83404

GARANTİ YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE SABİT KATSAYILI ADİ DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

H.Hüseyin SAYAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

1999

Prof. Dr. Ömer AKIN danışmanlığında H.Hüseyin SAYAN tarafından hazırlanan bu çalışma ..14..../ 05...../ 1999.... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	Prof.Dr. Abdullah ALTIN	İmza	:	
Üye	:	Prof.Dr. Elgiz BAYRAMOV	İmza	:	
Üye	:	Prof.Dr. Mehmet CAN	İmza	:	
Üye	:	Prof.Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN	İmza	:	
Üye	:	Prof.Dr. Ömer AKIN	İmza	:	

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Esma KILIÇ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

GARANTİ YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE SABİT KATSAYILI ADİ DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

H.Hüseyin SAYAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömer AKIN

Jüri: Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Prof. Dr. Elgiz BAYRAMOV
Prof. Dr. Mehmet CAN
Prof. Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN
Prof. Dr. Ömer AKIN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve kavramlar verilmiş, garanti yaklaşım yönteminin tanımı ve gelişimi üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde, Ax=f lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü için garanti yaklaşım yöntemi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lineer diferensiyel denklem sistemleri tanıtılmış,Cauchy problemi ve üstel matris fonksiyonu üzerinde durulmuş, daha sonra çözümlerin sürekliliği incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemleri için iki-nokta sınır değer problemi tanıtılmış, Cauchy problemi için varlık ve teklik teoremi verilmiştir. Green matris fonksiyonları yardımıyla problemin analitik çözümü yapılmış, daha sonra katsayılar matrisi ile başlangıç koşulları cinsinden ifade edilmiş bir matrisin şart sayısına dayanarak problemin hassasiyeti incelenmiş, bununla ilgili üç teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Beşinci ve son bölüm, tezin tamamen orijinal kısmıdır. Bu bölümde, daha önceki bölümlerde verilen bilgiler tümüyle kullanılmıştır. Özellikle dördüncü bölümün orijinal kısmından önemli ölçüde yararlanılmıştır. Bu son bölümde, sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemi için iki-nokta sınır değer probleminin garanti yaklaşım yöntemi ile nümerik çözümü için çözüm algoritması ortaya konmuştur.

1999, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler: Garanti yaklaşım yöntemi, şart sayısı, format, iki-nokta sınır değer problemi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

NUMERICAL SOLUTION BY GUARANTEED ACCURACY METHOD OF TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

H.Hüseyin SAYAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ömer AKIN

Jury: Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Prof. Dr. Elgiz BAYRAMOV
Prof. Dr. Mehmet CAN
Prof. Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN
Prof. Dr. Ömer AKIN

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the fundamental definitions and notions are given. After that, the definitions and the improvement of the guaranteed accuracy method are considered.

In the second chapter, the solition of the linear, algebraic system of $Ax=f$ is given by using the guaranteed accuracy method.

In the third chapter, the system of linear differential equations are introduced, the Cauchy problem and the exponential matrix function are considered. After that, the continuity of the solutions are examined.

In the fourth chapter, the two-point boundary value problem for the systems of linear differential equations with constant coefficients is presented. The existence and uniqueness theorem for the Cauchy problem is expressed and proved. The analytical solution of the problem is given by the help of the Green's matrix functions. After that, the accuracy of the problem is examined by relying on the matrix condition number and some theorems are proved.

The fifth and final chapter is the completely original part of the thesis. In this part, the knowledge introduced in the previous parts aspecially, the theorems of the chapter four are completely used. In this last chapter, three algorithms for the two-point boundary value problems of the linear differential equations with constant cefficients is given by the use of the guaranteed accuracy method.

1999, 60 pages

Keys Words: Guaranteed accuracy method, condition number, format, two-point boundary value problem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her safhasında bana yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ömer AKIN'a ve Sayın Prof. Dr. Haydar BULGAK'a, ayrıca çalışmalarım sırasında bana manevi destek olan aileme teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

H.Hüseyin SAYAN
Mayıs 1999

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mu(A)$: A matrisinin şart sayısı.

A^* : A matrisinin transpozu

A^{-1} : A matrisinin tersi

$\lambda_1(A)$: A matrisinin en küçük öz değeri.

$\lambda_N(A)$: A matrisinin en büyük öz değeri.

$\sigma_1(A)$: A matrisinin en küçük tekil değeri.

$\sigma_N(A)$: A matrisinin en büyük tekil değeri.

$||A||$: A matrisinin spektral normu

$||x||$: x vektörünün Euclid normu

$\Phi(t)$: Temel (Fundamental) matris

ξ^+ : ξ' nin sağ komşuluğu

ξ^- : ξ' nin sol komşuluğu

SVD : Tekil değerlerin ayrışımı (Singular value decomposition)

$\widetilde{A}$: A matrisine norm olarak yeterince yakın matris.

1. GİRİŞ

Teknolojinin hızla ilerlediği, bilgisayar çağı adı verilen 1990'lı yıllarda, bilgisayarlar günlük hayatın bir parçası oldu. Bilgisayarlar; günlük hayatta, mühendislikte, fen dallarında ve ekonomide karşılaşılan, çözümü zor olan problemlerin çözülmesi için büyük bir firsat ve kolaylıktır. Klasik analiz, diferensiyel denklemler ve cebirsel denklemler ile bilgisayar dallarındaki problemler birbirinden tamamen bağımsız değildir. Hatta problemlere aynı yaklaşımla yaklaşılmalıdır ki bu problemleri bilgisayarda çözmek için dallar arası bilgi transferi yaparak çözüme ait ideal metod bulunabilsin, problemi doğru çözen, rahatlıkla çalışan programlar yapılabilsin. Bu ise bilgi alış verişi yapılan dallarda kullanılan metotların aynı olmasıyla mümkündür.

1.1. İyi Konulmuş ve İyi Konulmamış Problemler

Bir problemin doğru çözülebilmesi için problemin öncelikle doğru olarak ortaya konulması gereklidir. Matematikte, bilgisayar kullanıcısı, çözeceği problemi iyi anlaması gerekir, yani problemin verilerinin neler olduğunu, çözümünden ne beklendiğini net olarak bilmelidir. Fen ve mühendislik dallarında verilen problemlerin giriş verilerine bakıp çözümünün olup olmadığını inceleyerek, çözüm hakkında kesin bilgilere sahip olmak bilgisayar kullanıcısının asıl hedeflerinden birisidir. Eğer problemin tek bir çözümü varsa ve giriş verilerindeki küçük bir değişime karşı problemin tek olan çözümü küçük tepki; büyük değişime karşı büyük tepki verir ise, bu probleme iyi konulmuş (well-conditioned) problem aksi halde probleme iyi konulmamış (ill-conditioned) problem denir. Uygulamada problemin iyi konulmadığı tespit edildiğinde üzerinde çalışmanın gereği yoktur. Bu durumda kullanıcı, matematik modelini ve verilerini daha ayrıntılı hazırlayarak problemini yeniden tanıtır ve çözüme yeniden başlar. Burada en önemli noktalardan birisi, hesaplamalar için kullanılan bilgisayarın kapasitesidir. Kullanılan bilgisayarın mikro işlemcisinin kapasitesi ne kadar büyük ise hesaplamaların da o derece sağlıklı olacağı açıktır. Yani problemin iyi konulması veya konulmaması diğer bir yandan hesaplamalar için kullanılan bilgisayara da bağlıdır.

1.2. Format

Bilgisayarda tüm hesaplamalar sonlu hassaslıkla (finite precission) yapılmaktadır. Yani gerçel sayılar yerine, rasyonel sayıların bir altkümesi kullanılmaktadır.

Tanım 1.1. Rasyonel sayıların bir alt kümesi olan ve

$$F(\gamma, P_-, P_+, k) = \{0\} \cup \{z\,;\ z = \pm\gamma^{P(z)}\, m(z)\,,\ m(z) = a_1/\gamma + a_2/\gamma^2 + \ldots + a_k/\gamma^k$$
$$a_1 \neq 0,\ \gamma\in Z^+,\ 0 \le a_j \le \gamma-1\,,\quad j = 1,2,\ldots,k,\ P_- \le P(z) \le P_+,\ P_- \in Z^-, P_+ \in Z^+\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye format denir [Akın ve Bulgak 1998]. Bu küme, bilgisayar kullanıcısına reel sayıları bilgisayarda istediği hassaslıkla değerlendirme ve problemin bazı adımlarında hesaplamaları daha farklı bir alt kümede yapma imkanı verir. Bu gibi özel konularda hesaplamaları daha anlamlı şekilde yapmak için format kavramı bir çıkış yolu olarak kabul edilebilir.

Eğer γ, P_-, P_+ sabit olarak alınırsa format kümesi,

$$F_k = F(\gamma, P_-, P_+, k)$$

olur. Bu kümenin en büyük sayısı $\varepsilon_\infty = \gamma^{P+}(1- \gamma^{-k})$ şeklinde tanımlıdır. Aynı zamanda Format'ın tüm elemanları $[-\varepsilon_\infty, \varepsilon_\infty]$ kapalı aralığındadır. Bu sınırlar her bilgisayarın mikro işlemcisine ve matematik işlemcisine göre değişebilir.

Genel olarak hassaslığı karakterize eden iki bilgisayar sabiti vardır. Bu sabitler ε_1 ve ε_0 ile gösterilir. ε_1 bilgisayarda 1 sayısına yaklaşım için, ε_0 › 0 sayısına yaklaşım için kullanılan sabitlerdir. Bilgisayarda $(0,\varepsilon_0)$ ve $(1, 1 + \varepsilon_1)$ aralıklarında başka hiçbir sayı yoktur.

Herhangi bir z reel sayısı bilgisayarda hafizaya yerleşirken üç durum ile karşılaşılabilir.

1. z, seçilen Formatın elemanı ise hatasız hafizaya yerleşebilir,

2. z yerine Formatın z'ye en yakın sayısı olan fl(z), yerleşebilir ve bu durumda hata için

$$|z - fl(z)| \le \varepsilon_1 |z| + \varepsilon_0$$

eşitsizliği sağlanır.

3. z, seçilen Formatın dışında ise, bu durumda bilgisayar OVERFLOW hatasını gösterir ve kilitlenir.

Aynı şekilde, NxN tipinde bir reel A matrisi ve N boyutlu reel f vektörü bilgisayarda hafizaya yerleşirken, OVERFLOW durumu ile karşılaşılmazsa, A ve f yeterince büyük yani, $\| A \| > \varepsilon_0$ ve $\| f \| > \varepsilon_0$ ise A yerine fl(A) matrisi ve f yerine fl(f) vektörünün yerleşmesiyle

$$\| A - fl(A) \| \le \varepsilon_1 \| A \|, \qquad \| f - fl(f) \| \le \varepsilon_1 \| f \|$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bunlara giriş hataları denir. Burada $\| A \|$; A matrisinin spektral normunu ve $\| f \|$; f vektörünün Euclid normunu göstermektedir [Akın ve Bulgak 1998].

Tanım 1.2. Bir A matrisinin spectral normu; $\lambda_j(A)$, A matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$\|A\| = \underset{j}{\text{maks}} \sqrt{| \lambda_j(A^*A) |}$$

dır [Godunov vd,1993].

Tanım 1.3. A matrisinin tekil değerleri

$$\sigma_j(A) = \sqrt{| \lambda_j(A^*A) |}$$

dır [Godunov vd,1993].

1.3. İyi Konulmuş ve İyi Konulmamış Problemlerin Format ile Bağlantısı

Bir problemde verilen A matrisi ve f vektörü formata yerleşirken

$$\| A - \hat{A} \| \le \varepsilon \| A \|, \qquad \| f - \hat{f} \| \le \varepsilon \| f \| \qquad (1.1)$$

eşitsizliklerini sağlayan $\hat{A}$ matrisi ve $\hat{f}$ vektörü ile karşılaşılır. Hesaplama işlemleri için seçilen formatı karakterize eden veya verilen problemin verilerinin doğruluğunu gösteren ε pozitif reel sayısıdır. O halde problemi değerlendirmek için problemin verilerine göre hassasiyeti göz önüne alınmalıdır. İyi konulmamış bir problem bu imkanı vermez. Eğer hesaplamalar için kötü bir algoritma seçilirse bu taktirde iyi konulmuş problemin de çözülemeyebileceği açıktır.

Eğer iyi bir algoritma seçilir ve çözüm sırasında problemin iyi konulduğu tespit edilirse bu taktirde problemin bilgisayara göre tam çözümü elde edilir. Aksi halde alınacak cevap "Verilen problem iyi konulmamış bir problemdir" olur. İşte bu şekilde verilen algoritmalara Garanti yaklaşım algoritmaları ve buradan elde edilen programlara da

Garanti yaklaşım programları denir. Bu konu [1], [2], [6], [9], [10], [13], [18] numaralı kaynaklarda da ele alınmıştır.

1.4. Garanti Yaklaşım Yöntemleri

Hesaplama işlemlerinde teknolojide son 20 yıl içinde büyük bir ilerleme sağlanmıştır. Değişik ülkelerde, uluslararası boyutlarda Scientific Computing, Error Control veya Garanti Yaklaşım Yöntemleri olarak bilinen dergiler yayınlanmakta, kongreler ve seminerler düzenlenmektedir. Reliable Computing (An International Journal Devoted to Reliable Mathematical Computations Based on Finite Representations and Guaranteed Accuracy, Institute of New Technologies in Education, St. Petersburg-Moscow, Kluer Academic Publishers), Error Control and Adaptivity in Scientific Computing (NATO ASI, Antalya 1998) gibi. Bu tür faaliyetlerde ana konu hesaplamalar sırasında elde edilen sayısal çözümlerin gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunun bilgisayar yöntemleri ile incelenmesidir. Garanti yaklaşım algoritması, problem bilgisayarda çözülürken hesaplama sırasında problemin iyi konulup konulmadığını araştırır. Bu tespitin ise hesaplamada kullanılan Format'a da bağlı olması doğaldır. Eğer problemin iyi konulmamış olduğu tespit edilirse cevap olarak problemin iyi konulmamış olduğu ifade edilir ve hesaplama işlemleri durdurulur. Aksi halde hesaplanan çözüm, Format'ın giriş hatasından daha büyük olmayan bir hatayla verilir. Garanti yaklaşım Yöntemi istenen prolemle ilgili olarak aşağıdaki kavramların kesin olarak bilinmesini gerektirmektedir [Bulgakov 1993]:

1- Format,

2- Şart sayısı,

3- Giriş verilerindeki hataların sonuca etkisi,

4- Kalıntı (Rezidü) problemi,

5- Pratik iyi konulmuş problem,

6- Formata bağlı bir algoritma,

7- Hassas iterasyon işlemi.

2. Bölümde $Ax = f$ sisteminin çözümü için bu tip bir algoritmanın örneği verilecektir.

2. LİNEER CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN GARANTİ YAKLAŞIM YÖNTEMİ

Matematiğin en önemli problemlerinden birisi de Ax=f denklem sisteminin çözümüdür. Bu problem için klasik test detA $\neq 0$ olup olmadığıdır. Bir matrisin elemanlarında yapılan küçük değişikliklerin detA üzerindeki etkileri çok büyük olabilir. Bir reel sayı gösteriminin yaklaşımındaki limitler çok küçük olduğunda, değişim limitlerin dışında kalabilir. Yani, bazan değişimin çok küçük olması matris elemanlarının bilgisayardaki karşılığına etki etmeyebilir. Bazı durumlarda da küçük değişimler verilen matrisin tersinin alınabilme özelliğini kaybettirebilir. Örneğin;

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak alındığında det $A = \varepsilon \neq 0$ olup her f için çözüm vardır ve tektir. Buna karşılık

$$B = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \| B \| = \varepsilon$$

matrisi için $(A + B)\, y = f$ probleminin durumu, det $(A + B) = 0$ olduğundan bazı f 'ler için sonsuz çözüm varken bazı f 'ler için ise çözüm olmayacaktır. Yani; $(A + B)y = f$ problemi iyi konulmuş bir problem değildir. Çünkü çözümün varlığı ve tekliği f'nin elemanlarına göre değişkenlik arz etmektedir.

