AĞIRLIKLI ORTALAMA ve p-CESÀRO

OPERATÖRLERİNİN SPEKTRUMLARI

Cafer COŞKUN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

1992

22801

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞIRLIKLI ORTALAMA ve p-CESÀRO OPERATÖRLERİNİN SPEKTRUMLARI

Cafer COŞKUN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 23/6/1992 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından ...... (90/100) Not Takdir Edilerek Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ İle Kabul Edilmiştir.

Doç. Dr. Cihan ORHAN	Prof. Dr. Öner ÇAKAR	Prof. Dr. Ahmet ABDİK
Danışman		

ÖZET

Doktora Tezi

AĞIRLIKLI ORTALAMA ve p-CESÀRO OPERATÖRLERİNİN SPEKTRUMLARI

Cafer COŞKUN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Cihan ORHAN

1992, Sayfa: 78

Jüri: Doç. Dr. Cihan Orhan

Prof. Dr. Öner ÇAKAR

Prof. Dr. Ahmet ABDİK

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde sınırlı lineer dönüşüm, spektrum ve ince (fine) spektrum kavramları hatırlatılarak bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilmiştir.

İkinci bölümde matris dönüşümlerinin tanımı ve bazı dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri ile ilgili temel teoremler ispatsız olarak verilerek, ağırlıklı ortalama ve p-Cesàro operatörlerinin tanımları aktarılmıştır.

Üçüncü ve dördüncü bölümler ise çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde bv_0 ve bv dizi uzayları üzerinde gözönüne alınan, ağırlıklı ortalama operatörünün sınırlılığını ve spektrumunu inceledik.

Dördüncü ve son bölümde ise p-Cesàro operatörünün c_0, c, ℓ_r $(1 \leq r < \infty)$, bv_0 ve bv uzayları üzerindeki spektrumunu, kendisinin ve adjoint operatörünün nokta spektrumundan ya da kompakt dönüşümlerin spektral özelliklerinden yararlanarak iki ayrı yöntemle hesapladık. Yine bu operatörün ilgili uzaylar üzerindeki ince spektrumunu da inceledik. Ayrıca spektrum kavramının Toplanabilme Teorisine bir uygulaması olarak Mercerian tipi bir teorem elde ettik.

ANAHTAR KELİMELER: Resolvent, spektrum, nokta spektrum, ince spektrum, matris dönüşümü, ağırlıklı ortalama operatörü, p-Cesàro operatörü, Mercerian Teoremi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON THE SPECTRUM OF WEIGHTED MEAN AND p-CESÀRO OPERATORS

Cafer COŞKUN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof.Dr. Cihan ORHAN

1992, Page: 78

Jury: Assoc. Prof. Dr. Cihan ORHAN
Prof. Dr. Öner ÇAKAR
Prof. Dr. Ahmet ABDİK

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the definitions of a bounded linear mapping, spectra and fine spectra for an oparator have been recalled and some related properties have been given.

In the second chapter, a matrix transformation between any two sequence spaces has been defined and main theorems concerning matrix transformations on certain sequence spaces have been given without proof. Moreover, weighted mean operator and p-Cesàro operator have also been defined in this chapter.

The original parts of our thesis are the third and the fourth chapters.

In the third chapter we have studied the boundedness and the spectra for weighted mean matrices as an operator on bv_0 and bv.

In the final chapter, considering either point spectra of an operator and its adjoint operator or the spectral properties of a compact operator, we have computed the spectra for p-Cesàro operator acting on c_0, c, bv_0, bv, ℓ_r $(1 \leq r < \infty)$. Furthermore, we have also studied the fine spectra for this operator on the mentioned sequence spaces. Finally, as an application of spectra to summability theory, we have given a Mercerian type theorem.

KEY WORDS: Resolvent, spectrum, point spectrum, fine spectrum, matrix transformation, weighted mean operator, p-Cesàro operator, Mercerian type theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Cihan ORHAN'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Bu çalışma Ankara Üniversitesi Araştırma Fonu tarafından desteklenmiştir (Proje Kod. No: 92.25.00.24).

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 4

SİMGELER

$(A_k x)$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
A_n	: $a_0 + a_1 + \dots + a_n$
$B(X, Y)$	: X uzayından Y uzayı içine tanımlı, sınırlı lineer dönüşümlerin sınıfı.
bs	: sınırlı seri oluşturan diziler uzayı
bv	: sınırlı salınımlı diziler uzayı
bv_0	: hem sınırlı salınımlı ve hem de sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\mathbb{C}$	: kompleks sayılar cümlesi
c	: yakınsak diziler uzayı
c_A	: A matrisinin yakınsaklık alanı
c_0	: sıfıra yakınsak diziler uzayı
C_p	: p-Cesàro opearötörü.
δ	: $\limsup \frac{a_n}{A_n}$
$\oplus$	: direkt toplam.
e	: bütün terimleri 1 olan dizi
e_k	: k-ıncı terimi 1 diğer terimleri 0 olan dizi
G	: $\overline{\left\{ \frac{a_n}{A_n} : n \geq 0 \right\}}$
γ	: $\liminf \frac{a_n}{A_n}$
I	: birim (özdeşlik) dönüşüm.
$\ln$	: Doğal logaritma

ℓ_r	:	$1 \leq r < \infty$ olmak üzere r-inci kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı.
ℓ_∞	:	sınırlı diziler uzayı
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi.
$0(1)$	:	sınırlı ifade
$0(n)$	:	n'ye bölündüğünde sınırlı olan ifade.
$\pi(T, X)$	:	T sınırlı lineer dönüşümünün X üzerindeki nokta spektrumu.
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
$Re(\lambda)$	:	λ kompleks sayısının reel kısmı
$\rho(T, X)$	:	sınırlı T lineer dönüşümünün X üzerindeki resolvent cümlesi
$R(T)$	:	T dönüşümünün görüntü (değer) uzayı
$\overline{R(T)}$	:	R(T) nin kapanışı.
$r(T)$	:	T dönüşümünün spektral yarıçapı
s	:	reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı.
$\sigma(T, X)$	:	T sınırlı lineer dönüşümünün X üzerindeki spektrumu.
T^{-1}	:	T dönüşümünün tersi
T^*	:	T dönüşümünün adjointi
θ	:	lineer uzayın sıfır elemanı
X^*	:	X normlu uzayının sürekli duali.
$x_n \sim y_n$	:	$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ sınırlı
$x_n \asymp y_n$	:	$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ ve $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ sınırlı

GİRİŞ

Spektrum kàvramı, toplanabilme teorisinde önemli bir yer tutar. Spektrum kavramının toplanabilme teorisindeki en önemli uygulaması, tamamen analitik yöntemlerle incelenmiş olan Mercerian teoremlerinin fonksiyonel analitik yöntemler ile daha kısa ve anlaşılır biçimde elde edilmesine imkân sağlamasıdır.

1965 yılında Brown, Halmos ve Sheilds ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde tanımlı Cesàro operatörünün sınırlı olduğunu göstermiş ve spektrumunu incelemişlerdir. Daha sonra, aynı operatörün ℓ_r, $(1 < r < \infty)$, üzerindeki spektrumu 1973 yılında Leibowitz, c üzerindeki ince (fine) spektrumu 1975 yılında Wegner, c_0 üzerindeki spektrumu 1985 yılında Reade ve c, bv_0 ve bv üzerindeki spektrumu ise 1986 yılında Okutoyi tarafından Doktora Tezinde incelenmiştir.

Ağırlıklı ortalama operatörünün c üzerindeki spektrumu 1977 yılında Cass ve Rhoades, c ve c_0 uzayları üzerindeki ince spektrumu sırasıyla 1983 ve 1987 yıllarında Rhoades tarafından incelendi. 1978 yılında Cartlidge ise Doktora çalışmasında, $1 \le r < \infty$ olmak üzere ℓ_r üzerinde tanımlı ağırlıklı ortalama operatörünün spektrumunu elde etti. 1989 yılında ise Rhaly, p-Cesàro operatörünü tanımlamış ve ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde sınırlılığını ve spektrumunu incelemiştir.

Bu çalışmamızda, önce ağırlıklı ortalama operatörünün bv_0 ve bv uzayları üzerindeki spektrumunu daha sonra da, p-Cesàro operatörünün c_0, c, ℓ_r, $(1 \le r < \infty)$, bv_0 ve bv uzayları üzerindeki spektrumunu ve ince spektrumunu inceleyeceğiz. Ayrıca spektrum kavramının Toplanabilme Teorisine uygulaması olarak bir Mercerian teoremi vereceğiz.

BÖLÜM 1

SINIRLI LİNEER DÖNÜŞÜMLER, SPEKTRUM VE İNCE SPEKTRUM

Bu bölümde, ilk olarak sınırlı lineer dönüşüm kavramını tanımlayıp bazı özelliklerini belirteceğiz. İkinci olarak da bir sınırlı lineer dönüşümün spektrumu ve nokta spektrumunu tanımlayıp önemli özelliklerini belirttikten sonra, ince spektrum kavramını açıklayacağız.

1.1. Sınırlı Lineer Dönüşüm

X ve Y, aynı K cismi üzerinde iki normlu uzay ve $T: X \to Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq M\,.\,\|x\|$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa T dönümüşüne X uzayından Y uzayı içine bir sınırlı lineer dönüşüm adı verilir ve X uzayından Y uzayı içine tanımlı bütün sınırlı lineer dönüşümlerin sınıfı $B(X,Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y$ ise $B(X,X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılır.

$T\,,\, S \in B(X,Y)$ ve $\lambda \in K$ olmak üzere, $(T + S)\,x = Tx + Sx$, $(\lambda T)x = \lambda Tx$ şeklinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemleri ile $B(X,Y)$, K cismi üzerinde bir lineer uzaydır, ayrıca

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

normuyla birlikte bir normlu uzay olup, Y nin bir Banach uzayı olması halinde $B(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır ([2] Brown ve Page 1970, sh. 105, [24] Rudin 1973, sh. 88).

X, K cismi üzerinde bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. X*, X uzayının sürekli dualini göstermek üzere yani, $X^* = B(X,K)$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her $f \in X^*$ için

$$T^* : X^* \to X^*$$
$$(T^* f)x = f(Tx)$$

biçiminde tanımlanan T^* dönüşümüne T dönüşümünün adjointi denir.

T ile T^* adjoint dönüşümü arasındaki ilişkilerden bazılarını belirleyen ve ileride kullanacağımız teoremleri ispatsız olarak aşağıda veriyoruz.

TEOREM 1.1.1: X normlu bir uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^* \in B(X^*)$ olup $\|T^*\| = \|T\|$ dir ([2] Brown ve Page 1970, sh. 239).

TEOREM 1.1.2: Eğer T ve T^* dönüşümlerinin tersleri mevcut ise $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ dir ([6] Goldberg 1966 sh. 60, [5] Dunford ve Schwartz 1958, sh. 479).

TEOREM 1.1.3: X normlu bir uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T^{-1} ters dönüşümünün mevcut ve sınırlı olması için gerek ve yeter şart T^* dönüşümünün örten olmasıdır ([6] Goldberg 1966, sh. 60).

TEOREM 1.1.4: X normlu bir uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda T dönüşümünün X içinde yoğun bir görüntüye sahip olması için gerek ve yeter şart T^* dönüşümünün bire-bir olmasıdır ([6] Goldberg 1966, sh. 59).

TANIM 1.1.5: X ve Y birer Banach uzayı ve $T \in B(X,Y)$ olsun. U, X içinde açık birim yuvar olmak üzere $\overline{T(U)}$, Y içinde kompakt ise T dönüşümüne kompakttır denir ([8] Hutson ve Pym 1980, sh. 179; [24] Rudin 1973, sh. 97).

Kompakt dönüşümlerin bazı özelliklerini aşağıdaki teoremler ile ifade edebiliriz.

TEOREM 1.1.6: X, Bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer T dönüşümünün görüntü uzayı R(T), sonlu boyutlu ise T kompakttır ([8] Hutson ve Pym 1980, sh. 180; [24] Rudin 1973, sh. 98).

TEOREM 1.1.7: X bir Banach uzayı ve (T_n), B(X) deki kompakt dönüşümlerin bir dizisi olsun. Eğer (T_n) dizisi T ye düzgün yakınsak ise $T \in B(X)$ 'de kompakttır ([8] Hutson ve Pym 1980, sh. 180, [11] Kreyszig 1978, sh. 408).

1.2. Spektrum

Bu kısımda X 'i $\mathbb{C}$, kompleks sayılar cismi üzerinde normlu bir lineer uzay olarak gözönüne alıp, θ ile X lineer uzayının sıfır elemanını ve I ile de X den X içine tanımlı özdeşlik dönüşümünü göstereceğiz.

TANIM 1.2.1: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut, sınırlı ve X içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T dönüşümünün bir regüler değeri; T nin bütün regüler değerlerinin oluşturduğu cümleye de T dönüşümünün resolventi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ cümlesine de T nin spektrumu adı verilir. Buna göre, eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise

(i) $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut

(ii) $(\lambda I - T)^{-1}$ sınırlı (yani sürekli)

(iii) $(\lambda I - T)^{-1}$ X içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı

özelliklerinden enaz biri gerçeklenmez ([11] Kreyszig 1978, sh. 371).

Eğer T sınırlı lineer dönüşümü birden fazla normlu uzay üzerinde gözönüne alınıyorsa, gözönüne alındığı X normlu uzayını belirtmek için $\rho(T)$ yerine $\rho(T,X)$ ve $\sigma(T)$ yerine $\sigma(T,X)$ yazacağız.

Eğer X bir Banach uzayı ise $\rho(T,X)$, $\mathbb{C}$ 'nin açık bir altcümlesi ve dolayısıyla $\sigma(T,X)$, $\mathbb{C}$ 'nin kapalı bir altcümlesidir.

TANIM 1.2.2: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T,X)\}$$

sayısına T dönüşümünün spektral yarıçapı denir. Eğer X bir Banach uzayı ise

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$$

dir. Buna göre eğer $\lambda \in \sigma(T,X)$ ise $|\lambda| \leq r(T) \leq \|T\|$ dir ([2] Brown ve Page 1970, sh. 237). Buradan şu önemli sonucu elde ederiz.

SONUÇ 1.2.3: $X \neq \{\theta\}$ bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ ise $\sigma(T,X)$, $\mathbb{C}$ 'nin kapalı ve sınırlı bir altcümlesidir.

TANIM 1.2.4: $T : X \rightarrow X$ lineer bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = \lambda x$ olacak biçimde X içinde bir $x \neq \theta$ elemanı varsa λ kompleks sayısına T lineer dönüşümünün bir özdeğeri ve $x \in X$ elemanına da bir özvektör adı verilir ([2] Brown ve Page 1970, sh. 230, [11] Kreyszig 1978, sh. 372).

Tanım 1.2.4 gereğince "λ kompleks sayısının, T nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $\lambda I - T$ dönüşümünün bire-bir olmamasıdır" önermesi doğrudur. Buradan şu sonucu elde ederiz.

SONUÇ 1.2.5: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $\lambda \in \mathbb{C}$, T nin bir özdeğeri ise $\lambda \in \sigma(T,X)$ dir.

$X \neq \{\theta\}$ normlu bir uzay olmak üzere $T \in B(X)$ dönüşümünün bütün özdeğerlerinin oluşturduğu cümleyi $\pi(T,X)$ ile göstereceğiz ve T dönüşümünün nokta (point) spektrumu diyeceğiz.

Bilindiği gibi eğer X sonlu boyutlu normlu bir uzay ise $T: X \rightarrow X$ lineer dönüşümü sınırlı ve T^{-1} ters dönüşümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart T dönüşümünün bire-bir olmasıdır. O halde şu önemli sonucu elde ederiz.

SONUÇ 1.2.6: $X \neq \{\theta\}$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T: X \to X$ lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $\pi(T,X) = \sigma(T,X)$ dir.

Burada hemen belirtelim ki, X sonsuz boyutlu normlu bir uzay ise $T \in B(X)$ dönüşümü için $\pi(T,X) \subset \sigma(T,X)$ bağıntısı genellikle kesin içerme bağıntısıdır.

