lambda > 0$$

şeklinde bir integral elde edilir. Bu integrale Gauss-Weierstrass integrali denir.

$$w_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 x^2} \tag{16}$$

fonksiyonuna da Gauss-Weierstrass çekirdeği denir.

w_λ çekirdeğinin negatif olmayan bir çift fonksiyon olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$$

olduğundan, her pozitif λ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_\lambda(t) dt = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1$$

dir. w_λ fonksiyonunun $\lambda \to \infty$ iken davranışına bakılırsa, $t \neq 0$ için

$$\lim_{\lambda \to \infty} w_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\lambda \to \infty} \lambda e^{-\lambda^2 t^2} = 0$$

olduğu açıktır. $t = 0$ için

$$w_\lambda(0) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}$$

olduğundan

$$\lim_{\lambda \to \infty} w_\lambda(0) = \infty$$

dur. Dolayısıyla Gauss-Weierstrass w_λ çekirdeği için

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_\lambda(t) dt = 1, \qquad \forall \lambda > 0$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} w_\lambda(t) = 0, \qquad t \neq 0$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} w_\lambda(0) = \infty$$

dur. (Tyn Myint, 80)

Tüm bu çekirdekler çift fonksiyonlar olduğundan onları değişkenin pozitif değerleri için incelemek yeterlidir.

3. TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA LİNEER POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLELERİYLE YAKLAŞIM

Şimdi n kez türevlenebilen fonksiyonlara

$$L_\lambda(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_\lambda(t)dt \tag{17}$$

integral operatörler ailesiyle yaklaşımı inceleyelim.

Bu operatörün çekirdeği

i. $K_\lambda(t) > 0 \quad , \quad \lambda \geq 0$

ii. $K_\lambda(-t) = K_\lambda(t)$

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)dt = 1$

koşullarını sağlasın.

$L_\lambda(f,x_0) - f(x_0)$ farkını araştıralım:

$K_\lambda(t)$, çift fonksiyon olduğundan

$$L_\lambda(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_\lambda(t)dt = \int_{-\infty}^{0} [f(x+t)K_\lambda(t)dt + \int_{0}^{\infty} [f(x+t)K_\lambda(t)dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)]K_\lambda(t)dt \tag{18}$$

dir. Ayrıca çekirdeğin sağladığı koşullardan

$$2\int_{0}^{\infty} K_\lambda(t)dt = 1$$

dir ve bu eşitliğin her iki tarafını $f(x)$ ile çarparsak,

$$f(x) = 2f(x)\int_{0}^{\infty} K_\lambda(t)dt$$

bulunur. Bu son eşitliği

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} 2f(x)K_\lambda(t)dt$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan (18) formülündeki eşitliği de kullanarak

$L_\lambda(f,x)$ ile $f(x)$ farkı için

$$L_\lambda(f,x)-f(x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}B(t)K_\lambda(t)dt \qquad (19)$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$B(t)=[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)] \qquad (20)$$

dir.

Taylor teoreminde,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}$$
$$+\frac{f^n(x_0)+\alpha(t)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (21)$$

$t\to 0$ iken $\alpha\ (t)\to 0$ dır.

(Rudin, 64)

$x=x_0+t$ yazarsak, $n=2k$ için

$$f(x_0+t)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)}+$$
$$+\frac{f^{2k}(x_0)+\alpha_1(t)}{(2k)!}t^{2k} \qquad (22)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t\to 0$ iken $\alpha_1(t)\to 0$ dır. (21) eşitliğinde $x=x_0-t$ yazarsak,

$$f(x_0-t)=f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2-\ldots+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)}$$
$$-\frac{f^{2k}(x_0)+\alpha_2(t)}{(2k)!}t^{2k} \qquad (23)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t\to 0$ iken $\alpha_2(t)\to 0$ dır. (22) ve (23) eşitliklerini (20) de yerine yazarsak,

$$B(t)=2\left(\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\frac{f^{iv}(x_0)}{4!}t^4+\ldots+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}t^{(2k-2)}\right)+\frac{f^{2k}(x_0)}{(2k)!}t^{2k}$$
$$+\frac{\alpha_2(t)}{(2k)!}t^{2k} \qquad (24)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\alpha(t)=\alpha_1(t)+\alpha_2(t)$ dir ve $t\to 0$ iken $\alpha(t)\to 0$ dır. Şimdi, (24) eşitliğini (19) de yerine yazarsak,

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=2\sum_{k=1}^{n/2}\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}\cdot\int_0^\infty t^{2k-2}\cdot K_\lambda(t)dt+\frac{1}{n!}\int_0^\infty \alpha(t)t^n\cdot K_\lambda(t)dt$$

$$+\frac{f^{2k}(x_0)}{(2k)!}\int_0^\infty t^{2k}.K_\lambda(t)dt$$

eşitliği çıkar.

$n=2k-1$ için,

$$f(x_0+t)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}t^{(2k-2)}+$$

$$+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)+\alpha_2(t)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)} \qquad (25)$$

eşitliğini buluruz. Burada $t\to 0$ iken $\alpha_1(t)\to 0$ dır. (21) eşitliğinde $x=x_0-t$ yazarsak,

$$f(x_0-t)=f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2-\ldots+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}t^{(2k-2)}$$

$$-\frac{f^{(2k-1)}(x_0)+\alpha_2(t)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)} \qquad (26)$$

eşitliği çıkar, burada $t\to 0$ iken $\alpha_2(t)\to 0$ dır. (25) ve (26) eşitliklerini (20) de yerine yazarsak,

$$B(t)=2\left(\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\frac{f^{iv}(x_0)}{4!}t^4+\ldots+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}t^{(2k-2)}\right)+\frac{\alpha(t)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)} \qquad (27)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\alpha(t)=\alpha_1(t)-\alpha_2(t)$ dir ve $t\to 0$ iken $\alpha(t)\to 0$ dır.

(27) eşitliğini (19) da yerine yazarsak

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!}\cdot\int_0^\infty t^{2k-1}\cdot K_\lambda(t)dt+\frac{1}{(2k-1)!}\int_0^\infty \alpha(t)t^n\cdot K_\lambda(t)dt$$

eşitliğini elde ederiz. Görüldüğü gibi bu eşitliğin sağ tarafının sıfıra gitmesi için

$$\int_0^\infty t^2 K_\lambda(t)dt, \int_0^\infty t^4 K_\lambda(t)dt, \ldots, \int_0^\infty t^{2k-2} K_\lambda(t)dt$$

ve

$$\int_0^\infty \alpha(t) t^{2k} K_\lambda(t)dt \qquad ,n=2k\text{-}1 \text{ ve } \quad k=1,2,\ldots\frac{n-1}{2}$$

integrallerinin $\lambda \to \infty$ iken limitleri sıfır olmalıdır. Fakat bu kadar zor koşulların konulması çekirdeklerin sınıfı çok küçülmektedir. Yani, bu tür koşulların konmasıyla yaklaşım teoremi çok küçük operatörler sınıfında geçerli olabilmektedir. Bu da başka bir yöntem bulmanın gerekli olduğunu göstermektedir. Yani, yukarıdaki zor koşulları koymadan yaklaşım teoremini ispatlamak gerekir.