Bu tür problemlerde, problemin iyi konulmuş olmayan problemlerin bölgesine olan uzaklığı ve A'nın elemanları ne kadar değiştirilirse problemin yine iyi tanımlı olacağı soruları akla gelebilir. Bu sorunun cevabı bir matrisin şart sayısı yardımıyla verilebilir.

Şimdi Ax=f denklem sisteminin çözümü için garanti yaklaşım yöntemi verilecektir. Bunun için gerekli olan yedi kavram sırasıyla aşağıdaki 2.1-2.7 paragraflarında açıklanacaktır (Ayrıca 1.4' e bakınız.) :

2.1. Format

Tüm hesaplamaların, Paragraf 1.2 de ele alındığı gibi rasyonel sayıların γ, P_-, P_+ ve k parametrelerine bağlı $F(\gamma, P_-, P_+, k)$ alt kümesi olan Formatta yapılması kabul edilmektedir.

2.2.Şart Sayısı

Ax = f problemi bilgisayar ile çözülmek istendiğinde önemli problemlerin doğacağı aşikardır (Verilerin bilgisayara yerleşmesi sırasında detA=0 olması gibi). Bu durum son 50 yıl içinde net şekilde belirlenmiştir. Bu konuda John von Neumann, H.H. Goldstine ve Turing tarafindan çalışmalar başlatılmıştır [Neumann and Goldstine 1947] ve [Turing 1948]. Daha sonra [13],[16],[23] ve [25] çalışmaları ile verilen problem için $\mu(A) = \| A \| \| A^{-1} \|$ şart sayısı olarak belirlenmiş ve $\mu(A)$' ya göre, problemler ele alınarak değerlendirilmiştir. Tekil matrisler için $\mu(A) = \infty$ olarak kabul edilir.

Şimdi şart sayısının önemli bir özelliğini karakterize eden bir teorem ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 2.1. Eğer A tekil olmayan bir matris ve bir B matrisi için

$$2\mu(A)\| B \| / \| A \| < 1$$

eşitsizliği geçerli ise bu taktirde (A+B) matrisi de tekil değildir ve

$$| \mu(A) - \mu(A+B) | \leq 3 \mu^2(A)\| B \| / \| A \|$$

eşitsizliği geçerlidir [Godunov vd. 1993].

2.3. Giriş Verilerindeki Hataların Sonuca Etkisi

Giriş verilerindeki belirsizliğin sonuca etkisi aşağıdaki teorem ile hesaplamalara katılabilir.

Teorem 2.2. A tekil olmayan bir matris ve bir B matrisi için $2\mu(A)\| B \| / \| A \| < 1$ eşitsizliği geçerli ise bu taktirde Ax = f problemi ve ona yakın olan (A+B)y = f+g probleminin çözümleri arasında

$$\| x - y \| / \| x \| \leq 3 \mu(A) (\| B \| / \| A \| + \| g \| / \| f \|)$$

eşitsizliği geçerlidir [Godunov vd. 1993].

Teorem 2.2, verilerin bağıl hatası ile çözümün bağıl hatasının $\mu(A)$ parametresi ile bağlılığını verir. Yani $\mu(A)$ ne kadar küçük ise, verilen Ax =f problemi o kadar iyi konulmuştur.

Uygulamada verilerin ve bilgisayardan alınan sonuçların hataları iki farklı noktadan kaynaklanabilir. Bunlar;

1) Kullanıcının yaptığı giriş hataları,

2) Verilerin bilgisayar hafizasına yerleşmesi sırasında meydana gelen yuvarlatma hatalarıdır.

$(A+B)\,y = f + g$ denklemi $Ax = f$ denklemine "yakın" bir denklem ve bu iki denklem arasında sadece $\| B \| / \| A \| < \varepsilon$ ve $\| g \| / \| f \| < \varepsilon$ bağıntılarının geçerli olduğu varsayılsın. Burada ε, giriş verilerinin hassas verilip verilmediğini gösteren bir parametredir. Bu açıdan ε parametresi oldukça önemlidir. Eğer hatalar sadece 2) den kaynaklanıyorsa bu taktirde $\varepsilon = \varepsilon_1$ olur. Burada ε_1 seçilen formatın elemanı olan bir sayıdır.

2.4. Kalıntı Problemi

Kalıntı problemi garanti yaklaşım teknolojisinde çok önemli bir yere sahiptir. Çözüm olarak elde edilen y vektörünün $Ax = f$ sistemini sağlayan x vektörüne ne kadar yakın olduğu sorusuna aşağıdaki teorem cevap vermektedir [Godunov vd. 1993].

Teorem 2.3: A tekil olmayan bir matris ise, keyfi olarak seçilen y vektörü ile verilen $Ax = f$ probleminin tek çözümü olan x vektörü arasında

$$\| x - y \| / \| x \| \leq \mu(A) \, \| Ay - f \| / \| f \|.$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu Teorem 2.2 nin basit bir uygulamasıdır.

2.5. Pratik İyi Konulmuş Problem

$Ax = f$ problemi çözülmek istendiğinde, çok fazla hassas sistemler pratikte işe yaramaz. Çünkü verilerdeki küçük değişiklikler çözümü büyük ölçüde etkileyebilir. Dolayısıyla bulunan çözümün, problemin gerçek çözümüne ne kadar yakın olup olmadığı hakkında yorum yapılamaz. Buradan çıkış yolu, pratik terslenebilen matrislerin şart sayılarının üst sınırı kabul edilen μ^* parametresini kullanmaktır. Bu parametre Teorem 2.1'i aşağıdaki şekliyle ifade etmeye imkan verir.

Teorem 2. 4: Eğer $\mu(A) < \mu^*$ ve $2\mu^* \| B \| / \|A\| < 1$ ise,

$$\mu(A+B) < 1.5\,\mu^*$$

ve

$$| \mu(A) - \mu(A+B) | \leq 3 \mu^2(A)\| B \| / \| A \|$$

olur.

Bu teorem μ^* değerine bağlı olarak giriş elemanlarının en çok ne kadar hata ile verilebileceğini gösterir. Bu teoreme göre hesaplama gereci $\mu^* < \| A \| / (2\| B \|)$ olacak şekilde seçilmelidir.

μ^*'ın sınırını bilgisayarda hesap edecek yöntem de aşağıdaki şekilde verilebilir.

Eğer $Ax = f$ problemi için $20\mu(A)\varepsilon_1 < 1$ ise $\| y - x \| < \varepsilon_1 \|x\|$ eşitsizliği sağlanır ve bilgisayara göre "tam" çözüm bulunabilir. Böylece doğal olarak $\mu^* = 1/(20\varepsilon_1)$ seçilebilir.

2.6. Algoritma

Garanti yaklaşım metodunun en önemli kısmı, yedi temel kavramdan biri olan algoritmanın geriye kalan altı kavram ile bağdaşabilecek şekilde bulunabilmesidir. Aşağıda $Ax=f$ sistemi ile ilgili problemin çözümü için böyle bir algoritma kurulmuştur.

Verilen problem için veriler; N doğal sayısı , μ^* reel sayısı, reel elemanlı NxN boyutlu A kare matrisi ve N bileşenli reel elemanlı f vektörüdür.

Adım 1. Householder dönüşümleri kullanılarak tekil olmayan A kare matrisi iki köşegenli matris haline getirilir. Yani, A = QWV olacak şekilde Q, V ortogonal matrisler ve W iki köşegenli matrisi bulunur.

Adım 2. Sturm yöntemi kullanılarak elde edilen iki köşegenli matrisin en büyük $\sigma_N(A)$ ve en küçük $\sigma_1(A)$ tekil değerleri hesaplanır.

Adım 3. $\sigma_N(A) > \sigma_1(A)\mu^*$ eşitsizliği kontrol edilir. Bu eşitsizlik doğru ise verilen $Ax = f$ problemi pratik iyi konulmamış olarak tespit edilir ve hesap işlemleri durdurularak $\mu(A) > \mu^*$ sonuç olarak verilir. Aksi halde 4. Adıma geçilir.

Adım 4. $Ax = f$ sisteminden x vektörü hesaplanır.

Burada $\mu(A)$ yeteri kadar küçük olduğundan, önceki adımdaki Householder dönüşümleri ve iki köşegenli matrislėr kullanılarak bu işlem güvenli şekilde yapılır. Gerçekten

QWVx = f sistemi W(Vx)= Q*f şeklinde yazılabilir. W iki köşegenli matris olduğuna göre eliminasyon (yok etme) yöntemiyle

$$Ws = Q^*f$$

hesaplanır. Sonra da y =V*s elde edilir. Tüm işlemler yuvarlatma hatası olmadan yapılsaydı y = x olurdu. Ancak verilen algoritma, seçilen format ve μ^* sayısına göre herhangi bir f vektörü için

$$||Ay - f|| < 0.5\ ||f||$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde hesaplama yapmaktadır [Godunov vd. 1993]. İstenilen x vektörünü, seçilen formatın giriş hatası duyarlılığında hesaplamak için hassas iterasyon işlemi kullanılmalıdır.

2.7. Hassas İterasyon İşlemi

Hassas iterasyon işlemi sadece iyi konulmuş problemler için kullanılır. Bu işlemin amacı önceki algoritmanın sonucunda elde edilen yaklaşık y çözümüne dayanarak daha iyi bir yaklaşım elde etmektir. Bu klasik bir yöntemdir [Wilkinson 1965].

Paragraf 2.6' da verilen yöntem ile keyfi olarak seçilen herhangi bir f için

$$||Ay - f|| \leq 0.5\ ||f||$$

eşitsizliğini sağlayan bir y vektörü hesaplanmıştır.

Dolayısıyla aşağıdaki iterasyon işlemi yürütülebilir.

Adım 0. $u_0 = y$ ve $v_0 = f - Ay$ olarak alınır.

Adım 1. Önceki adımda belirlenmiş u_0 ve v_0 kullanılarak,

Adım 1.1. Aw = v probleminin yaklaşık çözümü bulunmaya çalışılır. Burada $v = v_0$ olarak seçilebilir. Householder yöntemiyle

$$||\ Aw_1 - v_0\ || \leq 0.5\ ||v_0||$$

ifadesi sağlanacak şekilde w_1 bulunur.

Adım 1.2. $u_1 = u_0 + w_1$;

$v_1 = v_0 - Aw_1$.

olarak hesaplanır . $||\ v_1\ || \leq 0.5\ ||v_0||$ eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır.

Adım 1.3. Eğer $\|v_1\| < 1/\ (\mu(A)\varepsilon_1)$ ise bu taktirde hesaplama işlemleri durdurulur ve Teorem 2.3 'e dayanarak u_1 istenilen x vektörünü ε_1 bağıl hatayla temsil eder.

Adım k. (k > 1). Önceki adımda hesaplanan u_{k-1} ve v_{k-1} kullanılarak,

Adım k.1. Aw = v probleminin yaklaşık çözümü bulunmaya çalışılır. Burada $v = v_{k-1}$ olarak seçilebilir. Householder yöntemiyle

$$\| Aw_k - v_{k-1} \| \leq 0.5 \|v_{k-1}\|$$

ifadesi geçerli olacak şekilde w_k bulunur.

Adım k.2. $u_k = u_{k-1} + w_k;$

$$v_k = v_{k-1} - Aw_k.$$

olarak hesaplanır . $\| v_k \| \leq 0.5 \|v_{k-1}\|$ ' in sağlanacağı açıktır.

Adım k.3. Eğer $\|v_k\| < \varepsilon_1 /\ \mu(A)\|f\|$ ise bu taktirde hesaplama işlemleri durdurulur ve kalıntı teoremine dayanarak u_k istenilen x vektörünü ε_1 bağıl hatasıyla temsil eder.

Uyarı 1. Burada Adım k.2 de yapılan işlemleri daha ince formatları kullanarak yapmak gerekmektedir [Merdan, 1996].

Uyarı 2. k. adımdan sonra işlemlerden aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{array}{ll}
v_0 = f - Ay, & \| v_0 \| \leq 0.5 \|f\|; \\
v_1 = v_0 - Aw_1, & \| v_1 \| \leq 0.5 \|v_0\|; \\
v_2 = v_1 - Aw_2, & \| v_2 \| \leq 0.5 \|v_1\|; \\
v_3 = v_2 - Aw_3, & \| v_3 \| \leq 0.5 \|v_2\|. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{k-1} = v_{k-2} - Aw_{k-1}, & \| v_{k-1} \| \leq 0.5 \|v_{k-2}\|; \\
v_k = v_{k-1} - Aw_k, & \| v_k \| \leq 0.5 \|v_{k-1}\|.
\end{array}$$

Böylece

$$\| v_k \| \leq 0.5 \|v_{k-1}\| \leq (0.5)^2 \|v_{k-2}\| \leq (0.5)^3 \|v_{k-3}\| \leq \ \ldots \leq (0.5)^k \|v_0\| = (0.5)^k \|f\|$$

olur. Ayrıca,

$$v_k = f - A\,u_k = f - A[\, y + w_1 + w_2 + \ldots + w_k \,]$$

yazılabilir. Dolayısıyla $(0.5)^k \leq \varepsilon_1 /\ \mu(A)$ şartını sağlayan bir k değeri her zaman bulunabilir.

3. LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu bölümde lineer denklem sistemleri ile ilgili bazı bilgiler verilecektir. Daha sonra Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hatırlatılarak çözümün verilere göre sürekliliği incelenecektir.

3.1. Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri

$y_j(t)$ bilinmeyen fonksiyonları, $t_0 \le t \le t_1$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve birinci türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = a_{11}\,y_1(t) + a_{12}\,y_2(t) + \dots + a_{1N}\,y_N(t)\ ,$$

$$\frac{d}{dt}y_2(t) = a_{21}\,y_1(t) + a_{22}\,y_2(t) + \dots + a_{2N}\,y_N(t)\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}y_N(t) = a_{N1}\,y_1(t) + a_{N2}\,y_2(t) + \dots + a_{NN}\,y_N(t)\ .$$

şeklindeki sisteme N- boyutlu, homogen, sabit katsayılı, lineer diferensiyel denklem sistemi denir. Verilen sistem,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}\ ;\ y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix}$$

a_{ij} (i , j = 1, 2, ..., N) - gerçel sayılar, $y_j(t)$ (j = 1, 2, ..., N) , $t_0 \le t \le t_1$ aralığında tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere matris-vektör sistemi olarak,

$$\frac{d}{dt}y(t) = A\,y(t) \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Aynı zamanda,

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + \ldots + a_{1N} y_N(t) + F_1(t),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + \ldots + a_{2N} y_N(t) + F_2(t),$$

....

$$\frac{dy_N}{dt} = a_{N1} y_1(t) + a_{N2} y_2(t) + \ldots + a_{NN} y_N(t) + F_N(t)$$

şeklinde ifade edilen N-boyutlu, homogen olmayan, sabit katsayılı, lineer adi diferensiyel sistemi de incelenecektir. Bu sistem de

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} ;\ y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix} ;\ F(t)=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{bmatrix}$$

a_{ij} (i , j = 1, 2, ..., N) - gerçel sayılar, $y_j(t)$ ve $F_j(t)$ (j = 1, 2, ..., N), $t_0 \le t \le t_1$ aralığında tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} y(t) = A\, y(t) + F(t)$$

matris-vektör denklemi şeklinde yazılabilir.