Şimdi sınırlı lineer bir dönüşümün spektral özelliklerini veren aşağıdaki teoremleri verelim.

TEOREM 1.2.7: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ ise $\sigma(T,X)$ boş değildir. ([2] Brown ve Page 1970, sh. 234).

TEOREM 1.2.8: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ dönüşümü kompakt ise $0 \in \sigma(T,X)$ dir ([2] Brown ve Page 1970, sh. 255 [8] Hutson ve Pym 1980, sh. 188).

TEOREM 1.2.9: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ dönüşümü kompakt olsun. Bu durumda $\lambda \in \sigma(T,X)$ ve $\lambda \neq 0$ ise $\lambda \in \pi(T,X)$ dir ([2] Brown ve Page 1970, sh. 255, [5] Dunford ve Schwartz 1958, sh. 577).

TEOREM 1.2.10: $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T^*,X^*) \subseteq \sigma(T,X)$ dir. Eğer X bir Banach uzayı ise $\sigma(T^*,X^*) = \sigma(T,X)$ dir ([2] Brown ve Page 1970, sh. 242, [5] Dunford ve Schwartz 1958, sh. 568).

Ancak $\pi(T^*,X^*)$ ile $\pi(T,X)$ arasında Teorem 1.2.10'daki gibi bir karşılaştırma yapılamamaktadır.

1.3. İnce Spektrum

$\lambda \in \mathbb{C}$, $T \in B(X)$ dönüşümünün bir spektral değeri ise Tanım 1.2.1 gereğince $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut, sınırlı ve X içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı olma özelliklerinden enaz biri gerçeklenmez. Bu kısımda λ spektral değeri için yukarıdaki özelliklerinden hangisinin veya hangilerinin gerçeklenip gerçeklenmediğini detaylı olarak belirlememizi sağlayacak olan ince (fine) spektrum kavramını vereceğiz.

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. T dönüşümünün görüntü uzayını $R(T)$ ve $R(T)$ 'nin X içindeki kapanışını $\overline{R(T)}$ ile gösterelim. Bu durumda $R(T)$ için

I. $R(T) = X$

II. $R(T) \neq X$ ancak $\overline{R(T)} = X$

III. $\overline{R(T)} \neq X$

ve $R(T)$ üzerinde gözönüne alınan T^{-1} için

1. T^{-1} mevcut ve sınırlı

2. T^{-1} mevcut ancak sınırlı değil

3. T^{-1} mevcut değil

durumları vardır ([5] Goldberg 1966, sh. 66).

Yukarıdaki incelemeleri birlikte gözönüne alırsak; I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2 ve III_3 olmak üzere dokuz farklı durum söz konusudur. Örneğin $T \in I_1$ ise $R(T) = X$ ve T^{-1} mevcut ve sınırlıdır. $T \in III_2$ ise $\overline{R(T)} \neq X$ ve T^{-1}, $R(T)$ üzerinde mevcut ancak sınırlı değildir.

Eğer λ, $\lambda I - T \in I_1$ ve $\lambda I - T \in II_1$ olacak biçimde bir kompleks sayı ise $\lambda \in \rho(T,X)$ ve diğer durumlarda ise $\lambda \in \sigma(T,X)$ dir. Burada $\lambda I - T$ 'nin bulunduğu sınıfı gözönüne alarak $\sigma(T,X)$ 'i $I_2\sigma(T,X)$, $I_3\sigma(T,X)$, $II_2\sigma(T,X)$, $II_3\sigma(T,X)$, $III_1\sigma(T,X)$, $III_2\sigma(T,X)$ ve $III_3\sigma(T,X)$ altcümlelerine ayıracağız ve örneğin $\lambda I\text{-}T \in III_2$ ise $\lambda \in III_2\sigma(T,X)$ yazacağız.

BÖLÜM 2

MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Her lineer dönüşüm bir matris ile ifade edilebildiği gibi, her matris bir lineer dönüşüm belirtir. Fakat her lineer dönüşümün matris ifadesini bulmak kolay değildir. Ancak bizim ilgilendiğimiz lineer dönüşümlerin matris ifadelerini belirlemek oldukça kolaydır. Diğer yandan dizi uzayları arasındaki en genel lineer dönüşüm matris dönüşümleri ile verilmekte olup, bir matris dönüşümünün, c_0, c, ℓ_∞, ℓ_r $(1 \leq r < \infty)$, bv_0 ve bv gibi belli dizi uzaylarının kendi içlerine dönüştüren sınırlı bir lineer dönüşüm belirlemesi için gerek ve yeter şartlar bilinmektedir. Bu nedenle bu bölümde, matris dönüşümlerinin tanımını ve bazı dizi uzayları arasında tanımlı matris dönüşümleri ile ilgili teoremleri verip, Ağırlıklı Ortalama Operatörü ve p-Cesàro Operatörünü tanımlayacağız. Ayrıca bu operatörlerin bilinen bazı özelliklerini vereceğiz.

Bu çalışma boyunca kompleks ya da reel terimli bütün dizilerin uzayını s, sınırlı dizilerin uzayını ℓ_∞, yakınsak dizilerin uzayını c, sıfıra yakınsak dizilerin uzayını c_0, $1 \leq r < \infty$ olmak üzere r-inci kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayını ℓ_r, sınırlı salınımlı diziler uzayını bv, hem sınırlı salınımlı ve hem de sıfıra yakınsak diziler uzayını bv_0 ve sınırlı seri oluşturan dizilerin uzayını bs ile göstereceğiz.

Buna göre,

$$\ell_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = \ell \text{ mevcut}\}$$

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\}$$

$$\ell_r = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k|^r < \infty\},\ 1 \le r < \infty$$

$$bv = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty\}$$

$$bv_0 = c_0 \cap bv$$

ve

$$bs = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\}$$

yazabiliriz.

2.1. Matris Dönüşümleri

X ve Y, s nin iki alt uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Bu durumda $x = (x_k)$ ve her $n \ge 0$ için

$$A_n x = \sum_k a_{nk} x_k \tag{1}$$

mevcut ise yani sağdaki seri her bir n için yakınsak ise $Ax = (A_n x)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $y = Ax$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve X dizi uzayını Y içine dönüştüren bütün matrislerin sınıfı (X,Y) ile gösterilir. Eğer A, X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X,Y)$ yazılır. Toplamı veya limiti koruyan matrislerin sınıfı ise (X,Y;p) ile gösterilir. Özel olarak $A \in (c,c)$ ise A matrisi konservatiftir ve $A \in (c,c;p)$ ise A regüler matristir (veya kısaca regülerdir) denir.

(1) serisi her $n \ge 0$ için yakınsak olduğundan matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır.

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer her $k > n \ge 0$ için $a_{nk} = 0$ ise A matrisine üçgenseldir denir. A üçgensel bir matris ve her n için $a_{nn} \ne 0$ ise A normal matris veya üçgen matris adını alır.

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere

$$c_A = \{ x = (x_k) : Ax \in c \}$$

cümlesine A matrisinin yakınsaklık alanı (veya toplanabilirlik alanı) denir.

Bazı dizi uzayları üzerinde tanımlı matris dönüşümlerinin özelliklerini veren temel teoremler aşağıda ispatsız olarak belirtilmiştir.

TEOREM 2.1.1: $A \in B(\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \tag{2}$$

olmasıdır ([18] Petersen 1966, sh. 5, [7] Hardy 1949, sh. 44 [14] Maddox 1970, sh. 174, [27] Wilansky 1984, sh. 5, [19] Powell ve Shah 1988, sh. 42).

TEOREM 2.1.2: $A \in B(\ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty$$

olmasıdır ([9] Knopp ve Lorentz 1949, [14] Maddox 1970, sh. 167 [27] Wilansky 1984, sh. 126).

TEOREM 2.1.3: $A \in B(\ell_\infty) \cap B(\ell_1)$ ise $1 < r < \infty$ için $A \in B(\ell_r)$ dir ([14] Maddox 170, sh. 174, [27] Wilansky 1984, sh. 136).

TEOREM 2.1.4: $A \in B(c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (2) 'nin gerçeklenmesi ve her k için $\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0$ olmasıdır ([14] Maddox 1970, sh. 163, [27] Wilansky 1984, sh. 129).

TEOREM 2.1.5: (Kojima-Schur): $A \in B(c)$ olması için gerek ve yeter şart (2) 'nin gerçeklenmesi ve her j için $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=j}^{\infty} a_{nk} = a_j$ mevcut olmasıdır ([14] Maddox 1970, sh. 166).

ÖNERME 2.1.6: $A \in B(c)$ olsun. Eğer A, (2) 'yi gerçekleyen bir A^{-1} inversine sahip ise $A^{-1} \in B(c)$ dir ([27] Wilansky, 1984, sh. 92).

TEOREM 2.1.7: (Silverman-Toeplitz): $A \in (c,c;p)$ olması için gerek ve yeter şart (2) 'nin gerçeklenmesi ve

(i) her k için $\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0$

(ii) $\lim_{n \to \infty} \sum_k a_{nk} = 1$

olmasıdır ([5] Dunford-Schwartz 1958, sh. 75, [18] Petersen 1966, sh. 8, [7] Hardy 1949, sh. 43, [14] Maddox 1970, sh. 165, [19] Powell ve Shah 1988, sh. 24).

TEOREM 2.1.8: $A \in B(bv)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{(i)} \quad \sup_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(a_{nk} - a_{n-1,k} \right) \right| < \infty \tag{3}$$

(ii) $Ae \in bv$, $e = (1, 1, 1, ...)$

olmasıdır ([27] Wilansky 1984, sh. 127).

TEOREM 2.1.9: $A \in B(bv_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3) 'ün gerçeklenmesi ve her k için $\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0$ olmasıdır ([27] Wilansky 1984, sh. 127).

2.2. Ağırlıklı Ortalama Operatörü

$a_0 > 0$, $n \geq 1$ için $a_n \geq 0$ ve $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{A_n} &, \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 &, \quad n < k \end{cases} \tag{4}$$

biçiminde verilen $A = (a_{nk})$ matrisinin tanımladığı matris dönüşümüne ağırlıklı ortalama operatörü veya Nörlund tipi operatör denir ([7] Hardy 1949, sh. 57, [19] Powell ve Shah 1988, sh. 43).

Şimdi Ağırlıklı ortalama operatörünün regüler olmasını belirleyen teoremi verelim.

TEOREM 2.2.1: Ağırlıklı ortalama operatörünün regüler olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $A_n \to \infty$ olmasıdır ([7] Hardy 1949, sh. 57, [19] Powell ve Shah 1988, sh. 44, [18] Petersen 1966, sh. 10).

2.3. p-Cesàro Operatörü

Bir $x = (x_k)$ kompleks (veya reel) terimli dizisini $n \geq 0$ için

$$y_n = \frac{1}{(n+1)^p} \sum_{k=0}^{n} x_k \tag{5}$$

olmak üzere $y = (y_n)$ dizisine dönüştüren operatöre p-Cesàro operatörü denir ([21] Rhaly 1989).

p-Cesàro operatörünün $p = 1$ özel hali Cesàro operatörüne (Aritmetik ortalama operatörüne) karşılık gelir.

BÖLÜM 3

AĞIRLIKLI ORTALAMA OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

Bu bölümde ağırlıklı ortalama operatörünün sırasıyla bv_0 ve bv uzayları üzerindeki spektrumunu inceleyeceğiz. Ağırlıklı ortalama operatörünün c_0 üzerindeki spektrumu 1987 yılında Rhoades [23], c üzerindeki spektrumu 1977 yılında Cass ve Rhoades [4] ve ince spektrumu 1983 yılında Rhoades [22] ve ℓ_r, $1 \leq r < \infty$, üzerindeki spektrumu ise 1978 yılında Cartlidge [3] tarafından doktora çalışmasında incelenmiştir.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe

$$\gamma = \liminf \frac{a_n}{A_n} \quad , \quad \delta = \limsup \frac{a_n}{A_n} \quad \text{ve} \quad G = \overline{\left\{ \frac{a_n}{A_n} : n \geq 0 \right\}}$$

alınacaktır.

3.1. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün bv_0 Üzerindeki Spektrumu

Bu kısımda Ağırlıklı ortalama operatörünün,

$$\|x\| = \sum_k |x_k - x_{k+1}|$$

normuyla birlikte bir Banach uzayı olan bv_0 uzayı üzerindeki sınırlılığını ve spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 3.1.1: A regüler bir ağırlıklı ortalama matrisi ise $A \in B(bv_0)$ dir.

İspat: $a_{-1,0} = 0$ olmak üzere (4) ifadesinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(a_{nk} - a_{n-1,k}\right) \right| = \sum_{n=0}^{i} \left| \sum_{k=0}^{n} \left(a_{nk} - a_{n-1,k}\right) \right| + \sum_{n=i+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(a_{nk} - a_{n-1,k}\right) \right|$$

$$= \frac{a_0}{A_0} + \sum_{n=1}^{i} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_k}{A_n} - \frac{a_k}{A_{n-1}}\right) + \frac{a_n}{A_n} \right| + \sum_{n=i+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{a_k}{A_n} - \frac{a_k}{A_{n-1}}\right) \right|$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{i} \left| A_{n-1}\left(\frac{1}{A_n} - \frac{1}{A_{n-1}}\right) + \frac{a_n}{A_n} \right| + \sum_{n=i+1}^{\infty} A_i\left(\frac{1}{A_{n-1}} - \frac{1}{A_n}\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{i} \left| -1 + \left(\frac{A_{n-1}}{A_n} - \frac{a_n}{A_n}\right) \right| + A_i \sum_{n=i+1}^{\infty} \left(\frac{1}{A_{n-1}} - \frac{1}{A_n}\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{i} \left| -1 + \frac{A_n}{A_n} \right| + A_i \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{A_r}\right)$$

$$= 1 + 0 + A_i\left(\frac{1}{A_i} - \lim_{r\to\infty} \frac{1}{A_r}\right)$$

olup A regüler olduğundan $\lim_{n\to\infty} A_r = \infty$ (bkz. Teorem 2.2.1) olup buradan

$$\sup_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(a_{nk} - a_{n-1,k}\right) \right| = 2$$

elde edilir ki, Teorem 2.1.9 gereğince $A \in B(bv_0)$ dir.

LEMMA 3.1.2: A regüler bir ağırlıklı ortalama matrisi ise $A^{-1} \in B(bv_0)$ olması için gerek ve yeter şart $0 \notin G$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik: Eğer $0 \in G$ ise $G \subset \sigma(A, bv_0)$ olduğundan ([3] Cartlidge 1978) $A^{-1} \notin B(bv_0)$ dır.

