

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

KUATERNİYONLAR VE İNTERPOLASYONLAR

Raheleh GHADAMI GHOLIZADEH NASER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2013**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

KUATERNİYONLAR VE İNTERPOLASYON

Raheleh GHADAMI GHOLIZADEH NASER

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş ve temel kavramlara ayrıldı.

İkinci bölümde, Öklid uzayında kuaterniyonları kullanarak küresel lineer interpolasyonlar (Slerp) ve küresel spline interpolasyon (Squad) incelendi. Ayrıca kompleks sayılar ve De Moivre teoremi kullanılarak Hızlı Slerp elde edildi.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Hiperbolik küresi üzerinde split kuaterniyonları kullanarak lineer interpolasyonlar (MSlerp) ve spline interpolasyon (MSquad) eğrileri elde edildi. Ayrıca split kompleks sayılar ve De Moivre teoremi kullanılarak hızlı MSlerp elde edildi.

Son bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Lorentz küresi üzerinde, spline split kuaterniyon interpolasyonu, dik izdüşüm ve kübik Bezier eğrisi kullanılarak gösterildi.

Ocak 2013, 49 sayfa

Anahtar Kelimeler : Kuaterniyon, Split Kuaterniyon, İnterpolation, Lorentz-Minkowski Uzay, Timelike Vektör, Slerp, Spline

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

QUATERNIONS AND INTERPOLATIONS

Raheleh GHADAMI GHOLIZADEH NASER

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis comprises four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction and basic concepts.

In the second chapter, spherical linear interpolation (Slerp) and spherical spline interpolation using quaternions are investigated in the Euclidean space. Also, fast Slerp are obtained using complex numbers and De Moivre's theorem.

In the third chapter, spherical linear interpolation (Slerp) and spherical spline interpolation (Msquad) using split quaternions and Lorentz metric are obtained on Hyperbolic sphere in Minkowski space. Also, fast MSlerp are obtained using split complex numbers and De Moivre's formula for a unit timelike split quaternion.

In the last chapter, spline split kuaterniyon interpolasyon are displayed using orthogonal projection and cubic Bezier curve on Lorentz sphere in Minkowski space.

January 2013, 49 pages

Key Words : Quaternions, Split Quaternions, Interpolation, Lorentz-Minkowski Space, Timelike, Vector, Slerp, Spline

TEŐEKKÜR

Bu çalıőmanın hazırlanmasına verdiği destek için danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi) 'ya, fikirleriyle ve sorularıyla yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof.Dr Mustafa ÇALIŐKAN (Gazi Üniversitesi Fen Fakóltesi) 'na, Sayın Doç.Dr Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi) 'ya teőekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalıőmam sırasında ellerinden gelen her tölrlü desteği bana veren eőim Javad RAHEBİ'ye ve ailemin fertlerine minnet ve őükranlarımı sunarım.

Raheleh GHADAMI GHOLIZADEH NASER

Ankara, Ocak 2013

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar, 1843 yılında William Rowan Hamilton tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli olmayan reel cebir yapısına sahip olan kuaterniyonlar, kompleks sayıların özelliklerinin çoğunu taşıdığından kompleks sayılarla benzer bir yapıya sahiptir. Bu çalışmada kuaterniyonlar cebiri H ile gösterilmiştir. Günümüzde, kuaterniyonlar, özellikle fizik, kinematik, bilgisayar grafikleri, animasyon, katı cisim dönüşümlerini içeren optimizasyon problemlerinde kullanılmaktadır. Lineer kuaterniyon interpolasyonları (Lerp),

$$q_0, q_1 \in H \text{ ve } h \in [0, 1] \text{ Lerp}(q_0, q_1, h) = q_0(1 - h) + q_1h$$

şeklinde tanımlanan doğru parçaları yardımıyla yapılmaktadır. Küre üzerinde iki nokta arasındaki en kısa eğri geodezikler ile ölçülür. Kuaterniyonlar yardımıyla küre üzerinde iki nokta arasındaki geodezik eğri tanımlanabilmektedir, bu ise küre üzerinde küresel lineer interpolasyonu mümkün kılmaktadır. Slerp gösterimi ile bu konu robot kinematığında geniş bir şekilde işlenmektedir. Kinematikte, robot hareketlerinin modellenmesinde küresel interpolasyonlar önemli bir yere sahiptir. Kol ve ayak hareketlerinde küresel model esastır. Kuaterniyonlar bu hareketlerin modellenmesinde aktif bir şekilde kullanılmaktadır. Kuaterniyonlara benzer şekilde, $i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1$ kabul edilerek oluşturulan split kuaterniyon cümlesi, kuaterniyonların Öklid uzayında kullanıldığı gibi, üç boyutlu Minkowski uzayında kullanılabilir. Split kuaterniyonlar cebiri H' ile gösterilmiştir. Lorentz hareketleri, son yılların çalışma konuları içerisinde önemli bir yere sahiptir. Lorentz küresi üzerinde hareketleri split kuaterniyonlar ile inceleyebiliriz dolayısıyla, Lorentz küresinde küresel interpolasyonlar düşünebiliriz. Bu tezde öncelikle kuaterniyonlar yardımıyla Öklid uzayında yapılan interpolasyonları incelendi ve bu interpolasyonların Lorentz küreleri üzerinde yapılabilmesi için hipotezleri araştırıldı. Kuaterniyonlar kullanarak şimdiye kadar yapılan çalışmalar Öklid küresi üzerinde yapılmıştır. Bu tezde Lorentz metriği ve split kuaterniyonları kullanarak Lorentz ve Hiperbolic küreleri üzerinde interpolasyonlar yapıldı.

1.1 Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1 : $E_1^3 = (R^3, \langle, \rangle)$, olmak üzere Lorentz-Minkowski uzayı bir metrik uzayıdır. Burada \langle, \rangle Lorentz iç çarpım fonksiyonu

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 \quad u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$

şekilde tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 1.1.2 : $v \in E_1^3$ bir vektör olmak üzere,

- (1) Eğer $\langle v, v \rangle > 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye spacelike vektör denir.
- (2) Eğer $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye lightlike vektör denir. $v = 0$ sıfır vektörü $\langle v, v \rangle = 0$ şartını sağlamasına rağmen spacelike vektör olarak düşünülür.
- (3) Eğer $\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye timelike vektör denir.

Tanım 1.1.3 : $\vec{v} \in E_1^3$ vektörünün normu, $\| \vec{v} \| = \sqrt{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}$ şeklinde tanımlanır. Normu bir olan vektöre de birim vektör denir. Eğer \vec{v} spacelike bir vektör ise normu, $\| \vec{v} \| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ olur. Eğer \vec{v} timelike bir vektör ise normu, $\| \vec{v} \| = \sqrt{-\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ olur (O'Neill 1983).

Tanım 1.1.4 : $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3$ vektörleri için, \vec{u} ve \vec{v} vektörlerinin Lorentziyen vektörel çarpımı $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} -i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = (-(u_2v_3 - u_3v_2), u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

biçiminde tanımlanır (O'Neill 1983).

Teorem 1.1.1 : \vec{u} ve \vec{v} iki timelike vektörleri aynı timelike koni içinde yatar ancak ve ancak $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0$ (O'Neill 1983).

Teorem 1.1.2: (1) \vec{u} ve \vec{v} iki timelike vektör olsun. O zaman

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \geq \sqrt{-\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \sqrt{-\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

dir.

(2) \vec{u} ve \vec{v} nin aynı timelike konide yatan vektörler olması durumunda ise bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır, öyle ki;

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = - \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cosh \varphi$$

Bu φ sayısına \vec{u} ile \vec{v} arasındaki hiperbolik açı adı verilir (O'Neill 1983).

Teorem 1.1.3 : Üç boyutlu Minkowski uzayında $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}$ vektörleri için, aşağıdaki özellikler sağlanır (Özdemir ve Ergin 2006):

- (1) $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$,
- (2) $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \vec{z} - \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y}$,
- (3) \vec{x} ve \vec{y} timelike vektörleri için $\vec{x} \wedge \vec{y}$ vektörü spacelike vektördür. Ayrıca \vec{x} ve \vec{y} arasındaki açı φ olmak üzere

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = - \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cosh \varphi \text{ ve } \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sinh \varphi$$

eşitlikleri sağlanır.

(4) \vec{x} ve \vec{y} , $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| < \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ vektörü timelike vektördür. Ayrıca \vec{x} ve \vec{y} arasındaki açı φ olmak üzere

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \varphi \text{ ve } \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \varphi$$

eşitlikleri sağlanır.

(5) \vec{x} ve \vec{y} , $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| > \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ vektörü spacelike vektördür ve \vec{x} ve \vec{y} arasındaki açı φ olmak üzere

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = - \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cosh \varphi \text{ ve } \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sinh \varphi$$

eşitlikleri sağlanır.

(6) \vec{x} ve \vec{y} , $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ eşitliğini sağlayan spacelike vektörler ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ vektörü lightlike vektördür.

Tanım 1.1.5 : E_1^3 üç boyutlu Minkowski uzayı olsun.

$$H_0^2 = \{ \vec{a} \in E_1^3 : \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \}$$

cümlesine hiperbolik küre ve

$$S_1^2 = \{ \vec{a} \in E_1^3 : \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \}$$

cümlesine Lorentziyen küre denir. H_0^2 nin $(1, 0, 0)$ den geçen pozitif yarım küresi H_0^{2+} ve $(-1, 0, 0)$ den geçen negatif yarım küresi H_0^{2-} ile gösterilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 1.1.6 : Kuarterniyon cebri,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, kj = -jk = i, ki = -ik = j.$$

koşullarını taşıyan $q = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ ($a_i \in R$) sayı dörtlülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişmeli ve bölmeli olmayan bir cebirdir. Bu sayı dörtlülerinin oluşturduğu cümle H ile gösterilir (Hamilton 1853).

Tanım 1.1.7 : H kuarterniyon her kümesi, $q \in H$ için $q = S_q + \vec{V}_q$ şeklinde ifade edilir (Hamilton 1853).

Tanım 1.1.8 : $q = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ ve $p = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k$ reel kuarterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (\vec{V}_q + \vec{V}_p)$$

şeklinde tanımlıdır (Hamilton 1853).

Tanım 1.1.9 : H kuaterniyon kümesi ve $p, q \in H$ için $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ ve $p = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ kuaterniyonlarının, kuaterniyon çarpımı,

$$* : H \times H \rightarrow H$$

$$q * p = S_q S_p - \langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle + S_q \vec{V}_p + S_p \vec{V}_q + \vec{V}_q \wedge \vec{V}_p$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\langle \rangle$ ve \wedge sırasıyla iç çarpım ve vektörel çarpımı göstermektedir (Hamilton 1853).

Tanım 1.1.10 : H kuaterniyon kümesi, $q \in H$ ve $q = S_q + \vec{V}_q$ için, $S_q = 0$ ise, bu durumda q ya saf kuaterniyon denir. İki saf kuaterniyonun çarpımı,

$q = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ ve $p = b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} q * p &= -\langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle + \vec{V}_q \wedge \vec{V}_p \\ &= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Hamilton 1853).

Tanım 1.1.11 : $q = (a_0, a_1, a_2, a_3) = S_q + \vec{V}_q$ bir kuaterniyon olmak üzere, kuaterniyonun eşleniği \bar{q} ile gösterilir ve $\bar{q} = S_q - \vec{V}_q$ şeklinde tanımlanır (Hamilton 1853).

Tanım 1.1.12 Bir q kuaterniyonu için

$$q \cdot \bar{q} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

şeklinde tanımlanır (Hamilton 1853).

Tanım 1.1.13 : $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ kuaterniyonunun normu

$$N_q = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

şeklinde tanımlanır. $N_q = 1$ olduğu zaman, q ya birim kuaterniyon denir. H_1 birim kuaternionlar kümesi olarak gösterelim. Ayrıca $N_q \neq 0$ olmak üzere, $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}$ bir kuaterniyonunun tersini belirtir (Hamilton 1853).