M tane aynı A katsayılar matrisine sahip adi diferensiyel lineer homogen denklem sisteminden oluşan sistem de (diğer bir ifadeyle sistemler sistemi)

$$Y_j(t) = \begin{pmatrix} Y_{1j}(t) \\ Y_{2j}(t) \\ \vdots \\ Y_{Nj}(t) \end{pmatrix}, j = 1, 2, \ldots, M$$

bu denklem sistemlerine ait olan bilinmeyen vektör fonksiyonları olmak üzere

$$Y(t) = [\ Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_M(t)\ ]$$

şeklinde veya daha açık olarak

$$
Y(t) = \begin{pmatrix} Y_{11}(t) & Y_{12}(t) & \cdots & Y_{1M}(t) \\ Y_{21}(t) & Y_{22}(t) & \cdots & Y_{2M}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{N1}(t) & Y_{N2}(t) & \cdots & Y_{NM}(t) \end{pmatrix}
$$

denirse,

$$
\frac{d}{dt} Y(t) = AY(t)
$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistem aynı A katsayı matrisine sahip olan M tane matris vektör sistemi olarak aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$
\frac{d}{dt} Y_j(t) = AY_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots , M).
$$

3.2. Cauchy Problemi ve Üstel Matris Fonksiyonu

Tanım 3.1. $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ diferensiyel denklem sisteminin $x\,(t_0) = a$ şartını sağlayan çözümünün bulunması problemine başlangıç değer problemi veya Cauchy problemi denir.

Teorem 3.1. A tekil olmayan gerçel karesel bir matris, a; keyfi seçilen N bileşenli bir sütun vektörü ve t_0 bir gerçel sayı olmak üzere,

$$
\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)\,,
$$

$$
x\,(t_0) = a
$$

Cauchy probleminin çözümü olan N bileşenli x(t) vektör fonksiyonu vardır ve tektir [Rabenstein, 1970].

Bu problemin çözümü üstel matris fonksiyonu $\exp\,\{tA\} = e^{tA}$ kullanılarak

$$
x(t) = \exp\,\{(t - t_0)A\}a
$$

şeklinde yazılabilir.

Verilen N boyutlu bir diferensiyel denklem sisteminin çözümünü genel şekilde tanımlamak için N tane aynı A katsayı matrisli sistemin çözümüne ihtiyaç vardır. Çünkü $X(t) = \exp\{tA\}$ üstel matris fonksiyonu

$$
\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)\,,
$$

$$
X\,(0) = I
$$

matris Cauchy probleminin tek çözümüdür. Burada I; NxN tipinde birim matristir.

Üstel matris fonksiyonu bu çalışma için önemli kavramlardan birisidir. Bu nedenle aşağıda üstel matris fonksiyonunun hesabı ile ilgili bir örnek verilecektir

Örnek 3.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ olmak üzere e^{tA} hesaplanacaktır.

Yukarıda da söylendiği gibi üstel matris fonksiyonu $X(t)=\begin{pmatrix} u(t) & g(t) \\ v(t) & h(t) \end{pmatrix} = e^{tA}$ olmak üzere

aşağıdaki Cauchy problemlerini sağlayan bir matris fonksiyonudur.

1) $\frac{d}{dt}u(t) = u(t) + 2v(t),$

$\frac{d}{dt}v(t) = 3v(t),$

$u(0) = 1,\ v(0) = 0$

ve

2) $\frac{d}{dt}g(t) = g(t) + 2h(t),$

$\frac{d}{dt}h(t) = 3h(t),$

$g(0) = 0,\ h(0) = 1$

Sırasıyla bu problemlerin çözümleri bulunacak olursa,

$$\frac{d}{dt}v(t) = 3v(t),\ v(0) = 0$$

probleminden $v(t) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $u(t)$,

$$\frac{d}{dt}u(t) = u(t), \quad u(0) = 1$$

Cauchy probleminden $u(t) = e^{t}$ olarak elde edilir.

2) $\frac{d}{dt}h(t) = 3h(t),\ h(0) = 1$

probleminin çözümü $h(t) = e^{3t}$ olduğundan $g(t)$

$$\frac{d}{dt}g(t) = g(t) + 2e^{3t}, \quad g(0) = 0$$

Cauchy probleminden

$$g(t) = e^{t}g(0) + \int_0^t e^{(t-s)}2e^{3s}\,ds = e^{3t} - e^{t},$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$e^{tA} = X(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{3t} - e^{t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Üstel matris fonksiyonu ile ilgili özellikler için [14] ve [16] numaralı kaynaklara bakılabilir.

3.3. Temel Matris

$\{\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_N(t)\}$ N- boyutlu vektörü,

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t)$$

sisteminin çözümleri olan fonksiyonların vektör uzayının bir tabanı olsun. Bu durumda,

$$\psi(t) = [\ \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_N(t)\ ]$$

matrisine

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t)$$

sisteminin temel matrisi denir. Yani $\psi(t)$ sistemin temel matrisi ise,

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A\psi(t); \quad \det \psi(t) \neq 0$$

dır.

$$\frac{d}{dt}X(t) = A\,X(t)$$

$$X(0) = I$$

Cauchy probleminin tek çözümü $X(t) = e^{tA}$ üstel matris fonksiyonudur. Böylece e^{tA} üstel matris fonksiyonu, verilen sistemin bir temel matrisidir.

3.4. Çözümlerin Sürekliliği

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + F(t)\,,\; y(\tau) = a \tag{3.2}$$

Cauchy problemi için, A tekil olmayan kare matris F(t) sürekli bir fonksiyon, a N boyutlu sabit bir sütun vektörü ve τ herhangi bir gerçel sayı olmak üzere bu denklemin çözümünün var ve tek olduğu ve y(t) çözümünün

$$y(t) = e^{(t-\tau)A}\, a + \int_0^t e^{(t-s)A} F(s)\, ds \tag{3.3}$$

formülüyle verildiği bilinmektedir. [Goldberg ve Potter, 1998]

Bu bölümde, $y(t) = y(\,t, \tau\,, A\,, a, F(t)\,)$ çözüm vektör fonksiyonunun, problemin A, τ, a, F(t) giriş verilerine göre sürekli olduğu ispat edilecektir. Bunun için (3.2) problemine yakın olan

$$\frac{d}{dt}z(t) = \hat{A}\, z(t) + \hat{F}(t)\,,\quad z(\hat{\tau}) = \hat{a} \tag{3.4}$$

problemi ele alınacaktır. Burada $\hat{A}$, $\hat{\tau}$, $\hat{a}$, $\hat{F}(t)$ değerlerinin A, τ, a, F(t) değerlerine "yeteri kadar" yakın olduğu kabul edilecektir. O zaman (3.2)' nin çözümü olan y(t) ile (3.4) probleminin çözümü olan

$$z(t) = e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\; \hat{a} + \int_0^t e^{(t-s)\hat{A}}\; \hat{F}(s)\, ds \tag{3.5}$$

de yeteri kadar birbirine yakın olur. Yakınlık kavramı kullanıldığından bir metrik uzay tanıtmak gerekmektedir. Bunun için T bir pozitif sayı olmak üzere, $|t| \le T$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonların kümesi $Æ = Æ(T)$ olsun. Bu kümede u(t), v(t) fonksiyonları arasındaki uzaklık

$$\rho(\,u, v) = \max_{-T \le t \le T} \| u(t) - v(t) \|$$

şeklinde tanımlansın. y(t), z(t), $\hat{F}(t)$ ve F(t)' nin bu metrik uzayın elemanları olduğu açıktır.

$|t| \le T$ kapalı aralığında sürekli birinci türevlere sahip olan fonksiyonların kümesi $Æ^{(1)} = Æ^{(1)}(T)$ olarak gösterilsin. Bu kümede u(t), v(t) vektör fonksiyonları arasındaki uzaklık

$$\nu(u, v) = \max_{-T \le t \le T} \| u(t) - v(t) \| + \int_{-T}^{T} \| \frac{d}{dt}u(t) - \frac{d}{dt}v(t) \| \, dt$$

şeklinde tanımlanır [Godunov 1994].

Teorem 3.4. A tekil olmayan bir kare matris olmak üzere,

$$\| \hat{A} - A \|, | \hat{\tau} - \tau |, \| \hat{a} - a \|, \rho(\hat{F}(t), F(t))$$

değerleri yeteri kadar küçük ise bu (3.2) ve (3.3) problemlerinin çözümleri için bir C sabiti vardır ve

$$\rho(y(t), z(t)) \le C \{ \| \hat{A} - A \| + | \hat{\tau} - \tau | + \| \hat{a} - a \| + \rho(\hat{F}(t), F(t)) \}.$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu teoremin ispatına geçmeden önce aşağıdaki iki lemma ifade ve ispat edilecektir.

Lemma 3.2. A; NxN tipinde bir matris olmak üzere, herhangi t, τ gerçel sayıları için

$$\| e^{tA} - e^{\tau A} \| \le | t - \tau | \, \|A\| \, e^{|t-\tau| \, \|A\|} \, \|e^{\tau A}\|$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Üstel matris fonksiyonun özelliklerini kullanarak

$$e^{tA} - e^{\tau A} = e^{\tau A} [e^{(t-\tau)A} - I]$$

yazılabilir. Ayrıca, üstel matris fonksiyonun tanımından

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}A^k + \ldots$$

dir. Dolayısıyla

$$e^{tA} - I = tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}A^k + \ldots$$

ve

$$\| e^{tA} - I \| \le |t| \, \|A\| + \frac{(|t| \| A \|)^2}{2!} + \ldots + \frac{(|t| \| A \|)^k}{k!} + \ldots$$

$$= |t| \, \|A\| \, \{ 1 + \frac{|t| \| A \|}{2!} + \ldots + \frac{(|t| \| A \|)^{k-1}}{k!} + \ldots$$

olur. Bunun ile birlikte

$$\frac{(|t|||A||)^{k-1}}{k!} \le \frac{(|t|||A||)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k=1,2,3,...$$

eşitsizliği kullanılarak

$$|| e^{tA} - e^{\tau A} || \le || e^{\tau A} || \; || e^{(t-\tau)A} - I || \le ||e^{\tau A}|| \, | t - \tau | \, ||A|| \; e^{|t-\tau| \, ||A||}$$

yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.3. A, B; NxN tipinde iki matris ve t bir gerçel sayı olmak üzere

$$|| e^{t(A+B)} - e^{tA} || \le t||B|| \, e^{t(||A|| + ||B||)}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat.

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + F(t), \quad X(0) = I$$

homogen olmayan Cauchy probleminin çözümünün var ve tek olup

$$X(t) = e^{tA} + \int_0^t e^{(t-s)A} F(s)\, ds$$

şeklinde yazılabildiği bilinmektedir. Dolayısıyla $X(t) = e^{t(A+B)}$

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + BX(t), \quad X(0) = I$$

Cauchy probleminin bir tek çözümü olduğundan

$$X(t) = e^{tA} + \int_0^t e^{(t-s)A} BX(s)\, ds.$$

Dolayısıyla

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{(t-s)A} Be^{s(A+B)}\, ds$$

yani,

$$||e^{t(A+B)} - e^{tA} || \le \int_0^t || e^{(t-s)A} || \, ||B|| \, ||e^{s(A+B)} ||\, ds$$

$$\le \int_0^t || e^{(t-s)A} || \, ||B|| \, ||e^{s(A+B)} ||\, ds$$

ve

$$||e^{t(A+B)} - e^{tA} || \le ||B|| \int_0^t e^{(t-s)||A||} \; e^{s(||A||+B||)}\, ds$$

$$= ||B||\ e^{t||A||} \int_0^t e^{s||B||}\, ds$$

$$= e^{t||A||}\,[e^{t||B||}\ -1\ ]$$

$$\leq t||B||\ e^{t(||A|| + ||B||)}$$

olur ki bu da Lemmanın ispatını tamamlar.

Şimdi teoremin ispatına geçilirse (3.3) ve (3.5) den

$$y(t) - z(t) = e^{(t-\tau)A}\,a - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\,\hat{a} + \int_0^t [\, e^{(t-s)A}F(s) - e^{(t-s)\hat{A}}\,\hat{F}(s)\,]ds \qquad (3.6)$$

yazılabilir. Burada önce

$$e^{(t-\tau)A}\,a - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\,\hat{a}$$

matris fonksiyonu ele alınsın.

$$e^{(t-\tau)A}\,a - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\,\hat{a} = e^{(t-\tau)A}\,a - e^{(t-\tau)A}\,\hat{a} + e^{(t-\tau)A}\,\hat{a} - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\,\hat{a}$$

ifadesinin doğruluğu açıktır. Dolayısıyla üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$|| e^{(t-\tau)A}\,a - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\,\hat{a}\ || \leq || e^{(t-\tau)A}\,a - e^{(t-\tau)A}\,\hat{a}\ || + || e^{(t-\tau)A}\,\hat{a} - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\,\hat{a}||$$

$$\leq || e^{(t-\tau)A} ||\ ||\ a - \hat{a}\ || + || e^{(t-\tau)A} - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\ ||\ ||\hat{a}|| \qquad (3.7)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Aynı şekilde,

$$e^{(t-\tau)A} - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}} = e^{(t-\tau)A} - e^{(t-\hat{\tau})A} + e^{(t-\hat{\tau})A} - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}$$

olduğundan

$$|| e^{(t-\tau)A} - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\ || = || e^{(t-\tau)A} - e^{(t-\hat{\tau})A}\ || + || e^{(t-\hat{\tau})A} - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\ ||$$

yazılabilir. Lemma 3.2' ye göre

$$|| e^{(t-\tau)A} - e^{(t-\hat{\tau})A}\ || \leq || e^{(t-\tau)A} ||\ |\ \tau - \hat{\tau}\ |\ ||A||\ \ e^{|\tau-\hat{\tau}|\|A\|}$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$|| e^{(t-\tau)A}\,a - e^{(t-\hat{\tau})\hat{A}}\,\hat{a}\ || \leq || e^{(t-\tau)A} ||\ ||\ a - \hat{a}\ || + \ || e^{(t-\tau)A}||\ |\ \tau - \hat{\tau}\ |\ ||A||\ \ e^{|\tau-\hat{\tau}|\|A\|}\ ||\hat{a}||$$

$$= \| e^{(t-\tau)A} \| \{ \| a - \hat{a} \| + \|A\| e^{|\tau-\hat{\tau}|\|A\|} \|\hat{a}\| \, |\tau - \hat{\tau}| \}$$

olur. Yani (3.6)' daki birinci terimin üst sınırı hesaplandı. Şimdi bu formülün ikinci terimine bakılırsa,

$$\| \int_0^t [e^{(t-s)A}F(s) - e^{(t-s)\hat{A}} \hat{F}(s)]ds \| \leq \int_0^t \| e^{(t-s)A}F(s) - e^{(t-s)\hat{A}} \hat{F}(s) \| ds$$

$$= \int_0^t \| e^{(t-s)A}F(s) - e^{(t-s)A} \hat{F}(s) + e^{(t-s)A} \hat{F}(s) - e^{(t-s)\hat{A}} \hat{F}(s) \| ds$$

$$\leq \int_0^t [\| e^{(t-s)A}\| \, \| F(s) - \hat{F}(s) \| + \| e^{(t-s)A} - e^{(t-s)\hat{A}} \| \, \| \hat{F}(s) \|] ds$$

$$\leq \int_0^t [\| e^{(t-s)A}\| \rho(\hat{F}(s), F(s)) + \| e^{(t-s)A} - e^{(t-s)\hat{A}} \| \max_{-T\leq s\leq T} \| \hat{F}(s) \|] ds$$

elde edileceği kolayca görülür.