Yeterlilik: $0 \notin G$ olsun. Bu durumda (4) 'den $A^{-1} = D = (d_{nk})$ matrisi $d_{-1,0} = 0$ olmak üzere,

$$d_{nk} = \begin{cases} \dfrac{A_n}{a_n} & , \quad k = n \\ 1 - \dfrac{A_n}{a_n} & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{7}$$

ile verilir. Buna göre (7) 'den açık olarak sabit her k için $\lim\limits_{n \to \infty} d_{nk} = 0$ ve ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right| = \left| d_{00} - d_{-1,0} \right| + \sum_{n=1}^{i} \left| \sum_{k=0}^{n} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right|$$

$$+ \sum_{n=i+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{A_0}{a_0} \right| + \sum_{n=1}^{i} \left| \left(d_{n,n-2} - d_{n-1,n-2}\right) + \left(d_{n,n-1} - d_{n-1,n-1}\right) + \left(d_{n,n} - d_{n-1,n}\right) \right|$$

$$+ \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{i+1,k} - d_{ik}\right) \right| + \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{i+2,k} - d_{i+1,k}\right) \right|$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{i} \left| \left[0 - \left(1 - \frac{A_{n-1}}{a_{n-1}}\right) \right] + \left[\left(1 - \frac{A_n}{a_n}\right) - \frac{A_{n-1}}{a_{n-1}} \right] + \left[\frac{A_n}{a_n} - 0 \right] \right|$$

$$+ \left| \left(d_{i+1,i-1} - d_{i,i-1}\right) + \left(d_{i+1,i} - d_{ii}\right) \right| + \left| d_{i+2,i} - d_{i+1,i} \right|$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{i} \left| -1 + \frac{A_{n-1}}{a_{n-1}} + 1 - \frac{A_n}{a_n} - \frac{A_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{A_n}{A_n} \right|$$

$$+ \left| \left[0 - \left(1 - \frac{A_i}{a_i}\right) \right] + \left[\left(1 - \frac{A_{i+1}}{a_{i+1}}\right) - \frac{A_i}{a_i} \right] \right| + \left| 0 - \left(1 - \frac{A_{i+1}}{a_{i+1}}\right) \right|$$

$$= 1 + 0 + \left| -1 + \frac{A_i}{a_i} + 1 - \frac{A_{i+1}}{a_{i+1}} - \frac{A_i}{a_i} \right| + \left| -1 + \frac{A_{i+1}}{a_{i+1}} \right|$$

$$= 1 + \frac{A_{i+1}}{a_{i+1}} + \left(-1 + \frac{A_{i+1}}{a_{i+1}} \right) = 2\frac{A_{i+1}}{a_{i+1}}$$

elde edilir. Buradan hipotez gereğince

$$\sup_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{nk} - d_{n-1,k} \right) \right| = 2 \sup_i \frac{A_{i+1}}{a_{i+1}}$$

$$= \frac{2}{\inf_i \frac{a_{i+1}}{A_{i+1}}} < \infty$$

bulunur ki Teorem 2.1.9 gereğince $A^{-1} \in B(bv_0)$ elde edilir.

TEOREM 3.1.3: A matrisi regüler bir ağırlıklı ortalama matrisi ise

$$\left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2-\delta} \right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta} \right\} \cup G \subseteq \sigma(A, bv_0)$$

dır.

İspat: $D = (\lambda I - A)^{-1} = (d_{nk})$ dersek (4) yardımıyla $n \geq 0$ için $\lambda \neq \frac{a_n}{A_n}$ olmak üzere $D = (d_{nk})$ matrisi,

$$d_{nk} = \begin{cases} \dfrac{A_n}{\lambda A_n - a_n} & , \quad n = k \\[2ex] \dfrac{a_k}{\lambda^2 A_n} \displaystyle\prod_{j=k}^{n} \left(1 - \frac{a_j}{\lambda A_j} \right)^{-1} & , \quad k < n \qquad (8) \\[2ex] 0 & , \quad n < k \end{cases}$$

ile verilir ([4] Cass ve Rhoades 1977). Eğer $D \in B(bv_0)$ olsaydı her k için $(d_{nk})_{n=0}^{\infty} \in bv_0$ olurdu. λ üzerindeki kabullerimiz altında $(d_{n1})_{n=0}^{\infty} \notin bv_0$ olduğunu göstererek ispatı tamamlayacağız. Buna göre (8)'den

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| d_{n1} - d_{n+1,1} \right| = \left| -\frac{A_1}{A_1\lambda - a_1} \right|$$

$$+ \frac{a_1}{|\lambda|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{A_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{a_j}{\lambda A_j}\right)} - \frac{1}{A_{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{a_j}{\lambda A_j}\right)} \right|$$

$$= O(1) + \frac{a_1}{|\lambda|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_0} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\left[1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{a_j}{A_{j-1}}\right]} - \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\left[1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{a_j}{A_{j-1}}\right]} \right|$$

$$= O(1) + O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\left| 1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{a_j}{A_{j-1}} \right|} \left| 1 - \frac{1}{1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{a_{n+1}}{A_n}} \right|$$

$$= O(1) + O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\left| 1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{a_j}{A_{j-1}} \right|} \left| \frac{a_{n+1}}{A_n} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \right|$$

$$= O(1) + O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{A_n} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\left| 1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{a_j}{A_{j-1}} \right|}$$

$$\geq O(1) + O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\left| 1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{a_j}{A_{j-1}} \right|} \qquad (9)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{a_{k+1}}{A_k}\right|\le 1$$

olması için gerek ve yeter şart $-\dfrac{1}{\lambda}=\alpha+i\beta$ olmak üzere

$$\left[1+(1+\alpha)\frac{a_{k+1}}{A_k}\right]^2+\left(\beta\frac{a_{k+1}}{A_k}\right)^2\le 1$$

yani

$$2(1+\alpha)\frac{a_{k+1}}{A_k}+\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right]\left(\frac{a_{k+1}}{A_k}\right)^2\le 0 \qquad (10)$$

olmasıdır. $a_{k+1}=0$ olacak biçimdeki her k için (10) ifadesi aşikâr olarak gerçeklenir. $a_{k+1}>0$ olacak biçimdeki her k için ise (10) ifadesi

$$2(1+\alpha)+\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right]\frac{a_{k+1}}{A_k}\le 0 \qquad (11)$$

ifadesine denktir. (11)'in gerçeklenmesi için ise

$$\frac{a_{k+1}}{A_k}=\frac{\dfrac{a_{k+1}}{A_{k+1}}}{1-\dfrac{a_{k+1}}{A_{k+1}}}$$

ifadesi $\dfrac{a_{k+1}}{A_{k+1}}$'e göre artan olduğundan yeterince büyük k 'lar için

$$2(1+\alpha)+\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right]\frac{\delta}{1-\delta}\le 0 \qquad (12)$$

ifadesinin gerçeklenmesi yeterlidir. (12) ifadesi ise

$$\left|\lambda-\frac{1}{2-\delta}\right|\le\frac{1-\delta}{2-\delta} \qquad (13)$$

olmasına denktir.

O halde λ, (13) ifadesini gerçekleyen bir kompleks sayı olmak üzere (9) 'dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| d_{n1} - d_{n+1,1} \right| \geq 0(1) + 0(1) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}$$

elde edilir ki, $\lim_{n \to \infty} A_{n+1} = \infty$ olduğundan Abel-Dini Teoremi ([10] Knopp 1971, sh. 290) gereğince,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}$$

serisi ıraksaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

TEOREM 3.1.4: A, $\gamma > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama matrisi ise

$$\sigma(A, bv_0) \subseteq \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right\} \cup G$$

dir.

İspat: İspatı $\lambda \neq \frac{a_n}{A_n}$ ve $\left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ özelliğine sahip λ kompleks sayıları için $\lambda \in \rho(A, bv_0)$ yani $(\lambda I - A)^{-1} \in B(bv_0)$ olduğunu göstererek yapacağız. Bunun için ise gözönüne aldığımız λ 'lara karşılık $(\lambda I - A)^{-1} = (d_{nk})$ matrisinin Teorem 2.1.9'un şartlarını gerçeklediğini göstermek yeterlidir. Böylece

(i) $\lambda \neq \frac{a_n}{A_n}$ ve $\left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ özelliğine

sahip λ kompleks sayıları için $\lambda \in \rho(A, c_0)$, ([23] Rhoades 1987) olduğundan Teorem 2.1.4 gereğince aşikâr olarak sabit her k için $\lim_{n \to \infty} d_{nk} = 0$ dır.

(ii) $e = (1, 1, 1, \ldots)$ olmak üzere

$$(\lambda I - A)\, e = \lambda e - Ae = \lambda e - e = (\lambda - 1)e$$

ve

$$e=(\lambda I-A)^{-1}[(\lambda I-A)e]=(\lambda I-A)^{-1}\big((\lambda-1)e\big)$$
$$=(\lambda-1)(\lambda I-A)^{-1}e$$

yani

$$(\lambda I-A)^{-1}e=\frac{1}{\lambda-1}e \tag{14}$$

elde edilir. Buradan her n için

$$\sum_{k=0}^{n} d_{nk}=\frac{1}{\lambda-1} \tag{15}$$

bulunur, böylece (8) yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{i}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right|=\sum_{n=0}^{i}\left|\sum_{k=0}^{n}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right|+\sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{i}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right|$$

$$=|d_{00}|+\sum_{n=1}^{i}\left|\sum_{k=0}^{n}d_{nk}-\sum_{k=0}^{n-1}d_{n-1,k}\right|+\sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{i}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right|$$

$$=0(1)+\sum_{n=1}^{i}\left|\frac{1}{\lambda-1}-\frac{1}{\lambda-1}\right|$$

$$+\sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{i}\left\{\frac{a_k}{A_n}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\left(1-\frac{a_j}{\lambda A_j}\right)}-\frac{a_k}{A_{n-1}}\prod_{j=k}^{n-1}\frac{1}{\left(1-\frac{a_j}{\lambda A_j}\right)}\right\}\right|$$

$$\le 0(1)+\frac{1}{|\lambda|^2}\sum_{n=i+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}a_k\prod_{j=k}^{n-1}\frac{1}{\left|1-\frac{a_j}{\lambda A_j}\right|}\left|\frac{1}{A_n-\frac{a_n}{\lambda}}-\frac{1}{A_{n-1}}\right|$$

$$= 0(1) + \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{n=i+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} a_k \prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{\left|1 - \frac{a_j}{\lambda A_j}\right|} \left| \frac{A_{n-1} - A_n + \frac{a_n}{\lambda}}{\left(A_n - \frac{a_n}{\lambda}\right) A_{n-1}} \right|$$

$$= 0(1) + \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{\lambda} - 1\right| a_n}{A_n A_{n-1}} \sum_{k=0}^{i} a_k \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1 - \frac{a_j}{\lambda A_j}\right|}$$

$$= 0(1) + \frac{|\lambda - 1|}{|\lambda|^3} \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n A_{n-1}} \left\{ a_0 \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\left|1 - \frac{a_j}{\lambda A_j}\right|} + \sum_{k=1}^{i} a_k \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1 - \frac{a_j}{\lambda A_j}\right|} \right\}$$

$$= 0(1) + 0(1) \left\{ \frac{a_0}{\left|1 - \frac{a_0}{\lambda A_0}\right|} \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n A_{n-1}} \cdot \frac{A_n}{A_1} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{a_j}{A_{j-1}}\right|} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n A_{n-1}} \cdot \sum_{k=1}^{i} \frac{A_n a_k}{A_{k-1}} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{a_j}{A_{j-1}}\right|} \right\}$$

$$= 0(1) + 0(1) \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{a_n}{A_{n-1}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{a_j}{A_{j-1}}\right|}$$

$$+ 0(1) \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{a_n}{A_{n-1}} \sum_{k=1}^{i} \frac{a_k}{A_{k-1}} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{a_j}{A_{j-1}}\right|} \tag{16}$$

yazabiliriz.

Şimdi λ üzerindeki kabullerimiz altında yeterince büyük her n için

$$\left| 1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{a_{n+1}}{A_n} \right| > 1$$

olduğunu gösterelim. Bunun için, $-\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olmak üzere

$$f : R \rightarrow R$$

$$f(t) = 1 + 2\,(1 + \alpha)\,t + [(1 + \alpha)^2 + \beta^2]\,t^2$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunu gözönüne alalım. f fonksiyonu

$$t_0 = \frac{-(1 + \alpha)}{(1 + \alpha)^2 + \beta^2}$$

noktasında bir minimuma sahiptir. Diğer yandan

$$\left| \lambda - \frac{1}{2 - \gamma} \right| > \frac{1 - \gamma}{2 - \gamma}$$

olması

$$\gamma(\alpha^2 + \beta^2) + 2\,\alpha > \gamma - 2 \qquad (17)$$

olmasına denktir. Buradan

$$\frac{\gamma}{2\,(1 - \gamma)} > \frac{-(1 + \alpha)}{(1 + \alpha)^2 + \beta^2} = t_0$$

olduğundan her $t > \frac{\gamma}{2(1 - \gamma)}$ için f artandır. Ayrıca yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\varepsilon\right)=1+2(1+\alpha)\frac{\gamma}{1-\gamma}+\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right]\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2$$

$$-2\left\{\varepsilon(1+\alpha)+\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right]\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

$$=f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)-2\,\varepsilon\, g(\varepsilon)$$

elde ederiz. f fonksiyonu, $t > \dfrac{\gamma}{2(1-\gamma)}$ için artan olduğundan yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için $g(\varepsilon) > 0$ dır.

Şimdi de $f(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}) > 1$ olduğunu gösterelim. (17) ifadesi

$$\left|\frac{1}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{\lambda(1-\gamma)}\right| > 1 \tag{18}$$

olmasına denktir. Buna göre (18) yardımıyla

$$f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)=1+2(1+\alpha)\frac{\gamma}{1-\gamma}+\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right]\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2$$

$$=\left|1+(1+\alpha+i\beta)\frac{\gamma}{1-\gamma}\right|^2$$

$$=\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\gamma}{1-\gamma}\right|^2=\left|\frac{1}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{\lambda(1-\gamma)}\right|^2>1$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ sayısını

$$f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\varepsilon\right)=f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)-2\,\varepsilon\, g(\varepsilon)=\mu^2>1$$

olacak biçimde seçelim. Bu durumda γ nın tanımı gereğince her $n \geq N$ için

$$\frac{a_{n+1}}{A_n} = \frac{\dfrac{a_{n+1}}{A_{n+1}}}{1 - \dfrac{a_{n+1}}{A_{n+1}}} > \frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. Böylece aynı n ler için

$$\left| 1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{a_{n+1}}{A_n} \right|^2 = f\left(\frac{a_{n+1}}{A_n}\right) > f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon\right) > \mu^2 > 1$$

yani

$$\left| 1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{a_{n+1}}{A_n} \right| > \mu > 1 \qquad (19)$$

elde ederiz.

Diğer yandan yeterince büyük n ler için

$$\frac{a_{n+1}}{A_n} < \frac{\delta}{1-\delta} + 1 = \frac{1}{1-\delta} \qquad (20)$$

gerçeklenir.

Buna göre (16), (19) ve (20) birlikte gözönüne alınırsa, H_1 ve H_2 pozitif sabitler olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} (d_{nk} - d_{n-1,k}) \right| \leq 0(1) + 0(1)\, H_1 \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{(1-\delta)} \frac{1}{\mu^n}$$

$$+ 0(1)\, H_2 \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{(1-\delta)} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(1-\delta)} \frac{1}{\mu^{n-k+1}}$$

$$= 0(1) + 0(1)\left\{ \frac{H_1}{1-\delta} \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{\mu^n} + \frac{H_2}{(1-\delta)^2} \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^{i-1} \mu^k \right\}$$

$$= 0(1) + 0(1)\left\{ \frac{H_1}{1-\delta} 0(1) + \frac{H_2}{(1-\delta)^2} \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{\mu^i - 1}{\mu^n (\mu - 1)} \right\}$$

$$= 0(1) + \frac{0(1)}{1-\delta}\left\{ H_1\, 0(1) + \frac{H_2}{(1-\delta)(\mu-1)} \sum_{n=i+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu^{n-i}} - \frac{1}{\mu^n} \right) \right\} = 0(1)$$

olduğundan

$$\sup_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} (d_{nk} - d_{n-1,k}) \right| < \infty$$

elde ederiz.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 birlikte gözönüne alınırsa aşağıdaki sonuç hemen elde edilir.

SONUÇ 3.1.5: A, $\delta = \lim \dfrac{a_n}{A_n} > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama matrisi ise

$$\sigma(A, bv_0) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2-\delta} \right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta} \right\} \cup G$$

dir.

3.2. Ağırlıklı Ortalama Operatörünün bv Üzerindeki Spektrumu

Bu kısımda Ağırlıklı Ortalama operatörünün

$$\|x\| = \left|\lim x\right| + \sum_k \left|x_k - x_{k+1}\right|$$

normuyla birlikte bir Banach uzayı olan bv üzerindeki sınırlılığını ve spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 3.2.1: A herhangi bir ağırlıklı ortalama matrisi ise $A \in B(bv)$ dir.