Tanım 1.1.14 : Split kuaterniyon cebiri,

$$i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1,$$

$$ij = -ji = k, kj = -jk = -i, ki = -ik = j$$

koşullarını taşıyan $q = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ ($q_i \in R$) sayı dörtlülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişmeli ve bölmeli olmayan bir cebirdir. Bu sayı dörtlülerinin oluşturduğu cümle H' ile gösterilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 1.1.15 : H' split kuaterniyon kümesi ve $p, q \in H'$ için $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ ve $p = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ split kuaterniyonlarının split kuaterniyon çarpımı,

$$* : H' \times H' \rightarrow H'$$

$$q * p = S_q S_p + \langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle_L + S_q \vec{V}_p + S_p \vec{V}_q + \vec{V}_q \wedge_L \vec{V}_p$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\langle \rangle_L$ ve \wedge_L sırasıyla, Lorentzian iç çarpım ve Lorentzian vektörel çarpımı göstermektedir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 1.1.16 : H' split kuaterniyon kümesi, $q \in H'$ ve $q = S_q + \vec{V}_q$ için, $S_q = 0$ ise, bu durumda q ya saf split kuaterniyon denir. İki saf split kuaterniyonun çarpımı,

$q = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ ve $p = b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} q * p &= \langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle_L + \vec{V}_q \wedge_L \vec{V}_p \\ &= -a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \begin{bmatrix} -i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 1.1.17 : $q = (a_0, a_1, a_2, a_3) = S_q + \vec{V}_q$ bir split kuaterniyon olmak üzere, split kuaterniyonun eşleniği \bar{q} ile gösterilir ve $\bar{q} = S_q - \vec{V}_q$ şeklinde tanımlanır (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 1.1.18 : Bir q split kuaterniyonu için

$$q \cdot \bar{q} = (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 1.1.19 : $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ split kuaterniyonunun normu

$$N_q = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$$

şeklinde tanımlanır. $N_q = 1$ olduğu zaman, q ya birim split kuaterniyon denir. H'_1 birim split kuaternionlar kümesi olarak gösterelim. Ayrıca $N_q \neq 0$ olmak üzere, $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}$ bir split kuaterniyonunun tersini belirtir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 1.1.20 : Kompleks sayılarda ve kuaterniyonlarda olduğu gibi split kuaterniyonlar da kutupsal formda ifade edilebilir. Fakat, split kuaterniyonlarda, split kuaterniyonun spacelike yada timelike olması, hatta timelike kuaterniyonlarda vektörel kısmın timelike ya da spacelike olması bu kutupsal formu değiştirir. Yani, split kuaterniyonlar için ayrı ayrı kutupsal formlar belirtilecektir (Özdemir ve Ergin 2006).

(1) Her $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in H'$ birim spacelike kuaterniyonu

$$\sinh \varphi = \frac{q_1}{N_q}, \cosh \varphi = \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N_q} \text{ ve } \vec{\varepsilon}_0 = \frac{q_2i + q_3j + q_4k}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}$$

olmak üzere,

$$q = N_q (\sinh \varphi + \vec{\varepsilon}_0 \cosh \varphi)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\vec{\varepsilon}_0$ vektörü E_1^3 uzayında spacelike birim vektördür.

(2) Vektörel kısmı spacelike olan her $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in H'$ timelike birim kuaterniyon,

$$\cosh \varphi = \frac{q_1}{N_q}, \sinh \varphi = \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N_q} \text{ ve } \vec{\varepsilon}_0 = \frac{q_2i + q_3j + q_4k}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}$$

olmak üzere,

$$q = N_q (\cosh \varphi + \vec{\varepsilon}_0 \sinh \varphi)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\vec{\varepsilon}_0$ vektörü E_1^3 uzayında spacelike birim vektördür.

(3) Vektörel kısmı timelike olan her $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in H'$ timelike birim kuaterniyon,

$$\cos \varphi = \frac{q_1}{N_q}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}}{N_q} \text{ ve } \vec{\varepsilon}_0 = \frac{q_2i + q_3j + q_4k}{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}}$$

olmak üzere,

$$q = N_q (\cos \varphi + \vec{\varepsilon}_0 \sin \varphi)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\vec{\varepsilon}_0$ vektörü E_1^3 uzayında timelike birim vektördür.

2. ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL LİNEER İNTERPOLASYON: SLERP

Slerp, birim küre üzerinde kuaterniyon yardımıyla interpolasyon yapmamızı sağlar. Diferensiyel geometri açısından, büyük yaylar küre üzerinde jeodezik eğri parçalarıdır. Slerp, birim küre üzerinde sadece büyük yayları oluşturmuyor, ayrıca en kısa yayları oluşturuyor. Böylece Slerp, birim küre üzerindeki iki kuaterniyon arasında en kısa yayı kullanarak interpolasyon yolunu verir. Ayrıca Slerpin sabit açısal hızı vardır. Slerp iki dönme arasında optimum interpolasyon eğrisidir (Dam vd. 1998).

Teorem 2.1.1 : $q_0, q_1 \in H$ olsun. q_0, q_1 dört boyutlu vektörler olarak tanımlansın α , q_0, q_1 aralarındaki açı olsun. Bu durumda $q_0 \cdot q_1 = \|q_0\| \|q_1\| \cos \alpha$ dir (Dam vd. 1998).

Teorem 2.1.2 : H_1 birim kuaternionlar kümesini göstermek üzere $q = [s, v] \in H_1$ olsun. Bu durumda $v' \in R^3$ ve $\theta \in (-\pi, \pi]$ mevcuttur öyle ki $q = [\cos \theta, v' \sin \theta]$ yazılabilir. Burada, v' birim vektördür (Dam vd. 1998).

Teorem 2.1.3 : $q \in H_1, q = [\cos \theta, \sin \theta n]$ olsun. $r = (x, y, z) \in R^3$ ve $p = [0, r] \in H$ alalım. Bu durumda \vec{p} bir vektör ise $p' = qpq^{-1}$ dönüşümü n eksenini etrafında 2θ kadar dönmeyi ifade etmektedir (Dam vd. 1998).

Teorem 2.1.4 : $q = [\cos \varphi, \sin \varphi n(t)] \in H_1, t \in R$ alalım. Bu durumda

$$\frac{d}{dt}q^t = q^t \log(q) \quad (2.1)$$

dir (Dam vd. 1998).

Teorem 2.1.4 : $q \in C^1(R, H_1), r \in C^1(R, R)$ alalım. Bu durumda $q(t) = [\cos \theta(t), \sin \theta(t) \varepsilon_0(t)]$ dir. Böylece

$$\frac{d}{dt}q(t)^{r(t)} = \begin{bmatrix} -\sin(r(t)\theta(t))(r'(t)\theta(t) + r(t)\theta'(t)), \cos(r(t)\theta(t)) \\ (r'(t)\theta(t) + r(t)\theta'(t))\varepsilon_0(t) + \sin(r(t)\theta(t))\varepsilon_0'(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

dir (Dam vd. 1998).

Tanım 2.1.1 : $q_0^{-1}q_1$ Kuaterniyon çarpımı, $u = [\cos \theta, w \sin \theta]$ ve $u^t = [\cos t\theta, w \sin t\theta]$ birim kuaterniyonlar kullanımı ile büyük ölçüde basitleştirilebilir (Dam vd. 1998).

Tanım 2.1.2 : Başlangıcı q_0 tarafından belirtilen ve q_1 ile biten bir dönme için kullanılan kuaterniyon $q_0, q_1 \in H_1$, $q = q_0 (q_0^{-1}q_1)^h$ şeklindedir. Buradan

$$slerp(q_0, q_1, h) = q_0 (q_0^{-1}q_1)^h, h \in [0, 1]$$

şeklinde ifade edilir (Shoemake 1985, Dam vd. 1998).

Teorem 2.1.5 : $slerp(q_0, q_1, h) : H_1 \times H_1 \times [0, 1] \rightarrow H_1$ eğrisi, q_0 ve q_1 kuaterniyonları arasındaki birim küre üzerinde büyük yay oluşturur. Slerpin yer vektörü fonksiyonunun açısal hızı sabittir (Dam vd. 1998).

İspat : Teoremin ispatı için, aşağıdaki dört koşulu kanıtlamak gerekir.

$$slerp(q_0, q_1, 0) = q_0 \quad (2.3)$$

$$slerp(q_0, q_1, 1) = q_1 \quad (2.4)$$

$$\|slerp(q_0, q_1, h)\| = 1, (h \in [0, 1]) \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2}{dh^2}slerp(q_0, q_1, h) = c slerp(q_0, q_1, h), c \leq 0 \in R \quad (2.6)$$

Koşullar (2.3) ve (2.4) exp ve log tanımları kullanılarak gösterilir. (2.5) koşulu aşağıdaki gibi gösterilebilir

$$\|slerp(q_0, q_1, h)\| = \|q_0\| \| (q_0^{-1}q_1)^h \| = 1 \| \exp(h \log(q_0^{-1}q_1)) \| = 1$$

(2.6) koşulunu göstermek için, slerpin ikinci türevi gerekir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh}slerp(q_0, q_1, h) &= \frac{d}{dh}q_0 (q_0^{-1}q_1)^h \\ &= slerp(q_0, q_1, h) \log(q_0^{-1}q_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2}{dh^2} slerp(q_0, q_1, h) = slerp(q_0, q_1, h) \log(q_0^{-1}q_1)^2$$

Eğer $\log(q_0^{-1}q_1)^2$ nin pozitif olmayan bir reel sayı olduğunu gösterirsek (2.6) koşulu geçerli olur. $q_0^{-1}, q_1 \in H_1$ olsun. Bu durumda $q_0^{-1}q_1 \in H_1$ olur. O zaman $\theta \in R$ ve $v \in R^3, \|v\| = 1$ mevcuttur, öyle ki $q = [\cos \theta, v \sin \theta]$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \log(q_0^{-1}q_1)^2 &= [0, \theta v]^2 \\ &= [-\theta^2 v \cdot v, \theta^2 v \times v] \\ &= [-\theta^2, 0] \end{aligned}$$

Böylece $\frac{d^2}{dh^2} slerp(q_0, q_1, h) = cslerp(q_0, q_1, h)$ ve $c = -\theta^2 \leq 0$. q_0 ve q_1 kuaterniyon arasındaki $slerp(q_0, q_1, h), h \in [0, 1]$ büyük bir yay içerdiğini gösterdik.

Lema 2.1.1 : $q_0 = [s_0, v_0], q_1 = [s_1, v_1], q_2 = [s_2, v_2] \in H$ alalım. Böylece

$$(q_0q_1) \cdot (q_0q_2) = \|q_0\|^2 (q_1 \cdot q_2) \quad (2.8)$$

yazılabilir (Dam vd. 1998).

Teorem 2.1.6 : $q_0, q_1 \in H_1$ olsun. Bu durumda $slerp(q_0, q_1, h), h \in [0, 1]$, q_0 ve q_1 kuaterniyon arasındaki birim küre üzerinde en kısa uzunluğa sahip büyük bir yay oluşturur (Dam vd. 1998).

İspat : $q_{\frac{1}{2}} = slerp(q_0, q_1, \frac{1}{2})$ olsun ve α yı q_0 ve q_1 arasındaki açı alalım. $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ancak ve ancak $slerp$ en kısa yayı verir. Bu ise $\cos \alpha \in [0, 1]$ olmasına eşdeğerdir. Bu nedenle $\cos \alpha$ nın işaretini inceleyelim.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= q_0 \cdot q_{\frac{1}{2}} \\ &= q_0 \cdot slerp\left(q_0, q_1, \frac{1}{2}\right) \\ &= q_0 \cdot (q_0 (q_0^{-1}q_1)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$q_0^{-1}, q_1 \in H_1$ olsun. Bu durumda $q_0^{-1}q_1 \in H_1$ olur. O zaman $w \in R^3$ ve $\psi \in (-\pi, \pi]$,

$|w| = 1$ mevcuttur öyle ki $q = [\cos \psi, w \sin \psi]$. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= q_0 \cdot \left(q_0 [\cos \psi, w \sin \psi]^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= q_0 \cdot \left(q_0 \exp \left(\left(\frac{1}{2} \right) \log [\cos \psi, w \sin \psi] \right) \right) \\
&= q_0 \cdot \left(q_0 \exp \left(\left[0, \left(\frac{\psi}{2} \right) w \right] \right) \right) \\
&= q_0 \cdot \left(q_0 \left[\cos \left(\frac{\psi}{2} \right), \sin \left(\frac{\psi}{2} \right) w \right] \right) \\
&= (q_0 [1, 0]) \cdot \left(q_0 \left[\cos \left(\frac{\psi}{2} \right), \sin \left(\frac{\psi}{2} \right) w \right] \right)
\end{aligned}$$

(2.8) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\| q_0 \|^2 \left([1, 0] \cdot \left[\cos \left(\frac{\psi}{2} \right), \sin \left(\frac{\psi}{2} \right) w \right] \right) \\
&= \| q_0 \|^2 \cos \left(\frac{\psi}{2} \right) \\
&= \cos \left(\frac{\psi}{2} \right)
\end{aligned}$$

$\psi \in (-\pi, \pi]$ ise $\cos \left(\frac{\psi}{2} \right) \geq 0$ sağlar ve bu nedenle $\cos \alpha \geq 0$ dir. Bu durumda slerp q_0 ve q_1 arasındaki en kısa büyük yayı oluşturur.