Bunun için şöyle bir yol seçebiliriz:

$$\int_0^\infty t^{2k-1} K_\lambda(t)dt = A_{k,\lambda} < \infty \qquad ,n=2k\text{-}1 \text{ olmak üzere } k=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$$

diyelim ve

$$\widetilde{L}_\lambda(f,x_0) = L_\lambda(f,x_0) - 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!} A_{\lambda,k} \tag{28}$$

olacak şeklide yeni bir operatörler ailesi tanımlayalım. Bu durumda

$$\widetilde{L}_\lambda(f,x_0) - f(x_0) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \alpha(t)\cdot t^n \cdot K_\lambda(t)dt \tag{29}$$

eşitliğinde farkın sıfıra gitmesi için sağ taraftaki integralin $\lambda \to \infty$ iken limitinin sıfıra gitmesi gerekir. Bu durumda (28) de tanımlanmış $\widetilde{L}_\lambda(f,x_0)$ ailesinin $f(x_0)$ değerine yakınsadığını göstermiş oluruz. Bu ise önceden ele aldığımız $L_\lambda(f,x_0)$ ailesinin $f(x_0)$ değerine yakınsadığı anlamına gelmez.

Görüldüğü gibi $\widetilde{L}_\lambda$ ifadesinde, L_λ den farklı olarak f fonksiyonunun $k=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$ olmak üzere tüm $f^{2k}(x_0)$ türevleri mevcuttur.

Bu türevleri ortadan kaldırmak için bu konuyla ilgili olarak Gadjiev, A.D., Djafarov, A.S., Labsker, L.G. (1962) makalelerinde bazı özellikleri sağlayan $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ sayılarını kullanarak bazı koşulları kaldırmışlar ve yeni operatörler ailesi tanımlayıp bunun bir noktada n.mertebeden türevlenebilen f fonksiyonuna yaklaşımını ve asimptotik değerini bulmuşlardır. Bu operatörler ailesi,

$$L_\lambda(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_\lambda(t)dt \tag{30}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Bu integral operatör ailesinde $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan sayılardır.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} \le M < \infty$ M sabit λ ya göre düzgün;

$\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} = 1,$ $\lambda \ge 0$, $k = 1,2,...$ için,

$\sup_{k,\lambda}\{\alpha_{k,\lambda}\} = \alpha^* < \infty$

$R_{n,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^n$ $s \ne 0$, $s < n$ ve s çift ise $R_{s,\lambda} = 0$ dır.

$$|R_{n,\lambda}| \ge \mu > 0 \tag{31}$$

herbir n için μ sabit ve λ ya göre düzgündür.

2. $\lim_{t \to +0} \frac{\Phi(t)}{t^n} = 1$ sağlayacak biçimde, $[0,\infty]$ aralığında azalmayan bir $\Phi(t)$ fonksiyonu alalım.

$$\Delta_\lambda = \int_0^{\infty} \Phi(t)K_\lambda(t)dt < \infty \tag{32}$$

Biçiminde sonlu integrali Δ_λ ile gösterelim.

f fonksiyonu öyle olmalıdır ki, herbir $t \in (-\infty,\infty)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} f(x+\alpha_{k,\lambda}t)$ toplamı yakınsak olmalıdır.

Teorem 3.1 (Gadjiev, A.D., Djafarov, A.S., Labsker, L.G.)

1. f fonksiyonu ölçülebilir ve x_0 noktasının komşuluğunda (n-1). mertebeden türevlenebilir, x_0 noktasında ise n. mertebeden sağ ve sol $f_+^{(n)}(x_0), f_-^{(n)}(x_0)$ türevleri mevcut olsun.

$x \in (-\infty, \infty)$ için $1 \le \varphi(x) < \infty$ olmak üzere

$$|f(x)| \le \varphi(x)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde φ mevcut olsun ve $K_\lambda(t)$ çekirdeği negatif olmayan, çift fonksiyon olsun ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)dt = 1$$

eşitliği sağlansın.

2. Eğer $\forall \delta > 0$ için $\mu(t) = \sup\limits_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$

olmak üzere $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_{\delta}^{\infty} \mu(\alpha^* t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt = o(\Delta_\lambda) \tag{33}$$

sağlanıyorsa, bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{L_\lambda(f;x_0) - f(x_0)}{R_{n,\lambda}\cdot\Delta_\lambda} = \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{34}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\pm$ işareti n nin tek ve çift olması durumuna göre değişir.

Bu teoremde (31) koşulunda görüldüğü gibi $P_{k,\lambda}$ ve $\alpha_{k,\lambda}$ sayıları aslında yaklaşım hızını etkileyemez, çünkü teoremde yer alan $R_{n,\lambda}$ dizisi aşağıdan sınırlı olduğu için sıfıra gidemez. (31) koşulu bu sayıların yaklaşım hızına etkisine imkan vermez. Bu nedenle bu koşulu kaldırarak yeni bir yaklaşım teoremi vereceğiz. Bu yeni teorem, Teorem 3.1 den daha genel ve ispatı benzer biçimde olduğu için ispatını vermeyeceğiz.

Not: $R_{n,\lambda} = \infty$ olabilir mi?

$$\left|R_{n,\lambda}\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^{n}\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|P_{k,\lambda}\right|\left|\alpha_{k,\lambda}\right|^{n}\le\alpha^{*}.\sum_{k=1}^{\infty}\left|P_{k,\lambda}\right|\le\alpha^{*}.\mu<\infty$$

olduğundan $R_{n,\lambda}=\infty$ olamaz.

Teorem 3.2

Teorem 3.1 deki (31) hariç diğer tüm özellikler sağlansın, ek olarak her n için

$$\lim_{\lambda\to\infty}R_{n,\lambda}=0$$

ve

$$\widetilde{\Delta}_{\lambda}=R_{n,\lambda}\cdot\Delta_{\lambda}=R_{n,\lambda}\int_{0}^{\infty}\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt \qquad (35)$$

olduğunu kabul edelim. Eğer $\forall\delta>0$ için, $\mu(t)=\sup\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ |y|<t}}\dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}<\infty$

olmak üzere $\lambda\to\infty$ iken

$$\int_{\delta}^{\infty}\mu(\alpha^{*}t)\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt=o(\widetilde{\Delta}_{\lambda}), \qquad (36)$$

sağlanıyorsa, bu durumda

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{L_{\lambda}(f;x_0)-f(x_0)}{\widetilde{\Delta}_{\lambda}}=\frac{f_{+}^{(n)}(x_0)\pm f_{-}^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (37)$$

dır. Burada $\pm$ işareti n nin tek ve çift olması durumuna göre değişir.

İspat:

$L_{\lambda}(f,x_0)-f(x_0)$ farkını araştıralım:

$$L_{\lambda}(f,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt$$

$$+\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt=\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.\left[f(x+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x-\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right]K_{\lambda}(t)dt \quad (38)$$

dır. Ayrıca çekirdeğin sağladığı koşullardan

$$2\int_{0}^{\infty}K_{\lambda}(t)dt=1$$

dir ve bu eşitliğin her iki tarafını $f(x)$ ile çarparsak,

$$f(x)=\int_0^\infty 2f(x)K_\lambda(t)dt$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}=1$ olduğundan

$$f(x)=\int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}.2f(x)\right]K_\lambda(t)dt \tag{39}$$

şeklinde yazabiliriz. (38) formülündeki eşitlikle farkını alırsak,

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=\int_0^\infty B_\lambda(t)\cdot K_\lambda(t)dt \tag{40}$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$B_\lambda(t)=\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}[f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)-2f(x_0)] \tag{41}$$

biçimindedir.