İspat: Herhangi bir A, ağırlıklı ortalama matrisi için $e = (1, 1, ...)$ olmak üzere $Ae = e \in bv$ olduğundan Teorem 2.1.8 gereğince ispatı tamamlamak için (3) ifadesinin gerçeklendiğini göstermek yeterlidir. Buna göre (4) yardımıyla (6) dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| = 1 + A_i\left(\frac{1}{A_i} - \lim_{r\to\infty} \frac{1}{A_r}\right)$$

$$= 2 - A_i \lim_{r\to\infty} \frac{1}{A_r} \tag{21}$$

yazabiliriz. Eğer $\lim_{r\to\infty} A_r = \infty$ ise (21) ifadesinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| = 2 \tag{22}$$

elde ederiz. Eğer $\lim_{r\to\infty} A_r = \alpha < \infty$ ise yine (21) ifadesinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| = 2 - \frac{A_i}{\alpha} \leq 2 - \frac{a_0}{\alpha} < 2 \tag{23}$$

elde edilir. Buradan (22) ve (23) birlikte gözönüne alınırsa

$$\sup_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| \leq 2$$

elde edilir ki, böylece ispat tamamlanmış olur.

LEMMA 3.2.2.: A, bir ağırlıklı ortalama matrisi olsun. Bu durumda $A^{-1} \in B(bv)$ olması için gerek ve yeter şart $0 \notin G$ olmasıdır.

İspat: (7) den,

$$A^{-1}c = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} \right) = (d_{n,n-1} + d_{nn})$$

$$= \left(1 - \frac{A_n}{a_n} + \frac{A_n}{a_n} \right) = (1) = c \in bv$$

olduğundan ispat Lemma 3.1.2 den açıktır.

TEOREM 3.2.3 A, $\delta > 0$ olacak biçimde bir ağırlıklı ortalama matrisi ise

$$\left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2-\delta} \right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta} \right\} \cup G \subseteq \sigma(A, bv)$$

dir.

İspat: $\lambda \in G$ ise $G \subset \sigma(A, bv)$ olduğundan $\lambda \in \sigma(A, bv)$ dir. Eğer λ, $\left| \lambda - \frac{1-\delta}{2-\delta} \right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}$ eşitliğini gerçekleyen bir kompleks sayı ise (9) dan Teorem 3.1.3'ün ispatına benzer şekilde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| d_{n1} - d_{n+1,1} \right| \geq 0(1) + 0(1) \sum_{n \geq N} \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}$$

bulunur. $\delta = \lim \sup_n \frac{a_n}{A_n} \neq 0$ olduğundan $\sum_{n \geq N} \frac{a_n}{A_n}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_n |d_{n1} - d_{n+1,1}| = \infty$ elde edilir ki, bu da $(d_{n1}) \notin bv$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

TEOREM 3.2.4: A regüler bir ağırlıklı ortalama matrisi ise

$$\left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{1}{2-\delta}\right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}\right\} \cup G \subseteq \sigma(A, bv)$$

dir.

İspat: Teorem 3.1.3'den elde edilir.

TEOREM 3.2.5: A, $\gamma > 0$ ve $\lim \lim_{r \to \infty} A_n = \eta$ ise olacak biçimde bir ağırlıklı ortalama matrisi ise

$$\sigma(A, bv) \subseteq \left\{\lambda : \left|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}\right| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right\} \cup G$$

dir.

İspat: $\left|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}\right| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ ve $\lambda \notin G$ olacak şekildeki λ kompleks sayıları $(\lambda I - A)^{-1} \in B(bv)$ olduğunu göstererek ispatı yapacağız. Bunun için (14) den,

$$(\lambda I - A)^{-1} e = \frac{1}{\lambda - 1} \quad e \in bv$$

olduğundan, (d_{nk}), (8) ile verilmek üzere

$$\sup_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} (d_{nk} - d_{n-1,k}) \right| < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece, $d_{-1,0} = 0$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{i}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right| = \sum_{n=0}^{i}\left|\sum_{k=0}^{n}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right| + \sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{i}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right|$$

$$= |d_{00}| + \sum_{n=1}^{i}\left|\sum_{k=0}^{n} d_{nk} - \sum_{k=0}^{n-1} d_{n-1,k}\right| + \sum_{n=i+1}^{\infty}\left|d_{n0}-d_{n-1,0}\right|$$

$$+ \sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{i}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right|$$

$$=0(1)+\sum_{n=1}^{i}\left|\frac{1}{\lambda-1}-\frac{1}{\lambda-1}\right| + \frac{a_0}{|\lambda|^2}\sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\frac{1}{A_n}\prod_{j=0}^{n}\frac{1}{\left(1-\frac{a_j}{\lambda A_j}\right)} - \frac{1}{A_{n-1}}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1-\frac{a_j}{A_j\lambda}\right)}\right|$$

$$+\frac{1}{|\lambda|^2}\sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{i}\frac{a_k}{A_n}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\left(1-\frac{a_j}{\lambda A_j}\right)} - \frac{a_k}{A_{n-1}}\prod_{j=k}^{n-1}\frac{1}{\left(1-\frac{a_j}{\lambda A_j}\right)}\right|$$

$$=0(1)+\frac{a_0}{|\lambda|^2}\sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda}-1\right|\frac{a_n}{A_nA_{n-1}}\prod_{j=0}^{n}\frac{1}{\left|1-\frac{a_j}{\lambda A_j}\right|}$$

$$+\frac{1}{|\lambda|^2}\sum_{n=i+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda}-1\right|\frac{a_n}{A_nA_{n-1}}\sum_{k=1}^{i}a_k\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\left|1-\frac{a_j}{\lambda A_j}\right|}$$

$$=0(1)+\frac{a_0|1-\lambda|}{|\lambda|^3\left|1-\frac{a_0}{\lambda A_0}\right|}\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{a_n}{A_nA_{n-1}}\cdot\frac{A_n}{A_1}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{a_j}{A_{j-1}}\right|}$$

$$+\frac{|1-\lambda|}{|\lambda|^{3}}\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{a_n}{A_n A_{n-1}}\sum_{k=1}^{i}\frac{a_k A_n}{A_{k-1}}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{a_j}{A_{j-1}}\right|}$$

$$=0(1)+\frac{0(1)}{A_1}\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{a_n}{A_{n-1}}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{a_j}{A_{j-1}}\right|}$$

$$+\frac{0(1)}{A_0}\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{a_n}{A_{n-1}}\sum_{k=1}^{i}a_k\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{a_j}{A_{j-1}}\right|} \qquad (24)$$

elde ederiz. Diğer yandan,

$$\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{a_{n+1}}{A_n}\right|>1$$

olması için gerek ve yeter şart $-\frac{1}{\lambda}=\alpha+i\beta$ olmak üzere

$$\left[1+(1+\alpha)\frac{a_{n+1}}{A_n}\right]^2+\left(\beta\frac{a_{n+1}}{A_n}\right)^2>1$$

yani

$$2(1+\alpha)\frac{a_{n+1}}{A_n}+\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right]\left(\frac{a_{n+1}}{A_n}\right)^2>0 \qquad (25)$$

olmasıdır.$\gamma>0$ olduğundan yeterince büyük n'ler için $a_{n+1}>0$ dır. Dolayısıyla yeterince büyük n'ler için (25) ifadesi

$$2(1+\alpha)+\left|(1+\alpha)^2+\beta^2\right|\frac{a_{n+1}}{A_n}>0$$

olmasına denktir. Bu ifade ise yeterince büyük n'ler için

$$2(1+\alpha)+\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right]\frac{\gamma}{1-\gamma}>0$$

olmasına yani;

$$\left|\lambda-\frac{1}{2-\gamma}\right|>\frac{1-\gamma}{2-\gamma}$$

olmasına denktir. Bu ise λ üzerindeki kabulümüzdür. O halde (24) den

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{i}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right|=0(1)+0(1)\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{a_n}{A_{n-1}}$$

$$+0(1)\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{a_n}{A_{n-1}}\sum_{k=1}^{i}a_k$$

$$=0(1)+\frac{0(1)}{A_i}\sum_{n=i+1}^{\infty}a_n+0(1)\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{a_n}{A_{n-1}}(A_i-a_0)$$

$$=0(1)+0(1)\sum_{n=i+1}^{\infty}a_n \tag{26}$$

olup $\lim_{n\to\infty}A_n=\eta$ olduğundan, (26) ifadesinden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{i}(d_{nk}-d_{n-1,k})\right|=0(1)+0(1)\eta$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

TEOREM 3.2.6: A regüler bir ağırlıklı ortalama matrisi ve $\gamma>0$ ise

$$\sigma(A,bv)\subseteq\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{1}{2-\gamma}\right|\le\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right\}\cup G$$

dir.

İspat: İspat Teorem 3.1.4'ten açıktır.

SONUÇ 3.2.7: A ağırlıklı ortalama matrisi için $\delta = \lim\limits_{n} \dfrac{a_n}{A_n} > 0$ ve $\lim A_n = \eta$ gerçeklenirse,

$$\sigma(A, bv) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2-\delta} \right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta} \right\} \cup G$$

dir.

İspat: Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.5'den elde edilir.

SONUÇ 3.2.8: A, $\delta = \lim \dfrac{a_n}{A_n} > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama matrisi ise

$$\sigma(A, bv) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{1}{2-\delta} \right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta} \right\} \cup G$$

dir.

İspat: Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.6'dan elde edilir.

BÖLÜM 4

p-CESÀRO OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU VE İNCE SPEKTRUMU

Bu bölümde, (5) ile tanımlanan p-Cesàro operatörünün c_0, c, ℓ_r, $(1 \leq r < \infty)$, bv_0 ve bv uzayları üzerindeki spektrumunu ve ince spektrmunu inceleyeceğiz. Ayrıca spektrumun toplanabilme teorisine bir uygulamasını vereceğiz.

p-Cesàro operatörünün p = 1 özel haline karşılık gelen Cesàro operatörünün c_0 üzerindeki spektrumu 1985 yılında Reade [20], c üzerindeki ince spektrumu 1975 yılında Wegner[26], ℓ_r, $(1 < r < \infty)$, üzerindeki spektrumu 1972 yılında Leibowitz [12], ℓ_2 üzerindeki spektrumu 1965 yılında Brown, Halmos ve Sheilds [1] ve c, bv_0 ve bv üzerindeki spektrumu 1986 ve 1990 yıllarında Okutoyi [15], [16] tarafından incelenmiştir. Ayrıca Rhaly p-Cesàro operatörünün ℓ_2 uzayı üzerindeki spektrumunu 1989 yılında incelemiş ve p > 1 için

$$\pi(C_p,\ell_2) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots \right\}$$

ve

$$\sigma(C_p,\ell_2) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots \right\} \cup \{0\}$$

sonucunu elde etmiştir [21].

Biz de bu bölümde, C_p dönüşümünün c_0, c, ℓ_r, $(1 \leq r < \infty)$, bv_0 ve bv uzayları üzerindeki spektrumunun, Rhaly'nin ℓ_2 üzerindeki sonucuyla çakıştığını göstereceğiz.

p < 1 için C_p, dönüşümü, c_0, c, ℓ_r, $(1 \leq r < \infty)$, bv_0 ve bv uzayları üzerinde sınırlı olmadığından bu çalışma boyunca p > 1 halini gözönüne alacağız.

(5) ile tanımlanan p-Cesàro operatörüne karşılık gelen $C_p = (c_{nk})$ matrisi aşikâr olarak

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)^p} & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \tag{27}$$

ile verilir. c_0^*, ℓ_r^*, $(1 < r < \infty)$ ve bv_0^* uzaylarına sırasıyla izometrik olarak izomorf olan ℓ_1, ℓ_s, $(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1)$, ve bs üzerinde gözönüne alınan C_p^* adjoint operatörüne karşılık gelen matris (27) ile verilen $C_p = (c_{nk})$ matrisinin transpozudur, yani,

$$c_{nk}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{(k+1)^p} & , \quad 0 \le n \le k \\ 0 & , \quad k < n \end{cases} \tag{28}$$

olmak üzere $C_p^* = (c_{nk}^*)$ dır ([25] Taylor 1980, sh. 221-223). c* uzayına izometrik olarak izomorf olan ℓ_1 üzerinde gözönüne alınan C_p^* adjoint operatörüne karşılık gelen matris

$$c_{nk}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{k^p} & , \quad 1 \le n \le k \\ 0 & , \quad \text{aksi halde} \end{cases} \tag{29}$$

olmak üzere $C_p^* = (c_{nk}^*)$ ile ([15] Okutoyi 1986, sh. 50) ve bv^* uzayına izometrik olarak izomorf olan $\mathbb{C} \oplus bs$ uzayı üzerinde gözönüne alınan C_p^* adjoint operatörüne karşılık gelen matris ise

$$c^*_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{k^{p-1}} & , \quad n=0 \ , \ k \geq 1 \\ \dfrac{1}{k^{p}} & , \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad k < n \end{cases} \tag{30}$$

olmak üzere $C_p^* = (c_{nk}^*)$ ile verilir ([15] Okutoyi 1986, sh. 63)

$X \neq \{\theta\}$ bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olmak üzere $\pi(T, X) \subseteq \sigma(T, X)$ ve $\sigma(T^*, X^*) = \sigma(T, X)$ olması nedeniyle her kısımda C_p operatörünün spektrumunu incelerken, spektrum hakkında önemli bir fikir vermeleri nedeniyle önce, C_p 'nin nokta spektrumunu ve C_p adjoint operatörünün nokta spektrumunu hesaplayacağız.

4.1. p-Cesàro Opetarönünün c_0 Üzerindeki Spektrumu ve İnce Spektrumu

Bu kısımda p-Cesàro Operatörünü

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

normuyla birlikte bir Banach uzayı olan c_0 üzerinde gözönüne alıp sınırlılığını, spektrumunu ve ince spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 4.1.1: $C_p \in B(c_0)$ ve $\|C_p\| = 1$ dir.

İspat: Her k için (27) den

$$\lim_{n\to\infty} c_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = 0 \tag{31}$$

ve diğer yandan

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{1}{(n+1)^{p-1}}$$

olduğundan

$$\sup_n \sum_k |c_{nk}| = \sup_n \frac{1}{(n+1)^{p-1}} = 1 \tag{32}$$

bulunur. O halde Teorem 2.1.4 gereğince $C_p \in B(c_0)$ ve $\|C_p\| = 1$ dir.

TEOREM 4.1.2: $C_p \in B(c_0)$ kompakttır.

İspat: Her sabit m için

$$C_p^m x = \left(x_0, \frac{x_0 + x_1}{2^p}, \ldots, \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_m}{(m+1)^p}, 0, 0, \ldots \right) \tag{33}$$

şeklinde tanımlanan C_p^m operatörü açık olarak $B(c_0^m)$ uzayının elemanıdır.

Yine sabit bir m için $\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$ sınıfı $R(C_p^m)$ için bir baz olduğundan, $R(C_p^m)$ 'nin boyutu sonludur. O halde Teorem 1.1.6 gereğince her m için C_p^m, c_0 üzerinde kompakttır.

Diğer yandan her $x \in c_0$ için,

$$\left\| \left(C_p - C_p^m \right) x \right\| = \left\| \left(0, \ldots, 0, \sum_{k=0}^{m+1} \frac{x_k}{(m+2)^p}, \sum_{k=0}^{m+2} \frac{x_k}{(m+3)^p}, \ldots \right) \right\|$$

$$= \sup_{n \geq m} \left| \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x_k}{(n+2)^p} \right| \leq \sup_{n \geq m} \frac{1}{(n+2)^p} \sum_{k=0}^{n+1} |x_k|$$

$$\leq \operatorname{maks}_{0 \leq k \leq n+1} |x_k| \sup_{n \geq m} \frac{1}{(n+2)^{p-1}}$$

$$\leq \|x\| \cdot \frac{1}{(m+2)^{p-1}}$$

olup, her $x \in c_0$ için,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \left(C_p - C_p^m\right) x \right\| = 0$$

elde ederiz. Demek ki (C_p^m) kompakt operatörler dizisi, c_0 üzerinde C_p 'ye düzgün yakınsaktır. O halde, Teorem 1.1.7 gereğince C_p kompakttır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi ilerideki teoremlerimizin ispatlarında kolaylık sağlayacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

LEMMA 4.1.3: $\lambda \neq 0, 1, \dfrac{1}{2^p}, \ldots, (p > 1)$, olacak şekildeki her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$M \leq \prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right| \leq H$$

eşitsizliğini gerçekleyen pozitif M ve H sabitleri vardır.

