

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**SİRAL VEKTÖR ALANLARI VE UYGULAMALARI**

**Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2012**

**Her hakkı saklıdır**

# ÖZET

Doktora Tezi

## SPİRAL VEKTÖR ALANLARI VE UYGULAMALARI

Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu doktora tezi altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez için gerekli kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, lineer vektör alanları verilerek spiral vektör alanları tanıtılmıştır ve spiral vektör alanlarının integral eğrileri hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde yapılan çalışmalar Lorenz uzayında yapılmıştır. Beşinci bölümde, point-line operatörü tanımlanarak benzerlik dönüşümü yardımıyla bir point-line'nin başka bir point-line'a dönüştürülebileceği gösterilmiştir. Altıncı bölümde ise beşinci bölümde yapılan çalışma, Lorenz uzayı için incelenmiştir.

**Şubat 2012, 78 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Lie Grubu, Lie Cebiri, Lineer vektör alanı, Helisel Vektör Alanı, Point-line operatörü

## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

### SPIRAL VECTOR FIELD AND ITS APPLICATIONS

Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of six chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, some main concepts for this study have been given. In the third chapter, we gave the linear vector fields and defined the spiral vector fields. In addition to this we calculate the integral curves of a spiral vector field. In the fourth chapter, we did the same work on Lorentzian space like chapter three. In the fifth chapter, we defined the point-line operator. With the help of Equiform motion a point-line is transformed to the another point-line. In the final chapter we did the same work on Lorentzian space like chapter five.

**February 2012, 78 pages**

**Key Words :** Lie groups, Lie Algebras, Linear Vector Field, Helical vector field, Point-line operator

## TEŞEKKÜR

Doktora alıőmamın yönetimini kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağı sağlayan, alıőmalarımı yönlendiren, araőtırmalarımın her aőamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beőeri iliőkilerde de engin fikirleriyle yetiőmeme ve geliőmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, çalıőmalarım süresince desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Baki KARLIĐA (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, Doç. Dr. Nejat EKMEKCI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye ve sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŐKAN (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi)'a teőekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalıőmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen ve yardımlarını esirgemeyen eőim Ufuk ÖZTÜRK'e, babam Ali KOÇ ve annem Fatma KOÇ'a derin duygularla teşekkür ederim.

Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Ankara, Şubat 2012

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı.....	2
2.2 Riemann Manifoldu, Riemann Konneksiyonu, İkinci Temel Form.....	3
2.3 Eğriler Teorisi.....	6
2.4 Lie Grubu ve Lie Cebiri.....	9
2.5 Dual Uzay.....	10
2.6 $E^n$ de Hareketler.....	14
2.7 3-Boyutlu Lorenz Uzayı.....	18
3. LİNEER VEKTÖR ALANLARI.....	21
3.1 $E^3$ de Helisel Vektör Alanı.....	22
3.2 $E^3$ Öklid Uzayında Spiral Vektör Alanları.....	28
3.3 $E^n$ Öklid Uzayında Spiral Vektör Alanları.....	34
4. LORENZ UZAYINDA LİNEER VEKTÖR ALANLARI.....	38
4.1 $E_1^3$ Lorenz Uzayında Helisel Vektör Alanları.....	38
4.2 $E_1^3$ Lorenz Uzayında Spiral Vektör Alanları ve İntegral Eğrileri.....	41
4.3 $E_1^n$ Lorenz Uzayında Spiral Vektör Alanları ve İntegral Eğrileri.....	45
5. POINT-LINE OPERATÖRÜ.....	50
5.1 Doğru Elemanlarının Plücker Koordinatları.....	53
6. LORENZ UZAYINDA POINT-LINE OPERATÖRÜ.....	60
6.1 3-boyutlu Lorenz Uzayında Benzerlik Dönüşümü.....	64
6.2 3-boyutlu Lorenz Uzayında Doğru Elemanlarının Plücker Koordinatları...	65
KAYNAKLAR.....	75
ÖZGEÇMİŞ.....	77

## SİMGELER DİZİNİ

$O(n)$	Ortogonal matrisler ailesi
$D$	Riemann koneksiyonu
$g$	Metrik tensör
$[,]$	Lie parantez operatörü
$\alpha$	İntegral eğrisi
$\wedge$	Dış çarpma operatörü
$\tilde{D}$	Öklid anlamında koneksiyon
$\nabla$	Gradient fonksiyonu
$\Delta$	Laplace operatörü
$M$	Diferensiyellenebilir reel manifold
$T_M(P)$	$P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$E^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
$GL(n+1, \mathbb{R})$	$(n+1) \times (n+1)$ tipindeki regüler matrislerin cümlesi
$O(n)$	Ortogonal Matrislerin cümlesi
$R$	Sabit Uzay
$R_0$	Hareketli Uzay
$\Omega$	Darboux Matrisi
$SO(3)$	Özel ortogonal grup
$SE(3)$	Matris Lie grubu
$se(3)$	Matris Lie grubunun Lie cebiri
$SD(3)$	Homotetik hareketlerin matris Lie grubu
$sd(3)$	Homotetik hareketlerin matris Lie grubunun Lie cebiri

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 $E^n$ uzayı içinde bir eğri.....	7
Şekil 2.2 Parametre değişimi.....	7
Şekil 3.1 Ani Homotetik Hareket.....	32
Şekil 4.1 Lorenz Uzayında Ani Homotetik Hareket.....	44
Şekil 5.1 Point-line.....	51
Şekil 5.2 Referans noktası orjin olan point-line.....	52
Şekil 5.3 Point-line yer değiştirmesi.....	56
Şekil 7.1 Lorenz uzayında Point-line.....	60
Şekil 7.2 Lorenz uzayında Referans noktası orjin olan point-line .....	63
Şekil 7.3 Lorenz uzayında Point-line yer değiştirmesi.....	70

## 1. GİRİŞ

Hareketlerin modellenmesi Kinematikte önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle katı cisim hareketlerinin Lie grubu ve Lie cebiri yapısı yardımıyla ifade edilmesinde, lineer vektör alanları gündeme gelmektedir. Lineer vektör alanlarının özel hallerinden olan helisel vektör alanları ile ani hareketlerin yörüngeleri elde edilmektedir.

Lineer vektör alanlarının tanım ve uygulamaları Karger ve Novak (1985) tarafından verilmiş olup Öklid uzayı için lineer vektör alanlarının integral eğrilerini Acralishian (1989) ve Lorenz uzayı için Helisel vektör alanlarının genellemesi ile helisel vektör alanlarının ani hareketlerle olan ilişkisini Zafer ÜNAL (2007) doktora tezinde incelemiştir.

Biz ise bu çalışmada, ilk önce lineer vektör alanlarını kullanarak spiral vektör alanlarını tanımladık ve spiral vektör alanlarının özel halinin helisel vektör alanları olduğunu gösterdik. Daha sonra, Spiral vektör alanlarının Lie grubu ve Lie cebiri yapılarını inceleyerek bu yapılar üzerinde çeşitli dönüşümler tanımlayarak bu dönüşümlerin özelliklerini inceledik.

Ayrıca, yönlendirilmiş bir doğru ve doğru üzerinde alınan bir referans noktası yardımıyla ifade edilebilen Point-line kavramını inceledik. Bir doğru Plücker koordinatları ile verilebilir. Eğri üzerinde bir nokta alırsak, bu nokta ile doğrunun ifade edilmesi de point-line ile verilebilir. Bir point-line'den başka bir point-line'ye geçiş bir operatörle yapılabilir. Bu operatör, point-line operatörü olarak adlandırılabilir. Biz gösterdik ki; point-line operatörü bir benzerlik dönüşümüdür. Bunlara ek olarak, bir point-line'den başka bir point-line'ye geçişin, kuaterniyonları kullanarak daha kolay yapılabileceğini gösterdik.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde sıkça kullanacağımız bazı temel tanım ve sembolleri tanıttacağız.

### 2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı

**Tanım 2.1.1**  $A \neq \emptyset$  bir küme ve  $V$  de  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\psi : A \times A \longrightarrow V$$

dönüşümü  $P, Q \in A$  noktaları için

$$(P, Q) \longrightarrow \psi(P, Q)$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise  $A$  kümesine  $V$  vektör uzayı ile birleştirilmiş bir **Afin Uzay** denir:

- i.  $\forall P, Q, R \in A$  için  $\psi(P, R) = \psi(P, Q) + \psi(Q, R)$  dir,
- ii.  $\forall P \in A$  ve  $\forall \vec{\alpha} \in V$  için  $\psi(P, Q) = \vec{\alpha}$  olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.2**  $n$ -boyutlu bir reel iç çarpım uzayı  $\mathbb{R}^n$  olsun.  $\mathbb{R}^n$  ile birleşen  $\mathbb{R}^n$  afin uzayına **n-boyutlu Öklid Uzay** denir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.3**  $E^n$  de bir nokta  $P = (p_1, \dots, p_n)$  olsun.  $1 \leq i \leq n$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_i : E^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow x_i(P) = p_i \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı  $x_i$  fonksiyonuna  $E^n$  nin **i-yinci koordinat fonksiyonu** denir. Eğer  $P$  noktasının bileşenleri bir dik çatıya göre verilmişse  $\{x_1, \dots, x_n\}$  sistemine,  $E^n$  nin **Öklid koordinat sistemi** veya **dik koordinat sistemi** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

## 2.2 Riemann Manifoldu, Riemann Konneksiyonu, İkinci Temel Form

**Tanım 2.2.1**  $X \neq \emptyset$  ve  $X$  in alt cümlelerinin bir koleksiyonu  $\tau$  olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyor ise  $\tau$  koleksiyonu  $X$  üzerinde bir **topoloji** adını alır:

- i.  $X, \emptyset \in \tau$ ,
- ii.  $\forall A_i, A_j \in \tau \Rightarrow A_i \cap A_j \in \tau$ ,
- iii.  $\forall i \in I$  için  $A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

(Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.2** Boş olmayan bir  $X$  cümlesi ve üzerindeki  $\tau$  topolojisinden oluşan  $(X, \tau)$  ikilisine bir **topolojik uzay** denir ve kısaca  $X$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.3**  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $X$  in  $P$  ve  $Q$  gibi farklı iki noktaları için,  $X$  de, sırası ile,  $P$  ve  $Q$  noktalarını içine alan  $A_P$  ve  $A_Q$  açık alt cümleleri  $A_P \cap A_Q = \emptyset$  olacak biçimde bulunabilirse  $X$  topolojik uzayına bir **Hausdorff uzayı** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.4**  $X$  ve  $Y$  birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli,  $f^{-1}$  tersi var ve  $f^{-1}$  de sürekli ise  $f$  ye  $X$  den  $Y$  ye bir **homeomorfizm (topolojik dönüşüm)** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.5**  $M$  bir topolojik uzay olsun.  $M$  için aşağıdaki önermeler doğru ise  $M$  ye bir **n-boyutlu topolojik manifold** veya kısaca **n-manifold** denir:

(M1)  $M$  bir Hausdorff uzayıdır,

(M2)  $M$  nin her bir açık alt cümlesi  $E^n$  e veya  $E^n$  in bir açık alt cümlesine homeomorfür,

(M3)  $M$  sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir

(Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.6**  $M$  bir topolojik  $n$ -manifold olsun. Bir  $P \in M$  noktasının  $M$  deki bir  $U$  açık komşuluğu,

$$\psi : U \longrightarrow V$$

tanımlı dönüşümü ile  $E^n$  in bir  $V$  açık alt cümlesine homeomorf ise  $(U, \psi)$  homeomorfizmine  $M$  nin  $P$  noktasındaki bir **haritası** veya **koordinat komşuluğu** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.7**  $M$  bir topolojik  $n$ -manifold ve  $M$  nin bir açık örtüsü  $\{U_\alpha\}$  olsun.  $U_\alpha$  açık cümlelerinin  $\alpha$  indislerinin cümlesi  $A$  olmak üzere  $\{U_\alpha\}$  örtüsü için  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  yazılır.  $E^n$  de her bir  $U_\alpha$  açığının bir  $\psi_\alpha$  homeomorfizmi altında homeomorf olan bir açık cümlesi  $V_\alpha$  olsun. Böylece ortaya çıkan  $(\psi_\alpha, U_\alpha)$  haritalarının

$$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

koleksiyonuna  $M$  bir **atlası (koordinat komşuluğu sistemi)** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.8**  $M$  bir topolojik  $n$ -manifold ve  $M$  nin bir atlası  $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  olsun. Eğer  $S$  atlası için,  $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall \alpha, \beta \in A$  ya karşılık  $\phi_{\alpha\beta}$  ve  $\phi_{\beta\alpha}$  fonksiyonları  $C^k$  sınıfından diferensiyellenebilir iseler  $S$  ye  $C^k$  **sınıfından diferensiyellenebilir** denir.  $S$  atlası  $M$  üzerinde  $C^k$  sınıfından olduğu zaman  $S$  ye  $M$  üzerinde  $C^k$  **sınıfından diferensiyellenebilir yapı** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.9**  $M$  bir topolojik  $n$ -manifold olsun.  $M$  üzerinde  $C^k$  sınıfından bir diferensiyellenebilir atlas tanımlanabilirse  $M$  ye  $C^k$  **sınıfından diferensiyel-lenebilir manifold** denir. Ayrıca, her  $k \in \mathbb{N}$  için  $M$  üzerindeki atlas diferensiyellenebilir ise, o zaman  $M$  manifolduna  $C^\infty$  **sınıfından diferensiyel-lenebilir manifold** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.2.10**  $M$  diferensiyellenebilir bir manifold ve  $M$  den  $\square$  ye  $C^\infty$  sınıfından fonksiyonların cümlesi de  $C^\infty(M, \square)$  olmak üzere,  $\forall P \in M$  için

$$\begin{aligned} \vec{V}_P : C^\infty(M, \square) &\longrightarrow \square \\ f &\longrightarrow \vec{V}_P[f] \end{aligned}$$

dönüşümü

**i.**  $\vec{V}_P[\lambda f + \mu g] = \lambda \vec{V}_P[f] + \mu \vec{V}_P[g], \quad \forall \lambda, \mu \in \square$

**ii.**  $\vec{V}_P[f, g] = \vec{V}_P[f]g(P) + f(P)\vec{V}_P[g]$

aksiyonlarını sağlıyor ise  $\vec{V}_P$  fonksiyonuna  $M$  nin  $P$  noktasındaki bir **tanjant vektörü** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

$M$  manifoldunun bir  $P \in M$  noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_M(P) = \left\{ \vec{V}_P \mid \vec{V}_P : C^\infty(M, \square) \xrightarrow{\text{tanjant uzay}} \square \right\}$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama işlemini  $\forall f \in C^\infty(M, \square)$  için,

$$\begin{aligned} \oplus : T_M(P) \times T_M(P) &\longrightarrow T_M(P) \\ (\vec{V}_P, \vec{W}_P) &\longrightarrow \vec{V}_P \oplus \vec{W}_P : C^\infty(M, \square) \longrightarrow \square \\ f &\longrightarrow (\vec{V}_P \oplus \vec{W}_P)[f] = \vec{V}_P[f] + \vec{W}_P[f] \end{aligned}$$

olarak tanımlarsak  $(T_M(P), \oplus)$  ikilisi bir Abel grubu olur. Ayrıca  $\forall f \in C^\infty(M, \square)$  için,

$$\begin{aligned} \square : \square \times T_M(P) &\longrightarrow T_M(P) \\ (\lambda, \vec{V}_P) &\longrightarrow \lambda \square \vec{V}_P : C^\infty(M, \square) \longrightarrow \square \\ f &\longrightarrow (\lambda \square \vec{V}_P)[f] = \lambda \vec{V}_P[f] \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlı dış işlem ve  $(T_M(P), \oplus)$  Abel grubu,  $\square$  cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzay  $\{T_M(P), \oplus, \square, +, \cdot, \square\}$  sisteminden ibaret olup  $M$  nin  $P \in M$  noktasındaki **tanjant uzayı** adını alır ve kısaca  $T_M(P)$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

### 2.3 Eğriler Teorisi

**Tanım 2.3.1**  $n$ -boyutlu bir reel vektör uzayı  $V$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \vec{u}_i \vec{v}_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

ile tanımlı dönüşüm (reel değerli fonksiyon), aşağıdaki tanımlanan aksiyomları sağlıyor ise  $V$  üzerinde bir iç çarpım adını alır:

- i. Simetri Aksiyomu:  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$  için  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ,
- ii. Bilineerlik Aksiyomu:  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  için

$$\langle a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{z} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + b\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

$$\langle \vec{x}, a\vec{y} + b\vec{z} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$$

- iii. Pozitif Tanımlılık Aksiyomu:  $\forall \vec{u} \in V$  için  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

(Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.3.2**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.  $V$  deki bir  $\vec{u}$  vektörünün **uzunluğu** veya **boyu**

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca bu değere  $\vec{u}$  vektörünün **normu** da denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.3.3**  $I \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^n \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

biçiminde düzgün ( $C^\infty$  sınıfından) bir  $\alpha$  dönüşümüne,  $E^n$  uzayı içinde bir **eğri** denir

Buradaki  $I \subseteq \mathbb{R}$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin **parametre aralığı** ve  $t \in I$  değişkenine de  $\alpha$  **eğrisinin parametresi** denir (Hacısalıhoğlu 2000).



Şekil 2.1  $E^n$  uzayı içinde bir eğri

**Tanım 2.3.4**  $M$  bir  $C^\infty$  manifold ve  $I \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere,

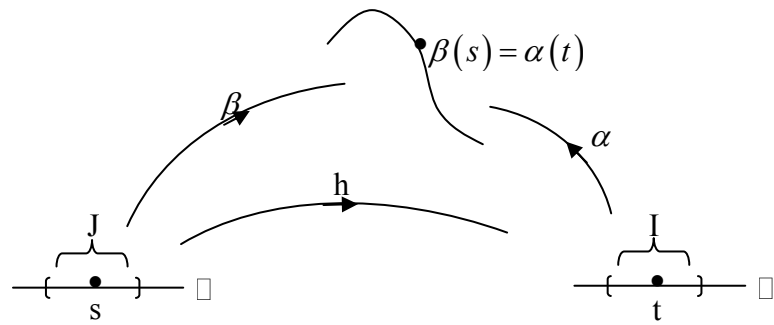
$$\alpha : I \longrightarrow M \subseteq E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise  $\alpha$  ya  $M$  üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.3.5.**  $E^n$  de bir  $M$  eğrisinin  $(I, \alpha)$  ve  $(J, \beta)$  gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \longrightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna  $M$  nin bir **parametre değişimi** ( daha doğrusu  $M$  nin  $I$  daki parameteresinin  $J$  deki parametre ile değişimi) denir (Hacısalıhoğlu 2000).