$n=2k-1$ için (21) eşitliğinde $x=x_0+\alpha_{k,\lambda}t$ yazarsak

$$f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)=f(x_0)+\frac{f^{1}(x_0)}{1!}\alpha_{k,\lambda}t+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\alpha_{k,\lambda}^{n-1}t^{n-1}+$$

$$+\frac{f_{+}^{(n)}(x_0)+\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)}{n!}\alpha_{k,\lambda}^{n}t^{n} \tag{42}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t\to+0$ iken k ve λ göre düzgün olmak üzere $\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)\to 0$ dır.

(21) eşitliğinde $x=x_0-\alpha_{k,\lambda}t$ yazarsak

$$f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)=f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}\alpha_{k,\lambda}t+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\alpha_{k,\lambda}^{n-1}t^{n-1}-$$

$$-\frac{f_{-}^{(n)}(x_0)+\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)}{n!}\alpha_{k,\lambda}^{n}t^{n} \tag{43}$$

eşitliğini buluruz. Burada $t\to+0$ iken k ve λ ya göre düzgün olmak üzere $\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\to 0$ dır.

(42) ve (43) eşitliklerini (41) de yerine koyarsak,

$$B_\lambda(t)=\frac{f_{+}^{(n)}(x_0)-f_{-}^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot R_{n,\lambda}t^{n}+\gamma_\lambda(t)\cdot t^{n} \tag{44}$$

eşitliğini buluruz. Burada $\gamma_\lambda(t)$,

$$\gamma_\lambda(t)=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}p_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^{n}\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)-\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right]\to 0\ , \quad (t\to 0 \quad \text{iken})$$

dir. Çünkü , koşulumuza gore k ve λ ya göre düzgün olarak

$$\lim_{t\to+0}\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)=\lim_{t\to+0}\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)=0 \text{ dır.}$$

Yani, keyfi $\varepsilon>0$ için k ve λ dan bağımsız bir $\delta>0$ var, öyle ki,

$|t|<\delta$ olduğunda $|\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)|<\varepsilon$ sağlanır.

Buna göre yine de verilen pozitif ε a göre aynı δ sayısını bularak şunları yazabiliriz.

$$|\gamma_\lambda(t)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha^{n}{}_{k,\lambda}\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)-\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right|$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}|P_{k,\lambda}|\cdot\alpha^{n}{}_{k,\lambda}\left[|\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)|+|\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)|\right]\le 2\varepsilon(\alpha^{*})^{n}M\le C\varepsilon \ \ (C \text{ sabit})$$

Dolayısıyla gösterdik ki eğer $|t|<\delta$ ise keyfi $\varepsilon>0$ verildiğinde k ve λ dan bağımsız öyle bir $\delta>0$ bulabiliriz ki, $|t|\le\delta$ iken

$$|\gamma_\lambda(t)|<C\varepsilon \tag{45}$$

olur. Bu da gösterir ki, λ ya göre düzgün olmak üzere $t\to 0$ iken $\gamma_\lambda(t)$ nin limiti sıfırdır.

$$\sigma_\lambda(t)=\frac{B_\lambda(t)}{\Phi(t)}-R_{n,\lambda}\,\frac{f_{+}^{(n)}(x_0)-f_{-}^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{46}$$

biçiminde σ_λ fonksiyonu ele alalım.

$$C_0=(\alpha^{*})^{n}\cdot M\,\frac{f_{+}^{(n)}(x_0)-f_{-}^{(n)}(x_0)}{n!}$$

olmak üzere (46) eşitliğinin mutlak değerini alıp C_0 yerine yazarsak

$$|\sigma_\lambda(t)|\le\frac{|B_\lambda(t)|}{\Phi(t)}+C_0$$

olur ve (41) eşitliğini bu eşitsizlikte yerine yazıp $\varphi(x_0)$ ile çarpıp bölersek,

$$|\sigma_\lambda(t)|\le\frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)}\sum_{k=1}^{\infty}|p_{k,\lambda}|\left\{\frac{|f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)|}{\varphi(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)}\cdot\frac{\varphi(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)}{\varphi(x_0)}\right.$$

$$+\frac{|f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)|}{\varphi(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)}\cdot\frac{\varphi(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)}{\varphi(x_0)}+2\frac{|f(x_0)|}{\varphi(x_0)}\bigg\}+C_0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Hipotezde,

$$\mu(t)=\sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\ |y|<t}}\frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}<\infty$$

idi, tanımdan görüldüğü gibi μ $[0,\infty)$da azalmayandır, çünkü t arttıkça tanım bölgesi büyür, bu nedenle bölge üzerinde supremum azalmaz. Buradan

$$|\sigma_\lambda(t)|\le\frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)}\sum_{k=1}^{\infty}|p_{k,\lambda}|[2\mu(\alpha_{k,\lambda}t)+2]+C_0$$

olur. Buradan

$$|\sigma_\lambda(t)|\le\frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(t)}\mu(\alpha^* t)\cdot M+C_0 \tag{47}$$

elde ederiz. (44) eşitliğini (46) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\lim_{t\to+0}\sigma_\lambda(t)=\lim_{t\to+0}\gamma_\lambda(t)=0$$

olur, limit tanımından

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için öyle } \delta>0 \text{ vardır ki } 0\le t\le\delta,\quad \lambda\ge 0 \tag{48}$$

$$|\sigma_\lambda(t)|<\varepsilon$$

kalır. $t>\delta$ iken

$$|\sigma_\lambda(t)|\le\frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(\delta)}\mu(\alpha^* t)M+C_0\le C\mu(\alpha^* t) \tag{49}$$

olur. Burada C herhangi bir sabit sayıdır.

$B_\lambda(t)$ yi (46) dan çekip (40) de yerine koyarsak

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=\frac{f_+^{(n)}(x_0)-f_-^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot\widetilde{\Delta}_\lambda+\int_0^{\infty}\sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt \tag{50}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin sağındaki integrali göz önüne alalım,

$$I(\lambda)=\int_0^{\infty}\sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

$\delta>0$ için integrali 0 dan δ ya , δ dan da ∞ a iki integralin toplamı biçiminde yazıp (48) ve (49) eşitsizliğini kullanırsak

$$|I(\lambda)| \le \int_0^\delta |\sigma_\lambda(t)|\Phi(t)K_\lambda(t)dt + \int_\delta^\infty |\sigma_\lambda(t)|\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$
$$< \varepsilon \cdot \int_0^\delta \Phi(t)K_\lambda(t)dt + C \cdot \int_\delta^\infty \mu(\alpha^*(t))\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

elde edilir. (35) ve (36) dan

$$|I(\lambda)| \le \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda)$$

yazabiliriz. Bu son eşitsizliği (50) de yerine koyarsak ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de $K_\lambda(t)$ çekirdeğinin somut şekli verildiğinde $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ sayılarının yaklaşım hızını nasıl etkilediğini gösterelim. Bunun için Teorem 3.1 e örnek verip daha sonra aynı örneği Teorem 3.2 de uygulayarak aralarındaki farkı göstermeye çalışalım.