Lemma 2.3 'e göre

$$\| e^{(t-s)A} - e^{(t-s)\hat{A}} \| \leq (t-s) \| \hat{A} - A\| \, e^{(t-s)(\|A\|+\|\hat{A}-A\|)}$$

olur. Bu taktirde önceki işleme devam edilirse,

$$\| \int_0^t [e^{(t-s)A}F(s) - e^{(t-s)\hat{A}} \hat{F}(s)]ds \|$$

$$\leq \rho(\hat{F}(t), F(t)) \int_0^t \| e^{(t-s)A}\| ds + \max_{-T\leq s\leq T} \| \hat{F}(s) \| \int_0^t \| e^{(t-s)A} - e^{(t-s)\hat{A}} \| \, ds$$

$$\leq \rho(\hat{F}(t), F(t)) \int_0^t \| e^{(t-s)A} \| ds + \max_{-T\leq s\leq T} \| \hat{F}(s) \| \int_0^t (t-s) \| \hat{A} - A\| \, e^{(t-s)(\|A\|+\|\hat{A}-A\|)} ds$$

$$\leq \rho(\hat{F}(t), F(t)) \int_0^t \| e^{(t-s)A} \| ds + \| \hat{A} - A\| \max_{-T\leq s\leq T} \| \hat{F}(s) \| \int_0^t (t-s) \, e^{(t-s)(\|A\|+\|\hat{A}-A\|)} ds$$

bulunur. Böylece

(2.10) formülündeki ikinci terim için de üst sınır bulunmuş olur. Bu ise,

$$\| y(t) - z(t)\| \leq \| e^{(t-\tau)A} \| \{ \| a - \hat{a} \| + \|A\| e^{|\tau-\hat{\tau}|\|A\|} \|\hat{a}\| \, |\tau - \hat{\tau}| \}$$

$$+ \ \rho(\hat{F}(t),\ F(t)) \int_0^t \| e^{(t-s)A} \| \, ds$$

$$+ \| \hat{A} - A \| \max_{-T \leq s \leq T} \| \hat{F}(s) \| \int_0^t (t-s)\, e^{(t-s)(\|A\| + \|\hat{A} - A\|)} \, ds$$

eşitsizliğini yazmaya imkan tanır. O halde eğer,

$$C = \max_{-T \leq t \leq T} \{ \| e^{(t-\tau)A} \| + \max \left[1, \|A\| \ e^{|\tau - \hat{\tau}| \|A\|} \ \| \hat{a} \| \right] + \int_0^t \| e^{(t-s)A} \| \, ds$$

$$+ \max_{-T \leq s \leq T} \| \hat{F}(s) \| \int_0^t (t-s)\, e^{(t-s)(\|A\| + \|\hat{A} - A\|)} \, ds \}$$

seçilirse teoremdeki eşitsizliğin doğru olduğu ispatlanmış olur.

4. SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemi için iki-nokta sınır değer problemi tanıtılacak, problemin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki teorem verilecek ve konu örneklerle incelenecektir. Daha sonra problemin Green matris fonksiyonları yardımıyla analitik çözümü verilecek ve giriş verilerinin çözüme etkisi şart sayısına dayanarak incelenecektir.

4.1. İki-Nokta Sınır Değer Problemi

Tanım 4.1. $[t_o, t_1]$ aralığında

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + f(t)$$

$$Ly(t_0) = \varphi, \quad Ry(t_1) = \psi \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı problemin çözümünün bulunmasına sabit katsayılı, homogen olmayan, lineer, adi diferensiyel denklem sistemi için iki-nokta sınır-değer problemi denir. Burada A; N×N, L; k×N, R; (N-k)×N tipinde gerçel matrisler, φ; k-bileşenli ve ψ; (N-k) bileşenli vektörler, f(t) ise verilen aralıkta sürekli olan N- boyutlu vektör fonksiyondur. Yani,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}, \; L=\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{k1} & L_{k2} & \cdots & L_{kN} \end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{(N-k)1} & R_{(N-k)2} & \cdots & R_{(N-k)N} \end{bmatrix}, \quad f(t)=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad \varphi=\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{bmatrix}, \psi=\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{(N-k)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [Murti ve Lakshmi, 1990].

Örnek 4.1.

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + 4y_3(t)$$

$$\frac{d}{dt}y_2(t) = y_1(t) - 2y_3(t)$$

$$\frac{d}{dt}y_3(t) = -y_2(t) + \cos t$$

sisteminin sınır şartları,

$y_1(1) + y_2(1) = 3;\ \ y_1(8) + 2y_3(8) = 7;\ y_2(1) - 5y_3(1) = 5;$

olsun. Burada N=3, k=2, $t_0=1$, $t_1=8$ olup bu sistem matris vektör şeklinde yazılacak olursa,

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix};\ L=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix};\ \varphi=\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix};\ \psi=(7);\ f(t)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cos t\end{bmatrix}$$

olur.

4.2. Varlık ve Teklik Teoremi

Teorem 4.1. $[t_o, t_1]$ aralığında tanımlı (4.1) problemi göz önüne alınsın. Eğer $\Phi(t)$

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t)$$

sisteminin bir temel matrisi ve

$$H = \begin{pmatrix} L \\ R\Phi(t_1 - t_0)\Phi^{-1}(0)\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

tekil olmayan matris ($\det H \neq 0$) ise, (4.1) probleminin çözümü vardır tektir ve

$$Y(t)=\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\,ds + e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{bmatrix}\varphi \\ \psi - R\int_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A}f(s)ds\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Not. T, t gerçel sayılar olmak üzere, herhangi $\Phi(t)$ temel matrisi için

$$\Phi(T-t)\,\Phi^{-1}(0) = e^{(T-t)A}$$

olur [Goldberg ve Potter, 1998]. Böylece (4.2) şartı seçilen $\Phi(t)$ temel matrisinin seçiminden bağımsızdır.

İspat. Önce bu problemin çözümünün varlığı gösterilecektir.

$$\hat{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t-s)\, \Phi^{-1}(0)\, f(s)\, ds \tag{4.3}$$

vektör fonksiyonunun (4.1) sisteminin bir özel çözümü olduğu açıktır. Bu sistemin genel çözümü

$$y(t) = z(t) + \hat{y}(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $z(t)$, (4.1) sisteminin homogen kısmının genel çözümü olup

$$z(t) = \Phi(t - t_0)C$$

şeklindedir. Burada C,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

bilinmeyen katsayılar vektörüdür. Bu katsayılar başlangıç şartlarına bağlıdır. C vektörü başlangıç şartlarından faydalanılarak

$$L\,\Phi(0)C = \varphi - L\hat{y}(t_0);$$

$$R\Phi(t_1 - t_0)C = \psi - R\hat{y}(t_1)$$

şeklindeki bir N boyutlu lineer sistemden hesaplanabilir. Bu cebirsel denklem sistemi

$$H\,\Phi(0)\,C = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R\int_{t_0}^{t} \Phi(t-s)\Phi^{-1}(0)f(s)ds \end{pmatrix}$$

şeklinde de yazılabilir. H, ve $\Phi(0)$ tekil olmadığından verilen herhangi φ, ψ vektörleri için bu sistemin çözümü vardır ve tektir. Yani (4.1) probleminin çözümünün var olduğu ve bu çözümün

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t-s)\, \Phi^{-1}(0)\, f(s)\, ds + \Phi(t - t_0)\, \Phi^{-1}(0)\, H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R\int_{t_0}^{t} \Phi(t-s)\Phi^{-1}(0)f(s)ds \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

şeklinde olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi (4.1) probleminin çözümünün tek olduğu ispatlanacaktır. Bu problemin u(t) ve v(t) gibi iki farklı çözümünün var olduğu kabul edilsin. Bu taktirde,

$$\frac{d}{dt}\,[\, u(t) - v(t)\,] = A\,[\, u(t) - v(t)\,];$$

$$L[u(t_0) - v(t_0)] = 0\,; \qquad R\,[u(t_1) - v(t_1)\,] = 0$$

yazılabilir. Yukarıdaki işlemler bu problem için tekrarlanırsa bu taktirde genel çözüm

$$u(t) - v(t) = \Phi(\, t - t_0\,)\, C$$

olur. Bilinmeyen katsayıların C vektörü için de, $H\Phi(\,0\,)C = 0$ lineer denklem sistemi elde edilir. Fakat H ve $\Phi(0)$ matrisleri tekil olmadıklarından, bu sistemin çözümünün $C = 0$ olduğu açıktır. Yani $u(t) = v(t)$ olmak zorundadır. Böylece çözüm tektir ve teorem ispatlanmış olur.

Ayrıca verilen problem için temel matris olarak e^{tA} üstel matris fonksiyonu alınırsa problemin çözümü

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\,ds + e^{(t-t_0)A} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$H = \begin{pmatrix} L \\ Re^{(t_1-t_0)A} \end{pmatrix}$$

matrisidir.

Aşağıdaki örnek, bu teoremin iyi bir uygulamasıdır.

Örnek 4.2.

$$\frac{d}{dt}\, y_1(t) = -y_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}\, y_2(t) = y_1(t)$$

sistemi göz önüne alınsın. Bu sistem için,

a) $y_1(0) + y_2(0) = \varphi$; $y_1(\pi/2) + y_2(\pi/2) = \psi$;

b) $y_1(0) + y_2(0) = \varphi$; $y_1(\pi) + y_2(\pi) = \psi$

iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenecektir.

Buna göre verilen sistem için,

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix};$$

$$L=(1\ \ 1);\ \ R=(1\ \ 1);\ t_0=0,\ t_1=\pi/2$$

olmak üzere

$$e^{tA}=\begin{pmatrix}\mathrm{Cost} & -\mathrm{Sint}\\ \mathrm{Sint} & \mathrm{Cost}\end{pmatrix}$$

olur.

$$e^{0.5\pi A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ve

$$R\,e^{0.5\pi A}=(1\ \ 1)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=(1\ \ -1)$$

olur. Bu da

$$H=\begin{pmatrix}L\\ Re^{0.5\pi A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

det $H=-2\neq 0$ sonucunu verir. Teorem 4.1' e göre verilen a) probleminin çözümü vardır ve tektir.

b) Benzer şekilde

$$e^{\pi A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

ve

$$H=\begin{pmatrix}L\\ Re^{\pi A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix};$$

det $H=0$' dır. Dolayısıyla Teorem 4.1'e göre verilen b) probleminin çözümü yoktur.

Bu örneklerde de görüldüğü gibi bir problemin çözümünün varlığı aynı zamanda verilen aralığa da bağlıdır.

4.3. Dirac Fonksiyonu ve İmpuls Sağ Taraflı Cauchy Problemi

Tanım 4.1. b bir vektör olmak üzere $\delta(t-\xi)b$ ye ideal impuls denir. Burada $\delta(t-\xi)$,

$$\delta(t-\xi)=0, \text{ eğer } t>\xi \text{ veya } t<\xi \text{ ise,}$$

$$\text{herhangi } \varepsilon>0 \text{ sayısı için, } \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(t-\xi)\,dt = 1$$

şeklinde tanımlı δ-Dirac fonksiyonudur [Godunov, 1994].

Bu fonksiyon için yukarıdaki tanımdan

$$\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\,\delta(s-\xi)b\,ds = \begin{cases} 0, t<\xi; \\ e^{(t-\xi)A}b, t>\xi \end{cases}$$

olduğu görülür.

$[t_0, \infty)$ aralığında tanımlanan N boyutlu homogen impuls sağ taraflı lineer diferensiyel denklem sistemi için

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \delta(t-\xi)b\ ,\ x(t_0) = a \tag{4.5}$$

Cauchy problemi yazılabilir. Bu problemin çözümü

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}a + \begin{cases} 0, & t<\xi; \\ e^{(t-\xi)A}b, & t>\xi \end{cases} \tag{4.6}$$

şeklindedir. Ayrıca, bu formülden $x(\xi^+) = x(\xi^-) + b$ olduğu açıktır. Dolayısıyla (4.2) Cauchy probleminin yerine

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t),\ x(t_0) = a\ ,\ t_0 \le t < \xi^-,$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t),\ x(\xi^+) = x(\xi^-) + b,\ t > \xi^+$$

şeklinde iki tane Cauchy problemi yazılabilir.

Örnek 4.4. δ, δ-Dirac fonksiyonu olmak üzere,

$$y'(t) = 2y(t) + 3\,\delta(t-2),$$
$$y(1) = 4$$

Cauchy probleminin çözümü (4.6) formülüne göre

$$y(t) = 4\,e^{2(t-1)}\,; \qquad \text{eğer} \quad 1 \le t < 2\,,$$
$$y(t) = 4\,e^{2(t-1)} + 3\,e^{2(t-2)}\,; \qquad \text{eğer} \quad 2 < t$$

olarak bulunur.

Örnek 4.5. δ, δ-Dirac fonksiyonu olmak üzere

$$y'(t) = 5y(t) + 3\,\delta(t-4) + 7\,\delta(t-9),$$
$$y(0) = 2,$$

Cauchy probleminin çözümü yine (4.6) formülüne göre,

$$y(t) = 2\,e^{5t}\,; \qquad \text{eğer} \quad 1 \le t < 4\,,$$
$$y(t) = 2\,e^{5t} + 3\,e^{5(t-4)}\,; \qquad \text{eğer} \quad 4 < t < 9$$
$$y(t) = 2\,e^{5t} + 3\,e^{5(t-4)} + 7\,e^{5(t-9)}\,; \qquad \text{eğer} \quad t > 9$$

olarak bulunur.

4.4. Homogen Olmayan İmpuls Sağ Taraflı İki-Nokta Sınır Değer Problemi ve Green Matris Fonksiyonları

Bu bölümde $[t_0, t_1]$ aralığında (4.1) iki-nokta sınır değer problemi incelenecektir. Teorem 4.1' e göre

$$\det\begin{pmatrix} L \\ Re^{(t_1-t_0)A} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.7}$$

ise bu taktirde herhangi sürekli bir $f(t)$ fonksiyonu, $t_0 < t < t_1$ ve φ, ψ vektörleri için bu problemin çözümünün var, tek ve

$$y(t) = G_0(t)\,\varphi + \int_{t_0}^{t_1} G(t, \xi)\, f(\xi)\,d\xi + G_1(t)\psi \tag{4.8}$$

şeklinde yazılabildiği gösterilecektir. Burada $G_0(t)$, $G(t,\xi)$, $G_1(t)$ matrislerine Green matris fonksiyonları denir. Bu fonksiyonların tanımları ileride daha açık olarak verilecektir.