Tanım 2.1.3 : Başlangıcı q_0 tarafından belirtilen ve q_1 ile biten bir dönme için kullanılan kuaterniyon $q_0, q_1 \in H_1$, $q = q_0 (q_0^{-1} q_1)^h$ şeklindedir. Buradan

$$slerp(q_0, q_1, h) = q_0 (q_0^{-1} q_1)^h, \quad h \in [0, 1] \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir. slerp için diğer bir eşitlik

$$slerp(q_0, q_1, h) = \frac{q_0 \sin((1-h)\theta) + q_1 \sin(h\theta)}{\sin \theta} \quad (2.10)$$

ile verilebilir. Burada, $q_0 \cdot q_1 = \cos \theta$ dir. (2.10) ifadesinin doğruluğu düzlemde

gösterilebilir. q_0 ve q_1 arasında interpolasyon

$$q(h) = \begin{pmatrix} \cos(v + ht) \\ \sin(v + ht) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (2.10) ifadesinin doğruluğu için sinüs ve kosinus ek formülleri kullanma yoluyla yazılır.

$$\begin{aligned} \text{slerp}(q_0, q_1, h) &= \frac{q_0 \sin((1-h)t) + q_1 \sin(ht)}{\sin(t)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(v) \sin((1-h)t) + \cos(v+t) \sin(ht)}{\sin(t)} \\ \frac{\sin(v) \sin((1-h)t) + \sin(v+t) \sin(ht)}{\sin(t)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(v) \cos(ht) - \sin(v) \sin(ht) \\ \sin(v) \cos(ht) + \cos(v) \sin(ht) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(v + ht) \\ \sin(v + ht) \end{pmatrix} \\ &= q(h) \end{aligned}$$

Böylece, (2.10) ifadenin doğruluğu düzlemde kanıtlanmıştır. Bu sonuç, dört boyutta (2.10) ifadesinin kanıtlanması ile genelleştirilebilir (Dam vd. 1998).

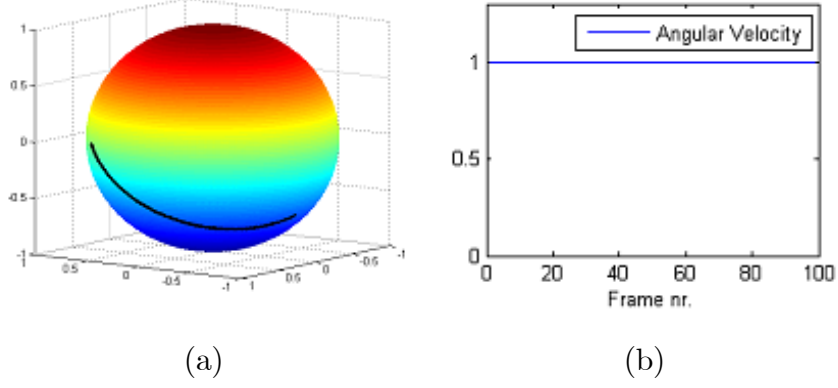
2.1 Açısal hızın yaklaşık gösterimi

Interpolasyon eğrisinin açısal hızını görselleştirmek istiyoruz. Örneğin bazı interpolasyon eğrilerinin sabit açısal hıza sahip olduklarını görmek ilginç olacaktır. Aşağıda, q_i i-yinci kuaterniyonu gösterir yani ayrık kuaterniyonun interpolasyon eğrisinde i-yinci kuaterniyon olur. Açısal hız grafiğini üretmek için, yaklaşık açısal hızı veren bir fonksiyonu tanımlamak gerekir. Matematik tanımı esas alınır ve kuaterniyonlar normu kullanılır. q_0, q_1 iki kuaterniyonlar arasındaki uzaklık $d(q_0, q_1) = \|q_0 - q_1\|$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda q_i i-yinci kuaterniyonun V açısal hızı

yaklaşık olarak

$$V(q_i) = \frac{d(q_i, q_{i-1}) + d(q_i, q_{i+1})}{2} = \frac{\|q_i - q_{i-1}\| + \|q_i - q_{i+1}\|}{2}$$

alınabilir (Dam vd. 1998).



Şekil 2.1 İnterpolasyon şekiller, MATLAB R2010a kullanılarak simülasyon edilmiştir.

- Öklid uzayında iki kuaterniyon arasındaki interpolasyon
- Kuaterniyon interpolasyonunun açısal hız grafiği

2.2 Öklid Uzayında Hızlı Slerp

(2.10) denkleminde

$$q(h) = q_0 \frac{\sin((1-h)\theta)}{\sin\theta} + q_1 \frac{\sin(h\theta)}{\sin\theta} \quad (2.11)$$

$$q(h) = q_0 \frac{\sin\theta \cos(h\theta) - \cos\theta \sin(h\theta)}{\sin\theta} + q_1 \frac{\sin(h\theta)}{\sin\theta} \quad (2.12)$$

$$q(h) = q_0 \cos(h\theta) - q_0 \frac{\cos\theta \sin(h\theta)}{\sin\theta} + q_1 \frac{\sin(h\theta)}{\sin\theta} \quad (2.13)$$

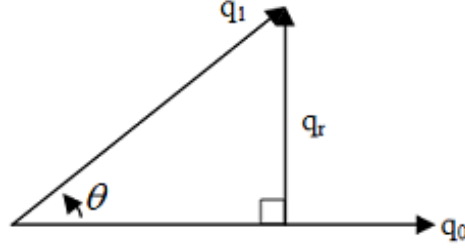
yazılabilir. (2.13) denkleminde $\cos\theta = q_0 \cdot q_1$ ve $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ yazılırsa,

$$q(h) = q_0 \cos(h\theta) + \frac{q_1 - q_0(q_0 \cdot q_1)}{\sqrt{1 - (q_0 \cdot q_1)^2}} \sin(h\theta) \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) denkleminin son terimi Gram-Schmidt ortogonalleştirme algoritmasından q_0 dik olan terimdir. Bu terimi

$$q_r = q_1 - \frac{(q_0 \cdot q_1)}{\|q_0\|^2} q_0 \quad (2.15)$$

$\|q_0\|^2 = 1$ olduğundan



Şekil 2.2 Gram-Schmidt ortogonalleştirme

$$q_r = q_1 - (q_0 \cdot q_1) q_0 \quad (2.16)$$

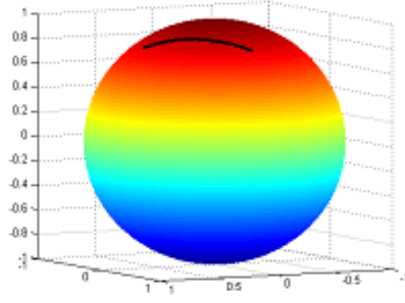
şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla, (2.11) denklemi

$$q(h) = q_0 \cos(h\theta) + q_r \sin(h\theta) \quad (2.17)$$

dir. Böylece (2.10) denklemi

$$q(n) = q_0 \cos(nk_\theta) + q_r \sin(nk_\theta) \quad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir. q_r kuaterniyonu q_0 dik ve q_0 ve q_1 tarafından üretilen aynı hiperdüzlemde yatıyor. Ayrıca, iki kuaterniyon arasında seçilen nokta sayısı k olmak üzere iki kuaterniyon arasındaki açı $k_\theta = \frac{\cos^{-1}(q_0 \cdot q_1)}{k}$ dir. Böylece (2.18) eşitliği yardımıyla yapılan Slerpin ifadesi (2.10) eşitliği kullanılarak yapılan Slerpin ifadesinden daha basittir. (2.18) ifadesinin paydasındaki terim yoktur. Bu bakımdan hesaplamalar daha hızlı yapılmaktadır (Barrera vd. 2004).



Şekil 2.3 Öklid uzayında iki kuaterniyon arasındaki Hızlı Slerp

2.3 Öklid Uzayında De Moivre kullanarak Slerp üretimi

Bu bölümde kompleks sayılar ve De Moivre teoremi kullanılarak Slerpin (2.10) ile verilen denklemine göre daha basit hali gösterilecektir. Karmaşık sayılar,

$$Z = a + ib \quad (2.19)$$

şeklinde gösterilir. $i^2 = -1$ özelliğini sağlayan sanal birime i denir. De Moivre formülü

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (2.20)$$

dir. Formülün sağ kısmı (2.18) denklemine çok benzer. Bir birim kompleks sayı

$$Z = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta) \quad (2.21)$$

yazılabilir. Ayrıca, kompleks sayılar 2 boyutlu uzayda vektörlerin skaler çarpımını kullanarak tanımlanabilir. Bu yüzden

$$(q_0, q_r) \bullet (R(z), I(z)) = q_0 R(z) + q_r I(z) \quad (2.22)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, Slerp

$$q(n) = (q_0, q_r) \bullet Z^n \quad (2.23)$$

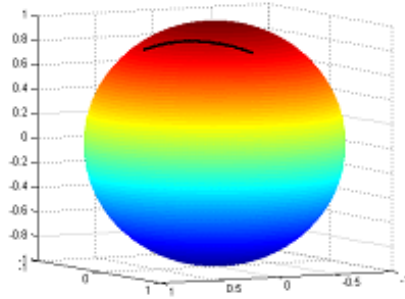
bulunur. (2.20) denklemini kullanarak (2.23) denklemini

$$\begin{aligned} q(n) &= (q_0, q_r) \bullet Z^n \\ &= (q_0, q_r) \bullet (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Burada (2.22) denklemini kullanarak, bu denklemini

$$q(n) = q_0 \cos(nk_\theta) + q_r \sin(nk_\theta) \quad (2.25)$$

geliştirebiliriz (Barrera vd. 2004).



Şekil 2.4 Öklid uzayında De Moivre kullanarak iki kuaterniyon arasındaki Slerp

2.4 Öklid Uzayında Hızlı De Moivre kullanarak Slerp üretimi

Bu kesimde, kesim 2.2 yaklaşım için alternatif hızlı bir yaklaşım gösterilecektir. Bu yüzden (2.10) denklemini

$$\hat{q}_0 = \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) q_0 \text{ and } \hat{q}_1 = \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) q_1 \quad (2.26)$$

ve

$$q(t) = \hat{q}_0(\sin \theta \cos(t\theta) - \cos \theta \sin(t\theta)) + \hat{q}_1(\sin(t\theta)) \quad (2.27)$$

yazılabilir. Ancak (2.27) denklemini

$$q(t) = \hat{q}_0(\sin \theta \cos(k\theta_N) - \cos \theta \sin(k\theta_N)) + \hat{q}_1(\sin(k\theta_N)) \quad (2.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $0 \leq k \leq N$, $\theta_N = \frac{\theta}{N}$ dir.

(2.28) denkleminde K-ıncı interpolasyonun hesaplanması için , \hat{q}_0 ve \hat{q}_1 lineer birleşimi hesaplamadan önce $\sin(k\theta_N)$ ve $\cos(k\theta_N)$ hesaplanması gerekir. Bu yüzden fazla trigonometrik fonksiyonlar kullanmak yerine De Moivre teoremi

$$(\cos \theta_N + i \sin \theta_N)^k = \cos(k\theta_N) + i \sin(k\theta_N) \quad (2.29)$$

kullanabilir. (2.29) denklemini kullanarak

$$Z = \cos \theta_N + i \sin \theta_N \quad (2.30)$$

hesaplayabiliriz. Ayrıca

$$\cos[(N - k)\theta_N] = \cos \theta \cos(k\theta_N) + \sin \theta \sin(k\theta_N) \quad (2.31)$$

ve

$$\sin[(N - k)\theta_N] = \sin \theta \cos(k\theta_N) - \cos \theta \sin(k\theta_N) \quad (2.32)$$

yazılabilir. Böylece (N-k) inci interpolasyon

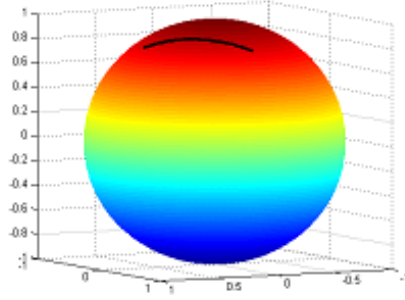
$$\hat{q}_0 (\sin \theta \cos((N - k)\theta_N) - \cos \theta \sin((N - k)\theta_N) + \hat{q}_1 \sin((N - k)\theta_N) \quad (2.33)$$

bulunur. (2.33) denklemini aşağıdaki formda

$$q(N - k) = \hat{q}_0 (\sin(k\theta_N)) + \hat{q}_1 (\sin \theta \cos(k\theta_N) - \cos \theta \sin(k\theta_N)) \quad (2.34)$$

bulunur. (2.34) denkleminde \hat{q}_0 katsayısı (2.28) denkleminde \hat{q}_1 nin katsayısına aynı ve (2.34) denkleminde \hat{q}_1 katsayısı (2.28) denkleminde \hat{q}_0 nin katsayısına aynıdır.