İspat: $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \neq 0, 1, \dfrac{1}{2^p}, \dfrac{1}{3^p}, \ldots$ olsun. $\forall\, u \in \mathbb{R}$ için $1 + u \leq e^u$ eşitsizliğini gözönüne alarak $-\dfrac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olmak üzere

$$\prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{j^p \lambda} \right| = \prod_{j=1}^{n} \left| \left(1 + \frac{\alpha}{j^p}\right) + i\,\frac{\beta}{j^p} \right|$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{2\alpha}{j^p} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{j^{2p}} \right)^{1/2}$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n} \left\{ \exp\left(\frac{2\alpha}{j^p} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{j^{2p}} \right) \right\}^{1/2}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left\{ \exp\left(\frac{\alpha}{j^{p}} + \frac{\alpha^{2} + \beta^{2}}{2 j^{2p}} \right) \right\}$$

$$= \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha}{j^{p}} + \sum_{j=1}^{n} 0\left(\frac{1}{j^{2p}} \right) \right\} \quad , \quad p > 1$$

$$= \exp\left\{ 0(1) + 0(1) \right\} = 0(1)$$

ve benzer biçimde

$$\prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{j^{p} \lambda} \right|^{-1} = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{2\alpha}{j^{p}} + \frac{\alpha^{2} + \beta^{2}}{j^{2p}} \right)^{-1/2}$$

$$\leq \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{-\alpha}{j^{p}} + \sum_{j=1}^{n} 0\left(\frac{1}{j^{2p}} \right) \right\}$$

$$= \exp\left\{ 0(1) + 0(1) \right\} = 0(1)$$

bulunur ki, böylece ispat tamamlanmış olur.

UYARI: Reade [20], bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için Re $(\frac{1}{\lambda}) = \alpha$ olmak üzere

$$\prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j} \right| \asymp \frac{1}{n^{\alpha}}$$

olduğunu göstermiştir.

TEOREM 4..4: $\pi\left(C_p, c_0\right) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^{p}} : m = 0, 1, \ldots \right\}$ dir.

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C_p\, x = \lambda x$ olsun. Bu durumda (27) den $x_0 = \lambda x_0$ ve $n \geq 1$ için

$$\frac{1}{(n+1)^p}\left\{x_0 + x_1 + \ldots + x_n\right\} = \lambda x_n \tag{35}$$

denklemleri sağlanır. Buradan eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p}$ ve $n \geq m+1$ için (35) den

$$x_n = \prod_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\lambda j^p}{\lambda (j+1)^p - 1}\right) x_m \tag{36}$$

elde edilir. Şimdi $n \geq m+1$ için x_n (36) ile verilmek üzere $x = (x_n) \in c_0$ olduğunu gösterelim. Ancak bu sonucu $x \in \ell_2$ yani, $\sum_n |x_n|^2 < \infty$ olduğunu göstererek elde edeceğiz. Buna göre (36) dan $n \geq m+1$ için

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|^2 = \left|\frac{\lambda (n+1)^p}{\lambda (n+2)^p - 1}\right|^2 = \frac{|\lambda|^2 (n+1)^{2p}}{|\lambda|^2 (n+2)^{2p} - 2\mathrm{Re}(\lambda)(n+2)^p + 1}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|^2 = 1$$

elde edilir ki, bölüm kriteri sonuç vermez. Diğer yandan

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|^2}{|x_{n+1}|^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{\left|\lambda (n+2)^p - 1\right|^2}{\left|\lambda (n+1)^p\right|^2} - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\frac{|\lambda|^2\left\{(n+2)^{2p} - (n+1)^{2p}\right\} - 2\mathrm{Re}(\lambda)(n+2)^p + 1}{|\lambda|^2 (n+1)^{2p}}$$

$$= 2p > 1$$

olduğundan Raabe kriteri([17] Olmsted 1961, sh. 396, [10] Knopp 1971, sh. 285) gereğince $\sum_n |x_n|^2 < \infty$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

TEOREM 4.1.5: $\pi(C_p^*, \ell_1) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ dır.

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C_p^* x = \lambda x$ olsun. Bu durumda (28) den $n \geq 0$ için

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{(k+1)^p} = \lambda x_n \tag{37}$$

denklemleri gerçeklenir. Eğer $\lambda = 0$ ise (37) den $x = \theta$ elde edilir ki, bu da $0 \notin \pi(C_p^*, \ell_1)$ olduğunu gösterir. Ayrıca $\lambda \neq 0$ olmak üzere (37) den $n \geq 0$ için

$$x_n = \lambda(n+1)^p [x_n - x_{n+1}]$$

veya

$$x_{n+1} = \left[1 - \frac{1}{\lambda(n+1)^p}\right] x_n$$

ve dolayısıyla $n \geq 1$ için

$$x_n = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^p \lambda}\right) x_0 \tag{38}$$

elde edilir. Eğer $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p}$, $m = 0, 1, \ldots$, ise (38) den $n \geq m+1$ için $x_n = 0$ olduğundan aşikâr olarak $x = (x_n) \in \ell_1$ dir.

Eğer $\lambda \neq \dfrac{1}{(m+1)^p}$, $m = 0, 1, \ldots$, ise (38) den

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 1 - \frac{1}{\lambda(n+1)^p} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\lambda(n+1)^p - 1}{\lambda(n+1)^p} \right| = 1$$

bulunur ki, bölüm kriteri $\sum_n |x_n|$ serisi için sonuç vermez. Diğer yandan

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right| - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right|^2 - 1\right)}{\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right| + 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\left|\frac{\lambda(n+1)^p}{\lambda(n+1)^p - 1}\right|^2 - 1\right)}{\left|\frac{\lambda(n+1)^p}{\lambda(n+1)^p - 1}\right| + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{2\,\mathrm{Re}(\lambda)(n+1)^p - 1}{|\lambda|^2(n+1)^{2p} - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)(n+1)^p + 1}\right\} = 0$$

olduğundan Raabe kriteri gereğince $\sum_n |x_n|$ serisi ıraksaktır. Bir başka deyimle x_n $n \geq m$ için (38) ile verilen (x_n) dizisi ℓ_1 uzayına ait değildir.

Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 gereğince

$$\left\{\frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots\right\} \subseteq \sigma(C_p, c_0)$$

ve c_0 'ın bir Banach uzayı olması nedeniyle $\sigma(C_p, c_0)$ kapalı olacağından

$$\left\{\frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots\right\} \cup \{0\} \subseteq \sigma(C_p, c_0)$$

dır. Halbuki aşağıdaki teoremde göreceğimiz gibi

$$\sigma(C_p, c_0) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \dots \right\} \cup \{0\}$$

dır.

TEOREM 4.1.6: $\sigma(C_p, c_0) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \dots \right\} \cup \{0\}$ dır.

Teoremin ispatını, iki değişik yöntemle yapacağız.

İspat: Teoremin ifadesinden hemen önce verilenlerin ışığı altında ispatı tamamlamak için $\lambda \neq 0$, 1 , $\frac{1}{2^p}$, $\frac{1}{3^p}$, ... olmak üzere $\lambda \in \rho(C_p, c_0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre λ üzerindeki varsayım gereğince, eğer

$$(\lambda I - C_p)\, x = y$$

ise (5) den $n \geq 0$ için

$$y_n = \frac{1}{(n+1)^p} \sum_{k=0}^{n} x_k$$

denklemleri gerçeklenir. Buradan $x = (x_n)$ dizisinin bileşenlerini, $y = (y_n)$ dizisinin bileşenleri cinsinden yazarsak

$$x_0 = \frac{1}{\lambda - 1} y_0$$

ve $n \geq 1$ için

$$x_n = \frac{(n+1)^p}{\lambda (n+1)^p - 1} y_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^2 (n+1)^p} \prod_{j=k+1}^{n+1} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\lambda j^2}\right)} y_k$$

elde ederiz. Buna göre $x = (\lambda I - C_p)^{-1} y = Dy$ olacak biçimdeki $D = (d_{nk})$ matrisi $d_{-1,0} = 0$ olmak üzere,

$$d_{nk} = \begin{cases} \dfrac{(n+1)^p}{\lambda (n+1)^p - 1} & , \quad n = k \\[2ex] \dfrac{1}{\lambda^2 (n+1)^p} \displaystyle\prod_{j=k+1}^{n+1} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{\lambda j^p}\right)} & , \quad 0 \leq k < n \\[2ex] 0 & , \quad n < k \end{cases} \tag{39}$$

ile verilir. Lemma 4.1.3 gözönüne alınarak,

(i) Sabit her k için (39) dan

$$\lim_{n\to\infty} |d_{nk}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda|^2 (n+1)^p} \prod_{j=k+1}^{n+1} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right|^{-1}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right|}{|\lambda|^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^p} \prod_{j=1}^{n+1} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right|^{-1}$$

$$= 0(1) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = 0$$

yani her k için $\lim\limits_{n} d_{nk} = 0$ ve ayrıca,

(ii) $$\sum_k |d_{nk}| = |d_{nn}| + \sum_{k=0}^{n-1} |d_{nk}|$$

$$= \frac{(n+1)^p}{\left|\lambda(n+1)^p - 1\right|} + \frac{1}{(n+1)^p|\lambda|^2} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=k+1}^{n+1} \left|1 - \frac{1}{\lambda_j^{\,p}}\right|^{-1}$$

$$= 0(1) + \frac{1}{|\lambda|^2(n+1)^p} \prod_{j=1}^{n+1} \left|1 - \frac{1}{\lambda_j^{\,p}}\right|^{-1} \left\{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{k} \left|1 - \frac{1}{\lambda_j^{\,p}}\right|\right\}$$

$$= 0(1) + \frac{0(1)}{|\lambda|^2(n+1)^p}\left\{1 + (n-1)\,0(1)\right\}$$

$$\leq 0(1) + \frac{0(1)}{|\lambda|^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^{p-1}}$$

olup $p > 1$ olduğundan

$$\sup_n \sum_k |d_{nk}| < \infty$$

elde edilir.

Buradan (i) ve (ii) birlikte gözönüne alınırsa Teorem 2.1.4 den $D \in B(c_0)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremin diğer bir ispatını kompakt operatörlerin spektral özellikleri yardımıyla vereceğiz.

c_0'ın bir Banach uzayı olması nedeniyle $\sigma(C_p, c_0)$ kapalı olduğunda Teorem 4.1.4 den

$$\left\{\frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots\right\} \cup \{0\} \subseteq \sigma(C_p, c_0)$$

elde ederiz.

Diğer yandan Teorem 1.2.9 gereğince her $m \geq 0$ için $\dfrac{1}{(m+1)^p} \in \pi(C_p,c_0)$ olacağından ispat tamamlanır.

Şimdi Teorem 4.1.6 ile belirlenen $\sigma(C_p,c_0)$ cümlesini detaylıca inceleyelim, yani ince spektrumu inceleyelim.

TEOREM 4.1.7: $0 \in II_2\, \sigma(C_p,c_0)$ dır.

İspat: Teorem 4.1.4'den $0 \notin \pi(C_p,c_0)$ olduğundan C_p^{-1} invers dönüşümü mevcut yani $C_p \in 1 \cup 2$ dir. $C_p \in 2$ olduğunu göstermek için Teorem 1.1.3 gereğince C_p^* adjoint operatörünün örten olmadığını göstermek yeterlidir. Buna göre eğer, $C_p^*\, x = y$ ise (29) dan her $n \geq 0$ için

$$y_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{(k+1)^p}$$

denklemleri gerçeklenir. Böylece,

$$x_0 = y_0 - y_1$$
$$x_1 = 2^p\,(y_1 - y_2)$$
$$x_2 = 3^p\,(y_2 - y_3)$$
$$\vdots$$
$$x_n = (n+1)^p\,(y_n - y_{n+1})$$

elde edilir ki, bu da $(C_p^*)^{-1} = (b_{nk})$ matrisinin

$$b_{nk} = \begin{cases} n+1 & , \quad k = n \\ -(n+1) & , \quad k = n+1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{40}$$

ile verildiğini gösterir. Şimdi $n \geq 0$ için

$$y_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} \tag{41}$$

şeklinde tanımlanan $y = (y_n)$ dizisini gözönüne alalım. Açık olarak $y \in \ell_1$ 'dir. Ancak (40) dan

$$\begin{aligned} x_n &= b_{nn} y_n + b_{n,n+1} y_{n+1} \\ &= (n+1)^p \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} - (n+1)^p \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^p} \\ &= (-1)^n \left\{ 1 + \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^p \right\} \end{aligned} \tag{42}$$

olup

$$\lim_{n \to \infty} |x_n| = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^p \right) = 2 \neq 0$$

olduğundan x_n, (42) ile belirlenmek üzere, $x = (x_n) \notin \ell_1$ yani C_p örten değildir. Bu ise $C_p \in 2$ olduğunu gösterir.

Şimdide $C_p \in II$ yani $R(C_p) \neq c_0$ ancak $\overline{R(C_p)} = c_0$ olduğunu gösterelim. $\overline{R(C_p)} = c_0$ olduğunu göstermek için Teorem 1.1.4 gereğince C_p^* adjoint operatörünün bire-bir olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise Teorem 4.1.5 gereğince $0 \notin \pi(C_p^*, \ell_1)$ olduğundan aşikârdır. O halde $\overline{R(C_p)} = c_0$ yani $C_p \in I \cup II$ dir. Bununla birlikte $C_p x = y$ ise (5) den $x_0 = y_0$ ve $n \geq 1$ için

$$x_n = (n+1)^p y_n - n^p y_{n-1} \tag{43}$$

elde ederiz. y_n, (41) ile tanımlanmak üzere $y = (y_n) \in c_0$ ancak (43) den her $n \geq 0$ için

$$x_n = (n+1)^p \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} - n^p \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

$$= (-1)^n - (-1)^{n-1} = (-1)^n \, 2$$

olup açık olarak $x = (x_n) \notin c_0$ dır. O halde $R(C_p) \neq c_0$ yani $C_p \in II$ 'dir.

Yukarıdaki sonuçları birlikte gözönüne alırsak $C_p \in II_2$ ve dolayısıyla $0 \in II_2\, \sigma(C_p, c_0)$ elde ederiz.

TEOREM 4.1.8: $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots,$ ise $\lambda \in III_3\, \sigma(C_p, c_0)$ 'dır.

İspat: $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots,$ için Teorem 4.1.4 gereğince $\lambda \in \pi(C_p, c_0)$ olduğundan $(\lambda I - C_p)^{-1}$ mevcut değildir. Dolayısıyla $\lambda I - C_p \in 3$ dir.

Şimdi $\lambda I - C_p \in III$ yani $R(\lambda I - C_p) \neq c_0$ olduğunu gösterelim. Teorem 1.1.4 gereğince, $\lambda I - C_p^*$ operatörünün bire-bir olmadığını göstermek yeterlidir. Halbuki Teorem 4.1.5'den $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots,$ için $\lambda \in \pi(C_p^*, \ell_1)$ olduğundan $\lambda I - C_p^*$ bire-bir değildir.

Böylece $\lambda I - C_p \in III_3$, yani $\lambda \in III_3\, \sigma(C_p, c_0)$ elde edilmiş olur.

4.2. p-Cesàro Operatörünün c Üzerindeki Spektrumu ve İnce Spektrumu

Bu kısımda p-Cesàro operatörünün

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

normuyla birlikte bir Banach uzayı olan c üzerindeki sınırlılığını, spektrumunu ve ince spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 4.2.1: $C_p \in B(c)$ ve $\|C_p\| = 1$ 'dir.

İspat: Teorem 4.1.1 in ispatındaki (31) ve (32) ifadeleri birlikte gözönüne alınırsa Teorem 2.1.5 den ispat elde edilir.