Örnek 3.1.

$$L_\lambda(f,x) = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]\frac{dt}{1+\lambda^2 t^2}$$

biçiminde Abel-Poisson çekirdekli singüler integral operatörler ailesini ele alalım. $\lambda \ge 1$ olmak üzere $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$, Teorem 3.1 deki özellikleri sağlasın, ek olarak

$$\Phi(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

biçiminde bir Φ fonksiyonu tanımlayalım. (32) eşitliğindeki Δ_λ tanımını kullanarak

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2}dt < \infty$$

bu son integralde Φ fonksiyonunu yerine koyup integrali 0 dan 1 e, 1 den sonsuza, iki integralin toplamı şeklinde yazarsak

$$\frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2}dt = \frac{\lambda}{\pi}\left(\int_0^1 \frac{tdt}{1+\lambda^2 t^2} + \int_1^\infty \frac{dt}{1+\lambda^2 t^2}\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan,

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{2\lambda^2}\left(\ln(1+\lambda^2 t^2)\Big|_0^1 + \arctan \lambda t\Big|_1^\infty\right) = \frac{1}{2\pi\lambda}\cdot\ln(1+\lambda^2) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\lambda\right)$$

elde ederiz, burada

$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{\ln(1+\lambda^2)}{\ln \lambda^2} = 1$ olduğundan $\ln(1+\lambda^2) \approx \ln \lambda^2$ dır. Bunu yerine koyarsak

$$\Delta_\lambda \approx \frac{1}{2\pi\lambda}\cdot \ln \lambda^2 = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\ln\lambda}{\lambda}$$

elde ederiz. Bu son eşitlikten de

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2}\,dt \approx \frac{\ln\lambda}{\pi\cdot\lambda}$$

eşitliği bulunur.

Teorem 3.3

Farzedelim ki, f fonksiyonu R de ölçülebilir, sınırlı, x_0 noktasında birinci mertebeden sağ ve sol, $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ türevleri var ve sonludur. Bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\ln\lambda}\cdot\frac{L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)}{R_{1,\lambda}} = \frac{1}{\pi}\left[f'_+(x_0)-f'_-(x_0)\right]$$

dır.

İspat:

Teorem 3.1 in (33) koşulu sağlanırsa ispat tamamlanmış olur. Bunun için;

$$\frac{\lambda}{\pi}\int_\delta^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2}\,dt = o(\Delta_\lambda)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$\frac{\lambda}{\Delta_\lambda}\int_\delta^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2t^2}\,dt = \frac{\lambda}{\frac{\ln\lambda}{\lambda}}\left(\int_\delta^1\frac{t\,dt}{1+\lambda^2t^2}+\int_1^\infty\frac{dt}{1+\lambda^2t^2}\right)$$

$$= \frac{\lambda^2}{\ln\lambda}\left(\frac{1}{2\lambda^2}\ln(1+\lambda^2t^2)\Big|_\delta^1 + \frac{1}{2\lambda^2}\arctan\lambda t\Big|_1^\infty\right) \approx \frac{(-\ln\delta)}{\ln\lambda} = o(1)$$

dir ve bu son eşitlik ispatı tamamlar.

Örnek 3.2

Şimdi Teorem 3.2 ye örnek verebiliriz. Örnek 3.1 deki koşullara ek olarak

$$P_{k,\lambda} = \begin{cases} (-1)^{k+1} C_n^k & k=1 \\ 0 & k=2,3,\dots \end{cases} \qquad \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{\ln \lambda}} & k=1 \\ 0 & k=2,3,\dots \end{cases}$$

alalım. Buna göre,

$$R_{1,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\ln \lambda}} \text{ olduğundan } \lim_{\lambda\to\infty} R_{1,\lambda} = 0 \text{ dır.}$$

Buradan

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = R_{1,\lambda}\Delta_\lambda \approx \frac{1}{\sqrt{\ln \lambda}} \cdot \frac{\ln \lambda}{\pi\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\ln \lambda}}{\lambda}$$

olur.

Teorem 3.4

Farzedelim ki, f fonksiyonu R de ölçülebilir, sınırlı, x_0 noktasında birinci mertebeden sağ ve sol, $f_+'(x_0)$, $f_-'(x_0)$ türevleri var ve sonludur. Bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\ln \lambda}} \cdot \left[L_\lambda(f,x_0) - f(x_0)\right] = \frac{1}{\pi}\left[f_+'(x_0) - f_-'(x_0)\right]$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\Phi(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

biçiminde bir Φ fonksiyonu tanımlayalım.

(36) eşitliği sağlanırsa ispat tamamlanır. Yani,

$$\frac{\lambda}{\widetilde{\Delta}_\lambda} \int_\delta^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2} dt \to 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Örnek 3.1 de bulduğumuz sonuçlardan

$$\frac{\lambda}{\widetilde{\Delta}_\lambda}\int_\delta^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2t^2}dt = \frac{\lambda}{\frac{\sqrt{\ln\lambda}}{\lambda}}\left(\int_\delta^1 \frac{tdt}{1+\lambda^2t^2}+\int_1^\infty \frac{dt}{1+\lambda^2t^2}\right)=\frac{(-\ln\delta)}{\sqrt{\ln\lambda}}=o(1)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu iki örnekten görüldüğü gibi Teorem 3.2 nin bir uygulaması olan Örnek 3.2 deki hız, Teorem 3.1 in uygulaması olan Örnek 3.1 dekinden daha hızlıdır. Yani,

$\frac{\sqrt{\ln\lambda}}{\lambda}$, $\frac{\ln\lambda}{\lambda}$ ya göre daha hızlı sıfıra yaklaşır.

Yaklaşım hızının artmasıyla daha iyi yaklaşım sonucu elde etmiş oluruz.

Örnek 3.3

$$L_\lambda(f,x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]F(t)dt$$

operatöründe $\lambda\geq 1$ olmak üzere, $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ Teorem 3.1 deki şartları sağlasın. $F(t)$ negatif olmayan çift bir fonksiyon olsun ve,

$\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt=1$ sağlansın.

$\chi_n=\int_0^\infty t^nF(t)dt<\infty$ olsun.

Teorem 3.1 de $K_\lambda(t)=\lambda F(\lambda t)$, $\Phi(t)=t^n$ yazarsak

$$\Delta_\lambda=\lambda\int_0^\infty t^nF(\lambda t)dt=\frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty t^nF(t)dt=\frac{\chi_n}{\lambda^n}$$

dir. Ayrıca, $\mu(t)=\sup\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\|y|<t}}\frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}<\infty$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \mu(\alpha^*t)\cdot t^n\cdot F(t)dt$$

integrali var ve sonludur. Buradan

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda^n}{R_{n,\lambda}}\left[L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)\right]=\chi_n\frac{f_+^{(n)}(x_0)\pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!}$$

olur, burada $\pm$, n in çift ve tek olma durumuna göre değişir.