Şekil 2.2 Parametre değişimi

**Tanım 2.3.6**  $E^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\alpha : I \longrightarrow E^n$  fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  olmak üzere,

$$\alpha(t) \in M$$

ve

$$\alpha'(t) = \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \right) \quad (2.3)$$

dir.  $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{E^n}(\alpha(t))$  tanjant vektörüne,  $M$  eğrisinin  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğuna göre **hız vektörü** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.3.7** Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye **regüler eğri** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Teorem 2.3.1**  $E^n$  de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.3.8**  $I \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık,  $E^n$  de bir eğri  $a$  ve  $E^n$  üzerinde bir vektör alanı  $X$  olmak üzere, " $t \in I$ " için,

$$\frac{da}{dt} = X(a(t))$$

ise,  $\alpha$  eğrisine  $X$  **vektör alanının integral eğrisi** denir (Hacısalıhoğlu 1983).

**Tanım 2.3.9**  $V$ , bir  $K$  cismi üzerinde  $n$ -boyutlu bir vektör uzayı ve  $X, V$  üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer,

$$A: V \otimes V \rightarrow V$$

ile tanım lineer dönüşümü " $v \in V$ " için,

$$X_v = A(v)$$

olur ise,  $X$  vektör alanına **lineerdir** denir (Karger ve Novak 1979).

## 2.4 Lie Grubu ve Lie Cebiri

**Tanım 2.4.1** Diferensiyellenebilir bir manifold  $M$  ve bir grub  $G$  olmak üzere

$L_1 : M$  nin noktaları  $G$  nin elemanları ile çakışır,

$L_2 : \bullet : M \longrightarrow M$

$(a,b) \longrightarrow a \bullet b^{-1}$  işlemi her yerde diferensiyellenebilir,

aksiyomları sağlanırsa  $(M,G)$  ikilisine bir **Lie Grubu**,  $M$  ye **Lie Grubunun Temel Manifoldu** ve  $G$  ye de **Lie Grubunun Temel Grubu** denir (Hacısalıhoğlu 1980a).

**Tanım 2.4.2**  $V$ , bir  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} [,] : V \times V &\longrightarrow V \\ (x,y) &\longrightarrow [x,y] \end{aligned}$$

ile tanımlı işlemi,

1. Bilineer,
2. Anti-simetrik,
3.  $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$

özelliklerine sahipse  $(V,[,])$  ikilisine bir **Lie Cebiri** denir (Hacısalıhoğlu 1980a).

**Tanım 2.4.3** Matris uzayının bir alt manifoldu, matrislerin çarpma işlemine göre bir grup ise bu gruba **Matris Lie Grubu** denir (Hacısalıhoğlu 1980a).

**Tanım 2.4.4**  $\mathbb{R}^3$  de

$$O(3) = \{A \in \mathbb{R}^3 : A^T A = A A^T = I, \det A = 1\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye **Ortogonal Matrislerin Cümlesi** denir ve matrislerde çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba **Ortogonal Matris Lie Grubu** denir (Karger, Novak 1979).

**Tanım 2.4.5**  $\mathbb{R}^3$  de

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^3 : A^T A = A A^T = I, \det A = 1\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye **Özel Ortogonal Matrislerin Cümlesi**, matrislerde



çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba **Özel Ortogonal Matris Lie Grubu** denir ve bu Lie grubuna karşılık gelen Lie cebiri

$$so(3) = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : w = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} = -w \begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 \end{pmatrix} \right\}$$

şekilde tanımlanır (Karger ve Novak 1979).

**Teorem 2.4.1**  $E^3$  de bir anti-simetrik matrise karşılık gelen bir lineer dönüşüm  $A$  olsun.  $A$  ya karşılık gelen matris,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (l \neq 0)$$

olacak şekilde bir  $E^3$  ün bir ortonormal bazı vardır (Karger ve Novak 1979).

## 2.5 Dual Uzay

**Tanım 2.5.1** Her  $a, a^* \in \mathbb{R}$  için  $A = (a, a^*)$  ikilisine **bir sıralı reel sayı ikilisi** adı verilir. Böylece

$$ID = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R} \}$$

cümlesi üzerinde iki iç işlem (toplama ve çarpma) ve eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\oplus : ID \times ID \longrightarrow ID$$

iç işlemi  $A = (a, a^*) \in ID$  ve  $B = (b, b^*) \in ID$  olmak üzere

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

şeklinde tanımlanır ve ID deki **toplama** olarak isimlendirilir.

$$\square : ID \times ID \longrightarrow ID$$

iç işlemi  $A = (a, a^*) \in ID$  ve  $B = (b, b^*) \in ID$  olmak üzere

$$A \square B = (a, a^*) \square (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$$

şeklinde tanımlanır ve ID deki **çarpma** olarak isimlendirilir.

$A = (a, a^*) \in \text{ID}$  ve  $B = (b, b^*) \in \text{ID}$  için

$$a = b \text{ ve } a^* = b^*$$

ise  $A$  ve  $B$  **eşittir** denir ve  $A = B$  şeklinde gösterilir (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.2**  $\square$  reel sayılar cümlesi olmak üzere,

$$\text{ID} = \square \times \square$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise

ID cümlesine **dual sayılar sistemi** ve her  $(a, a^*) \in \text{ID}$  elemanına da bir **dual sayı** denir (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.1**  $(\text{ID}, \oplus, \square)$  üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.2**  $(\text{ID}, \oplus, \square)$  üçlüsü bir cisim değildir (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.3**  $A \oplus X = A$  denkleminin çözümü olarak tanımlanan  $X$  dual sayısına ID nin **sıfırı** denir ve  $0 = (0, 0)$  ile gösterilir (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.3** ID dual sayılar halkası,  $\square$  reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.4** Her  $A = (a, a^*) \in \text{ID}$  dual sayısında “ $a$ ” reel sayısına  $A$  nın **reel kısmı**, “ $a^*$ ” reel sayısına da  $A$  nın **dual kısmı** denir ve sırasıyla  $\text{Re } A = a$ ,  $\text{Du } A = a^*$  şeklinde yazılır (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.5**  $(1, 0) = 1$  dual sayısına ID deki çarpma işleminin birim elemanı veya ID deki **reel birim** ve  $(0, 1) = \varepsilon$  dual sayısı da ID deki **dual birim** olarak adlandırılır (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.6** ID dual sayılar halkası olmak üzere,

$$\text{ID} \times \text{ID} \times \text{ID} = \text{ID}^3 = \{ \bar{A} = (A_1, A_2, A_3) : A_1, A_2, A_3 \in \text{ID} \}$$

cümlesi üzerindeki, sırasıyla, **toplama**, **skalarla çarpma** ve **eşitlik** aşağıdaki şekilde tanımlanır.  $1 \leq i \leq 3$  için  $\bar{A} = (A_i), \tilde{B} = (B_i) \in \text{ID}^3$  ve  $\lambda \in \text{ID}$  olmak üzere,

Toplama:  $+: \text{ID}^3 \times \text{ID}^3 \longrightarrow \text{ID}^3$

$$(\bar{A}, \tilde{B}) \longrightarrow \bar{A} + \tilde{B} = (A_i + B_i)$$

Çarpma:  $\square : \text{ID} \times \text{ID}^3 \longrightarrow \text{ID}^3$

$$(\lambda, \bar{A}) \longrightarrow \lambda \square \bar{A} = (\lambda A_i)$$

Eşitlik :  $\bar{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow A_i = B_i$

(Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.4**  $(\text{ID}^3, +)$  bir abel grubudur (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.5**  $(\text{ID}^3, +, \text{ID}, \oplus, \square, \square)$  sistemi ID dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.7** Dual sayılar halkası üzerinde modül olan  $\text{ID}^3 = \text{ID} \times \text{ID} \times \text{ID}$  cümlesi ID-**Modül** olarak isimlendirilir ve ID-Modül' ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine, **dual vektörler** adı verilir (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.6**  $\vec{a}, \vec{a}^* \in \square^3$  olmak üzere ID-Modül' de her bir  $\bar{A}$  dual vektörü

$$\bar{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \quad (\varepsilon = (0, 1) \in \text{ID})$$

biçiminde yazılır (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.6**  $\bar{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$  dual vektörünün  $\lambda \in \text{ID}$  skaları ile çarpımı

$$\lambda \bar{A} = (\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}^*)$$

dır (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.7**  $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ ,  $\vec{B} = (\vec{b}, \vec{b}^*) \in \text{ID}^3$  için

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \vec{a}^* = \vec{b}^*$$

dır (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.8**  $\square^3$  vektör uzayı, ID-Modül' ün elemanları  $(\vec{a}, \vec{0})$  şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.8**  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ,  $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \text{ID}^3$  dual vektörlerinin **iç çarpımı**

$$f : \text{ID}^3 \times \text{ID}^3 \longrightarrow \text{ID}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} f(\vec{A}, \vec{B}) &= \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \\ &= \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon \left[ \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle \right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.9** Bir  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \text{ID}^3$  dual vektörünün **normu**,  $\vec{a} \neq \vec{0}$  olmak üzere

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \left( \|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right)$$

olarak tanımlanan bir dual sayıdır, burada

$$a = \|\vec{a}\| \text{ ve } a^* = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

olmak üzere,

$$\|\vec{A}\| = a + \varepsilon a^*$$

olarak yazılabilir (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.10** Normu  $(1,0)$  reel birimine karşılık gelen dual vektöre **birim dual vektör** denir (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.9**  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*) \in \text{ID}^3$  dual vektörü, birim dual vektör ise,

$$\|\vec{a}\| = 1 \quad \text{ve} \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dır (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.10**  $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}^*) \in \text{ID}^3$  olmak üzere

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

bir birim dual vektördür (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.5.11**  $\left\{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* : \vec{x}, \vec{x}^* \in \square^3, \|\vec{X}\| = (1,0) \right\}$  cümlesine ID-Modül' de **birim dual küre** adı verilir (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.5.11**  $\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}) \in \text{ID-Modül}$  olmak üzere, ID-Modül' de denklemi

$$\|\vec{A}\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları,  $\square^3$  deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (E. Study 1903).

## 2.6 $E^n$ de Hareketler

**Tanım 2.6.1** n-boyutlu  $V_1$  ve  $V_2$  iç çarpım uzayları ile birleşen Öklid uzayları, sırasıyla,  $E_1^n$  ve  $E_2^n$  olsun. Bir

$$f : E_1^n \longrightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü  $\forall \alpha, \beta \in V_1$  için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \longrightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa  $f$  ye bir **izometri** denir (Hacısalihoglu 1980a).

**Tanım 2.6.2**  $n$ -boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  olmak üzere

$$R : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü bir izometri ise  $f$  ye  $E^n$  de bir **katı hareket** denir.  $E^n$  nin bütün katı hareketlerinin cümlesi  $R(n)$  ile gösterilir ve

$$R(n) = \{ R \mid R : E^n \longrightarrow E^n, R \text{ izometri} \}$$

olup  $R(n)$  cümlesi dönüşümlerin birleşimi işlemine göre bir grup'dur (Hacısalihoglu 1980a).

**Tanım 2.6.3**  $n$ -boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  ve

$$R_0 : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü bir izometri olsun.

$$O \in E^n \text{ için } R_0(O) = O$$

olacak şekilde bir  $O$  noktası mevcut olsun.  $x \neq 0$  olmak üzere  $\forall x \in E^n$  için  $x \longrightarrow R_0(x)$  biçiminde tanımlanan  $R_0$  hareketine  $O$  etrafında  $E^n$  nin bir **dönme hareketi** denir (Hacısalihoglu 1980a).

$E^n$  de  $O$  etrafındaki bütün dönmelerin cümlesi  $R_0(n)$ , hareketlerin birleşimi (çarpımı) işlemine göre  $R(n)$  in bir alt grubudur.

**Teorem 2.6.1**  $n$ -boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  ve  $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in E^n$  olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup  $O(n)$  ile  $O = (0, \dots, 0)$  noktasını sabit bırakan (dönme grubu)  $R_0(n)$  ile eşlenebilir (Hacısalıhoğlu 1980a).

**Tanım 2.6.4**  $n$ -boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  ve

$$T : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü bir izometri olsun. Eğer  $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$  için

$$T(X) = (x_1 + t_1, \dots, x_n + t_n), \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

oluyor ise  $T$  ye  $E^n$  deki bir **öteleme** denir (Hacısalıhoğlu 1980a).

$E^n$  deki bütün ötelemelerin cümlesi

$$T(n) = \{T \mid T : E^n \longrightarrow E^n, T \text{ izometri}\}$$

ile gösterilir ve hareketlerin bileşimi işlemine göre bir Abel grubudur.

**Teorem 2.6.2**  $\forall R \in R(n)$  için  $E^{n+1}$  de  $R$  dönüşümünün matris formu

$$R = \begin{bmatrix} & & & c_1 \\ & a_{ij} & & \vdots \\ & & & c_n \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad [a_{ij}] \in O(n), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$(n+1) \times (n+1)$  tipinde reel ve regüler bir matristir (Hacısalıhoğlu 1980a).

Teorem 2.6.2 ye göre,  $R \in R(n)$  için

$$\begin{aligned} R : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow R(x) = y = ax + c \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Burada,  $a \in O(n)$  ve  $c \in T(n)$  dir.  $E^{n+1}$  de  $R$  dönüşümünün matris formu

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada  $ax$ , hareketin dönme kısmıdır.

**Tanım 2.6.5**  $n$ -boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  de bir izometri  $R$  olsun.  $E^n$  deki bir  $\{x_1, \dots, x_n\}$  dik koordinat sistemine göre  $R$  nin matrisel formu,

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \in O(n), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

dir. Eğer,

1.  $\det a = 1$  ise  $R$  hareketine **direkt hareket**,
2.  $\det a = -1$  ise  $R$  hareketine **karşıt hareket** denir

(Hacısalihoglu 1980a).

Ayrıca  $y = ax + c$  ile verilen hareketin parametresi  $t$  olmak üzere

$$y = ax \tag{2.6.1}$$

dönme kısmını ele alalım. Hareketli uzayın sabit  $x$  noktasının hız vektörü

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{a} = \frac{da}{dt}$$

olmak üzere

$$\dot{y} = \dot{a} x \tag{2.6.2}$$

olur.  $a \in O(n)$  olduğundan  $a^{-1} = a^T$  olup (2.6.1) den

$$x = a^T y$$

olacağından (2.6.2) ifadesi

$$\dot{y} = \dot{a} a^T y$$

olur. Burada  $\Omega = \dot{a} a^T$  olarak alınırsa

$$\dot{y} = \Omega y$$

yazılabilir. Burada  $\Omega$ , bir anti-simetrik matris olup hareketin  $a$  ya karşılık gelen **Darboux matrisi** denir (Bottema ve Roth 1979).



**Tanım 2.6.6**  $\mathbb{R}^{n+1}$  de

$$SE(n) = \left\{ R : R = \begin{pmatrix} a & & & \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} \in O(n), \det a = 1, c \in \mathbb{R}^n \right\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye **Katı Cisimlerin Özel Ortogonal Matrislerin Cümlesi**, matrislerde çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba **Katı Cisimlerin Özel Ortogonal Matris Lie Grubu** denir ve bu Lie grubuna karşılık gelen Lie cebiri

$$se(n) = \{ w \mid w \in \mathbb{R}^{n+1}, w^T = -w \}$$

şekilde tanımlanır (Karger ve Novak 1979).

### 2.7 3-Boyutlu Lorenz Uzayı

**Tanım 2.7.1**

$\mathbb{R}^3$  üzerinde

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \end{aligned}$$

ile tanımlı  $\langle , \rangle_L$  metrik tensörünü ele alalım. Bu durumda  $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_L)$  ikilisine 3-boyutlu Lorenz Uzayı adı verilir ve  $E_1^3$  ile gösterilir (O’neill, 1983).

**Tanım 2.7.2**

$V$ , sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bilineer fonksiyonu  $\forall v, w \in V$  için  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  özelliğini sağlıyor ise  $\langle , \rangle$ ’ye  $V$  üzerinde bir **simetrik bilinear form** denir (O’neill 1983).

**Tanım 2.7.3**

$V$ , vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $\langle , \rangle$  olsun. Bu taktirde,

i-)  $\forall v \in V, (v \neq 0)$  için  $\langle v, v \rangle > 0$  ise  $\langle , \rangle$  bilinear formuna pozitif tanımlı,

ii-)  $\forall v \in V, (v \neq 0)$  için  $\langle v, v \rangle < 0$  ise  $\langle , \rangle$  bilinear formuna negatif tanımlı,

- iii-)  $\forall v \in V, (v \neq 0)$  için  $\langle v, v \rangle \geq 0$  ise  $\langle , \rangle$  bilineer formuna semi- pozitif tanımlı,
- iv-)  $\forall v \in V, (v \neq 0)$  için  $\langle v, v \rangle \leq 0$  ise  $\langle , \rangle$  bilineer formuna semi-negatif tanımlı,
- v-)  $\forall w \in V$  için  $\langle v, w \rangle = 0$  için  $v = 0$  oluyorsa  $\langle , \rangle$  bilineer formuna non-dejenere,  $v \neq 0$  ise dejenere adı verilir (O’neill, 1983).

**Tanım 2.7.4**

$\mathbb{R}^3$  üzerinde Lorenz metriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen  $\{\mathbb{R}^3, \langle , \rangle\}$  ikilisine **3-boyutlu Lorenz uzayı** denir ve  $IL^3$  ile gösterilir (O’neill 1983).

**Tanım 2.7.5**

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in IL^3$  olsun. Eğer

- i-)  $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0$  ise  $\vec{X}$ ’ e time-like vektör,
- ii-)  $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle > 0$  ise  $\vec{X}$ ’ e space-like vektör,
- iii-)  $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0$  ve  $\vec{X} \neq \vec{0}$  ise  $\vec{X}$ ’ e null vektör adı verilir (O’neill 1983).

**Tanım 2.7.6**

$IL^3$ , 3-boyutlu Lorenz uzayı ve  $\vec{X}, \vec{Y} \in IL^3$  olsun.  $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$  ise  $\vec{X}$  ve  $\vec{Y}$  vektörleri **Lorenz anlamında diktirler** denir (O’neill 1983).