TEOREM 4.2.2: $C_p \in B(c)$ kompakttır.

İspat: Teorem 4.1.2 'nin ispatında (33) ile tanımlanan (C_p^m) kompakt operatörler dizisi gözönüne alınarak, benzer işlemlerle sonuç elde edilir.

TEOREM 4.2.3: $\pi(C_p, c) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ dır.

İspat: Teorem 4.1.4'ün ispatındaki benzeri işlemler tekrarlanırsa sonuç elde edilir.

TEOREM 4.2.4: $\pi(C_p^*, \ell_1) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C_p^* x = \lambda x$ ise (29) dan

$$0 = \lambda x_0$$

ve $n \geq 1$ için

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{k^p} = \lambda x_n \tag{44}$$

denklemleri gerçeklenir. Buradan $x_0 \neq 0$ olmak üzere $x^0 = (x_0, 0, 0, \ldots) \in \ell_1$ ve $C_p^* x^0 = \theta = 0$. x^0 olduğundan $\lambda = 0 \in \pi(C_p^*, \ell_1)$ dir. Diğer yandan eğer $\lambda \neq 0$ ise $x_0 = 0$ ve (44) den $n \geq 1$ için

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\lambda n^p}\right) x_n$$

ve buradan $n \geq 2$ için

$$x_n=\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{\lambda j^p}\right)x_1 \tag{45}$$

elde edilir. Eğer $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p}$, m = 0, 1, ... ise (45) den $n \geq m+2$ için $x_n = 0$ olacağından aşikâr olarak $x = (x_n) \in \ell_1$ olacaktır. Eğer $\lambda \neq \dfrac{1}{(m+1)^p}$ ise (45) ve Lemma 4.1.3 den $x_1 \neq 0$ için

$$\sum_n |x_n| = |x_1| + \sum_{n=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{n-1}\left|1-\frac{1}{\lambda j^p}\right||x_1|$$

$$=|x_1|\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} 0(1)\right)=\infty$$

yani $x = (x_n) \notin \ell_1$ elde edilir. Eğer $x_1 = 0$ ise (45) den $x = \theta$ olacağından ispat tamamlanmış olur.

c'nin bir Banach uzayı olması nedeniyle $\sigma(C_p,c)$ kapalı olacağından Teorem 4.2.3 den

$$\left\{\frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \dots\right\} \cup \{0\} \subseteq \sigma(C_p, c)$$

dır. Ancak aşağıdaki teoremde de görüleceği gibi yukarıdaki ifadede eşitlik vardır.

TEOREM 4.2.5: $\sigma(C_p, c) = \left\{\dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \dots\right\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: Teoremin ifadesinden hemen önce belirttiklerimizin ışığında ispatı tamamlamak için $\lambda \neq 0, 1, \dfrac{1}{2^p}, \dots,$ olmak üzere $\lambda \in \rho(C_p, c)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için ise Teorem 4.1.6 nın ispatında (39) ile verilen $D = (d_{nk})$ matrisi için $D \in B(c)$ olduğunu göstermeliyiz. Bu ise, Önerme 2.1.6 ve Teorem 4.1.6 nın ispatındaki (ii) ifadesinden elde edilir.

UYARI: Kompakt operatörlerin spektral özellikleri kullanılarak, Teorem 4.1.6'ya ait ispatdaki yöntemlerle, yukarıdaki teoremin ikinci bir ispatı da elde edilir.

ÖNERME 4.2.6: $A \in B(c)$ ise $\sigma(A, c) = \sigma(A, \ell_\infty)$ dır ([3] Cartlidge 1978).

SONUÇ 4.2.7: $\sigma(C_p, \ell_\infty) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \dots \right\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: Önerme 4.2.6 ve Teorem 4.2.5 den sonuç elde edilir.

Şimdi de c üzerinde tanımlı C_p operatörünün ince spektrumunu inceleyelim.

TEOREM 4.2.8: $0 \in III_2\, \sigma(C_p, c)$ dir.

İspat: Teorem 4.2.3 gereğince $0 \notin \pi(C_p, c)$ olduğundan C_p^{-1} invers dönüşümü mevcut yani $C_p \in 1 \cup 2$ dir.

Diğer yandan $C_p^* \, x = y$ olacak biçimdeki her $y = (y_n)$ dizisi için (29) dan $y_0 = 0$ olacağından $e_0 = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_1$ ancak $e_0 \notin R(C_p^*)$ yani C_p^* adjoint operatörü örten değildir. O halde Teorem 1.1.3 gereğince C_p^{-1} sınırlı değildir, dolayısıyla $C_p \in 2$ dir.

Ayrıca Teorem 4.2.4'den $0 \in \pi(C_p^*, \ell_1)$ olduğundan C_p^* bire-bir değildir. O halde Teorem 1.1.4 gereğince $\overline{R(C_p)} \neq c_0$ dır. Böylece $C_p \in III$ elde ederiz.

Eğer yukarıdaki sonuçları birleştirirsek $C_p \in III_2$ yani $0 \in III_2\, \sigma(C_p, c)$ buluruz. Böylece ispat tamamlanır.

TEOREM 4.2.9: $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \dots$ ise $\lambda \in III_3\, \sigma(C_p, c)$ 'dir.

İspat: Teorem 4.18 in ispatındaki benzeri işlemler tekrarlanarak sonuç elde edilir.

4.3. Spektrum ve Toplanabilme Teorisi İlişkisi

Bu bölümde C_p, p-Cesàro operatörü için bir Mercerian teoremi vereceğiz. Mercerian teoremleri, verilen bir T dönüşümü için $c_T = c$ olması ile ilgilidir. Spektrum kavramından yararlanarak bu kısımda $T := \lambda I + (1 - \lambda) C_p$ olmak üzere $c_T = c$ olacak biçimdeki λ kompleks sayılarını belirleyeceğiz.

TEOREM 4.3.1: $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq \dfrac{1}{1 - (m+1)^p}$, m = 1, 2, ... olacak biçimdeki λ kompleks sayıları için $T := \lambda I + (1 - \lambda) C_p$ olmak üzere $c_T = c$ dir.

İspat: λ, teoremin hipotezlerini gerçekleyen herhangi bir kompleks sayı olsun. Buna göre,

$$\lambda I + (1 - \lambda) C_p = (\lambda - 1)\left[\frac{\lambda}{\lambda - 1} I - C_p\right]$$

olup, λ üzerindeki hipotezler altında

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} \neq 0 , \frac{1}{(m + 1)^p} \quad ; m = 0 , 1 , ...$$

dir. O halde Teorem 4.2.5'ten $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \in \rho(C_p, c)$ dir. Dolayısıyla Önerme 2.1.6 gereğince,

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} I - C_p\right)^{-1} \in B(c)$$

olup $(\lambda I + (1 - \lambda) C_p)^{-1} \in B(c)$ elde ederiz ki bu bize $c_{\lambda I + (1 - \lambda)C_p} = c$ sonucunu verir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.4. p-Cesàro Operatörünün ℓ_r Üzerindeki Spektrumu ve İnce Spektrumu

Bu kısımda p-Cesàro operatörünün $1 \le r < \infty$ için

$$\|x\| = \left(\sum_k |x_k|^r \right)^{1/r}$$

normuyla birlikte bir Banach uzayı olan ℓ_r üzerindeki sınırlılığını, spektrumunu ve ince spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 4.4.1: $1 \le r < \infty$ için $C_p \in B(\ell_r)$ dir.

İspat: Teorem 2.1.1 gereğince (32) ifadesi $C_p \in B(\ell_\infty)$ olmasına denktir. İspatı tamamlamak için Teorem 2.1.3 gereğince, $C_p \in B(\ell_1)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre (27) ifadesinden

$$\sum_n |c_{nk}| = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = 0(1)$$

olup buradan

$$\sup_k \sum_n |c_{nk}| < \infty$$

elde edilir ki, Teorem 2.1.2 gereğince $C_p \in B(\ell_1)$ dir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

TEOREM 4.4.2: $C_p \in B(\ell_r)$ kompakttır.

İspat: Sabit her m için (33) ile tanımlanan C_p^m operatörü $1 \le r < \infty$ olmak üzere ℓ_r üzeride aşikâr olarak sınırlı ve kompakttır.

Diğer yandan

$$\|(C_p - C_p^m)x\|^r = \left\| \left(0, \ldots, 0, \sum_{k=0}^{m+1} \frac{x_k}{(m+2)^p}, \sum_{k=0}^{m+2} \frac{x_k}{(m+3)^p} \right) \right\|^r$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(n+1)^p} \right|^r$$

$$\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{rp}} \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k| \right)^r$$

$$\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(n+1)^{r-1}}{(n+1)^{rp}} \sum_{k=0}^{n} |x_k|^r$$

$$\leq \|x\|^r \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{rp-r+1}}$$

olup $rp - r + 1 = r(p-1) + 1 > 1$ olduğundan her $x \in \ell_r$ için

$$\lim_{m \to \infty} \|(C_p - C_p^m)x\| = 0$$

dır. Dolayısıyla (C_p^m) kompakt operatörler dizisi ℓ_r üzerinde C_p ye düzgün yakınsaktır. O halde Teorem 1.1.7 gereğince $C_p \in B(\ell_r)$ kompakttır.

UYARI: Aşağıdaki Teorem 4.4.3 ve 4.4.5, aslında Leibowitz'in sonuçları tarafından içerilmektedir [13]. Kısmen aynı düşünceyi kullanarak adı geçen teoremleri bir bütünlük oluşturması için burada veriyoruz.

TEOREM 4.4.3: $\pi(C_p, \ell_r) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots \right\}$ dır.

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C_p\, x = \lambda x$ ise (27) den

$$x_0 = \lambda x_0$$

ve $n \geq 1$ için

$$\frac{1}{(m+1)^p}\left\{x_0 + x_1 + \ldots + x_n\right\} = \lambda\, x_n$$

denklemleri gerçeklenir. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p}$ olup $n \geq m+1$ için x_n, (36) ile verilir.

x_n, (36) ile verilmek üzere $x = (x_n) \in \ell_r$ olduğunu göstermek için $\ell_1 \subset \ell_r$, $1 \leq r < \infty$, olduğundan $x \in \ell_1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre (36) ifadesinden

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$$

olduğundan bölüm kriteri sonuç vermez. Diğer yandan,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right| - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\left|\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right|^2 - 1\right)}{1 + \left|\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left\{\left|\dfrac{\lambda(n+2)^p - 1}{\lambda(n+1)^p}\right|^2 - 1\right\}}{1 + \left|\dfrac{\lambda(n+2)^p - 1}{\lambda(n+1)^p}\right|}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{|\lambda|^2\left\{(n+2)^{2p} - (n+1)^{2p}\right\} - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)\,(n+2)^p + 1}{|\lambda|^2\,(n+1)^{2p}}\right\} = \frac{1}{2}.\,2p = p > 1$$

olduğuna göre Raabe kriteri gereğince $\sum_n |x_n|$ serisi yakınsaktır yani $x \in \ell_1$ dir.

Şimdi ℓ_r^* uzayına izometrik olarak izomorf olan ℓ_s, $(1/r + 1/s = 1)$, uzayı üzerinde gözönüne alınan C_p^* adjoint operatörünün nokta spektrumunu hesaplamamızda yardımcı olacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

LEMMA 4.4.4: Eğer $\alpha > 0$ ise $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z \to 0$ için

$$|1 + z|^{\alpha} = 1 + \alpha \operatorname{Re}(z) + 0(|z|^2)$$

dir. ([13] Leibowitz 1987).

TEOREM 4.4.5: $\pi(C_p^*, \ell_s) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots \right\}$ dır.

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C_p^* x = \lambda x$ ise (28) den $n \geq 0$ için (37) ifadesi gerçeklenir. Eğer $\lambda = 0$ ise (37) den $x = \theta$ olacağından $\lambda = 0 \notin \pi(C_p^*, \ell_s)$ dir. Eğer $\lambda \neq 0$ ise $n \geq 1$ için (38) ifadesi gerçeklenir. Eğer $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p}$ ise (38) den $n \geq m + 1$ için $x_n = 0$ olacağından aşikâr olarak $x = (x_n) \in \ell_s$ dir.

İspatı tamamlamak için $\lambda \neq \dfrac{1}{(m+1)^p}$ olmak ve x_n, (38) ile verilmek üzere $x = (x_n) \notin \ell_s$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre Lemma 4.4.4 ve (38) den

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right|^s - 1 \right) = \lim_{n \to \infty} n \left(\left| \frac{\lambda (n+2)^p - 1}{\lambda (n+1)^p} \right|^s - 1 \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \left\{ \left| 1 + \left[\frac{\lambda (n+2)^p - 1}{\lambda (n+1)^p} - 1 \right] \right|^s - 1 \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left\{ 1 + s\,\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda\left\{(n+2)^p - (n+1)^p\right\} - 1}{\lambda (n+1)^p} \right) \right.$$

$$\left. + 0\left(\left| \frac{\lambda\left\{(n+2)^p - (n+1)^p\right\} - 1}{\lambda (n+1)^p} \right|^2 \right) - 1 \right\} = 0 < 1$$

olduğundan Raabe kriteri gereğince $\sum_n |x_n|$ serisi ıraksak yani, $x = (x_n) \notin \ell_s$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.3 (ve ya da Teorem 4.4.5) gereğince

$$\left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \subseteq \sigma(C_p, \ell_r)$$

olup, $r \geq 1$ için ℓ_r bir Banach uzayı olduğundan $\sigma(C_p, \ell_r)$ kapalıdır. Buna göre

$$\left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\} \subseteq \sigma(C_p, \ell_r)$$

dir. Ancak aşağıdaki teoremden görüleceği gibi yukarıdaki ifadede eşitlik vardır.

TEOREM 4.4.6: $\sigma(C_p, \ell_r) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: $\lambda \neq 0, 1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \ldots$, olacak biçimdeki λ kompleks sayıları için $\lambda \in \rho(C_p, \ell_s)$ yani $(\lambda I - C_p)^{-1} \in B(\ell_s)$ olduğunu göstererek ispatı yapacağız. Bunun için ise d_{nk}, (39) ile verilmek üzere $(\lambda I - C_p)^{-1} = (d_{nk})$ matrisi için Teorem 2.1.3'ün gerçeklendiğini göstermek yeterlidir.

Teorem 4.1.6 nın ispatındaki (ii) ifadesinden $(\lambda I - C_p)^{-1} \in B(\ell_\infty)$ olduğu görülür. Diğer yandan (39) ifadesinden ve Lemma 4.1.3 den

$$\sum_n |d_{nk}| = \frac{(k+1)^p}{|\lambda (k+1)^p - 1|} + \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p} \prod_{j=k+1}^{n+1} \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{j^p \lambda}\right|}$$

$$= 0(1) + \frac{1}{|\lambda|^2} 0(1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = 0(1)$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_k \sum_n |d_{nk}| = 0(1) < \infty$$

bulunur ki, bu ise $(\lambda I - C_p)^{-1} \in B(\ell_1)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

UYARI: Teorem 4.1.6 için verilen ispatta izlenen yöntem ile kompakt operatörlerin spektral özellikleri kullanılarak Teorem 4.4.3 yardımıyla yukarıdaki teoremin ikinci bir ispatı da kolaylıkla elde edilir.

ℓ_r, $(1 \leq r < \infty)$, üzerinde tanımlı C_p, p-Cesàro operatörünün ince spektrumuna ilişkin aşağıdaki sonuç, Teorem 4.1.7 ve 4.1.8 deki benzeri yöntemlerle ispatlanabileceği için ispatsız olarak verilmiştir.

TEOREM 4.4.7: (i) $0 \in II_2\,\sigma(C_p, \ell_r)$ dir.

(ii) $\lambda = \frac{1}{m^p}$, m = 1, 2, ... ise $\lambda \in III_3\,\sigma(C_p, \ell_r)$

dir.