Şimdi,

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \delta(t-\xi)b,$$

$$Ly(t_0) = \varphi, \qquad Ry(t_1) = \psi$$

homogen olmayan, δ-Dirac fonksiyonlu, sağ taraflı, iki-nokta sınır değer problemi ele alınsın. Bilindiği gibi (4.7) şartı mevcut ise, verilen sistemin çözümü vardır ve tektir. Burada ξ verilen $[t_0, t_1]$ aralığında bir sayıdır. Bu sistem

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t),$$

$$y(\xi^+) - y(\xi^-) = b, \quad Ly(t_0) = \varphi, \quad Ry(t_1) = \psi \tag{4.9}$$

şeklinde de yazılabilir. Daha sonra,

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \\ \vdots \\ y_{N1}(t) \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \\ \vdots \\ y_{N2}(t) \end{pmatrix}$$

N boyutlu vektör fonksiyonları olmak üzere aynı şekilde bu vektör fonksiyonları için

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}Y_1(t) = AY_1(t) + \delta(t-\xi)B_1, \\ LY_1(t_0) = L_1, \qquad RY_1(t_1) = R_1, \\ B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{N1} \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{N1} \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \vdots \\ \psi_{N-k,1} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{4.10}$$

ve

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}Y_2(t) = AY_2(t) + \delta(t-\xi)B_2, \\ LY_2(t_0) = L_2, \qquad RY_2(t_1) = R_2, \end{gathered} \tag{4.11}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{N2} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{N2} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \\ \vdots \\ \psi_{N-k,2} \end{pmatrix}$$

sistemleri yazılabilir. Ayrıca, bu sistemler birleştirilerek

$$Y(t) = [\, Y_1(t), Y_2(t) \,] = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ \vdots & \vdots \\ y_{N1} & y_{N2} \end{pmatrix}, \quad B = [B_1, B_2] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\varphi} = [L_1, L_2] = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} \end{pmatrix}, \ \hat{\psi} = [R_1, R_2] = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \psi_{N-k,1} & \psi_{N-k,2} \end{pmatrix},$$

olmak üzere, elde edilen yeni sistem

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} Y(t) = AY(t) + \delta(t - \xi) B, \\ LY(t_0) = \hat{\varphi}, \ RY(t_1) = \hat{\psi} \end{gathered} \tag{4.12}$$

olarak matris denklemi şeklinde yazılabilir.

Bu şekilde hareket ederek sistemler birleştirilebilir ve bu genişletilen sistem için varlık ve teklik teoremi sağlanır. Yani eğer (4.7) sağlanıyorsa bu sistemin çözümü vardır ve tekdir. Bu halde aşağıdaki teorem de geçerlidir.

Teorem 4.2. $[\, t_0, t_1 \,]$ aralığında tanımlı

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} Y(t) = AY(t), \\ Y(\xi^+) - Y(\xi^-) = F, \\ LY(t_0) = \hat{\varphi}, \quad RY(t_1) = \hat{\psi} \end{gathered} \tag{4.13}$$

homogen olmayan iki-nokta sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada A, L, R, $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, F sırasıyla NxN, kxN , (N-k)xN, kxm, (N-k)xm *ve* Nxm tipinde reel matrislerdir. Eğer (4.7) şartı sağlanıyorsa bu taktirde (4.13) probleminin çözümü var, tek ve sürekli mxN tipinde bir matris fonksiyonudur [Godunov 1994].

İki-nokta sınır değer probleminde Green matris fonksiyonlarının bulunmasının önem derecesi, singüler olmayan bir A matrisi için $Ax = f$ cebirsel sistemindeki A^{-1} matrisinin bulunması ile aynıdır. Yani, herhangi bir f vektörü için sistemin çözümü var, tek ve $x = A^{-1}f$ şeklindedir. Aynı zamanda A^{-1} matrisi $AX = I$ matris denkleminin tek çözümüdür (Burada N tane sistem vardır.). Ters matrisin bulunması sistemin sağ tarafindaki f' ler değiştiğinde çözümün direkt olarak yazılmasına ve sistemin çözüm kümesi hakkında yorum yapmaya imkan vermektedir.

Burada olduğu gibi iki nokta sınır değer probleminde Green matris fonksiyonları hesaplandığında problemin çözümü (4.8) şeklinde yazılabildiğinden, problemin sağ tarafi $f(t)$, φ, ψ değiştiğinde çözümü elde etmek için direkt olarak (4.8) de yerine yazılır. Böylece sadece $f(t)$, φ, ψ değiştiğinde bütün sistemi baştan çözmeden (4.8) formülü yardımıyla çözüm elde edilir. Yani, $G_0(t)$, $G(t,\xi)$, $G_1(t)$ Green matris-fonksiyonları $f(t)$, φ, ψ ile birlikte iki-nokta sınır değer probleminin çözümünü kontrol eden fonksiyonlardır. Ancak bu kolaylığı elde edebilmek için (4.1) probleminin yerine 2N tane iki-nokta sınır değer problemi çözülmek zorundadır.

Şimdi sırasıyla $G_0(t)$, $G(t,\xi)$, $G_1(t)$ Green matris fonksiyonlarının tanımı verilecektir. Bu matrisler sırasıyla aşağıdaki iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümleridir.

$$\frac{d}{dt}G_0(t) = AG_0(t),$$
$$L\,G_0(t_0) = 0,\ \ RG_0(t_1) = I_m; \tag{4.14}$$

$$\frac{d}{dt}G_1(t) = AG_1(t),$$
$$L\,G_1(t_0) = 0,\ \ RG_1(t_1) = I_{N-m}; \tag{4.15}$$

$$\frac{d}{dt}G(t,\xi) = AG(t,\xi) + \delta(t-\xi)\,I_N,$$
$$L\,G(t_0,\xi) = 0,\ \ RG(t_1,\xi) = 0. \tag{4.16}$$

Eğer (4.7) şartı sağlanıyorsa, (4.8)'den aşikar olarak bu çözümlerin varlık ve tekliği sonucu elde edilir. Bundan sonra, ortaya konan iddiayı ispatlamak için sadece (4.1) sistemine (4.8) formülünün doğruluğunu sağlatmak kaldı. Buna göre,

$$Ly(t_0) = LG_0(t_0)\,\varphi + \int_{t_0}^{t_1} LG(t_0,\xi)\, f(\xi)d\xi + LG_1(t_0)\psi = I_m\varphi + 0 + 0 = \varphi$$

böylece sol sınır şartı gerçeklenir. Ayrıca

$$Ry(t_1) = RG_0(t_1)\,\varphi + \int_{t_0}^{t_1} RG(\, t_1, \xi\,)\, f(\xi)\, d\xi + RG_1(t_1)\psi = 0 + 0 + I_{N\text{-}M}\,\psi = \psi$$

sağ sınır şartı da gerçeklenir.

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}G_0(t)\,\varphi + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t_1} G(\, t, \xi\,)\, f(\xi)\, d\xi + \frac{d}{dt}G_1(t)\psi$$

$$= AG_0(t)\,\varphi + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t_1} G(\, t, \xi\,)\, f(\xi)\, d\xi + AG_1(t)\,\psi\,.$$

Böylece (4.8) formülünü ispatlamak için

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t_1} G(t,\xi)f(\xi)d\xi = A\int_{t_0}^{t_1} G(t,\xi)f(\xi)d\xi + f(t) \tag{4.17}$$

eşitliğini göstermek yeterlidir. Bunun için önce $G(t,\xi)$ Green fonksiyonunun bazı özellikleri ortaya konacaktır. (4.16) sisteminin δ-Dirac-fonksiyonsuz yazılabildiği Bölüm 4.3'den bilinmektedir.

ξ , $t_0 \le \xi \le t_1$ aralığında herhangi bir sayı olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}G(\, t, \xi\,) = AG(\, t, \xi\,),\ \ t_0 \le t < \xi\,,$$

$$L\,G(\, t_0, \xi\,) = 0;$$

ve

$$\frac{d}{dt}G(\, t, \xi\,) = AG(\, t, \xi\,),\ \ \xi < t \le t_1\,,$$

$$R\,G(\, t_1, \xi\,) = 0.$$

iki Cauchy problemi ve bu problemlerin çözümlerini birbirine bağlayan

$$G(\xi^{+},\xi) - G(\xi^{-},\xi) = I\,,\; t=\xi;$$

ifadesi ele alınsın. $G(t,\xi)$' nin tanımı göz önüne alınarak

$$G(t^{+},t) - G(t^{-},t) = I;$$

$$G(t,t^{-}) - G(t,t^{+}) = I;$$

$$G(t^{+},t) = G(t,t^{-});$$

$$G(t^{-},t) = G(t,t^{+})$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu özelliklerden faydalanarak

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t_1} G(t,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \;=\; \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} G(t,\xi)\, f(\xi)d\xi + \frac{d}{dt}\int_{t}^{t_1} G(t,\xi)\, f(\xi)d\xi$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} G(t,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + G(t,t^{-})\, f(t) \;+ \int_{t}^{t_1} \frac{d}{dt}G(t,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + G(t,t^{+})\, f(t)$$

$$= \int_{t_0}^{t} A\, G(t,\xi)f(\xi)d\xi + \int_{t}^{t_1} A\, G(t,\xi)f(\xi)d\xi + [\,G(t,t^{-}) - G(t,t^{+})]\, f(t)$$

$$= A\int_{t_0}^{t_1} G(t,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + f(t)$$

bulunur. Böylece (4.17) eşitliğinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Aşağıdaki örnek iyi bir uygulama oluşturur.

Örnek 4.5. [1,8] aralığında $g(t)$, $h(t)$ sürekli fonksiyonlar ve φ, ψ reel sayılar olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}\, y_1(t) = y_1(t) + 2y_2(t) + g(t);$$

$$\frac{d}{dt}\, y_2(t) = 3y_2(t) + h(t);$$

$$y_1(1) + 4y_2(1) = \varphi\,; \qquad 2y_1(8) + 3y_2(8) = \psi$$

sistemi ele alınsın. Bu problemin Green matris fonksiyonları ile çözümü bulunacaktır. Burada $t_0 = 1$, $t_1 = 8$ dir. Bu sistem,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\; y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},\; f(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix},\; L = (1 \quad 4)\,,\; R = (2 \quad 3)$$

olmak üzere,

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t)$$

$$Ly(t_0) = \varphi, \quad Ry(t_1) = \psi,$$

matris-vektör denklemi şeklinde yazılabilir. Eğer (4.7) şartı sağlanırsa, o zaman verilen sistemin çözümü vardır ve tekdir. Bu şartı kontrol etmek için e^{tA} üstel matrisinin hesaplanması gerekmektedir.

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t}-e^t \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

olduğu açıktır. Bunun dışında,

$$Re^{(t_1-t_0)A} = (2 \quad 3)\begin{pmatrix} e^7 & e^{21}-e^7 \\ 0 & e^7 \end{pmatrix} = (e^7,\ 5e^{21}\text{-}2e^7)$$

olur. Şimdi (4.7) şartı kontrol edilmelidir.

$$\det\begin{pmatrix} L \\ Re^{(t_1-t_0)A} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2e^7 & 5e^{21}-2e^7 \end{pmatrix} = 5(e^{21} - 2e^7) \neq 0$$

dır. Yani (4.7) şartı sağlanır. O halde sistemin çözümü vardır ve tekdir. Green formüllerinden faydalanarak,

$$y(t) = G_0(t)\,\varphi + \int_{t_0}^{t_1} G(t, \xi)\, f(\xi)\, d\xi + G_1(t)\,\psi$$

ifadesini hatırlayıp bu çözümü hesaplamak mümkündür. (4.14) sisteminden

$$G_0(t) = e^{(t-t_0)A}\, G_0(t_0)$$

formülünün doğru olduğu açıktır. O halde şimdilik bilinmeyen

$$G_0(t_0) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

matrisi hesaplanmalıdır. Bunun için

$$L\, G_0(t_0) = I_m = 1$$

sol sınır şartı ve

$$Re^{(t_1-t_0)A}\, G_0(t_0) = 0$$

sağ sınır şartı kullanılırsa,

$$u + 4v = 1,$$

$$2e^7 u + (5e^{21} - 2e^7)\, v = 0,$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse,

$$u = 1 + \frac{8}{5(e^{14} - 2)}, \qquad v = -\frac{2}{5(e^{14} - 2)}.$$

olarak bulunur. Buradan

$$G_0(t) = \begin{pmatrix} e^{t-1} + \dfrac{10e^{t-1} - 2e^{3(t-1)}}{5(e^{14} - 2)} \\ \dfrac{-2e^{3(t-1)}}{5(e^{14} - 2)} \end{pmatrix}$$

dır. Benzer şekilde, (4.15) sisteminden

$$G_1(t) = e^{(t-t_0)A}\, G_1(t_0)$$

dir ve $G_1(t_0) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 'yi bulmak için

$$LG_1(t_0) = 0,$$

$$Re^{(t_1-t_0)A}\, G_1(t_0) = 1$$

sınır şartlarını kullanarak

$$u + 4v = 0$$

$$2e^7 u + (5e^{21} - 2e^7)\, v = 1$$

sistemi elde edilir ve buradan

$$u = -\frac{4}{5e^7(e^{14} - 2)}, \quad v = \frac{1}{5e^7(e^{14} - 2)}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$G_1(t) = \frac{1}{5(e^{14} - 2)} \begin{pmatrix} e^{(3t-10)} - 5e^{(t-8)} \\ e^{(3t-10)} \end{pmatrix}$$

olur. (4.16) sisteminden, eğer $t_0 \le t < \xi$ ise

$$G(t, \xi) = e^{(t-\xi)A} G(t_0, \xi)$$

dir. O halde,

$$G(\xi^-, \xi) = e^{(\xi - t_0)A}\, G(t_0, \xi)$$

olur. Eğer $\xi < t \le t_1$ ise bu taktirde

$$G(t, \xi) = e^{(t-\xi)A} G(\xi^+, \xi)$$
$$= e^{(t-\xi)A}(I + G(\xi^-, \xi))$$
$$= e^{(t-\xi)A}(I + e^{(\xi-t_0)A})\, G(t_0, \xi)$$

olur. Böylece

$$G(t, \xi) = e^{(t-\xi)A} G_0(t_0, \xi), \qquad \text{eğer } t_0 \le t < \xi \ ;$$

$$G(t, \xi) = e^{(t-\xi)A} + e^{(t-t_0)A} G_0(t_0, \xi), \qquad \text{eğer } \xi < t \le t_1$$

dir.