Burada belirtilen yöntem, kesim 2.2 de belirtilen yöntemden daha hızlıdır. Sadece temel trigonometrik formüller daha basit olmuştur (Leeney 2009).



Şekil 2.5 Öklid uzayında iki kuaterniyon arasındaki Hızlı De Moivre kullanarak Slerp

2.5 Deneysel sonuçlar

Kuaterniyon interpolasyonu için özetlenen çeşitli yöntemler Intel(R), Core(TM), Duo CPU 2.00 GHz, 2.00 GHz of RAM makine üzerinde test edilmiş ve aşağıdaki tabloda sonuçlar vermiştir. Değerler mili saniye 'de verilmiştir. interpolasyon 10 kez tekrarlanmıştır. Aşağıdaki Çizelge De Moivre 2.2 bölümünde belirtilen yöntemi ifade ediyor ve hızlı De Moivre bu bölümde özetlenen yöntemi ifade ediyor (Leeney 2009).

Çizelge 2.1 Zamanlama Yöntemleri Öklid uzayında

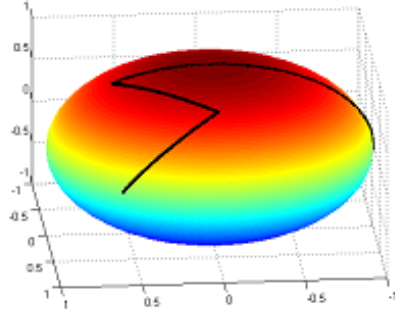
N = 10	DeMoiver	HDeMoiver	HSlerp	Slerp
Ortalama	6.08	3.48	6.25	14.5
Standart Sapma	1.90	5.49	1.61	2.61
Basıklık	0.0036	0.0033	0.0034	1.8
Çarpıklık	0.0090	0.0014	0.0094	0.071

2.6 Öklid Uzayında Spline Kuaterniyon İnterpolasyon: Squad

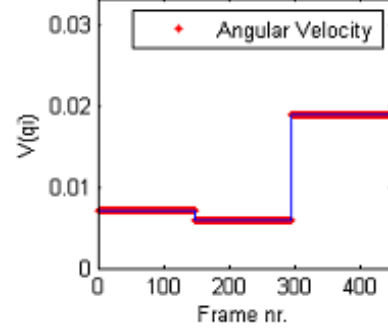
İki dönme arasında (slerp) interpolasyon optimaldir. Ama bir dizi dönmeler arasındaki interpolasyonda aşağıdaki sorunlar ortaya çıkıyor:

- (a) Eğri kontrol noktalarında düzgün değildir.
- (b) Açısal hızı sabit değil

(c) Açısal hızı kontrol noktalarında sürekli değildir.



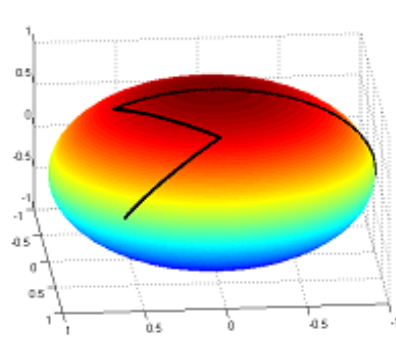
(a)



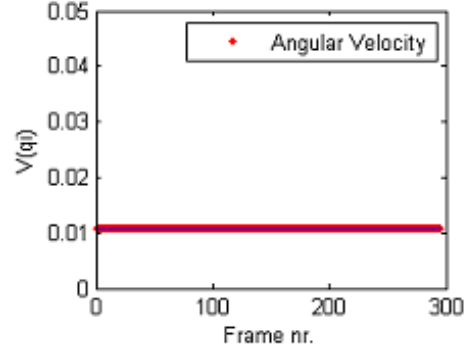
(b)

Şekil 2.6 a. Öklid uzayında dört kuaterniyon arasındaki interpolasyon
b. Kuaterniyon interpolasyonunun açısal hız grafiği

Bir reparametrizasyon ile kolayca tüm interpolasyon boyunca süreklilik sağlanabilir. Aslında interpolasyon parametresi her çift anahtar frame arasında bir dizi ayrık frame haline dönüştürülür ve böylece reparametrizasyon her aralıkta aralığın büyüklüğüne göre frame sayısı belirlemesine karşılık gelir. Bir aralığın büyüklüğü iki çift anahtar frame q_i, q_{i+1} arasındaki açı $\cos \theta = q_i \cdot q_{i+1}$ ile ölçülebilir.



(a)



(b)

Şekil 2.7 a. Öklid uzayında dört kuaterniyon arasındaki interpolasyon

b. Kuaterniyon interpolasyonunun reparametrizasyondan sonra açılmal hızı

Bu düzgünlük sorununu gidermek kolay değildir. Benzer olarak interpolasyon iki nokta arasında düzlemde bir düz doğru ile kolaydır. Ama basit Öklid uzayında bile bir dizi noktalar arasında düzgün bir interpolasyon oluşturmak karmaşıktır. Kübik eğrileri düzleminde bir dizi kontrol noktaları arasındaki interpolasyonlarda farklı türde tipik olarak kullanılır. Örneğin bu eğriler inşası oldukça basit olan Bezier eğrileri ile yapılabilir. C^2 eğri parçaları arasında süreklilik elde etmek için, bir kübik interpolasyon yapılmalıdır. Kuaterniyon uzayında bu biraz karmaşıktır. Kullanılan yöntemde, bir kübik interpolasyon oluşturmak için üç lineer interpolasyon kullanılmalıdır. İlk veri noktaları ve diğer iki (özenle seçilmiş) noktalar arasında ve ardından lojistik denklem $2h(1-h)$ tarafından belirlenen bir miktarda kalan noktalar arasında interpolasyon yapılır. Yardımcı noktalar düzgün bir şekilde seçilirse, daha sonra C^2 nin sürekliliği sağlanabilir. Squad fonksiyonu veri noktaları arasında bir kübik interpolasyon (birim kuaterniyon) q_1 and q_2 noktaları ve $h \in [0, 1]$ miktarı ile aşağıdaki gibi

$$squad(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, h) = slerp(slerp(q_i, q_{i+1}, h), slerp(s_i, s_{i+1}, h), 2h(1-h))$$

belirtilir. s_i ve s_{i+1} inner quadrangle noktaları denir ve böylece bu sürekliliği seg-

mentlerinde garanti olması için dikkatle seçilmelidir.

bir dizi $\{q_n\}_{n=0}^{N-1}$ birim kuaterniyon göz önüne alındığında türevleri sürekli ve kontrol noktaları üzerinden geçmesi koşulları kuaterniyon interpolasyon ile bir spline eğrisi inşa etmek istiyoruz. İdda s_i ve s_{i+1} kuaterniyonların arasında spline segmentlerinde uç noktaları türevlerinin kontrolüne izin vermek için bir seçim yapmaktır. Squad tanımını ile kolayca

$$\begin{aligned} S_{i-1}(1) &= \text{squad}(q_{i-1}, q_i, s_{i-1}, s_i, 1) = \text{slerp}(\text{slerp}(q_{i-1}, q_i, 1), \text{slerp}(s_{i-1}, s_i, 1), 0) \\ &= q_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_i(0) &= \text{squad}(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, 0) = \text{slerp}(\text{slerp}(q_i, q_{i+1}, 0), \text{slerp}(s_i, s_{i+1}, 0), 0) \\ &= q_i \end{aligned}$$

$$S_{i-1}(1) = q_i = S_i(0)$$

gösterilir. Böylece squad sürekli ve kontrol noktalarında doğru bir değeri vardır. Ardarda iki spline segmentleri türevleri eşleştirmek için uç noktaları sürekli türevleri elde etmek için

$$S'_{i-1}(1) = S'_i(0) \tag{2.35}$$

Şimdi squadın kontrol noktalarında sürekli olarak türevlenebilir olmasını göstereceğiz

$$\frac{d}{dt} \text{squad}(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, 0) = \frac{d}{dt} \text{squad}(q_{i-1}, q_i, s_{i-1}, s_i, 1)$$

Squadın türevini bulmak için, Slerp'in türevi gerekiyor

$$g_i(h) = \text{slerp}(q_i, q_{i+1}, h)^{-1} \text{slerp}(s_i, s_{i+1}, h)$$

Şimdi $S_i(t) = \text{squad}(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, h)$ türevini bulmak gerekir

$$\begin{aligned} S'_i(t) &= \text{squad}(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, h) \\ &= \frac{d}{dt} \text{slerp}(\text{slerp}(q_i, q_{i+1}, h), \text{slerp}(s_i, s_{i+1}, h), 2h(1-h)) \\ &\quad \frac{d}{dt} (\text{slerp}(q_i, q_{i+1}, h) g_i(h)^{2h(1-h)}) \end{aligned}$$

(2.2) denkleminde

$$\frac{d}{dt} g_i(h)^{2h(1-h)} = \begin{bmatrix} -\sin(2h(1-h)\theta_{g_i(h)}) ((2-4h)\theta_{g_i(h)} + 2h(1-h)\theta_{g'_i(h)}), \\ \cos(2h(1-h)\theta_{g_i(h)}) ((2-4h)\theta_{g_i(h)} + 2h(1-h)\theta_{g'_i(h)}) \varepsilon_{0g_i(h)} \\ + \sin(2h(1-h)\theta_{g_i(h)}) h_{g'_i(h)} \end{bmatrix}$$

Aşağıda $\frac{d}{dt} (g_{i-1}(h)^{2h(1-h)})$ (1) değeri 1 olarak uygulanan $g_{i-1}(h)^{2h(1-h)}$ ifadesinin türevi yazılabilir. (2.2) denkleminde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{squad}(q_{i-1}, q_i, s_{i-1}, s_i, 1) &= \text{slerp}(q_{i-1}, q_i, 1) \log(q_{i-1}^{-1}, q_i) \\ &\quad + \text{slerp}(q_{i-1}, q_i, 1) \frac{d}{dt} (g_{i-1}(h)^{2h(1-h)}) (1) \\ &= q_i \log((q_{i-1}^{-1}, q_i) - 2 \log(q_i^{-1} s_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{squad}(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, 0) &= \text{slerp}(q_i, q_{i+1}, 0) \log(q_i^{-1}, q_{i+1}) \\ &\quad + \text{slerp}(q_i, q_{i+1}, 0) \frac{d}{dt} (g_i(h)^{2h(1-h)}) (0) \\ &= q_i \log((q_i^{-1}, q_{i+1}) + 2 \log(q_i^{-1} s_i)) \end{aligned}$$

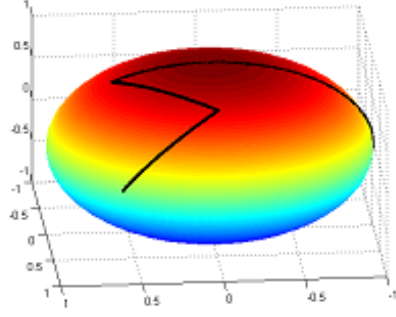
yazılabilir. (2.35) denkleminde

$$q_i \log((q_{i-1}^{-1}, q_i) - 2 \log(q_i^{-1} s_i)) = q_i \log((q_i^{-1}, q_{i+1}) + 2 \log(q_i^{-1} s_i))$$

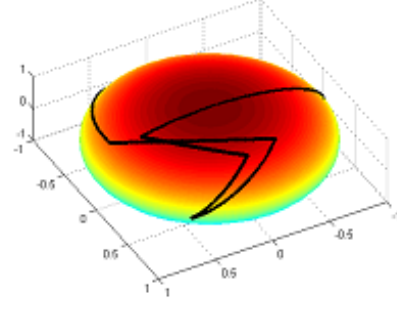
$$s_i = q_i \exp\left(-\frac{\log(q_i, q_{i-1}^{-1}) + \log(q_i^{-1}, q_{i+1})}{4}\right)$$

yazılabilir. Böylece squad yukarıdaki gibi tanımlanan s_i ile kontrol noktalarında sürekli türevlenebilir. Aslında squadın tüm segmentleri arasında sürekli ve sürekli

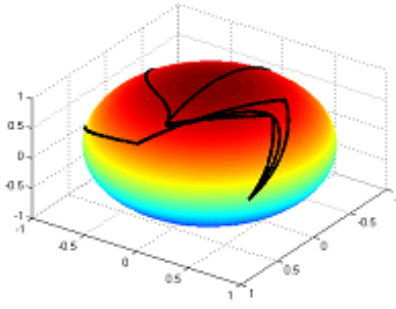
olarak türevlenebilir olduğunu göstermiş olduk (Dam vd. 1998).