4.5. p-Cesàro Operatörünün bv_0 Üzerindeki Spektrumu ve İnce Spektrumu

Bu kısımda p-Cesàro operatörünün

$$\|x\| = \sum_{n} \left| x_k - x_{k+1} \right|$$

normuyla birlikte bir Banach uzayı olan bv_0 uzayı üzerindeki sınırlılığını, spektrumunu ve ince spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 4.5.1: $C_p \in B(bv_0)$ dır.

İspat: $c_{-1,0} = 0$ olmak üzere (27) den

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{m}(c_{nk}-c_{n-1,k})\right| = \sum_{n=0}^{m}\left|\sum_{k=0}^{n}(c_{nk}-c_{n-1,k})\right| + \sum_{n=m+1}^{\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(c_{nk}-c_{n-1,k})\right|$$

$$= |c_{00}| + \sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{n^p}\right)+\frac{1}{(n+1)^p}\right| + \sum_{n=m+1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{n^p}\right)\right|$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) + (m+1)\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right)$$

$$= 1 + \left(1-\frac{1}{(m+1)^{p-1}}\right) + (m+1)\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{(m+1)^p}-\frac{1}{(r+1)^p}\right)$$

$= 2,\quad$ (her $m \in \mathbb{N}$ için) elde edilir ki, buradan

$$\sup_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{m}(c_{nk}-c_{n-1,k})\right|=2 \tag{46}$$

bulunur. (31) ve (46) ifadeleri birlikte gözönüne alınırsa, Teorem 2.1.9 dan ispat tamamlanır.

TEOREM 4.5.2: $C_p \in B(bv_0)$ kompakttır.

İspat: C_p^m, (33) ile tanımlanmak üzere sabit her m için aşikâr olarak $C_p^m \in B(bv_0)$ dır. Ayrıca her m için Teorem 1.1.6 kullanılarak C_p^m'nin bv_0 üzerinde kompakt olduğu görülür.

Diğer yandan her $x \in bv_0$ için

$$\|(C_p - C_p^m)x\| = \left\|\left(0, 0, \dots, 0, \sum_{k=0}^{m+1}\frac{x_k}{(m+2)^p}, \sum_{k=0}^{n+2}\frac{x_k}{(m+3)^p}, \dots\right)\right\|$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{(n+1)^p}-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x_k}{(n+2)^p}\right|$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{(n+2)^p}\right)\sum_{k=0}^{n}x_k-\frac{x_{n+1}}{(n+2)^p}\right|$$

$$\leq \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{|x_{n+1}|}{(n+2)^p}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(n+2)^p-(n+1)^p}{(n+1)^p(n+2)^p}\sum_{k=0}^{n}|x_k|$$

$$\leq \sup_k|x_k|\left\{\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^p}+\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{(n+2)^p-(n+1)^p}{(n+1)^p(n+2)^p}\right\}$$

$$\sim K\left\{\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^p}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^p}\right\}$$

$$=2K\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^p}$$

olup, $p > 1$ için $\sum_n \frac{1}{n^p}$ harmonik serisi yakınsak olduğundan,

$$\lim_{m\to\infty}\|(C_p - C_p^m)x\| = 0$$

elde edilir ki Teorem 1.1.7 den $C_p \in B(bv_0)$ kompakttır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

TEOREM 4.5.3: $\pi(C_p, bv_0) = \left\{\frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots\right\}$ dir.

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C_p x = \lambda x$ olsun. Bu durumda (35) ifadesi gerçeklenir. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise $\lambda = \frac{1}{(m+1)^p}$ olup $n \geq m+1$ için x_n, (36) ile verilir.

$n \geq m+1$ için x_n, (36) ile verilmek üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve

$$\sum_n |x_n - x_{n+1}| < \infty \tag{47}$$

olduğunu göstermeliyiz. Teorem 4.1.4'ün ispatında $x = (x_n) \in c_0$ olduğu gösterildiğinden, ispatı tamamlamak için (47) nin gerçeklendiğini göstermek yeterlidir. Şimdi Lemma 4.1.3 ve (36) dan

$$x_n - x_{n+1} = \left\{ \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda j^p}{\lambda(j+1)^p - 1} - \prod_{j=m+1}^{n+1} \frac{\lambda j^p}{\lambda(j+1)^p - 1} \right\} x_m$$

$$= \left\{ 1 - \frac{\lambda (n+1)^p}{\lambda(n+2)^p - 1} \right\} x_m \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda j^p}{\lambda(j+1)^p - 1}$$

$$= \left\{ \frac{\lambda[(n+2)^p - (n+1)^p] - 1}{\lambda(n+2)^p - 1} \right\} x_m \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\dfrac{j^p}{(j+1)^p}}{\left(1 - \dfrac{1}{\lambda(j+1)^p} \right)}$$

$$= \left\{ \frac{\lambda[(n+2)^p - (n+1)^p] - 1}{\lambda(n+2)^p - 1} \right\} x_m \frac{(m+1)^p}{(n+1)^p} \prod_{j=m+1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda(j+1)^p} \right)^{-1}$$

elde edilir. Buradan

$$\left| x_n + x_{n+1} \right| = \frac{(m+1)^p \left| x_n \right|}{(n+1)^p} \left| \frac{\lambda[(n+2)^p - (n+1)^p] - 1}{\lambda(n+2)^p - 1} \right| \prod_{j=m+1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{\lambda(j+1)^p} \right|^{-1}$$

$$= 0(1) \frac{(m+1)^p}{(n+1)^p} \left| \frac{\lambda[(n+2)^p - (n+1)^p] - 1}{\lambda(n+2)^p - 1} \right| \tag{48}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda[(n+2)^p - (n+1)^p] - 1}{\lambda(n+2)^p - 1} = 0$$

olduğundan

$$\sup_n \left| \frac{\lambda[(n+2)^p - (n+1)^p] - 1}{\lambda(n+2)^p - 1} \right| = M < \infty$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buna göre (48) den

$$\left| x_n - x_{n+1} \right| = 0(1)\, M \frac{(m+1)^p}{(n+1)^p}$$

elde edilir ki, karşılaştırma kriteri gereğince (47) serisi yakınsaktır. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, bv_0^* uzayına izometrik olarak izomorf olan bs üzerinde gözönüne alınan C_p^* adjoint operatörünün point spektrumunu hesaplamamızda yardımcı olacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

LEMMA 4.5.4: $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$z_n = \prod_{v=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda v^p} \right) \tag{49}$$

olsun. Bu durumda $\sum_n z_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots$, olmasıdır.

İspat Yeterlilik: $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots$, ise her $n \geq m$ için (49) dan $z_n = 0$ olacağından durum aşikârdır.

Gereklilik: $u \in \mathbb{C}$ ve $|u| \leq \dfrac{1}{2}$ olmak üzere

$$\ln(1 - u) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} = -u + 0\left(u^2\right)$$

ve

$$\ell n\left(\frac{1}{1-u}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{n}}{n}=u+0\left(u^{2}\right)$$

yazılabilir. Diğer yandan her $v \geq v_0$ için $|\lambda|\ v^p \geq 2$ olacak biçimde bir $v_0 > 0$ tamsayısı vardır. Buna göre

$$\ell n\ z_n=\sum_{v=1}^{n}\ell n\left(1-\frac{1}{\lambda v^{p}}\right)$$

$$=\sum_{v=1}^{v_0-1}\ell n\left(1-\frac{1}{\lambda v^{p}}\right)+\sum_{v=v_0}^{n}\ell n\left(1-\frac{1}{\lambda v^{p}}\right)$$

$$=0(1)-\frac{1}{\lambda}\sum_{v=v_0}^{n}\frac{1}{v^{p}}+\sum_{v=v_0}^{n}0\left(\frac{1}{v^{2p}}\right)$$

$$=0(1)=\ell n\ [\exp 0(1)]$$

olup dolayısıyla,

$$z_n=\exp 0(1)=0\ (1)$$

(50)

elde ederiz. Ayrıca benzer biçimde

$$\ell n\left(\frac{1}{z_n}\right)=0(1)+\frac{1}{\lambda}\sum_{v=v_0}^{n}\frac{1}{v^{p}}+\sum_{v=v_0}^{n}0\left(\frac{1}{v^{2p}}\right)$$

$$=0(1)=\ell n\ [\exp 0(1)]$$

olacağından

$$\frac{1}{z_n} = \exp O(1) = O(1) \tag{51}$$

bulunur.

(50) ve (51) ifadeleri birlikte gözönüne alınırsa, z_n (49) ile tanımlanmak üzere $\lambda \neq \frac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots$, için $\sum_n z_n$ serisinin kısmî toplamlar dizisi sınırlı değildir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

UYARI: Okutoyi [15], z_n, (49) ile verilmek üzere $p = 1$ özel halinde $\sum_n z_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şartın $\lambda \neq 1$ olmak üzere $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) \geq 1$ olduğunu ispat etmiştir.

TEOREM 4.5.5: $\pi(C_p^*, bs) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots \right\}$ dir.

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C_p^* x = \lambda x$ ise (28) den $n \geq 0$ için (37) denklemleri gerçeklenir. Eğer $\lambda = 0$ ise (37) den $x = \theta$ elde edilir ki, bu ise $\lambda = 0 \notin \pi(C_p^*, bs)$ olması demektir. Eğer $\lambda \neq 0$ ise x_n, $n \geq 1$ için (38) ile verilir. Lemma 4.5.4 gereğince x_n, $n \geq 1$ için (38) ile verilmek üzere $x = (x_n) \in bs$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda = \frac{1}{(m+1)^p}$; $m = 0, 1, 2, \ldots$, olmasıdır.

Bu ise ispatı tamamlar.

bv_0'ın bir Banach uzayı olması nedeniyle $\sigma(C_p, bv_0)$ kapalı olacağından Teorem 4.5.3 (ya da Teorem 4.5.5) gereğince

$$\left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots \right\} \cup \{0\} \subseteq \sigma(C_p\ bv_0)$$

elde ederiz. Halbuki aşağıdaki teoremde de göreceğimiz gibi yukarıdaki ifadede eşitlik vardır.

TEOREM 4.5.6: $\sigma(C_p, bv_0) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, \ldots \right\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: Teoremden hemen önceki açıklamalar gereğince ispatı tamamlamak için, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq \dfrac{1}{(m+1)^p}$, $(m = 0, 1, \ldots)$ olmak üzere $\lambda \in \rho\ (C_p, bv_0)$ olduğunu göstermek ve bunun için ise d_{nk} (39) ile verilmek üzere $(\lambda I - C_p)^{-1} = (d_{nk}) \in B(bv_0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre,

(i) Sabit her k için $\lim\limits_n d_{nk} = 0$ olduğu Teorem 4.1.6'nın ispatında gösterildi.

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right| = \sum_{n=0}^{i} \left| \sum_{k=0}^{n} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right| + \sum_{n=i+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right| = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

diyelim. (38) ve Lemma 4.1.3 den $a_{-1,0} = 0$ olmak üzere

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{i} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right|$$

$$= |d_{00}| + \sum_{n=1}^{i} \left| (d_{n0} - d_{n-1,0}) + \sum_{k=1}^{n} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right|$$

$$= 0(1) + \sum_{n=1}^{i} \left| \left\{ \frac{1}{\lambda^2 (n+1)^p} \prod_{j=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1} - \frac{1}{\lambda^2 n^p} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1} \right\} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^2 (n+1)^p} \prod_{j=k+1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda^2 n^p} \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1} \right|$$

$$= 0(1) + \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{n=1}^{i} \left| \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1} \left\{ \frac{\lambda(n+1)^p}{(n+1)^p\,[\lambda(n+1)^p - 1]} - \frac{1}{n^p} \right\} \right.$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^p} \prod_{j=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right)$$

$$\left. - \frac{1}{n^p} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right) \right|$$

$$= 0(1) + \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{n=1}^{i} \prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right|^{-1} \left| \left\{ \frac{\lambda[n^p - (n+1)^p] + 1}{[\lambda\,(n+1]^p - 1)\,n^p} \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+1)^p} \frac{\lambda(n+1)^p}{[\lambda\,(n+1)^p - 1]} \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right) - \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right) \right|$$

$$= 0(1) + 0(1) \sum_{n=1}^{i} \left| \frac{\lambda[(n^p - (n+1)^p] + 1}{[\lambda(n+1)^p - 1]\,n^p} + \frac{1}{n^p} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\lambda(n+1)^p - 1} - \frac{1}{n^p} \right\} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p}\right) \right|$$

$$\leq 0(1) + 0(1) \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left| \frac{\lambda[(n^p - (n+1)^p] + 1}{[\lambda(n+1)^p - 1]} \right| \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right| \right) + \frac{1}{n^p} \prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right| \right\}$$

$$= 0(1) + 0(1) \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^p} \left\{ \left| \frac{\lambda[(n^p - (n+1)^p] + 1}{[\lambda(n+1)^p - 1]} \right| (1 + n\,0(1) + 0(1)) \right\}$$

$$\sim 0(1) + 0(1) \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^p} \left\{ \frac{1}{n}(1 + (n+1)\,0(1)) \right\} = 0(1) \qquad (52)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\Sigma_2 = \sum_{n=i+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} (d_{nk} - d_{n-1,k}) \right| = \sum_{n=i+1}^{\infty} \left| (d_{n0} - d_{n-1,0}) + \sum_{k=1}^{i} \left((d_{nk} - d_{n-1,k}) \right) \right|$$

$$= \sum_{n=i+1}^{\infty} \left| \left\{ \frac{1}{\lambda^2 (n+1)^p} \prod_{j=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right)^{-1} - \frac{1}{\lambda^2 n^p} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right)^{-1} \right\} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{i} \left\{ \frac{1}{\lambda^2 (n+1)^p} \prod_{j=k+1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right)^{-1} - \frac{1}{\lambda^2 n^p} \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right)^{-1} \right\} \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{n=i+1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right|^{-1} \left| \frac{\lambda}{\lambda (n+1)^p - 1} - \frac{1}{n^p} \right| \left(1 + \sum_{k=1}^{i} \prod_{j=1}^{k} \left| 1 - \frac{1}{\lambda j^p} \right| \right) \right\}$$

$$= 0(1) \sum_{n=i+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^p} \left| \frac{\lambda [n^p - (n+1)^p] + 1}{\lambda (n+1)^p - 1} \right| (1 + i\, 0(1)) \right\}$$

$$\sim 0(1) [1 + i\, 0(1)] \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{p+1}}$$

$$\leq 0(1) [1 + i\, 0(1)] \int_i^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{p+1}} = \frac{0(1) [1 + i\, 0(1)]}{p} \frac{1}{(i+1)^p} = 0(1) \qquad (53)$$

elde ederiz.

(52) ve (53) ifadelerini birlikte gözönüne alırsak,

$$\sup_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{nk} - d_{n-1,k} \right) \right| = 0(1)$$

bulunur ki, bu da ispatı tamamlar.

UYARI: Teorem 4.1.6 için verilen ispattaki benzeri yöntemler burada da kullanılarak, yukarıdaki teoremin kompakt operatörlerin spekral özellikleri yardımıyla ikinci bir ispatı da elde edilebilir.

Şimdi de bv_0 üzerinde tanımlı C_p operatörünün ince spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 4.5.7: $0 \in II_2\, \sigma(C_p, bv_0)$ dır.

İspat: Teorem 4.5.3 gereğince $0 \notin \pi(C_p, bv_0)$ olduğundan C_p^{-1} mevcut yani $C_p \in 1 \cup 2$ dir. $C_p \in 2$ olduğunu göstermek için Teorem 1.1.3 gereğince C_p^* adjoint operatörünün örten olmadığını göstermek yeterlidir. Eğer $C_p^*\, x = y$ ise Teorem 4.1.7 nin ispatındaki işlemler tekrarlanarak $n \geq 0$ için

$$x_n = (n+1)^p\,(y_n - y_{n+1}) \qquad (54)$$

elde edilir. Eğer $n \geq 0$ için $y_n = (-1)^n$ olmak üzere $y = (y_n) \in bs$ olacağı açıktır. Ancak (54) den

$$x_n = (n+1)^p\,((-1)^n - (-1)^{n+1}) = 2(-1)^n\,(n+1)^p$$

olup $x = (x_n) \notin bs$ dir. Bu ise C_p^* adjoint operatörünün örten olmadığını yani, C_p^{-1} operatörünün sınırlı olmadığını gösterir. O halde $C_p \in 2$ dir.