Şimdi $G(t, \xi) = \begin{pmatrix} u & z \\ v & w \end{pmatrix}$ hesaplanmalıdır. Bunun için,

$$LG(t_0, \xi) = 0,$$
$$RG(t_1, \xi) = 0$$

sınır şartlarından, önce

$$RG(t_1, \xi) = R\, e^{(t_1-\xi)A} + R e^{(t_1-t_0)A} G(t_0, \xi) = 0 \ ,$$

olduğu kullanılarak

$$LG(t_0, \xi) = 0,$$
$$R e^{(t_1-t_0)A} G(t_0, \xi) = -R\, e^{(t_1-\xi)A}$$

yazılabilir. Bu taktirde

$$u + 4v = 0,$$
$$z + 4w = 0,$$
$$2e^7 u + (5e^{21} - 2e^7)\, v = -2e^{(8-\xi)},$$
$$2e^7 z + (5e^{21} - 2e^7)\, w = -5e^{3(8-\xi)} + 2e^{(8-\xi)}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemden

$$u = \frac{8e^{(1-\xi)}}{5(e^{14} - 2)} \ ; \quad v = -\frac{2e^{(1-\xi)}}{5(e^{14} - 2)};$$

$$z = \frac{20e^{17-3\xi} - 8e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} \; ; \quad w = \frac{-5e^{17-3\xi} + 2e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)}.$$

olarak hesaplanır. Böylece $G(t_0,\xi)$ matris fonksiyonu

$$G(t_0, \xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{8e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} & \dfrac{20e^{17-3\xi} - 8e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} \\ -\dfrac{2e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} & \dfrac{-5e^{17-3\xi} + 2e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

$G(t,\xi)$ matris fonksiyonun değeri $\xi < t < t_1 = 8$ aralığında hesaplanırsa

$$G(t, \xi) = e^{(t-\xi)A} + e^{(t-t_0)A}\, G(t_0, \xi)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{(t-1)} & e^{3(t-1)} - e^{(t-1)} \\ 0 & e^{3(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{8e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} & \dfrac{20e^{17-3\xi} - 8e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} \\ -\dfrac{2e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} & \dfrac{-5e^{17-3\xi} + 2e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} \end{pmatrix},$$

$G(t,\xi)$ matris fonksiyonun değeri $1 = t_0 < t < \xi$ aralığında hesaplanırsa

$$G(t, \xi) = e^{(t-t_0)A}\, G(t_0, \xi)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{(t-\xi)} & e^{3(t-\xi)} - e^{(t-\xi)} \\ 0 & e^{3(t-\xi)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{(t-1)} & e^{3(t-1)} - e^{(t-1)} \\ 0 & e^{3(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{8e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} & \dfrac{20e^{17-3\xi} - 8e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} \\ -\dfrac{2e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} & \dfrac{-5e^{17-3\xi} + 2e^{(1-\xi)}}{5(e^{14}-2)} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen $G_0(t)$, $G_1(t)$, $G(t,\xi)$ Green matris fonksiyonları hesaplanmış olur. Bu matris fonksiyonları (4.8) de yerine yazılırsa verilen probleminin çözümü elde edilir.

4.5. Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklem Sistemi İçin İki-Nokta Sınır Değer Probleminin Hassasiyetinin Bir Matrisin Şart Sayısına Dayanarak Ölçülmesi

Bu bölümde iki-nokta sınır değer probleminde giriş verileri değiştiğinde problemin çözümünün ne kadar değiştiği incelenecektir. İlk olarak, temel teşkil etmesi açısından sistemler için Cauchy problemi incelenecektir.

Teorem 4.3. A tekil olmayan bir kare matris olmak üzere,

$$\frac{dX}{dt}=AX \quad ; \; X(0)=a \tag{4. 18}$$

ve

$$\frac{dY}{dt}=(A+B)Y \quad ; \; Y(0)=b \tag{4.19}$$

Cauchy problemlerinin çözümleri arasında

$$||X(t) - Y(t)|| \leq e^{t||A||} \, ||a-b|| + || e^{tA} - e^{t(A+B)} || \; ||b|| \tag{4.20}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Verilen Cauchy problemlerinin çözümleri

$$X(t) = e^{TA}a \qquad \text{ve} \qquad Y(t)= e^{T(A+B)}\, b$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} ||X(t) - Y(t)|| &= || e^{tA}(a-b)+ e^{tA}\, b - e^{t(A+B)}\, b|| \\ &\leq e^{t||A||}\, ||a-b|| + || e^{tA} - e^{t(A+B)} || \; ||b|| \end{aligned}$$

yazılabilir ki bu da Teorem 4.3' ün ispatını tamamlar.

Uyarı: Eğer Teorem 4.3 ' de ek şart olarak $t||A||\leq 1$ alınırsa bu taktirde

$$||X(t) - Y(t)|| \leq 3\; ||a-b|| + 3\frac{||B||}{||A||}\; e^{(1+||B||/||A||)}\, ||b|| \tag{4.21}$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi, $A+B$; A' ya, b de a' ya ne kadar yakın olursa çözümler birbirine o kadar yakın olur.

Şimdi iki-nokta sınır değer problemi için giriş verilerine bağlı hassasiyetler incelenecektir.

İlk olarak sadece φ ve ψ verileri değiştiğinde hassasiyetin nasıl değiştiği aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 4.4. A tekil olmayan bir kare matris olmak üzere, $[t_0,t_1]$ aralığında tanımlı

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$$
$$LX(t_0) = \varphi, \quad RX(t_1) = \psi \tag{4.22}$$

ve

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A\,Y(t)$$
$$L\,Y(t_0) = \tilde{\varphi}, \quad R\,Y(t_1) = \tilde{\psi} \tag{4.23}$$

birbirine yakın olan iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümleri arasında

$$\frac{\|X(t)-Y(t)\|}{\|X(t)\|} \le \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right)\frac{\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\|} \tag{4.24}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Verilen problemlerin çözümleri sırasıyla

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$$

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buradan

$$\|X(t) - Y(t)\| \le \left\|e^{(t-t_0)A}H^{-1}\left\{\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix}\right\}\right\|$$

$$\leq \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|} \left\| e^{(t-t_0)A}H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|$$

$$\leq \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|} \; \| X(t) \|$$

elde edilir ki bu da istenen (4.24) eşitsizliğidir.

Bu teorem ile (4.22) ve (4.23) problemlerinin çözümlerinin bağıl hatası için bir üst sınır belirlenmiş olur.

Görüldüğü gibi bu üst sınırda $\mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right)$ şart sayısı etkilidir. $\mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right)$ sayısı büyüdükçe bağıl hata da büyüyecektir.

Teorem 4.5. A tekil olmayan bir kare matris olmak üzere, $[t_0, t_1]$ aralığında

$$\frac{d}{dt} X(\mathrm{t}) = \mathrm{A} X(\mathrm{t})$$
$$LX(\mathrm{t}_0) = \varphi, \quad RX(\mathrm{t}_1) = \psi \tag{4.25}$$

ve

$$\frac{d}{dt} Y(\mathrm{t}) = A\, Y(\mathrm{t})$$
$$\tilde{L}\, Y(\mathrm{t}_0) = \varphi, \quad \tilde{R}\, Y(\mathrm{t}_1) = \psi \tag{4.26}$$

iki-nokta sınır değer problemleri göz önüne alınsın. Bu problemlerin çözümleri arasında

$$\frac{\|X(t)-Y(t)\|}{\|X(t)\|} \leq \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right) \left[\mu(\mathrm{H}) \frac{\|L-\tilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R-\tilde{R}\|}{\|R\|} \, \mu\left(e^{(t_1-t_0)A}H^{-1}\right) \right] \frac{1}{1-\mu(H)\dfrac{\|L-\tilde{L}\|}{\|L\|} + \dfrac{\|R-\tilde{R}\|}{\|R\|} \mu\left(e^{(t_1-t_0}\right)} \tag{4.27}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Verilen problemlerin çözümleri sırasıyla

$$H=\begin{pmatrix} L \\ \mathrm{R}e^{(t_1-t_0)A} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{H}=\begin{pmatrix} \widetilde{L} \\ \widetilde{\mathrm{R}}e^{(t_1-t_0)A} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$X(t)= e^{(t-t_0)A} H^{-1}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$Y(t)= e^{(t-t_0)A} \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre,

$$X(t)- Y(t) = e^{(t-t_0)A} H^{-1}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - e^{(t-t_0)A} \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$=e^{(t-t_0)A} (H^{-1}-\widetilde{H}^{-1})\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$=- e^{(t-t_0)A} (\widetilde{H}^{-1}-H^{-1})\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$=- e^{(t-t_0)A} (\widetilde{H}^{-1}-H^{-1})(e^{(t-t_0)A}H^{-1})^{-1} e^{(t-t_0)A} H^{-1}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$X(t)- Y(t) =- e^{(t-t_0)A} (\widetilde{H}^{-1}-H^{-1})(e^{(t-t_0)A}H^{-1})^{-1} X(t) \tag{4.28}$$

eşitliği yazılabilir. Bağıl hata için

$$\frac{\|X(t)-Y(t)\|}{\|X(t)\|} \le \left\|e^{(t-t_0)A} (\widetilde{H}^{-1}-H^{-1})\right\| . \left\|(e^{(t-t_0)A}H^{-1})^{-1}\right\|$$

$$= \left\|e^{(t-t_0)A} H^{-1} H (\widetilde{H}^{-1}-H^{-1})\right\| . \left\|(e^{(t-t_0)A}H^{-1})^{-1}\right\|$$

$$\le \left\|e^{(t-t_0)A} H^{-1}\right\| . \left\|H (\widetilde{H}^{-1}-H^{-1})\right\| . \left\|(e^{(t-t_0)A}H^{-1})^{-1}\right\|$$

$$\frac{\|X(t)-Y(t)\|}{\|X(t)\|} \le \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right)\| H(\widetilde{H}^{-1} - H^{-1})\| \qquad (4.29)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$H(\widetilde{H}^{-1} - H^{-1}) = H\,\widetilde{H}^{-1}-I \;= H(H+\widetilde{H}-H)^{-1}-I$$

olduğu ve

$$(A+B)^{-1} = -A^{-1}B\,(A+B)-I + A^{-1}$$

formülünde A=H ve B $=\widetilde{H}-H$ alınırsa

$$(H+\widetilde{H}-H)^{-1} = H^{-1}(\widetilde{H}-H)\,\widetilde{H}^{-1} + H^{-1}$$

yazılabileceğinden

$$H(\widetilde{H}^{-1}-H^{-1}) = H(H^{-1}(\widetilde{H}-H)\,\widetilde{H}^{-1} + H^{-1}) - I$$
$$= (\widetilde{H}-H)\,\widetilde{H}^{-1} + I - I = (\widetilde{H}-H)\,\widetilde{H}^{-1}$$

olur. Her iki tarafın normu alınarak,

$$H(\widetilde{H}^{-1}-H^{-1}) \le \|\widetilde{H}-H\|.\|\widetilde{H}^{-1}\| \;\le \|\widetilde{H}-H\|\,\frac{1}{\frac{1}{\|\widetilde{H}^{-1}\|}-\|H-\widetilde{H}\|}$$

$$=\frac{1}{\|H\|}\|\widetilde{H}-H\|\,\frac{1}{\frac{1}{\|\widetilde{H}^{-1}\|\|H\|}-\frac{\|H-\widetilde{H}\|}{\|H\|}}$$

$$=\frac{1}{\|H\|}\|\widetilde{H}-H\|\,\frac{1}{\frac{1}{\mu(H)}-\frac{\|H-\widetilde{H}\|}{\|H\|}}$$

$$=\frac{\|H-\widetilde{H}\|}{\|H\|}\,\frac{1}{\frac{1}{\mu(H)}\left(1-\mu(H)\frac{\|H-\widetilde{H}\|}{\|H\|}\right)}$$

$$= \mu(H) \frac{\|H - \widetilde{H}\|}{\|H\|} \frac{1}{1 - \mu(H)\frac{\|H - \widetilde{H}\|}{\|H\|}}$$

elde edilir. Bu sonuç (4.29) de yerine yazılırsa,

$$\frac{\|X(t) - Y(t)\|}{\|X(t)\|} \leq \mu\left(e^{(t-t_0)A} H^{-1}\right) \mu(H) \frac{\|H - \widetilde{H}\|}{\|H\|} \frac{1}{1 - \mu(H)\frac{\|H - \widetilde{H}\|}{\|H\|}} \tag{4.30}$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Diğer yandan,

$$\widetilde{H} - H = \begin{pmatrix} L - \widetilde{L} \\ (R - \widetilde{R})e^{(t_1 - t_0)A} \end{pmatrix}$$

$$\|H - \widetilde{H}\| = \left\| \begin{pmatrix} L - \widetilde{L} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ (R - \widetilde{R})e^{(t_1 - t_0)A} \end{pmatrix} \right\| \leq \|L - \widetilde{L}\| + \left\|(R - \widetilde{R})e^{(t_1 - t_0)A}\right\|$$

$$\leq \|L - \widetilde{L}\| + \|R - \widetilde{R}\| \left\|e^{(t_1 - t_0)A}\right\|$$

yazılabilir.

H, L, R için $\|H\| > \|L\|$ ve $\|H\| > \|R\|$ sağlanacağından,

$$\frac{\|H - \widetilde{H}\|}{\|H\|} \leq \frac{\|L - \widetilde{L}\|}{\|H\|} + \frac{\|R - \widetilde{R}\|}{\|H\|} \left\|e^{(t_1 - t_0)A}\right\|$$

$$\leq \frac{\|L - \widetilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \widetilde{R}\|}{\left\|\mathrm{Re}^{(t_1 - t_0)A}\right\|} \left\|e^{(t_1 - t_0)A}\right\|$$

$$\leq \frac{\|L - \widetilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \widetilde{R}\|}{\|R\|} \frac{\left\|e^{(t_1 - t_0)A}\right\|}{\left\|e^{-(t_1 - t_0)A}\right\|}$$

$$\leq \frac{\|L-\widetilde{L}\|}{\|L\|}+\frac{\|R-\widetilde{R}\|}{\|R\|}\ \mu\left(e^{(t_1-t_0)A}\right)$$

eşitsizliğini de kullanarak istenilen (4.27) eşitsizliği elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.6. [t_o,t_1] kapalı aralığında

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$$

$$LX(t_0) = \varphi, \quad RX(t_1) = \psi \tag{4.31}$$

ve

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \widetilde{A}\ Y(t)$$

$$\widetilde{L}\,Y(t_0) = \widetilde{\varphi}, \quad \widetilde{R}\,Y(t_1) = \widetilde{\psi} \tag{4.32}$$

problemleri ele alınsın. Burada $\widetilde{A}, \widetilde{L}, \widetilde{R}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$ sırasıyla A, L, R, φ ve ψ matris ve vektörleri norm olarak birbirlerine çok yakın matris ve vektörlerdir.

$$H=\begin{pmatrix} L \\ \mathrm{Re}^{TA} \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

olmak üzere

$$\|X(t) - Y(t)\| \leq \|X(t)\|\ \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right)\mu(H)$$

$$\left[\ \|L-\widetilde{L}\|+\|R-\widetilde{R}\|\ \|e^{AT}\|+[\ \|R\| +\|R-\widetilde{R}\|\ ]\|A-\widetilde{A}\|e^{T\|A\|}\ e^{T\|\widetilde{A}\|}\ \right]$$

$$\frac{1}{\|H\|-\mu(H)\left[\|L-\widetilde{L}\|+\|R-\widetilde{R}\|\|e^{TA}\|\left[\|R\|+\|R-\widetilde{R}\|\right]\|A-\widetilde{A}\|\,e^{T\|A\|}e^{T\|\widetilde{A}\|}\right]}$$

$$+\mu\left(e^{(t-t_0)A}\widetilde{H}^{-1}\right)\frac{\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}\right\|}\|X(t)\| + \|A-\widetilde{A}\|\,e^{T\|A\|}\ e^{T\|\widetilde{A}\|}\|\widetilde{H}^{-1}\|\left\|\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}\right\|$$

eşitsizliği geçerlidir.

Burada çözümlerin yakınlığının $T = t_1 - t_0$ ve $\mu(H) = \|H\|.\|H^{-1}\|$ şart sayısına bağlı olduğu görülmektedir.

Teorem 4.4 ve Teorem 4.5 bu teoremin daha özel halleridir.