**Tanım 2.7.7**

$\vec{X} \in IL^3$  için  $\vec{X}$  ‘ in normu

$$\|\vec{X}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle|}$$

olarak tanımlanır (O’neill 1983).

**Tanım 2.7.8**

$\vec{X} \in IL^3$  olmak üzere,

- i-)  $\|\vec{X}\|_L > 0$  dır,

ii-)  $\|\vec{X}\|_L = 0 \Leftrightarrow \vec{X}$  bir null vektördür,

iii-)  $\vec{X}$  bir time-like vektör ise  $\|\vec{X}\|_L^2 = -\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle$ ,

iv-)  $\vec{X}$  bir space-like vektör ise  $\|\vec{X}\|_L^2 = \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle$  dir

(O’neill 1983).

### Tanım 2.7.9

$IL^3$  Lorenz uzayında  $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$  eşitliğini sağlayan  $A$  matrisine **Lorenz anlamda**

**ortogonal matris** denir. Burada  $\varepsilon$  işaret matrisidir, yani  $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  dir (O’neill

1983).

### Tanım 2.7.10

$S^T = -\varepsilon S \varepsilon$  eşitliğini sağlayan  $S$  matrisine **Lorenz anlamda anti-simetrik matris** denir (O’neill 1983).

### Tanım 2.7.11

$IL^3$  Lorenz uzayında iki vektör  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  ve  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  olmak üzere

$$(v_3 w_2 - v_2 w_3, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne  $v$  ve  $w$  nin **vektörel çarpımı** denir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\vec{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \det \begin{bmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır (O’neill 1983).

### 3. LİNEER VEKTÖR ALANLARI

Bu bölümde ilk önce; hareket, 1-parametrelili hareket, homotetik hareket, 1-parametrelili homotetik hareket kavramları verilmiştir. Daha sonra lineer vektör alanları verilerek spiral vektör alanları ve spiral vektör alanlarının integral eğrileri tanıtılmıştır. Bu integral eğrilerinin ani hareketler ve homotetik hareketler arasındaki ilişkisi verilmiştir. Spiral vektör alanlarının özel halinin helisel vektör alanları olduğu belirtilmiştir.

**Tanım 3.1**  $E^n$  n-boyutlu Öklid uzayında bir sabit uzay  $H$ , hareketli uzay  $H_0$  olmak üzere,  $H_0$  m  $H$  ye göre  $H_0 / H$  hareketi

$$\begin{aligned} y : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow y(x) = ax + c \end{aligned}$$

şeklindeki  $y$  izometrisi ile tanımlıdır ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada,  $a \in SO(n)$  ve  $c \in \mathbb{R}^n$  dir.

**Tanım 3.2**  $E^n$  n-boyutlu Öklid uzayında  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $t \in J$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f_t : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow f_t(x) = y(t) = a(t)x + c(t) \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme  $E^n$  de **bir parametrelili hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dir. Burada,  $a(t) \in SO(n)$  ve  $c(t) \in \mathbb{R}^n$  dir.

**Tanım 3.3**  $E^n$  n-boyutlu Öklid uzayında  $h \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere

$$\begin{aligned} y : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow y(x) = (hx)x + c \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme  $E^n$  de bir **homotetik hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

dir. Burada,  $a \in SO(n)$  ve  $c \in \mathbb{R}^n$  dir.

**Tanım 3.4**  $E^n$  n-boyutlu Öklid uzayında  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $t \in J$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f_t : E^n &\longrightarrow E^n \\ x &\longrightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme  $E^n$  de **bir parametrelili homotetik hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

dir. Burada,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ,  $a(t) \in SO(n)$  ve  $c(t) \in \mathbb{R}^n$  dir.

### 3.1 $E^3$ de Helisel Vektör Alanı

Bu bölümde 1-parametrelili hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek helisel vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir helisel vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz

$E^3$  3-boyutlu Öklid uzayında  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $t \in J$  olmak üzere,

$$y(t) = a(t)x + c(t) \quad (3.5)$$

ile tanımlı  $E^3$  de 1-parametrelili hareketi alalım. Bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada,  $a(t) \in SO(3)$  ve  $c(t) \in \mathbb{R}^3$  dir.

$A(t)$  formundaki 1-parametrelili matrislerin cümlesi

$$SE(3) = \left\{ A(t) \mid A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} SO(3), c(t) \hat{=} \mathbb{R}^3 \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba

karşılık gelen Lie cebirini  $se(3)$  ile gösterirsek  $A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$  için

$$\begin{aligned} A^{-1}(t) &= \begin{pmatrix} a^{-1}(t) & -a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^T(t) & -a^T(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\dot{A}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned} \dot{A}(t)A^{-1}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{a}(t)a^T(t) & -\dot{a}(t)a^T(t)c(t) + \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W & \bar{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Burada  $W = \dot{a}(t)a^T(t)$  olup  $W^T = -W$  olduğundan bir anti-simetrik

matris ve  $\bar{v} = \dot{c}(t) - \dot{a}(t)a^T(t)c(t)$  dir. Bu durumda,  $se(3)$  Lie cebirini

$$se(3) = \left\{ \begin{pmatrix} W & \bar{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : W \in \mathfrak{so}(3), W^T = -W, \bar{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca  $se(3)$  Lie cebirinin elemanları ile helisel vektör alanları birebir eşlenirler.

**Tanım 3.1.1**  $\square_4^4$  de

$$se(3) = \left\{ \begin{pmatrix} W & \bar{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : W \in \mathfrak{so}(3), W^T = -W, \bar{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **helisel vektör alanı** denir.

Ani hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{pmatrix} \dot{W}(t) & \bar{v}(t) \\ \dot{e} & \dot{u} \\ \dot{e} & \dot{u} \\ \dot{e} & \dot{u} \end{pmatrix} \hat{=} se(3)$  matris kümesinde  $t = t_0$  için  $\Omega(t_0) = \Omega$  ve  $\bar{v}(t_0) = \bar{v}$  olarak alırsak

$\begin{pmatrix} \dot{W} & \bar{v} \\ \dot{e} & \dot{u} \\ \dot{e} & \dot{u} \\ \dot{e} & \dot{u} \end{pmatrix}$  matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre

$A = \begin{pmatrix} \dot{W} & \bar{v} \\ \dot{e} & \dot{u} \\ \dot{e} & \dot{u} \\ \dot{e} & \dot{u} \end{pmatrix}$  ve  $v = \mathbb{R}^3$  alınırsa  $X$  lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\rightarrow X(P) = AP \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & \bar{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega P + \bar{v} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini  $t = 0$  için  $y(0) = P = x$  başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Wy + \bar{v}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin  $y(0) = P = x$  başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Wt}x + \int_0^t e^{W(t-s)}\bar{v}ds \\ &= e^{Wt}x - e^{Wt}\bar{v}W^{-1}e^{-Wt} + e^{Wt}\bar{v}W^{-1} \\ &= e^{Wt}x - \left( e^{Wt}\bar{v} - \bar{v} \right) W^{-1} \\ &= e^{Wt}x - l W^{-1} \\ &= e^{Wt}x + l W \\ &= e^{Wt}x + S(t) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak  $x$  in yörüngesi olan  $y(t)$  eğrisi bir helis belirtir. Çünkü  $x$ ,  $W$  etrafında dönmüş ve  $W$  boyunca ötelenmiştir. Bu sonuçtan dolayı  $X$  vektör alanına **helisel vektör alanı** denir.

Helisel vektör alanları ile 1-parametrelili hareketlerin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametrelili hareketleri elde ederiz. Bu 1-parametrelili hareketlerin yörüngelerini şu teoremle verebiliriz.

**Teorem 3.1.1**  $E^3$  de bir lineer vektör alanı  $X$ , bir anti-simetrik matris  $\Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ve bir kolon matrisi  $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$  olsun. O halde  $X$  in  $E^3$  de bir  $\{O; u_1, u_2, u_3\}$  ortonormal çatısına göre matrisi

$$\begin{bmatrix} \Omega & \bar{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

1.  $rank[\Omega \ \bar{v}] = 3$  ise  $X$  in integral eğrileri, ortak eksenli aynı parametrelili, dairesel helis eğrileridir.
2.  $rank[\Omega \ \bar{v}] = 2$  ise  $X$  in integral eğrileri, paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan çemberlerdir.
3.  $rank[\Omega \ \bar{v}] = 1$  ise  $X$  in integral eğrileri paralel doğrulardır (Abolfazl 1989).

**İspat:**

$E^3$  de bir lineer vektör alanı  $X$ , bir anti-simetrik matris  $\Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ve bir kolon matrisi  $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$  olsun. O halde  $X$  in  $E^3$  de bir  $\{O; u_1, u_2, u_3\}$  ortonormal çatısına göre matrisi

$$X = \begin{bmatrix} \Omega & \bar{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 & a \\ \lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

1.  $rank[\Omega \ \bar{v}] = 3$  olmak üzere,  $X$  lineer vektör alanını  $\forall P = (x, y, z) \in E^3$  için



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X(P) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Omega & \bar{v} \\ 0 & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & a \\ -\lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yada

$$X(P) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, c)$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan,  $E^3$  de

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım.  $\alpha$  nın  $X$  lineer vektör alanının integral eğrisi olabilmesi için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

diferensiyel denklemini sağlaması gerekir. Bu diferensiyel denkleminin  $\forall \alpha(t) = P = (x, y, z) \in E^3$  için çözümünü  $X(P) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, c)$  olarak aşağıdaki şekilde çözebiliriz.

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = \lambda \alpha_2 + a \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = -\lambda \alpha_1 + b \\ \frac{d\alpha_3}{dt} = c \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemidir. Bu denklem sistemini basitleştirmek amacıyla  $\lambda = 1$  almamız genelliği bozmaz. Bu durumda  $X$  in integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A \sin t - B \cos t + b, A \cos t + B \sin t - a, ct + d)$$

şeklinde elde edilir. Buradan,  $\alpha(t)$  integral eğrileri  $\forall A, B \in \mathbb{R}$  için ortak eksenli aynı parametrelili, dairesel helis eğrileridir.

**2.**  $\text{rank}[\Omega \quad \bar{v}] = 2$  olduğunda  $c = 0$  ve  $\lambda \neq 0$  olmalıdır. Bu durumda  $X$  lineer vektör alanı

$$X(P) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, 0)$$

yada  $X$  e karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & a \\ -\lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olmalıdır. Diğer yandan,  $E^3$  de

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım.  $\alpha$  nın  $X$  lineer vektör alanının integral eğrisi olabilmesi için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

diferensiyel denklemini sağlaması gerekir. Bu diferensiyel denkleminin  $\forall P = (x, y, z) \in E^3$  için  $\alpha(t) = P$  ve  $X(P) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, 0)$  ise integral eğrisi

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(P)$$

diferensiyel denkleminin çözüm eğrisidir. Yani,

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = \lambda\alpha_2 + a \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = -\lambda\alpha_1 + b \\ \frac{d\alpha_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemidir. Bu denklem sistemini basitleştirmek amacıyla  $\lambda = 1$  almamız genelliği bozmaz. Bu durumda  $X$  in integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A \sin t - B \cos t + b, A \cos t + B \sin t - a, d)$$

şeklinde elde edilir. Buradan,  $\alpha(t)$  integral eğrileri  $\forall A, B \in \mathbb{R}$  için paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan çemberlerdir.

**3.**  $\text{rank}[\Omega \quad \bar{v}] = 1$  olduğunda  $\lambda = 0$  olmalıdır. Bu durumda  $X$  lineer vektör alanı

$$X(P) = (a, b, c)$$

yada  $X$  e karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olmalıdır. Diğer yandan,  $E^3$  de

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım.  $\alpha$  nın  $X$  lineer vektör alanının integral eğrisi olabilmesi için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

diferensiyel denklemini sağlaması gerekir. Bu diferensiyel denkleminin

$\forall P = (x, y, z) \in E^3$  için  $\alpha(t) = P$  ve  $X(P) = (a, b, c)$  ise integral eğrisi

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(P)$$

diferensiyel denkleminin çözüm eğrisidir. Yani,

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = a \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = b \\ \frac{d\alpha_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

diferensiyel denklemin sistemidir. Böylece  $X$  in integral eğrisi

$$\alpha(t) = (at + d_1, bt + d_2, ct + d_3)$$

şeklinde elde edilir. Buradan,  $\alpha(t)$  integral eğrileri paralel doğrulardır  $\square$

### 3.2 $E^3$ Öklid Uzayında Spiral Vektör Alanları

Bu bölümde bir parametrelili homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek spiral vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir spiral vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

$E^3$  n-boyutlu Öklid uzayında  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $t \in J$  olmak üzere

$$f_t : E^3 \longrightarrow E^3$$

$$x \longrightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \quad (3.7)$$

ile tanımlı  $E^3$  de bir parametrelili homotetik hareketi ele alalım. Bu homotetik hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ,  $a(t) \in SO(3)$  ve  $c(t) \in \mathbb{R}^3$  dir.

$B(t)$  formundaki 1-parametrelili matrislerin cümlesi

$$SD(3) = \left\{ B(t) : B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a(t) \in SO(3), h(t) \in \mathbb{R}^+, c(t) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba

karşılık gelen Lie cebirini  $sd(3)$  ile gösterirsek  $B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SD(3)$  için

$$B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)}a^{-1}(t) & -\frac{1}{h(t)}a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a \in SO(3)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)}a^T(t) & -\frac{1}{h(t)}a^T(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) + h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$B(t)B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{h(t)}{h(t)}a(t)a^T(t) + a(t)a^T(t) & -\frac{h(t)}{h(t)}a(t)a^T(t)c(t) - a(t)a^T(t)c(t) + c(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(t)B^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{h}(t)}{h(t)}I_3 + a(t)a^T(t) & -\frac{h(t)}{h(t)}c(t) - a(t)a^T(t)c(t) + c(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{g}(t)I_3 + W(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde ederiz. Burada  $g(t) = \frac{h(t)}{h(t)}$ ,  $W = a(t)a^T(t)$  olup  $3 \times 3$  tipinde bir anti-

simetrik matris ve  $\bar{c}(t) = -g(t)c(t) - a(t)a^T(t)c(t) + c(t)$  dir. Bu durumda,  $sd(3)$  Lie cebirini

$$sd(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{g}(t)I_3 + W(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot W \hat{I}_3, W^T = -W, \bar{c} \in \mathbb{R}^3, g \hat{I}_3 \right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca  $se(3)$  Lie cebirinin elemanları ile spiral vektör alanları birebir eşlenirler.

**Tanım 3.2.1**  $\square_4$  de

$$sd(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{g}(t)I_3 + W(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot W \hat{I}_3, W^T = -W, \bar{c} \in \mathbb{R}^3, g \hat{I}_3 \right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ani homotetik hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{pmatrix} \dot{g}(t)I_3 + W(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in sd(3)$  matris kümesinde  $t = t_0$  için  $\gamma(t_0)I_3 + \Omega(t_0) = D$  ve

$\bar{c}(t_0) = \bar{c}$  olarak alırsak  $\begin{pmatrix} \dot{D} & \bar{c} \\ \dot{c} & 0 \end{pmatrix}$  matrisi yardımıyla lineer vektör alanını

tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre  $A = \begin{pmatrix} \dot{D} & \bar{c} \\ \dot{c} & 0 \end{pmatrix}$  ve  $v = \square^3$  alınırsa  $Y$  lineer vektör

alanını

$$\begin{aligned}
 Y : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 Q &\rightarrow Y(Q) = AQ \\
 &= \begin{bmatrix} D & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DQ + \bar{c} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini  $t=0$  için  $y(0) = Q = x$  başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Dy + \bar{c}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin  $y(0) = Q = x$  başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{Dt}x + \int_0^t e^{D(t-s)}\bar{c}ds \\
 &= e^{Dt}x + e^{Dt}D^{-1}\bar{c} - e^{Dt}D^{-1}e^{-Dt}\bar{c} \\
 &= e^{Dt}x + K(t)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

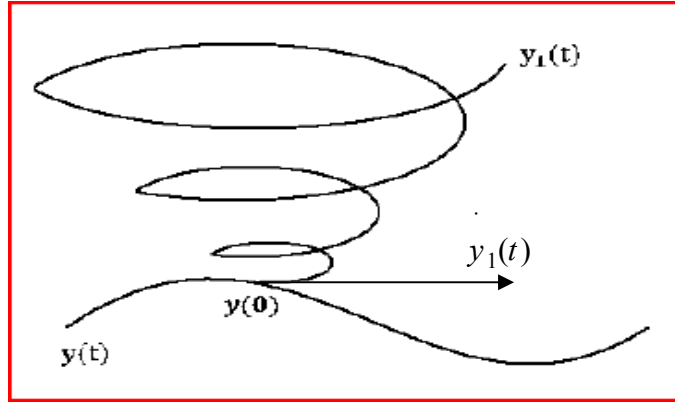
$$\begin{aligned}
 e^{Dt} &= e^{\begin{bmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}} e^{\Omega t} \\
 &= e^{\gamma(t)} I_3 \cdot \begin{bmatrix} e^{\Omega t} \\ \\ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olduğundan  $y(t) = e^{Dt}x + K(t)$  ifadesinin  $y(t) = [h(t)a(t)]x + K(t)$  şeklinde bir homotetik hareket belirttiğini söyleyebiliriz. Sonuç olarak  $x$  in yörüngesi olan  $y(t)$  eğrisi bir spiral belirtir. Bu sonuçtan dolayı  $X$  vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ayrıca  $\bar{v} = c - a a^T c$  ve  $\bar{c} = -gc - a a^T c + c$  olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{Dt}x + e^{Dt}D^{-1}\bar{c} - e^{Dt}D^{-1}e^{-Dt}\bar{c} \\
 y(t) &= e^{(gI_3 + W)t}x + e^{(gI_3 + W)t}(gI_3 + W)^{-1}\bar{c} - e^{(gI_3 + W)t}(gI_3 + W)^{-1}e^{-(gI_3 + W)t}
 \end{aligned}$$

ifadesinde  $g = 0$  alırsak  $y(t) = e^{Wt}x - e^{Wt}\bar{v}W^{-1}e^{-Wt} + e^{Wt}\bar{v}W^{-1}$  ifadesini elde ederiz ki bu ifade (3.6) den dolayı  $y(t)$  eğrisinin bir helis eğrisi olduğunu söyler. Bu durumda spiral vektör alanları helisel vektör alanlarının bir genel halidir diyebiliriz.