Diğer yandan Teorem 4.5.5 gereğince $0 \notin \pi(C_p^*, bs)$ olduğundan C_p^* birebirdir. O halde Teorem 1.1.4 gereğince $\overline{R(C_p)} = bv_0$, yani $C_p \in IUII$ dir. İspatı tamamlamak için C_p operatörünün örten olmadığını göstermek yeterlidir. Buna göre eğer $C_p\, x = y$ ise (5) den $x_0 = y_0$ ve $n \geq 1$ için (43) gerçeklenir. $n \geq 0$ için y_n, (41) ile verilmek üzere $y = (y_n) \in bv_0$ olduğu halde, (43) den $n \geq 1$ için elde edilen $(x_n) = (2(-1)^n)$ dizisi bv_0 uzayında değildir.

Bu ise C_p nin örten olmadığını yani $R(C_p) \neq bv_0$ olduğunu gösterir. O halde $C_p \in II$ dir.

Böylece $C_p \in II_2$ yani $0 \in II_2\, \sigma(C_p, bv_0)$ elde ederiz ki, ispat tamamlanmış olur.

TEOREM 4.5.8: $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots$ ise $\lambda \in III_3\, \sigma(C_p, bv_0)$

İspat: Teorem 4.5.3'den $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots$ için $\lambda \in \pi(C_p, bv_0)$ olduğundan $(\lambda I - C_p)^{-1}$ mevcut değildir, bir başka deyimle $\lambda I - C_p \in 3$ dir.

Diğer yandan Teorem 4.5.5'den λ üzerindeki varsayımlar altında $\lambda \in \pi(C_p^*, bs)$ olduğundan, $\lambda I - C_p^*$ adjoint operatörü bire-bir değildir. Böylece Teorem 1.1.4 den $\overline{R(\lambda I - C_p)} \neq bv_0$, yani, $\lambda I - C_p \in III$ bulunur. Böylece $\lambda I - C_p \in III_3$, yani, $\lambda \in III_3\, \sigma(C_p, bv_0)$ elde edilir.

4.6. p-Cesàro Operatörünün bv Üzerindeki Spektrumu ve İnce Spektrumu

Bilindiği gibi bv uzayı

$$\|x\| = |\lim x| + \sum_k \left| x_k - x_{k+1} \right|$$

normuyla birlikte bir Banach uzayıdır. Bu kısımda C_p operatörünü bv üzerinde gözönüne alıp sınırlılığını, spektrumunu ve ince spektrumunu hesaplayacağız.

TEOREM 4.6.1: $C_p \in B(bv)$ dir.

İspat: $e = (1, 1, \ldots)$ olmak üzere, (5) den

$$y = C_p e = \left(1, \frac{1}{2^{p-1}}, \frac{1}{3^{p-1}}, \ldots, \frac{1}{n^{p-1}}, \ldots \right)$$

olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| y_n - y_{n+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{(n+2)^{p-1}} \right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{(n+2)^{p-1}} \right) = 1$$

olduğundan $y = C_p\, e \in bv$ dir. Ayrıca (46) ifadesini de gözönüne alırsak, Teorem 2.1.8 den sonuç elde edilir.

TEOREM 4.6.2: $C_p \in B(bv)$ kompakttır.

İspat: C_p^m, (33) ile tanımlanmak üzere Teorem 1.1.6 kullanılarak (C_p^m) operatörler dizisinin her elemanının bv üzerinde kompakt olduğu görülür.

Ayrıca her $x \in bv$ için

$$\|(C_p - C_p^m)\, x\| = \|(0, 0, \ldots, \sum_{k=0}^{m+1} \frac{x_k}{(m+2)^p}, \sum_{k=0}^{m+2} \frac{x_k}{(m+3)^p}, \ldots)\|$$

$$= \left| \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(n+1)^p} \right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(n+1)^p} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x_k}{(n+2)^p} \right|$$

$$= 0 + \left| \left(\frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{(n+2)^p} \right) \sum_{k=0}^{n} x_k - \frac{x_k}{(n+2)^p} \right|$$

olup Teorem 4.5.2 nin ispatındaki işlemler tekrarlanarak

$$\|(C_p - C_p^m)\, x\| \sim 2K \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^p}$$

elde edilir ki, $p > 1$ için $\Sigma \dfrac{1}{n^p}$ harmonik serisi yakınsak olduğundan

$$\lim_{m \to \infty} \|(C_p - C_p^m)\, x\| = 0$$

bulunur. O halde Teorem 1.1.7 den $C_p \in B(bv)$ nin kompakt olması sonucunu elde ederiz.

TEOREM 4.6.3: $\pi(C_p, bv) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ dir.

İspat: Teorem 4.5.3'ün ispatındaki benzeri düşünce ile ispat elde edilir.

TEOREM 4.6.4: $\pi(C_p\,,\ \mathbb{C} \oplus bs) = \left\{ \dfrac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: $x \neq \theta$ olmak üzere $C_p^* = \lambda x$ ise (30) dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^{p-1}} = \lambda\, x_0 \tag{55}$$

ve $n \geq 1$ için (44) denklemleri gerçeklenir. Eğer $\lambda = 0$ ise (44) den $n \geq 1$ için $x_n = 0$ bulunur. $x = (x_n)$ dizisini $x_0 \neq 0$ olmak üzere $x^0 = (x_0, 0, 0, \ldots)$ seçersek (55) ifadesi ve $C_p^*\, x^0 = \theta = 0x^0$ olup açık olarak $x^0 \in bs$ olduğundan $\lambda = 0 \in \pi(C_p^*, \mathbb{C} \oplus bs)$ elde ederiz. Eğer $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p}$, $m = 0, 1, \ldots$ ise (44) den $n \geq m+2$ için $x_n = 0$ olacağından $x = (x_n) \in bs$ yani, $\lambda = \dfrac{1}{(m+1)^p} \in \pi(C_p^*, \mathbb{C} \oplus bs)$ bulunur.

Eğer $\lambda \neq \dfrac{1}{(m+1)^p}$ ise Teorem 4.5.5 in ispatındaki işlemler tekrarlanarak $x = (x_n) \notin bs$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

bv'nin bir Banach uzayı olması nedeniyle $\sigma(C_p, bv)$ kapalı olacağından Teorem 4.6.3 ve hatta Teorem 4.6.2 gereğince

$$\left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\} \subseteq \sigma(C_p, bv)$$

elde ederiz. Ancak aşağıdaki teoremde spektrumu kesin olarak hesaplayacağız.

TEOREM 4.6.5: $\sigma(C_p, bv) = \left\{ \frac{1}{(m+1)^p} : m = 0, 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: Teoremden hemen önceki açıklama gereğince ispat için $\lambda \neq 0, \frac{1}{(m+1)^p}$ için $\lambda \in \rho(C_p, bv)$ olduğunu yani, $(\lambda I - C_p)^{-1} = D \in B(bv)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Teorem 4.5.6 nın ispatında d_{nk}, (39) ile verilmek üzere $\lambda \neq 0, \frac{1}{(m+1)^p}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ için,

$$\sup_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{i} \left(d_{nk} - d_{n-1,k}\right) \right| < \infty$$

olduğunu göstermiştik. Diğer yandan (39) ve Lemma 4.1.3 den $e = (1, 1, \ldots)$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(De)_n-(De)_{n+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^2(n+1)^p}\prod_{j=k+1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1}+\frac{(n+1)^p}{\lambda(n+1)^p-1}\right\}\right.$$

$$\left.-\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda^2(n+2)^p}\prod_{j=k+1}^{n+2}\left(1-\frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1}+\frac{(n+2)^p}{\lambda(n+2)^p-1}\right\}\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left|\frac{(n+1)^p}{\lambda(n+1)^p-1}-\frac{(n+2)^p}{\lambda(n+2)^p-1}\right|+\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda^2(n+1)^p-1}\prod_{j=k+1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda^2(n+2)^p}\prod_{j=k+1}^{n+2}\left(1-\frac{1}{\lambda j^p}\right)^{-1}-\frac{1}{\lambda^2(n+1)^p}\left(1-\frac{1}{\lambda(n+1)^p}\right)^{-1}\right|\right\}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left|\frac{(n+2)^p-(n+1)^p}{[\lambda(n+1)^p-1]\,[\lambda(n+2)^p-1]}\right|\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|\lambda|^2}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{(n+2)^p}\left(1-\frac{1}{\lambda(n+2)^p}\right)^{-1}\right|\prod_{j=k+1}^{n+1}\left|1-\frac{1}{\lambda j^p}\right|^{-1}+\left|\frac{\lambda}{\lambda(n+1)^p-1}\right|\right\}$$

$$\sim \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^p}+0(1)\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{\lambda[(n+2)^p-(n+1)^p]-1}{[\lambda(n+2)^p-1]\,(n+1)^p}\right|+\frac{1}{(n+1)^p}\right\}$$

$$\sim \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^{p+1}}+\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{0(1)}{(n+1)^{p+1}}(n+1)\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^{p+1}}+\frac{1+0(1)}{(n+1)^p}\right\}<\infty$$

bulunur ki bu da λ üzerindeki varsayımlar altında $(\lambda I - C_p)^{-1}e \in bv$ olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $\lambda \neq 0, \dfrac{1}{(m+1)^p}$, $m = 0, 1, \ldots$, için $\left(\lambda I - C_p\right)^{-1} = (d_{nk})$

matrisi, Teorem 2.1.8'in şartlarını gerçeklediğinden $(\lambda I - C_p)^{-1} \in B(bv)$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

UYARI: Teorem 4.1.6 için verilen ispatdaki benzer düşünce ile kompakt operatörlerin spektral özellikleri kullanılarak bu teoremin diğer bir ispatı da elde edilebilir.

TEOREM 4.6.6: $0 \in III_2\, \sigma(C_p, bv)$ dir.

İspat: Teorem 4.6.3 gereğince $0 \notin \pi(C_p, bv)$ olduğundan C_p^{-1} mevcut yani, $C_p \in 1 \cup 2$ dir. $C_p \in 2$ olduğunu göstermek için Teorem 1.1.3 gereğince C_p^* adjoint operatörünün örten olmadığını göstermeliyiz. Buna göre eğer $C_p^*\, x = y$ ise (30) dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^{p-1}} = y_0$$

ve $n \geq 1$ için

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{k^p} = y_n \qquad (56)$$

denklemleri gerçeklenir. $n \geq 1$ için (56) dan

$$x_n = n^p\,(y_n - y_{n+1}) \qquad (57)$$

elde edilir. y_0 keyfi olmak üzere $n \geq 1$ için $y_n = (-1)^n$ olarak tanımlanan $y = (y_n)$ dizisi bs uzayına aittir. Ancak $n \geq 1$ için (57)'den

$$x_n = n^p((-1)^n - (-1)^{n+1}) = 2(-1)^n n^p \qquad (58)$$

elde ederiz ki, x_n, $n \geq 1$ için (58) ile verilmek üzere $x = (x_n) \notin$ bs dir. O halde C_p^* örten değildir. Dolayısıyla $C_p \in 2$ dir.

Diğer yandan Teorem 4.6.4 den $0 \in \pi(C_p^*, \mathbb{C} \oplus bs)$ olduğundan C_p^* adjoint operatörü bire-bir değildir. O halde Teorem 1.1.4 gereğince $\overline{R(C_p)} \neq bv$, yani, $C_p \in III$ dir.

Yukarıdaki sonuçlar birleştirilirse $C_p \in III_2$ yani $0 \in III_2\, \sigma(C_p, bv)$ bulunur ki, böylece ispat tamamlanmış olur.

TEOREM 4.6.7: $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$, $m = 1, 2, \ldots$, ise $\lambda \in III_3\, \sigma(C_p, bv)$ dir.

İspat: $\lambda = \dfrac{1}{m^p}$ için Teorem 4.6.3 den $\lambda \in \pi(C_p, bv)$ olduğundan $(\lambda I - C_p)^{-1}$ mevcut değildir. O halde $\lambda I - C_p \in 3$ dür.

Diğer yandan Teorem 4.6.4 den $\lambda \in \pi(C_p^*, \mathbb{C} \oplus bs)$ olduğundan $\lambda I - C_p^*$ adjoint operatörü bire-bir değildir. Dolayısıyla Teorem 1.1.4 gereğince $\overline{R(\lambda I - C_p)} \neq bv$ elde edilir ki, bu da $\lambda I - C_p \in III$ olduğunu gösterir. Ayrıca $\lambda I - C_p \in 3$ olduğundan $\lambda I - C_p \in III_3$ yani, $\lambda \in III_3\sigma(C_p, bv)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

1. BROWN, A., HALMOS, P.R. ve SHEILDS, A.L. Cesàro Operators. Acta. Sci. Math. 26(1965), 125-137.

2. BROWN, A.L. ve PAGE, E. Elements of Functional Analysis, Von Nostrand Reinhold Comp. (1970).

3. CARTLIDGE, J.M. Weighted Mean Matrices as Operators on ℓ_p. Ph. D. Thesis. Indiana University (1978).

4. CASS, F.P. ve RHOADES, B.E. Mercerian Theorems via Spectral Theory. Pasific J. Math. 73(1977).

5. DUNFORD, N. ve SCHWARTZ, J.T. Linear Operators. Interscience Publishers, Inc. New York (1958).

6. GOLDBERG, S. Unbounded Linear Operators. Mc Graw-Hill Book Comp. (1966).

7. HARDY, G.H. Divergent Series. Oxford University Press (1949)

8. HUTSON, V. ve PYM, J.S. Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Academic Press. London (1980).

9. KNOPP, K. ve LORENTZ, G.G. Beiträge zur absoluten limitierung. Arch. Math. 2(1949), 10-16.

10. KNOPP, K. Theory and Application of Infinite Series. Blackie and Son Ltd. (1971).

11. KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications.
John Wiley and Sons New York (1978).

12. LEIBOWITZ, G. Spectra of Discrete Cesàro Operators.
Tamkang J. Math. 3(1972), 123-132.

13. LEIBOWITZ, G. Rhaly Matrices.
J. Math. Analysis and Applications. 128 (1987), 272-286.

14. MADDOX, I.J. Elements of Functional Analysis
Cambridge University Press. (1970).

15. OKUTOYI, J.I. On the Spectrum of the Cesàro Operator.
P.h.D. Thesis. Birmingham University (1986).

16. OKUTOYI, J.I. On the Spectrum of C_1 as an Operator on bv_0.
J. Austral. Math. Soc. (Series A) 48(1990), 79-86.

17. OLMSTED, J.M.H. Advanced Calculus.
Appleton-Centruy-Crofts, New York (1961).

18. PETERSEN, G. Regular Matrix Transformations.
Mc Graw-Hill Publishing Comp. (1966).

19. POWEL, R.E. ve SHAH, S.M. Summability Theory and Applications.
Prentice-Hall of India Private Limited. New Delhi (1988).

20. READE, J.B. On the Spectrum of the Cesàro Operators.
Bull. London Math. Soc. 17(1985), 263-267.

21. RHALY, JR. H.C. p-Cesàro Matrices.
Houston J. Math. 15(1989), 137-146.

22. RHOADES, B.E. The Fine Spectra for Weighted Mean Operators.
Pasific J. Math. 104 (1983), 219-230.

23. RHOADES, B.E. The Spectrum of Weighted Mean Operators.
Canad. Math. Bull. 30(1987), 446-449.

24. RUDIN, W. Functional Analysis.
Mc Graw-hill Book Comp. (1973).

25. TAYLOR, A.E. Introduction to Functional Analysis.
John Wiley and Sons (1980).

26. WENGER, R.B. The Fine Spectra of Hölder Summability Operators
Indian J. Pure. Appl. Math. 6(1965), 695-712.

27. WILANSKY, A. Summability Through Functional Analysis.
Nortn Holland 1984.