İspat: Bu problemlerim çözümleri sırasıyla

$$X(t)= e^{(t-t_0)A} H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$$

$$Y(t)= e^{(t-t_0)\widetilde{A}}\, \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$X(t) -Y(t) = e^{(t-t_0)A} H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - e^{(t-t_0)\widetilde{A}}\, \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}$$

$$= e^{(t-t_0)A} H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - e^{(t-t_0)A}\, \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix} + e^{(t-t_0)A}\, \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix} - e^{(t-t_0)\widetilde{A}}\, \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}$$

$$= e^{(t-t_0)A} [H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}] + [e^{(t-t_0)A} - e^{(t-t_0)\widetilde{A}}]\widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}$$

$$= e^{(t-t_0)A} [H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix} + \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}] + [e^{(t-t_0)A} - e^{(t-t_0)\widetilde{A}}]\widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}$$

$$= e^{(t-t_0)A} [[H^{-1} - \widetilde{H}^{-1}]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} + \widetilde{H}^{-1}[\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}]] + [e^{(t-t_0)A} - e^{(t-t_0)\widetilde{A}}]\widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}$$

$$= e^{(t-t_0)A} [H^{-1} - \widetilde{H}^{-1}]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} + e^{(t-t_0)A}\, \widetilde{H}^{-1}[\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}] + [e^{(t-t_0)A} - e^{(t-t_0)\widetilde{A}}]\widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}$$

$$C_1 = e^{(t-t_0)A} [H^{-1} - \widetilde{H}^{-1}]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$$

$$C_2 = e^{(t-t_0)A}\, \widetilde{H}^{-1}[\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}]$$

$$C_3 = [e^{(t-t_0)A} - e^{(t-t_0)\widetilde{A}}]\widetilde{H}^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$\| X(t) - Y(t) \| \leq \| C_1\| + \| C_2 \| + \| C_3 \|$$

olacaktır.

C_3 ifadesi için, $\| C_3 \| \le \| e^{(t-t_0)A} - e^{(t_1-t_0)\widetilde{A}} \| \, \| \widetilde{H}^{-1} \| \left\| \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|$

$$\le \| A - \widetilde{A} \| \, e^{T\|A\|} \, e^{T\|\widetilde{A}\|} \, \| \widetilde{H}^{-1} \| \left\| \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|$$

eşitsizliği geçerlidir.

C_2 ifadesi için Teorem 4.4 den

$$\| C_2 \| \le \mu\left(e^{(t-t_0)A}\widetilde{H}^{-1}\right) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|} \| X(t) \|$$

eşitsizliği geçerli olur.

C_1 ifadesi için ise Teorem 4.5 yardımıyla,

$$\| C_1 \| \le \| X(t) \| \; \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right) \mu(\mathrm{H}) \frac{\|\widetilde{\mathrm{H}} - \mathrm{H}\|}{\|\mathrm{H}\|} \frac{1}{1 - \mu(H)\dfrac{\|H - \widetilde{H}\|}{\|H\|}}$$

$$\| C_1 \| \le \| X(t) \| \; \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right) \mu(\mathrm{H}) \, \| \, \|\widetilde{\mathrm{H}} - \mathrm{H}\| \frac{1}{\|\mathrm{H}\| - \mu(\mathrm{H})\|\mathrm{H} - \widetilde{\mathrm{H}}\|}$$

eşitsizliği elde edilir. Ancak burada

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} L \\ Re^{(t_1-t_0)A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ Re^{TA} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} \widetilde{L} \\ \widetilde{\mathrm{R}}e^{(t_1-t_0)\widetilde{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{L} \\ \widetilde{\mathrm{R}}e^{T\widetilde{A}} \end{pmatrix}$$

dır. Buna göre

$$\mathrm{H} - \widetilde{H} = \begin{pmatrix} L - \widetilde{L} \\ \mathrm{R}e^{AT} - \widetilde{\mathrm{R}}e^{\widetilde{A}T} \end{pmatrix}$$

$$\|\mathrm{H} - \widetilde{H}\| \le \left\| \begin{pmatrix} L - \widetilde{L} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{R}e^{AT} - \widetilde{\mathrm{R}}e^{\widetilde{A}T} \end{pmatrix} \right\|$$

$$\le \| L - \widetilde{L} \| + \| R\,e^{AT} - \widetilde{R}\,e^{\widetilde{A}T} \|$$

$$R\,e^{AT} - \widetilde{R}\,e^{\widetilde{A}T} = R\,e^{AT} - \widetilde{R}\,e^{AT} + \widetilde{R}\,e^{AT} - \widetilde{R}\,e^{\widetilde{A}T}$$

$$= (R - \widetilde{R})\,e^{AT} + \widetilde{R}\,(e^{AT} - e^{\widetilde{A}T})$$

$$\|H - \widetilde{H}\| \le \|L - \widetilde{L}\| + \|(R - \widetilde{R})\,e^{AT} + \widetilde{R}\,(e^{AT} - e^{\widetilde{A}T})\|$$

$$\le \|L - \widetilde{L}\| + \|R - \widetilde{R}\|\,\|e^{AT}\| + \|\widetilde{R}\|\,\|e^{AT} - e^{\widetilde{A}T}\|$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\|e^{AT} - e^{\widetilde{A}T}\| \le \|A - \widetilde{A}\|\,e^{T\|A\|}\,e^{T\|\widetilde{A}\|}$$

olduğundan

$$\|H - \widetilde{H}\| \le \|L - \widetilde{L}\| + \|R - \widetilde{R}\|\,\|e^{TA}\| + \|\widetilde{R}\|\,\|A - \widetilde{A}\|\,e^{T\|A\|}\,e^{T\|\widetilde{A}\|}$$

elde edilir.

$$\widetilde{R} = R - R + \widetilde{R}$$

$$\|\widetilde{R}\| \le \|R\| + \|R - \widetilde{R}\|$$

olduğundan

$$\|H - \widetilde{H}\| \le \|L - \widetilde{L}\| + \|R - \widetilde{R}\|\,\|e^{TA}\| + [\|R\| + \|R - \widetilde{R}\|]\,\|A - \widetilde{A}\|\,e^{T\|A\|}\,e^{T\|\widetilde{A}\|}$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu takdirde,

$$\|C_1\| \le \|X(t)\|\;\mu\!\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right)\mu(H)$$

$$\Big[\,\|L - \widetilde{L}\| + \|R - \widetilde{R}\|\,\|e^{AT}\| + [\,\|R\| + \|R - \widetilde{R}\|\,]\,\|A - \widetilde{A}\|\,e^{T\|A\|}\,e^{T\|\widetilde{A}\|}\,\Big]$$

$$\frac{1}{\|H\| - \mu(H)\left[\|L - \widetilde{L}\| + \|R - \widetilde{R}\|\,\|e^{TA}\|\,\big[\|R\| + \|R - \widetilde{R}\|\big]\,\|A - \widetilde{A}\|\,e^{T\|A\|}e^{T\|\widetilde{A}\|}\right]}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

5. GARANTİ YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE BİR DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMİ İÇİN İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölüm tamamıyla orijinal olup,

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t)$$

$$Ly(t_0) = \varphi, \quad Ry(t_1) = \psi \tag{5.1}$$

sabit katsayılı adi diferensiyel denklem sistemi için iki-nokta sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu bölümde tezin esas amacı olan garanti yaklaşım yöntemini (5.1) problemi için kurmaktır. Birinci bölümde kısaca Ax = f sisteminin çözümü için bu tip bir algoritmanın örneği verilmiştir. Birinci Bölümdeki Paragraf 1.4 den hatırlanacağı gibi bu problem için elde etmek istenen garanti yaklaşım metodu için aşağıdaki kavramların (5.1) problemi için tam olarak ortaya konması gerekmektedir:

1- Format,
2- Şart sayısı,
3- Giriş verilerindeki hataların sonuca etkisi,
4- Kalıntı problemi,
5- Pratik iyi konulmuş problem,
6- Formata bağlı bir algoritma,
7- Hassas iterasyon işlemi.

5.1. Format

Tüm hesaplamaların Paragraf 1.2 de ele alındığı gibi γ, P_-, P_+ ve k parametrelerine bağlı olan F(γ, P_-, P_+, k) rasyonel sayıların alt kümesi olan Formatta yapılması kabul edilmektedir.

5.2. Şart Sayısı

Ax =f problemi için $\mu(A)=\| A \| \| A^{-1} \|$ bir şart sayısı olarak alınmıştır. Bu şart sayısı A matrisinin tekil matrislerin kümesinden ne kadar uzak olduğunu gösteren bir sayıdır.

(5.1) probleminin çözümünün var ve tek olması için

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} L \\ \mathrm{R}e^{(t_1-t_0)A} \end{pmatrix}$$

matrisinin tekil olmaması gerek ve yeter şarttır. Bunun için Ax = f probleminde olduğu gibi burada da (5.1) problemi için $\mu(\mathrm{H}) = \| \mathrm{H} \| \, \| \mathrm{H}^{-1} \|$ sayısı şart sayısı olarak kullanılabilir. Bir şart sayısının problemin çözümünün hassasiyetinin belirlenmesi sırasında önemli rol oynamakta olduğu tekrar hatırlanmalıdır. Yani şart sayısının büyüklüğü problemin iyi ya da kötü konulmuş olup olmadığı hakkında bilgi verir [Aydın 1995, Aydın ve Bulgak, (basıma kabul edildi)].

5.3. Giriş verilerindeki hataların sonuca etkisi

Verilen (5.1) problemi için giriş verilerinin hatalarının çözüme etkisi Bölüm 4.4' de geniş bir şekilde ele alınmıştır. Mutlak hata için bir üst sınır belirlemesi aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

$$\| X(t) - Y(t) \| \leq \| X(t) \| \, \mu\left(e^{(t-t_0)A} H^{-1}\right) \mu(\mathrm{H})$$

$$\left[\|L-\widetilde{L}\| + \|R-\widetilde{R}\| \, \|e^{AT}\| + [\, \|\mathrm{R}\| + \|\mathrm{R}-\widetilde{R}\| \,] \|A-\widetilde{A}\| e^{T\|A\|} \, e^{T\|\widetilde{A}\|} \right]$$

$$\frac{1}{\|\mathrm{H}\| - \mu(\mathrm{H})\left[\|L-\widetilde{L}\| + \|R-\widetilde{R}\| \|e^{TA}\| \left[\|R\| + \|R-\widetilde{R}\|\right] \| A-\widetilde{A} \| e^{T\|A\|} e^{T\|\widetilde{A}\|} \right]}$$

$$+ \mu\left(e^{(t-t_0)A} \widetilde{H}^{-1}\right) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|} \| X(t) \| + \|A-\widetilde{A}\| \, e^{T\|A\|} \, e^{T\|\widetilde{A}\|} \, \| \widetilde{H}^{-1} \| \, \left\| \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\| .$$

5.4. Kalıntı Problemi

$$\frac{d}{dt} X(\mathrm{t}) = \mathrm{A}X(\mathrm{t})$$

$$LX(\mathrm{t}_0) = \varphi, \quad RX(\mathrm{t}_1) = \psi$$

iki-nokta sınır değer probleminin seçilen format kümesiyle bilgisayarda hesaplanan çözümü y(t) vektör fonksiyonu olsun. Bu taktirde çözümün kalıntısı,

$$f(t) = \frac{d}{dt} y(t) - Ay(t)$$

olur ve benzer şekilde

$$LY(t_0) = \tilde{\varphi}, \quad RY(t_1) = \tilde{\psi}$$

sağlanacaktır. Buradan,

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A\, Y(t) + f(t)$$

$$LY(t_0) = \tilde{\varphi}, \quad RY(t_1) = \tilde{\psi}$$

iki-nokta sınır değer problemi bilgisayarda hesaplanan çözümün sağladığı iki-nokta sınır değer problemi olacaktır. Bilgisayarda hesaplanan çözüm,

$$\left\| \frac{d}{dt} y(t) - Ay(t) - f(t) \right\| \leq \varepsilon_1,$$

$$\| Ly(t_0) - \varphi \| \leq \varepsilon_1, \quad \| Ry(t_1) - \psi \| \leq \varepsilon_1,$$

eşitsizliklerini sağlar aksi halde problemin iyi konulmamış olduğu garanti altına alınır. Burada $1+\varepsilon_1$ sayısı seçilen formatta 1 sayısına en yakın olan sayıdır. Burada aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 5.1. A tekil olmayan N boyutlu kare matris olmak üzere, $[t_0, t_1]$kapalı aralığında

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t)$$

$$LX(t_0) = \varphi, \quad RX(t_1) = \psi$$

ve

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A\, Y(t) + f(t)$$

$$LY(t_0) = \tilde{\varphi}, \quad RY(t_1) = \tilde{\psi}$$

problemleri ele alınsın. Burada $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ sırasıyla φ ve ψ vektörlerine norm olarak çok yakın vektörlerdir. Ayrıca *f(t)* normu istenildiği kadar küçük bir vektör fonksiyondur.

Bu taktirde,

$$\| X(t)-Y(t)\| \le \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right)\left\| e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\| \left\{ \frac{\|\varphi-\hat{\varphi}\|}{\|\varphi\|} + \frac{\|\psi-\hat{\psi}\|}{\|\psi\|} + C_1 \max_t \|f(t)\| \right\}$$

$$+ C_2 \max_t \|f(t)\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada yakınlık $T = t_1 - t_0$ ve

$$H=\begin{pmatrix} L \\ \mathrm{Re}^{TA}\end{pmatrix}$$

olmak üzere $\mu(H) = \|H\|.\|H^{-1}\|$ sayısına bağlıdır.

İspat: Verilen problemlerin çözümleri sırasıyla

$$X(t)= e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds + e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} - R\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$\left\|X(t) - Y(t)\right\| = \left\| e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds - e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} - R\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds\end{pmatrix}\right\|$$

$$\le \left\| e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right\| \left\{ \left\|\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ R\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds\end{pmatrix}\right\| + \left\|\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds\right\|\right.$$

$$\le \mu(e^{(t-t_0)A}H^{-1})\left[\left\{ \left\|\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ R\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds\end{pmatrix}\right\|\right\} \left\| e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\|\right] / \left\|\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\|$$

$$+ \left\|\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds\right\|$$

$$\le \mu\left(e^{(t-t_0)A}H^{-1}\right)\left\| e^{(t-t_0)A}H^{-1}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\| \left\{ \frac{\|\varphi-\hat{\varphi}\|}{\|\varphi\|} + \frac{\|\psi-\hat{\psi}\|}{\|\psi\|} + \frac{\|R\| \max_t \|f(t)\| . \|\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}ds\|}{\sqrt{\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2}}\right.$$

$$+ \max_t \|f(t)\| \left\|\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, ds\right\|$$

olur.

$$C_1 = \frac{\|R\| . \|\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}ds\|}{\sqrt{\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2}} \quad , \quad C_2 = \left\|\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, ds\right\|$$

olarak alınırsa teoremin ispatı tamamlanır.

5.5. Pratik İyi Konulmuş Problem

$Ax = f$ problemi için pratik terslenebilen matrislerin μ^* parametresi tanıtılmıştı. Bu sayı formata ve algoritmaya dayanarak seçilmektedir. Bu problem için de μ^* sayısı pratik iyi konulmuş problemlerin sınırını belirleyen sayı olarak alınacaktır. Yani, eğer $\mu(H) > \mu^*$ olduğu tespit edilirse verilen iki-nokta sınır değer problemi pratik iyi konulmamış demektir.

5.6. Algoritma

Garanti yaklaşım yönteminin en önemli parçası algoritmalardır. Bir algoritmayı garanti yaklaşım algoritması olarak kabul etmeden önce muhakkak onun yuvarlama hata analizi yapılmalıdır. Yani bir Formatta yapılan işlemlerde biriken yuvarlama hatalarının üst sınırı seçilen şart sayısına bağlı olarak bulunmalıdır. Burada (5.1) problemini çözmek için 3 değişik algoritma verilecektir. Daha sonraki çalışmalarda hata analizi yapıldıktan sonra bu algoritmalardan birisi amaç algoritmasında yer alacaktır.