İspat:

Teorem 3.1 e göre,

$\forall \delta > 0$ için, $\lambda \to \infty$ iken $\dfrac{\lambda}{\Delta_\lambda} \int_\delta^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(\lambda t) dt \to 0$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\frac{\lambda}{\Delta_\lambda} \int_\delta^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(\lambda t) dt = \frac{1}{\Delta_\lambda \lambda^n} \int_{\lambda\delta}^\infty \mu\left(\alpha^* \frac{t}{\lambda}\right) \cdot t^n \cdot F(t) dt \le \frac{1}{\chi_n} \int_{\lambda\delta}^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(t) dt$$

ifadenin sağ tarafındaki integral $\lambda \to \infty$ iken sıfıra gider ve bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.4

Fejer tipli çekirdekli

$$L_\lambda(f,x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) \right] F(t) dt$$

integral operatörler ailesini ele alalım.

$\lambda > 1$ ve $N > 0$ olmak üzere $P_{k,\lambda}$ ve $\alpha_{k,\lambda}$ ları

$$P_{k,\lambda} = \begin{cases} (-1)^{k+1} C_n^k & k = 1 \dots n \\ 0 & k = n+1 \dots \end{cases} \qquad \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda^{N \backslash n}} & k = 1 \dots n \\ 0 & k = n+1 \dots \end{cases}$$

biçiminde seçelim. Buradan

$$R_{n,\lambda} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{\lambda^N} \text{ olduğundan } \lim_{\lambda \to \infty} R_{n,\lambda} = 0 \text{ dır.}$$

$(-1)^n \cdot n! = c$ diyelim. $\widetilde{\chi}_n$ fonksiyonu

$$\widetilde{\chi}_n = c \int_0^\infty t^n F(t) dt < \infty$$

olsun.

Teorem 3.2 de $K_\lambda(t) = \lambda F(\lambda t)$, $\Phi(t) = t^n$ yazarsak

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = R_{n,\lambda} \cdot \Delta_\lambda = \frac{c}{\lambda^N} \cdot \lambda \int_0^\infty t^n F(\lambda t) dt$$

olur. $\lambda t = u \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot dt = du$ dönüşümünü yaparsak

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = \frac{c}{\lambda^{N+n}} \cdot \int_0^\infty t^n F(t) dt = \frac{\widetilde{\chi}_n}{\lambda^{N+n}}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.5

Teorem 3.2 in şartları sağlansın, ek olarak φ fonksiyonunu için

$$\mu(t) = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$$

olmak üzere, eğer $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_{\lambda\delta}^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(t) dt = o\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$$

oluyorsa, bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{N+n} \left[L_\lambda(f, x_0) - f(x_0)\right] = \widetilde{\chi}_n \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!}$$

eşitliği doğrudur.

İspat:

Teorem 3.2 ye göre

$$\lambda \int_\delta^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(\lambda t) dt = o(\widetilde{\Delta}_\lambda)$$

sağlandığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$\frac{1}{\widetilde{\Delta}_\lambda} \cdot \lambda \int_\delta^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(\lambda t) dt \le \frac{\lambda^{N+n}}{\widetilde{\chi}_n \lambda^n} \cdot \int_{\lambda\delta}^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(t) dt \le \frac{\lambda^N}{\widetilde{\chi}_n} \cdot \int_{\lambda\delta}^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(t) dt$$

bu son integral hipotezden dolayı $\lambda \to \infty$ iken sıfıra eşittir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Weierstrass çekirdekli

$$L_\lambda(f, x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty P_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t)\right] e^{-\lambda^2 t^2} dt$$

integral operatörler ailesini ele alalım.

$\lambda > 1$ ve $N > 0$ olmak üzere $P_{k,\lambda}$ ve $\alpha_{k,\lambda}$ ları

$$P_{k,\lambda} = \begin{cases} (-1)^k C_n^k & k = 1...n \\ 0 & dy \end{cases} \qquad \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda^{N\backslash n}} & k = 1...n \\ 0 & dy \end{cases}$$

biçiminde seçelim. Buradan

$$R_{n,\lambda} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{\lambda^N} \text{ olduğundan } \lim_{\lambda \to \infty} R_{n,\lambda} = 0 \text{ dır.}$$

$(-1)^n \cdot n! = c$ diyelim. $\widetilde{\chi}_n$ yı

$$\widetilde{\chi}_n = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t^2} dt$$

biçiminde tanımlayalım.

Teorem 3.2 de $K_\lambda(t) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\lambda^2 t^2}$, $\Phi(t) = t^n$ yazarsak

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = R_{n,\lambda} \cdot \Delta_\lambda = \frac{c}{\lambda^N} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^n \cdot e^{-\lambda^2 t^2} dt$$

olur. $\lambda t = u \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot dt = du$ dönüşümünü yaparsak

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = \frac{c}{\sqrt{\pi} \cdot \lambda^{N+n}} \cdot \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t^2} dt = \frac{\widetilde{\chi}_n}{\lambda^{N+n}}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.6

Teorem 3.2 deki koşullara ek olarak $s \geq 1$ olmak üzere $\varphi(t) = 1 + |t|^s$ olsun. Bu durumda

$$\mu(t) = \frac{\varphi(x+t)}{\varphi(x)} = \frac{1 + |x+t|^s}{1 + |x|^s} \leq \frac{1 + 2^s \left| |x|^s + |t|^s \right|}{1 + |x|^s} \leq 2^s \frac{\left(1 + |x|^s\right)}{1 + |x|^s} + 2^s \frac{|t|^s}{1 + |x|^s} \leq 2^s \left(1 + |t|^s\right)$$

olur. Buradan

$$\mu(t) = 2^s \left(1 + |t|^s\right)$$

alabiliriz. Eğer

$$\int_{\lambda\delta}^{\infty} \mu\left(\alpha^{\bullet} t\right) \cdot t^{n} \cdot e^{-t^{2}} \, dt = o\left(\frac{1}{\lambda^{N}}\right)$$

sağlanıyorsa

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{N+n}\left[L_{\lambda}(f, x_0) - f(x_0)\right] = \widetilde{\chi}_n \frac{f_{+}^{(n)}(x_0) \pm f_{-}^{(n)}(x_0)}{n!}$$

eşitliği sağlanır.

4. PEANO ANLAMINDA TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA LİNEER POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLELERİYLE YAKLAŞIMIN ASİMPTOTİK DEĞERİ

Tanım 4.1 Bir x_0 noktasının komşuluğunda tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu

$\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t)=0$ olmak üzere

$$f(x_0+t)=a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{a_r+\alpha(t)}{r!}t^r$$

biçiminde gösterilebiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında r. Peano türevi vardır denir ve bu türev a_r dir. Peano türevini $f_p^{(r)}$ ile gösterelim, yani

$$f_p^{(r)}(x_0)=a_r$$

dir.

Taylor formülünden görülüyor ki, adi türev varsa Peano türevi de var fakat karşıtı doğru değildir.

Şimdi Bölüm 3 deki Teorem 3.2 yi daha genel sınıf olan Peano anlamda türevlenebilen fonksiyonlar sınıfına taşıyacak olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1

$f(x)$ fonksiyonu ölçülebilir ve bir x_0 noktasının komşuluğunda (n-1). kez Peano anlamda türevlenebilir, x_0 noktasında ise sağdan ve soldan a_n^+, a_n^- Peano türevleri mevcut olsun.