Şekil 3.1 Ani Homotetik Hareket

Spiral vektör alanları ile 1-parametrelili homotetik hareketin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametrelili homotetik hareketleri elde ederiz. Bu durumda 1-parametrelili homotetik hareketlerin yörüngelerini aşağıdaki teoremlerle verebiliriz.

**Teorem 3.2.1**  $E^3$  de bir lineer vektör alanı  $Y$ , bir anti-simetrik matris  $\Omega \in \mathbb{R}^3_3$  ve bir kolon matrisi  $\bar{c} \in \mathbb{R}^3_1$  olsun. O halde  $Y$  nin  $E^3$  de bir  $\{O; u_1, u_2, u_3\}$  ortonormal çatısına göre matrisi

$$\begin{pmatrix} \dot{g}I_3 + W & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} @ \begin{pmatrix} \dot{g}I_3 + W & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

1.  $g = 0$  ise, bu durumda hareket bir katı cisim hareketidir.

i.  $rank \begin{pmatrix} \dot{g}I_3 + W & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$  ise  $Y$  nin integral eğrileri, ortak eksenli aynı parametrelili, helis eğrileridir.

ii.  $rank \begin{pmatrix} \dot{g}I_3 + W & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$  ise  $Y$  nin integral eğrileri, paralel düzlemlerde kalan ve merkezleri bu paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan çemberlerdir.

iii.  $rank \begin{pmatrix} \dot{g}I_3 + W & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$  ise,  $Y$  nin integral eğrileri, paralel doğrulardır

(Karger, Novak).

2.  $g^{-1} = 0$  ve  $\text{rank} \begin{pmatrix} gI_3 + W \\ \bar{c} \end{pmatrix} = 3$  ise integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Burada,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ,  $\frac{h'(t)}{h(t)} = g(t)$  ve  $\Omega = aa^T$  dir.

**Örnek 3.2.1**  $E^3$  de bir lineer vektör alanı  $Y$ , bir anti-simetrik matris

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ bir kolon matrisi } \bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h = e^t \text{ ve } \frac{h'(t)}{h(t)} = g = 1$$

olmak üzere,

$$Y = \begin{pmatrix} gI_3 + W \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

$$e^{tY} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tY)^n}{n!} = I + tY + \frac{t^2}{2!}Y^2 + \frac{t^3}{3!}Y^3 + \frac{t^4}{4!}Y^4$$

olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} e^{tY} &= \begin{pmatrix} 1 + t - \frac{2t^3}{3!} + \frac{4t^4}{4!} + \dots & -t - \frac{2t^2}{2!} - \frac{2t^3}{3!} - \dots & 0 & 0 \\ t + \frac{2t^3}{2!} + \frac{2t^3}{3!} + \dots & 1 + t - \frac{2t^3}{3!} - \frac{4t^4}{4!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t(e^{-it} + e^{it}) & \frac{1}{2}ie^t(e^{it} - e^{-it}) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}ie^t(e^{it} - e^{-it}) & \frac{1}{2}e^t(e^{-it} + e^{it}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t & 0 & 0 \\ e^t \sin t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.  $e^{tY}$  ile 1-parametrelili homotetik hareket tanımlanabilir. Bu harekette bir noktanın yörüngesi spiral eğri belirtir.



### 3.3 $E^n$ Öklid Uzayında Spiral Vektör Alanları

Bu bölümde ilk önce  $E^n$  Öklid uzayında bir parametrelili homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek spiral vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir spiral vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

$E^n$  n-boyutlu Öklid uzay,  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $t \in J$  olmak üzere

$$f_t : E^n \longrightarrow E^n$$

$$x \longrightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \quad (3.8)$$

ile tanımlı  $E^n$  de bir parametrelili homotetik hareketi ele alalım. Bu homotetik hareketin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ,  $a(t) \in SO(n)$  ve  $c(t) \in \mathbb{R}^n$  dir.

$B(t)$  formundaki 1-parametrelili matrislerin cümlesi

$$SD(n) = \left\{ B(t) : B(t) = \begin{pmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a(t) \in SO(n), h(t) \in \mathbb{R}^+, c(t) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba

karşılık gelen Lie cebirini  $sd(n)$  ile gösterirsek  $B(t) = \begin{pmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SD(n)$  için

$$B^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h(t)}a^{-1}(t) & -\frac{1}{h(t)}a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \in SO(n)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{h(t)}a^T(t) & -\frac{1}{h(t)}a^T(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\dot{B}(t) = \begin{pmatrix} \dot{h}(t)a(t) + h(t)\dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned}
B(t)B^{-1}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{h(t)}{h(t)}a(t)a^T + a(t)a^T(t) & -\frac{h(t)}{h(t)}a(t)a^T c(t) - a(t)a^T(t)c(t) + c(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{h(t)}{h(t)}I_n + a(t)a^T(t) & -\frac{h(t)}{h(t)}c(t) - a(t)a^T(t)c(t) + c(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g(t)I_n + W(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Burada  $g(t) = \frac{h(t)}{h(t)}$ ,  $W = a(t)a^T(t)$  olup  $n \times n$  tipinde bir anti-simetrik matris ve  $\bar{c}(t) = -g(t)c(t) - a(t)a^T(t)c(t) + c(t)$  dir. Bu durumda,  $sd(n)$  Lie cebirini

$$sd(n) = \left\{ \begin{pmatrix} g(t)I_n + W(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid W \hat{I}_n, W^T = -W, \bar{c} \in \mathbb{R}^n, g \hat{I}_n \right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca  $sd(n)$  Lie cebirinin elemanları ile spiral vektör alanları birebir eşlenirler.

**Tanım 3.3.1**  $\square_{n+1}^{n+1}$  de

$$sd(n) = \left\{ \begin{pmatrix} g(t)I_n + W(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid W \hat{I}_n, W^T = -W, \bar{c} \in \mathbb{R}^n, g \hat{I}_n \right\}$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ani homotetik hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{pmatrix} g(t)I_n + W(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in sd(n)$  matris kümesinde  $t = t_0$  için  $\gamma(t_0)I_n + \Omega(t_0) = D$  ve

$\bar{c}(t_0) = \bar{c}$  olarak alırsak  $\begin{pmatrix} D & \bar{c} \\ \dot{c} & 0 \end{pmatrix}$  matrisi yardımıyla lineer vektör alanını

tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a göre  $A = \begin{bmatrix} D & \bar{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $v = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$  alınırsa  $Y$  lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} Y : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ Q &\rightarrow Y(Q) = AQ \\ &= \begin{bmatrix} D & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DQ + \bar{c} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini  $t=0$  için  $y(0) = Q = x$  başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Dy + \bar{c}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin  $y(0) = Q = x$  başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Dt}x + \int_0^t e^{D(t-s)}\bar{c}ds \\ &= e^{Dt}x + e^{Dt}D^{-1}\bar{c} - e^{Dt}D^{-1}e^{-Dt}\bar{c} \\ &= e^{Dt}x + K(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} e^{Dt} &= e^{\begin{bmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}} e^{\Omega t} \\ &= e^{\gamma(t)} I_n \cdot [e^{\Omega t}] \end{aligned}$$

olduğundan  $y(t) = e^{Dt}x + K(t)$  ifadesinin  $y(t) = [h(t)a(t)]x + K(t)$  şeklinde bir homotetik hareket belirttiğini söyleyebiliriz. Sonuç olarak  $x$  in yörüngesi olan  $y(t)$  eğrisi bir spiral belirtir. Bu sonuçtan dolayı  $X$  vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ayrıca  $\bar{v} = c - a a^T c$  ve  $\bar{c} = -gc - a a^T c + c$  olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Dt}x + e^{Dt}D^{-1}\bar{c} - e^{Dt}D^{-1}e^{-Dt}\bar{c} \\ y(t) &= e^{(gI_n + W)t}x + e^{(gI_n + W)t}(gI_n + W)^{-1}\bar{c} - e^{(gI_n + W)t}(gI_n + W)^{-1}e^{-(gI_n + W)t} \end{aligned}$$

ifadesinde  $g = 0$  alırsak  $y(t) = e^{Wt}x - e^{Wt}\bar{v}W^{-1}e^{-Wt} + e^{Wt}\bar{v}W^{-1}$  ifadesini elde ederiz ki bu ifade (3.6) den dolayı  $y(t)$  eğrisinin bir helis eğrisi olduğunu söyler. Bu durumda spiral vektör alanları helisel vektör alanlarının bir genel halidir diyebiliriz.

Spiral vektör alanları ile 1-parametrelî homotetik hareketin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametrelî homotetik hareketleri elde ederiz. Bu 1-parametrelî homotetik hareketlerin yörüngelerini aşağıdaki teoremlerle verebiliriz.

**Teorem 3.3.1**  $E^n$  de bir lineer vektör alanı  $Y$ , bir anti-simetrik matris  $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ve bir kolon matrisi  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$  olsun. O halde  $Y$  in  $E^n$  de bir  $\{O; u_1, u_2, \dots, u_n\}$  ortonormal

çatısına göre matrisi  $Y = \begin{pmatrix} gI_n + W & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  olmak üzere  $g > 0$  ve

$\text{rank } gI_n + W = n$  ise  $Y$  nin integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Burada,  $a(t) \in SO(n)$ ,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ,  $c(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{c}(t) = c(t) - \frac{h(t)}{h(t)}c(t) - a(t)a^T(t)c(t)$ ,

$g(t) = \frac{h(t)}{h(t)}$  ve  $W(t) = a(t)a^T(t)$  dir.

## 4. LORENZ UZAYINDA LİNEER VEKTÖR ALANLARI

Bu bölümde; Lorenz uzayı için, 1-parametrelili hareket ve 1-parametrelili homotetik hareket kavramları verilmiştir. Lorenz uzayında ani homotetik hareketlerin hız vektörleri incelenmiştir. Daha sonra lineer vektör alanları verilerek Lorenz uzayında spiral vektör alanları ve spiral vektör alanlarının integral eğrileri tanıtılmıştır. Bu integral eğrilerinin ani hareketler ile homotetik hareketler arasındaki ilişkisi verilmiştir.

### 4.1 $E_1^3$ Lorenz Uzayında Helisel Vektör Alanları

Bu bölümde  $E_1^3$  Lorenz uzayında bir parametrelili hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek helisel vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir helisel vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

**Tanım 4.1.1**  $\mathbb{R}^3$  üzerinde

$$\langle, \rangle_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ile tanımlı  $\langle, \rangle_L$  metrik tensörünü ele alalım. Bu durumda  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_L)$  ikilisine 3-boyutlu Lorenz Uzayı adı verilir ve  $E_1^3$  ile gösterilir.

**Tanım 4.1.2**  $E_1^3$ , 3-boyutlu Lorenz uzayı,  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $t \in J$  olmak üzere

$$f_t : E_1^3 \longrightarrow E_1^3$$
$$x \xrightarrow{f_t} f_t(x) = y(t) = a(t)x + c(t) \quad (4.1)$$

ile tanımlı dönüşümüne  $E_1^3$  Lorenz uzayında **1-parametrelili hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada  $c(t) \hat{\in} \mathbb{R}^3$  ve  $a(t) \hat{\in} SO(3,1)$  dir. Ayrıca,  $a(t) \hat{\in} SO(3,1)$  olduğundan

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } a^T = \varepsilon a^{-1} \varepsilon \text{ dir.}$$

$A(t)$  formundaki 1-parametrelili matrislerin cümlesi

$$SE(3,1) = \left\{ A(t) \mid A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \in SO(3,1), c(t) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba

karşılık gelen Lie cebirini  $se(3,1)$  ile gösterirsek  $A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3,1)$  için

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} a^{-1}(t) & -a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} \dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned} \dot{A}(t)A^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{a}(t)a^{-1}(t) & \dot{c}(t) - a(t)a^{-1}(t)\dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{C} & \bar{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Burada  $C = \dot{a}(t)a^{-1}(t)$  olup Lorenz anlamında bir anti-simetrik

matris ve  $\bar{u} = \dot{c}(t) - a(t)a^{-1}(t)\dot{c}(t)$  dir. Bu durumda,  $se(3,1)$  Lie cebirini

$$se(3,1) = \left\{ \begin{bmatrix} \dot{C} & \bar{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : C^T = -C, \bar{u} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca  $se(3,1)$  Lie cebirinin elemanları ile helisel vektör alanları birebir eşlenirler.

**Tanım 4.1.3**

$$se(3,1) = \begin{pmatrix} \dot{C} & \bar{u} \dot{u} \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & 0 \end{pmatrix} : C^T = - e C e, \bar{u} \hat{I} \mathbb{R}_1^3$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **helisel vektör alanı** denir.

$E_1^3$  Lorenz uzayında bir parametrelili ani hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{pmatrix} \dot{C}(t) & \bar{u}(t) \dot{u} \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & 0 \end{pmatrix}$  matris kümesinde  $t = t_0$  için  $C(t_0) = C$  ve  $\bar{u}(t_0) = \bar{u}$  olarak

alırsak  $\begin{pmatrix} \dot{C} & \bar{u} \dot{u} \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & 0 \end{pmatrix}$  matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a

göre  $A = \begin{pmatrix} \dot{C} & \bar{u} \dot{u} \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & 0 \end{pmatrix}$  ve  $v = E_1^3$  alınırsa  $X$  lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} X : E_1^3 &\longrightarrow E_1^3 \\ P &\rightarrow X(P) = AP \\ &= \begin{bmatrix} C & \bar{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP + \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini  $t = 0$  için  $y(0) = P = x$  başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Cy + \bar{u}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin  $y(0) = P = x$  başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Ct}x + \int_0^t e^{C(t-s)}\bar{u}ds \\ &= e^{Ct}x - e^{Ct}\bar{u}C^{-1}e^{-Ct} + e^{Ct}\bar{u}C^{-1} \\ &= e^{Ct}x - \int_0^t e^{C(t-s)}\bar{u}C^{-1}e^{-Cs}ds \\ &= e^{Ct}x + \int_0^t e^{C(t-s)}\bar{u}C^{-1}e^{-Cs}ds \\ &= e^{Ct}x + S(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak  $x$  in yörüngesi olan  $y(t)$  eğrisi bir helis belirtir. Çünkü  $x$ ,  $C$  etrafında dönmüş ve  $C$  boyunca ötelenmiştir. Bu sonuçtan dolayı  $X$  vektör alanına **helisel vektör alanı** denir.

Helisel vektör alanları ile 1-parametrelili hareketlerin Lie cebirini elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametrelili (ani) hareketleri elde ederiz.

#### 4.2 $E_1^3$ Lorenz Uzayında Spiral Vektör Alanları ve İntegral Eğrileri

Bu bölümde  $E_1^3$  Lorenz uzayında 1-parametrelili homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek spiral vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir spiral vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

**Tanım 4.2.1**  $E_1^3$ , 3-boyutlu Lorenz uzayında  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $t \in J$  olmak üzere

$$f_t : E_1^3 \rightarrow E_1^3$$

$$x \mapsto f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \quad (4.3)$$

ile tanımlı dönüşüme  $E_1^3$  Lorenz uzayında **1-parametrelili homotetik hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada  $c(t) \in \mathbb{R}$ ,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$  ve  $a(t) \in SO(3,1)$  dir. Ayrıca,  $a(t) \in SO(3,1)$

olduğundan  $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  olmak üzere  $a^T = \varepsilon a^{-1} \varepsilon$  dir.



$B(t)$  formundaki 1-parametrelili matrislerin cümlesi

$$SD(3,1) = \left\{ B(t) : B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \in SO(3,1), c(t) \in \mathbb{R}^3, h \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba karşılık gelen Lie cebirini  $sd(3,1)$  ile gösterirsek  $B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SD(3,1)$  için

$$B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)}a^{-1}(t) & -\frac{1}{h(t)}a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\dot{B}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t)a(t) + h(t)\dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \dot{B}(t)B^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} + \dot{a}(t)a^{-1}(t) & -\frac{\dot{h}(t)}{h(t)}c(t) - \dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t) + \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma(t)I_3 + C(t) & \bar{r}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W(t) & \bar{r}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\cong [W \quad \bar{r}] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $g(t) = \frac{h(t)}{h(t)}$ ,  $\bar{r}(t) = -g(t)c(t) - \dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t) + \dot{c}(t)$  ve

$C = \dot{a}(t)a^{-1}(t)$  olup Lorenz anlamında bir anti-simetrik matrisdir. Bu durumda,  $sd(3,1)$  Lie cebirini

$$sd(3,1) = \left\{ \begin{bmatrix} W & \bar{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : gI_3 + C = W \hat{I}_3, C^T = -C, \bar{r} \in \mathbb{R}^3, g \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca  $sd(3,1)$  Lie cebirinin elemanları ile spiral vektör alanları birebir eşlenirler.