Algoritma 1. (5.1) problemi için veriler; N ve k doğal sayılar, T gerçel sayı, A gerçel karesel N boyutlu matris, L gerçel kxN tipinde matris, R gerçel (N-k)x N tipinde matris, φ gerçel k bileşenli vektör ve ψ gerçel (N-k) bileşenli vektördür.

Adım 1. Sol sınır şartını sağlayan y vektörü bulunur. Bunun için

$$Ly = \varphi$$

homogen olmayan lineer cebirsel denklem sistemini çözmek gerekmektedir. Eğer L matrisinin satırları lineer bağımsız ise bu taktirde verilen sistemin sonsuz çözümünün varlığı genel teoriden iyi bilinmektedir [Şimşek 1999]. Bu çözümleri kompakt şekilde tanıtmak için sistemi sağlayan $\hat{y}$ özel çözümüne ve homogen denklemlerin çözümlerinin altuzayını tanıtan N bileşenli $g_1, g_2, \dots, g_{N-k}$ gerçel vektörlere ihtiyaç vardır. Yani

$$L\hat{y} = \varphi \quad \text{ve} \quad Lg_j = 0\,,\ j = 1, 2, \dots, N-k$$

eşitliklerini sağlayan (N - k + 1) tane vektöre ihtiyaç vardır. Ayrıca $g_1, g_2, \dots, g_{N-k}$ vektörleri lineer bağımsız olmalıdır.

Bu problem nümerik analizin klasik problemlerinden birisidir. Bu problemi hataların etkisini kontrol eden SVD (Singuler value decomposition) algoritması en iyi şekilde çözmektedir [Golup ve Loan 1989, Francoise 1996, Godunov vd 1993, Trefethen ve Bau 1995].

Böylece $Ly = \varphi$ sisteminin genel çözümü

$$y = \hat{y} + c_1 g_1 + c_2 g_2 + \ldots + c_{N-k} g_{N-k}$$

olarak elde edilir. Burada c_j, $j = 1, 2, \ldots, N-k$ keyfi gerçel sayılardır.

Adım 2. Önceki adımda hesaplanan (N-k+1) tane vektöre dayanarak aşağıdaki (N-k+1) Cauchy problemi [0,T] aralığında çözülür.

$$\frac{d}{dt} h_1(t) = A h_1(t); \quad h_1(0) = g_1;$$

$$\frac{d}{dt} h_2(t) = A h_2(t); \quad h_2(0) = g_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt} h_{N-k}(t) = A h_{N-k}(t); \quad h_{N-k}(0) = g_{N-k};$$

$$\frac{d}{dt} z(t) = A z(t); \quad z(0) = \hat{y};$$

Sonuç olarak (N-k+1) tane $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_{N-k}(t)$ ve $z(t)$ vektör fonksiyonu ve (N-k+1) tane $h_1(T), h_2(T), \ldots, h_{N-k}(T)$ ve $z(T)$ vektörü hesaplanır.

Adım 3. Sol sınır şartını sağlayan ve sağ tarafa kadar giden çözümler

$$y(t) = z(t) + c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) + \ldots + c_{N-k} h_{N-k}(t)$$

dir. Buradaki $c_1, c_2, \ldots, c_{N-k}$ parametrelerini bulmak için sağ taraftaki sınır şartı kullanılır. Bunun için

$$R[z(T) + c_1 h_1(T) + c_2 h_2(T) + \ldots + c_{N-k} h_{N-k}(T)] = \psi$$

homogen olmayan lineer sistemi çözmek gerekmektedir. Burada yine 1. Adımda olduğu gibi SVD algoritması kullanılarak $c_1, c_2, \dots, c_{N-k}$ bulunur.

Adım 4. 3. Adımda bulunan $c_1, c_2, \dots, c_{N-k}$ katsayıları ve 2. Adımda hesaplanan $h_1(t), h_2(t), \dots, h_{N-k}(t)$ ve $z(t)$ vektör fonksiyonlarına dayanarak

$$y(t) = z(t) + c_1h_1(t) + c_2h_2(t) + \dots + c_{N-k}h_{N-k}(t)$$

verilen (5.1) probleminin tek çözümü olan $x(t)$ bulunur.

Bu algoritmada problemin iyi konulmuşluğu kontrol edilmemektedir. Bu yüzden ancak önceden iyi konulmuş olduğu belirlenen problemler için kullanılır.

Algoritma 2. (5.1) problemi için veriler; N ve k doğal sayılar, T gerçel sayı, A gerçel karesel N boyutlu matris, L gerçel kxNtipinde matris, R gerçel (N-k)x N tipinde matris, φ gerçel k bileşenli vektör ve ψ gerçel (N-k) bileşenli vektördür.

Adım 1. $\mathbf{R}^N$ vektör uzayının

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_N = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

alışılmış tabanına dayanarak,

$$\frac{d}{dt}h_1(t) = Ah_1(t); \quad h_1(0) = e_1;$$

$$\frac{d}{dt}h_2(t) = Ah_2(t); \quad h_2(0) = e_2;$$

....

$$\frac{d}{dt}h_N(t) = Ah_N(t); \quad h_N(0) = e_N$$

N tane Cauchy problemi, [0,T] aralığında hesaplanmalıdır. Sonuç olarak N tane $h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t)$ ve N tane $h_1(T), h_2(T), \dots, h_N(T)$ vektörü hesaplanır. Bu vektörlerden oluşan matris fonksiyonun A matrisine bağlı olan

$$e^{tA} = [h_1(t), h_2(t), \ldots , h_{N-k}(t)\,]$$

üstel matris fonksiyonu olduğu açıktır. Ayrıca

$$e^{TA} = [h_1(T), h_2(T), \ldots , h_{N-k}(T)\,]$$

olur.

Adım 2. $H = \begin{pmatrix} L \\ \mathrm{Re}^{TA} \end{pmatrix}$ hesaplanır.

Adım 2.1. Householder dönüşümleri kullanılarak H matrisi iki köşegenli matris haline getirlir. Yani H = QWV olacak şekilde Q ve V ortogonal matrisleri ve W iki köşegenli matrisi hesaplanır.

Adım 2.2. Sturm yöntemini kullanarak elde edilen iki köşegenli matrisin en büyük $\sigma_N(H)$ ve en küçük $\sigma_1(H)$ tekil değerleri hesaplanır.

Adım 2.3. $\sigma_N(H) > \sigma_1(H)\mu^*$ eşitsizliği kontrol edilir. Bu eşitsizlik doğru ise verilen (5.1) probleminin pratik iyi konulmamış olduğu anlaşılır ve hesap işlemleri durdurularak $\mu(H) > \mu^*$ sonucu yazdırılır. Aksi halde 3. Adıma geçilir.

Adım 3. $Ha = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ sisteminden a vektörü hesaplanır. $\mu(H)$ yeteri kadar küçük olduğundan, önceki adımdaki Householder dönüşümleri ve iki köşegenli matrisler kullanılarak bu işlem kabul edilebilir bir hata ile yapılır. Gerçekten $QWVa = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ sistemi $W(Va) = Q^*\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir. W iki köşegenli matris olduğuna göre yok etme yöntemi ile

$$Ws = Q^*\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

hesaplanır. Sonra da $a = V^*s$ elde edilir.

Bu taktirde

$$y(t) = a_1h_1(t) + a_2\,h_2(t) + \ldots + a_N\,h_N(t)$$

verilen (5.1) probleminin tek olan çözümüdür.

Bu algoritma N tane Cauchy probleminin çözülmesini gerektiren bir algoritmadır.

İşte bu nedenle aşağıda daha ekonomik bir algoritma verilecektir.

Algoritma 3. (5.1) problemi için veriler; N ve k doğal sayılar, T gerçel sayı, A gerçel karesel N boyutlu matris, L gerçel kxN tipinde matris, R gerçel (N-k)x N tipinde matris, φ gerçel k bileşenli sütun vektörü ve ψ gerçel (N-k) bileşenli sütun vektörüdür.

Adım 1. $\tau\|A\| < 1$ sağlanacak şekilde bir τ gerçel pozitif sayısı ve $T = 2^M\tau$ olacak şekilde bir M doğal sayısı bulunur.

Adım 2. Taylor açılımı kullanılarak $e^{\tau A}$ matrisine bir yaklaşım hesaplanır. Yani

$$B = I + \tau A + ½(\tau A)^2 + 1/3!(\tau A)^3 + \dots + 1/k!(\tau A)^k$$

olarak hesaplanır. [Bulgak 1995]'de gösterildiği gibi, k parametresi formata uyumlu ve büyük olmayacak şekilde seçilir.

Adım 3. İkiye katlama yöntemi kullanılarak e^{TA} matrisine bir F_M yaklaşımı hesaplanır [Bulgak 1995]; Yani,

$$F_0 = B\ ,\ F_j = (F_{j-1})^2\ ,\ j = 1, 2, \dots , M.$$

F_M matrisi küçük aralıklarda e^{TA} matrisini temsil eder.

Adım 4. $G = \begin{pmatrix} L \\ RF_M \end{pmatrix}$ olmak üzere,

Adım 4.1. Householder dönüşümleri kullanılarak G matrisi iki köşegenli matris haline getirilir. Yani G = QWV olacak şekilde Q ve V ortogonal matrisleri ve W iki köşegenli matrisi hesaplanır.

Adım 4.2. Sturm yöntemi kullanılarak elde edilen iki köşegen matrisin en büyük $\sigma_N(G)$ ve en küçük $\sigma_1(G)$ tekil değerleri hesaplanır.

Adım 4.3. $\sigma_N(G) > \sigma_1(G)\mu^*$ eşitsizliği kontrol edilir. Bu eşitsizlik doğru ise verilen (5.1) problemi pratik iyi konulmamış olarak tespit edilir ve hesap işlemleri durdurularak $\mu(G) > \mu^*$ sonuç olarak verilir. Aksi halde 5. Adıma geçilir.

Adım 5. $Ga=\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ sisteminden a vektörü hesaplanır. $\mu(G)$ yeteri kadar küçük olduğundan ve önceki adımda Householder dönüşümleri yardımıyla bulunan matrisler kullanılarak bu işlem güvenli şekilde yapılır. Gerçekten $QWVa = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ sistemi $W(Va) = Q^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir. W iki köşegen matris olduğuna göre yok etme yöntemi ile

$$Ws = Q^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

hesaplanır. Sonrada $a = V^* s$ elde edilir.

Bu taktirde

$$y(t) = a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) + \ldots + a_N h_N(t)$$

verilen (5.1) probleminin tek çözümü olarak elde edilir. Burada $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_N(t)$ sırasıyla e^{tA} matrisinin sütunlarıdır.

5.7. Hassas İterasyon İşlemi

Hassas iterasyon işlemi sadece iyi konulmuş problemler için kullanılmaktadır. Bu yöntemin amacı, bir önceki adımda belirlenen algoritmanın sonucunda elde edilen yaklaşık y çözümüne dayanarak daha iyi bir yaklaşım elde etmektir. Bunu gerçekleştirmek için homogen olmayan iki-nokta sınır değer probleminin güvenli bir şekilde hesaplanması gerekmektedir. Şimdilik, verilen problem için hassas iterasyon işlemi verilmeyecektir. Hassas iterasyon işlemi daha sonraki çalışmalarda yapılacaktır. Bunu incelemek için [Böhner vd 1994]'ye dayanarak araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

1 Akın Ö. Bulgak H., 1998. Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi. Uygulamalı Matematik AraştırmaMerkezi Yayınları, No: 2, Selçuk Üniveristesi, Konya.

2 Aydın, K., 1995. Adi Lineer Periyodik Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Asimtotik Kararlılığı için Şart Sayısı. Doktora Tezi, Selçuk Ün. Fen Bil. Ens. Konya

3 Aydın K., Bulgakov A., Quality of Stability Parameter of Linear Ordinary Differential Equations with Periodic Coefficients. Siberian J. of Differential Equations, New- York, Nova Sci. Publ. (to appear).

4 Boyce W.E., Diprima R. C., 1986. Elemantary Differential Equations, John Willey, New York.

5 Böhner, K., Henker, P., Stetter H.J. 1994. The Defect Correction Approach. Computing Suppl. 5, 1-32, By Springer – Verlag.

6 Bulgakov, A.Ya., 1993. The quaranteed accuracy in matrix computations. Sib. J. Diff.Equations, New-York, Nova Sci. Publ., vol.2, No.2, 1-16,

7 Bulgakov, A., 1991. The Basis of Guaranteed Accuracy in the Problem of Separation Of Invariant Subspaces for Non-self-adjoint Matrices. J. Sib. Advances in Math., New-York, No.1 (part 1), pp. 64-108 and No.2 (part 2) pp. 1-56.

8 Bulgakov A.Ya. 1994. The quaranteed accuracy algorithm for solving Lourier-Riccati matrix equation, Teoreticheskiyei Vichislitelniye Problemi Matematich-eskoi Fiziki, Institute of Mathematics of Siberian Division Russian Academy of Science, Novosibirsk, 63-104.

9 Bulgak(ov), A. Ya., 1995. Matrix Computations With Guaranteed Accuracy in Stability Theory. Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi yayını, Konya.

10 Civcik L., 1998. Matris Problemlerine Bilgisayar Destekli Bazı Çözümler. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

11 Françoise C.C., Fraysse V. 1996. Lectures on Finite Precision Computations. Software-Enviroments-Tools , SIAM, Philadelphia.

12 Fox,L., 1990,. The Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problem in Ordinary Differential Equations. 371 p, Dover Publications, New York.

13 Godunov S.K., Antonov A.G., Kiriluk O.P.,Kostin V.I., 1993. Guaranteed Accuracy İn Numerical Linear Algebra. 535 p, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands.

14 Godunov S.K. 1994. Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients and Boundary Problems, 263 p, Novosibirsk University

15 Goldberg J., Potter M. C., 1998. Differential Equations, 476 p, Prentice-Hall,Inc.

16 Golub G., Van Loan C., 1989. Matrix Computations. Second edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

17 Hager W.W., 1988. Applied Numerical Linear Algebra, 424 p, Prentice-Hall International, Inc., USA.

18 Merdan Y., 1996. Lourier-Riccati Matris Denklemlerin Garanti Yaklaşım Metoduyla Bilgisayarda Çözümü. Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

19 Murty K.N., Lakshmi P.V.S., 1990. On Two-Point Boundary Value Problems, Journal of Math. Anal. And App. 153, p. 217-225.

20 Neumann, J. Von., Goldstine H.H., 1947. Numerical Inverting of Matrices of High Order. Bull. Amer. Math Soc., V. (53), no. (11) ; 1021-1099.

21 Rabenstein Albert L., 1970, Elementary Differential Equations with Linear Algebra, 441 p. Academic Press, Inc.

22 Şimşek D., 1999. $Ax = f$ Problemleminin SVD Algoritması ile Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

23 Trefethen L.N., David Bau III.,1995. Numerical Linear Algebra, Cornell University

24 Turing, A.M. 1948. Rounding-off errors in matrix processes. Quart. J. Mech., No (1); 287-308.

25 Wilkinson, J.H. 1965. The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendom Press Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

Ankara' da 1968 yılında doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1987 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 1991 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 1994 yılında " Potansiyel Teoride Kapasite " adlı Yüksek Lisans Tezini tamamladı. 1994 yılından bu yana Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora çalışmasına devam etmektedir.

Halen 1992 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.