Teorem 3.1 deki (31) ve (32) hariç diğer tüm özellikleri sağlansın, ek olarak $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_{n,\lambda}=0$ ve

$$\widetilde{\Delta}_\lambda=R_{n,\lambda}\cdot\Delta_\lambda=R_{n,\lambda}\int_0^\infty \Phi(t)K_\lambda(t)dt \tag{51}$$

olsun. Eğer $\forall\delta>0$ için $\mu(t)=\sup\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ |y|<t}}\frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}<\infty$

$$\int_{\delta}^{\infty}\mu\left(\alpha^{*}t\right)\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt=o\left(\widetilde{\Delta}_{\lambda}\right), \tag{52}$$

sağlanıyorsa, bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{L_{\lambda}(f;x_0)-f(x_0)}{\widetilde{\Delta}_{\lambda}}=\frac{a_n^{+}\pm a_n^{-}}{n!} \tag{53}$$

dır. Burada $\pm$ işareti n nin tek ve çift olması durumuna göre değişir.

İspat:

$L_{\lambda}(f,x_0)-f(x_0)$ farkına bakalım.

$$L_{\lambda}(f,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt+$$

$$+\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt=\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.\left[f(x+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x-\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right]K_{\lambda}(t)dt \tag{54}$$

dır. Ayrıca çekirdeğin özelliğinden

$$2\int_{0}^{\infty}K_{\lambda}(t)dt=1$$

dir ve bu eşitliğin her iki tarafını $f(x)$ ile çarparsak,

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}2f(x)K_{\lambda}(t)dt$$

elde ederiz. Ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}=1$ olduğundan

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.2f(x)\right]K_{\lambda}(t)dt \tag{55}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$L_{\lambda}(f,x)-f(x)=\int_{0}^{\infty}B_{\lambda}(t)\cdot K_{\lambda}(t)dt \tag{56}$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$B_{\lambda}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}[f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)-2f(x_0)] \tag{57}$$

biçimindedir.

$n=2k-1$ için Tanım 4.1 deki

$$f(x_0+t)=a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+...+\frac{a_r+\alpha(t)}{r!}t^r$$

eşitliğinde t yerine $\alpha_{k,\lambda}t$ yazarsak,

$$f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)=a_0+\frac{a_1}{1!}\alpha_{k,\lambda}t+...+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\alpha_{k,\lambda}^{n-1}t^{n-1}+\frac{a_n^+ +\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)}{n!}\alpha_{k,\lambda}^n t^n \tag{58}$$

eşitliğini elde ederiz, burada $t\to+0$ iken k ve λ göre düzgün olmak üzere $\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)\to 0$ dır.

Yine Tanım 4.1 deki açılımda t yerine $-\alpha_{k,\lambda}t$ yazarsak,

$$f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)=a_0-\frac{a_1}{1!}\alpha_{k,\lambda}t+...+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\alpha_{k,\lambda}^{n-1}t^{n-1}-\frac{a_n^- +\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)}{n!}\alpha_{k,\lambda}^n t^n \tag{59}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t\to+0$ iken k ve λ ya göre düzgün olmak üzere $\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\to 0$ dır.

(58) ve (59) eşitliklerini (57) de yerine koyarsak,

$$B_\lambda(t)=\frac{a_n^+ - a_n^-}{n!}\cdot R_{n,\lambda}t^n+\gamma_\lambda(t)\cdot t^n \tag{60}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\gamma_\lambda(t)$,

$$\gamma_\lambda(t)=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}p_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^n\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)-\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right]\to 0\,,\quad (t\to 0 \text{ iken})$$

dir. Çünkü, hipotezden k ve λ ya göre düzgün olarak

$$\lim_{t\to+0}\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)=\lim_{t\to+0}\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)=0$$

olur.Yani keyfi $\varepsilon>0$ için k ve λ dan bağımsız öyle bir $\delta>0$ var, öyle ki $|t|<\delta$ olduğunda $|\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)|<\varepsilon$ kalır.

Buna göre.

$$|\gamma_\lambda(t)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)-\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |P_{k,\lambda}| \cdot \alpha_{k,\lambda} \left[|\beta_1(\alpha_{k,\lambda} t)| + |\beta_2(\alpha_{k,\lambda} t)| \right] \leq 2\varepsilon\alpha^* \mu \leq c\varepsilon \qquad \text{(c sabit)}$$

elde ederiz. Eğer $|t| < \delta$ ise keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde k ve λ dan bağımsız öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki, $|t| \leq \delta$ iken

$$|\gamma_\lambda(t)| < c\varepsilon \tag{61}$$

olur. Bu ise λ ya göre düzgün olmak üzere $t \to 0$ iken $\gamma_\lambda(t)$ nin limiti sıfır olduğunu gösterir

$$\sigma_\lambda(t) = \frac{B(t)}{\Phi(t)} - R_{n,\lambda} \frac{a_n^+ - a_n^-}{n!} \tag{62}$$

biçiminde $\sigma_\lambda(t)$ fonksiyonu ele alalım. Burada

$$C_0 = (\alpha^*)^n \cdot M \frac{a_n^+ - a_n^-}{n!}$$

olmak üzere (62) eşitliğinin mutlak değerini alırsak,

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{|B_\lambda(t)|}{\Phi(t)} + C_0$$

elde ederiz. (57) eşitliğini bu eşitsizlikte yerine yazıp $\varphi(x_0)$ ile çarpıp bölersek,

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| \left\{ \frac{|f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)|}{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)} \cdot \frac{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0)} \right.$$
$$\left. + \frac{|f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)|}{\varphi(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)} \cdot \frac{\varphi(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0)} + 2\frac{|f(x_0)|}{\varphi(x_0)} \right\} + C_0$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\mu(t) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ |y| < t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$$

olduğundan μ fonksiyonu $[0,\infty)$da azalmayandır çünkü t arttıkça tanım bölgesi büyür, bu nedenle bölge üzerinde supremum azalmaz. Dolayısıyla

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| \left[2\mu(\alpha_{k,\lambda} t) + 2 \right] + C_0$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan,

$$|\sigma_\lambda(t)| \le \frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(t)}\mu(\alpha^* t)\cdot M + C_0 \tag{63}$$

buluruz.

$$\lim_{t\to+0}\sigma_\lambda(t) = \lim_{t\to+0}\gamma_\lambda(t) = 0$$

limit tanımından

$\forall\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ var, öyle ki, $0 \le t \le \delta$, $\lambda \ge 0$

$$|\sigma_\lambda(t)| < \varepsilon \tag{64}$$

kalır. $t > \delta$ iken

$$|\sigma_\lambda(t)| \le \frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(\delta)}\mu(\alpha^* t)M + C_0 \le C\mu(\alpha^* t) \tag{65}$$

olur. Burada C , t ve λ ya bağlı sabit sayıdır.