**Tanım 4.2.2**

$$sd(3, 1) = \begin{pmatrix} \dot{W} & \bar{r} \dot{u} \\ \dot{x} & \dot{u} \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & \dot{u} \end{pmatrix} : gI_3 + C = W \hat{I}_3, C^T = -eC e, \bar{r} \in R_1^3, g \hat{I}_3$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

$E_1^3$  Lorenz uzayında bir parametrelili ani homotetik hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{pmatrix} \dot{W} & \bar{r} \dot{u} \\ \dot{x} & \dot{u} \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & \dot{u} \end{pmatrix}$   $sd(3, 1)$  matris kümesinde  $t = t_0$  için  $W(t_0) = W$  ve  $\bar{r}(t_0) = \bar{r}$  olarak

alırsak  $\begin{pmatrix} \dot{W} & \bar{r} \dot{u} \\ \dot{x} & \dot{u} \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & \dot{u} \end{pmatrix}$  matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a

göre  $A = \begin{pmatrix} \dot{W} & \bar{r} \dot{u} \\ \dot{x} & \dot{u} \\ \dot{e} & 0 \\ \dot{e} & \dot{u} \end{pmatrix}$  ve  $v = E_1^3$  alınırsa  $Y$  lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} Y : E_1^3 &\rightarrow E_1^3 \\ Q &\rightarrow Y(Q) = AQ \\ &= \begin{bmatrix} W & \bar{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WQ + \bar{r} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini  $t = 0$  için  $y(0) = Q = x$  başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Wy + \bar{r}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin  $y(0) = Q = x$  başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Wt}x + \int_0^t e^{W(t-s)}\bar{r}ds \\ &= e^{Wt}x + e^{Wt}W^{-1}\bar{r} - e^{Wt}W^{-1}e^{-Wt}\bar{r} \\ &= e^{Wt}x + K(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

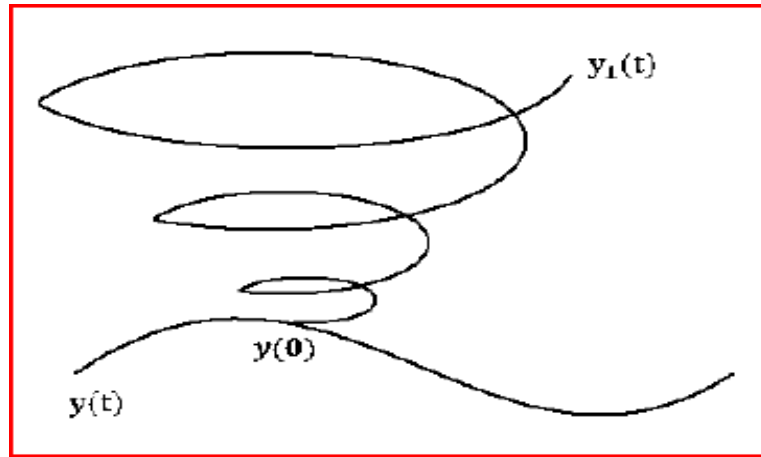
$$e^{Wt} = e^{\begin{bmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}} e^{Wt} \\ = e^{\gamma(t)} I_3 \cdot [e^{Wt}]$$

olduğundan  $y(t) = e^{Wt}x + K(t)$  ifadesinin  $y(t) = [h(t)a(t)]x + K(t)$  şeklinde bir homotetik hareket belirttiğini söyleyebiliriz. Sonuç olarak  $x$  in yörüngesi olan  $y(t)$  eğrisi bir spiral belirtir. Bu sonuçtan dolayı  $X$  vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ayrıca  $\bar{u} = c(t) - a(t)a^{-1}(t)c(t)$  ve  $\bar{r}(t) = -g(t)c(t) - a(t)a^{-1}(t)c(t) + c(t)$  olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$y(t) = e^{Wt}x + e^{Wt}W^{-1}\bar{r} - e^{Wt}W^{-1}e^{-Wt}\bar{r} \\ = e^{(gI_3+C)t}x + e^{(gI_3+C)t}(gI_3 + C)^{-1}\bar{r} - e^{(gI_3+C)t}(gI_3 + C)^{-1}e^{-gI_3t}\bar{r}$$

İfadesinde  $\gamma = 0$  alırsak  $y(t) = e^{Ct}x - e^{Ct}\bar{u}C^{-1}e^{-Ct} + e^{Ct}\bar{u}C^{-1}$  ifadesini elde ederiz ki buda bize (4.2) den dolayı elde edilen  $y(t)$  eğrisinin Lorenz uzayında bir helisel vektör alanı olduğunu gösterir. Bu durumda söyleyebiliriz ki spiral vektör alanları helisel vektör alanlarının genel bir halidir.



Şekil 4.1 Lorenz Uzayında Ani Homotetik Hareket

Spiral vektör alanları ile 1-parametrelili homotetik hareketin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımcı ile 1-parametrelili homotetik hareketleri elde ederiz. Bu durumda 1-parametrelili homotetik hareketlerin yörüngelerini aşağıdaki teoremlerle verebiliriz.

**Teorem 4.2.1**  $E_1^3$  de bir lineer vektör alanı  $Y$ , Lorenz anlamında bir anti-simetrik matris  $C \in \mathbb{R}^3_3$  ve bir kolon matrisi  $\bar{r} \in \mathbb{R}^3_1$  olsun. O halde  $Y$  in  $E_1^3$  de bir  $\{O; u_1, u_2, u_3\}$  ortonormal çatısına göre matrisi

$$Y = \begin{pmatrix} \dot{g}I_3 + C & \bar{r} \dot{u} \\ 0 & \dot{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{g} & \dot{W} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{u}$$

olmak üzere

1.  $g = 0$  ise, bu durumda hareket bir katı cisim hareketidir;

i.  $rank \begin{pmatrix} \dot{W} \\ \bar{r} \dot{u} \end{pmatrix} = 3$  ise  $Y$  nin integral eğrileri, ortak eksenli aynı parametrelili, Lorenzian helis eğrileridir,

ii.  $rank \begin{pmatrix} \dot{W} \\ \bar{r} \dot{u} \end{pmatrix} = 2$  ise  $Y$  nin integral eğrileri, paralel düzlemlerde kalan ve merkezleri bu paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan Lorenzian çemberlerdir,

iii.  $rank \begin{pmatrix} \dot{W} \\ \bar{r} \dot{u} \end{pmatrix} = 1$  ise,  $Y$  nin integral eğrileri, Lorenzian paralel doğrulardır (Zafer Ünal 2007).

2.  $g \neq 0$  ve  $rank \begin{pmatrix} \dot{W} \\ \bar{r} \dot{u} \end{pmatrix} = 3$  ise integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Burada,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$  ve  $\frac{h'(t)}{h(t)} = g(t)$  dir.

### 4.3 $E_1^n$ Lorenz Uzayında Spiral Vektör Alanları ve İntegral Eğrileri

Bu bölümde  $E_1^n$  Lorenz uzayında uzayında 1-parametrelili homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebirini inceleyerek spiral vektör alanını tanımlayacağız. Ayrıca aldığımız bir spiral vektör alanının integral eğrisini inceleyeceğiz.

**Tanım 4.3.1**  $E_1^n$ , n-boyutlu Lorenz uzayında  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $t \in J$  olmak üzere

$$f_t : E_1^n \rightarrow E_1^n$$

$$x \in E_1^n \rightarrow f_t(x) = y(t) = h(t)a(t)x + c(t) \quad (4.4)$$

ile tanımlı dönüşüme  $E_1^n$  Lorenz uzayında **1-parametrelili homotetik hareket** denir ve bu hareketin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada  $c(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$  ve  $a(t) \in SO(n,1)$  dir. Ayrıca,  $a(t) \in SO(n,1)$

olduğundan  $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$  olmak üzere  $a^T = \varepsilon a^{-1} \varepsilon$  dir.

$B(t)$  formundaki 1-parametrelili matrislerin cümlesi

$$SD(n,1) = \left\{ B(t) : B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \in SO(n,1), c(t) \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

olup matrislerde çarpma işlemine göre bir Matris Lie grubunu oluşturur ve bu gruba

karşılık gelen Lie cebirini  $sd(n,1)$  ile gösterirsek  $B(t) = \begin{bmatrix} h(t)a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SD(n,1)$

için

$$B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h(t)}a^{-1}(t) & -\frac{1}{h(t)}a^{-1}(t)c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\dot{B}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t)a(t) + h(t)\dot{a}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\dot{B}(t)B^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} + \dot{a}(t)a^{-1}(t) & -\frac{\dot{h}(t)}{h(t)}c(t) - \dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t) + \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \gamma(t)I_n + C(t) & \bar{r}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} W(t) & \bar{r}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\cong [W \quad \bar{r}]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $g(t) = \frac{h(t)}{h(t)}$ ,  $\bar{r}(t) = -g(t)c(t) - a(t)a^{-1}(t)c(t) + c(t)$  ve

$C = a(t)a^{-1}(t)$  olup Lorenz anlamında bir anti-simetrik matris dir. Bu durumda,  $sd(n, 1)$  Lie cebirini

$$sd(n, 1) = \begin{bmatrix} \dot{W} & \bar{r} \\ \dot{C} & \dot{g}I_n + C \\ \dot{e} & \dot{u} \end{bmatrix} = W \hat{I}_n, C^T = -eCe, \bar{r} \in \mathbb{R}^n, g \hat{I}_n$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca  $sd(n, 1)$  Lie cebirinin elemanları ile spiral vektör alanları birebir eşlenirler.

### Tanım 4.3.2

$$sd(n, 1) = \begin{bmatrix} \dot{W} & \bar{r} \\ \dot{C} & \dot{g}I_n + C \\ \dot{e} & \dot{u} \end{bmatrix} = W \hat{I}_n, C^T = -eCe, \bar{r} \in \mathbb{R}^n, g \hat{I}_n$$

ile tanımlı cümlesinin elemanlarının oluşturduğu lineer vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

$E_1^n$  Lorenz uzayında bir parametrelili ani homotetik hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir.

$\begin{bmatrix} \dot{W}(t) & \bar{r}(t) \\ \dot{C} & \dot{g}I_n + C \\ \dot{e} & \dot{u} \end{bmatrix}$   $sd(n, 1)$  matris kümesinde  $t = t_0$  için  $W(t_0) = W$  ve  $\bar{r}(t_0) = \bar{r}$  olarak

alırsak  $\begin{bmatrix} W & \bar{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  matrisi yardımıyla lineer vektör alanını tanımlayabiliriz. Tanım 2.3.9 a

göre  $A = \begin{bmatrix} W & \bar{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ve  $v = E_1^n$  alınırsa  $Y$  lineer vektör alanını

$$\begin{aligned} Y : E_1^n &\rightarrow E_1^n \\ Q &\rightarrow Y(Q) = AQ \\ &= \begin{bmatrix} W & \bar{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WQ + \bar{r} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi bu lineer vektör alanının integral eğrisini  $t=0$  için  $y(0) = Q = x$  başlangıç şartı altında bulalım.

$$\dot{y} = Wy + \bar{r}$$

sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin  $y(0) = Q = x$  başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Wt}x + \int_0^t e^{W(t-s)}\bar{r}ds \\ &= e^{Wt}x + e^{Wt}W^{-1}\bar{r} - e^{Wt}W^{-1}e^{-Wt}\bar{r} \\ &= e^{Wt}x + K(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} e^{Wt} &= e^{\begin{bmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}} e^{Wt} \\ &= e^{\gamma(t)} I_n \cdot \begin{bmatrix} e^{Wt} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan  $y(t) = e^{Wt}x + K(t)$  ifadesinin  $y(t) = [h(t)a(t)]x + K(t)$  şeklinde bir homotetik hareket belirttiğini söyleyebiliriz. Sonuç olarak  $x$  in yörüngesi olan  $y(t)$  eğrisi bir spiral belirtir. Bu sonuçtan dolayı  $X$  vektör alanına **spiral vektör alanı** denir.

Ayrıca  $\bar{u} = c(t) - a(t)a^{-1}(t)c(t)$  ve  $\bar{r}(t) = -g(t)c(t) - a(t)a^{-1}(t)c(t) + c(t)$  olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{Wt}x + e^{Wt}W^{-1}\bar{r} - e^{Wt}W^{-1}e^{-Wt}\bar{r} \\ &= e^{(gI_n+C)t}x + e^{(gI_n+C)t}(gI_n + C)^{-1}\bar{r} - e^{(gI_n+C)t}(gI_n + C)^{-1}e^{-(gI_n+C)t}\bar{r} \end{aligned}$$

ifadesinde  $\gamma = 0$  alırsak  $y(t) = e^{Ct}x - e^{Ct}\bar{u}C^{-1}e^{-Ct} + e^{Ct}\bar{u}C^{-1}$  ifadesini elde ederiz ki buda bize (4.2) den dolayı elde edilen  $y(t)$  eğrisinin Lorenz uzayında bir helisel vektör alanı olduğunu gösterir. Bu durumda söyleyebiliriz ki spiral vektör alanları helisel vektör alanlarının genel halleridir.

Spiral vektör alanları ile 1-parametrelili homotetik hareketin Lie cebirinin elemanları eşleşebilir. Dolayısıyla bunlar yardımı ile 1-parametrelili homotetik hareketleri elde ederiz. Bu 1-parametrelili homotetik hareketlerin yörüngelerini aşağıdaki teoremlerle verebiliriz.

**Teorem 4.3.1**  $E_1^n$  de bir lineer vektör alanı  $Y$ , Lorenz anlamında bir anti-simetrik matris  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ve bir kolon matrisi  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$  olsun. O halde  $Y$  in  $E_1^n$  de bir

$$\{O; u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

$$Y = \begin{pmatrix} gI_n + C & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere  $g^{-1} > 0$  ve  $rank \begin{pmatrix} gI_n + C \\ 0 \end{pmatrix} = n$  ise  $Y$  nin integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Burada,  $a(t) \in SO(n, 1)$ ,  $h(t) \in \mathbb{R}^+$ ,  $c(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) = \frac{\dot{h}(t)}{h(t)}$ ,  $W(t) = g(t)I_n + C(t)$ ,

$$\bar{r}(t) = \dot{c}(t) - \frac{\dot{h}(t)}{h(t)}c(t) - \dot{a}(t)a^{-1}(t)c(t) \text{ ve } C(t) = \dot{a}(t)a^{-1}(t) \text{ dir.}$$



## 5. POINT-LINE OPERATÖRÜ

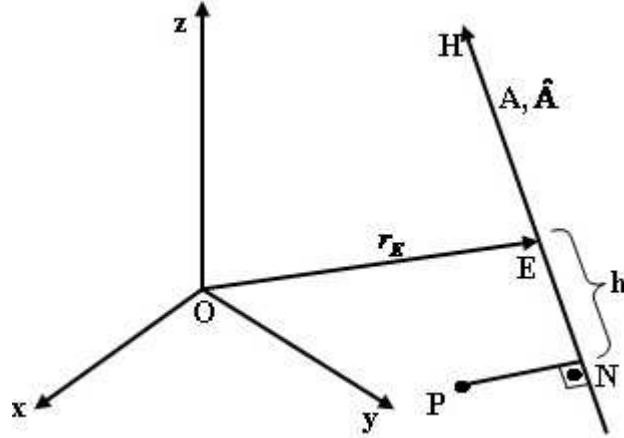
Bu bölümde point-line operatörü tanıtıldı ve daha sonra point-line yer değiştirmesi ile Öklid uzayındaki benzerlik dönüşümü arasındaki ilişki verildi. Daha önce point-line operatörü ve yer değiştirmesi dual kuaterniyonlar kullanılarak Yi Zhang, Kwun-Lon Ting tarafından **On Point-Line Geometry And Displacement** adlı makalelerinde çalışılmıştır. Boris Odehnal, Helmut Pottmann, and Johannes Wallner **Equiform Kinematics And the Geometry of Line elements** adlı makalede 3-boyutlu Öklid uzayında doğru elemanlarının plücker koordinatlarını vermişlerdir. Biz ise point-line'nin referans noktasını koordinat sistemindeki orjin olarak kabul edildiğinde, point-line ile doğru elemanlarının benzer olduğunu gösterdik. Benzerlik dönüşümü yardımı ile de herhangi bir doğru elemanını başka bir doğru elemanına dönüştürebileceğimizi gösterdik. Ayrıca bir doğru elemanını başka bir doğru elemanına kuaterniyonları kullanarak daha kolay dönüştürülebileceğini ifade ettik.

Yönlendirilmiş bir doğru, birim doğru vektörü yada Plücker koordinatları ile temsil edilebilir. Point-line yönlendirilmiş bir doğru ve bu doğru üzerindeki bir referans noktası ile bellidir.  $E$  ve  $H$  noktaları yönlendirilmiş bir doğru üzerindeki herhangi iki nokta olsun. Bu durumda  $E$  ve  $H$  noktalarından geçen yönlendirilmiş doğrumuzu

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0, \quad (\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1, \langle \vec{a}, \vec{a}_0 \rangle = 0) \quad (5.1)$$

birim doğrultu vektörü ile gösterebiliriz (Şekil 5.1). Burada,  $\vec{a}$  yönlendirilmiş doğru boyunca birim doğrultu vektörüdür ve  $\vec{a}_0$   $O-xyz$  referans çatısına göre yönlendirilmiş doğrunun moment vektörüdür. Bir birim doğru vektör 6 tane parametreye bağlıdır.

Şimdi doğru üzerinde olmayan herhangi bir nokta  $P$  olsun ve buna referans noktası diyelim. Ayrıca doğru üzerindeki herhangi bir nokta  $E$  olsun.  $N$  ise  $P$  den point-line'ye dik olan ayak noktası ve  $h$  ise yönlendirilmiş doğru üzerindeki  $N$  ayak noktasından  $E$  noktasına olan uzaklıktır. Burada  $h$  yönlendirmeye göre pozitif veya negatif olabilir.



Şekil 5.1 Point-line

Bir point-line  $\exp(\varepsilon h) = (1 + \varepsilon h)$  dual uzunluk ile (5.1) deki birim dual vektörün çarpılmasıyla elde edilen bir dual vektördür. Yani,

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= \exp(\varepsilon h) \bar{A} \\
 &= (1 + \varepsilon h)(\bar{a} + \varepsilon \bar{a}_0) \\
 &= (1 + \varepsilon h)\bar{a} + (1 + \varepsilon h)\varepsilon \bar{a}_0, \quad \varepsilon^2 = 0 \\
 &= \bar{a} + \varepsilon h \bar{a} + \varepsilon \bar{a}_0 \\
 &= \bar{a} + (h\bar{a} + \bar{a}_0)\varepsilon
 \end{aligned}$$

ve  $\bar{a}'_0 = h\bar{a} + \bar{a}_0$  olmak üzere

$$\hat{A} = \bar{a} + \bar{a}'_0 \varepsilon \quad (5.2)$$

dır. Eğer, vidadanın adını,  $E$  noktasının yeri olarak kabul edersek vida ile point-line benzerdir. Benzerliğin avantajı olarak vida ile ilgili koordinat dönüşümündeki formüller point-line'ye uygulanabilir. Bir point-line koordinatları verildiğinde  $E$  noktasını ve yönlendirilmiş doğruyu hesaplamak kolaydır.