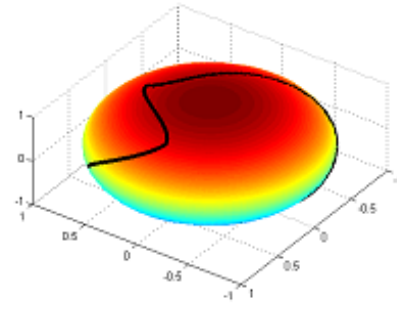
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 2.8 a. Öklid uzayında dört kuaterniyon arasındaki interpolasyonu
b. Kuaterniyon ve inner quadrangle interpolasyonun kombinasyonu
c. Inner quadrangle noktalarını kullanarak Düzleştirilmiş eğri
d. Squad eğrisi

3. MINKOWSKI UZAYINDA HİPERBOLİK KÜRESİ ÜZERİNDE LİNEER İNTERPOLASYON

Bu bölümde hiperbolic küre üzerinde interpolasyon hesaplanır. Bu interpolasyon Lorentz metriği ve split kuaterniyonları kullanarak yapılır. Bu interpolasyon eğrileri lineer split kuaterniyon interpolasyon Minkowski uzayında (*Mslerp*) ve spline split kuaterniyon interpolasyon Minkowski uzayında (*Msqquad*) olarak tanımlanır.

3.1 Hiperbolik Küresi Üzerinde Lineer İnterpolasyon

Teorem 3.1.1 : $q = \cosh \varphi + \vec{\varepsilon}_0 \sinh \varphi$ timelike kuaterniyon ve vektörel kısmı spacelike olsun. $\vec{\varepsilon}$, üç boyutlu Minkowski uzayında Lorentzian bir vektör ise,

$$R_q = q \times \vec{\varepsilon} \times q^{-1}$$

dönüşümü, $\vec{\varepsilon}_0$ spacelike eksenini etrafında 2φ kadar hiperbolik dönmeyi ifade eder (Özdemir, Ergin 2006).

Teorem 3.1.2 : $q = \cos \varphi + \vec{\varepsilon}_0 \sin \varphi$ timelike kuaterniyon ve vektörel kısmı timelike olsun. $\vec{\varepsilon}$, üç boyutlu Minkowski uzayında Lorentzian bir vektör ise,

$$R_q(\varepsilon) = q \times \vec{\varepsilon} \times q^{-1}$$

dönüşümü, $\vec{\varepsilon}_0$ timelike eksenini etrafında 2φ kadar hiperbolik dönmeyi ifade eder (Özdemir, Ergin 2006).

Teorem 3.1.3 : $q = [\cosh \varphi, \sinh \varphi n(t)] \in H_1', t \in R$ alalım. Bu durumda

$$\frac{d}{dt} q^t = q^t \log(q) \quad (3.1)$$

dir.

Teorem 3.1.4 : $q \in C^1(R, H'_1), r \in C^1(R, R)$ alalım. Bu durumda $q(t) = [\cosh \varphi(t), \sinh \varphi(t) n(t)]$ dir. Böylece

$$\frac{d}{dt} q(t)^{r(t)} = \begin{bmatrix} \sinh(r(t) \varphi(t)) (r'(t) \varphi(t) + r(t) \varphi'(t)), \cosh(r(t) \varphi(t)) \\ (r'(t) \varphi(t) + r(t) \varphi'(t)) n(t) + \sinh(r(t) \varphi(t)) n'(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dir.

Tanım 3.1.1 : $q_0^{-1} q_1$ split kuaterniyon çarpımı, $u = [\cosh \varphi, w \sinh \varphi]$ ve $u^t = [\cosh(t\varphi), w \sinh(t\varphi)]$ birim split kuaterniyonlar kullanımı ile büyük ölçüde basitleştirilebilir.

Tanım 3.1.2 : Başlangıcı q_0 tarafından belirtilen ve q_1 ile biten bir dönme için kullanılan split kuaterniyon $q_0, q_1 \in H'_1, q = q_0 (q_0^{-1} q_1)^n$ şeklindedir. Buradan

$$Mslerp(q_0, q_1, n) = q_0 (q_0^{-1} q_1)^n, n \in [0, 1]$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.1.5 : $Mslerp(q_0, q_1, n) : H'_1 \times H'_1 \times [0, 1] \rightarrow H'_1$ eğrisi q_0 ve q_1 split kuaterniyon arasındaki birim hiperbolik küre üzerinde büyük yay, oluşturur. Slerpin yer vektörü fonksiyonunun açısal hızı sabittir.

İspat: Teoremin ispatı için aşağıdaki beş koşulu kanıtlamak gerekir.

$$Mslerp(q_0, q_1, 0) = q_0 \quad (3.3)$$

$$Mslerp(q_0, q_1, 1) = q_1 \quad (3.4)$$

$$\|Mslerp(q_0, q_1, n)\| = 1, (n \in [0, 1]) \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2}{dn^2} Mslerp(q_0, q_1, n) = c Mslerp(q_0, q_1, n), c > 0 \in R \vec{w} * \vec{w} = 1 \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2}{dn^2} Mslerp(q_0, q_1, n) = c Mslerp(q_0, q_1, n), c \leq 0 \in R \vec{w} * \vec{w} = -1 \quad (3.7)$$

Koşullar (3.3) ve (3.4) *exp* ve *log* tanımları kullanılarak gösterilir (3.5) koşulu aşağı-

daki gibi gösterilebilir.

$$\| Mslerp(q_0, q_1, n) \| = \| q_0 \| \| (q_0^{-1}q_1)^n \| = 1 \| \exp(n \log(q_0^{-1}q_1)) \| = 1$$

(3.6) koşulunu göstermek için, (3.1) denkleminde MSlerpin ikinci türevi gerekir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} Mslerp(q_0, q_1, n) &= \frac{d}{dn} q_0 (q_0^{-1}q_1)^n \\ &= Mslerp(q_0, q_1, n) \log(q_0^{-1}q_1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2}{dn^2} Mslerp(q_0, q_1, n) = Mslerp(q_0, q_1, n) \log(q_0^{-1}q_1)^2$$

Eğer $\log(q_0^{-1}q_1)^2$ nin pozitif bir reel sayı olduğunu gösterirsek (3.6) koşulu geçerli olur. $q_0^{-1}, q_1 \in H'_1$ olsun. Bu durumda $q_0^{-1}q_1 \in H'_1$ olur. O zaman $\varphi \in R$, ve $w \in E_1^3$, $\vec{w} * \vec{w} = 1$ mevcuttur ve \vec{w} bir spacelike birim vektördür öyle ki $q_0^{-1}q_1 = [\cosh \varphi, w \sinh \varphi]$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \log(q_0^{-1}q_1)^2 &= [0, h\varphi w]^2 \\ &= [h^2\varphi^2 w \cdot w, h^2\varphi^2 w \times w] \\ &= [h^2\varphi^2, 0] \end{aligned}$$

Böylece $\frac{d^2}{dn^2} Mslerp(p, q, n) = c Mslerp(p, q, n)$ ve $c = h^2\varphi^2 > 0$ olur.

(3.7) koşulunu göstermek için, (3.1) denkleminde Mslerpin ikinci türevi gerekir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} Mslerp(q_0, q_1, n) &= \frac{d}{dn} q_0 (q_0^{-1}q_1)^n \\ &= Mslerp(q_0, q_1, n) \log(q_0^{-1}q_1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2}{dn^2} Mslerp(q_0, q_1, n) = Mslerp(q_0, q_1, n) \log(q_0^{-1}q_1)^2$$

Eğer $\log(q_0^{-1}q_1)^2$ nin pozitif olmayan bir reel sayı olduğunu gösterirsek (3.7) koşulu geçerli olur. $q_0^{-1}, q_1 \in H'_1$ olsun. Bu durumda $q_0^{-1}q_1 \in H'_1$ olur. O zaman $\varphi \in R$, ve $w \in E_1^3$, $\vec{w} * \vec{w} = -1$ mevcuttur ve \vec{w} bir timelike birim vektördür öyle ki $q_0^{-1}q_1 =$

$[\cos \varphi, \sin \varphi w]$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \log (p^{-1}q)^2 &= [0, \varphi w]^2 \\ &= [\varphi^2 w \cdot w, \varphi^2 w \times w] \\ &= [-\varphi^2, 0] \end{aligned}$$

Böylece $\frac{d^2}{dn^2} Mslerp(q_0, q_1, n) = c Mslerp(q_0, q_1, n)$ ve $c = -\varphi^2 \leq 0$ olur. q_0 ve q_1 split kuaterniyon arasındaki $Mslerp(q_0, q_1, n), n \in [0, 1]$ büyük bir yay içerdiğini gösterdik.

Teorem 3.1.6 : $q_0, q_1 \in H'_1$ olsun. Bu durumda $Mslerp(q_0, q_1, n), n \in [0, 1]$, q_0 ve q_1 birim split kuaterniyon arasındaki hiperbolic küre üzerinde en kısa uzunluğa sahip büyük bir yay oluşturur.

İspat: $q_{\frac{1}{2}} = Mslerp(q_0, q_1, \frac{1}{2})$ olsun ve α yı q_0 ve $q_{\frac{1}{2}}$ arasındaki hiperbolic açı alalım. $\alpha \in R^+, \cosh \alpha \geq 0$ ve $\cosh \alpha \in [0, \infty)$ ancak ve ancak slerp en kısa yayı verilsin.

$$\begin{aligned} \cosh \alpha &= q_0 \cdot q_{\frac{1}{2}} \\ &= q_0 \cdot Mslerp\left(q_0, q_1, \frac{1}{2}\right) \\ &= q_0 \cdot (q_0 (q_0^{-1}, q_1)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$q_0^{-1}, q_1 \in H'_1$ olsun. Bu durumda $q_0^{-1}q_1 \in H'_1$ olur. O zaman $w \in E_1^3$ ve $|w| = 1$ mevcuttur, öyle ki $q_0^{-1}q_1 = [\cosh \varphi, w \sinh \varphi]$. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
\cosh \alpha &= q_0 \cdot \left(q_0 [\cosh \varphi, w \sinh \varphi]^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= q_0 \cdot \left(q_0 \exp \left(\left(\frac{1}{2} \right) \log [\cosh \varphi, w \sinh \varphi] \right) \right) \\
&= q_0 \cdot \left(q_0 \exp \left(\left[0, h \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] w \right) \right) \\
&= q_0 \cdot \left(q_0 \left[\cosh \left(\frac{\varphi}{2} \right), \sinh \left(\frac{\varphi}{2} \right) w \right] \right) \\
&= (q_0 \cdot [1, 0]) \cdot \left(q_0 \left[\cosh \left(\frac{\varphi}{2} \right), \sinh \left(\frac{\varphi}{2} \right) w \right] \right) \\
&= \| q_0 \|^2 \left([1, 0] \cdot \left[\cosh \left(\frac{\varphi}{2} \right), \sinh \left(\frac{\varphi}{2} \right) w \right] \right) \\
&= \| q_0 \|^2 \cosh \left(\frac{\varphi}{2} \right) \\
&= \cosh \left(\frac{\varphi}{2} \right)
\end{aligned}$$

$\cosh \left(\frac{\psi}{2} \right) \geq 0$ sağlar ve bu nedenle $\cosh \alpha \geq 0$ dir. Bu durumda slerp q_0 ve q_1 birim split kuaterniyon arasındaki hiperbolic küresi üzerinde en kısa büyük yayı oluşturur.

Tanım 3.1.3 : Başlangıcı q_0 tarafından belirtilen ve q_1 ile biten bir dönme için kullanılan split kuaterniyon $q_0, q_1 \in H'_1$, $q = q_0 (q_0^{-1} q_1)^n$ şeklindedir. Buradan

$$Mslerp(q_0, q_1, n) = q_0 (q_0^{-1} q_1)^n, \quad n \in [0, 1] \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir. MSlerp için diğer bir eşitlik

$$Mslerp(q_0, q_1, n) = \frac{q_0 \sinh((1-n)\varphi) + q_1 \sinh(n\varphi)}{\sinh \varphi} \quad (3.11)$$

ile verilebilir. Burada, $-\langle q_0, q_1 \rangle = \cosh \varphi$ dir. (3.11) ifadesinin doğruluğu düzlemde gösterilebilir. q_0 ve q_1 arasında interpolasyon

$$q(n) = \begin{pmatrix} \cosh(v + nt) \\ \sinh(v + nt) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (3.11) ifadesinin doğruluğu sinüs hiperbolik ve kosinüs hiperbolik ek

formüllerini kullanma yoluyla yazılır.

$$\begin{aligned}
(q_0, q_1, n) &= \frac{q_0 \sinh((1-n)t) + q_1 \sinh(nt)}{\sinh(t)} \\
&= \left(\frac{\cosh(v) \sinh((1-n)t) + \cosh(v+t) \sinh(nt)}{\sinh(t)} \right) \\
&= \left(\frac{\sinh(v) \sinh((1-n)t) + \sinh(v+t) \sinh(nt)}{\sinh(t)} \right) \\
&= \left(\begin{array}{l} \cosh(v) \cosh(nt) + \sinh(v) \sinh(nt) \\ \sinh(v) \cosh(nt) + \cosh(v) \sinh(nt) \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{l} \cosh(v+nt) \\ \sinh(v+nt) \end{array} \right) \\
&= q(n)
\end{aligned}$$

Böylece, (3.11) ifadenin doğruluğu düzlemde kanıtlanmıştır. Bu sonuç, dört boyutta (3.11) ifadesinin kanıtlanması ile genelleştirilebilir.

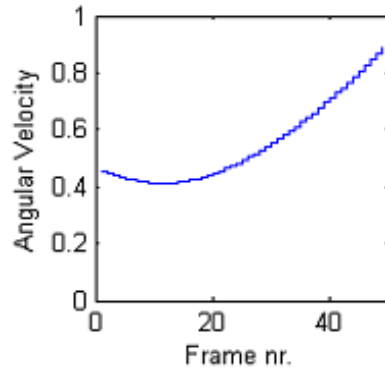
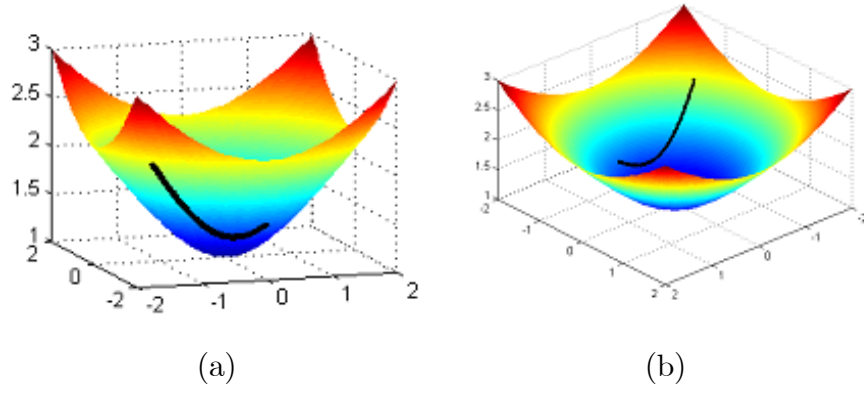
3.2 Açısal hızın yaklaşık gösterimi

İnterpolasyon eğrisinin açısal hızını Minkowski uzayında görselleştirmek istiyoruz. Aşağıda, q_i i-yinci split kuaterniyonu gösterir yani ayrık split kuaterniyonun interpolasyon eğrisinde i-yinci split kuaterniyon olur. Açısal hız grafiğini üretmek için, yaklaşık açısal hızı veren bir fonksiyonu tanımlamak gerekir. Matematik tanımı esas alınır ve split kuaterniyonlar normu kullanılır. q_0, q_1 iki split kuaterniyon arasındaki uzaklık $d(q_0, q_1) =$

$\|q_0 - q_1\|$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda q_i i-yinci split kuaterniyonun V açısal hızı yaklaşık olarak

$$V(q_i) = \frac{d(q_i, q_{i-1}) + d(q_i, q_{i+1})}{2} = \frac{\|q_i - q_{i-1}\| + \|q_i - q_{i+1}\|}{2}$$

alnabilir.



Şekil 3.1 a. Minkowski uzayında iki split kuaterniyon arasındaki interpolasyon

b. İç tarafından gösterilen interpolasyon

c. Split kuaterniyon interpolasyonunun açısal hızı

3.3 Hızlı Mslerp Minkowski Uzayında

(3.11) denkleminde

$$q(n) = q_0 \frac{\sinh((1-n)\varphi)}{\sinh \varphi} + q_1 \frac{\sinh(n\varphi)}{\sinh \varphi} \quad (3.12)$$

$$q(n) = q_0 \frac{\sinh \varphi \cosh(n\varphi) - \cosh \varphi \sinh(n\varphi)}{\sinh \varphi} + q_1 \frac{\sinh(n\varphi)}{\sinh \varphi} \quad (3.13)$$

$$q(n) = q_0 \cosh(n\varphi) - q_0 \frac{\cosh \varphi \sinh(n\varphi)}{\sinh \varphi} + q_1 \frac{\sinh(n\varphi)}{\sinh \varphi} \quad (3.14)$$

yazılabilir. (3.14) denkleminde $\cosh \varphi = -(q_0 \cdot q_1)$ ve $\sinh \varphi = \sqrt{-1 + \cosh^2 \varphi}$ yazılırsa,

$$q(t) = q_0 \cosh(n\varphi) + \frac{q_1 - q_0(- (q_0 \cdot q_1))}{\sqrt{-1 + (- (q_0 \cdot q_1))^2}} \sinh(n\varphi) \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) denkleminin son terimi Gram-Schmidt ortogonalleştirme algoritmasından q_0 dik olan terimdir. Bu terimi

$$q_p = q_1 - \frac{(- (q_0 \cdot q_1))}{\|q_0\|^2} q_0 \quad (3.16)$$

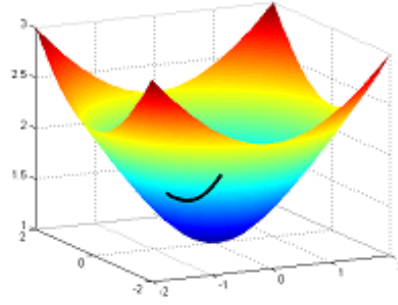
$\|q_0\|^2 = 1$ olduğundan

$$q_p = q_1 - (- (q_0 \cdot q_1)) q_0 \quad (3.17)$$

bulunur. Böylece

$$q(n) = q_0 \cosh(nk_\varphi) + q_p \sinh(nk_\varphi) \quad (3.18)$$

şeklinde yazılabilir. q_p split kuaterniyonu q_0 dik ve q_0 ve q_1 tarafından üretilen aynı hiperdüzlemde yatıyor. Ayrıca, iki split kuaterniyon arasında seçilen nokta sayısı k olmak üzere iki split kuaterniyon arasındaki açı $k_\theta = \frac{-\cosh^{-1}(q_0 \cdot q_1)}{k}$ dir. Böylece (3.18) eşitliği yardımıyla yapılan MSlerpin ifadesi (3.11) eşitliği kullanılarak yapılan MSlerpin ifadesinden daha basittir. (3.18) ifadesinin paydasındaki terim yoktur. Bu bakımdan hesaplamalar daha hızlı yapılmaktadır.



Şekil 3.2 Hiperbolik küre üzerinde iki split kuaterniyon arasındaki Hızlı Mslerp

3.4 De Moivre Kullanarak Minkowski Uzayında MSlerp Üretimi

Bu bölümde split kompleks sayılar ve split kuaterniyonlar için De Moivre teoremi kullanılarak Mslerp'in (3.11) ile verilen denklemine göre daha basit halı gösterilecektir. Split-kompleks (Mandic ve Lee 2009) sayılar, kompleks sayılardan farklı reel sayılar üzerinde iki boyutlu bir değişmeli cebirdir. Her split kompleks sayı

$$z = x + jy \quad (3.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada x ve y reel sayılardır. Ancak kompleks sayılardan tek farkı hiperbolik birim denilen sayının $j^2 = 1$ olarak tanımlanmasıdır. Vektörel kısmı spacelike olan bir birim timelike split kuaterniyon için De Moivre formülü (Özdemir 2009)

$$(\cosh \varphi + j \sinh \varphi)^n = \cosh (n\varphi) + j \sinh (n\varphi) \quad (3.20)$$

dir. Formülün sağ kısmı (3.18) denklemine çok benzer. Bir birim split kompleks sayı

$$Z = \cosh (k_\varphi) + j \sinh (k_\varphi) \quad (3.21)$$

yazılabilir. Ayrıca, kompleks sayılar 2 boyutlu uzayda vektörlerin skaler çarpımını kullanarak tanımlanabilir. Bu yüzden

$$(q_0, q_p) \bullet (R(z), I(z)) = q_0 R(z) + q_p I(z) \quad (3.22)$$

yazılabilir. Böylece, Mslerp

$$q(n) = (q_0, q_p) \bullet Z^n \quad (3.23)$$

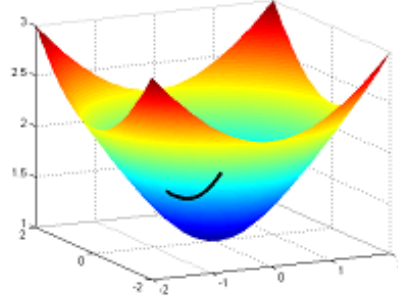
hesaplanır. (3.20) denklemini kullanarak (3.23) denklemini

$$\begin{aligned} q(n) &= (q_0, q_p) \bullet Z^n \\ &= (q_0, q_p) \bullet (\cosh(n\varphi) + j \sinh(n\varphi)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

yeniden yazılabilir. (3.22) denklemini kullanarak, bu denklemi

$$q(n) = q_0 \cosh(nk_\varphi) + q_p \sinh(nk_\varphi) \quad (3.25)$$

geliştirebiliriz.



Şekil 3.3 Minkowski uzayında hiperbolik küre üzerinde iki split kuatrniyon arasındaki DeMoivre kullanarak MSlerp üretimi

3.5 Hızlı De Moivre kullanarak Minkowski uzayında MSlerp üretimi

Bu kesimde 3.2 kesimdeki yaklaşım için alternatif hızlı bir yaklaşım gösterilecektir.

(3.11) denklemi

$$\hat{q}_0 = \left(\frac{1}{\sinh \varphi} \right) q_0 \text{ and } \hat{q}_1 = \left(\frac{1}{\sinh \varphi} \right) q_1 \quad (3.26)$$

ve

$$q(n) = \hat{q}_0(\sinh \varphi \cosh(n\varphi) - \cosh \varphi \sinh(n\varphi)) + \hat{q}_1(\sinh(n\varphi)) \quad (3.27)$$

yazılabilir. Ancak (3.27) denklemi

$$q(m) = \widehat{q}_0(\sinh \varphi \cosh (mk_\varphi) - \cosh \varphi \sinh (mk_\varphi)) + \widehat{q}_1(\sinh (mk_\varphi)) \quad (3.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $0 \leq m \leq k$, $k_\varphi = \frac{\varphi}{k}$ dir.

(3.28) denkleminde m inci interpolasyonun hesaplanması için , \widehat{q}_0 ve \widehat{q}_1 lineer birleşimi hesaplamadan önce $\sinh (mk_\varphi)$ ve $\cosh (mk_\varphi)$ hesaplanması gerekir. Bu yüzden fazla trigonometrik fonksiyonlar kullanmak yerine De Moivre teoremi

$$(\cosh \varphi + j \sinh \varphi)^m = \cosh (mk_\varphi) + j \sinh (mk_\varphi) \quad (3.29)$$

kullanabilir. (3.29) denklemini kullanarak

$$Z = \cosh (k_\varphi) + j \sinh (k_\varphi) \quad (3.30)$$

hesaplayabiliriz. Böylece

$$\cosh[(k - m)k_\varphi] = \cosh \varphi \cosh (mk_\varphi) - \sinh \varphi \sinh (mk_\varphi) \quad (3.31)$$

ve

$$\sinh[(k - m)k_\varphi] = \sinh \varphi \cosh (mk_\varphi) - \cosh \varphi \sinh (mk_\varphi) \quad (3.32)$$

yazılabilir. Böylece (k-m) inci interpolasyonu

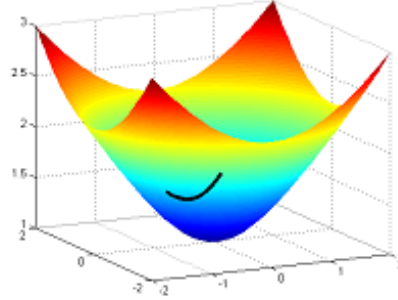
$$\widehat{q}_0(\sinh \varphi \cosh((k - m)k_\varphi) - \cosh \varphi \sinh((k - m)k_\varphi)) + \widehat{q}_1 \sinh((k - m)k_\varphi) \quad (3.33)$$

bulunur. (3.33) denklemini aşağıdaki formda

$$q(k - m) = \widehat{q}_0(\sinh (mk_\varphi)) + \widehat{q}_1(\sinh \varphi \cosh (mk_\varphi) - \cosh \varphi \sinh (mk_\varphi)) \quad (3.34)$$

yazılabilir. (3.34) denkleminde \widehat{q}_0 katsayısı (3.28) denkleminde \widehat{q}_1 nin katsayısına aynı ve (3.34) denkleminde \widehat{q}_1 katsayısı (3.28) denkleminde \widehat{q}_0 nin katsayısına aynıdır.

Burada belirtilen yöntem, kesim 3.2 de belirtilen yöntemden, daha hızlıdır.



Şekil 3.4 Minkowski uzayında hiperbolik küre üzerinde iki split kuaterniyon arasındaki Hızlı De Moivre kullanarak MSlerp üretimi

3.6 Deneysel sonuçlar

Split kuaterniyon interpolasyon için özetlenen çeşitli yöntemler Intel(R), Core(TM), Duo CPU 2.00 GHz, 2.00 GHz of RAM makine üzerinde test edilmiş ve aşağıdaki tabloda sonuçlar vermiştir. Değerler mili saniye 'de verilmiştir. İnterpolasyon 10 kez tekrarlanmıştır. Aşağıdaki Çizelge De Moivre 3.2 bölümünde belirtilen yöntemi ifade ediyor ve Minkowski uzayında hızlı De Moivre bu bölümde özetlenen yöntemi ifade ediyor.

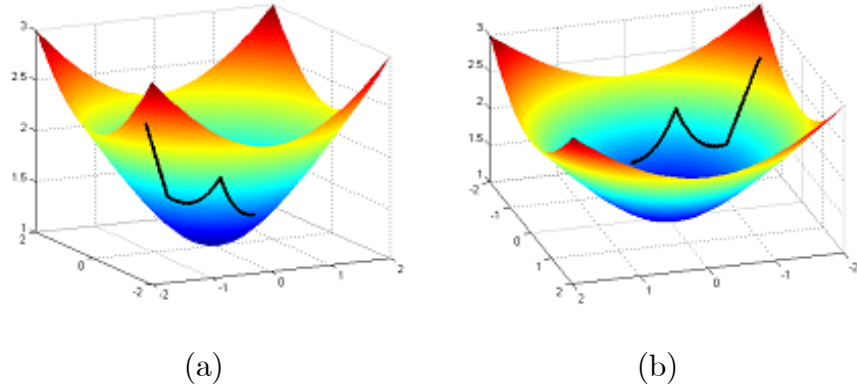
Çizelge 3.1 Zamanlama Yöntemleri Minkowski uzayında

N = 10	MDeMoiver	MHDeMoiver	MHslerp	Mslerp
Ortalama	4.20	1.47	4.25	9.71
Standart Sapma	1.32	4.49	1.66	1.33
Basıklık	0.0062	0.0042	0.0064	2.28
Çarpıklık	0.0020	0.0016	0.0021	0.017

3.7 Hiperbolik Küresi Üzerinde Spline Split Kuaterniyon İnterpolasyon : Msquad

İki dönme arasında (Mslerp) interpolasyon Minkowski uzayında optimaldir. Ama bir dizi dönmeler arasındaki interpolasyonda aşağıdaki sorunlar ortaya çıkıyor:

- (a) Eğri kontrol noktalarında düzgün değildir
- (b) Açısal hızı kontrol noktalarında sürekli değildir.



Şekil 3.5 a. Minkowski uzayında dört split kuaterniyon arasındaki interpolasyon
b. İç tarafından gösterilen interpolasyon

Bir reparametrizasyon ile kolayca tüm interpolasyon boyunca süreklilik sağlanabilir. Aslında interpolasyon parametresi her çift anahtar frame arasında bir dizi ayrık frame haline dönüştürülür ve böylece reparametrizasyon her aralıkta aralığın büyüklüğüne göre frame sayısı belirlemesine karşılık gelir. Bir aralığın büyüklüğü iki çift anahtar frame q_i ve q_{i+1} arasındaki açı $\cosh \varphi = -(q_i \cdot q_{i+1})$ ile ölçülebilir.

Bu düzgünlük sorununu gidermek kolay değildir. Benzer olarak interpolasyon iki nokta arasında düzlemde bir düz doğru ile kolaydır. Ama basit Minkowski uzayında bile bir dizi noktalar arasında düzgün bir interpolasyon oluşturmak karmaşıktır. Kübik eğrileri düzleminde bir dizi kontrol noktaları arasındaki interpolasyonlarda

farklı türde tipik olarak kullanılabilir. Örneğin bu eğriler inşası oldukça basit olan Bezier eğrileri ile yapılabilir. C^2 eğri parçaları arasında süreklilik elde etmek için, bir kübik interpolasyon yapılmalıdır. Split kuaterniyon uzayında bu biraz karmaşıktır. Kullanılan yöntemde, bir kübik interpolasyon oluşturmak için üç lineer interpolasyon kullanılmalıdır. İlk veri noktaları ve diğer iki (özenle seçilmiş) noktalar arasında ve ardından lojistik denklem $2n(1-n)$ tarafından belirlenen bir miktarda kalan noktalar arasında interpolasyon yapılır. Yardımcı noktalar düzgün bir şekilde seçilirse, daha sonra C^2 nin sürekliliği sağlanabilir. MSquad fonksiyonu veri noktaları arasında bir kübik interpolasyon (birim split kuaterniyon) q_0 and q_1 noktaları ve $n \in [0, 1]$ miktarı ile aşağıdaki gibi

$$Msquad(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, n) = Mslerp(Mslerp(q_i, q_{i+1}, n), Mslerp(s_i, s_{i+1}, n), 2n(1-n))$$

belirtilir. s_i ve s_{i+1} inner quadrangle noktaları denir ve böylece bu sürekliliği segmentlerinde garanti olması için dikkatle seçilmelidir.

bir dizi $\{q_n\}_{n=0}^{N-1}$ birim split kuaterniyon göz önüne alındığında türevleri sürekli ve kontrol noktaları üzerinden geçmesi koşulları split kuaterniyon interpolasyon ile bir spline eğrisi inşa etmek istiyoruz. İdda s_i ve s_{i+1} split kuaterniyonların arasında spline segmentlerinde uç noktaları türevlerinin kontrolüne izin vermek için bir seçim yapmaktır. Msquad tanımı ile kolayca

$$\begin{aligned} Msquad(q_{i-1}, q_i, s_{i-1}, s_i, 1) &= Mslerp(Mslerp(q_{i-1}, q_i, 1), Mslerp(s_{i-1}, s_i, 1), 0) \\ &= q_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Msquad(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, 0) &= Mslerp(Mslerp(q_i, q_{i+1}, 0), Mslerp(s_i, s_{i+1}, 0), 0) \\ &= q_i \end{aligned}$$

$$S_{i-1}(1) = q_i = S_i(0)$$

gösterilir. Böylece Msquad sürekli ve kontrol noktalarında doğru bir değeri vardır.

Ardarda iki spline segmentleri türevleri eşleştirmek için uç noktaları sürekli türevleri elde etmek için

$$S'_{i-1}(1) = S'_i(0) \quad (3.35)$$

Şimdi MSquadın kontrol noktalarında sürekli olarak türevlenebilir olmasını göstereceğiz.

$$\frac{d}{dt} Msquad(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, 0) = \frac{d}{dt} Msquad(q_{i-1}, q_i, s_{i-1}, s_i, 1)$$

MSquadın türevini bulmak için, (3.1) denkleminde Slerp'nin türevi gerekiyor

$$g_i(n) = Mslerp(q_i, q_{i+1}, n)^{-1} Mslerp(s_i, s_{i+1}, n)$$

Şimdi $S_i(t) = Msquad(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, n)$ türevini bulmak gerekir

$$\begin{aligned} S'_i(t) &= Msquad(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, n) \\ &= \frac{d}{dn} Mslerp(Mslerp(q_i, q_{i+1}, n), Mslerp(s_i, s_{i+1}, n), 2n(1-n)) \\ &\quad \frac{d}{dn} (Mslerp(q_i, q_{i+1}, n) g_i(n)^{2n(1-n)}) \end{aligned}$$

(3.2) denkleminde

$$\frac{d}{dn} g_i(n)^{2n(1-n)} = \left[\begin{array}{l} \sinh(2n(1-n)\varphi_{g_i(n)}) \left((2-4n)\varphi_{g_i(n)} + 2n(1-n)\varphi'_{g_i(n)} \right), \\ \cosh(2n(1-n)\varphi_{g_i(n)}) \left((2-4n)\varphi_{g_i(n)} + 2n(1-n)\varphi'_{g_i(n)} \right) \varepsilon_{g_i(n)} \\ + \sinh(2n(1-n)\varphi_{g_i(n)}) \varepsilon'_{g_i(n)} \end{array} \right]$$

Aşağıda $\frac{d}{dt} (g_{i-1}(n)^{2n(1-n)}) (1)$ değeri 1 olarak uygulanan $g_{i-1}(n)^{2n(1-n)}$ ifadesinin türevi yazılabilir. (3.2) denkleminde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} Msquad(q_{i-1}, q_i, s_{i-1}, s_i, 1) &= Mslerp(q_{i-1}, q_i, 1) \log(q_{i-1}^{-1}, q_i) \\ &\quad + Mslerp(q_{i-1}, q_i, 1) \frac{d}{dn} (g_{i-1}(n)^{2n(1-n)}) (1) \\ &= q_i \log((q_{i-1}^{-1}, q_i) - 2 \log(q_{i-1}^{-1} s_i)) \end{aligned}$$

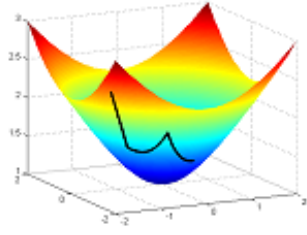
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dn} Msquad(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, 0) &= Mslerp(q_i, q_{i+1}, 0) \log(q_i^{-1}, q_{i+1}) \\
&\quad + Mslerp(q_i, q_{i+1}, 0) \frac{d}{dn} (g_i(n)^{2n(1-n)}) (0) \\
&= q_i \log((q_i^{-1}, q_{i+1}) + 2 \log(q_i^{-1} s_i)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.35) denkleminde

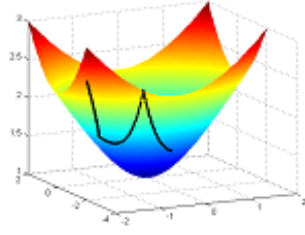
$$q_i \log((q_{i-1}^{-1}, q_i) - 2 \log(q_i^{-1} s_i) = q_i \log((q_i^{-1}, q_{i+1}) + 2 \log(q_i^{-1} s_i)$$

$$s_i = q_i \exp\left(-\frac{\log(q_i, q_{i-1}^{-1}) + \log(q_i^{-1}, q_{i+1})}{4}\right)$$

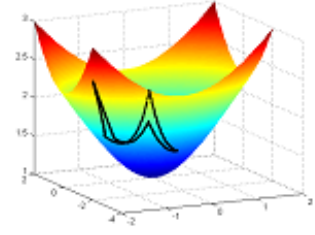
yazılabilir. Böylece Msquad yukarıdaki gibi tanımlanan s_i ile kontrol noktalarında sürekli türevlenebilir. Aslında Msquadın tüm segmentleri arasında sürekli ve sürekli olarak türevlenebilir olduğunu göstermiş olduk.



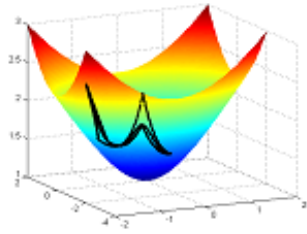
(a)



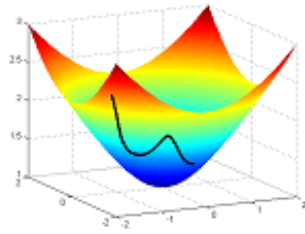
(b)



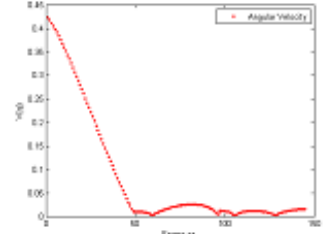
(c)



(d)



(e)



(f)

Şekil 3.6 a. Hiperbolik küre üzerinde dört split kuaterniyon arasındaki interpolasyonu b. Hiperbolik küre üzerinde dört innerquad rangle noktası arasındaki interpolasyonu c. Hiperbolik küre üzerinde split kuaterniyon ve inner quadrangle interpolasyonun kombinasyonu d. Hiperbolik küre üzerinde inner quadrangle noktalarını kullanarak düzleştirilmiş eğri e. Msquad eğrisi f. Msquad için açısal hız grafiği

4. LORENTZİYEN KÜRESİ ÜZERİNDE SPLİNE SPLIT KUATER- NİYON İNTERPOLASYONU

Bu bölüm Lorentz küresi üzerinde spline split kuaterniyon interpolasyonu gösterilecektir. Split kuaterniyonların Lorentz küresi üzerinde grup yapısı olmadığı için MSquad tanımlanmaz. Minkowski uzayında spline split kuaterniyon İnterpolasyonunu (Msquad) ile gösterilir. Bu bölümde, Lorentz küresi üzerinde düzgün interpolasyon için dik izdüşüm ve kübik Bezier eğrisi kullanılarak yeni bir yöntem önerilir. Ayrıca Hiperbolik küresi ve Öklid küresi üzerinde önerilen yöntem gösterilir.

4.1 Bezier Eğrilerini kullanarak Lorentz Küresi üzerinde İnterpolasyon

Bezier eğriler Fransız mühendis olan Pierre Bezier tarafından otomobil tasarımında kullanmak amacıyla geliştirilmiştir. Bezier eğrilerinin sahip olduğu özellikler, onları eğri ve yüzey tasarımında bir hayli kullanışlı ve uygun hale getirmektedir. Ayrıca, Bezier eğrilerinin programlanması da oldukça kolaydır. Bu tür özelliklerinden dolayı, Bezier eğrileri bilgisayar grafiklerinde yaygın olarak kullanılır (Abbass ve Jamal 2011)

N 'inci dereceden bir Bezier polinomu N+1 kontrol noktasında aşağıdaki fonksiyon ile belirlenir.

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

Burada

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (4.2)$$

dır. Bir Bezier eğrisinin denklemi

$$R(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i \quad (4.3)$$

dir. Burada $P_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ Bezier eğrisinin kontrol noktalarıdır. Bu

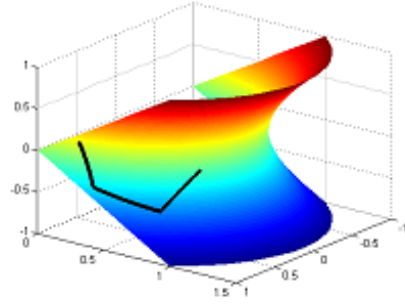
bölümde kübik bezier polinomları kullanılır. kübik Bezier polinomlar

$$R(t) = (1 - t)^3 P_0 + 3t(1 - t)^2 P_1 + 3t^2(1 - t) P_2 + t^3 P_3, 0 \leq t \leq 1 \quad (4.4)$$

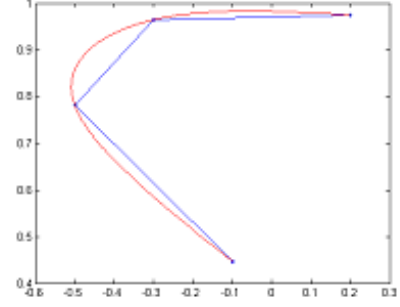
bulunur (Abbass ve Jamal 2011).

Önerilen yöntem aşağıdaki gibi açıklanabilir;

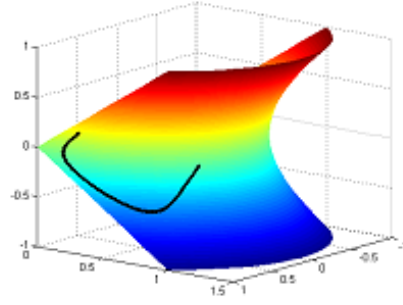
- (1) Lorentz küresi üzerindeki split kuaterniyonlar seçilir;
- (2) Kübik split kuaterniyon interpolasyon Lorentz küresi üzerinde (üç lineer interpolasyon kümesi olarak) çizilir;
- (3) Split kuaterniyon interpolasyon eğrisini düzleme bire bir dik izdüşüm yapılır;
- (4) Düzlemde kübik Bezier algoritmasını kullanarak split kuaterniyon interpolasyon eğrisi Düzgünleştirilir;
- (5) Düzgünleştirilmiş eğrisi ters dönüşümü ile Lorentz küresi üzerine çizilir;



(a)

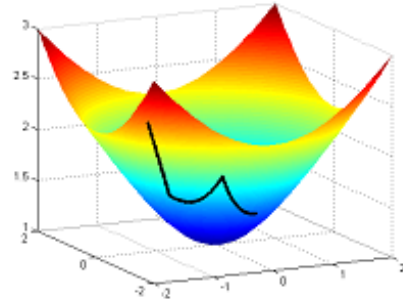


(b)

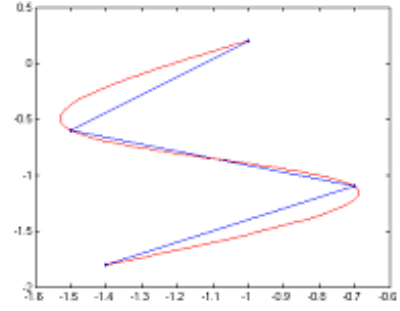


(c)

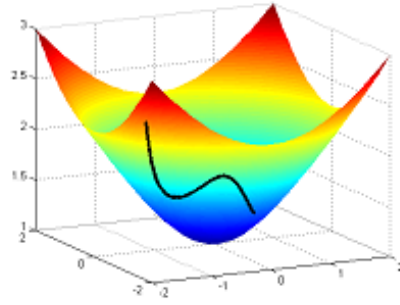
Şekil 4.1 a. Lorentz küre üzerinde dört split kuaterniyon arasındaki interpolasyonu b. Split kuaterniyon interpolasyon eğrisini düzleme bire bir dikizdüşüm yapılması ve düzlemde kübik Bezier algoritmasını kullanarak split kuaterniyon interpolasyon eğrisi düzgünleştiril olması c. Lorentz küresi üzerinde düzleştirilmiş eğrisi



(a)

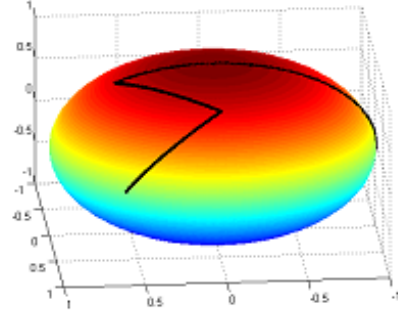


(b)

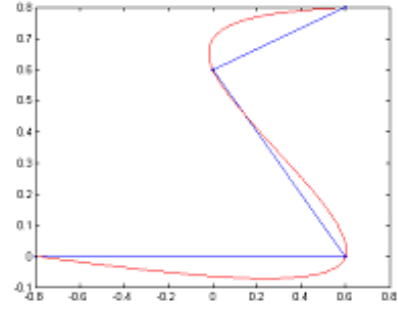


(c)

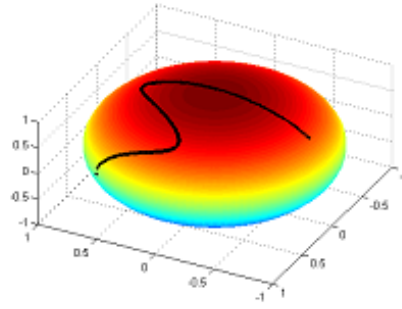
Şekil 4.2 a. Minkowski uzayında Hiperbolik küre üzerinde dört keyframe arasındaki split kuaterniyon interpolasyon b. Split kuaterniyon interpolasyon eğrisini düzleme birebir dikizdüşüm yapılması ve düzlemde kübik Bezier algoritmasını kullanarak split kuaterniyon interpolasyon eğrisi düzgünleştirilmesi c. Hiperbolik küresi üzerinde düzleştirilmiş eğrisi



(a)



(b)



(c)

Şekil 7.3 a. Öklid küre üzerinde dört kuaterniyon arasındaki interpolasyon
b. Kuaterniyon interpolasyon eğrisini düzleme birebir dikizdüşüm yapılması
ve düzlemde kübik Bezier algoritmasını kullanarak kuaterniyon interpolasyon
eğrisi düzgünleştiril olması c. Öklid küresi üzerinde düzleştirilmiş eğrisi

KAYNAKLAR

- Dam, E. B, Koch, M. and Lillholm, M. 1998. Quaternions, interpolation and animation, Institute of computer science University of Copenhagen. pp. 1-50
- Kincaid, D and Cheney, W. 1991. Numerical Analysis Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California.pp. 50-60.
- Özdemir, M. and Ergin, A. A. 2006. Rotations with unit timelike quaternion in Minkowski 3-space, Journal of Geometry And Physics vol. 56, pp. 322-336.
- Shoemake, K. 1985. Animating rotation with quaternion curves. ACM siggraph, vol. 19, pp. 245-254.
- Abbass, M. and Jamal E. 2011. Bezier curve interpolation constrained by a line, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, pp. 1817 – 1832.
- Barrera, T., Hast, A. and Bengtsson, E. 2004. Incremental spherical linear interpolation, Linkoping Electronic Conference Proceedings, Linkoping University, Linkoping, Sweden. pp. 7-10.
- Leeney, M. 2009. Fast quaternion slerp, International Journal of Computer Mathematics Vol. 86, pp. 79–84.
- Barrera, T., Hast, A. and Bengtsson, E. 2004. Faster shading by equal angle interpolation of vectors. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 10, pp. 217-223.
- O’Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, pp. 468 , New York.
- Hast, A., Barrera, T. and Bengtsson, E. 2003. Shading by Spherical Linear Interpolation using DeMoivre’s Formula WSCG’03, Short Paper, pp. 57-60.
- Özdemir, M. 2009. The roots of a split quaternion. Applied Mathematics Letters vol. 22, pp. 258–263.
- Mandic D. and Su Lee, V. 2009. The Magic of Complex Numbers Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters .pp. 1-12
- Hamilton, W. 1853. Lectures on Quaternions. Hodges Smith & Co., Dublin. pp. 350.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Raheleh GHADAMI GHOLIZADEH NASER
Doğum Yeri : IRAN
Doğum Tarihi : 28.04.1984
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Zahra Lisesi (1998 – 2001)
Lisans : Marand Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2002 – 2006)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2008 – 2010)
Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2010 – 2013)

Yayımları (SCI ve diğer)

R.Ghadami, J.Rahebi and Y.Yaylı . 2012. A Novel Approach for Spherical Spline Split Quaternion Interpolation on Lorentzian Sphere using Bezier Curve Algorithm. Life Science Journal, Volume 9, No.4, pp. 3394-3397.
R.Ghadami, J.Rahebi and Y.Yaylı . 2012. Linear interpolation in Minkowski space. 2012. International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 77 No. 4 2012, pp. 469-484.
R.Ghadami, J.Rahebi and Y.Yaylı . 2012. A fast method based on DeMoivre for spherical linear interpolation in Minkowski space. (in press)

- R.Ghadami, J.Rahebi and Y.Yaylı . 2012. Spline Split Quaternion Interpolation in Minkowski space. (to appear)
- R.Ghadami, Y.Yaylı . 2012. A New Characterization For Inclined Curves By The Help Of Spherical Representations According To Bishop Frame. International Journal of Pure Applied Mathematics. Volume 74 No. 4, pp. 455-462.
- R.Ghadami, J.Rahebi and Y.Yaylı . 2012. A fast method spherical linear interpolation in in Minkowski Space.(to appear)