$B_\lambda(t)$ yi (62) den çekip (56) da yerine koyarsak,

$$L_\lambda(f,x_0) - f(x_0) = \frac{a_n^+ - a_n^-}{n!}\cdot\widetilde{\Delta}_\lambda + \int_0^\infty \sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt \tag{66}$$

eşitliğini buluruz. Şimdi bu eşitliğin sağındaki integrali çözelim,

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

$\delta > 0$ için integrali 0 dan δ ya , δ dan da ∞ a iki integralin toplamı biçiminde yazıp (64) ve (65) eşitsizliğini kulanırsak

$$|I(\lambda)| \le \int_0^\delta |\sigma_\lambda(t)|\Phi(t)K_\lambda(t)dt + \int_\delta^\infty |\sigma_\lambda(t)|\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

$$< \varepsilon\cdot\int_0^\delta \Phi(t)K_\lambda(t)dt + C\cdot\int_\delta^\infty \mu(\alpha^*(t))\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

elde ederiz. (32) ve (33) den

$$|I(\lambda)| \le \varepsilon\cdot\Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda)$$

yazabiliriz. Bu son eşitsizliği (66) da yerine koyarsak ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Peano türevi için bazı sonuçlar verelim:

1. Fejer çekirdekli

$$L_{\lambda}(f,x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]F(t)dt$$

integral operatörler ailesini ele alalım. Örnek 3.4 deki koşullar sağlandığında,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{N+n}\left[L_{\lambda}(f,x_0)-f(x_0)\right]=\widetilde{\chi}_n\frac{a_n^{+}\pm a_n^{-}}{n!}$$

olur.

2. Weierstrass çekirdekli

$$L_{\lambda}(f,x)=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]e^{-\lambda^2t^2}dt$$

integral operatörler ailesini ele alalım. Örnek 3.5deki koşullar sağlansın. Ek olarak

$\varphi(x)=1+|x|^{s}$ $s\geq 1$, olsun. $x\in(-\infty,\infty)$ olmak üzere,

$$\mu(t)=2^{s}\left(1+|t|^{s}\right)<\infty$$

olur. $\lambda\to\infty$ iken

$$\int_{\lambda\delta}^{\infty}\mu\left(\alpha^{*}t\right)\cdot t^{n}\cdot e^{-t^2}dt=o\left(\frac{1}{\lambda^{N}}\right)$$

ise, bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{N+n}\left[L_{\lambda}(f,x_0)-f(x_0)\right]=\widetilde{\chi}_n\frac{a_n^{+}\pm a_n^{-}}{n!}$$

dir.

5. SCHWARTZ ANLAMINDA TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA LİNEER POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLELERİYLE YAKLAŞIMININ ASİMPTOTİK DEĞERİ

Tanım 5.1. f fonksiyonu bir x_0 noktasının komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonunun x_0 noktasında birinci Schwartz türevi var denir ve bu türev $f_s^{'}(x_0)$ biçiminde gösterilir. (Butzer, 71)

Schwartz türevi adi türevden daha geneldir.

Lemma 5.1

f fonksiyonunun x_0 noktasında birinci mertebeden adi türevi varsa, bu durumda birinci Schwartz türevi var ve birbirine eşittir. Fakat karşıtı doğru değildir. Yani, $f^{'}(x_0)\Rightarrow f_s^{'}(x_0)$ ancak $f_s^{'}(x_0)\not\Rightarrow f^{'}(x_0)$ dır.

İspat:

f fonksiyonunun x_0 noktasında birinci mertebeden adi türevi

$$f^{'}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

idi. Burada sağ taraftaki paya $f(x_0-h)$ ekleyip çıkarırsak

$$f^{'}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0-h)-f(x_0-h)}{h}$$

olur. Limitin özelliğinden

$$f^{'}(x_0)=2\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki birinci limit f fonksiyonunun birinci mertebeden Schwartz türevini, ikinci limit ise birinci adi türevini vermektedir.

$$f^{'}(x_0)=2f_s^{'}(x_0)-f^{'}(x_0)\Rightarrow 2f^{'}(x_0)=2f_s^{'}(x_0)$$

buradan $f'(x_0) = f_s'(x_0)$ dır.

Dolayısıyla, birinci mertebeden adi türev varsa birinci mertebeden Schwartz türevi de var. Fakat karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 5.1

$f(x) = |x|$ ile tanımlı fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci Schwartz türevine bakalım.

$$f_s'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = 0$$

olduğundan birinci Schwartz türev var ve $f_s'(0) = 0$ dır. Şimdi de birinci adi türeve bakalım.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h \geq 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

limit mevcut olmadığı için $x = 0$ noktasında birinci adi türevi yoktur.

Tanım 5.2 f fonksiyonu x_0 noktasının komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

limiti mevcut ise o zaman f fonksiyonunun ikinci Schwartz türevi var denir ve bu türev $f_s''(x_0)$ biçiminde gösterilir.

Lemma 5.2.

f fonksiyonunun x_0 noktasında ikinci adi türevi varsa ikinci Schwartz türevi var ve birbirine eşittir. Yani,

$$f_s''(x_0) = f''(x_0)$$

dır, fakat bunun karşıtı doğru değildir.

İspat.

$f''(x_0)$ mevcut olsun. Taylor teoreminde $x = x_0 + h$ yazarsak

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)+\alpha_1}{2!}h^2,\ \ h\to 0,\ \alpha_1\to 0$$

elde ederiz. Eğer $x=x_0-h$ yazarsak,

$$f(x_0-h)-f(x_0)=-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)+\alpha_2}{2!}h^2,\ \ h\to 0,\ \alpha_2\to 0$$

elde ederiz. Bu iki eşitliği taraf tarafa topladığımızda;

$$f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)=\left[f''(x_0)+\alpha\right]h^2,$$

burada $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ dir.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(f''(x_0)+\alpha\right)$$

olduğundan $f_s''(x_0)=f''(x_0)$ sağlanmış olur.

Dolayısıyla, herhangi bir fonksiyonun bir noktada ikinci adi türevi varsa ikinci Schwartz türevi de var ve eşittir, fakat bunun karşıtı doğru değildir.

Örnek 5.2

$f(x)=\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,dt$ ile tanımlı fonksiyonunun $x=0$ noktasında ikinci Schwartz ve ikinci adi türevine bakalım.

$$f_s''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-2f(0)+f(0-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h t\sin\frac{1}{t}\,dt-2\cdot 0+\int_0^{-h} t\sin\frac{1}{t}\,dt}{h^2}=0$$

ikinci Schwartz türevi var ve sıfıra eşittir, yani $f_s''(0)=0$ dır.

Şimdi bu noktada ikinci adi türevine bakalım.

$$f(x)=\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,dt \qquad \text{ise} \qquad f'(x)=x\sin\frac{1}{x}$$

olduğundan,

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

olur. Fakat bu limit mevcut olmadığından bu fonksiyonun $x=0$ noktasında ikinci adi türevi yoktur.

Şimdi de önceki bölümlerde verilen yeni teoremlere benzer fakat daha genel olan ikinci Schwartz türevi için yeni bir teorem verelim.

$$L_\lambda(f,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\cdot f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_\lambda(t)dt \tag{67}$$

biçiminde integral operatörler ailesini gözönüne alalım, burada $\lambda>0$ reel parametredir. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left|P_{k,\lambda}\right|<q<\infty$,

burada q, λ dan bağımsız sabit bir reel sayıdır ve

$$R_{2,\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^2\neq 0$$

olsun. Burada

$\alpha_{k,\lambda}$ ların herbiri pozitif ve

$$\sup_{k,\lambda}\{\alpha_{k,\lambda}\}=\alpha^*<\infty$$

dır.