$\bar{a}'_0 = h\bar{a} + \bar{a}_0$  ifadesinde eşitliğin her iki yanını  $\bar{a}$  ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{a}, \bar{a}'_0 \rangle &= \langle \bar{a}, \bar{a}_0 + h\bar{a} \rangle \\
 &= \underbrace{\langle \bar{a}, \bar{a}_0 \rangle}_0 + h \underbrace{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}_1 \\
 \Rightarrow h &= \langle \bar{a}, \bar{a}'_0 \rangle \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

olup (5.1) ifadesini

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon(\vec{a}'_0 - h\vec{a}) \quad (5.4)$$

olarak yazılabiliriz. Genelliği bozmadan referans noktamız orjindeki koordinat sistemi olsun. Böylece  $r_E$  referans noktasının yer vektörü (Şekil 5.2)

$$\vec{r}_E = \overline{ON} + \overline{NE} \quad (5.5)$$

dır. Burada  $\overline{ON}$ ,  $O$  noktasının point-line üzerindeki dikme ayağı olduğundan  $\langle \overline{ON}, \vec{a} \rangle = 0$  olup vektörel moment tanımından dolayı

$$\overline{ON} \wedge \vec{a} = \vec{a}'_0 \quad (5.6)$$

yazılabilir. (5.6) nın her iki yanını  $\vec{a}$  ile vektörel çarparsak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{a}'_0 &= \vec{a} \wedge (\overline{ON} \wedge \vec{a}) \\ &= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_1 \overline{ON} - \underbrace{\langle \vec{a}, \overline{ON} \rangle}_0 \vec{a} \\ \Rightarrow \overline{ON} &= \vec{a} \wedge \vec{a}'_0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

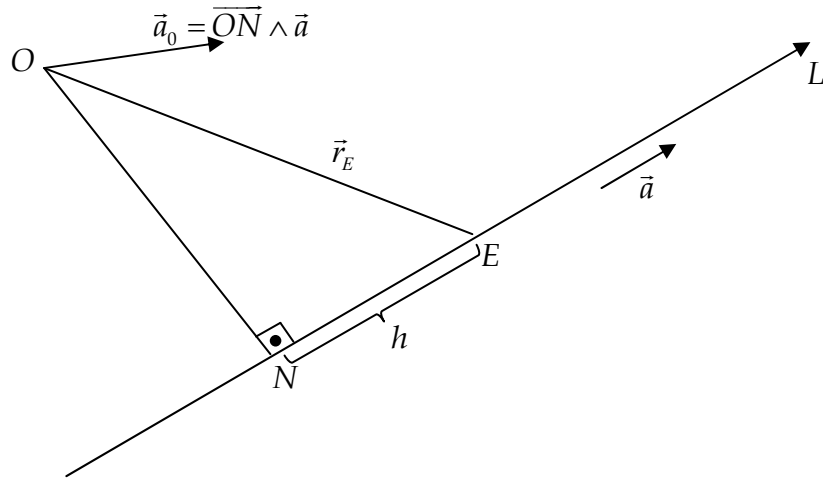
dir. Ayrıca

$$\overline{NE} = h\vec{a} \quad (5.8)$$

dir. O halde (5.7) ve (5.8) den

$$\vec{r}_E = \vec{a} \wedge \vec{a}'_0 + h\vec{a} \quad (5.9)$$

olarak bulunur.



Şekil 5.2 Referans noktası orjin olan point-line

## 5.1 Doğru Elemanlarının Plücker Koordinatları

3-boyutlu Öklid uzayında  $x$  noktasından geçen yönlendirilmiş bir doğru  $L$  olsun. Eğer,  $\vec{a} \neq 0$ ,  $L$  doğrusuna paralel birim vektör,  $\vec{a}_0 = \vec{x} \wedge \vec{a}$  ve  $h = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$  ise  $(\vec{a}, \vec{a}_0, h) \in \mathbb{R}^7$  üçlüsüne doğru elemanlarının Plücker koordinatları denir ve bu koordinatlar homojen koordinatlardır. Burada  $\vec{a}_0$ ,  $\vec{a}$  nın vektörel momentidir ve  $h$  yi  $x$  in  $L$  üzerindeki yerel noktasını belirlemek için ekliyoruz.

Ayrıca orjinden  $L$  doğrusuna çizilen dikmenin ayağı

$$\begin{aligned} N(\vec{a}, \vec{a}_0) &= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a} \wedge \vec{a}_0, \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \\ &= \vec{a} \wedge \vec{a}_0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \vec{r}_x = \vec{x} &= N(\vec{a}, \vec{a}_0) + \frac{h}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a}, \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \\ &= N(\vec{a}, \vec{a}_0) + h\vec{a} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ve (5.10) den

$$\vec{r}_x = \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h\vec{a} \quad (5.12)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi benzerlik dönüşümü ile doğru elemanları arasındaki ilişkiyi verelim.  $\vec{x}' = hg\vec{x} + \vec{v}$  denklemi ile tanımlı benzerlik dönüşümü  $(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  doğru elemanını

$$\begin{aligned} \vec{u} &= g\vec{a} \\ \vec{u}_0 &= \vec{x}' \wedge \vec{u} \\ h_2 &= \langle \vec{x}', \vec{u} \rangle \end{aligned}$$

denklemleri yardımı ile başka bir  $(\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$  doğru elemanına dönüştürür ve bu dönüşümün matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u}_0 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ g^\times g & hg & 0 \\ v^T g & 0^T & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{a}_0 \\ h_1 \end{bmatrix}, \quad g^\times x = \vec{v} \wedge \vec{x} \quad (5.13)$$

dir. Özel durumda  $h_1 = h_2 = 0$  ve  $h = 1$  olduğunda  $\vec{x}' = hg\vec{x} + \vec{v}$  ile tanımlı benzerlik dönüşümü

$$\vec{x}' = g\vec{x} + \vec{v}$$

ve (5.13) deki matris

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 \\ g^\times g & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{a}_0 \end{bmatrix}, \quad g^\times x = \vec{v} \wedge \vec{x} \quad (5.14)$$

olur ve (5.14) ifadesi *McCarthy nin An Introduction to Theoretical Kinematics* adlı kitabındaki sonuç ile çakışır.

Benzer şekilde kuaterniyonları kullanarak,  $(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  doğru elemanını başka bir  $(\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$  doğru elemanına aşağıdaki teoremle dönüştürebiliriz.

**Teorem 5.1.1**  $\square^7$  de

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} (\langle \vec{A}, \vec{U} \rangle + \vec{A} \wedge \vec{U}) \quad (5.15)$$

dönüşümü;

1. Bir doğru elemanını başka bir doğru elemanına dönüştürür,
2. Bir point-line operatörü belirtir.

**İspat:**

$\square^7$  de iki doğru elemanı  $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  ve  $\vec{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$  olsun.

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} (\langle \vec{A}, \vec{U} \rangle + \vec{A} \wedge \vec{U})$$

olup her iki tarafı  $\vec{A}$  ile vektörel çarparsak

$$\begin{aligned} \hat{Q} \times \vec{A} &= \left[ \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} (\langle \vec{A}, \vec{U} \rangle + \vec{A} \wedge \vec{U}) \right] \wedge \vec{A} \\ &= \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} (\langle \vec{A}, \vec{U} \rangle \vec{A} + [\vec{A} \wedge \vec{U}] \wedge \vec{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q} \times \vec{A} &= \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} \left( \langle \vec{A}, \vec{U} \rangle \vec{A} - \langle \vec{A}, \vec{U} \rangle \vec{A} + \underbrace{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle}_{\|\vec{A}\|^2} \vec{U} \right) \\
&= \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} \|\vec{A}\|^2 \vec{U} \\
&= \vec{U}
\end{aligned}$$

dir. Burada “ $\times$ ” kuaterniyon çarpımıdır.

Ayrıca  $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  ve  $\vec{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ ,  $\square^7$  de iki doğru elemanın belirttiği point-line’ler, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \underbrace{\exp(\varepsilon h_1)}_{\|\vec{A}\|} \underbrace{(\vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0)}_{\vec{A}_0} = \|\vec{A}\| \vec{A}_0 \\
\hat{U} &= \underbrace{\exp(\varepsilon h_2)}_{\|\vec{U}\|} \underbrace{(\vec{u} + \varepsilon \vec{u}_0)}_{\vec{U}_0} = \|\vec{U}\| \vec{U}_0
\end{aligned}$$

olup (5.15) ile tanımlı dönüşümü için

$$\begin{aligned}
\hat{Q} &= \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} (\langle \vec{A}, \vec{U} \rangle + \vec{A} \wedge \vec{U}) \\
&= \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} [\|\vec{A}\| \|\vec{U}\| \langle \vec{A}_0, \vec{U}_0 \rangle + \|\vec{A}\| \|\vec{U}\| (\vec{A}_0 \wedge \vec{U}_0)] \\
&= \frac{\|\vec{U}\|}{\|\vec{A}\|} [\langle \vec{A}_0, \vec{U}_0 \rangle + (\vec{A}_0 \wedge \vec{U}_0)] \\
&= \underbrace{\frac{\|\vec{U}\|}{\|\vec{A}\|}}_{\exp[\varepsilon(h_2 - h_1)]} \left[ \underbrace{\langle \vec{A}_0, \vec{U}_0 \rangle + (\vec{A}_0 \wedge \vec{U}_0)}_{Q_0} \right] \\
&= \exp[\varepsilon(h_2 - h_1)] Q_0
\end{aligned}$$

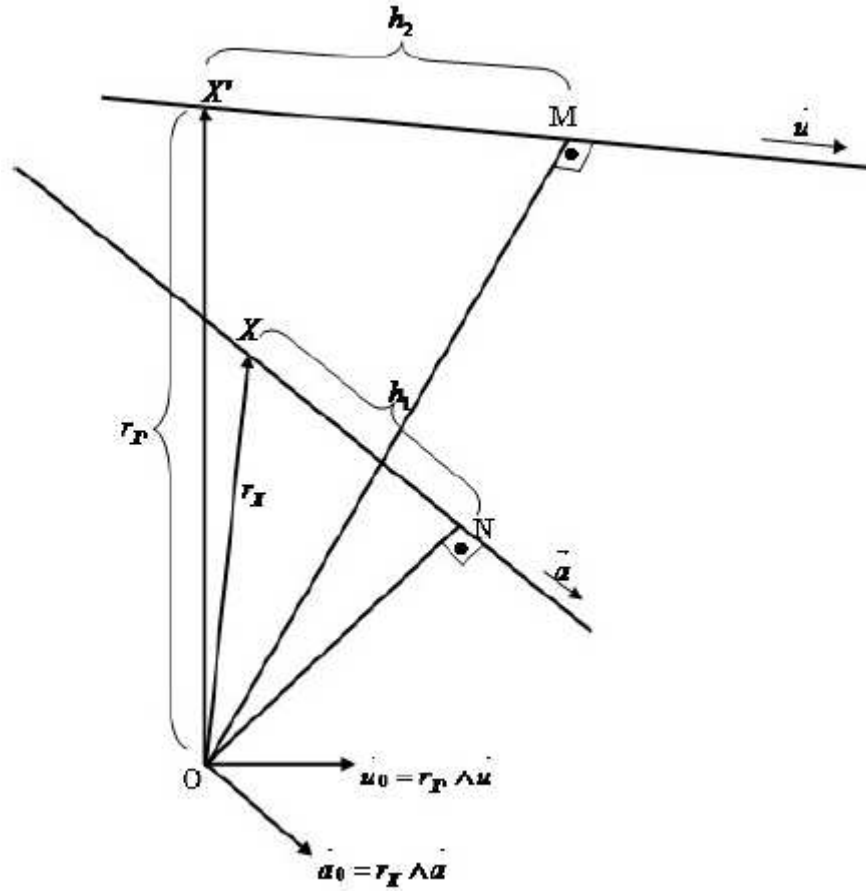
dir. Buradan (5.15) ile tanımlı dönüşümün de bir point-line olduğunu söyleyebiliriz  $\square$

**Teorem 5.1.2** Eğer bir point-line için referans noktası koordinat sisteminin orjin noktası ise  $\vec{r}'_x = \vec{x}' = hg\vec{x} + \vec{v}$  benzerlik dönüşümü yardımıyla bir point-line başka bir point-line’ye dönüştürülebilir.

**İspat:**

$\hat{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  ve  $\hat{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ , sırasıyla,  $L_1$  ile  $L_2$  yönlendirilmiş doğruları üzerinde iki point-line olsun.  $\vec{a}_0$  ve  $\vec{u}_0$  orjin çatısına göre, sırasıyla,  $\hat{A}$  ve  $\hat{U}$  nun vektörel momentleridir.  $h_1$ ,  $N$  den  $X$  noktasına olan uzaklık ve  $h_2$ ,  $M$  den  $X'$  noktasına olan uzaklık olarak kabul edelim.

$\vec{r}_X$  ve  $\vec{r}_{X'}$ , sırasıyla,  $X$  ve  $X'$  nün pozisyon vektörleridir (Şekil 5.3)



Şekil 5.3 Point-line yer değiştirmesi

Biliyoruz ki, (5.9) dan  $r_X$  pozisyon vektörü

$$\vec{r}_X = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a}$$

denklemine belirlidir. Aynı zamanda  $\vec{r}_{X'}$  pozisyon vektörü (3.7) den

$$\vec{r}_X = hg\vec{r}_X + \vec{v}$$

dir. Burada  $g \in SO(3)$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$  ve  $v \in \mathbb{R}^3$  dir. Aşağıdaki denklemleri kullanarak

$$\vec{u} = g\vec{a}$$

$$\vec{u}_0 = \vec{r}_X \wedge \vec{u}$$

$$h_2 = \langle \vec{r}_X, \vec{u} \rangle$$

ya da (5.13) deki blok matrisi kullanarak

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 &= g^{\times} \underbrace{g\vec{a}}_{\vec{u}} + hg\vec{a}_0 \\ &= \vec{v} \wedge \vec{u} + hg\vec{a}_0 \\ \Rightarrow g\vec{a}_0 &= \frac{1}{h}(\vec{u}_0 - \vec{v} \wedge \vec{u}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

ve

$$\begin{aligned} h_2 &= \vec{v}^T \underbrace{g\vec{a}}_{\vec{u}} + hh_1 \\ &= \vec{v}^T \vec{u} + hh_1 \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + hh_1 \\ \Rightarrow hh_1 &= h_2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned} \quad (5.17)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \vec{r}_X &= hg\vec{r}_X + \vec{v} \\ &= hg(\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1\vec{a}) + \vec{v} \\ &= hg(\vec{a} \wedge \vec{a}_0) + hgh_1\vec{a} + \vec{v} \\ &= h(g\vec{a} \wedge g\vec{a}_0) + hh_1g\vec{a} + \vec{v} \end{aligned}$$

olup (5.13), (5.16) ve (5.17) den

$$\begin{aligned} \vec{r}_X &= h \left( \underbrace{g\vec{a} \wedge g\vec{a}_0}_{\vec{u}} \right) + hh_1 \underbrace{g\vec{a}}_{\vec{u}} + \vec{v} \\ &= h \left( \vec{u} \wedge \left[ \frac{1}{h}(\vec{u}_0 - \vec{v} \wedge \vec{u}) \right] \right) + [h_2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle] \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\vec{r}_{x'} &= (\vec{u} \wedge [(\vec{u}_0 - \vec{v} \wedge \vec{u})]) + h_2 \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \vec{v} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) + h_2 \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \vec{v} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}_1 \vec{v} + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + h_2 \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \vec{v} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2 \vec{u}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç  $\hat{U}$  point-line' ı için pozisyon vektörüdür  $\square$

**Örnek 5.1.1** Şekil 5.3'de gösterilen  $\hat{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  point-line vektörü için yön vektörü

$\vec{a} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ve pozisyon vektörü  $\vec{r}_x = (0, 1, 0)$  olsun.  $x' = hg\vec{x} + \vec{v}$  ile verilen

benzerlik dönüşümü ve (5.1.4) de verilen blok matrisi yardımıyla  $\hat{A}$  point-line'sini  $\hat{U}$  point-line'sine dönüştürelim. Burada,  $h = -\sqrt{3}$ ,  $\vec{v} = (1, 0, 0)$  ve  $g \in SO(3)$ ,  $x$ -ekseni etrafında  $30^\circ$  lik dönmeye karşılık gelen matris olsun.

O halde,

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0 \\
&= \vec{a} + \varepsilon (\vec{r}_x \wedge \vec{a}) \\
&= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \varepsilon \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Dikme ayağından referans noktasına olan uzaklık  $h_1 = \langle \vec{r}_x, \vec{a} \rangle = \frac{1}{2}$  dir.

Buna göre şekil 5.3'deki  $\hat{U}$  point-line vektörün  $\vec{u}$  birim doğrultman vektörü,  $\vec{u}_0$  moment vektörü ve  $\vec{r}_{x'}$  yer vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\vec{u} = g\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{x'} = hg\vec{r}_x + \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\vec{u}_0 = \vec{r}_{x'} \wedge \vec{u} = \left( -\frac{3}{2}, -1, 0 \right)$$

$$\hat{U} = (0, 0, 1) + \varepsilon \left( -\frac{3}{2}, -1, 0 \right)$$

$$h_2 = \langle \vec{r}_{x'}, \vec{u} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ve biliyoruz ki point-line vektörünün yer vektörü aşağıdaki eşitliği sağlar,

$$\vec{r}_{x'} = \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2 \vec{u} = \left( 1, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Böylece bu sonuç (5.18) ile çakışır.

Sonuç olarak söyleyebiliriz ki benzerlik dönüşümü yardımıyla doğru elemanını başka bir doğru elemanına dönüştürebiliriz. Biz ise bu bölümde bir point-line'sini başka bir point-line'sine benzerlik dönüşümünü kullanarak nasıl dönüştürebileceğini gösterdik. Aynı zamanda doğru elemanını başka bir doğru elemanına dönüştürme işinde (5.13) deki blok matrisi kullanmak zor olacağından bu işi kuaterniyonları kullanarak daha kolay nasıl yapılabileceğini gösterdik.

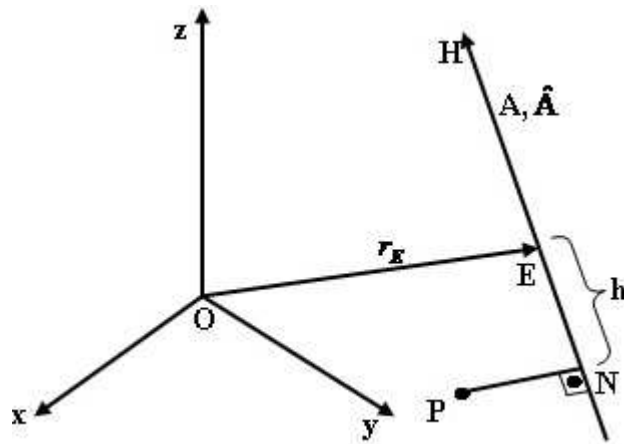
## 6. LORENZ UZAYINDA POINT-LINE OPERATÖRÜ

Bu bölümde Lorenz uzayında point-line operatörü tanıtıldı ve daha sonra point-line yer değiştirmesi ile Lorenz uzayındaki benzerlik dönüşümü arasındaki ilişki verildi. Daha önce Lorenz uzayında point-line operatörü ve yer değiştirmesi dual kuaterniyonlar kullanılarak Ö. Aydoğmuş, L. Kula ve Y. Yaylı tarafından **On Point-Line Displacement in Minkowski 3-space** adlı makalelerinde çalışılmıştır. Biz ise Lorenz uzayında ilk önce benzerlik dönüşümünü ve Plücker koordinatları Lorenz uzayında tanıttık. Daha sonra point-line'in referans noktasını koordinat sistemindeki orjin olarak kabul edildiğinde, point-line ile doğru elemanlarının benzer olduğunu gösterdik. Lorenz uzayında benzerlik dönüşümü yardımı ile de herhangi bir doğru elemanını başka bir doğru elemanına dönüştürebileceğimizi gösterdik. Ayrıca bir doğru elemanını başka bir doğru elemanına split-dual kuaterniyonları kullanarak daha kolay dönüştürülebileceğini ifade ettik.

Yönlendirilmiş bir doğru birim dual split vektörü yada Plücker koordinatlarla gösterilebilir. Bir point-line ise yönlendirilmiş bir ve bir referans noktası ile bellidir. Yönlendirilmiş bir doğru,  $E$  ve  $H$  noktasından geçsin ve birim dual-split vektörünü

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0, \quad (\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \mp 1, \langle \vec{a}, \vec{a}_0 \rangle = 0) \quad (6.1)$$

birim doğrultman vektörü ile gösterebiliriz (Şekil 6.1).



Şekil 6.1 Lorenz uzayında Point-line

Burada,  $\vec{a}$  yönlendirilmiş doğru boyunca birim doğrultman vektördür ve  $\vec{a}_0$  sırasıyla

$O - xyz$  referans çatısına göre yönlendirilmiş doğrunun moment vektörüdür.

Kabul edelim ki,  $H$  yönlendirilmiş bir doğru ve üzerinde alınan herhangi bir nokta  $E$  olsun. Ayrıca doğru üzerinde olmayan bir  $P$  noktası alalım. Bu noktaya referans noktası diyeceğiz.  $P$  den yönlendirilmiş doğruya inilen dikmenin ayağı  $N$  ve  $N$  dikmenin ayak noktasından  $E$  noktasına yönlendirilmiş doğru üzerindeki uzaklık  $h$  dir. Ayrıca  $h$  yönlendirilmiş doğru üzerinde  $N$  nin ve  $E$  nin konumuna göre pozitif veya negatif olabilir (Aydoğmuş, 2008).  $P$  noktası uzaydaki her hangi bir nokta olabilir. Bunlardan biri de orjin referans noktası olabilir.

Bir point-line  $\exp(\varepsilon h)$  dual sayısı ile (6.1) deki birim dual vektörün çarpılmasıyla elde edilen bir dual vektördür. Yani,

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \exp(\varepsilon h) \vec{A} \\ &= (1 + \varepsilon h)(\vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0) \\ &= (1 + \varepsilon h)\vec{a} + (1 + \varepsilon h)\varepsilon \vec{a}_0, \quad \varepsilon^2 = 0 \\ &= \vec{a} + \varepsilon h \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0 \\ &= \vec{a} + (h\vec{a} + \vec{a}_0)\varepsilon\end{aligned}$$

ve  $\vec{a}_0' = h\vec{a} + \vec{a}_0$  olmak üzere

$$\hat{A} = \vec{a} + \vec{a}_0' \varepsilon \quad (6.2)$$

dir. Burada,  $\hat{A}$  nin  $\exp(\varepsilon h) = 1 + \varepsilon h$  dual uzunluklu dual split vektör olduğunu söyleyebiliriz. (6.2) eşitliğinden

$$\hat{A} = (a_1, a_2, a_3, a_{01}', a_{02}', a_{03}') \quad (6.3)$$

yazılabilir. Burada,  $a_{01}' = a_{01} + ha_1$ ,  $a_{02}' = a_{02} + ha_2$  ve  $a_{03}' = a_{03} + ha_3$  dir.

Eğer, vidanın adımını,  $E$  noktasının yeri olarak kabul edersek vida ile point-line benzerdir. Benzerliğin avantajı olarak vida ile ilgili koordinat dönüşümündeki formüller point-line' a uygulanabilir. Bir point-line koordinatları verildiğinde  $E$  noktası ve yönlendirilmiş doğruyu hesaplamak kolaydır.

1)  $\vec{A}$  birim dual-split vektörü spacelike ise  $\vec{a}_0' = h\vec{a} + \vec{a}_0$  ifadesinde eşitliğin her iki yanını  $\vec{a}$  ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a}, \vec{a}'_0 \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a}_0 + h\vec{a} \rangle \\
&= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a}_0 \rangle}_0 + h \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_1 \\
\Rightarrow h &= \langle \vec{a}, \vec{a}'_0 \rangle
\end{aligned} \tag{6.4}$$

olup (6.1) ifadesini

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \vec{a} + \vec{a}_0 \varepsilon \\
&= \vec{a} + \varepsilon (\vec{a}'_0 - h\vec{a})
\end{aligned} \tag{6.5}$$

olarak yazılabiliriz.

2)  $\vec{A}$  birim dual-split vektörü time-like ise  $\vec{a}'_0 = h\vec{a} + \vec{a}_0$  ifadesinde eşitliğin her iki yanını  $\vec{a}$  ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a}, \vec{a}'_0 \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a}_0 + h\vec{a} \rangle \\
&= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a}_0 \rangle}_0 + h \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{-1} \\
\Rightarrow h &= -\langle \vec{a}, \vec{a}'_0 \rangle
\end{aligned} \tag{6.6}$$

olup (6.1) ifadesini

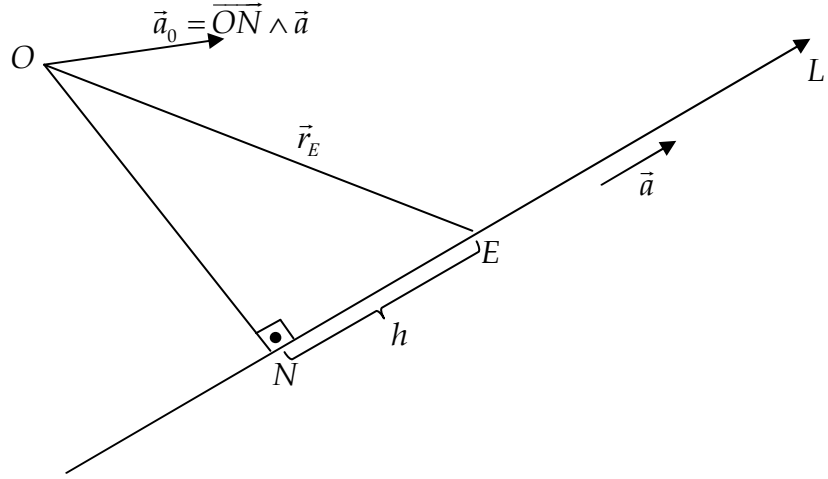
$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \vec{a} + \vec{a}_0 \varepsilon \\
&= \vec{a} + \varepsilon (\vec{a}'_0 - h\vec{a})
\end{aligned} \tag{6.7}$$

olarak yazılabiliriz.

Point-line koordinatlarını vererek referans noktasının yerini, yönlendirilmiş doğruyu ve yer vektörü (pozisyon vektörü)nü hesaplamak kolaydır. Genelliği bozmadan referans noktamız orjindeki koordinat sistemi olsun. Böylece  $r_E$  referans noktasının yer vektörü (Şekil 6.2)

$$\vec{r}_E = \overline{ON} + \overline{NE} \tag{6.8}$$

dır.



Şekil 6.2 Lorenz uzayında referans noktası orjin olan point-line

Burada  $\overline{ON}$ ,  $O$  noktasının point-line üzerindeki dikme ayağı olduğundan  $\langle \overline{ON}, \vec{a} \rangle = 0$  olup vektörel moment tanımından

$$\overline{ON} \wedge \vec{a} = \vec{a}_0 \quad (6.9)$$

yazılabilir.

1)  $\vec{A}$  birim dual-split vektörü spacelike ise (6.9) un her iki yanını  $\vec{a}$  ile vektörel çarparsak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{a}_0 &= \vec{a} \wedge (\overline{ON} \wedge \vec{a}) \\ &= -\underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_1 \overline{ON} + \underbrace{\langle \vec{a}, \overline{ON} \rangle}_0 \vec{a} \\ \Rightarrow \overline{ON} &= -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

dir. Ayrıca

$$\overline{NE} = h\vec{a} \quad (6.11)$$

dir. O halde (6.10) ve (6.11) den

$$\vec{r}_E = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h\vec{a} \quad (6.12)$$

olarak bulunur.

2)  $\bar{A}$  birim dual-split vektörü time-like ise (6.9) un her iki yanını  $\bar{a}$  ile vektörel çarparsak,

$$\begin{aligned}\bar{a} \wedge \bar{a}_0 &= \bar{a} \wedge (\overline{ON} \wedge \bar{a}) \\ &= -\underbrace{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}_{-1} \overline{ON} + \underbrace{\langle \bar{a}, \overline{ON} \rangle}_0 \bar{a} \\ \Rightarrow \overline{ON} &= \bar{a} \wedge \bar{a}_0\end{aligned}\quad (6.13)$$

dir. Ayrıca

$$\overline{NE} = h\bar{a} \quad (6.14)$$

dir. O halde (6.13) ve (6.14) den

$$\vec{r}_E = \bar{a} \wedge \bar{a}_0 + h\bar{a} \quad (6.15)$$

olarak bulunur.

### 6.1 3-boyutlu Lorenz Uzayında Benzerlik Dönüşümü

**Tanım 6.1.1** 3-boyutlu Lorenz uzayı  $\square_1^3$  de  $R \in SO_1(3)$ ,  $b \in \square_1^3$  ve  $\alpha$  bir homotetik skalar olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi: \square_1^3 &\longrightarrow \square_1^3 \\ x &\longrightarrow \varphi(x) = y(t) = \alpha(t)R(t)x + b(t)\end{aligned}\quad (6.16)$$

ile tanımlı dönüşüme  $\square_1^3$  Lorenz uzayında **benzerlik dönüşümü** denir.

Burada,  $R, \alpha$  ve  $b, t$  ye göre  $C^\infty$  sınıftan diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$y(t) = \alpha(t)R(t)x + b(t)$$

dönüşümünde  $t$  ye göre türev alınarak  $v(y) = \dot{y}(t)$  hız vektörü

$$v(y) = \dot{y}(t) = \dot{R}R^T y - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} y - RR^T b - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} b + \dot{b} \quad (6.17)$$

olarak elde ederiz. Burada  $R$  ortogonal matris olduğundan  $\dot{R}R^T := C^\times$  Lorenz anlamında bir antisimetrik matristir ve  $C^\times x$  çarpımı,  $\bar{c}$  vektörünü kullanarak  $C^\times x = \bar{c} \wedge \bar{x}$  şeklinde yazabilir. Bu durumda, (6.17) ifadesini

$$v(y) = \dot{y}(t) = c \wedge y + \gamma y + \bar{c} \quad (6.18)$$

dir. Burada  $\gamma = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$  ve  $\bar{c} = -RR^T b - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} b + \dot{b}$  dir.

Her hangi  $(c, \bar{c}, \gamma) \in \mathbb{R}^7_1$  üçlüsü bir tek 3-boyutlu Lorenz uzayında bir tek benzerlik hareketi tanımlar.

## 6.2 3-boyutlu Lorenz Uzayında Doğru Elemanlarının Plücker Koordinatları

3-boyutlu Lorenz uzayında  $x$  noktasından geçen yönlendirilmiş bir doğru  $L$  olsun. Eğer,  $\vec{a} \neq 0$ ,  $L$  doğrusuna paralel birim vektör,  $\vec{a}_0 = \vec{x} \wedge \vec{a}$  ve  $h_1 = \mp \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$  ise  $(\vec{a}, \vec{a}_0, h_1) \in \mathbb{R}^7_1$  üçlüsüne doğru elemanlarının Plücker koordinatları denir ve bu koordinatlar homojen koordinatlardır. Burada  $\vec{a}_0$ ,  $\vec{a}$  nın vektörel momentidir ve  $h_1$ ,  $x$  in  $L$  üzerindeki yerel noktasını belirlemek için ekliyoruz. Buradan orjinden  $L$  doğrusuna çizilen dikmenin ayağı

1)  $\vec{a}$  birim spacelike vektör ise

$$N(\vec{a}, \vec{a}_0) = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 \quad (6.19)$$

dir. Ayrıca

$$\vec{r}_x = \vec{x} = N(\vec{a}, \vec{a}_0) + h_1 \vec{a} \quad (6.20)$$

ve (6.20) den

$$\vec{r}_x = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a} \quad (6.21)$$

olarak yazılabilir.

2)  $\vec{a}$  birim timelike vektör ise

$$N(\vec{a}, \vec{a}_0) = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 \quad (6.22)$$

dir. Ayrıca

$$\vec{r}_x = \vec{x} = N(\vec{a}, \vec{a}_0) + h_1 \vec{a} \quad (6.23)$$

ve (6.22) den

$$\vec{r}_x = \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a} \quad (6.24)$$



olarak yazılabilir.

Şimdi benzerlik dönüşümleri ile doğru elemanları arasındaki ilişkiyi verelim. Eğer, doğru yönlendirilirse doğru elemanı da yönlendirilmiş olur. (6.16) deki  $x' = \alpha R \bar{x} + \bar{b}$  denklemi ile tanımlı benzerlik dönüşümü  $(\bar{a}, \bar{a}_0, h_1)$  doğru elemanını

$$\bar{x}' = \alpha R \bar{x} + \bar{b}$$

$$\bar{u} = R \bar{a}$$

$$\bar{u}_0 = \bar{x}' \wedge \bar{u}$$

$$h_2 = \langle \bar{x}', \bar{u} \rangle$$

denklemleri yardımı ile başka bir  $(\bar{u}, \bar{u}_0, h_2)$  doğru elemanına dönüştürür ve bu dönüşümün blok matris gösterimi

1)  $\bar{a}$  birim spacelike vektör ise

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_0 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ R^\times R & \alpha R & 0 \\ b^T R & 0^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{a}_0 \\ h_1 \end{bmatrix}, \quad R^\times x = \bar{b} \wedge \bar{x} \quad (6.25)$$

dir. Burada  $R \in SO_1(3)$  dır.

2)  $\bar{a}$  birim time-like vektör ise

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_0 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ R^\times R & \alpha R & 0 \\ -b^T R & 0^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{a}_0 \\ h_1 \end{bmatrix}, \quad R^\times x = \bar{b} \wedge \bar{x} \quad (6.26)$$

dir. Burada  $R \in SO_1(3)$  dır.

(6.25) ve (6.26) eşitlikleri açıkça yönlendirilmiş doğru elemanına uygulanabilir. Benzer şekilde kuaterniyonları kullanarak,  $(\bar{a}, \bar{a}_0, h_1)$  doğru elemanını başka bir  $(\bar{u}, \bar{u}_0, h_2)$  doğru elemanına aşağıdaki teoremle dönüştürebiliriz.

**Teorem 6.2.1**  $\square_1^7$  de

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle + \hat{A} \wedge \hat{U}) \quad (6.27)$$

dönüşümü  $\hat{A} = (\bar{a}, \bar{a}_0, h_1)$  doğru elemanını,  $\hat{U} = (\bar{u}, \bar{u}_0, h_2)$  doğru elemanına dönüştürür.

**İspat:**

$\bar{A} = (\bar{a}, \bar{a}_0, h_1)$  ve  $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{u}_0, h_2)$  dual-split vektörler olsun.

1)  $\bar{A} = (\bar{a}, \bar{a}_0, h_1)$  birim dual-split vektör spacelike ise

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle + \hat{A} \wedge \hat{U})$$

olup her iki tarafı  $\hat{A}$  ile soldan vektörel çarparsak

$$\begin{aligned} \hat{A} \times \hat{Q} &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} [\hat{A} \wedge (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle + \hat{A} \wedge \hat{U})] \\ &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle \hat{A} + \hat{A} \wedge [\hat{A} \wedge \hat{U}]) \\ &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} \left( \langle \hat{A}, \hat{U} \rangle \hat{A} - \langle \hat{A}, \hat{U} \rangle \hat{A} + \underbrace{\langle \hat{A}, \hat{A} \rangle}_{\|\hat{A}\|^2} \hat{U} \right) \\ &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} \langle \hat{A}, \hat{A} \rangle \hat{U} \\ &= \hat{U} \end{aligned}$$

dir. Burada “ $\times$ ” kuaterniyon çarpımıdır.

Ayrıca  $\bar{A} = (\bar{a}, \bar{a}_0, h_1)$  ve  $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{u}_0, h_2)$ ,  $\square_1^7$  de iki doğru elemanın belirtiği point-line’ler, sırasıyla,

$$\hat{A} = \underbrace{\exp(\varepsilon h_1)}_{\|\hat{A}\|} \underbrace{(\bar{a} + \varepsilon \bar{a}_0)}_{\bar{A}_0} = \|\hat{A}\| \bar{A}_0$$

$$\hat{U} = \underbrace{\exp(\varepsilon h_2)}_{\|\hat{U}\|} \underbrace{(\bar{u} + \varepsilon \bar{u}_0)}_{\bar{u}_0} = \|\hat{U}\| \bar{U}_0$$

olup (6.27) ile tanımlı dönüşümü

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle + \hat{A} \wedge \hat{U}) \\ &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} [\|\hat{A}\| \|\hat{U}\| \langle \bar{A}_0, \bar{U}_0 \rangle + \|\hat{A}\| \|\hat{U}\| (\bar{A}_0 \wedge \bar{U}_0)] \\ &= \frac{\|\hat{U}\|}{\|\hat{A}\|} [\langle \bar{A}_0, \bar{U}_0 \rangle + (\bar{A}_0 \wedge \bar{U}_0)] \\ &= \underbrace{\frac{\|\hat{U}\|}{\|\hat{A}\|}}_{\exp[\varepsilon(h_2 - h_1)]} \left[ \underbrace{\langle \bar{A}_0, \bar{U}_0 \rangle + (\bar{A}_0 \wedge \bar{U}_0)}_{Q_0} \right] \\ &= \exp[\varepsilon(h_2 - h_1)] Q_0 \end{aligned}$$

dir. Buradan (6.27) ile tanımlı dönüşümünün de bir point-line olduğunu söyleyebiliriz.

2)  $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  birim dual-split vektör timelike ise

$$\hat{Q} = \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle + \hat{A} \wedge \hat{U})$$

olup her iki tarafı  $\hat{A}$  ile vektörel çarparsak

$$\begin{aligned} \hat{A} \times \hat{Q} &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} [\hat{A} \wedge (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle + \hat{A} \wedge \hat{U})] \\ &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle \hat{A} + \hat{A} \wedge [\hat{A} \wedge \hat{U}]) \\ &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} \left( \langle \hat{A}, \hat{U} \rangle \hat{A} - \langle \hat{A}, \hat{U} \rangle \hat{A} + \underbrace{\langle \hat{A}, \hat{A} \rangle}_{\|\hat{A}\|^2} \hat{U} \right) \\ &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} \langle \hat{A}, \hat{A} \rangle \hat{U} \\ &= -\hat{U} \end{aligned}$$

dir. Burada "×" kuaterniyon çarpımıdır

Ayrıca  $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  ve  $\vec{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ ,  $\square_1^7$  de iki doğru elemanın belirttiği point-line'ler, sırasıyla,

$$\hat{A} = \underbrace{\exp(\varepsilon h_1)}_{\|\hat{A}\|} \underbrace{(\vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0)}_{\vec{A}_0} = \|\hat{A}\| \vec{A}_0$$

$$\hat{U} = \underbrace{\exp(\varepsilon h_2)}_{\|\hat{U}\|} \underbrace{(\vec{u} + \varepsilon \vec{u}_0)}_{\vec{U}_0} = \|\hat{U}\| \vec{U}_0$$

olup (6.27) ile tanımlı dönüşümü

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} (\langle \hat{A}, \hat{U} \rangle + \hat{A} \wedge \hat{U}) \\ &= \frac{1}{\|\hat{A}\|^2} [\|\hat{A}\| \|\hat{U}\| \langle \vec{A}_0, \vec{U}_0 \rangle + \|\hat{A}\| \|\hat{U}\| (\vec{A}_0 \wedge \vec{U}_0)] \\ &= \frac{\|\hat{U}\|}{\|\hat{A}\|} [\langle \vec{A}_0, \vec{U}_0 \rangle + (\vec{A}_0 \wedge \vec{U}_0)] \\ &= \underbrace{\frac{\|\hat{U}\|}{\|\hat{A}\|}}_{\exp[\varepsilon(h_2 - h_1)]} \left[ \underbrace{\langle \vec{A}_0, \vec{U}_0 \rangle + (\vec{A}_0 \wedge \vec{U}_0)}_{Q_0} \right] \\ &= \exp[\varepsilon(h_2 - h_1)] Q_0 \end{aligned}$$

dir. Buradan (6.27) ile tanımlı dönüşümünün de bir point-line olduğunu söyleyebiliriz  $\square$

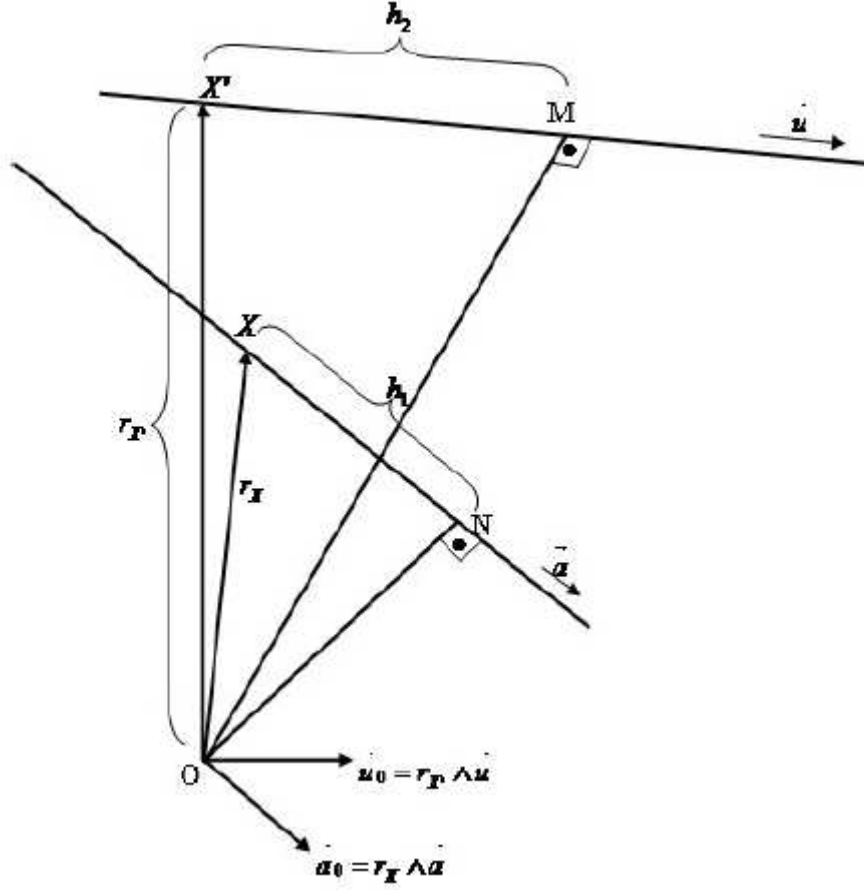
Şimdi 3-boyutlu Lorenz uzayında point-line yer değiştirmesi ve benzerlik dönüşümü arasındaki ilişkiyi bir teoremle verelim.

**Teorem 6.2.2** Eğer 3-boyutlu Lorenz uzayında bir point-line için referans noktası koordinat sisteminin orjin noktası ise (6.16) benzerlik dönüşümü yardımıyla bir point-line başka bir point-line'ye dönüştürülür.

**İspat:**

$\hat{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  ve  $\hat{U} = (\vec{u}, \vec{u}_0, h_2)$ , sırasıyla,  $L_1$  ile  $L_2$  yönlendirilmiş doğruları üzerinde

iki point-line olsun.  $\vec{a}_0$  ve  $\vec{u}_0$  orjin çatısına göre, sırasıyla,  $\vec{a}$  ve  $\vec{u}$  nun vektörel momentleridir.  $h_1$ ,  $N$  dikme ayağından  $X$  noktasına olan uzaklık ve  $h_2$ ,  $M$  dikme ayağından  $X'$  noktasına olan uzaklık olarak kabul edelim.  $\vec{r}_X$  ve  $\vec{r}_{X'}$ , sırasıyla,  $X$  ve  $X'$  nün pozisyon vektörleridir (Şekil 6.3).



Şekil 6.3 Lorenz Uzayında Point-line yer değişirmesi

1)  $\vec{a}$  birim spacelike vektör ise (6.21) den  $\vec{r}_X$  pozisyon vektörü

$$\vec{r}_X = -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a}$$

denkleminde belirlidir. Aynı zamanda  $\vec{r}_{X'}$  pozisyon vektörü (6.16) den

$$\vec{r}_{X'} = \alpha R \vec{r}_X + \vec{b}$$

dir. Burada  $R \in SO_1(3)$ ,  $\alpha$  homotetik skalar ve  $b \in \square_1^3$  dir. (6.25) ve (6.26) deki blok matrisleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\vec{u}_0 &= R^\times \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \alpha R\vec{a}_0 \\
&= \vec{b} \wedge \vec{u} + \alpha R\vec{a}_0 \\
\Rightarrow R\vec{a}_0 &= \frac{1}{\alpha} (\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u})
\end{aligned} \tag{6.28}$$

ve

$$\begin{aligned}
h_2 &= \vec{b}^T \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \alpha h_1 \\
&= \vec{b}^T \vec{u} + \alpha h_1 \\
&= \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle + \alpha h_1 \\
\Rightarrow \alpha h_1 &= h_2 - \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle
\end{aligned} \tag{6.29}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{X'} &= \alpha R\vec{r}_X + \vec{b} \\
&= \alpha R(-\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a}) + \vec{b} \\
&= -\alpha R(\vec{a} \wedge \vec{a}_0) + \alpha R h_1 \vec{a} + \vec{b} \\
&= -\alpha (R\vec{a} \wedge R\vec{a}_0) + \alpha h_1 R\vec{a} + \vec{b}
\end{aligned}$$

olup (6.25), (6.28) ve (6.29) den

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{X'} &= -\alpha \left( \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} \wedge R\vec{a}_0 \right) + \alpha h_1 \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \vec{b} \\
&= -\alpha \left( \vec{u} \wedge \left[ \frac{1}{\alpha} (\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}) \right] \right) + [h_2 - \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle] \vec{u} + \vec{b} \\
&= -\left( \vec{u} \wedge [(\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u})] \right) + h_2 \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + \vec{b} \\
&= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 + \vec{u} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{u}) + h_2 \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + \vec{b} \\
&= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}_{1} \vec{b} + \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + h_2 \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + \vec{b} \\
&= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \vec{b} + \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + h_2 \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + \vec{b} \\
&= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2 \vec{u}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç  $\hat{U}$  point-line'si için pozisyon vektörüdür;

2)  $\vec{a}$  birim time-like vektör ise (6.24) den  $\vec{r}_X$  pozisyon vektörü

$$\vec{r}_X = \vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a}$$

denkleminde belirlidir. Aynı zamanda  $\vec{r}_{x'}$  pozisyon vektörü (6.16) den

$$\vec{r}_{x'} = \alpha R \vec{r}_x + \vec{b}$$

dir. Burada  $R \in SO_1(3)$ ,  $\alpha$  homotetik skalar ve  $b \in \mathbb{R}^3_1$  dir. (6.25) ve (6.26) deki blok matrisleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 &= R^\times \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \alpha R\vec{a}_0 \\ &= \vec{b} \wedge \vec{u} + \alpha R\vec{a}_0 \\ \Rightarrow R\vec{a}_0 &= \frac{1}{\alpha} (\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}) \end{aligned} \quad (6.30)$$

ve

$$\begin{aligned} h_2 &= -\vec{b}^T \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \alpha h_1 \\ &= -\vec{b}^T \vec{u} + \alpha h_1 \\ \Rightarrow \alpha h_1 &= h_2 + \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle \end{aligned} \quad (6.31)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \vec{r}_{x'} &= \alpha R \vec{r}_x + \vec{b} \\ &= \alpha R (\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a}) + \vec{b} \\ &= \alpha R (\vec{a} \wedge \vec{a}_0) + \alpha R h_1 \vec{a} + \vec{b} \\ &= \alpha (R\vec{a} \wedge R\vec{a}_0) + \alpha h_1 R\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

olup (6.26), (6.30) ve (6.31) den

$$\begin{aligned} \vec{r}_{x'} &= \alpha \left( \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} \wedge R\vec{a}_0 \right) + \alpha h_1 \underbrace{R\vec{a}}_{\vec{u}} + \vec{b} \\ &= \alpha \left( \vec{u} \wedge \left[ \frac{1}{\alpha} (\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}) \right] \right) + [h_2 + \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle] \vec{u} + \vec{b} \\ &= \left( \vec{u} \wedge \left[ (\vec{u}_0 - \vec{b} \wedge \vec{u}) \right] \right) + h_2 \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + \vec{b} \\ &= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \vec{u} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{u}) + h_2 \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + \vec{b} \\ &= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}_{-1} \vec{b} - \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + h_2 \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + \vec{b} \\ &= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 - \vec{b} - \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + h_2 \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle \vec{u} + \vec{b} \\ &= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2 \vec{u} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç  $\hat{U}$  point-line'si için pozisyon vektörüdür  $\square$

**Örnek 6.2.1** Şekil 6.3’de gösterilen  $\hat{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  point-line vektörü için yönlendirilmiş birim vektörü  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ , moment vektörü  $\vec{a}_0 = (1, 0, 1)$  olsun. (6.16) de verilen benzerlik dönüşümü ve (6.25) de verilen blok matrisi yardımıyla  $\hat{A}$  point-line’sini  $\hat{U}$  point-line’sine dönüştürelim. Burada,  $\alpha = 4$ ,  $\vec{b} = (-1, 0, 2)$  ve  $\theta = \ln 2$  olarak aldığımızda,

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0 \\ &= (1, 1, 1) + \varepsilon (1, 0, 1)\end{aligned}$$

şeklindedir. Dikme ayağından referans noktasına olan uzaklık  $h_1 = \langle \vec{r}_X, \vec{a} \rangle = 1$  olsun. Bu durumda,  $X$  son noktanın pozisyon vektörü

$$\begin{aligned}\vec{r}_X &= -\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a} \\ &= (2, 1, 2)\end{aligned}$$

dir. Buna göre şekil 6.3’ deki  $\hat{U}$  point-line’sinin  $\vec{u}$  birim doğrultman vektörü,  $\vec{u}_0$  moment vektörü ve  $\vec{r}_{X'}$  yer vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\vec{u} = R\vec{a} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_0 = R^* R \vec{a}_0 + \alpha R \vec{a}_0 = (9, 8, 2)$$

$$h_2 = \vec{b}^T R \vec{a} + \alpha h_1 = 8$$

$$\vec{r}_{X'} = \alpha R \vec{r}_X + \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

dir. Biliyoruz ki point-line vektörünün yer vektörü,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{X'} &= -\vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2 \vec{u} \\ &= (12, 11, 10)\end{aligned}$$

olup bu sonuç (6.32) ile çakışır.



**Örnek 6.2.2** Şekil 6.3’de gösterilen  $\hat{A} = (\vec{a}, \vec{a}_0, h_1)$  point-line vektörü için yönlendirilmiş birim vektörü  $\vec{a} = (1, 0, 0)$ , moment vektörü  $\vec{a}_0 = (0, 1, 2)$  olsun. (6.16) de verilen benzerlik dönüşümü ve (6.26) de verilen blok matrisi yardımıyla  $\hat{A}$  point-line’ sini  $\hat{U}$  point-line’ sine dönüştürelim. Burada,  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $\vec{b} = (2, -1, 3)$  ve  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  olarak aldığımızda,

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0 \\ &= (1, 0, 0) + \varepsilon (0, 1, 2)\end{aligned}$$

şeklindedir. Dikme ayağından referans noktasına olan uzaklık  $h_1 = \langle \vec{r}_X, \vec{a} \rangle = 2$  olsun.

Bu durumda,  $X$  referans noktasının pozisyon vektörü

$$\begin{aligned}\vec{r}_X &= +\vec{a} \wedge \vec{a}_0 + h_1 \vec{a} \\ &= (2, -2, 1)\end{aligned}$$

dir. Buna göre şekil 6.3’ deki  $\hat{U}$  point-line’ sinin  $\vec{u}$  birim doğrultman vektörü,  $\vec{u}_0$  moment vektörü ve  $\vec{r}_{X'}$  yer vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\vec{u} = R\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_0 = -R^x R\vec{a} + \alpha R\vec{a}_0 = (0, 4, -2)$$

$$h_2 = -\vec{b}^T R\vec{a} + \alpha h_1 = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\vec{r}_{X'} = \alpha R\vec{r}_X + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 + 2\sqrt{2} \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

dir. Biliyoruz ki point-line vektörünün yer vektörü,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{X'} &= \vec{u} \wedge \vec{u}_0 + h_2 \vec{u} \\ &= (2 + 2\sqrt{2}, 2, 4)\end{aligned}$$

olup bu sonuç (6.33) ile çakışır.

## KAYNAKLAR

- Acratalishian, A. 1989. “ $E^{2n+1}$  de Lineer Vektör Alanları”, Doktora Tezi Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Aydoğmuş, Ö., Kula, L. and Yaylı, Y. 2008. “On point-line displacement in Minkowski 3-space” Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol. 10, pp. 32-43.
- Bottema, O. and Roth, B. 1979. “Theoretical Kinematics”, North Holland Publ. Company New York
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1983. “Diferansiyel Geometri”, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1980a. “Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler”, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1980b. ”Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş”, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1971. “On The Rolling of One Curve or Surface Upon Another”, Proceedings of the Royal Irish Academy. 71(2), 13-16.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1983. “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, Gazi Üniversitesi Fen –Ed. Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2, Ankara.
- Karger, A. and Novak, J. 1985. “Space Kinematics and Lie Groups”, Gordon and Breach Science Publishers.
- McCarthy, J. M. 1990. ”An Introduction to Theoretical Kinematics”, The MIT Pres Cambridge, Massachusetts London, England.

Odehnal, B., Pottmann, H. and Wallner, J. 2000. “*Equiform Knematic and the Geometry of Line Elements*”, Mathematics subject Classification.

O’neill, B. 1983. “*Semi Riemannian Geometry*”, Academic Press, New York, London.

Ünal, Z. 2007. “*Lorenz Uzayında Cebirsel Metodlarla Kinematik*”, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri, Doktora Tezi.

Yano, K. and Kon, M. 1984. “*Structures on manifolds*”, World Scientific, Singapore.

Zhang, Y. and Ting, K. L. 2004. “*On point-line geometry and displacement*”, Mech. Mach. Theory 39, 1033-1050.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

**Doğum Yeri** : KAYSERİ

**Doğum Tarihi** : 1982

**Medeni Hali** : Evli

**Yabancı Dili** : İngilizce

### EĞİTİM DURUMU (Kurum ve Yıl) :

**Lise** : Kayseri Lisesi – 2000

**Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü  
(2002 - 2006)

**Tezsiz Yüksek Lisans** : Sakarya Üniversitesi OFMA Tezsiz Yüksek Lisans  
(2006 - 2007)

**Tezli Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik  
Anabilim Dalı – ( 2007 - 2009)

**Doktora** : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik  
Anabilim Dalı – ( 2009 - 2012)

### ÇALIŞTIĞI KURUM/KURUMLAR ve YIL :

- Ankara Cemal Şaşmaz Fen Lisesi, Yurt Müdür Yardımcılığı, Matematik Öğretmeni ve Olimpiyat Koordinatörlüğü, 2006 - 2008
- İngiltere Wisdom School, Matematik Öğretmeni, 2008 – 2009
- Ankara Öncü Koleji, Matematik Öğretmeni, 2009 - 2010

### İŞTİRAK EDİLEN SEMİNER VE DİĞER ETKİNLİKLER :

- **II. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu Katılımcı** (Sakarya Üniversitesi-SAKARYA)

### YAYINLAR :

- Öztürk, U., Hacısalihoğlu, H.H., Yaylı, Y., **Koç Öztürk, E.B.** “*Dual Quaternion Frames*”, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.

- **Koç Öztürk, E.B.**, Öztürk, U., Yaylı, Y., Özkaldı, S., “*Integral Curves of a Spiral Vector Field In  $E^n$* ”, International Journal Of Mathematical Sciences & Applications
- Öztürk, U., **Koç Öztürk, E.B.**, Yaylı, Y., “*Dual Quaternion Frames Of A Non Lighthlike Curve*”, International Journal Of Contemporary Mathematics

#### **EDİTÖRLÜK :**

- **International Journal of Mathematical Sciences & Applications**  
(Ocak 2011 den itibaren)
- **International Journal of Open Problems in Mathematics and Applications**  
(Şubat 2011 den itibaren)