2. $\lambda\to\infty$ iken $\widetilde{\Delta}_\lambda=R_{2,\lambda}\cdot\int_0^{\infty}t^2K_\lambda(t)dt\to 0$

dır. $K_\lambda(t)$ çekirdeği pozitif, çift ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_\lambda(t)dt=1$$

olsun. Eğer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f_s^{''}(x_0)$$

sonlu limiti varsa f fonksiyonu $x=x_0$ noktasında ikinci mertebeden Schwartz türevi vardır. Böyle tüm fonksiyonların kümesini $H\left(\varphi,f_s^{''}\right)$ ile gösterelim.

Teorem 5.1

f fonksiyonu ölçülebilir ve $f \in H\left(\varphi, f_\delta^*\right)$ olsun.

$$|f(x)| \leq \varphi(x) < \infty, \ \mu(t) = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$$

olmak üzere $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_\delta^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^2 \cdot K_\lambda(t) dt = o\left(\widetilde{\Delta}_\lambda\right)$$

sağlanıyorsa

$$L_\lambda(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} . f(x+\alpha_{k,\lambda} t)\right] K_\lambda(t) dt$$

operatörler ailesi için

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{L_\lambda(f,x_0) - f(x_0)}{\widetilde{\Delta}_\lambda} = f_s^*(x_0)$$

eşitliği doğrudur.

İspat:

Açıktır ki

$$L_\lambda(f,x_0) - f(x_0) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} . \left[f(x+\alpha_{k,\lambda} t) + f(x-\alpha_{k,\lambda} t) - 2f(x_0)\right] K_\lambda(t) dt$$

$$= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} . \alpha_{k,\lambda}^2 \frac{f(x+\alpha_{k,\lambda} t) + f(x-\alpha_{k,\lambda} t) - 2f(x_0)}{\alpha_{k,\lambda}^2 t^2} \cdot t^2 \cdot K_\lambda(t) dt \quad (68)$$

dır. Şimdi

$$\gamma_\lambda(t) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} . \alpha_{k,\lambda}^2 \frac{f(x+\alpha_{k,\lambda} t) + f(x-\alpha_{k,\lambda} t) - 2f(x_0)}{\alpha_{k,\lambda}^2 t^2} . t^2}{t^2} - f_s^*(x_0) \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} . \alpha_{k,\lambda}^2$$

biçiminde γ_λ fonksiyonu tanımlayalım.

Burada $t \to 0$ iken $\gamma_\lambda(t) \to 0$ dır. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ bulabiliriz ki, $|t| < \delta$ iken

$$|\gamma_\lambda(t)| < \varepsilon \tag{69}$$

sağlanır.

Eğer $|t| \geq \delta$ ise, o zaman Teorem 3.2 nin ispatında olduğu gibi $|f(x)| \leq \varphi(x) < \infty$ şartından kolaylıkla görülür ki,

$$|\gamma_\lambda(t)| < c\mu(\alpha * t) \tag{70}$$

burada c , λ ve t ye bağlı değildir.

Şimdi de γ_λ fonksiyonun tanımından

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}.\alpha_{k,\lambda}^2 \frac{f(x+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x-\alpha_{k,\lambda}t)-2f(x_0)}{\alpha_{k,\lambda}^2 t^2} \cdot t^2 = t^2\gamma_\lambda(t) + t^2 R_{2,\lambda} f_\delta''(x_0)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadeyi alıp (68) da yerine koyarsak

$$L_\lambda(f;x_0) - f(x_0) = \int_0^\infty t^2 \cdot \gamma_\lambda(t) \cdot K_\lambda(t)dt + R_{2,\lambda} \cdot f_s''(x_0) \cdot \int_0^\infty t^2 K_\lambda(t)dt$$

elde ederiz.

Bu son ifadenin sağ tarafındaki ilk Integral $o(\Delta_\lambda)$ dır. Teorem 3.2 nin şartına göre ikinci Integral $\widetilde{\Delta}_\lambda$ olur ve bununla da ispat tamamlanmış olur. Yani,

$$\left|\int_0^\infty t^2 \cdot \gamma_\lambda(t) \cdot K_\lambda(t)dt\right| \leq \int_0^\delta t^2 \cdot |\gamma_\lambda(t)| \cdot K_\lambda(t)dt + \int_\delta^\infty t^2 \cdot |\gamma_\lambda(t)| \cdot K_\lambda(t)dt$$

eşitliğinde sağ tarafdaki birinci integrale (69) u uygularsak, ikinci integralde ise (70) i uygulayarak

$$\left|\int_0^\infty t^2 \cdot \gamma_\lambda(t) \cdot K_\lambda(t)dt\right| \leq \varepsilon \int_0^\delta t^2 K_\lambda(t)dt + c\int_\delta^\infty t^2 \mu(\alpha^* t) K_\lambda(t)dt < \varepsilon\Delta_\lambda + c\int_\delta^\infty t^2 \mu(\alpha^* t) K_\lambda(t)dt$$

buluruz. Teoremin hipotezinden

$$\lambda \to \infty \text{ iken } \left|\int_\delta^\infty t^2 \cdot \gamma_\lambda(t) \cdot K_\lambda(t)dt\right| = o(\widetilde{\Delta}_\lambda)$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

Altomare, F., Campiti, M. (1994), Korovkin Type Approximation Theory and its Application, Walter de Gruyter, Berlin and New York

Butzer, P.L. (1960), Representation and Approximation of Function by General Singular İntegrals, Proceeding Konikel. Nederland. Akad. Wet 63 ,1-24

Gadjiyev, A.D.,Djiafarov, A.S. and Labsker, L.G. (1962), on Asymtotic Value of Approximation of Functions by Certain Families of Integral Operators, Izvestiya Acad. Of the Azerbaycan, No. 3, 19-28 (in Russain)

Gadjiyev, A.D. (1963), The Speed of Convergence of a Classes of Singular Integrals, Izvestiya Acad. Of Sci.Of the Azerbaycan, No. 6, 27-31 (in Russain)

Hacısalihoğlu, H. And Hacıyev. A, 1995 Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. Ankara, (1-100)

Korovkin, P.P. (1960), Linear Positive Operators and Approximation Theory, Delhi

Mamedov, R.G. (1961), On the Order of of function by The Linear Integral Operators in Lebesgue Points, Izvestiya Acad. Of The Azerbaycan, No.1, (in Russian)

Natanson, I.P. (1960), Theory of functions of a real variable (Translated by Leo F. Boron), Fredrick Ungar Publishing Co., New York, Volue 2

Butzer, P.L. Rolf J. Nessel. (1971) Fourier Analysis and Approximation, Academic Press, New York and London, Stein, E.M., Weiss, G. (1971), İntroduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton

Stein, E.M. (1993), Singular Integrals and Differentiability properties of Function, Princeton Univ. Princeton Univ. Press

Tyn Myint, U. (1980) Partial Differeftial Equations of math .Physics Elsever North Holland, Inc.

Walter, Rudin (1964) Principles of Mathematical Analysis The United States of Amerika

ÖZGEÇMİŞ

Erzurum'da 1969 yılında doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1989 yılında girdiği Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1993 yılında Matematikçi Unvanı ile mezun oldu. 1995 yılında H.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Aynı enstitüde araştırma görevlisidir.

Şubat 1998 'de Doktora eğitimini yapmak üzere Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosuna atandı. Halen bu göreve devam etmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır.