ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

n - BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA *B* - SCROLLAR

Şeyda KILIÇOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2006

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof.Dr. H.Hilmi HACISALIHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof.Dr. Arif SABUNCUOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, Sayın Prof.Dr. Baki KARLIAĞA (Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'ya, Sayın Prof.Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya ve Sayın Yard.Doç.Dr. Nejat EKMEKÇI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği bana veren eşim Dr. Mustafa KILIÇOĞLU'na, kızlarım Ilayda, Açelya'ya ve oğlum Ahmet Tuna'ya sabırlarından ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Şeyda KILIÇOĞLU
Ankara, Temmuz 2006

ÖZET

Doktora Tezi

$n-$ BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA $B-$ SCROLLAR

Şeyda KILIÇOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde ileri bölümlerde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir.
Üçüncü bölümde, 3 ve $n-$boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyler incelenmiş; teğetsel demet, asimptotik demet kavramlarıyla sırt uzayı ve merkez uzaylarının varlığı irdelenmiştir.
Dördüncü bölümde, 3 ve $n-$boyutlu Lorentz uzayında regle yüzeyler incelenmiştir. Dayanak eğrisinin time-like veya space-like olması durumlarında oluşan farklı time-like regle yüzeyler ayrı ayrı incelenmiştir.
Beşinci bölümde, 3 ve $n-$boyutlu Öklid uzaylarında özel regle yüzeyler olan $B-$scroll'-lar tanıtılmıştır. Asimptotik demet ve teğetsel demet kavramlarıyla $B-$scroll'ların merkez uzayı, şekil operatörüne karşılık gelen matrisi, normali, Gauss ve ortalama eğrilikleri I. ve II. temel formları, asimptotik çizgileri ve eğrilik çizgileri irdelenmiştir.
Son bölümde ise 3 ve $n-$boyutlu Lorentz uzaylarında özel regle yüzeyler olan time-like $B-$scroll'lar tanıtılmıştır ve 3$-$boyutlu Lorentz uzayında dayanak eğrisinin veya binormalinin time-like olması durumlarında yukarıda adı geçen konular incelenmiştir.
$n-$boyutlu Lorentz uzayında dayanak eğrisinin time-like veya space-like olması durumlarında oluşan 2. ve $p-$yinci mertebeden $B-$scroll'lar ayrı ayrı incelenmiştir. Bu incelemelerde merkez uzayının araştırılması bizi Lyapunov tipi diferensiyel denklem sistemine getirmiştir ve geometri yönü ile bu sistem sonuçlandırılmıştır.

2006, 131 sayfa

Anahtar Kelimeler : Merkez uzay, Asimptotik demet, Teğetsel demet, Genelleştirilmiş $B-$scroll, Genelleştirilmiş regle yüzey

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

$B-$SCROLLS IN LORENTZ $n-$SPACE E^n

Şeyda KILIÇOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALIHOĞLU

This thesis consists of six chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
The second chapter, concepts and definitions which are needed in the further chapters are given.
In the third chapter, ruled surfaces in the 3 and $n-$dimensional Euclidean space are analyzed. The existance of edge space and striction space together with concepts of tangentian bundle and asymptotic bundle are studied.
In the fourth chapter, ruled surfaces in the 3 and $n-$dimensional Lorentzian space are examined. Distinct time like ruled surfaces which occur when the generating curve is time like or space like are studied.
In the fifth chapter, $B-$scrolls that are special ruled surfaces in 3 and $n-$dimensional Euclidean spaces are introduced. Striction space, the matrix corresponding to shape operator, the normal, the Gaussian and mean curvatures, I. and II. fundamental forms, asymptotic lines and curvature lines of $B-$scrolls together with the concepts of asymptotic bundle and tangentian bundle are studied.
In the last chapter, time like $B-$scrolls which are special ruled surfaces in 3 and $n-$dimensional Lorentzian space are introduced and the subjects mentioned above, in the cases the generating curve or binormal in $3-$dimensional Lorentzian space are time like examined. 2. and p th degree $B-$scrolls that occurs in the case when the generating curve is time like or space like in $n-$dimensional Lorentzian space are studied. In these studies, examination of the striction spaces have led us to Lyapunov type differential equation system and this system is studied in geometrical aspect.

2006, 131 pages

Key Words: Striction space, Asymptotic bundle, Tangentian bundle, Generalized $B-$scroll, Generalized ruled surface

İÇİNDEKİLER

ŞEKILLER DIZINI

SIMGELER DIZINI

V	reel vektör uzay¬
boy V	V reel vektör uzay¬n¬n boyutu
ind V	V reel vektör uzay¬n¬n indeksi
´ (I)	birim h¬zl¬ e¼gri
´_ (I)	e¼grinin birim te¼get vektörü
E^n	n ¡ boyutlu Öklid uzay¬
$T_{´(t)}(E^n)$	E^n uzay¬n¬n ´ (t) noktas¬ndaki tanjant uzay¬
$E_k(t)$	´ (t) noktas¬ndaki k ¡ boyutlu do¼grultman uzay
M	yüzey
A (t)	M yüzeyinin asimptotik demeti
T (t)	M yüzeyinin te¼getsel demeti
$K_{k ¡ m}$	(k ¡ m) ¡ boyutlu s¬rt uzay
$Z_{k ¡ m}$	(k ¡ m) ¡ boyutlu merkez uzay
$\overset{1}{S}$	S şekil operatörüne karş¬l¬k gelen matris
K	Gauss e¼grili¼gi
H	ortalama e¼grilik
$L^n = E^n_1$	n ¡ boyutlu 1 ¡ indeksli Lorentz uzay¬
V_i	i ¡ yinci Frenet vektörü
k_i	i ¡ yinci e¼grilik
$\overline{}_t$	' nin t de¼gişkenine göre türevinin birimi

1. GIRIŞ

Regle yüzey kavram¬, Frans¬zca surface regleé'den gelmiş olup çizgiler yüzeyi (¬ş¬n yüzeyi) olarak da adland¬r¬labilir. E^3 de bir regle yüzey, bir parametreye bağl¬ doğrular ailesinin geometrik yeri olarak tan¬mlan¬r.

Juza daha 1960'l¬ y¬llarda genelleştirilmiş regle yüzeyler teorisi üzerinde çal¬şm¬şt¬r. Daha sonra bu alanda çal¬şmalar Frank and Giering (1976) ve Thas (1978) ile devam etmiştir.

Sabuncuoğlu (1982), Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler adl¬ doçentlik tezinde bu yüzeyi ve özeliklerini incelemiştir. Daha sonra Ergüt, Genelleştirilmiş Regle Yüzeylere Dair adl¬ doktora tezinde Thas'¬n E^n de 2 ¡ boyutlu regle yüzey için verdiği skalar normal eğriliği, (r + 1) ¡ boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey için hesaplayarak baz¬ sonuçlar elde etmiştir. Bunlara bağl¬ olarak genelleştirilmiş regle hiperyüzeyler için önemli teorem ve sonuçlar vermiştir.

Regle yüzeyler üzerine yine bir çal¬şma Çal¬şkan (1998) taraf¬ndan doktora tezi olarak haz¬rlanm¬şt¬r.

Keleş ve Kuruoğlu (1983), bu çal¬şmalar doğrultusunda n ¡ boyutlu Öklid uzay¬nda regle yüzeylerin özeliklerini ve Massey Teoremi'ni ifade etmişlerdir.

Alt¬n (1994), Yüksek Mertebeden Regle Yüzeyler adl¬ doktora tezinde genelleştirilmiş regle yüzeylerin kapal¬ olmas¬ durumunda aç¬l¬m uzunluğu ve aç¬l¬m aç¬s¬n¬ incelemiştir.

Öklid uzay¬nda ve Riemann manifoldlar¬nda regle yüzeyleri ile ilgili çal¬şmalara benzer olarak yar¬-Riemann manifoldlar¬nda (veya uzaylar¬nda) bir çok çal¬şma yap¬lm¬şt¬r. Yar¬-Riemann manifoldlar¬ klasik terminolojide pseudo-Riemann veya inde…nite Riemann manifoldlar¬ olarak da adland¬r¬lmaktad¬r. Yar¬-Riemann manifoldlar¬nda (veya uzaylar¬nda) diferensiyellenebilir eğrilerin s¬n¬‡and¬r¬lmas¬ oldukça önemlidir. Eğriler causal karakterlerine göre time-like, space-like ve lihgt-like olmak üzere üçe ayr¬l¬r (O'Neil 1983). q indeksli n ¡ boyutlu bir yar¬-Riemann manifoldu M_q^n ise n ¸ 2 ve $q = 1$ özel durumu için M_1^n yarı-Riemann manifoldu, Lorentz manifoldudur. q indeksli $n-$boyutlu bir yarı-Öklid uzayı R_q^n ise $n \geq 2$ ve $q = 1$ özel durumu için $R_1^n = L^n$ bir Lorentz (Minkowski) vektör uzayıdır (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Regle yüzeyler için E^3 ve E^n de yapılan bu çalışmalar Lorentz (Minkowski) uzayında da çalışılmıştır. Turgut (1995), $3-$Boyutlu Minkowski Uzayında Time-like ve Space-like Regle Yüzeyler adlı doktora tezinde $3-$boyutlu Lorentz uzayında time-like ve space-like regle yüzeyler ile bunlara ait boğaz noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi, açılabilir regle yüzeyler kavramlarını incelemiştir. Yine Aydemir (1995), R_1^n Minkowski Uzayında Time-like Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Time-like Regle Yüzeyler adlı tezinde; Tosun (1995), R_1^n Minkowski Uzayında Space-like Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Time-like Regle Yüzeyler adlı tezinde, $n-$boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayında doğrultman uzaylarına göre tanımlanan regle yüzeyleri ve eğriliklerini çalıştılar.

Turgut ve Hacısalihoğlu (1997), Time-like Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space adlı makalede regle yüzeyleri incelediler.

L^3 de dayanak eğrisi null olan time-like regle yüzeyleri ilk olarak Graves (1979), Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Space adlı çalışmasında $B-$scroll olarak tanımlamıştır. Bu yeni bir çeşit regle yüzey, dayanak eğrisinin binormal vektör alanı tarafından oluşturulduğu için $B-$scroll adını almıştır. Bu yüzeylerin Gauss dönüşümü Alias v.d. (1998) tarafından incelenmiştir. Yine bu tip regle yüzeyler olan null scroll'ların Gauss dönüşümü ile ilgili çalışmalar Choi v.d. (1998) ne aittir. Öte yandan bu konuda çalışan Nassar and Fathi (2001), On an Extension of the $B-$Scroll Surface in Lorentz $3-$Space R_1^3 adlı makalelerinde genişletilmiş $B-$scroll'u verdiler. Inoguchi (2005) ise $E_1^3 = L^3$ $3-$boyutlu Lorentz uzayında $B-$scroll'ların genişletilmişlerinin de $B-$scroll olduğunu Extension $B-$Scrolls are $B-$Scrolls adlı makalesiyle belirtmiştir.

L^3 de birer time-like regle yüzey olan $B-$scroll ve null scroll'lara ait özeliklerin incelendiği çalışmalar Balgetir tarafından yapılmıştır. Balgetir'in (2002) Lorentz

Uzayında Genelleştirilmiş Null Scroll'lar adlı tezinde regle yüzeylere ait bilinen ve çalışılan özeliklerin ışığı altında $n-$boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş null scroll'lar incelenmiştir.

L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında çalışırken ihtiyaç duyduğumuz Frenet formüllerinin en geniş kapsamlı hali için Ekmekçi ve İlarslan'ın (1998) Higher Curvatures of a Regular Curve in Lorentzian Space adlı çalışmalarından faydalanılmıştır.

Burada gerek 3 gerek $n-$boyutlu Lorentz uzayında dayanak eğrisinin binormal vektör alanı tarafından üretilen time-like $B-$scroll'lar incelenmiştir. İlk olarak dayanak eğrisinin time-like sonra space-like olma durumları ayrı ayrı gözetilerek incelenmiştir. Bu farklılıklara dikkat edilerek her bir özel durum için oluşan time-like regle yüzeyin merkez uzayı, şekil operatörüne karşılık gelen $\hat{S}$ matrisi, normali, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, asimptotik çizgileri, I. ve II. temel formları incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u,v,w \in V$ için

i. $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

ii. $\langle au+bv,w \rangle = a\langle u,w \rangle + b\langle v,w \rangle$

$\langle u,av+bw \rangle = a\langle u,v \rangle + b\langle u,w \rangle$

koşullarını sağlıyorsa $\langle .,. \rangle$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilineer formdur** denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.1.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle .,. \rangle$ olsun. $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formuna,

i. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v,v \rangle > 0$ ise **pozitif tanımlı**

ii. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v,v \rangle < 0$ ise **negatif tanımlı**

iii. $\forall v \in V$ için $\langle v,v \rangle \geq 0$ ise **yarı pozitif tanımlı**

iv. $\forall v \in V$ için $\langle v,v \rangle \leq 0$ ise **yarı negatif tanımlı**

denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.1.3 V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer formu,

$$\forall w \in V \text{ için } \langle v,w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$$

şartını sağlıyorsa bu simetrik bilineer forma non-dejenere, non-dejenere değilse dejeneredir denir.

V üzerindeki $\langle\, ,\, \rangle$ non-dejenere simetrik bilineer form, V nin bir alt vektör uzayına indirgenebilir. İndirgenen simetrik bilineer form dejenere veya non-dejenere olabilir.

Tanım 2.1.4 V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\langle\, ,\, \rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki V nin en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle\, ,\, \rangle$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve q ile gösterilir. Ayrıca q ya V reel vektör uzayının indeksi de denir ve $\operatorname{ind} V = q$ ile gösterilir (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Buna göre $1 \leq q \leq \operatorname{boy} V$ dir. $q = 0$ olması için gerek ve yeter şart, $\langle\, ,\, \rangle$ nin pozitif yarı tanımlı olmasıdır.

Tanım 2.1.5 $\langle\, ,\, \rangle$ simetrik bilineer formuna karşılık gelen kuadratik form $\forall u \in V$ için

$$\begin{aligned} h : V &\to \mathbb{R} \\ u &\to h(u) = \langle u, u \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. Bu durumda g ve h yardımıyla $\forall u, v \in V$ için

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left[h(u+v) - h(u) - h(v)\right]$$

şeklinde ifade edilebilir.

V nin $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazı için, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ve v_i ler V nin E bazına karşılık gelen koordinat bileşenleri olmak üzere

$$h(v) = \langle v, v \rangle = \sum_{i=1} \lambda_i (v_i)^2$$

formuna sahiptir. λ_i katsayılarının pozitif, negatif ve sıfır olanlarının sayıları sırası ile p, q ve r ise h ya (p, q, r) tipindendir denir (Duggal and Bejancu 1996).

Önerme 2.1.1 V $m-$boyutlu vektör uzayı üzerinde $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna ait (p, q, r) tipinden bir kuadratik form h olsun. Bu durumda;

i. $\langle , \rangle$ nin dejenere (veya non-dejenere) olması için gerek ve yeter koşul $r > 0$ (veya $r = 0$)

ii. $\langle , \rangle$ nin pozitif (veya negatif) tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $p = m$ (veya $q = m$)

iii. $\langle , \rangle$ nin pozitif (veya negatif) yarı tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $q = 0,\ p > 0,\ r > 0$ (veya $p = 0,\ q > 0,\ r > 0$)

olmasıdır.

İspat: (Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.1.6 V reel vektör uzayının bir bazı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ olarak tanımlanan $[b_{ij}]_{n \times n}$ matrisine $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazına göre $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formunun matrisi denir. $\langle , \rangle$ simetrik olduğundan B matrisi de simetriktir (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Teorem 2.1.1 V vektör uzayının bir ortonormal bazı $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1} \varepsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü belirlidir.

İspat: (O'Neil 1983).

Teorem 2.1.2 Bir V vektör uzayının $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormal bazı için $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ işaretlerindeki negatif terimlerin q sayısı V nin indeksidir.

Ispat: (O'Neil 1983).

Tanım 2.1.7 Bir E^n $n-$manifoldunun her bir $(n-1)$ alt manifolduna bir **hiperyüzey** denir (Hicks 1971).

E^n de bir hiperyüzey M olsun. M yi pozitif yönlü bir manifold olarak kabul edelim. Bir $x \in M$ noktasında M nin dış birim normal vektör alanını N ile gösterirsek, $T_{E^n}(x)$ de $T_M(x)$ e dik bir birim vektör olarak $N(x)$ i öyle seçebiliriz ki;

$$[N(x); V_1|_x; V_2|_x; \ldots; V_{n-1}|_x] = \mu_x$$

ile $T_{E^n}(x)$ deki pozitif yön belli olur. Burada

$$\{V_1|_x; V_2|_x; \ldots; V_{n-1}|_x\} = \left\{X_{u_1}; X_{u_2}; \ldots; X_{u_{n-1}}\right\}$$

vektör sistemi $T_M(x)$ in ortonormal bir bazıdır.

M diferensiyellenebilir bir manifold olduğu için $N(x)$ birim vektörleri M üzerinde noktadan noktaya diferensiyellenebilir olarak değişirler. Tersine olarak M üzerinde diferensiyellenebilecek şekilde, N birim normal vektörlerinin bir ailesi, birim normal vektör alanı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{N}(x) = \bar{N}\Big|_x = \frac{X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}}}{\left\| X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}} \right\|}$$

olup burada

$$\left\| X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}} \right\| = \det \begin{bmatrix} \left\langle X_{u_1} \wedge X_{u_1} \right\rangle & \cdots & \left\langle X_{u_1} \wedge X_{u_{n-1}} \right\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \left\langle X_{u_{n-1}} \wedge X_{u_1} \right\rangle & \cdots & \left\langle X_{u_{n-1}} \wedge X_{u_{n-1}} \right\rangle \end{bmatrix}$$

dir (Greub 1963).

M deki kooordinat komşuluğunu o şekilde seçebiliriz ki,

$$X : (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \in U \subset E^{n-1} \rightarrow (X(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})) = X \in M$$

olmak üzere

$$\left\{ \vec{X}_{u_1}, \vec{X}_{u_2}, \ldots, \vec{X}_{u_{n-1}} \right\}$$

sistemi $T_M(x)$ için bir ortonormal baz olsun. Bunun anlamı,

i) M üzerinde parametre eğrilerini, eğrilik çizgileri olarak

ii) $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ parametrelerini de parametre eğrilerinin $\|X_{u_1}\| = 1$ yay uzunlukları olarak

seçmek demektir. Buna göre,

$$\left\{ \vec{X}_{u_1}, \vec{X}_{u_2}, \ldots, \vec{X}_{u_{n-1}} \right\}$$

bazı bir ortonormal baz olacağından

$$w \in \Lambda^{n-1}(T_M^*(x))$$

olmak üzere

$$w\left(\vec{X}_{u_1}, \vec{X}_{u_2}, \ldots, \vec{X}_{u_{n-1}} \right) = 1$$

dir ve dolayısıyla

$$N(x) = \vec{N}\Big|_x = \vec{X}_{u_1} \wedge \vec{X}_{u_2} \wedge \ldots \wedge \vec{X}_{u_{n-1}}$$

olur.

2.2 Yarı-Öklid Uzayları

Tanım 2.2.1 V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı $\langle\, ,\, \rangle$ simetrik bilineer formu non-dejenere ise $\langle\, ,\, \rangle$ formuna V üzerinde bir **skalar çarpım (yarı-Öklid metriği)** denir. V ye de **skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı)** denir (Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.2.2 V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı non-dejenere $\langle\,,\,\rangle$ simetrik bilineer formu pozitif tanımlı ise $\langle\,,\,\rangle$ formuna **Öklid metriği**, V ye de **Öklid uzayı** denir (Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.2.3 V skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) olsun. $\langle\,,\,\rangle$ nın indeksi $q = 1$; $\text{boy}\, V \geq 2$ ise $\langle\,,\,\rangle$ skalar çarpımına **Lorentz (Minkowski) metriği** ve V ye de **Lorentz uzayı** veya **Minkowski uzayı** denir. V de $\langle\,,\,\rangle$ dejenere ise V ye ışıksı **(light-like)** veya **dejenere vektör uzayı** denir.

Tanım 2.2.4 Bir v vektörü için;

i. $\langle v, v\rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne **space-like (uzay benzeri, uzaysı) vektör**

ii. $\langle v, v\rangle < 0$ ise v vektörüne **time-like (zaman benzeri, zamansı) vektör**

iii. $\langle v, v\rangle = 0$ ise v vektörüne **light-like (null, ışık benzeri, ışıksı) vektör**

denir (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.2.5 V yarı-Öklid uzayı ve $\langle\,,\,\rangle$ yarı-Öklid metriği olmak üzere;

i. $\Gamma_N = \{v \in V - \{0\} : \langle v, v\rangle = 0\}$ cümlesine V nin **ışık konisi**

ii. $\Gamma_S = \{v \in V - \{0\} : \langle v, v\rangle > 0\}$ cümlesine V nin **uzay konisi**

iii. $\Gamma_T = \{v \in V - \{0\} : \langle v, v\rangle < 0\}$ cümlesine V nin **zaman konisi**

denir (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.2.6 V yarı-Öklid uzayı ve $\langle\,,\,\rangle$ yarı-Öklid metriği olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\|\,.\,\| : V &\to \mathbb{R}^+ \\
v &\to \|v\| = |\langle v, v\rangle|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı fonksiyona **norm fonksiyonu** denir. $\|v\|$ ifadesine v nin normu veya v nin boyu denir. Boyu 1 birim olan vektöre de **birim vektör** denir. Ortogonal birim vektörlerin cümlesine **ortonormal sistem** denir (O'Neil 1983).

Teorem 2.2.1 Bir $V \neq \{0\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baz sistemine sahiptir.

Ispat: (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Örnek 2.2.1 $n-$boyutlu reel vektör uzayı olan R^n in indeksi q, $0 < q < n$, olsun. R^n üzerinde bir yarı metrik $\forall x, y \in R^n$ için

$$\langle x, y \rangle = -\sum_{i=1}^{q} x_i y_i + \sum_{j=q+1}^{n} x_j y_j$$

şeklinde tanımlanır. Bu metrikle birlikte R^n yarı-Öklid uzayı olur ve E_q^n ile gösterilir. Özel olarak q indeksi 1 olan Lorentz metriği

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

ise, R^n Lorentz (Minkowski) uzayı olur ve $E_1^n = L^n$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7 M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde non-dejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$ tipinden tensör alanına bir **metrik tensör** denir (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.2.8 M diferensiyellenebilir bir manifold ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de M üzerinde bir metrik tensör ise M ye bir **yarı-Riemann manifoldu** denir. Buradaki sabit indekse yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. q indeksli $n-$boyutlu bir yarı Riemann manifoldu M_q^n ile gösterilir.

Özel olarak $q = 0$ ise M^n bir Riemann manifoldudur. Metriğe de **Riemann metriği** denir.

Özel olarak $n \geq 2$ ve $q = 1$ ise M_1^n yarı Riemann manifolduna **Lorentz manifoldu** denir (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 2.2.9 M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu ve

$$\gamma : I \subset R \to M_q^n$$

diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\alpha(I)$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

i. $\langle T, T\rangle > 0$ ise α eğrisine space-like eğri

ii. $\langle T, T\rangle < 0$ ise α eğrisine time-like eğri

iii. $\langle T, T\rangle = 0$ ise α eğrisine light-like eğri

denir (O'Neil 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Çalışma boyunca ele alınacak olan tüm eğriler birim hızlı olacaktır.

Tanım 2.2.10 E^3 uzayında M bir yüzey ve

$$\alpha : I \to M$$

diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\dot{\alpha}(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise, yani

$$\langle S(\dot{\alpha}(t)), \dot{\alpha}(t)\rangle = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa α eğrisine M yüzeyi içinde asimptotik eğri denir (Sabuncuoğlu 2001).

Teorem 2.2.2 E^n uzayında diferensiyellenebilir bir $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet $r-$ayaklısı

$$\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$$

olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} k_i : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to k_i(t) = \left\langle V_i', V_{i+1} \right\rangle\Big|_{\alpha(t)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna, $\alpha(I)$ eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $\forall t \in I$ için $k_i(t)$ sayısına, $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği denir. Buna göre, E^n üzerindeki $\alpha(I)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve türevleri arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= k_1 V_2 \\
\dot{V}_2 &= -k_1 V_1 + k_2 V_3 \\
&\vdots \\
\dot{V}_i &= -k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1} \quad ; \quad 1 < i < r \\
&\vdots \\
\dot{V}_r &= -k_{r-1} V_{r-1}
\end{aligned}
$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu 1994).

Teorem 2.2.3 M_q^n $(n \geq 3)$ bir yarı-Riemann manifoldu ve

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M_q^n$$

ise diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri

$$\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$$

ve

$$\varepsilon_{i-1} = \langle V_i, V_i \rangle$$

için $k_i \neq 0$ olmak üzere Frenet vektörleri ve türevleri arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= k_1 V_2 \\
&\vdots \\
\dot{V}_i &= -\varepsilon_{i-2}\varepsilon_{i-1} k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1} \quad ; \quad 1 < i < r \\
&\vdots \\
\dot{V}_r &= -\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1} k_{r-1} V_{r-1}
\end{aligned}
$$

şeklindedir (Ekmekçi and Ilarslan 1998). Yukarıda ifade edilen Frenet denklemlerinin matris gösterimi ise,

$$
\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \vdots \\ \dot{V}_{r-2} \\ \dot{V}_{r-1} \\ \dot{V}_r \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & & 0 \\
-\varepsilon_0\varepsilon_1\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \ddots & & \vdots \\
0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_2 & 0 & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & \kappa_{r-2} & 0 \\
 & & & & 0 & \kappa_{r-1} \\
0 & \cdots & & & -\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}\kappa_{r-1} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}
$$

şeklindedir.

2.3 Multivektörler, Wedge Çarpımı ve Yıldız Operatörü

A. Multivektörler:

$n-$boyutlu uzayda p tane (lineer) bağımsız vektör, $p-$boyutlu bir alt uzay tanımlar. p tane bağımsız vektörle oluşturulan $n \times p$ matrisinin $\binom{n}{p}$ sayıdaki minörleri, sabit bir çarpan farkıyla ayırdırlar. Bu minörler alt uzayı belirler. Bu minörlerin cümlesine de p ranklı multivektör veya $p-$multivektör denir (McCarthy 1990).

$$
\begin{aligned}
X_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \\
X_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) \\
&\vdots \\
X_p &= (\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \ldots, \alpha_{pn})
\end{aligned}
$$

gibi p tane lineer bağımsız vektör alalım. Bunlar için,

$$
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{p1} \\
\alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{p2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{pn}
\end{bmatrix}_{n \times p}
$$

matrisinin $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ sayıdaki minörü alt uzayını belirler. Bu minörler cümlesinin elemanlarına $X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_p$ $p-$multivektör denir ve rankı p olur. Herhangi bir ranka sahip multivektörlerin hesaplanmasını, $2-$vektörlerin hesaplanmasından genelleştirebiliriz. $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_p$ ile verilen $p-$multivektörü için

$$X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_p = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} M^{i_1 i_2 \dots i_p} \quad e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

dir. Burada $M^{i_1 i_2 \dots i_p}$, $p \times p$ minörü $[X_1; X_2; \dots; X_p]$ matrisine aittir. $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ baz $p-$vektörleri arasından sıfırdan farklı olan bir tek minör vardır. Bu minör ise $(-1)^N$ ye eşittir. Burada

$$N = (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_p - p)$$

dir.

$3-$boyutlu uzayda rankları $1; 2; 3$ olan multivektörler vardır.

$1-$vektör bildiğimiz rankı 1 olan $A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ vektörüdür.

$2-$vektör $A \wedge B$ olup

$$\begin{aligned} A \wedge B &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(e_1 \wedge e_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(e_3 \wedge e_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(e_2 \wedge e_3) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (e_1 \wedge e_2) + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} (e_3 \wedge e_1) + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (e_2 \wedge e_3) \end{aligned}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse, baz vektörlerinin katsayıları $[AB]$ matrisinin 2×2 tipindeki $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ tane minörüdür.

B. Wedge çarpımı:

Multivektörleri göstermek için kullanılan uygun bir yol da Wedge çarpımıdır. $P; Q; R$ için $\wedge$ ile gösterilen Wedge çarpımının özelikleri aşağıdaki şekildedir (McCarthy 1990).

i. İki lineerdir. Yani

$$\begin{aligned} (aP + bQ) \wedge R &= aP \wedge R + bQ \wedge R \\ P \wedge (aQ + bR) &= a(P \wedge Q) + b(P \wedge R) \end{aligned}$$

dir.

ii. Birleşme özeliği vardır. Yani

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$$

dir.

iii. Anti-simetriktir. Yani

$$P \wedge Q \neq Q \wedge P$$

dir. Ayrıca

$$P \wedge Q = -Q \wedge P$$

dir.

Bu çarpım, $V_1 \wedge V_2$ gibi $2-$vektörünü elde etmek için

$$\begin{aligned} V_1 \wedge V_2 &= (a_1P + b_1Q) \wedge (a_2P + b_2Q) \\ &= a_1a_2\,(P \wedge P) + a_1b_2\,(P \wedge Q) + b_1a_2\,(Q \wedge P) + b_1b_2\,(Q \wedge Q) \\ &= a_1b_2\,(P \wedge Q) - b_1a_2\,(P \wedge Q) \\ &= (a_1b_2 - b_1a_2)\,(P \wedge Q) \end{aligned}$$

şeklinde kullanılabilir.

C. Yıldız operatörü:

$n-$boyutlu uzayda $p-$vektörlerle $(n-p)-$vektörler arasında, aynı sayıda bileşene sahip olduklarından, bir ilgi vardır. Örnek olarak, $3-$boyutlu uzayda $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ olduğundan hem

$$A = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

şeklindeki $1-$vektörleri hem de

$$A \wedge B = (a_1b_2 - a_2b_1)\,(e_1 \wedge e_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)\,(e_3 \wedge e_1) + (a_2b_3 - a_3b_2)\,(e_2 \wedge e_3)$$

şeklindeki $2-$vektörleri 3 er bileşene sahiptirler.

Skalarlar ise, 0 ranklı multivektörlere karşılık gelirler. Bu nedenle dualleri olan $n-$vektörler de tek bileşenli vektörlerdir. $(*)$ yıldız operatörü bir $p-$vektörünü onun duali olan $(n-p)-$vektörüne dönüştürür. Bunu da baz vektörleri arasındaki bir yer değiştirme ile sağlar.

$$* : \bigwedge^{p} \mathbb{R}^n \to \bigwedge^{n-p} \mathbb{R}^n$$

$$(e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \dots \wedge e_{ip}) \to *(e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \dots \wedge e_{ip}) = \pm (e_{ip+1} \wedge e_{ip+2} \wedge \dots \wedge e_{in})$$

dir. Burada $\pm$; eğer $(i_1, i_2, \dots, i_n)$; $1, 2, \dots, n$ sayılarının çift permütasyonu ise $(+1)$; tek permütasyonu ise (-1) dir (McCarthy 1990).

Örnek olarak,

$$A \wedge B = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(e_1 \wedge e_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(e_3 \wedge e_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(e_2 \wedge e_3)$$

olsun. Bunun yıldız operatörü altındaki görüntüsü; duali,

$$\begin{aligned}
*(A \wedge B) &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) * (e_2 \wedge e_3) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) * (e_3 \wedge e_1) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) * (e_1 \wedge e_2) \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bunu genelleştirirsek,

$$\begin{aligned}
*(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_p) &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} M^{i_1 i_2 \dots i_p} * \left(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \right) \\
&= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} M^{i_1 i_2 \dots i_p} \pm \left(e_{i_{p+1}} \wedge e_{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak, $n-$boyutlu Öklid uzayında $p = n - 1$ ise

$$*(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_{n-1}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}} M^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} * \left(e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \dots \wedge e_{i(n-1)} \right)$$

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}} M^{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}} \pm (e_{i_n})$$

dir. Bu şekilde tanjant uzayının baz vektörleri $X_1; X_2; \ldots; X_{n-1}$ olan bir hiperyüzeyin normalini hesaplamış oluruz.

3. ÖKLID UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

3.1 E^n Öklid Uzayında $(k+1)-$Boyutlu Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler

Tanım 3.1.1 E^n uzayında

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir diferensiyellenebilir α eğrisini gözönüne alalım ve $\alpha(I)$ ile gösterelim. $\alpha(I)$ eğrisinin her $\alpha(t)$ noktasında tanımlı bir ortonormal vektör alan sistemi

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

olsun.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

olup e_i nin $\alpha(I)$ eğrisi boyunca türevi $\dot{e}_i$ ise

$$\langle \dot{e}_i, e_j \rangle + \langle e_i, \dot{e}_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{e}_i, e_j \rangle = -\langle e_i, \dot{e}_j \rangle$$

elde edilir. E^n uzayının $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{\alpha(t)}(E^n)$ olmak üzere $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ cümlesi bu tanjant uzayın $k-$boyutlu bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzayını $E_k(t)$ ile gösterelim. Yani

$$Sp\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\} = E_k(t) \subset T_{\alpha(t)}(E^n)$$

dir.

$$M = \bigcup_{t \in I} E_k(t) \quad ; \quad 1 \leq k \leq n-2$$

cümlesi E^n uzayının $(k+1)-$boyutlu alt manifoldudur. Bu alt manifold için parametrizasyon

$$\varphi(t, u_1, u_2, \ldots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i e_i(t) \qquad (3.1.1)$$

şeklindedir. Bu şekilde tanımlanan M manifolduna E^n de bir $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey denir (Frank and Giering 1976).

Tanım 3.1.2 Genelleştirilmiş regle yüzeyin $E_k(t)$ uzayına, yüzeyin $\alpha(t)$ noktasındaki **doğrultman uzayı** adı verilir (Frank and Giering 1976).

Tanım 3.1.3 Genelleştirilmiş regle yüzeyin (3.1.1) eşitliğinde yer alan $\alpha(t)$ eğrisine yüzeyin **dayanak eğrisi** denir (Frank and Giering 1976).

Tanım 3.1.4 E^n de (3.1.1) ile parametrize edilmiş $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyin ifadesinin t ve u_i değişkenlerine göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t) \\ \varphi_{u_1} &= e_1(t) \\ &\;\vdots \\ \varphi_{u_k} &= e_k(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\operatorname{rank}\left\{\varphi_t, \varphi_{u_1}, \ldots, \varphi_{u_k}\right\} = \operatorname{rank}\left\{\dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t), e_1(t), \ldots, e_k(t)\right\} = k+1$$

olduğundan

$$\left\{\varphi_t, \varphi_{u_1}, \ldots, \varphi_{u_k}\right\}$$

cümlesi, $(k+1)-$boyutlu yüzeyin tanımlı olabilmesi için, lineer bağımsız alınacaktır.

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

cümlesi tarafından gerilen alt vektör uzayına M nin $E_k(t)$ içindeki (φ nin $E_k(t)$ ye göre) **asimptotik demeti** denir ve $A(t)$ ile gösterilir. Çünkü $\langle e_i, \dot{e}_i \rangle = 0$ dır yani e_i lerin her biri asimptotiktir (Sabuncuoğlu 1982).

$$A(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

Bu geren cümleyi Gram-Schmidt yöntemiyle ortonormalleştirirsek, $A(t)$ nin $E_k(t)$ yi kapsayan ortonormal bazı olarak

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

elde edilir. O halde, $0 \leq m \leq k$ olmak üzere boy $A(t) = k + m$ dir.

Tanım 3.1.5 E^n de

$$\varphi(t, u_1, u_2, \ldots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i e_i(t)$$

ile parametrize edilmiş M regle yüzeyi için

$$\{\dot{\alpha}(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

cümlesi tarafından gerilen alt vektör uzayına φ nin $E_k(t)$ ye göre (M nin $E_k(t)$ içindeki) teğetsel demeti denir ve $T(t)$ ile gösterilir. Yani,

$$T(t) = Sp\{\dot{\alpha}(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

dir. $\dot{\alpha}(t)$ nin de dahil edilmesi nedeniyle, $0 \leq m \leq k$ olmak üzere boy $T(t) = k + m$ veya boy $T(t) = k + m + 1$ olduğu söylenebilir:

M regle yüzeyinin

$$P = \varphi(t, u_1, u_2, \ldots, u_k)$$

noktası alındığında, P noktasındaki tanjant uzayının bir bazı

$$\left\{\varphi_t, \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}, \ldots, \varphi_{u_k}\right\}$$

lineer bağımsız vektörler cümlesidir. t sabit tutularak u_i ler değiştirilirse, P noktası $E_k(t)$ uzayını tarayacaktır. Buna göre $T(t)$ teğetsel demeti, $E_k(t)$ uzayının tüm P noktalarındaki teğet uzaylarının birleşimini kapsayacaktır. Yani

$$T(t) = \bigcup T_{\alpha(t)}(E_k(t))$$

olur (Sabuncuoğlu 1982).

Şimdi de $\dot{e}_i(t)$ türevlerini ve $A(t)$ asimptotik demetinin bazını tek olarak belirleyen önemli bir teoremi verelim.

Teorem 3.1.1 E^n de $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey M olsun. Her $t \in I$ için $E_k(t)$ uzayının öyle bir

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

bazı bulunabilir ki, bu baz için

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1} \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad ; \quad 1 \leq i \leq m \leq k$$
$$\dot{e}_i = \sum_{j=1} \alpha_{ij} e_i \quad ; \quad m+1 \leq i \leq k$$

dir ve $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ bazı, $A(t)$ asimptotik demetinin ortonormal olan

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

bazını tek olarak belirler.

Ispat: boy $T(t) = k + m$ olduğunda $A(t)$ asimptotik demetinin ortogonal bir bazı, Gram-Schmidt yöntemiyle

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t)\} \quad ; \quad 0 \leq m \leq k$$

olarak bulunur. Burada

$$e_i = \dot{e}_i - \sum_{j=1} e_j \langle \dot{e}_i, e_j \rangle$$

dir. Eğer

$$\frac{e_i}{\| e_i \|} = a_{k+i} \quad ; \quad 1 \leq i \leq m$$

alınırsa A(t) asimptotik demetinin ortonormal bir bazı

$$\left\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2(t)}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\right\}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca

$$\underline{e}_i \in Sp\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

olduğundan

$$\underline{e}_i = \sum_{j=1} \alpha_{ij}\, e_j + \sum_{\nu=1} \sigma_{i\nu}\, a_{k+\nu} \quad ; \quad 1 \le i \le k \tag{3.1.2}$$

dır.

$$\langle \underline{e}_i, e_j \rangle = -\langle e_i, \underline{e}_j \rangle$$

olduğundan

$$\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$$

dir. (3.1.2) eşitliği $a_{k+\nu}$ ile sağdan çarpılırsa

$$\sigma_{i\nu} = \langle \underline{e}_i, a_{k+\nu} \rangle$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \sigma_{i\nu} &= \left\langle \underline{e}_i, \frac{e_\nu}{\|e_\nu\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|e_\nu\|} \langle \underline{e}_i, e_\nu \rangle \end{aligned}$$

$\underline{e}_i$ yerine vektör değerini yazarsak

$$\sigma_{i\nu} = \frac{1}{\|e_\nu\|} \langle e_i, e_\nu \rangle$$

bulunur. $i \neq \nu$ için $\sigma_{i\nu} = 0$ $(1 \le \nu \le m)$ olur. $i = \nu$ için

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{\|e_i\|} \langle e_i, e_i \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\|\dot{e}_i\|^2}{\|e_i\|} \\
&= \|\dot{e}_i\| \\
&= \kappa_i \quad ; \quad \kappa_i > 0
\end{aligned}
$$

dir. Bu halde (3.1.2) eşitliğinde $1 \leq i \leq m$ için $i \neq \upsilon$ ise $\sigma_{i\upsilon} = 0$ ve $i = \upsilon$ ise $\sigma_{ii} = \kappa_i$ olduğundan

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad ; \quad 1 \leq i \leq m \leq k$$

şeklini alır. $m+1 \leq i \leq k$ için daima $i \neq \upsilon$ olacağından ve bu durumda $\sigma_{i\upsilon} = 0$ olduğundan

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j \quad ; \quad m+1 \leq i \leq k$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.6 $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ bazına $E_k(t)$ uzayının doğal taşıyıcı bazı veya M nin asli çatısı denir (Frank and Giering 1976).

Tanım 3.1.7 E^n de $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey M olsun. $\text{boy}\, T(t) = k + m = \text{boy}\, A(t)$ ise M nin sırt uzayı vardır denir (Frank and Giering 1976).

Bu durumda M nin $\eta(I)$ dayanak eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü, $A(t)$ asimptotik demetinin içindedir. O zaman

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i + \sum_{j=1}^{m} \eta_j a_{k+j}$$

olacaktır. Bir diğer $p(t)$ dayanak eğrisi, $\eta(I)$ eğrisine bağlı olarak yazılırsa

$$p(t) = \eta(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t)\, e_i(t)$$

dir. $p(t)$ dayanak eğrisinin $\dot{p}(t)$ hız vektörü ise,

$$\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= \dot{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{k} \dot{u}_i(t)\, e_i(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t)\, \dot{e}_i(t) \\
&= \dot{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{k} \dot{u}_i(t)\, e_i(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, \dot{e}_i(t) + \sum_{i=m+1}^{k} u_i(t)\, \dot{e}_i(t)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Teorem 3.1.1 de ifade edilen $\dot{e}_i(t)$ türevleri ve $\dot{\eta}(t)$ değerleri yukarıdaki eşitlikte yazılırsa

$$\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^{k} \dot{u}_i(t) e_i(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j(t) + \kappa_i a_{k+i} \right) \\
&\quad + \sum_{i=m+1}^{k} u_i(t) \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j(t) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^{k} \dot{u}_i(t) e_i(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j(t) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\,(\kappa_i a_{k+i}) + \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=m+1}^{k} u_i(t)\,(\alpha_{ij} e_j(t)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^{k} \dot{u}_i(t) e_i(t) + \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i(t)\,(\alpha_{ij} e_j(t)) \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=m+1}^{k} u_i(t)\,(\alpha_{ij} e_j(t)) \right) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\,(\kappa_i a_{k+i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^{k} \dot{u}_i(t) e_i(t) + \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i(t)\,(\alpha_{ij} e_j(t)) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, \kappa_i a_{k+i}
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağındaki 1., 3. ve 5. terimlerde i yerine j alınırsa

$$\dot{p}(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\zeta_j + \dot{u}_j(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) \alpha_{ij} \right) e_j(t) + \sum_{j=1}^{m} \left(\eta_j + u_j(t) \kappa_j \right) a_{k+j}$$

elde edilir. Burada

$$\eta_j + u_j(t)\kappa_j = 0 \quad ; \quad 1 \leq j \leq k \leq m$$

sisteminin m tane,

$$u_j = -\frac{\eta_j}{\kappa_j} \quad ; \quad \kappa_j > 0$$

gibi, sıfırdan farklı bir skalar çözümü tek olarak olarak belirlidir. Bu m tane skalar için $\dot{p}(t)$ hız vektörü $E_k(t)$ içinde kalır. Geriye kalan $k - m$ tane değişken keyfi olarak seçilebilir. Bunlar $(k - m) -$ boyutlu bir alt vektör uzayı oluştururlar. Bu uzay, K_{k-m} ile gösterilirse K_{k-m} uzayına M regle yüzeyinin sırt uzayı denir. Bu durumda, boy $T(t) =$ boy $A(t)$ ise M regle yüzeyinin bir sırt uzayı oluşabileceği söylenebilir. Üstelik $k = m$ ise K_0 uzayı $0 -$ boyutlu (nokta) bir sırt uzayı olur (Sabuncuoğlu 1982).

Tanım 3.1.8 K_{k-m} alt vektör uzayı, $\eta(I)$ eğrisi boyunca doğrultman uzayı olarak alınırsa φ tarafından içerilen yeni bir regle yüzey meydana gelir. Daha küçük, $(k - m + 1) -$ boyutlu bu yeni regle yüzeye sırt regle yüzeyi denir.

Tanım 3.1.9 E^n de $(k + 1) -$ boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey M olsun. boy $T(t) = k + m + 1 \neq$ boy $A(t)$ ise M regle yüzeyinin merkez uzayı vardır denir (Frank and Giering 1976).

Bu durumda

$$\dot{\eta}(t) \in A(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

dir. $T(t)$ nin

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

cümlesinden Gram-Schmidt yöntemiyle elde edilen ortonormal bir bazı olarak

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

sistemini alalım. Burada a_{k+m+1} işareti dışında tek olarak belirlidir. O halde

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i + \sum_{j=1}^{m} \eta_j a_{k+j} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \quad ; \quad \eta_{m+1} \neq 0$$

olacaktır. Bir diğer $p(t)$ dayanak eğrisi, $\eta(I)$ eğrisine bağlı olarak yazılırsa ve t değişkenine göre türev alınırsa $\dot{p}(t)$ hız vektörü bulunur. $\dot{p}(t)$ türevinde Teorem 3.1.1 de ifade edilen $\dot{e}_i(t)$ türevleri ve $\dot{\eta}(t)$ değerleri yazılırsa

$$\dot{p}(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\zeta_j + \dot{u}_j(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t)\alpha_{ij} \right) e_j(t) + \sum_{j=1}^{m} \left[\eta_j + u_j(t)\kappa_j \right] a_{k+j} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olur. Burada

$$\eta_j + u_j(t)\kappa_j = 0 \quad ; \quad 1 \leq j \leq k \leq m$$

sisteminin m tane,

$$u_j = -\frac{\eta_j}{\kappa_j} \quad ; \quad \kappa_j > 0$$

gibi sıfırdan farklı bir skalar çözümü tek olarak olarak belirlidir. Geriye kalan $k - m$ tane değişken keyfi olarak seçilebilir. Bunlar $(k - m) -$boyutlu bir alt vektör uzayı oluştururlar. Bu uzay, Z_{k-m} ile gösterilirse Z_{k-m} uzayına **merkez uzay** denir. Bu durumda, boy $T(t) \neq$ boy $A(t)$ ise M regle yüzeyinin bir merkez uzayı oluşabileceği söylenebilir. Üstelik $k = m$ ise Z_0 uzayı $0-$boyutlu (nokta) bir merkez uzayı olur (Frank and Giering 1976).

Tanım 3.1.10 E^n de $(k + 1) -$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey M olsun. $Z_{k-m}(t)$ alt vektör uzayı, $\eta(I)$ eğrisi boyunca doğrultman uzayı olarak alınırsa M tarafından içerilen yeni bir regle yüzey meydana gelir. Daha küçük, $(k - m + 1) -$boyutlu bu yeni regle yüzeye **merkez regle yüzeyi** denir. Ayrıca $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayının her bir noktasına **merkez noktası** denir (Çalışkan 1983).

Tanım 3.1.11 E^n de $(k + 1) -$boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey M olsun. Her $t \in I$ için M nin $T(t)$ teğetsel demetinin

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t)\}$$

ortonormal bazını, E^n nin

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t), a_{k+m+2}(t), \ldots, a_n(t)\}$$

ortonormal bazına tamamlayan

$$\{a_{k+m+2}(t), a_{k+m+3}(t), \ldots, a_n(t)\}$$

ortonormal bazına **tümleyen ortonormal baz** denir.

Tanım 3.1.12 $\{a_{k+m+2}(t), a_{k+m+3}(t), \ldots, a_n(t)\}$ sistemi E^n nin $\varphi(t)$ noktasındaki $T_{\varphi(t)}(E^n)$ tanjant uzayının

$$(n - (k + m + 2) - 1)) = (n - k - m - 1)$$

boyutlu bir alt uzayını gerer. Bu alt uzay $F(t)$ ile gösterilmek üzere

$$F(t) = Sp\{a_{k+m+2}(t), a_{k+m+3}(t), \ldots, a_n(t)\}$$

dir. $F(t)$ alt uzayı $\varphi(I)$ eğrisi boyunca hareket ederken, E^n de M regle yüzeyi tarafından içerilmeyen $(n - k - m) -$boyutlu yeni bir regle yüzeyi üretir. Üretilen bu yüzeye $n -$boyutlu E^n uzayının $(n - k - m) -$boyutlu **tümleyen regle yüzeyi** denir. Bu tümleyen regle yüzey α_n ile gösterilir. α_n tümleyen regle yüzeyi için

$$\alpha_n(t, u_2, u_3, \ldots, u_{n-k-m}) = \varphi(t) + \sum_{\nu=2}^{n-k-m} u_\nu a_{k+m+\nu}$$

parametrizasyonu verilebilir (Tosun 1995).

3.2 E^n Uzayında $3-$Boyutlu Regle Yüzeyler

Bu kesimde, 3.1 de yapılan çalışmalara paralel olarak $k = 2$ özel halinde $3-$boyutlu regle yüzeyler incelenmiştir.

Tanım 3.2.1 E^n uzayının bir

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to E^n \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned}$$

eğrisinin her $\alpha(t)$ noktasında tanımlı $\{e_1(t), e_2(t)\}$ ortonormal vektör alan sistemini alalım. $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$, $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$, $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olup $\dot{e}_1$ ve $\dot{e}_2$; sırasıyla, e_1 ve e_2 nin $\alpha(I)$ eğrisi boyunca türevleri olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \dot{e}_1, e_1 \rangle &= \langle \dot{e}_2, e_2 \rangle = 0 \\ \langle \dot{e}_1, e_2 \rangle + \langle e_1, \dot{e}_2 \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \dot{e}_1, e_2 \rangle = -\langle e_1, \dot{e}_2 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

E^n uzayının $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzay $T_{\alpha(t)}(E^n)$ olmak üzere, $\{e_1(t), e_2(t)\}$ cümlesi bu teğet uzayın $2-$boyutlu bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzayı $E_2(t)$ ile gösterelim. Yani

$$Sp\{e_1(t), e_2(t)\} = E_2(t) \subset T_{\alpha(t)}(E^n)$$

dir. $M = \bigcup_{t \in I} E_2(t)$ cümlesi E^n uzayının $3-$boyutlu alt manifoldudur. Bu alt manifold için bir parametrizasyon

$$\varphi(t, u_1, u_2) = \alpha(t) + u_1 e_1(t) + u_2 e_2(t)$$

şeklindedir. Bu şekilde tanımlanan M manifolduna E^n de bir regle yüzey denir. $E_2(t)$ ye bu yüzeyin doğrultman uzayı adı verilir. $\alpha(I)$ eğrisine ise M regle yüzeyinin dayanak eğrisi denir.

$$\varphi(t, u_1, u_2) = \alpha(t) + u_1 e_1(t) + u_2 e_2(t)$$

olmak üzere

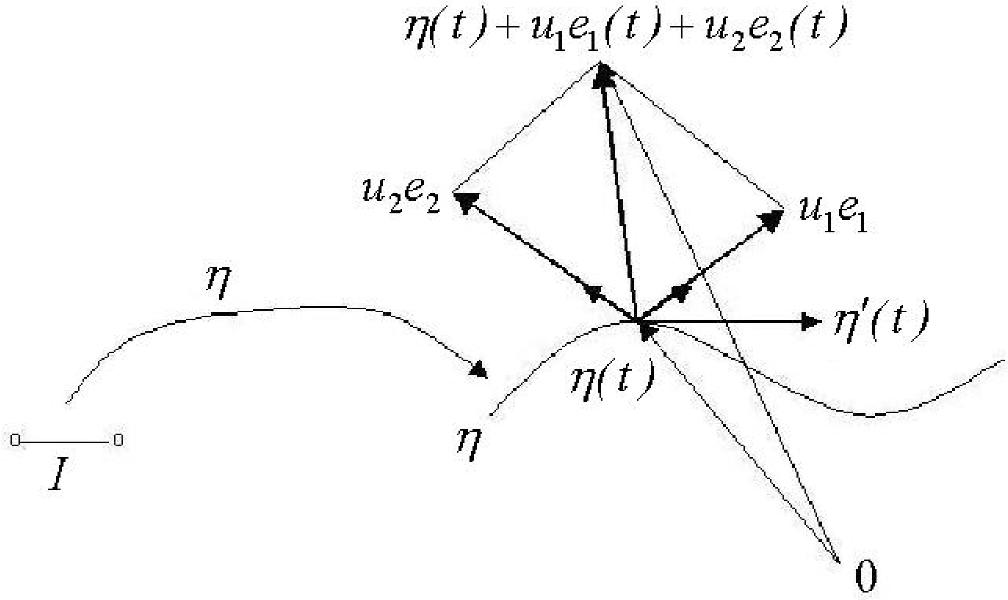
$$\begin{aligned} \varphi_t &= \dot{\alpha}(t) + u_1 \dot{e}_1(t) + u_2 \dot{e}_2(t) \\ \varphi_{u_1} &= e_1(t) \end{aligned}$$

$$'_{u_2} = e_2(t)$$

olup

$$\text{©}\, '_{t};\ '_{u_1};\ '_{u_2}\, ^{\text{ª}} = f\acute{\_}(t) + u_1\underline{e}_1(t) + u_2\underline{e}_2(t); e_1(t); e_2(t)g$$

cümlesi, yüzeyin tan¬ml¬ olabilmesi için lineer ba˘g¬ms¬z al¬nacakt¬r.



Şekil 3.1 k = 2 için E^n de Regle Yüzey

Tan¬m 3.2.2 Sp $fe_1(t); e_2(t); \underline{e}_1(t); \underline{e}_2(t)g = A(t)$ alt vektör uzay¬na M nin $E_2(t)$ içindeki asimptotik demeti denir. A(t) nin boyutu $0 \cdot m \cdot 2$ için $2 + m$ dir. A(t) uzay¬ $E_2(t)$ yi kapsayan bir alt vektör uzay¬d¬r. A(t) uzay¬n¬n

$$m = 0 \quad \text{için} \quad fe_1(t); e_2(t)g$$

$$m = 1 \quad \text{için} \quad fe_1(t); e_2(t); a_3(t)g$$

$$m = 2 \quad \text{için} \quad fe_1(t); e_2(t); a_3(t); a_4(t)g$$

şeklinde ortonormal baz¬ bulunabilir.

Öncelikle m = 1 için inceleme yapal¬m.

Teorem 3.2.1 E^n de $(k = 2;\ m = 1)$ $3-$boyutlu bir regle yüzeyi M olsun. Her $t \in I$ için $E_2(t)$ uzayının öyle bir $\{e_1(t), e_2(t)\}$ bazı bulunabilir ki bu baz için,

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \kappa a_3 \quad ; \qquad \kappa > 0 \\ \dot{e}_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{aligned}$$

dir ve bu baz M nin asimptotik demetinin $\{e_1(t), e_2(t), a_3(t)\}$ bazını tek olarak belirler. Burada $\{e_1(t), e_2(t)\}$ bazına $E_2(t)$ nin **doğal taşıyıcı bazı** denir.

Tanım 3.2.3 M yüzeyinin sabit bir $P = \varphi(t, u_1, u_2)$ noktası dikkate alınırsa, bu P noktasındaki tanjant uzayının bir bazı

$$\left\langle \varphi_t, \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2} \right\rangle = \{\dot{\eta} + u_1\dot{e}_1 + u_2\dot{e}_2, e_1, e_2\}$$

dir. t sabit tutularak, u_1 ve u_2 sayıları değiştirilirse P noktası $E_2(t)$ uzayını tarayacaktır. Buna göre $Sp\{\dot{\eta}, e_1, e_2, \dot{e}_1, \dot{e}_2\}$ uzayı $E_2(t)$ nin tüm P noktalarındaki tanjant uzaylarının birleşimini kapsar. Bu uzay $T(t)$ ile gösterilir ve M nin $E_2(t)$ içindeki **teğetsel demeti** olarak adlandırılır. Bu durumda $3 \leq \text{boy}\, T(t) \leq 4$ dir. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

Tanım 3.2.4 $\text{boy}\, T(t) = 3 = \text{boy}\, A(t)$ ise M nin $\eta(I)$ eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü $A(t)$ uzayının içindedir. Yani

$$\dot{\eta}(t) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta_1 a_3 \tag{3.2.1}$$

biçimindedir. Herhangi bir $p(t)$ dayanak eğrisi, $\eta(t)$ eğrisine bağlı olarak

$$p(t) = \eta(t) + u_1(t)e_1(t) + u_2(t)e_2(t)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\dot{p}(t) = \dot{\eta}(t) + \dot{u}_1(t)e_1(t) + u_1(t)\dot{e}_1(t) + \dot{u}_2(t)e_2(t) + u_2(t)\dot{e}_2(t)$$

olup $(3.2.1)$ eşitliğini ve Teorem 3.2.1 deki $\dot{e}_1$ ve $\dot{e}_2$ türevlerini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta_1 a_3 + \dot{u}_1 e_1 + u_1(a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \kappa a_3) + \dot{u}_2 e_2 \\
&\quad + u_2(a_{21} e_1 + a_{22} e_2) \\
&= (\xi_1 + \dot{u}_1 + u_1 a_{11} + u_2 a_{21}) e_1 + (\xi_2 + \dot{u}_2 + u_1 a_{12} + u_2 a_{22}) e_2 \\
&\quad + (\eta_1 + u_1 \kappa) a_3
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$\eta_1 + u_1 \kappa = 0 \tag{3.2.2}$$

olacak şekildeki $P(t)$ noktaları için $\dot{p}(t)$ vektörü $E_2(t)$ nin içinde kalır. $\kappa > 0$ olduğundan

$$u_1 = -\frac{\eta_1}{\kappa}$$

skaları tek olarak belirlidir. Bu $E_2(t)$ içinde $1-$boyutlu bir alt uzayı oluşturur. Geriye kalan bir değişken keyfi olarak seçilebilir. Bu da, $1-$boyutlu bir alt uzayı oluşturur. Bu uzayı $K_1(t)$ ile gösterelim. Bu uzaya M regle yüzeyinin sırt uzayı denir.

Tanım 3.2.5 boy $T(t) = 4 \neq$ boy $A(t)$ olsun. Bu durumda merkez uzayı vardır denir. Ayrıca $\dot{\eta}(t) \in Sp\{e_1, e_2, a_3\}$ dür. $\{e_1, e_2, a_3, a_4\}$ cümlesi $T(t)$ nin ortonormal bir bazı olacak biçimde bir a_4 birim vektörü işareti dışında tek olarak belirlidir.

$$\dot{\eta}(t) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta_1 a_3 + \eta_2 a_4 \tag{3.2.3}$$

olup herhangi bir

$$p(t) = \eta(t) + u_1(t) e_1(t) + u_2(t) e_2(t)$$

dayanak eğrisinin hız vektörü

$$\dot{p}(t) = \dot{\eta}(t) + \dot{u}_1(t) e_1(t) + u_1(t) \dot{e}_1(t) + \dot{u}_2(t) e_2(t) + u_2(t) \dot{e}_2(t)$$

dir. Bu ifadede (3:2:3) eşitliğini ve $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$ türevlerini yerlerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta_1 a_3 + \eta_2 a_4 + \dot{u}_1 e_1 + u_1(a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \kappa a_3) + \dot{u}_2 e_2 \\
&\quad + u_2(a_{21} e_1 + a_{22} e_2)
\end{aligned}
$$

$$= (\xi_1 + \dot{u}_1 + u_1 a_{11} + u_2 a_{21}) e_1 + (\xi_2 + \dot{u}_2 + u_1 a_{12} + u_2 a_{22}) e_2 + (\eta_1 + u_1 \kappa) a_3 + \eta_2 a_4$$

bulunur.

$$\eta_1 + u_1 \kappa = 0 \Rightarrow u_1 = -\frac{\eta_1}{\kappa}$$

lineer denklemi ile tanımlanan $1-$boyutlu $Z_1(t)$ uzayına M nin $E_2(t)$ içindeki merkez uzayı denir.

Şimdi de $m = 0$ için teoremi ifade edip sırt ve merkez uzaylarını inceleyelim.

boy $A(t) = 2 + m = 2 + 0 = 2$ olacaktır. $A(t)$ uzayının $\{e_1(t), e_2(t)\}$ biçiminde ortonormal bir bazı bulunabilir.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ \dot{e}_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \end{aligned}$$

yazılabileceği açıktır. Burada $a_{12} = -a_{21}$ dir.

Teorem 3.2.2 $(k = 2; m = 0)$ $3-$boyutlu bir M Regle yüzeyinde $E_2(t)$ uzayının öyle bir $\{e_1(t), e_2(t)\}$ bazı bulunabilir ki, bu baz için

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ \dot{e}_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \end{aligned}$$

dir ve bu baz $A(t)$ nin bazını da $\{e_1(t), e_2(t)\}$ şeklinde tek olarak belirler.

$T(t)$ teğetsel demet olmak üzere boy $T(t) = 2 + 0 = 2$ veya boy $T(t) = 2 + 0 + 1 = 3$ dür. Öncelikle boy $T(t) = 2$ alalım. $\eta(t)$ dayanak eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü $A(t)$ uzayındadır ve

$$\dot{\eta}(t) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \tag{3.2.4}$$

şeklindedir. Herhangi bir $p(t)$ dayanak eğrisi $\alpha(t)$ eğrisine bağlı olarak

$$p(t) = \alpha(t) + u_1(t)e_1(t) + u_2(t)e_2(t)$$

şeklindedir. Bu durumda,

$$\dot{p}(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{u}_1(t)e_1(t) + u_1(t)\dot{e}_1(t) + \dot{u}_2(t)e_2(t) + u_2(t)\dot{e}_2(t)$$

olup burada (3:2:4) eşitliğini ve Teorem 3.2.2 deki $\dot{e}_1$ ve $\dot{e}_2$ türevlerini yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dot{u}_1 e_1 + \dot{u}_2 e_2 + u_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + u_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (\lambda_1 + \dot{u}_1 + u_1a_{11} + u_2a_{21})e_1 + (\lambda_2 + \dot{u}_2 + u_1a_{12} + u_2a_{22})e_2 \end{aligned}$$

bulunur. Tüm $P(t)$ noktaları için $\dot{p}(t)$ vektörü $E_2(t)$ içindedir. Sadece $2-$boyutlu bir uzay oluşur. Bu uzaya sırt uzayı denir. Yani $A(t)$ nin ve $E_2(t)$ nin boyutları aynı ise boğaz uzayı yok, sırt uzayı vardır.

boy $T(t) = 3$ olsun. Bu durumda

$$\dot{\alpha}(t) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \alpha_1 a_3$$

vektörü $Sp\{e_1; e_2\}$ cümlesinin elemanı değildir. $\{e_1; e_2; a_3\}$ cümlesi $T(t)$ nin ortonormal bir bazı olacak şekilde bir a_3 birim vektörü işareti dışında tek olarak belirlidir. Herhangi bir $p(t)$ dayanak eğrisi, $\alpha(t)$ eğrisine bağlı olarak yazılırsa ve türevi alınırsa, benzer işlemlerle

$$\dot{p}(t) = (\lambda_1 + \dot{u}_1 + u_1a_{11} + u_2a_{12})e_1 + (\lambda_2 + \dot{u}_2 + u_1a_{21} + u_2a_{22})e_2 + \alpha_1 a_3$$

olur. Bu şekildeki tüm $P(t)$ noktalarının cümlesi M regle yüzeyinin $E_2(t)$ içindeki $2-$boyutlu merkez uzayını oluştururlar.

Son olarak $m = 2$ için teoremi ifade edip sırt ve merkez uzaylarını inceleyelim.

boy $A(t) = 2 + 2 = 4$ olsun. $A(t)$ uzayının $\{e_1; e_2; a_3; a_4\}$ şeklinde ortonormal bir bazını bulabiliriz.

Teorem 3.2.3 $3-$boyutlu bir M Regle yüzeyinde $E_2(t)$ uzayının öyle bir $\{e_1(t); e_2(t)\}$ bazı bulunabilir ki bu baz için,

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \kappa_1 a_3 \quad ; \quad \kappa_1 > 0 \\
\dot{e}_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \kappa_2 a_4 \quad ; \quad \kappa_2 > 0
\end{aligned}
$$

dir ve bu $\{e_1; e_2\}$ bazı $A(t)$ nin $\{e_1; e_2; a_3; a_4\}$ bazını tek olarak belirler.

boy $T(t) = 4$ veya boy $T(t) = 5$ dir. Öncelikle boy $T(t) = 4$ alalım. $\eta(t)$ dayanak eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü $A(t)$ uzayının içinde olup

$$\dot{\eta}(t) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta_1 a_3 + \eta_2 a_4 \tag{3.2.5}$$

şeklindedir. Herhangi bir $p(t)$ dayanak eğrisi, $\eta(t)$ eğrisine bağlı olarak yazılırsa

$$p(t) = \eta(t) + u_1(t)e_1(t) + u_2(t)e_2(t)$$

dir.

$$\dot{p}(t) = \dot{\eta}(t) + \dot{u}_1(t)e_1(t) + u_1(t)\dot{e}_1(t) + \dot{u}_2(t)e_2(t) + u_2(t)\dot{e}_2(t)$$

türevinde $(3.2.5)$ eşitliğini ve Teorem 3.2.3 deki $\dot{e}_1$ ve $\dot{e}_2$ türevlerini yerlerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta_1 a_3 + \dot{u}_1 e_1 + \dot{u}_2 e_2 + u_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \kappa_1 a_3) + \\
&\quad + u_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \kappa_2 a_4) + \eta_2 a_4 \\
&= (\xi_1 + \dot{u}_1 + u_1 a_{11} + u_2 a_{21})e_1 + (\xi_2 + \dot{u}_2 + u_1 a_{12} + u_2 a_{22})e_2 + \\
&\quad + (\eta_1 + u_1\kappa_1)a_3 + (\eta_2 + u_2\kappa_2)a_4
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$\eta_1 + u_1\kappa_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \eta_2 + u_2\kappa_2 = 0$$

lineer denklemlerini sağlayan

$$u_1 = -\frac{\eta_1}{\kappa_1} \qquad \text{ve} \qquad u_2 = -\frac{\eta_2}{\kappa_2}$$

skalarları şeklindeki $P(t)$ noktaları için $\dot{p}(t)$ vektörü $E_2(t)$ uzayı içindedir. u_1 ve u_2 skalarları tek olarak belirli olup, geriye $2 - 2 = 0$ tane keyfi değişken kalır. Yani M nin $E_2(t)$ içinde sırt uzayı yoktur.

boy $T(t) = 4 + 1 = 5$ alınırsa bu durumda $\dot{\eta}(t)$, $Sp\{e_1; e_2; a_3; a_4\}$ cümlesinin elemanı değildir ve $\{e_1; e_2; a_3; a_4; a_5\}$ cümlesi $T(t)$ nin ortonormal bir bazı olacak şekilde a_5 tek olarak belirlidir. Bu durumda

$$\dot{\eta}(t) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta_1 a_3 + \eta_2 a_4 + \eta_3 a_5$$

dir. Benzer işlemlerle $p(t)$ eğrisinin hız vektörü

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= (\xi_1 + \dot{u}_1 + u_1 a_{11} + u_2 a_{21})e_1 + (\xi_2 + \dot{u}_2 + u_1 a_{12} + u_2 a_{22})e_2 + \\ &\quad + (\eta_1 + u_1 \kappa_1)a_3 + (\eta_2 + u_2 \kappa_2)a_4 + \eta_3 a_5 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\eta_1 + u_1 \kappa_1 = 0 \qquad \text{ve} \qquad \eta_2 + u_2 \kappa_2 = 0$$

lineer denklemleri ile tanımlı merkez uzayının boyutu $2 - 2 = 0$ dır. Merkez uzayı yoktur.

4. LORENTZ UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

4.1 L^3 $3-$Boyutlu Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 4.1.1 L^3 $3-$boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayında verilen bir l doğrusunun verilen bir $\alpha(I)$ eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile bir yüzey elde ediliyorsa bu yüzeye $3-$boyutlu Lorentz uzayında bir regle yüzey denir. $\alpha(I)$ eğrisine dayanak eğrisi ve l doğrusuna regle yüzeyin bir anadoğrusu denir (Turgut 1995).

Tanım 4.1.2 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında, bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Turgut 1995).

Tanım 4.1.3 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa bu dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına merkez (boğaz, striksiyon) noktası denir (Turgut 1995).

Tanım 4.1.4 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken merkez noktalarının geometrik yerine boğaz çizgisi (striksiyon eğrisi) denir (Turgut 1995).

Tanım 4.1.5 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında regle yüzeyin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen bir eğri varsa bu eğriye regle yüzeyin bir ortogonal yörüngesi denir (Turgut 1995).

Tanım 4.1.6 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M ye L^3 de space-like yüzey denir (Beem and Ehrlich 1981).

Tanım 4.1.7 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M ye time-like yüzey denir (Beem and Ehrlich 1981).

Teorem 4.1.1 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında regle yüzeyin time-like olması için gerek ve yeter koşul, yüzeyin N normalinin space-like bir vektör alanı yani $\langle N, N\rangle > 0$

olmasıdır (Turgut 1995).

Teorem 4.1.2 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında M regle yüzeyinin space-like olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin N normalinin time-like bir vektör alanı yani $\langle N, N\rangle < 0$ olmasıdır (Turgut 1995).

Tanım 4.1.8 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey M ve M nin şekil operatörüne karşılık gelen matris $\tilde{S}$ olsun. Bir $P \in M$ için

$$K(P) = \varepsilon \det \tilde{S}_P \quad ; \quad \varepsilon = \langle N, N\rangle$$

değerine M nin P noktasındaki Gauss eğriliği,

$$K : M \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir.

M yüzeyi space-like ise $\varepsilon = \langle N, N\rangle = -1$ olduğu için $K = -\det \tilde{S}$ ve M time-like ise $\varepsilon = \langle N, N\rangle = +1$ olduğundan $K = \det \tilde{S}$ dir (Turgut 1995).

4.2 L^n $n-$Boyutlu Lorentz Uzayında Space-like Dayanak Eğrili (Time-like Doğrultman Uzaylı) Genelleştirilmiş Time-like Regle Yüzeyler (Lorentz Regle Yüzeyler)

Tanım 4.2.1 L^n $n-$boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayında $\{0\} \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir bir space-like $\alpha(I)$ eğrisini alalım.

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to L^n \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned}$$

$\alpha(I)$ eğrisinin her $\alpha(t)$ noktasında tanımlı ortonormal vektör alan sistemi

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

ile verilsin. Bu sistem $\alpha(t) \in L^n$ noktasındaki $T_{\alpha(t)}(L^n)$ tanjant uzayının $k-$boyutlu bir alt uzayını gerer. Bu alt uzayı $E_k(t)$ ile gösterelim. Yani

$$E_k(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

olup time-like alt uzaydır. $E_k(t)$ time-like alt uzayı $\alpha(I)$ eğrisi boyunca hareket ederken L^n de $(k+1)-$boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye L^n uzayında $(k+1)-$boyutlu space-like dayanak eğrili (time-like doğrultman uzaylı) genelleştirilmiş time-like regle yüzey denir ve M ile gösterilir.

$$M = \bigcup_{t \in I} E_k(t)$$

için kullanacağımız parametrizasyon

$$\varphi(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i e_i(t) \qquad (4.2.1)$$

dir (Aydemir 1995).

Tanım 4.2.2 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında (4.2.1) eşitliği ile tanımlanan M yüzeyinin $E_k(t)$ alt uzayına time-like doğrultman uzay, $\alpha(I)$ eğrisine yüzeyin space-like dayanak eğrisi denir (Aydemir 1995).

Eğer φ nin t ve u_i $(1 \le i \le k)$ değişkenlerine göre türevlerini alırsak

$$\varphi_t(t) = \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t) \quad \text{ve} \quad \varphi_{u_i}(t) = e_i(t)$$

olmak üzere

$$\left\{ \varphi_t, \varphi_{u_1}, \ldots, \varphi_{u_k} \right\} = \left\{ \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t), e_1(t), \ldots, e_k(t) \right\}$$

sistemini, $(k+1)-$boyutlu yüzeyin tanımlı olması için lineer bağımsız alacağız.

Tanım 4.2.3 L^n de $(k+1)-$boyutlu bir time-like regle yüzey M ve $E_k(t)$ time-like doğrultman uzay olsun.

$$Sp\left\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t), \underline{e}_1(t), \underline{e}_2(t), \dots, \underline{e}_m(t)\right\}$$

alt uzayına M nin $E_k(t)$ ye göre asimptotik demeti denir ve $A(t)$ ile gösterilir. boy $A(t) = k + m$, $0 \le m \le k$ kabul edilirse, $A(t)$ nin $E_k(t)$ yi içeren

$$\left\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \dots, a_{k+m}(t)\right\}$$

şeklinde bir ortonormal bazı vardır (Aydemir 1995).

Teorem 4.2.1 L^n de $(k+1)-$ boyutlu space-like dayanak eğrili time-like regle yüzey M ve asimptotik demeti $A(t)$ ise $A(t)$ time-like alt uzaydır (Aydemir 1995).

İspat: İspatı bir başka yoldan yapalım. $A(t)$ nin $E_k(t)$ yi içeren

$$\left\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \dots, a_{k+m}(t)\right\}$$

ortonormal bazı bulunabilir. $E_k(t)$ time-like alt uzay olduğundan e_i $(1 \le i \le k)$ vektörleri için

$$\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad , \quad 1 \le i, j \le k$$

bağıntısı sağlanır. Ayrıca, L^n Lorentz uzayında indeks $q = 1$ olduğundan $E_k(t)$ time-like uzayında

$$\langle e_i, e_i \rangle = -1 < 0$$

olacak şekilde bir tek time-like vektör vardır. L^n uzayı, indeksi $q = 1$ olan yarı-Öklidyen uzay olduğundan L^n in bir ortonormal bazında bir tek time-like vektör vardır. Bu nedenle

$$A(t) = Sp\left\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \dots, a_{k+m}(t)\right\}$$

bir time-like alt uzaydır.

Tanım 4.2.4 L^n de $(k+1)-$ boyutlu time-like M regle yüzeyinin time-like doğrultman uzayı $E_k(t)$ ve dayanak eğrisi $\alpha(I)$ olsun.

$$Sp\{\dot{\alpha}(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

alt uzayına M nin $E_k(t)$ ye göre **teğetsel demeti** denir ve $T(t)$ ile gösterilir. Eğer boy $A(t) = k + m$ ise, boy $T(t) = k + m$ veya boy $T(t) = k + m + 1$ dir.

Kabul edelim ki, boy $T(t) = k + m =$ boy $A(t)$ olsun. Bu durumda time-like M regle yüzeyinin sırt uzayı vardır ve

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

hem $A(t)$ nin hem de $T(t)$ nin ortonormal bazıdır. Eğer boy $T(t) = k + m + 1 \neq$ boy $A(t)$ ise bu durumda time-like M regle yüzeyinin merkez uzayı vardır ve

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t)\}$$

$T(t)$ nin ortonormal bazıdır.

Teorem 4.2.2 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili time-like regle yüzeyin $T(t)$ teğetsel demeti, time-like alt uzaydır (Aydemir 1995).

İspat: İspatı değişik bir yoldan yapalım. boy $T(t) = k+m =$ boy $A(t)$ ise $T(t) = A(t)$ olup Teorem 4.2.1 den $A(t)$ time-like olduğundan $T(t)$ de time-like alt uzaydır. boy $T(t) = k+m+1 \neq$ boy $A(t)$ ise L^n; indeksi $q = 1$ olan yarı-Öklidyen uzay olduğundan bazındaki tek time-like vektör $E_k(t)$ içinde kalır. O halde $T(t)$ time-like alt uzaydır.

Teorem 4.2.3 L^n de $(k + 1)-$boyutlu time-like regle yüzey M ve doğrultman uzayı $E_k(t)$ olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere $\{e_i(t_0)\}_{i=1,\ldots,k}$, $E_k(t)$ nin ortonormal bazı olsun. $t_0 \in J \subset I$ olacak şekilde bir J açık aralığı bulunabilir ki, bu aralıkta $E_k(t)$ nin $\forall t \in J$ için

$$\left\langle \dot{\acute{e}}_i, \acute{e}_j \right\rangle = 0 \quad ; \quad 1 \leq i, j \leq k$$

olacak şekilde bir

$$\{\acute{e}_1(t), \acute{e}_2(t), \ldots, \acute{e}_k(t)\}$$

ortonormal bazı tek türlü bulunabilir (Aydemir 1995).

Teorem 4.2.4 L^n de $(k+1)-$ boyutlu time-like regle yüzey M ve M nin asimptotik demeti $A(t)$ olsun. boy $A(t) = k + m$ $(0 \leq m < k)$ ve $E_k(t)$ time-like doğrultman uzayının ortonormal bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t), e_{m+1}(t), e_{m+2}(t), \ldots, e_k(t)\}$$

olsun. Bu takdirde, m tanesinden oluşan ortonormal bir baz seçilebilir.

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t)\}$$

ortonormal sistemi

$$\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = 0 \quad ; \quad 1 \leq i, j \leq m \quad ; \quad i \neq j$$

olup

$$\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle > \langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle > \ldots > \langle \tilde{e}_m, \tilde{e}_m \rangle > 0$$

yani

$$\|\tilde{e}_1\|^2 > \|\tilde{e}_2\|^2 > \ldots > \|\tilde{e}_m\|^2 > 0$$

olarak seçilebilir. Burada

$$\tilde{e}_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j \langle e_i, e_j \rangle e_j$$

dır (Aydemir 1995).

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t), e_{m+1}(t), e_{m+2}(t), \ldots, e_k(t)\}$$

içinden, aralarında time-like baz vektörü de olabilecek şekilde

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t)\}$$

ortonormal baz sistemini alalım.

$$\{\dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_m(t)\}$$

türevlerini aldıktan sonra her bir türev vektörünü Gram-Schmidt metodu ile ortonormalleştirerek

$$\{\hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \ldots, \hat{e}_m(t)\}$$

şeklinde yeni bir space-like ortonormal baz sistemi elde edilebilir. Bu yeni ortonormal baz

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t)\}$$

şeklinde seçilebilir.

Sonuç: $A(t) = Sp\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$ asimptotik demetinin

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \ldots, \hat{e}_m(t)\} \quad ; \quad 0 \leq m \leq k$$

şeklinde bir ortogonal bazı bulunabilir.

Teorem 4.2.5 L^n de $(k+1)-$boyutlu time-like regle yüzey M, time-like doğrultman uzayı $E_k(t)$ ve asimptotik demeti $A(t)$ olsun. boy $A(t) = k + m$ için $E_k(t)$ nin

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

ortonormal bazı

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad ; \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j \quad ; \quad m+1 \leq i \leq k$$

olacak şekilde seçilebilir. Burada $\varepsilon_j \alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$; $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$ ve $\kappa_1 > \kappa_2 > \ldots > \kappa_m > 0$ dır (Aydemir 1995).

Ispat: Bir başka yoldan ispatı verebiliriz. boy $A(t) = k + m$ ise Sonuçtan $A(t)$ nin

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \acute{e}_1(t), \acute{e}_2(t), \ldots, \acute{e}_m(t)\}$$

olacak şekilde bir ortogonal bazı bulunabilir. Eğer

$$a_{k+i} = \frac{\acute{e}_i}{\|\acute{e}_i\|} \quad ; \quad 1 \le i \le m$$

ise $A(t)$ nin

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

ortonormal bazı bulunabilir. Ayrıca

$$\underline{e}_i(t) \in Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

olduğundan

$$\underline{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j + \sum_{\nu=1}^{m} \sigma_{i\nu}\, a_{\nu+i} \quad ; \quad 1 \le i \le k \tag{4.2.3}$$

yazılabilir.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad ; \quad 1 \le i, j \le k$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \underline{e}_i, e_j \rangle &= -\langle e_i, \underline{e}_j \rangle \\ \langle \underline{e}_i, e_j \rangle &= \varepsilon_j \alpha_{ij} = -\varepsilon_i \alpha_{ji} \end{aligned}$$

veya

$$\varepsilon_s \alpha_{ij} = -\alpha_{ji} \quad ; \quad \varepsilon_s = -\varepsilon_i \varepsilon_j \quad ; \quad 1 \le s \le k$$

elde edilir. (4:2:3) den $\sigma_{i\nu}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \sigma_{i\nu} &= \langle \underline{e}_i, a_{k+\nu} \rangle \\ &= \left\langle \underline{e}_i, \frac{\acute{e}_i}{\|\acute{e}_i\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\acute{e}_i\|} \langle \underline{e}_i, \acute{e}_i \rangle \end{aligned}$$

$i \neq v$ için Teorem 4.2.3 den

$$\langle \dot{e}_i, \dot{e}_v \rangle = 0$$

olduğundan

$$\sigma_{i\nu} = 0 \quad ; \quad 1 \leq v \leq m \quad ; \quad i \neq v$$

bulunur. $i = v$ için

$$\sigma_{ii} = \|\dot{e}_i\| = \kappa_i$$

olur ve Teorem 4.2.3 den

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \ldots > \kappa_m > 0$$

elde edilir. Bu halde $1 \leq i \leq m$ için

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad ; \quad 1 \leq i \leq m$$

dir. $m + 1 \leq i \leq k$ için daima $i \neq \nu$ olduğundan $\sigma_{i\nu} = 0$ olup

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j \quad ; \quad m + 1 \leq i \leq k$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 4.2.5 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında boy $T(t) = k + m =$ boy $A(t)$ ise space-like $\beta(I)$ dayanak eğrisinin hız vektörü $\dot{\beta}(t)$ olmak üzere

$$\dot{\beta}(t) \in A(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

dir. O halde

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_{k+j}$$

dir. Herhangi bir $p(t)$ dayanak eğrisi için

$$p(t) = \beta(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) e_i(t)$$

olup türevi

$$\dot{p}(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\xi_j + \dot{u}_j(t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i(t) \right) e_j(t) + \sum_{s=1}^{m} (\eta_s + u_s(t)\,\kappa_s)\, a_{k+s}$$

dır.

$$\eta_s + u_s(t)\,\kappa_s = 0 \tag{4.2.4}$$

koşulunu sağlayan $P(t)$ noktaları için $\dot{p}(t)$ türev vektörleri $E_k(t)$ içinde kalacaktır. $\kappa_s > 0$ $(1 \leq s \leq m)$ olduğundan $(4.2.4)$ denkleminin m tane $u_s(t)$ çözümü tek olarak belirlidir. Geriye kalan $k - m$ tanesi keyfi olarak seçilebilir. $(4.2.4)$ denklemini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $E_k(t)$ içinde $(k - m)-$boyutlu bir alt uzayı oluştururlar. Bu uzaya sırt (edge) uzayı denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir (Aydemir 1995).

$E_k(t)$ time-like alt uzay olduğundan baz vektörlerinden bir tanesi time-like vektördür. Eğer bu time-like vektör, $K_{k-m}(t)$ sırt uzayının içinde ise $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı time-like dır. Eğer bu time-like vektör $K_{k-m}(t)$ sırt uzayının dışında ise $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı space-like dır (Aydemir 1995).

Tanım 4.2.6 $K_{k-m}(t)$ nin η eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle meydana gelen yüzeye sırt regle yüzeyi denir (Aydemir 1995).

Teorem 4.2.6 $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı, time-like (space-like) uzay ise sırt regle yüzeyi time-like (space-like) regle yüzeyidir (Aydemir 1995).

Tanım 4.2.7 L^n de M time-like regle yüzeyinin teğetsel demeti $T(t)$ ve asimptotik demeti $A(t)$ olmak üzere,

$$\text{boy}\,T(t) = k + m + 1 \neq \text{boy}\,A(t)$$

olsun. Bu durumda M nin $\eta(I)$ dayanak eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü için

$$\dot{\eta}(t) \in A(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

dir. $T(t)$ nin bir ortonormal bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t)\}$$

dir. O halde $\lambda_{m+1} \neq 0$ olmak üzere

$$\dot{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i(t) + \sum_{v=1}^{m} \lambda_v a_{k+v} + \lambda_{m+1} a_{k+m+1}$$

yazılabilir. $\dot{p}(t)$ türev vektörü hesaplanırsa

$$\dot{p}(t) = \sum_{i=1}^{k} \left(\xi_i + \dot{u}_i(t) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji} u_j(t) \right) e_i(t) + \sum_{s=1}^{m} (\lambda_s + u_s(t)\kappa_s) a_{k+s} + \lambda_{m+1} a_{k+m+1}$$

bulunur.

$$\lambda_s + u_s(t)\kappa_s = 0 \qquad ; \qquad 1 \leq s \leq m$$

olacak biçimdeki $P(t)$ noktası için $\dot{p}(t)$ türev vektörleri

$$Sp\{\dot{\lambda}(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

alt uzayı içinde yatar.

$$\kappa_s > 0 \qquad ; \qquad 1 \leq s \leq m$$

olduğundan

$$\lambda_s + u_s(t)\kappa_s = 0$$

lineer denklem sisteminin $P(t)$ çözüm noktaları,

$$Sp\{\dot{\lambda}(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

içinde $(k - m) -$ boyutlu bir alt uzayı doldururlar. Bu alt uzaya M nin merkez uzayı denir ve Z_{k-m} ile gösterilir.

$E_k(t)$ bir time-like alt uzay olduğundan bir tane baz vektörü time-like'dır. Bu time-like vektör $Z_{k-m}(t)$ içinde ise merkez uzay time-like aksi halde space-like'dır.

O halde, bir M time-like regle yüzeyin merkez uzayı ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.7 M, L^n de $(k+1)-$boyutlu bir time-like regle yüzey ve teğetsel demeti de $T(t)$ olsun. Eğer boy $T(t) = k + m + 1$ ise M nin merkez uzayı time-like veya space-like'dır.

Tanım 4.2.8 Eğer M nin dayanak eğrisi olarak α ve doğrultman uzay olarak $Z_{k-m}(t)$ alınırsa; $Z_{k-m}(t)$; α boyunca hareket ederken L^n de M tarafından içerilen $(k - m + 1) -$boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M nin $(k - m + 1) -$boyutlu merkez regle yüzeyi denir.

Çalışmamız boyunca α dayanak eğrisi daima space-like kabul edildiğinden $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayı time-like ise merkez regle yüzey time-like regle yüzey, $Z_{k-m}(t)$ space-like ise merkez regle yüzey space-like regle yüzeydir.

Merkez uzay ve merkez regle yüzey ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.2.8 M, L^n de $(k + 1) -$boyutlu bir time-like regle yüzey ve $T(t)$ de M nin teğetsel demeti olsun. Eğer boy $T(t) = k + m + 1$ ise M nin bir merkez regle yüzeyi vardır ve bu merkez regle yüzey time-like veya space-like'dır.

4.3 L^n $n-$Boyutlu Lorentz Uzayında Time-like Dayanak Eğrili (Space-like Doğrultman Uzaylı) Genelleştirilmiş Time-like Regle Yüzeyler (Lorentz Regle Yüzeyler)

Tanım 4.3.1 L^n Lorentz uzayında, $0 \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to L^n \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned}$$

olacak şekilde diferensiyellenebilir bir $\alpha(I)$ time-like eğrisini gözönüne alalım ve $\alpha(I)$ ile gösterelim. $\alpha(I)$ time-like eğrisinin her $\alpha(t)$ noktasında tanımlı ortonormal vektör alan sistemi

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

ile verilsin. Bunun anlamı,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

olup e_i nin $\alpha(I)$ time-like eğrisi boyunca türevi $\dot{e}_i$ ise, bu durumda

$$\langle \dot{e}_i, e_j \rangle + \langle e_i, \dot{e}_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{e}_i, e_j \rangle = -\langle e_i, \dot{e}_j \rangle$$

elde edilir. L^n uzayının $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{\alpha(t)}(L^n)$ olmak üzere

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

cümlesi bu teğet uzayın $k-$boyutlu bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzayını $E_k(t)$ ile gösterelim. Yani

$$Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\} = E_k(t) \subset T_{\alpha(t)}(L^n)$$

dir. $\alpha(I)$ eğrisi, time-like eğri ise her $t \in I$ için $\dot{\alpha}(t)$ time-like vektördür. $\dot{\alpha}(t) \notin E_k(t)$ olduğundan $E_k(t)$ space-like alt uzaydır. $E_k(t)$ space-like uzay, $\alpha(I)$ time-like eğrisi boyunca hareket ederken L^n de $(k+1)-$boyutlu bir regle yüzey meydana getirir ve bu yüzey M ile gösterilsin. Bu durumda

$$M = \bigcup_{t \in I} E_k(t) \quad ; \quad 1 \leq k \leq n-2$$

dir. M yüzeyi için

$$\varphi(t, u_1, u_2, \ldots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i e_i(t) \qquad (4.3.1)$$

parametrizasyonu verilebilir. Bu şekilde tanımlanan M regle yüzeyine L^n uzayının $(k+1)-$boyutlu time-like dayanak eğrili (space-like doğrultman uzaylı) genelleştirilmiş time-like regle yüzeyi denir (Tosun 1995).

Tanım 4.3.2 (4.3.1) eşitliği ile tanımlanan yüzeyin $E_k(t)$ alt uzayına space-like doğrultman uzay, $\alpha(I)$ eğrisine ise yüzeyin time-like dayanak eğrisi denir.

Tanım 4.3.3 L^n de (4.3.1) ile verilen time-like dayanak eğrili M time-like regle yüzeyinin t ve u_i değişkenlerine göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t) \\
\varphi_{u_1} &= e_1(t) \\
&\vdots \\
\varphi_{u_k} &= e_k(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\{ \varphi_t, \varphi_{u_1}, \ldots, \varphi_{u_k} \right\} = \left\{ \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t), e_1(t), \ldots, e_k(t) \right\}$$

cümlesi, $(k+1)-$boyutlu yüzeyin tanımlı olabilmesi için lineer bağımsız alınacaktır.

$$Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

alt vektör uzayına M nin $E_k(t)$ ye göre *asimptotik demeti* denir ve $A(t)$ ile gösterilir. $A(t)$ nin $E_k(t)$ yi kapsayan ortonormal bazı, $0 \le m \le k$ olmak üzere

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

olarak alalım. O halde, boy $A(t) = k + m$ dir (Tosun 1995).

Tanım 4.3.4

$$Sp\,\{\dot{\alpha}(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t)\}$$

alt vektör uzayına M nin $E_k(t)$ ye göre *teğetsel demeti* denir ve $T(t)$ ile gösterilir.

boy $A(t) = k + m$ alınırsa boy $T(t) = k + m$ veya boy $T(t) = k + m + 1$ dir: boy $T(t) = k + m$ ise boy $A(t) =$ boy $T(t)$ olup bu durumda M time-like regle yüzeyinin sırt uzayı vardır. $\dot{\alpha}(t) \in T(t)$ olduğundan $\dot{\alpha}(t) \in A(t)$ dir. boy $T(t) = k + m + 1$ ise boy $A(t) \neq$ boy $T(t)$ olduğundan M time-like regle yüzeyinin merkez uzayı vardır. Ayrıca $\dot{\alpha}(t)$ time-like vektörü için $\dot{\alpha}(t)$ nin ortonormalleştirilmesiyle elde edilen vektör

a_{k+m+1} olup $T(t)$ nin ortonormal bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), ..., a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t)\}$$

şeklinde olacaktır.

M regle yüzeyinin

$$P(t) = \varphi(t, u_1, u_2, ..., u_k)$$

noktası alındığında, P noktasındaki tanjant uzayının bir bazı

$$\left\{\varphi_t, \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}, ..., \varphi_{u_k}\right\}$$

lineer bağımsız vektörler cümlesidir. t sabit tutularak u_i ler değiştirilirse, P noktası $E_k(t)$ uzayını tarayacaktır. Buna göre $T(t)$ teğetsel demeti, $E_k(t)$ uzayının tüm P noktalarındaki tanjant uzaylarının birleşimini kapsayacaktır. Yani

$$T(t) = \bigcup T_P(E_k(t))$$

dir (Tosun 1995).

Teorem 4.3.1 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayının $(k+1)-$boyutlu time-like dayanak eğrili time-like regle yüzeyi M ve M nin teğetsel demeti $T(t)$ ise $T(t)$ teğetsel demeti daima time-like alt uzaydır (Tosun 1995).

İspat: İspatı bir başka yoldan yapabiliriz. boy $T(t) = k + m$ olsun. Bu durumda

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), ..., a_{k+m}(t)\}$$

hem asimptotik hem de teğetsel demetin ortonormal bir bazıdır. Yani $A(t) = T(t)$ dir. $\dot{\alpha}(t) \in T(t)$ ve time-like vektör $E_k(t)$ space-like alt uzay olduğundan $1 \leq i \leq m$ için a_{k+i} baz vektörleri arasında

$$\langle a_{k+i}, a_{k+i}\rangle = -1 < 0$$

olacak şekilde bir tek time-like vektör vardır. O halde

$$T(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), ..., a_{k+m}(t)\}$$

L^n de time-like alt uzaydır.

boy $T(t) = k + m + 1$ olsun. Bu durumda $\alpha(I)$ dayanak eğrisinin $\dot{\alpha}(t)$ hız vektörü ise

$$\dot{\alpha}(t) \notin Sp\,\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), ..., a_{k+m}(t)\}$$

dir. Böylece $T(t)$ nin ortonormal bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), ..., a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t)\}$$

şeklindedir. Burada a_{k+m+1}, $\dot{\alpha}(t)$ time-like vektörünün ortonormalleştirilmesi ile elde edilen time-like vektördür. Bu durumda

$$T(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), ..., a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t)\}$$

teğetsel demeti L^n de time-like alt uzaydır.

Teorem 4.3.2 L_1^n $n-$boyutlu Lorentz uzayının $(k+1)-$boyutlu time-like dayanak eğrili (space-like doğrultman uzaylı) time-like regle yüzeyi M, teğetsel demeti $T(t)$ olmak üzere $A(t)$ asimptotik demeti,

i. boy $A(t) =$ boy $T(t) = k + m$ ise time-like

ii. boy $A(t) \neq$ boy $T(t) = k + m + 1$ ise space-like

alt uzaydır (Tosun 1995).

Ispat: Ispatı bir başka yoldan verebiliriz. Eğer, boy $A(t) =$ boy $T(t) = k + m$ ise

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), ..., a_{k+m}(t)\}$$

hem $A(t)$ asimptotik demetinin hem de $T(t)$ teğetsel demetinin ortonormal bir bazıdır.

$T(t)$ teğetsel demeti ile $A(t)$ asimptotik demeti aynıdır. $T(t)$, Teorem 4.3.1 den dolayı time-like olduğundan $A(t)$ de time-like dır. Fakat boy $A(t) \neq$ boy $T(t) = k + m + 1$ olduğunda ise

$$\xi \in Sp\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

ve $T(t)$ nin ortonormal bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t)\}$$

olup time-like olan a_{k+m+1} vektörü, $\xi(t)$ time-like vektörünün ortonormalleştirilmesi ile elde edilmiştir. Lorentz uzayında ind $q = 1$ dir. Yani baz vektörlerinden bir tanesi time-like dır. O halde $A(t)$ asimptotik demeti, space-like alt uzaydır.

Teorem 4.3.3 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında $(k+1)-$boyutlu time-like regle yüzey M ve M nin space-like doğrultman uzayı $E_k(t)$ olsun. $t_0 \in I$ için

$$\{e_1(t_0), e_2(t_0), \ldots, e_k(t_0)\}$$

cümlesi $E_k(t)$ nin ortonormal bir bazı ise $t_0 \in J \subset I$ olacak şekilde öyle bir $J \subset I$ alt aralığı bulunabilir ki, bu aralıkta $E_k(t)$ nin her $t \in J$ için

$$\left\langle \dot{\bar{e}}_i, \bar{e}_j \right\rangle = 0 \qquad ; \quad 1 \leq i, j \leq k$$

şartını sağlayan

$$\{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), \ldots, \bar{e}_k(t)\}$$

ortonormal bazı tek türlü bulunabilir (Tosun 1995).

$1 \leq i \leq k$ olmak üzere $\{e_i(t_0)\}$ ortonormal baz ise $\left\langle \dot{\bar{e}}_i, \bar{e}_j \right\rangle = 0$ olacak şekilde $t_0 \in J \subset I$ alt aralığında $\{\bar{e}_i(t)\}$ ortonormal bazı bulunabilir (Tosun 1995).

Ispat: Ispatı değişik yoldan yapalım. $1 \leq i \leq k$ olmak üzere $\{e_i(t)\}$ ortonormal bazı için

$$\langle e_i , e_j \rangle = \delta_{ij}$$

idi. Kabul edelim ki, a_{jh} $(1 \leq j, h \leq k)$ fonksiyonları

$$\dot{a}_{jh} + \sum_{i=1} a_{ji} \langle \dot{e}_i , e_h \rangle = 0$$

diferensiyel denklem sisteminin çözümleri olsunlar. Ayrıca

$$\tilde{e}_j = \sum_{i=1} a_{ji} e_i$$

olsun. Bu durumda

$$\dot{\tilde{e}}_j = \sum_{i=1} \dot{a}_{ji} e_i + \sum_{i=1} a_{ji} \dot{e}_i$$

olup e_h ile çarpılırsa ve kabulümüzden

$$\begin{aligned} \left\langle \dot{\tilde{e}}_j , e_h \right\rangle &= \sum_{i=1} \dot{a}_{ji} \langle e_i , e_h \rangle + \sum_{i=1} a_{ji} \langle \dot{e}_i , e_h \rangle \\ &= \dot{a}_{jh} + \sum_{i=1} a_{ji} \langle \dot{e}_i , e_h \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

dır. Diğer taraftan

$$\left\langle \dot{\tilde{e}}_j , \tilde{e}_s \right\rangle = \left\langle \dot{\tilde{e}}_j , \sum_{h=1} a_{sh} e_h \right\rangle = \sum_{h=1} a_{sh} \langle \dot{\tilde{e}}_j , e_h \rangle$$

olup (4:3:2) den

$$\left\langle \dot{\tilde{e}}_j , \tilde{e}_s \right\rangle = 0$$

dır. Ayrıca,

$$\langle \tilde{e}_j , \tilde{e}_i \rangle' = \left\langle \dot{\tilde{e}}_j , e_i \right\rangle + \left\langle \tilde{e}_j , \dot{\tilde{e}}_i \right\rangle = 0$$

olduğundan $\langle \bar{e}_j, \bar{e}_i \rangle$ skalar çarpımı sabittir. Eğer

$$\dot{a}_{jh} + \sum_{i=1} a_{ji} \langle \dot{e}_i, e_h \rangle = 0$$

sisteminin çözümleri, belli bir t_0 başlangıç değerinde $[a_{jh}(t_0)]$ matrisini ortogonal yapacak şekilde alınırsa; $\{\bar{e}_j(t_0)\}$ $(0 \leq j \leq k)$ bazı, t_0 değerinde ortogonal olduğu için her t değeri için de ortogonal olacaktır. Yani

$$\begin{aligned} \langle \bar{e}_j, \bar{e}_s \rangle &= \left\langle \sum_{i=1} a_{ji} e_i, \sum_{t=1} a_{st} e_t \right\rangle \\ &= \sum_{i=1} a_{ji} a_{si} \\ &= \delta_{js} \end{aligned}$$

bağıntısını sağlar. Bu halde, $E_k(t)$ nin

$$\left\langle \dot{\bar{e}}_j, \bar{e}_s \right\rangle = 0 \quad ; \quad 1 \leq j, s \leq k$$

olacak şekilde ortonormal bazı tek türlü olarak belirlidir.

Teorem 4.3.4 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili regle yüzey M, M nin space-like doğrultman uzayı $E_k(t)$ ve teğetsel demeti $T(t)$ olsun. $E_k(t)$ doğrultman uzayının ortonormal bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_m(t), e_{m+1}(t), ..., e_k(t)\}$$

olsun. Bu takdirde, boy $T(t) = k + m$ ise $J \subset I$ açık aralığında

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_m(t)\}$$

ortonormal sistemi için

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0 \quad ; \quad 1 \leq i, j \leq m \quad ; \quad i \neq j$$

olup

$$\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle > \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle > \ldots > \langle \bar{e}_{s-1}, \bar{e}_{s-1} \rangle > \langle \bar{e}_{s+1}, \bar{e}_{s+1} \rangle > \ldots > \langle \bar{e}_m, \bar{e}_m \rangle > 0$$

ve

$$\langle \bar{e}_s, \bar{e}_s \rangle < 0 \quad ; \quad 1 \leq s \leq m$$

olacak şekilde bulunur. Burada

$$\bar{e}_i = \underline{e}_i - \sum_{s=1} e_s \langle \underline{e}_i, e_s \rangle$$

dir (Tosun 1995).

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t), e_{m+1}(t), e_{m+2}(t), \ldots, e_k(t)\}$$

ortonormal space-like baz sisteminin içinden

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t)\}$$

ortonormal sistemini alalım.

$$\{\underline{e}_1(t), \underline{e}_2(t), \ldots, \underline{e}_m(t)\}$$

türevlerini aldıktan sonra her bir türev vektörünü Gram-Schmidt metodu ile ortogonalleştirerek

$$\{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), \ldots, \bar{e}_m(t)\}$$

şeklinde bir tek time-like vektörü içeren yeni bir time-like ortonormal baz sistemi elde edilebilir. Yani $\bar{e}_s(t) \in \{\bar{e}_i(t)\}$ olacak şekilde bir tek $\bar{e}_s(t)$ time-like vektörü vardır.

$$\begin{aligned} T(t) &= A(t) = \{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \underline{e}_1(t), \underline{e}_2(t), \ldots, \underline{e}_s(t), \ldots, \underline{e}_m(t)\} \\ \text{boy } T(t) &= k + m = \text{boy } A(t) \end{aligned}$$

olduğundan $T(t)$ ve $A(t)$ time-like'dır.

Teorem 4.3.5 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında $(k+1)-$boyutlu time-like dayanak eğrili genelleştirilmiş time-like regle yüzey M ve teğetsel demeti $T(t)$ olsun. $0 \leq m \leq k$ ve boy $T(t) = k + m + 1$ olmak üzere,

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_m(t), e_{m+1}(t), ..., e_k(t)\}$$

ise $E_k(t)$ doğrultman uzayının ortonormal bir bazı olsun. Bu takdirde,

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_m(t)\}$$

ortonormal sistemi $J \subset I$ açık aralığında

$$\langle \dot{e}_i, \dot{e}_j \rangle = 0 \quad ; \quad 1 \leq i, j \leq m \quad ; \quad i \neq j$$

ve

$$\langle \dot{e}_1, \dot{e}_1 \rangle > \langle \dot{e}_2, \dot{e}_2 \rangle > ... > \langle \dot{e}_m, \dot{e}_m \rangle > 0$$

olacak şekilde seçilebilir. Burada

$$\dot{e}_j = \underline{e}_j - \sum_{i=1}^{k} e_i \langle \underline{e}_j, e_i \rangle$$

dir (Tosun 1995).

İspat: İspatı değişik bir yoldan yapalım.

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_m(t), e_{m+1}(t), e_{m+2}(t), ..., e_k(t)\}$$

ortonormal space-like baz sisteminin içinden

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_m(t)\}$$

ortonormal sistemini alalım.

$$\{\underline{e}_1(t), \underline{e}_2(t), ..., \underline{e}_m(t)\}$$

türevlerini aldıktan sonra her bir türev vektörünü Gram-Schmidt metodu ile ortogonalleştirerek

$$\{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), ..., \bar{e}_m(t)\}$$

şeklinde tüm $\bar{e}_i(t)$ ler space-like vektör olacak şekilde seçilebilir.

$$Sp\,\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), ..., \dot{e}_m(t)\}$$

space-like ve ξ time-like vektör olup boy $T(t) = k + m + 1 \neq$ boy $A(t)$ olduğundan $T(t)$ time-like ve $A(t)$ space-like dır.

Sonuç: $A(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), ..., \dot{e}_m(t)\}$ nin ortogonal bir bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), \bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), ..., \bar{e}_m(t)\}$$

dir.

Şimdi de $\dot{e}_i(t)$ türevlerini ve $E_k(t)$ nin ortonormal bazını tek olarak belirleyen önemli bir teoremi verelim.

Teorem 4.3.6 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında $(k+1)-$boyutlu time-like dayanak eğrili (space-like doğrultman uzaylı) genelleştirilmiş time-like regle yüzey M ve M nin $E_k(t)$ space-like doğrultman uzayını alalım. $\forall t \in I$ için $E_k(t)$ uzayının öyle bir

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t)\}$$

ortonormal bazı bulunabilir ki, bu baza $E_k(t)$ nin doğal taşıyıcı bazı denir.

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j + \kappa_i\, a_{k+i} \quad ; \quad 1 \leq i \leq m \leq k$$

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j \quad ; \quad m+1 \leq i \leq k$$

dir. $\kappa_1 > \kappa_2 > ... > \kappa_m > 0$ dır (Tosun 1995).

Ispat: Değişik bir yoldan ispatlayalım. boy $A(t) = k + m$ olduğunda Teorem 4.3.5

in sonucundan $A(t)$ nin Gram-Schmidt yöntemiyle elde edilebilen

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), \tilde{e}_1(t), \tilde{e}_2(t), \ldots, \tilde{e}_m(t)\} \quad ; \quad 0 \leq m \leq k$$

ortogonal bazı vardır. Yani,

$$\tilde{e}_i = \underline{e}_i - \sum_{j=1}^{k} e_j \langle \underline{e}_i, e_j \rangle$$

dir. $1 \leq i \leq m$ olmak üzere

$$\frac{\tilde{e}_i}{\|\tilde{e}_i\|} = a_{k+i}$$

alınırsa $A(t)$ nin ortonormal bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

olacaktır. Ayrıca

$$\underline{e}_i \in Sp\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

ise

$$\underline{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j + \sum_{v=1}^{m} \sigma_{iv}\, a_{k+v} \quad ; \quad 1 \leq i \leq k \tag{4.3.3}$$

dır.

$$\langle \underline{e}_i, e_j \rangle = -\langle e_i, \underline{e}_j \rangle$$

olduğundan

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$$

dir.

Şimdi de, σ_{iv} leri hesaplayalım. Burada iki durum sözkonusudur.

i. Eğer boy $A(t)$ = boy $T(t) = k + m$ ise $A(t)$ time-like alt uzaydır. Bu takdirde,

$$\langle a_{k+i}, a_{k+i}\rangle = \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & ; \ a_{k+i} \ \text{space-like birim vektör} \\ -1 & ; \ a_{k+i} \ \text{time-like birim vektör} \end{cases}$$

dür. (4.3.3) eşitliğini sağdan a_{k+v} ile çarparsak

$$\begin{aligned} \sigma_{iv} &= \varepsilon_v \langle \underline{e}_i, a_{k+v}\rangle \\ &= \varepsilon_v \frac{1}{\| \hat{e}_v \|} \langle \underline{e}_i, \hat{e}_v \rangle \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\underline{e}_i$ nin vektör değeri yerine yazılırsa

$$\sigma_{iv} = \varepsilon_v \frac{1}{\| \hat{e}_v \|} \langle \hat{e}_i, \hat{e}_v \rangle$$

elde edilir.

$1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq v \leq m$ ise $i = v$ ya da $i \neq v$ dir. $i \neq v$ için $\sigma_{iv} = 0$ ve $i = v$ için

$$\sigma_{ii} = \frac{\langle \hat{e}_i, \hat{e}_i \rangle}{\| \hat{e}_i \|} = \frac{\| \hat{e}_i \|^2}{\| \hat{e}_i \|} = \| \hat{e}_i \|$$

dir. Yukarıda elde edilen değerler (4.3.3) de yerlerine yazılırsa

$$\underline{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j + \lambda_i\, a_{k+i} \qquad ; \qquad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

$m+1 \leq i \leq k$ ve $1 \leq v \leq m \leq k$ ise daima $i \neq v$ dir. Dolayısıyla daima $\sigma_{iv} = 0$ dır. Bu değerler (4.3.3) de yerlerine yazılırsa

$$\underline{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j + \lambda_i\, a_{k+i} \qquad ; \qquad m+1 \leq i \leq k$$

bulunur.

ii. Eğer boy $A(t) \neq$ boy $T(t) = k + m + 1$ ise $A(t)$ asimptotik demeti space-like alt uzaydır. Time-like vektör yoktur. Benzer işlemlerle

$$\sigma_{iv} = \frac{1}{\| \tilde{e}_v \|} \langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_v \rangle$$

olarak bulunur.

$1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq v \leq m$ ise $i = v$ ya da $i \neq v$ dir. $i \neq v$ için $\sigma_{iv} = 0$ ve $i = v$ için

$$\sigma_{ii} = \| \tilde{e}_i \|^2 = \lambda_i$$

dir. Teorem 4.3.5 den $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_m > 0$ elde edilir. Bu değerler (4.3.3) de yerlerine yazılırsa

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j + \lambda_i a_{k+i} \quad ; \quad \lambda_i > 0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

$m + 1 \leq i \leq k$ ve $1 \leq v \leq m$ ise daima $i \neq v$ dir. Dolayısıyla daima $\sigma_{iv} = 0$ dır. Bu değerler (4.3.3) de yerlerine yazılırsa

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, e_j \quad ; \quad m + 1 \leq i \leq k$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.3.5 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında $(k + 1)-$boyutlu time-like dayanak eğrili (space-like doğrultman uzaylı) time-like regle yüzey M, M nin asimptotik demeti $A(t)$ ve teğetsel demeti $T(t)$ olsun. boy $T(t) = k + m =$ boy $A(t)$ olarak kabul edelim. Bu durumda M nin $\beta(I)$ dayanak eğrisinin $\dot{\beta}(t)$ hız vektörü ise

$$\dot{\beta}(t) \in A(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), ..., a_{k+m}(t)\}$$

dir. O halde

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i\, e_i(t) + \sum_{v=1}^{m} \beta_v\, a_{k+v}$$

dir. Bir diğer $p(t)$ dayanak eğrisi

$$p(t) = \eta(t) + \sum_{i=1} u_i(t)\, e_i(t)$$

olup türevi

$$\dot{p}(t) = \dot{\eta}(t) + \sum_{i=1} \dot{u}_i(t)\, e_i(t) + \sum_{i=1} u_i(t)\, \dot{e}_i(t)$$

dir. Burada $\dot{\eta}(t)$ ve Teorem 4.3.6 daki $\dot{e}_i(t)$ türev vektörlerinin değerleri yerlerine yazılırsa

$$\dot{p}(t) = \sum_{j=1} \left(\xi_j + \dot{u}_j(t) + \sum_{i=1} \alpha_{ij}\, u_i(t) + \sum_{i=m+1} \alpha_{ij}\, u_i(t) \right) e_j(t) + \sum_{s=1} (\eta_s + u_s(t)\, \kappa_s)\, a_{k+s}$$

bulunur.

$$\eta_s + u_s(t)\, \kappa_s = 0 \qquad ; \qquad 1 \leq s \leq m$$

koşulunu sağlayan P noktaları için $\dot{p}(t)$ türev vektörleri $E_k(t)$ uzayı içinde kalacaktır. $\kappa_s > 0$ ($\kappa_s \neq 0$) olduğundan

$$u_s(t) = -\frac{\eta_s}{\kappa_s}$$

değişkenleri m tane olup tek türlü olarak bulunabilirler. Geriye kalan $k - m$ tanesi keyfi olarak seçilebilir. O halde

$$\eta_s + u_s(t)\, \kappa_s = 0$$

denklemini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $E_k(t)$ içinde $(k - m) -$ boyutlu bir alt uzayı oluştururlar. Bu uzaya sırt (edge) uzayı denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir. $k = m$ ise K_0 uzayı $0 -$ boyutlu nokta uzayıdır (Tosun 1995).

Tanım 4.3.6 Eğer $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı doğrultman uzayı ve M nin $\eta(I)$ dayanak eğrisi, dayanak eğrisi olarak alınırsa $K_{k-m}(t)$ uzayı $\eta(I)$ eğrisi boyunca hareket ederken M tarafından içerilen $(k - m + 1) -$ boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M nin $(k - m + 1) -$ boyutlu **sırt regle yüzeyi** denir (Tosun 1995).

Sırt uzayı space-like alt uzaydır. Sırt regle yüzeyi time-like regle yüzeydir.

Şimdi de sırt uzay ve sırt regle yüzey ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.3.7 L^n de time-like regle yüzey M, M nin teğetsel demeti $T(t)$ ve asimptotik demeti $A(t)$ olsun. boy $T(t) = k + m =$ boy $A(t)$ ise M nin sırt uzayı (sırt regle yüzeyi) vardır denir. $k = m$ ise sırt regle yüzeyi M nin sırt eğrisine dejenere olur (Çalışkan 1983).

Ispat: Değişik yoldan ispatı yapabiliriz. boy $T(t) =$ boy $A(t)$ ise Tanım 4.3.4 den sırt uzay vardır.

$k = m$ ise K_0 sırt uzayı nokta uzayı olur.

$(k - m + 1) = (0 + 1) -$ boyutlu eğri meydana gelir.

$E_k(t)$ doğrultman uzayı bir space-like alt uzay olduğundan baz vektörlerinin hepsi space-like vektördür. O halde $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı bir space-like alt uzaydır. $K_{k-m}(t)$ space-like, η time-like olduğundan sırt regle yüzeyi time-like regle yüzeydir.

Tanım 4.3.7 L^n de M time-like regle yüzeyinin teğetsel demeti $T(t)$ ve asimptotik demeti $A(t)$ olmak üzere

$$\text{boy}T(t) = k + m + 1 \neq \text{boy}A(t)$$

olsun. Bu durumda M nin $\eta(I)$ dayanak eğrisinin $\dot{\eta}(t)$ hız vektörü için

$$\dot{\eta}(t) \in A(t) = Sp\,\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$$

dir. $T(t)$ nin bir ortonormal bazı

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \ldots, a_{k+m}(t), a_{k+m+1}(t)\}$$

dir. O halde $\eta_{m+1} \neq 0$ olmak üzere

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i(t) + \sum_{v=1}^{m} \eta_v a_{k+v} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

yazılabilir. $\dot{p}(t)$ türev vektörü hesaplanırsa

$$\dot{p}(t) = \sum_{i=1}^{k}\left(\xi_i + \dot{u}_i(t) + \sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\, u_j(t)\right) e_i(t) + \sum_{s=1}^{m}\left(\eta_s + u_s(t)\,\kappa_s\right) a_{k+s} + \eta_{m+1}\, a_{k+m+1}$$

bulunur.

$$\eta_s + u_s(t)\,\kappa_s = 0 \qquad ; \qquad 1 \leq s \leq m$$

olacak biçimdeki $P(t)$ noktası için $\dot{p}(t)$ türev vektörü

$$Sp\,\{\dot{\eta}(t); e_1(t); e_2(t); \ldots; e_k(t)\}$$

alt uzayı içinde yatar.

$$\kappa_s > 0 \qquad ; \qquad 1 \leq s \leq m$$

olduğundan

$$\eta_s + u_s(t)\,\kappa_s = 0$$

lineer denklem sistemi ile tanımlanan $P(t)$ noktaları,

$$Sp\,\{\dot{\eta}(t); e_1(t); e_2(t); \ldots; e_k(t)\}$$

içinde $(k - m) -$ boyutlu bir alt uzayı doldururlar. Bu alt uzaya M nin merkez uzayı denir ve Z_{k-m} ile gösterilir. $k = m$ ise Z_0 uzayı $0 -$ boyutlu nokta uzayı olur.

Tanım 4.3.8 Eğer dayanak eğrisi olarak η ve doğrultman uzay olarak $Z_{k-m}(t)$ alınırsa; $Z_{k-m}(t)$; η boyunca hareket ederken R^n_1 de M tarafından içerilen $(k - m + 1) -$ boyutlu bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M nin merkez regle yüzeyi denir (Tosun 1995).

Merkez uzay space-like alt uzaydır. Merkez regle yüzeyi time-like regle yüzeydir.

Merkez uzay ve merkez regle yüzey ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.3.8 L^n de time-like regle yüzey M, M nin teğetsel demeti $T(t)$ ve asimptotik demeti $A(t)$ olsun. $\text{boy}\ T(t) = k + m + 1 \neq \text{boy}\ A(t)$ ise M nin merkez uzayı dolayısıyla merkez yüzeyi vardır. $k = m$ ise merkez regle yüzeyi M nin striksiyon eğrisine dejenere olur (Çalışkan 1983).

Ispat: Bir başka türlü ispat verelim. $\text{boy}\ T(t) = k + m + 1 \neq \text{boy}\ A(t)$ ise Tanım 4.3.4 den merkez uzay vardır.

$k = m$ ise Z_0 merkez uzayı $0-$boyutlu nokta uzayı olur.

$(k - m + 1) = 1-$boyutlu striksiyon eğrisidir.

$E_k(t)$ space-like doğrultman uzay olduğundan tüm baz vektörleri space-like vektördür. O halde $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı bir space-like alt uzaydır. α time-like eğri olduğundan merkez regle yüzeyi de time-like yüzeydir.

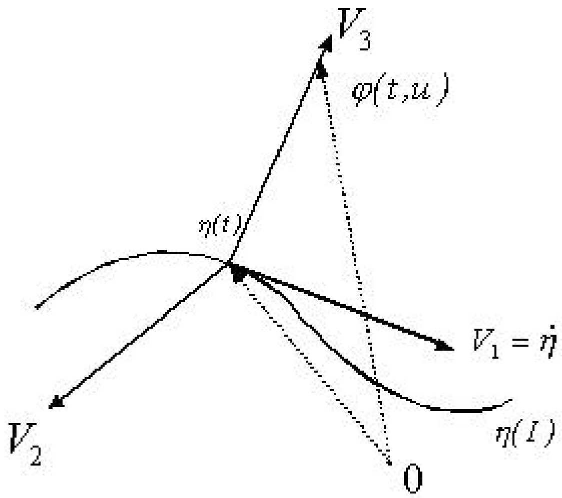
5. ÖKLID UZAYINDA B-SCROLL'LAR

5.1 3-Boyutlu Öklid Uzayında B-Scroll'lar

Tanım 5.1.1 $\eta(I)$ eğrisinin yay parametresi t olmak üzere $\{V_1; V_2; V_3\}$ Frenet 3-ayaklısı için V_1 teğet vektör, V_2 asli normal vektör ve V_3 binormal vektördür. $\eta(I)$ eğrisi boyunca V_3 binormal vektörü tarafından üretilen regle yüzeye B-scroll (binormal scroll) denir. $\eta(I)$ dayanak eğrisi ve $Sp\{V_3\}$ doğrultman uzayı olmak üzere özel bir regle yüzey olan B-scroll'un denklemi

$$\varphi(t;u) = \eta(t) + uV_3(t) \tag{5.1.1}$$

dir (Inoguchi 2005).



Şekil 5.1 E^3 de B-scroll

Teorem 5.1.1 E^3 de k_1 ve k_2 sırasıyla 1. ve 2. eğrilikler olmak üzere Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= k_1V_2 \\ \dot{V}_2 &= -k_1V_1 + k_2V_3 \\ \dot{V}_3 &= -k_2V_2 \end{aligned}$$

dir (Hacısalihoğlu 1994).

Tan¬m 5.1.2 E^3 de vektörel çarp¬m,

$$V_1 \wedge V_2 = V_3$$
$$V_2 \wedge V_3 = V_1$$
$$V_3 \wedge V_1 = V_2$$

olmak üzere $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1; y_2; y_3)$ için

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \det \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tan¬mlan¬r.

Tan¬m 5.1.3 E^3 de (5:1:1) ile parametrize edilen B ¡ scroll'un $\varphi(t; u)$ noktas¬ndaki tanjant uzay¬n¬n baz vektörleri

$$\varphi_t = \alpha' + u V_3'$$
$$\varphi_t = V_1 - u k_2 V_2$$
$$\varphi_u = V_3$$

şeklindedir. Bu durumda B ¡ scroll'un asimptotik demeti

$$A(t) = Sp\left\{V_3; V_3'\right\}$$

ile tan¬mlan¬r ve $A(t)$ nin ortonormal baz¬ $\{V_2; V_3\}$, te§etsel demeti

$$T(t) = Sp\left\{V_3; V_3'; \alpha'\right\}$$

ile tan¬mlan¬r ve $T(t)$ nin ortonormal baz¬ $\{V_1; V_2; V_3\}$ şeklindedir.

Tan¬m 5.1.4 E^3 de (5:1:1) ile parametrize edilen B ¡ scroll'un, $A(t)$ ile $T(t)$ nin boyutlar¬ farkl¬ oldu§undan merkez uzay¬ (bo§az e§risi, striksiyon e§risi) vard¬r. M üzerinde $p(t)$ herhangi bir dayanak eğrisi olsun. Denklemi

$$p(t) = \alpha(t) + u(t)V_3(t)$$

ise

$$\begin{aligned} \dot p(t) &= \dot\alpha + \dot u V_3 + u\dot V_3 \\ &= V_1 + \dot u V_3 - u k_2 V_2 \end{aligned}$$

dir.

$$\left(\dot p(t), \frac{d}{dt}[u(t)V_3(t)] \right) = 0$$

şartını sağlayan u lar merkez uzayını verirler.

$$\left\langle V_1 + \dot u V_3 - u k_2 V_2, \dot u V_3 + u \dot V_3 \right\rangle = 0$$

ise

$$\begin{aligned} \langle V_1 + \dot u V_3 - u k_2 V_2, \dot u V_3 - u k_2 V_2 \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot u^2 + (u^2 k_2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \dot u = 0 \text{ ise } u \text{ sabit} \\ &\Rightarrow \quad u^2 k_2 \text{ ise } u = 0 \text{ veya } k_2 = 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan $u = 0$ ise merkez uzayı (striksiyon eğrisi), $\alpha(I)$ dayanak eğrisinin kendisidir. $k_2 = 0$ ise striksiyon eğrisi burulmasız bir eğridir. Uzay eğrisi değildir, düzlemseldir.

Tanım 5.1.5 E^3 de M yüzeyi, (5.1.1) ile parametrize edilmek üzere

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \dot\alpha + u \dot V_3 \\ \varphi_t &= V_1 - u k_2 V_2 \ \Rightarrow \ \vec{\ }_t = \frac{V_1 - u k_2 V_2}{\|\varphi_t\|} \end{aligned}$$

olur.

$$\|\varphi_t\| = [\langle V_1 - u k_2 V_2, V_1 - u k_2 V_2 \rangle]^{\frac{1}{2}} = \left(u^2 k_2^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olup buradan

$$\vec{\varphi}_t = \frac{V_1 - uk_2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ve} \quad \vec{\varphi}_u = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|} = \varphi_u = V_3$$

dir.

$$\langle \vec{\varphi}_t, \vec{\varphi}_u \rangle = 0$$

olduğundan $\{\vec{\varphi}_t, \vec{\varphi}_u\}$ ortonormal teğet vektör alanlarıdır ve bunlar $\chi(M)$ yi gerer. Yani $\chi(M) = Sp\{\vec{\varphi}_t, \vec{\varphi}_u\}$ dur. Bu durumda B $-$ scroll'un normali

$$N = \frac{\vec{\varphi}_t \wedge \vec{\varphi}_u}{\|\vec{\varphi}_t \wedge \vec{\varphi}_u\|}$$

dir.

$$N = \det\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ \frac{1}{(-1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{-uk_2}{(-1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \|\vec{\varphi}_t \wedge \vec{\varphi}_u\| = 1$$

$$= \frac{-uk_2V_1}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{-V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

olduğundan

$$N = \frac{-uk_2V_1 - V_2}{(1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

bulunur.

Tanım 5.1.6 E^3 de yüzeyin normalinden yararlanarak S şekil operatörüne karşılık gelen $\hat{S}$ matrisini bulalım.

$$S(\vec{\varphi}_t) = \lambda_1\vec{\varphi}_t + \lambda_2\vec{\varphi}_u \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \langle S(\vec{\varphi}_t), \vec{\varphi}_t\rangle$$
$$\Rightarrow\; \lambda_2 = \langle S(\vec{\varphi}_t), \vec{\varphi}_u\rangle$$

$$S(\vec{\varphi}_u) = \mu_1\vec{\varphi}_t + \mu_2\vec{\varphi}_u \;\Rightarrow\; \mu_1 = \langle S(\vec{\varphi}_u), \vec{\varphi}_t\rangle$$
$$\Rightarrow\; \mu_2 = \langle S(\vec{\varphi}_u), \vec{\varphi}_u\rangle$$

dir. Şimdi

$$S(\vec{\varphi}_t) = D_{\vec{\varphi}_t} N = D_{\frac{\varphi_t}{\Vert\varphi_t\Vert}} N = \frac{1}{\Vert\varphi_t\Vert} D_{\varphi_t} N = \frac{1}{\Vert\varphi_t\Vert} S(\varphi_t) = \frac{1}{\Vert\varphi_t\Vert}\frac{\partial N}{\partial t}$$

eşitliğinden $S(\vec{\varphi}_t)$ yi hesaplayalım.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\left(-uk_2'V_1 - uk_2V_1' - V_2'\right)(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}} + (uk_2V_1+V_2)\frac{2u^2k_2k_2'}{2\left(u^2k_2^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}}{u^2k_2^2+1}$$

$$= \frac{\left(-uk_2'V_1 - uk_1k_2V_2 + k_1V_1 - k_2V_3\right)(u^2k_2^2+1) + \left(u^3k_2'k_2^2V_1 + u^2k_2k_2'V_2\right)}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left[\left(k_1 - uk_2'\right)(u^2k_2^2+1) + u^3k_2^2k_2'\right]V_1}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\left[(u^2k_2^2+1)(-uk_1k_2) + u^2k_2k_2'\right]V_2 - (u^2k_2^3+k_2)V_3}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(k_1 - uk_2' + u^2k_1k_2^2\right)V_1 + \left(u^2k_2k_2' - uk_1k_2 - u^3k_1k_2^3\right)V_2 - (u^2k_2^3+k_2)V_3}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$S(\vec{\varphi}_t) = \frac{1}{\Vert\varphi_t\Vert}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial N}{\partial t}$$

olduğundan

$$S(\vec{\varphi}_t) = \frac{\left(k_1 - uk_2' + u^2k_1k_2^2\right)V_1 + \left(u^2k_2k_2' - uk_1k_2 - u^3k_1k_2^3\right)V_2 - (u^2k_2^3+k_2)V_3}{(u^2k_2^2-1)^2}$$

bulunur. İlk olarak λ_1 ve λ_2 değerlerini hesaplayalım.

$$\lambda_1 = \langle S(\vec{\varphi}_t), \vec{\varphi}_t\rangle = \left\langle S(\vec{\varphi}_t), \frac{V_1 - uk_2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right\rangle$$

$$= \frac{\left(k_1 - uk_2' - u^2k_1k_2^2\right) + \left(u^2k_2k_2' - uk_1k_2 - u^3k_1k_2^3\right)(-uk_2)}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{k_1 - uk_2 + 2u^2k_1k_2^2 - u^3k_2^2k_2 + u^4k_1k_2^4}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

olduğundan

$$\kappa_1 = \frac{k_1 - uk_2 + u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \langle S(\vec{t}), \vec{u}\rangle \\ &= \frac{-(k_2 + u^2k_2^3)}{(u^2k_2^2+1)^2} = \frac{-k_2(u^2k_2^2+1)}{(u^2k_2^2+1)^2}\end{aligned}$$

olup buradan

$$\kappa_2 = \frac{-k_2}{u^2k_2^2+1}$$

bulunur. $S(\vec{u}) = S(\varphi_u) = \dfrac{\partial N}{\partial u}$ idi. O halde

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial u} &= \frac{-k_2V_1\sqrt{u^2k_2^2+1} + (uk_2V_1+V_2)\sqrt{u^2k_2^2+1}}{u^2k_2^2+1} \\ &= \frac{-k_2(u^2k_2^2+1)V_1 + (uk_2V_1+V_2)uk_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(-k_2 - u^2k_2^3 + u^2k_2^3)V_1 + uk_2^2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

olup

$$S(\vec{u}) = \frac{-k_2V_1 + uk_2^2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \langle S(\vec{u}), \vec{t}\rangle \\ &= \frac{-k_2 - u^2k_2^3}{(u^2k_2^2+1)^2}\end{aligned}$$

ve

$$\tau_2 = \langle S(\vec{u}), \vec{u}\rangle = 0$$

olacaktır. E^3 uzayında, baz vektörlerini ortonormal aldığımızdan S şekil operatörünün $\hat{S}$ matrisi simetrik bulundu. Gerçekten de,

$$\mu_1 = \frac{-k_2}{u^2k_2^2+1} = \lambda_2$$

olup

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{k_1 - uk_2 + u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-k_2}{u^2k_2^2+1} \\ \frac{-k_2}{u^2k_2^2+1} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 5.1.7 (Gauss Eğriliği): E^3 de $B-$scroll'un K Gauss eğriliği,

$$\begin{aligned} K &= \det \hat{S} \\ &= -\frac{k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^2} \end{aligned}$$

dir. Bu ise M regle yüzeyinin herbir P noktasında $K(P) \leq 0$ teoreminin sağlandığını gösterir (Sabuncuoğlu 2001).

Tanım 5.1.8 (Ortalama Eğrilik): E^3 de $B-$scroll'un H ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned} H &= \operatorname{iz} \hat{S} \\ &= \lambda_1 = \frac{k_1 - uk_2 + u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 5.1.9 (I. Temel Form): E^3 de $B-$scroll'un I. temel formu I ile gösterilmek üzere,

$$I = \langle d\varphi, d\varphi \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi = \varphi_t dt + \varphi_u du$$

olduğundan

$$I = \langle \varphi_t , \varphi_t \rangle dtdt + 2 \langle \varphi_t , \varphi_u \rangle dtdu + \langle \varphi_u , \varphi_u \rangle dudu$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_t , \varphi_t \rangle &= \langle V_1 - uk_2V_2 , V_1 - uk_2V_2 \rangle = 1 + u^2k_2^2 \\
\langle \varphi_t , \varphi_u \rangle &= \langle V_1 - uk_2V_2 , V_3 \rangle = 0 \\
\langle \varphi_u , \varphi_t \rangle &= \langle V_3 , V_1 - uk_2V_2 \rangle = 0 \\
\langle \varphi_u , \varphi_u \rangle &= \langle V_3 , V_3 \rangle = 1
\end{aligned}$$

olup dolayısıyla

$$I = \left(u^2k_2^2 + 1 \right) dtdt + dudu$$

elde edilir ve bu kuadratik forma karşılık gelen matris

$$[I] = \begin{bmatrix} u^2k_2^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup

$$\det [I] = u^2k_2^2 + 1$$

dir.

Tanım 5.1.10 (II. Temel Form): E^3 de $B -$ scroll'un II. temel formu II ile gösterilmek üzere,

$$II = \langle S(d\varphi) , d\varphi \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi = \varphi_t dt + \varphi_u du$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
II &= \langle S(\varphi_t) dt + S(\varphi_u) du , \varphi_t dt + \varphi_u du \rangle \\
&= \langle S(\varphi_t) , \varphi_t \rangle dtdt + \langle S(\varphi_t) , \varphi_u \rangle dtdu \\
&\quad + \langle S(\varphi_u) , \varphi_t \rangle dudt + \langle S(\varphi_u) , \varphi_u \rangle dudu
\end{aligned}$$

bulunur. $\langle S(\overline{\varphi}_t) , \overline{\varphi}_t \rangle = \lambda_1$ idi. O halde

$$\left\langle \frac{S(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|}, \frac{S(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|}\right\rangle = \frac{1}{u^2k_2^2+1}\langle S(\varphi_t),\varphi_t\rangle = \lambda_1$$

olacağından

$$\langle S(\varphi_t),\varphi_t\rangle = \lambda_1\left(u^2k_2^2+1\right)$$

olur.

$$\mu_2 = \langle S(\vec{\varphi}_u), \vec{\varphi}_u\rangle = 0 = \langle S(\varphi_u),\varphi_u\rangle$$

dur.

$$\langle S(\vec{\varphi}_t),\vec{\varphi}_u\rangle = \langle S(\vec{\varphi}_u),\vec{\varphi}_t\rangle = \lambda_2 = \mu_1$$

idi. Dolayısıyla

$$\left\langle \frac{S(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|}, \frac{S(\varphi_u)}{1}\right\rangle = \frac{1}{\|\varphi_t\|}\langle S(\varphi_t),\varphi_u\rangle = \lambda_2 = \mu_1$$

eşitliğinden

$$\langle S(\varphi_t),\varphi_u\rangle = \langle S(\varphi_u),\varphi_t\rangle = \lambda_2\left(u^2k_2^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

olacaktır. Buradan

$$II = \lambda_1\left(u^2k_2^2+1\right)dtdt + 2\lambda_2\left(u^2k_2^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dtdu + 0\,dudu$$

eşitliğinde λ_1 ve λ_2 değerlerini yerlerine yazarsak

$$II = \frac{k_1 - uk_2 + u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dtdt - \frac{2k_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dtdu$$

olur ve bu II. temel forma karşılık gelen matris

$$\overline{II} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 - uk_2 + u^2k_1k_2^2}{\left(u^2k_2^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} & \frac{-k_2}{\left(u^2k_2^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{-k_2}{\left(u^2k_2^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir ve

$$\det \overline{II} = \frac{-k_2^2}{u^2k_2^2+1}$$

dir. Ayrıca Gauss eğriliği

$$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{\frac{-k_2^2}{u^2k_2^2+1}}{u^2k_2^2+1} = \frac{-k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^2}$$

olarak elde edilir.

Tanım 5.1.11 (Asimptotik Çizgiler): E^3 de B-scroll'un asimptotik çizgileri,

$$II = \langle S(d\varphi), d\varphi \rangle = 0$$

şeklinde diferensiyel denkleme sahip olan eğrilerdir. Gauss eğriliği negatif olduğundan iki tane asimptotik doğrultu, dolayısıyla iki farklı asimptotik çizgi bulunur (Sabuncuoğlu 2001).

$$II = \frac{k_1 - uk_2 + u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dtdt - \frac{2k_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dtdu = 0$$

ya da

$$\left(\frac{k_1 - uk_2 + u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dt - \frac{2k_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}du\right)dt = 0$$

şeklindedir.

i) $dt = 0 \Rightarrow t = C_1$ sabitleri için anadoğruları asimptotik çizgilerdir.

ii)

$$\frac{k_1 - uk_2 + u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dt - \frac{2k_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}du = 0$$

diferensiyel denklemine sahip olan asimptotik çizgiler de vardır.

Tanım 5.1.12 (Eğrilik Çizgileri): E^3 uzayında M yüzeyi üzerindeki bir eğrinin teğet vektör alanı T olsun. O halde $T \in \chi(M) = Sp\{\varphi_t, \varphi_u\}$ dur. T vektör alanı, şekil operatörünün S matrisinin karakteristik vektörü ise yani $ST = \lambda T$ denkleminden eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemlerini bulabiliriz.

$$d\varphi = \varphi_t dt + \varphi_u du = (V_1 - uk_2V_2)dt + V_3du$$

ve

$$T = \frac{V_1 - uk_2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dt + V_3\,du$$

olsun. Bu durumda

$$T = \frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,\varphi_t + du\,\varphi_u$$

olup matris gösterimi

$$T = \begin{bmatrix} \frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ du \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu değerleri $S T = \lambda T$ eşitliğinde yerlerine yazarsak

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda\, dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda\, du \end{bmatrix}$$

olacaktır.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dt + \lambda_2\,du &= \frac{\lambda\, dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\lambda_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dt + 0 &= \lambda\, du \end{aligned}\right\}$$

olup buradan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_1 - \lambda}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dt + \lambda_2\,du &= 0 \\ \frac{\lambda_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dt - \lambda\, du &= 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Birinci denklemi λ ile ikinci denklemi de λ_2 ile çarpar ve elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\lambda_1 - \lambda)\frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \lambda_2^2\frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} &= 0 \\ \left[\lambda(\lambda_1 - \lambda) + \lambda_2^2\right]\frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

bulunur.

i) $dt = 0 \Rightarrow t = C_1$ sabitleri için elde edilen anadoğrular eğrilik çizgileridir.

ii) $-\lambda^2 + \lambda_1\lambda + \lambda_2^2 = 0$; λ nın 2:dereceden bir denklemidir. $\Delta_\lambda = \lambda_1^2 + 4\lambda_2^2$ daima pozitif olduğundan iki farklı reel λ değeri bulunur.

$$\lambda(\lambda_1 - \lambda) + \lambda_2^2 = 0$$

ise

$$-\lambda^2 + \lambda\lambda_1 + \lambda_2^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda\lambda_1 - \lambda_2^2 = 0$$

dır. Buradan elde edilen

$$\lambda = \frac{\lambda_1 \mp \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2^2}}{2}$$

çözümlerinde λ_1 ve λ_2 değerleri yerlerine yazılırsa eğrilik çizgilerine ait diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümleri bize anadoğruların dışındaki eğrilik çizgilerini verir.

5.2 E^n $n-$Boyutlu Öklid Uzayında $p.$ Mertebeden $B-$Scroll'lar

Tanım 5.2.1 E^n de Frenet $r-$ayaklısı $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ olan bir eğri $\alpha(I)$ olsun. α nın yay parametresi t olmak üzere $p.$ mertebeden oskülatör düzlemi,

$$Sp\{V_1, V_2, \dots, V_p\} \quad ; \quad p < r$$

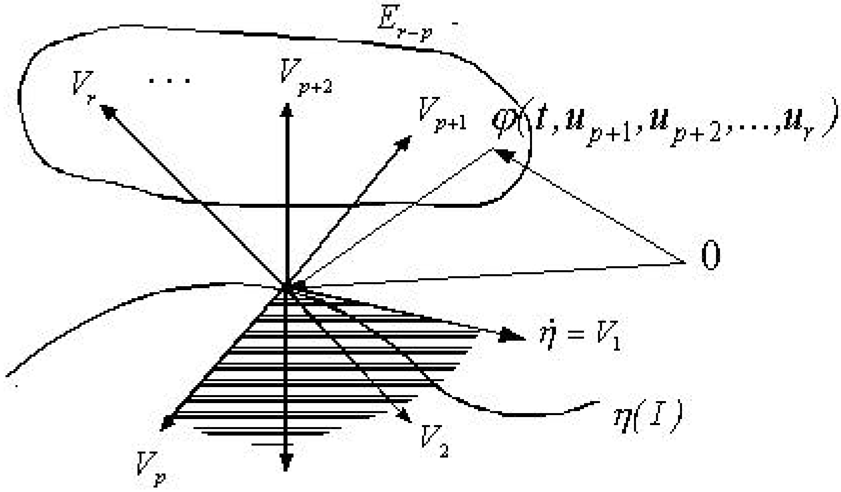
şeklindedir. Bu durumda, $p.$ mertebeden $B-$scroll'un denklemi

$$\varphi(t; u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_r) = \alpha(t) + \sum_{j=p+1}^{r} u_j V_j(t)$$

dir. $\alpha(I)$; bu regle yüzeyin dayanak eğrisidir.

$$\{V_{p+1}, V_{p+2}, \dots, V_r\}$$

tarafından gerilen $(r-p)-$boyutlu alt vektör uzayı doğrultman uzayı olup E_{r-p} ile gösterilir. $p.$ mertebeden $B-$scroll'un boyutu $(r-p)+1$ dir.



Şekil 5.2 E^n de p. mertebeden B$-$scroll'lar

Tanım 5.2.2 E^n uzayında $\dot{\eta}(t) = V_1$ olmak üzere, $\varphi(t;u_{p+1};\dots;u_r)$ noktasındaki tanjant uzayın baz vektörleri

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \dot{\eta}(t) + \sum_{j=p+1} u_j \dot{V}_j(t) = V_1 + \sum_{j=p+1} u_j \dot{V}_j(t)\\
\varphi_{u_{p+1}} &= V_{p+1}\\
\varphi_{u_{p+2}} &= V_{p+2}\\
&\vdots\\
\varphi_{u_r} &= V_r
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 5.2.3 E^n de p. mertebeden B$-$scroll'un asimptotik demeti,

$$A(t) = Sp\left\{V_{p+1};V_{p+2};\dots;V_r;\dot{V}_{p+1};\dot{V}_{p+2};\dots;\dot{V}_r\right\}$$

ile tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{p+1} &= -k_pV_p + k_{p+1}V_{p+2}\\
\dot{V}_{p+2} &= -k_{p+1}V_{p+1} + k_{p+2}V_{p+3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot V_{p+3} &= -k_{p+2}V_{p+2} + k_{p+3}V_{p+4} \\
&\ \vdots \\
\dot V_{r} &= -k_{r-1}V_{r-1}
\end{aligned}
$$

olduğundan sadece $\dot V_{p+1}$ türev vektörü $V_{p+3}, V_{p+4}, \ldots, V_r$ vektörlerinden lineer bağımsızdır. $\dot V_{p+2}, \ldots, \dot V_{r-1}$ türev vektörleri, $V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r$ vektörleri ile lineer bağımlıdırlar. O halde, $A(t)$ nin ortonormal bazı

$$\{V_p, V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r\}$$

dır. Yani

$$A(t) = Sp\{V_p, V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r\}$$

olup boy $A(t) = r + 1 - p$ dir.

$B-$scroll'un teğetsel demeti,

$$T(t) = Sp\left\{V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r, \dot V_{p+1}, \dot V_{p+2}, \ldots, \dot V_r, \dot\alpha\right\}$$

ile tanımlanır. $\dot\alpha(t) = V_1$ olduğundan $T(t)$ nin ortonormal bazı

$$\{V_1, V_p, V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r\}$$

olup boy $T(t) = r + 2 - p$ dir.

O halde, boy $A(t) \neq$ boy $T(t)$ dir. E^n uzayında $p.$ mertebeden $B-$scroll'un asimptotik demetinin boyutu ile teğetsel demetinin boyutları farklı olduğundan sırt uzayı yoktur, merkez uzayı vardır.

Tanım 5.2.4 Bir açılamaz yüzey üzerindeki iki ardışık anadoğrunun bir ortak dikmesi varsa esas anadoğru üzerindeki ortak dikmenin ayağı merkez noktası olarak adlandırılır. Bu merkez noktalarının geometrik yerine $p.$ mertebeden $B-$scroll'un merkez uzayı denir (Hacısalihoğlu 1994).

p: mertebeden B-scroll üzerinde $p(t)$ herhangi bir dayanak eğrisi olsun. O zaman denklemi,

$$p(t) = \alpha(t) + \sum_{j=p+1}^{r} u_j(t)V_j(t)$$

ise

$$\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= \dot{\alpha} + \sum_{j=p+1}^{r} \dot{u}_j V_j + \sum_{j=p+1}^{r} u_j \dot{V}_j \\
&= V_1 + \sum_{j=p+1}^{r} \dot{u}_j V_j + \sum_{j=p+1}^{r} u_j \dot{V}_j \\
&= V_1 + \sum_{j=p+1}^{r} \dot{u}_j V_j + \sum_{j=p+1}^{r-1} u_j\left(-k_{j-1}V_{j-1} + k_j V_{j+1}\right) - u_r k_{r-1} V_{r-1} \\
&= V_1 + \sum_{j=p+1}^{r} \dot{u}_j V_j - \sum_{j=p+1}^{r-1} u_j k_{j-1} V_{j-1} + \sum_{j=p+1}^{r-1} u_j k_j V_{j+1} - u_r k_{r-1} V_{r-1} \\
&= V_1 + \dot{u}_{p+1}V_{p+1} + \dot{u}_{p+2}V_{p+2} + \dot{u}_{p+3}V_{p+3} + \cdots + \dot{u}_{r-2}V_{r-2} + \dot{u}_{r-1}V_{r-1} + \dot{u}_r V_r \\
&\quad - u_{p+1}k_p V_p - u_{p+2}k_{p+1}V_{p+1} - u_{p+3}k_{p+2}V_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3}V_{p+3} - \cdots \\
&\quad - u_{r-2}k_{r-3}V_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2}V_{r-2} + u_{p+1}k_{p+1}V_{p+2} + u_{p+2}k_{p+2}V_{p+3} + \cdots \\
&\quad + u_{r-3}k_{r-3}V_{r-2} + u_{r-2}k_{r-2}V_{r-1} + u_{r-1}k_{r-1}V_r - u_r k_{r-1}V_{r-1} \\
&= V_1 - u_{p+1}k_p V_p + \left(\dot{u}_{p+1} - u_{p+2}k_{p+1}\right)V_{p+1} + \left(\dot{u}_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} - u_{p+3}k_{p+2}\right)V_{p+2} \\
&\quad + \left(\dot{u}_{p+3} + u_{p+2}k_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3}\right)V_{p+3} + \cdots + \left(\dot{u}_{r-2} + u_{r-3}k_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2}\right)V_{r-2} \\
&\quad + \left(\dot{u}_{r-1} + u_{r-2}k_{r-2} - u_r k_{r-1}\right)V_{r-1} + \left(\dot{u}_r + u_{r-1}k_{r-1}\right)V_r
\end{aligned}$$

dir. Ortogonallik koşulu ile denklemi,

$$\left\langle \dot{p}(t), \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=p+1}^{r} u_i(t)V_i(t)\right]\right\rangle = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left(-u_{p+1}k_p\right)^2 + \left(\dot{u}_{p+1} - u_{p+2}k_{p+1}\right)^2 + \left(\dot{u}_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} - u_{p+3}k_{p+2}\right)^2 \\
&+ \left(\dot{u}_{p+3} + u_{p+2}k_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3}\right)^2 + \cdots + \left(\dot{u}_{r-2} + u_{r-3}k_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2}\right)^2 \\
&+ \left(\dot{u}_{r-1} + u_{r-2}k_{r-2} - u_r k_{r-1}\right)^2 + \left(\dot{u}_r + u_{r-1}k_{r-1}\right)^2 = 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$-u_{p+1}k_p = 0$ için $k_p \neq 0$ fakat $u_{p+1} = 0$ ise dayanak eğrisi striksiyon eğrisidir. $u_{p+1} \neq 0$ ise $k_p = 0$ dır.

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_{p+1} &= k_{p+1}u_{p+2} \\
\dot{u}_{p+2} &= k_{p+2}u_{p+3} - k_{p+1}u_{p+1} \\
\dot{u}_{p+3} &= k_{p+3}u_{p+4} - k_{p+2}u_{p+2} \\
&\ \vdots \\
\dot{u}_{r-2} &= k_{r-2}u_{r-1} - k_{r-3}u_{r-3} \\
\dot{u}_{r-1} &= k_{r-1}u_{r} - k_{r-2}u_{r-2} \\
\dot{u}_{r} &= -k_{r-1}u_{r-1}
\end{aligned}
$$

olacaktır. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$
\begin{bmatrix} \dot{u}_{p+1} \\ \dot{u}_{p+2} \\ \dot{u}_{p+3} \\ \vdots \\ \dot{u}_{r-2} \\ \dot{u}_{r-1} \\ \dot{u}_{r} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & k_{p+1} & 0 & \cdots & & & 0 \\
-k_{p+1} & 0 & k_{p+2} & \ddots & & & \vdots \\
0 & -k_{p+2} & 0 & \ddots & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & 0 & k_{r-2} & 0 \\
 & & & & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\
0 & \cdots & & & 0 & -k_{r-1} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ u_{p+3} \\ \vdots \\ u_{r-2} \\ u_{r-1} \\ u_{r} \end{bmatrix}
$$

elde edilir. $n-$boyutlu Öklid uzayında merkez uzayının denklemi

$$\dot{U} - A(t)U = 0$$

homogen diferensiyel denklem sisteminin çözümleridir. Bu diferensiyel denklem sistemi Lyapunov tipindendir. Bu denklem üzerinde ise yapılan çalışmalar çoktur.

İlk olarak $(r-p) \times (r-p)$ tipindeki A matrisinin sabit bir matris olması durumunu ele alalım. Yani $k_{p+1}, k_{p+2}, \ldots, k_r$ eğrilikleri sabit olsun. Bu durumda sistemin çözümü, bileşenleri sabit büyüklükler olan vektör C olmak üzere

$$\dot{U} = C e^{mt}$$

şeklindedir. Bu çözüm denklemde yerine yazılırsa

$$mC e^{mt} = AC e^{mt} \;\Rightarrow\; (AC - mC) e^{mt} = 0$$

elde edilir. Bu denklemin aşikar çözümü dışında çözümünün olabilmesi için

$$\det(A - mI) = 0$$

olmalıdır. m ye bağlı n. dereceden karakteristik denklemin çözümlerine, karakteristik değerleri veya özdeğerleri denir. Herbir m_i özdeğeri için sıfırdan farklı C_i çözümleri yani özvektörleri bulunur.

İkinci olarak $(r - p) \times (r - p)$ tipindeki A matrisinin sabit bir matris olmaması durumunu ele alalım. Özel olarak, merkez uzayının boyutu 2 yani $r - p = 2$ ise $p = r - 2$ olup

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{p+1} \\ \dot{u}_{p+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{p+1}(t) \\ -k_{p+1}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \end{bmatrix}$$

olacağından bu denklem sisteminin çözümü

$$\int k_{p+1}(t)\, dt = K(t)$$

olmak üzere

$$u_{p+1} = c_1 \cos K(t) + c_2 \sin K(t)$$

ve

$$u_{p+2} = \frac{\dot{u}_{p+1}}{k_{p+1}}$$

olduğundan

$$u_{p+2} = \frac{-c_1 \dot{K}(t) \sin K(t) + c_2 \dot{K}(t) \cos K(t)}{k_{p+1}}$$

şeklinde bulunur. Bu çözüm, aşağıda verilen benzer durumlar için de kullanılabilir.

$$p = 2 \text{ ve } r = 4 \text{ için } \begin{bmatrix} \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_3(t) \\ -k_3(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$p = 3 \text{ ve } r = 5 \text{ için } \begin{bmatrix} \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_4(t) \\ -k_4(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\cdots$$

sistemleri benzer çözümlere sahiptir.

A matrisinin sabit bir matris olmaması durumunda özel olarak, merkez uzayının boyutu 3 yani $r - p = 3$ ise $p = r - 3$ olup

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{p+1} \\ \dot{u}_{p+2} \\ \dot{u}_{p+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{p+1} & 0 \\ -k_{p+1} & 0 & k_{p+2} \\ 0 & -k_{p+2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ u_{p+3} \end{bmatrix}$$

dir.

$$\begin{aligned} \dot{u}_{p+1} &= k_{p+1} u_{p+2} \\ \dot{u}_{p+3} &= -k_{p+2} u_{p+2} \end{aligned}$$

eşitliğinden $k_{p+2} > 0$ ise

$$\dot{u}_{p+1} + \frac{k_{p+1}}{k_{p+2}} \dot{u}_{p+3} = 0$$

olup bu denklemin çözümü

$$u_{p+1} + \frac{k_{p+1}}{k_{p+2}} u_{p+3} + c_4 = 0$$

olarak elde edilir. Bu ise u_{p+2} den bağımsızdır.

5.3 E^n n-Boyutlu Öklid Uzayında 2. Mertebeden Genelleştirilmiş B-Scroll'lar

Tanım 5.3.1 E^n n-boyutlu Öklid uzayında, Frenet n-ayaklısı $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ olan bir eğri $\alpha(I)$ olsun. α eğrisinin yay parametresi t olmak üzere 2. mertebeden oskülatör düzlemi

$$Sp\{V_1; V_2\}$$

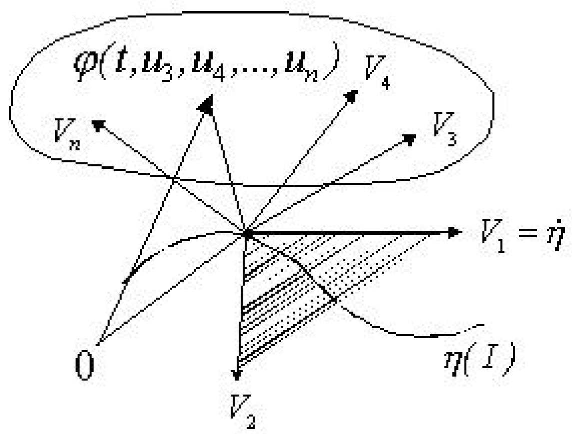
dir. O zaman,

$$\{V_3; V_4; \ldots; V_n\}$$

tarafından gerilen $(n-2)-$boyutlu alt vektör uzayını E_{n-2} ile gösterelim. $\eta(I)$ nin dayanak eğrisi olması halinde E_{n-2} nin $\eta(I)$ boyunca hareket ettirilmesi ile oluşan $(n-1)-$boyutlu regle yüzey bir hiperyüzeydir. Bu hiperyüzeye 2. mertebeden genelleştirilmiş $B-$scroll denir. E_{n-2} bu hiperyüzeyin doğrultman uzayıdır. Bu yüzey,

$$\varphi(t; u_3; u_4; \ldots; u_n) = \eta(t) + \sum_{j=3} u_j V_j(t)$$

şeklinde parametrize edilir.



Şekil 5.3 E^n de 2. mertebeden $B-$scroll

$\eta(I)$ eğrisinin Frenet $n-$ayaklısı için Frenet formülleri,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= k_1 V_2 \\
\dot{V}_2 &= -k_1 V_1 + k_2 V_3 \\
&\vdots \\
\dot{V}_j &= -k_{j-1} V_{j-1} + k_j V_{j+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$V'_n = -k_{n-1}V_{n-1}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\dot{\alpha}(t) = V_1$ olmak üzere, $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayının baz vektörleri

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= V_1 + \sum_{j=3} u_j V'_j(t) \\
\varphi_{u_3} &= V_3 \\
\varphi_{u_4} &= V_4 \\
&\vdots \\
\varphi_{u_n} &= V_n
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= V_1 + u_3 V'_3(t) + u_4 V'_4(t) + \dots + u_{n-1} V'_{n-1}(t) + u_n V'_n(t) \\
&= V_1 + u_3(-k_2V_2 + k_3V_4) + u_4(-k_3V_3 + k_4V_5) + u_5(-k_4V_4 + k_5V_6) \\
&\quad + \dots + u_{n-1}(-k_{n-2}V_{n-2} + k_{n-1}V_n) + u_n(-k_{n-1}V_{n-1}) \\
&= V_1 - u_3k_2V_2 + u_3k_3V_4 - u_4k_3V_3 + u_4k_4V_5 - u_5k_4V_4 + u_5k_5V_6 \\
&\quad + \dots - u_{n-1}k_{n-2}V_{n-2} + u_{n-1}k_{n-1}V_n - u_nk_{n-1}V_{n-1} \\
&= V_1 - u_3k_2V_2 - u_4k_3V_3 + (u_3k_3 - u_5k_4)V_4 + (u_4k_4 - u_6k_5)V_5 \\
&\quad + \dots + (u_{n-2}k_{n-2} - u_nk_{n-1})V_{n-1} + u_{n-1}k_{n-1}V_n
\end{aligned}$$

dir. Tanjant uzayın baz vektörlerini Gram-Schmidt metodu ile ortonormalleştirelim.

$$\begin{aligned}
\varphi_{u_3} &= V_3 = X_1 \\
\varphi_{u_4} &= V_4 = X_2 \\
&\vdots \\
\varphi_{u_n} &= V_n = X_{n-2} \\
\varphi_t &= X_{n-1}
\end{aligned}$$

alırsak

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}\}$$

baz vektörlerinin Gram-Schmidt metodu ile ortonormalleştirilmesinden elde edilen ortonormal vektör sistemi

$$\left\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots, \bar{E}_{n-2}, \bar{E}_{n-1}\right\}$$

olsun. Burada

$$\begin{aligned}
E_1 &= X_1 = V_3 \\
E_2 &= X_2 - \frac{\langle X_2, E_1\rangle}{\|E_1\|^2} E_1 = V_4 - \langle V_4, V_3\rangle V_3 = V_4 \\
E_3 &= X_3 - \frac{\langle X_3, E_1\rangle}{\|E_1\|^2} E_1 - \frac{\langle X_3, E_2\rangle}{\|E_2\|^2} E_2 = X_3 = V_5 \\
&\vdots \\
E_{n-2} &= X_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-3} \frac{\langle X_{n-2}, E_i\rangle}{\|E_i\|^2} E_i = X_{n-2} = V_n \\
E_{n-1} &= X_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\langle X_{n-1}, E_i\rangle}{\|E_i\|^2} E_i \quad ; \quad X_{n-1} = \varphi_t \text{ ve } \|E_i\|^2 = 1;\ 1 \le i \le n-2 \\
&= \varphi_t - \langle \varphi_t, E_1\rangle E_1 - \langle \varphi_t, E_2\rangle E_2 - \cdots - \langle \varphi_t, E_{n-2}\rangle E_{n-2} \\
&= \varphi_t - \langle \varphi_t, V_3\rangle V_3 - \langle \varphi_t, V_4\rangle V_4 - \cdots - \langle \varphi_t, V_n\rangle V_n \\
&= \varphi_t + (u_4 k_3) V_3 - (u_3 k_3 - u_5 k_4) V_4 - \cdots - (u_{n-1} k_{n-1}) V_n \\
&= V_1 - u_3 k_2 V_2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1 &= \bar{V}_3 = V_3 \\
\bar{E}_2 &= \bar{V}_4 = V_4 \\
&\vdots \\
\bar{E}_{n-2} &= \bar{V}_n = V_n \\
\bar{E}_{n-1} &= \bar{\varphi}_t = \frac{E_{n-1}}{\|E_{n-1}\|} = \frac{V_1 - u_3 k_2 V_2}{\sqrt{1 + u_3^2 k_2^2}}
\end{aligned}$$

dir. Bu şekilde, yüzeyin tanjant uzayının, ortonormal bazı cinsinden

$$Sp\left\{\mu_{u_3};\mu_{u_4};\ldots;\mu_{u_n};\mu_t\right\} = Sp\{V_3;V_4;\ldots;V_n;\mu_t\} = Sp\left\{\bar{E}_1;\bar{E}_2;\ldots;\bar{E}_{n-2};\bar{E}_{n-1}\right\}$$

olarak yazabiliriz.

Tanım 5.3.2 E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında 2. mertebeden genelleştirilmiş $B-$scroll olan M hiperyüzeyinin normali N olsun.

$$\left\{\mu_t;\mu_{u_3};\mu_{u_4};\ldots;\mu_{u_n}\right\}$$

vektör sistemi $T_M(\eta(t))$ tanjant uzayının ortonormal bir bazı ise

$$\begin{aligned} N &= \mu_t\wedge\bar{V}_3\wedge\ldots\wedge\bar{V}_n \\ &= \mu_t\wedge V_3\wedge\ldots\wedge V_n \end{aligned}$$

dir (Greub 1963). Kesim 2.3 den

$$N = \det\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & \cdots & V_{n-1} & V_n \\ \frac{1}{\sqrt{1+u_3^2k_2^2}} & \frac{-u_3k_2}{\sqrt{1+u_3^2k_2^2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= V_1\left(\frac{-u_3k_2}{\sqrt{1+u_3^2k_2^2}}\right) - V_2\left(\frac{1}{\sqrt{1+u_3^2k_2^2}}\right) = \frac{-u_3k_2V_1-V_2}{\sqrt{1+u_3^2k_2^2}}$$

dir.

Tanım 5.3.3 E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında 2. mertebeden genelleştirilmiş $B-$scroll'un şekil operatörü S ve şekil operatörünün matrisi $\bar{S}$ ise

$$
\begin{aligned}
S(\nu_t) &= \lambda_{11}\nu_t + \lambda_{12}\nu_{u_3} + \lambda_{13}\nu_{u_4} + \dots + \lambda_{1(n-1)}\nu_{u_n} \\
&= \lambda_{11}\nu_t + \lambda_{12}V_3 + \lambda_{13}V_4 + \dots + \lambda_{1(n-1)}V_n \\
S\left(\nu_{u_3}\right) &= \lambda_{21}\nu_t + \lambda_{22}\nu_{u_3} + \lambda_{23}\nu_{u_4} + \dots + \lambda_{2(n-1)}\nu_{u_n} \\
&\ \ \vdots \\
S\left(\nu_{u_n}\right) &= \lambda_{(n-1)1}\nu_t + \lambda_{(n-1)2}\nu_{u_3} + \lambda_{(n-1)3}\nu_{u_4} + \dots + \lambda_{(n-1)(n-1)}\nu_{u_n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S(\nu_t), \nu_t\rangle &= \lambda_{11} & \left\langle S\left(\nu_{u_3}\right), \nu_t\right\rangle &= \lambda_{21} \\
\left\langle S(\nu_t), \nu_{u_3}\right\rangle &= \lambda_{12} & \left\langle S\left(\nu_{u_3}\right), \nu_{u_3}\right\rangle &= \lambda_{22} \\
&\ \ \vdots & &\ \ \vdots \\
\left\langle S(\nu_t), \nu_{u_n}\right\rangle &= \lambda_{1(n-1)} & \left\langle S\left(\nu_{u_3}\right), \nu_{u_n}\right\rangle &= \lambda_{2(n-1)}
\end{aligned}
$$

olup benzer şekilde $\lambda_{31}, \dots, \lambda_{3(n-1)}, \dots, \lambda_{(n-1)1}, \dots, \lambda_{(n-1)(n-1)}$ değerleri bulunarak şekil operatörünün matrisi yazılır.

İlk olarak

$$
N = \frac{-u_3k_2V_1 - V_2}{\sqrt{1+u_3^2k_2^2}}
$$

normal vektörü için

$$
S(\nu_t) = D_{\nu_t}N = D_{\frac{\varphi_t}{\|\varphi_t\|}}N = \frac{1}{\|\varphi_t\|}D_{\varphi_t}N = \frac{1}{\|\varphi_t\|}S(\varphi_t) = \frac{1}{\|\varphi_t\|}\frac{\partial N}{\partial t}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
S(\nu_t) &= \frac{1}{\sqrt{1+u_3^2k_2^2}}\frac{dN}{dt} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+u_3^2k_2^2}} \frac{\left(-u_3k_2'V_1 - u_3k_2V_1' - V_2'\right)\sqrt{1+u_3^2k_2^2} + (u_3k_2V_1+V_2)\left(\sqrt{1+u_3^2k_2^2}\right)'}{1+u_3^2k_2^2} \\
&= \frac{\left(-u_3k_2'V_1 - u_3k_2k_1V_2 + k_1V_1 - k_2V_3\right)(1+u_3^2k_2^2) + (u_3k_2V_1+V_2)\,u_3^2k_2k_2'}{(1+u_3^2k_2^2)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{-u_3k_2'V_1 - u_3k_2k_1V_2 + k_1V_1 - k_2V_3 - u_3^3k_2^3k_1V_2 + u_3^3k_2^2k_1V_1 - u_3^2k_2^3V_3 + u_3^2k_2k_2'V_2}{(1+u_3^2k_2^2)^2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\left(k_1 - u_3 k_2 + u_3^3 k_1 k_2^2\right) V_1 + \left(u_3^2 k_2 k_2 - u_3 k_1 k_2 - u_3^3 k_1 k_2^3\right) V_2 - (u_3^2 k_2^3 + k_2) V_3}{(1 + u_3^2 k_2^2)^2}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \langle S(\mu_t), \mu_t \rangle = \left\langle S(\mu_t), \frac{V_1 - u_3 k_2 V_2}{\sqrt{1 + u_3^2 k_2^2}} \right\rangle = \frac{k_1 - u_3 k_2 + u_3^2 k_1 k_2^2}{(1 + u_3^2 k_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\lambda_{12} &= \left\langle S(\mu_t), \mu_{u_3} \right\rangle = \langle S(\mu_t), V_3 \rangle = \frac{-k_2}{1 + u_3^2 k_2^2} \\
\lambda_{13} &= \left\langle S(\mu_t), \mu_{u_4} \right\rangle = \langle S(\mu_t), V_4 \rangle = 0 \\
\lambda_{14} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{1(n-1)} &= 0
\end{aligned}$$

$$S\left(\mu_{u_3}\right) = S\left(\varphi_{u_3}\right) = \frac{\partial N}{\partial u_3} = \frac{-k_2 V_1 + u_3 k_2^2 V_2}{(1 + u_3^2 k_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\lambda_{21} &= \left\langle S\left(\mu_{u_3}\right), \mu_t \right\rangle = \frac{-k_2 - u_3^2 k_2^3}{(1 + u_3^2 k_2^2)^2} = \frac{-k_2}{1 + u_3^2 k_2^2} \Rightarrow \lambda_{21} = \lambda_{12} \\
\lambda_{22} &= \left\langle S\left(\mu_{u_3}\right), \mu_{u_3} \right\rangle = 0 \\
\lambda_{23} &= \left\langle S\left(\mu_{u_3}\right), \mu_{u_4} \right\rangle = 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{2(n-1)} &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\lambda_{(n-1)1} &= \left\langle S\left(\mu_{u_n}\right), \mu_t \right\rangle = 0 \\
\lambda_{(n-1)2} &= \left\langle S\left(\mu_{u_n}\right), \mu_{u_3} \right\rangle = 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{(n-1)(n-1)} &= 0
\end{aligned}$$

bulunursa şekil operatörünün $\bar{S}$ matrisi,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1(n-1)} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2(n-1)} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{(n-1)1} & \lambda_{(n-1)2} & & \lambda_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{k_1 - u_3 k_2 + u_3^2 k_1 k_2^2}{(1+u_3^2 k_2^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-k_2}{1+u_3^2 k_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-k_2}{1+u_3^2 k_2^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

olduğu görülür.

Tanım 5.3.4 (Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği): E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında 2. mertebeden genelleştirilmiş $B-$scroll'un Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H olmak üzere,

$$K = \det \bar{S} = 0$$

$$H = \operatorname{iz} \bar{S} = \lambda_{11} = \frac{k_1 - u_3 k_2 + u_3^2 k_1 k_2^2}{(1 + u_3^2 k_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur.

Tanım 5.3.5 (I. Temel Form): E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında 2. mertebeden genelleştirilmiş $B-$scroll'un I. temel formu I ile gösterilmek üzere

$$I = \langle d\varphi, d\varphi \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi = \varphi_t dt + \varphi_{u_3} du_3 + \ldots + \varphi_{u_n} du_n$$

olduğundan

$$I = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle dtdt + \left\langle \varphi_t, \varphi_{u_3} \right\rangle dtdu_3 + \ldots + \left\langle \varphi_t, \varphi_{u_n} \right\rangle dtdu_n$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\langle \varphi_{u_3}, \varphi_t \right\rangle du_3dt + \left\langle \varphi_{u_3}, \varphi_{u_3} \right\rangle du_3du_3 + \dots + \left\langle \varphi_{u_3}, \varphi_{u_n} \right\rangle du_3du_n \\
&\;\vdots \\
&+\left\langle \varphi_{u_n}, \varphi_t \right\rangle du_ndt + \left\langle \varphi_{u_n}, \varphi_{u_3} \right\rangle du_ndu_3 + \dots + \left\langle \varphi_{u_n}, \varphi_{u_n} \right\rangle du_ndu_n \\
= \;& dtdt + 0\,dtdu_3 + \dots + 0\,dtdu_n \\
&+0\,du_3dt + du_3du_3 + \dots + 0\,du_3du_n \\
&\;\vdots \\
&+0\,du_ndt + 0\,du_ndu_3 + \dots + du_ndu_n
\end{aligned}
$$

dır. Bu kuadratik forma karşılık gelen matris

$$
\bar{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

şeklindedir.

Tanım 5.3.6 (II. Temel Form): E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında 2. mertebeden genelleştirilmiş $B-$scroll'un II. temel formu II ile gösterilmek üzere

$$
\begin{aligned}
II \;=\;& \langle S(d\varphi), d\varphi \rangle \\
=\;& \langle S(\varphi_t), \varphi_t \rangle dtdt + \left\langle S(\varphi_t), \varphi_{u_3} \right\rangle dtdu_3 + \dots + \left\langle S(\varphi_t), \varphi_{u_n} \right\rangle dtdu_n \\
&+\left\langle S\left(\varphi_{u_3}\right), \varphi_t \right\rangle du_3dt + \left\langle S\left(\varphi_{u_3}\right), \varphi_{u_3} \right\rangle du_3du_3 + \dots + \left\langle S\left(\varphi_{u_3}\right), \varphi_{u_n} \right\rangle du_3du_n \\
&\;\vdots \\
&+\left\langle S\left(\varphi_{u_n}\right), \varphi_t \right\rangle du_ndt + \left\langle S\left(\varphi_{u_n}\right), \varphi_{u_3} \right\rangle du_ndu_3 + \dots + \left\langle S\left(\varphi_{u_n}\right), \varphi_{u_n} \right\rangle du_ndu_n \\
=\;& \frac{\kappa_1 - u_3\kappa_2 + u_3^2\kappa_1\kappa_2^2}{(1+u_3^2\kappa_2^2)^{\frac{3}{2}}} dtdt + \frac{-\kappa_2}{1+u_3^2\kappa_2^2} dtdu_3 + 0\,dtdu_4 + \dots + 0\,dtdu_n \\
&+\frac{-\kappa_2}{1+u_3^2\kappa_2^2} du_3dt + 0\,du_3du_3 + \dots + 0\,du_3du_n \\
&\;\vdots \\
&+0\,du_ndt + 0\,du_ndu_3 + \dots + 0\,du_ndu_n
\end{aligned}
$$

olduğundan bu kuadratik forma karşılık gelen matris

$$\overline{II} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 - u_3k_2 + u_3^2k_1k_2^2}{(1+u_3^2k_2^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-k_2}{1+u_3^2k_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-k_2}{1+u_3^2k_2^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Gauss eğriliği,

$$K = \frac{\det \overline{II}}{\det I} = \frac{0}{1} = 0$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Tanım 5.3.7 (Asimptotik Çizgiler): E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında 2. mertebeden genelleştirilmiş $B-$scroll'un asimptotik çizgileri,

$$II = \langle S(d\varphi), d\varphi \rangle = 0$$

olmak üzere

$$II = \frac{k_1 - u_3k_2 + u_3^2k_1k_2^2}{(1+u_3^2k_2^2)^{\frac{3}{2}}} dtdt - 2\frac{2k_2}{1+u_3^2k_2^2} dtdu_3 = 0$$

dir. Buradan asimptotik çizgilerin diferensiyel denklemleri

$$dt = 0 \qquad \text{ve} \qquad \frac{k_1 - u_3k_2 + u_3^2k_1k_2^2}{(1+u_3^2k_2^2)^{\frac{3}{2}}} - 4k_2du_3 = 0 \tag{5.3.1}$$

olur. O halde $t = c_1$ parametre eğrileri birer asimptotik çizgilerdir. Diğerleri de (5.3.1) diferensiyel denklemi ile bellidir.

Tanım 5.3.8 (Merkez Uzayı): E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında 2. mertebeden genelleştirilmiş $B-$scroll'un asimptotik demeti,

$$\begin{aligned} A(t) &= Sp\left\{V_3, V_4, \ldots, V_n, \dot{V}_3, \dot{V}_4, \ldots, \dot{V}_n\right\} \\ &= Sp\{V_2, V_3, V_4, \ldots, V_n\} \end{aligned}$$

ve teğetsel demeti

$$
\begin{aligned}
T(t) &= Sp\left\{V_3, V_4, \ldots, V_n, \dot{V}_3, \dot{V}_4, \ldots, \dot{V}_n\right\} \\
&= Sp\left\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere boy $A(t) = n - 1 \neq$ boy $T(t) = n$ olduğundan sırt uzay yoktur, merkez uzay vardır. Bu merkez uzay, $p(t)$ herhangi bir eğri olmak üzere ortogonallik koşulu olan

$$
\left\langle \dot{p}(t), \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=3}^{n} u_i(t)V_i(t)\right]\right\rangle = 0
$$

şeklindeki diferensiyel denklem sistemine sahiptir. Bu sistem ise matris biçiminde

$$
\begin{bmatrix} \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \vdots \\ \dot{u}_{n-2} \\ \dot{u}_{n-1} \\ \dot{u}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & k_3 & 0 & \cdots & & & 0 \\
-k_3 & 0 & k_4 & \ddots & & & \vdots \\
0 & -k_4 & 0 & \ddots & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & 0 & k_{n-2} & 0 \\
 & & & & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\
0 & \cdots & & & 0 & -k_{n-1} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}
$$

olarak da yazılabilir. Buradan yine,

$$
\dot{U} = AU
$$

veya

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_3 &= k_3u_4 \\
\dot{u}_4 &= -k_3u_3 + k_4u_5 \\
&\vdots \\
\dot{u}_n &= -k_{n-1}u_{n-1}
\end{aligned}
$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

6. LORENTZ UZAYINDA B-SCROLL'LAR

6.1 L^3 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Time-like Dayanak Eğrili B-Scroll'lar

Tanım 6.1.1 L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik, Lorentz metriği ise M ye time-like yüzey denir (Beem and Ehrlich 1981).

Tanım 6.1.2 t yay parametresi olmak üzere, $\alpha(I)$ time-like eğrisini alalım. $\dot{\alpha}(t) = V_1$ time-like vektör ise $\alpha(I)$ time-like eğridir. Yani $\langle V_1, V_1 \rangle = -1$ dir. $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet 3-ayaklısı için, V_2 normal vektörü ile V_3 binormal vektörü de space-like olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\langle V_2, V_2 \rangle &= \langle V_3, V_3 \rangle = 1 \\
\langle V_1, V_3 \rangle &= \langle V_2, V_3 \rangle = \langle V_1, V_2 \rangle = 0
\end{aligned}$$

olacaktır.

Tanım 6.1.3 L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

şeklinde tanımlıdır (Akutugawa and Nishikawa 1990).

$\dot{\alpha} = V_1$ time-like vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
V_1 \wedge V_2 &= V_3 \\
V_2 \wedge V_3 &= -V_1 \\
V_3 \wedge V_1 &= V_2
\end{aligned}$$

olup $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere,

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \det \begin{bmatrix} -V_1 & V_2 & V_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanır.

V_3 time-like vektör olduğunda ise

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = -\det \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & -V_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanır (Turgut 1995).

Tanım 6.1.4 (L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili B-scroll'lar ve merkez uzayı): α time-like eğrisinin yay parametresi t olmak üzere, Frenet 3-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. V_3 space-like binormal vektörü tarafından üretilen regle yüzeye B-scroll denir. $\alpha(I)$ dayanak eğrisi ve $Sp\{V_3\}$ doğrultman uzayı olmak üzere, bu B-scroll'un denklemi

$$\varphi(t, u) = \alpha(t) + uV_3(t)$$

şeklindedir.

Teorem 6.1.1 $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet 3-ayaklısı ve

$$\varepsilon_0 = \langle V_1, V_1 \rangle \quad ; \quad \varepsilon_2 = \langle V_2, V_2 \rangle \quad ; \quad \varepsilon_3 = \langle V_3, V_3 \rangle$$

olmak üzere, 3-boyutlu Lorentz uzayında Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

dir (Ekmekçi and Ilarslan 1998).

V_1 time-like vektör, V_2 ve V_3 space-like vektörler olduğundan

$$\varepsilon_0 = \langle V_1, V_1 \rangle = -1 \quad ; \quad \varepsilon_2 = \langle V_2, V_2 \rangle = 1 \quad ; \quad \varepsilon_3 = \langle V_3, V_3 \rangle = 1$$

olup

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= k_1 V_2 \\ \dot{V}_2 &= k_1 V_1 + k_2 V_3 \\ \dot{V}_3 &= -k_2 V_2 \end{aligned}$$

şeklindedir (Ekmekçi and İlarslan 1998). Bu denklemlerin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \varphi_t &= V_1 - u k_2 V_2 \\ \varphi_u &= V_3 \end{aligned}$$

olup φ_t ve φ_u yüzeyin $\eta(t)$ noktasındaki teğet uzayının sıralı baz vektörleridir. Asimptotik demeti $A(t) = Sp\{V_2, V_3\}$ ve teğetsel demeti $T(t) = Sp\{V_1, V_2, V_3\}$ dir.

Tanım 6.1.5 L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili B-scroll olan M nin asimptotik demeti ile teğetsel demetinin boyutları farklı olduğundan sırt uzayı yoktur. Merkez uzayı vardır. M üzerinde $p(t)$ herhangi bir dayanak eğrisi olsun. Denklemi

$$p(t) = \eta(t) + u(t) V_3(t)$$

ise

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \dot{\eta} + \dot{u} V_3 + u \dot{V}_3 \\ &= V_1 + \dot{u} V_3 - u k_2 V_2 \end{aligned}$$

dir.

$$\left\langle \underline{p}(t), \frac{d}{dt}[u(t)V_3(t)] \right\rangle = 0$$

şartını sağlayan u vektörleri merkez uzayının yer vektörleridir.

$$\langle V_1 + \underline{u}V_3 - uk_2V_2, \underline{u}V_3 - uk_2V_2 \rangle = 0$$

ise $\underline{u}^2 = 0$ ve $u^2k_2^2 = 0$ dır. $\underline{u} = 0$ ise u sabittir. Buradan $u = 0$ ise merkez uzayı (striksiyon eğrisi), $\alpha(I)$ dayanak eğrisinin kendisidir. $k_2 = 0$ ise striksiyon eğrisi burulmasız bir eğridir. Uzay eğrisi değildir, düzlemseldir.

Tanım 6.1.6 (L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili $B-$scroll'un normali): M yüzeyi

$$\varphi(t,u) = \alpha(t) + uV_3(t)$$

ile parametrize edilmek üzere

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \underline{\alpha} + u\underline{V}_3(t) \\
\varphi_t &= V_1 - uk_2V_2 \Rightarrow \overrightarrow{\ }_t = \frac{V_1 - uk_2V_2}{\|\varphi_t\|}
\end{aligned}$$

olur. V_1 time-like ise

$$\begin{aligned}
\|\varphi_t\| &= (\langle V_1 - uk_2V_2, V_1 - uk_2V_2 \rangle)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(-1 + u^2k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\overrightarrow{\ }_t = \frac{V_1 - uk_2V_2}{(-1 + u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{\ }_u = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|} = \varphi_u = V_3$$

dir.

$$\langle \overrightarrow{\ }_t, \overrightarrow{\ }_u \rangle = 0$$

olduğundan $\{\overrightarrow{\ }_t, \overrightarrow{\ }_u\}$ ortonormal teğet vektör alanlarıdır ve bunlar $\chi(M)$ yi gerer.

Yani $\chi(M) = Sp\{\overrightarrow{\varphi_t}, \overrightarrow{\varphi_u}\}$ dur.

$$N = \frac{\overrightarrow{\varphi_t} \wedge \overrightarrow{\varphi_u}}{\|\overrightarrow{\varphi_t} \wedge \overrightarrow{\varphi_u}\|}$$

dir.

$$N = \det\begin{bmatrix} -V_1 & V_2 & V_3 \\ \frac{1}{(-1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{-uk_2}{(-1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \|\overrightarrow{\varphi_t} \wedge \overrightarrow{\varphi_u}\| = 1$$

$$= \frac{uk_2V_1}{(-1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{V_2}{(-1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

olduğundan

$$N = \frac{uk_2V_1 - V_2}{(-1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

bulunur.

Tanım 6.1.7 (L^3 de time-like dayanak eğrili $B-$scroll'un S şekil operatörü ve karşılık gelen $\overset{1}{S}$ matrisi):

$$S(\overrightarrow{\varphi_t}) = \lambda_1\overrightarrow{\varphi_t} + \lambda_2\overrightarrow{\varphi_u} \Rightarrow \lambda_1 = \langle S(\overrightarrow{\varphi_t}), \overrightarrow{\varphi_t}\rangle$$
$$\Rightarrow \lambda_2 = \langle S(\overrightarrow{\varphi_t}), \overrightarrow{\varphi_u}\rangle$$
$$S(\overrightarrow{\varphi_u}) = \mu_1\overrightarrow{\varphi_t} + \mu_2\overrightarrow{\varphi_u} \Rightarrow \mu_1 = \langle S(\overrightarrow{\varphi_u}), \overrightarrow{\varphi_t}\rangle$$
$$\Rightarrow \mu_2 = \langle S(\overrightarrow{\varphi_u}), \overrightarrow{\varphi_u}\rangle$$

Şimdi

$$S(\overrightarrow{\varphi_t}) = D_{\overrightarrow{\varphi_t}}N = D_{\frac{\varphi_t}{\|\varphi_t\|}}N = \frac{1}{\|\varphi_t\|}D_{\varphi_t}N = \frac{1}{\|\varphi_t\|}S(\varphi_t) = \frac{1}{\|\varphi_t\|}\frac{\partial N}{\partial t}$$

eşitliğinden $S(\overrightarrow{\varphi_t})$ yi hesaplayalım. $u^2k_2^2 - 1 > 0$ ise

$$\left(u^2k_2^2(t) - 1\right)'_t = \left(u^2k_2^2(t) - 1\right)'_t = 2u^2k_2(t)k_2'(t)$$

ve

$$\sqrt{u^2k_2^2-1} = \left(u^2k_2^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$\left(\sqrt{u^2k_2^2-1}\right)' = \frac{2u^2k_2(t)k_2'(t)}{2\,(u^2k_2^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u^2k_2(t)k_2'(t)}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

dır. $u^2k_2^2-1<0$ ise

$$\left(u^2k_2^2(t)-1\right)_t' = \left(-u^2k_2^2(t)+1\right)_t' = -2u^2k_2(t)k_2'(t)$$

ve

$$\sqrt{u^2k_2^2-1} = \left(-u^2k_2^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$\left(\sqrt{u^2k_2^2-1}\right)' = \frac{-2u^2k_2(t)k_2'(t)}{2\,(-u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u^2k_2(t)k_2'(t)}{(-u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

dır. $u^2k_2^2-1>0$ olması durumundaki türev değerlerini yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{-\left(-uk_2'V_1-uk_2V_1'+V_2'\right)(u^2k_2^2-1)^{\frac{1}{2}}-(uk_2V_1-V_2)\frac{u^2k_2k_2'}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{1}{2}}}}{u^2k_2^2-1}\\
&= \frac{-\left(-uk_2'V_1-uk_1k_2V_2+k_1V_1+k_2V_3\right)(u^2k_2^2-1)-\left(u^3k_2'k_2^2V_1-u^2k_2k_2'V_2\right)}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{-\left[\left(k_1-uk_2'\right)(u^2k_2^2-1)+u^3k_2^2k_2'\right]V_1}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{3}{2}}}\\
&\quad-\frac{\left[(-u^2k_2^2+1)\,uk_1k_2-u^2k_2k_2'\right]V_2+(u^2k_2^3-k_2)\,V_3}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{-\left(-k_1+uk_2'+u^2k_1k_2^2\right)V_1-\left(-u^2k_2k_2'+uk_1k_2-u^3k_1k_2^3\right)V_2-(u^2k_2^3-k_2)\,V_3}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

ve

$$S(\overrightarrow{\;}_t) = \frac{1}{\|\,'_t\|}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial N}{\partial t}$$

olduğundan

$$S(\vec{t}) = \frac{\left(k_1 - u\dot{k}_2 - u^2k_1k_2^2\right)V_1 + \left(u^2k_2\dot{k}_2 - uk_1k_2 + u^3k_1k_2^3\right)V_2 + (k_2 - u^2k_2^3)V_3}{(u^2k_2^2 - 1)^2}$$

bulunur. İlk olarak κ_1 ve κ_2 değerlerini hesaplayalım.

$$\kappa_1 = \langle S(\vec{t}), \vec{t}\rangle = \left\langle S(\vec{t}), \frac{V_1 - uk_2V_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}\right\rangle$$

$$= \frac{-\left(k_1 - u\dot{k}_2 - u^2k_1k_2^2\right) + \left(u^2k_2\dot{k}_2 - uk_1k_2 + u^3k_1k_2^3\right)(-uk_2)}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{-k_1 + u\dot{k}_2 + 2u^2k_1k_2^2 - u^3k_2^2\dot{k}_2 - u^4k_1k_2^4}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}$$

olduğundan

$$\kappa_1 = \frac{k_1 - u\dot{k}_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak elde edilir.

$$\kappa_2 = \langle S(\vec{t}), \vec{u}\rangle$$
$$= \frac{k_2 - u^2k_2^3}{(u^2k_2^2 - 1)^2} = -\frac{k_2(u^2k_2^2 - 1)}{(u^2k_2^2 - 1)^2}$$

olup buradan

$$\kappa_2 = \frac{-k_2}{u^2k_2^2 - 1}$$

bulunur. $S(\vec{u}) = S(\varphi_u) = \dfrac{\partial N}{\partial u}$ idi. O halde

$$\frac{\partial N}{\partial u} = -\frac{-k_2V_1\sqrt{u^2k_2^2 - 1} + (uk_2V_1 - V_2)\left(\sqrt{u^2k_2^2 + 1}\right)'}{u^2k_2^2 - 1}$$

$$= -\frac{-k_2(u^2k_2^2 - 1)V_1 + (uk_2V_1 - V_2)uk_2^2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{(k_2 - u^2k_2^3 + u^2k_2^3)V_1 - uk_2^2V_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

olup

$$S(\overrightarrow{u}) = \frac{-k_2V_1 + uk_2^2V_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \langle S(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{t}\rangle \\
&= \frac{k_2 - u^2k_2^3}{(u^2k_2^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

ve

$$\mu_2 = \langle S(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{u}\rangle = 0$$

olacaktır. Ayrıca

$$\mu_1 = \frac{-k_2}{(u^2k_2^2 - 1)} = \lambda_2$$

olduğundan L^3 uzayında da S şekil operatörünün $\hat{S}$ matrisi simetriktir. O halde,

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-k_2}{u^2k_2^2-1} \\ \frac{-k_2}{u^2k_2^2-1} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 6.1.8 (Gauss Eğriliği): L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında K Gauss eğriliği; yüzeyin space-like birim normali N olmak üzere,

$$\varepsilon_1 = \langle N, N\rangle = -1$$

için

$$\begin{aligned}
K &= \varepsilon \det \hat{S} = \det \hat{S} \\
&= \frac{k_2^2}{(u^2k_2^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

dır.

Tanım 6.1.9 (Ortalama Eğrilik): L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili space-like doğrultman uzaylı $B-$scroll'un H ortalama eğriliği,

$$
\begin{aligned}
H &= \text{iz}\, S^{1} \\
&= \kappa_1 = \frac{k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

dir.

Tanım 6.1.10 (I. Temel Form): L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili space-like doğrultman uzaylı $B-$scroll'un I. temel formu I ile gösterilmek üzere,

$$
I = \langle d\varphi, d\varphi \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi = \varphi_t dt + \varphi_u du
$$

olduğundan

$$
I = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle dtdt + 2\langle \varphi_t, \varphi_u \rangle dtdu + \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle dudu
$$

olur. Burada

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle &= \langle V_1 - uk_2V_2, V_1 - uk_2V_2 \rangle = -1 + u^2k_2^2 \\
\langle \varphi_t, \varphi_u \rangle &= \langle V_1 - uk_2V_2, V_3 \rangle = 0 \\
\langle \varphi_u, \varphi_t \rangle &= \langle V_3, V_1 - uk_2V_2 \rangle = 0 \\
\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle &= \langle V_3, V_3 \rangle = 1 \quad ; \quad V_3 \ \text{space-like}
\end{aligned}
$$

olup dolayısıyla

$$
I = \left(u^2k_2^2 - 1\right) dtdt + dudu
$$

elde edilir ve bu kuadratik forma karşılık gelen matris

$$
\hat{I} = \begin{bmatrix} u^2k_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

olup

$$\det I = u^2k_2^2 - 1$$

dir.

Tanım 6.1.11 (II. Temel Form): L^3 3−boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili space-like doğrultman uzaylı B−scroll'un II. temel formu II ile gösterilmek üzere,

$$II = \langle S(d\varphi), d\varphi \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi = \varphi_t dt + \varphi_u du$$

olduğundan

$$\begin{aligned} II &= \langle S(\varphi_t)dt + S(\varphi_u)du, \varphi_t dt + \varphi_u du \rangle \\ &= \langle S(\varphi_t), \varphi_t \rangle dtdt + \langle S(\varphi_t), \varphi_u \rangle dtdu \\ &\quad + \langle S(\varphi_u), \varphi_t \rangle dudt + \langle S(\varphi_u), \varphi_u \rangle dudu \end{aligned}$$

bulunur. $\langle S(\overrightarrow{\varphi_t}), \overrightarrow{\varphi_t} \rangle = \lambda_1$ idi. O halde

$$\left\langle \frac{S(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|}, \frac{S(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|} \right\rangle = \frac{1}{u^2k_2^2 - 1} \langle S(\varphi_t), \varphi_t \rangle = \lambda_1$$

olacağından

$$\langle S(\varphi_t), \varphi_t \rangle = \lambda_1 \left(u^2k_2^2 - 1 \right)$$

olur.

$$\mu_2 = \langle S(\overrightarrow{\varphi_u}), \overrightarrow{\varphi_u} \rangle = 0 = \langle S(\varphi_u), \varphi_u \rangle$$

dur.

$$\langle S(\overrightarrow{\varphi_t}), \overrightarrow{\varphi_u} \rangle = \langle S(\overrightarrow{\varphi_u}), \overrightarrow{\varphi_t} \rangle = \lambda_2 = \mu_1$$

idi. Dolayısıyla

$$\left\langle \frac{S(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|}, \frac{S(\varphi_u)}{1} \right\rangle = \frac{1}{\|\varphi_t\|} \langle S(\varphi_t), \varphi_u \rangle = \lambda_2 = \mu_1$$

eşitliğinden

$$\langle S(\varphi_t), \varphi_u \rangle = \langle S(\varphi_u), \varphi_t \rangle = \lambda_2 \left(u^2k_2^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olacaktır. Buradan

$$II = \lambda_1 \left(u^2k_2^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} dtdt + 2\lambda_2 \left(u^2k_2^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} dtdu + 0\,dudu$$

eşitliğinde λ_1 ve λ_2 değerlerini yerlerine yazarsak

$$II = \frac{k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} dtdt + \frac{-2k_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} dtdu$$

olur ve bu II. temel forma karşılık gelen matris

$$\overline{II} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} & \frac{-k_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{-k_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir ve

$$\det \overline{II} = \frac{-k_2^2}{u^2k_2^2 - 1}$$

dir.

Tanım 6.1.12 (Asimptotik Çizgiler): L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili space-like doğrultman uzaylı $B-$scroll'un asimptotik çizgileri,

$$II = \langle S(d\varphi), d\varphi \rangle = 0$$

şeklinde diferensiyel denkleme sahip olan eğrilerdir.

$$II = \frac{k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} dtdt + \frac{-2k_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} dtdu = 0$$

ya da

$$\left(\frac{k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} dt + \frac{-2k_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} du \right) dt = 0$$

şeklindedir.

i) $dt = 0 \Rightarrow t = C_1$ sabitlerine karşılık gelen anadoğrular asimptotik çizgilerdir.

ii) Diğer asimptotik çizgiler,

$$\frac{k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}dt + \frac{-2k_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}du = 0$$

diferensiyel denklemine sahiptirler.

Tanım 6.1.13 (L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili space-like doğrultman uzaylı $B-$scroll'un eğrilik çizgileri): M yüzeyi üzerindeki bir eğrinin teğet vektör alanı T olsun. $T \in \chi(M) = Sp\{\varphi_t, \varphi_u\}$ dur. T vektör alanı, şekil operatörünün $\overset{1}{S}$ matrisinin karakteristik vektörü ise yani $\overset{1}{S}T = \lambda T$ diferensiyel denklemi eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi ise, hesaplandığında

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_t dt + \varphi_u du \\ &= (V_1 - uk_2V_2)\, dt + V_3 du \end{aligned}$$

ve

$$T = \frac{V_1 - uk_2V_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}dt + V_3\, du$$

olsun. Bu durumda

$$T = \frac{dt}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}\varphi_t + du\, \varphi_u$$

olup matris gösterimi

$$T = \begin{bmatrix} \frac{dt}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\ du \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu değerleri $\overset{1}{S}T = \lambda T$ eşitliğinde yerlerine yazarsak

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dt}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\ du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\frac{dt}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda\, du \end{bmatrix}$$

olacaktır.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}dt + \lambda_2 du &= \frac{\lambda\, dt}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\lambda_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}dt + 0 &= \lambda\, du \end{aligned}\right\}$$

olup buradan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_1 - \lambda}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}dt + \lambda_2 du = 0 \\ \frac{\lambda_2}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}dt - \lambda du = 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Birinci denklemi λ ile ikinci denklemi de λ_2 ile çarparak elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\lambda_1 - \lambda)\frac{dt}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} + \lambda_2^2\frac{dt}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = 0 \\ \left[\lambda(\lambda_1 - \lambda) + \lambda_2^2\right]\frac{dt}{(u^2k_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = 0 \end{aligned}\right\}$$

bulunur.

i) $dt = 0 \Rightarrow t = C_1$ sabitlerine karşılık gelen anadoğrular eğrilik çizgileridir.

ii) $-\lambda^2 + \lambda_1\lambda + \lambda_2^2 = 0$; λ nın 2.dereceden bir denklemidir. $\Delta_\lambda = \lambda_1^2 + 4\lambda_2^2$ daima pozitif olduğundan iki farklı reel λ değeri bulunur.

$$\lambda(\lambda_1 - \lambda) + \lambda_2^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda_1\lambda - \lambda_2^2 = 0$$

ın

$$\lambda = \frac{-\lambda_1 \mp \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2^2}}{2\lambda_1}$$

çözümlerinde λ_1 ve λ_2 değerleri yerlerine yazılırsa diğer eğrilik çizgilerine ait diferensiyel denklem elde edilmiş olur.

6.2 L^3 3−Boyutlu Lorentz Uzayında Space-like Dayanak Eğrili B−Scroll'lar

Tanım 6.2.1 (L^3 3−boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili B−scroll'lar ve merkez uzayı): $\alpha(I)$ space-like eğrisinin yay parametresi t olmak üzere, Frenet 3−ayaklısı $\{V_1; V_2; V_3\}$ olsun. V_3 time-like binormal vektörü tarafından üretilen regle yüzeye B−scroll denir. $\alpha(I)$ dayanak eğrisi ve $Sp\{V_3\}$ doğrultman uzayı olmak üzere, bu B−scroll'un denklemi

$$\varphi(t; u) = \alpha(t) + uV_3(t)$$

şeklindedir.

Teorem 6.2.1 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında dayanak eğrisi space-like ise V_1 ve V_2 space-like vektör, V_3 time-like vektör olduğundan

$$\varepsilon_0 = \langle V_1, V_1\rangle = 1 \quad ; \quad \varepsilon_2 = \langle V_2, V_2\rangle = 1 \quad ; \quad \varepsilon_3 = \langle V_3, V_3\rangle = -1$$

olup buradan Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= k_1 V_2 \\ \dot{V}_2 &= -k_1 V_1 + k_2 V_3 \\ \dot{V}_3 &= k_2 V_2 \end{aligned}$$

şeklindedir (Ekmekçi and İlarslan 1998). Bu denklemlerin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \varphi_t &= V_1 + u k_2 V_2 \\ \varphi_u &= V_3 \end{aligned}$$

olup φ_t ve φ_u yüzeyin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet uzayının sıralı baz vektörleridir.

Tanım 6.2.2 L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili time-like doğrultman uzaylı $B-$scroll olan M nin asimptotik demeti $A(t) = Sp\{V_2, V_3\}$ ve teğetsel demeti $T(t) = Sp\{V_1, V_2, V_3\}$ dir. $A(t)$ ile $T(t)$ nin boyutları farklı olduğundan sırt uzayı yoktur. Merkez uzayı vardır. M üzerinde $p(t)$ herhangi bir dayanak eğrisi olsun. Denklemi

$$p(t) = \alpha(t) + u(t)V_3(t)$$

ise

$$\begin{aligned}\dot p(t) &= \dot\beta + \dot u(t)V_3(t) + u(t)\dot V_3(t)\\ &= V_1 + \dot u(t)V_3(t) + u(t)k_2V_2(t)\end{aligned}$$

dir.

$$\left\langle \dot p(t), \frac{d}{dt}[u(t)V_3(t)]\right\rangle = 0$$

şartını sağlayan u vektörleri merkez uzayının yer vektörleridir. Yani,

$$\begin{aligned}\langle V_1 + \dot uV_3 + uk_2V_2, \dot uV_3 + uk_2V_2\rangle = 0 &\Rightarrow -\dot u^2 + (uk_2)^2 = 0\\ &\Rightarrow \dot u = \mp uk_2\\ &\Rightarrow \int \frac{\dot u}{u} = \mp\int k_2\\ &\Rightarrow u = c_1e^{\mp\int k_2}\end{aligned}$$

parametre değerlerine karşılık gelen $p(t)$ vektörleri merkez uzayını veren yer vektörleridir.

Tanım 6.2.3 (L^3 3−boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili B−scroll'un normali): M yüzeyi

$$\varphi(t,u) = \beta(t) + uV_3(t)$$

ile parametrize edilmek üzere, Teorem 6.2.1 den

$$\varphi_t = \dot\beta(t) + u\dot V_3(t) \Rightarrow \varphi_t = V_1 + uk_2V_2$$

olup

$$\vec{\xi}_t = \frac{V_1 + uk_2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

dir.

$$\vec{\xi}_u = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|} = \varphi_u = V_3 \Rightarrow \langle\vec{\xi}_t, \vec{\xi}_u\rangle = 0$$

olduğundan $\{\vec{\xi}_t, \vec{\xi}_u\}$ ortonormal vektör alanlarıdır ve bunlar $\chi(M)$ yi gerer. Yani

$\chi(M) = Sp\{\vec{\varphi}_t, \vec{\varphi}_u\}$ dur. Bu durumda $B-$scroll'un normali

$$N = \frac{\vec{\varphi}_t \wedge \vec{\varphi}_u}{\|\vec{\varphi}_t \wedge \vec{\varphi}_u\|} = -\det \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & -V_3 \\ \frac{1}{(1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{uk_2}{(1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \|\vec{\varphi}_t \wedge \vec{\varphi}_u\| = 1$$

$$= \frac{-uk_2V_1 + V_2}{(1+u^2k_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

olarak bulunur (Turgut 1995).

Tanım 6.2.4 L^3 de space-like dayanak eğrili time-like $B-$scroll'un S şekil operatörünü ve karşılık gelen $\bar{S}$ matrisini yüzeyin normalinden yararlanarak bulalım.

$$\begin{aligned} S(\vec{\varphi}_t) &= \lambda_1 \vec{\varphi}_t + \lambda_2 \vec{\varphi}_u &&\Rightarrow \lambda_1 = \langle S(\vec{\varphi}_t), \vec{\varphi}_t \rangle \\ & &&\Rightarrow \lambda_2 = \langle S(\vec{\varphi}_t), \vec{\varphi}_u \rangle \\ S(\vec{\varphi}_u) &= \mu_1 \vec{\varphi}_t + \mu_2 \vec{\varphi}_u &&\Rightarrow \mu_1 = \langle S(\vec{\varphi}_u), \vec{\varphi}_t \rangle \\ & &&\Rightarrow \mu_2 = \langle S(\vec{\varphi}_u), \vec{\varphi}_u \rangle \end{aligned}$$

dir. Şimdi

$$S(\vec{\varphi}_t) = D_{\vec{\varphi}_t}N = D_{\frac{\varphi_t}{\|\varphi_t\|}}N = \frac{1}{\|\varphi_t\|}D_{\varphi_t}N = \frac{1}{\|\varphi_t\|}S(\varphi_t) = \frac{1}{\|\varphi_t\|}\frac{\partial N}{\partial t}$$

eşitliğinden $S(\vec{\varphi}_t)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{\left(u\dot{k}_2V_1 + uk_2\dot{V}_1 - \dot{V}_2\right)(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}} - (uk_2V_1 - V_2)\frac{u^2k_2\dot{k}_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{u^2k_2^2+1} \\ &= -\frac{\left(u\dot{k}_2V_1 + uk_1k_2V_2 + k_1V_1 - k_2V_3\right)(u^2k_2^2+1) - \left(u^3\dot{k}_2k_2^2V_1 - u^2k_2\dot{k}_2V_2\right)}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\left(k_1 + u\dot{k}_2 + u^2k_1k_2^2\right)V_1 + \left(uk_1k_2 + u^2k_2\dot{k}_2 + u^3k_1k_2^3\right)V_2 + (-k_2 - u^2k_2^3)V_3}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ve

$$S(\vec{t}) = \frac{1}{\|\varphi_t\|}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial N}{\partial t}$$

olduğundan

$$S(\vec{t}) = -\frac{\left(k_1 + uk_2 + u^2k_1k_2^2\right)V_1 + \left(uk_1k_2 + u^2k_2k_2 + u^3k_1k_2^3\right)V_2 + (-k_2 - u^2k_2^3)V_3}{(u^2k_2^2+1)^2}$$

bulunur. İlk olarak λ_1 ve λ_2 değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \langle S(\vec{t}), \vec{t}\rangle = \left\langle S(\vec{t}), \frac{V_1 + uk_2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right\rangle \\
&= -\frac{\left(k_1 + uk_2 + u^2k_1k_2^2\right) + \left(u^2k_2k_2 + uk_1k_2 + u^3k_1k_2^3\right)uk_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{-k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \langle S(\vec{t}), \vec{u}\rangle \\
&= \frac{k_2 + u^2k_2^3}{(u^2k_2^2+1)^2}\langle V_3, V_3\rangle \\
&= \frac{k_2(u^2k_2^2+1)}{(u^2k_2^2+1)^2}\langle V_3, V_3\rangle
\end{aligned}$$

olup V_3 time-like vektör olduğundan $\langle V_3, V_3\rangle = -1$ değeri yukarıda yerine yazılırsa

$$\lambda_2 = \frac{-k_2}{u^2k_2^2+1}$$

bulunur. $S(\vec{u}) = S(\varphi_u) = \frac{\partial N}{\partial u}$ idi. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial u} &= -\frac{k_2V_1\sqrt{u^2k_2^2+1} - (uk_2V_1 - V_2)\frac{uk_2^2}{\sqrt{u^2k_2^2+1}}}{u^2k_2^2+1} \\
&= -\frac{k_2(u^2k_2^2+1)V_1 - (uk_2V_1 - V_2)uk_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{(k_2 + u^2k_2^3 - u^2k_2^3)V_1 + uk_2^2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

olup

$$S(\overrightarrow{\beta_u}) = \frac{-k_2V_1 - uk_2^2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \langle S(\overrightarrow{\beta_u}), \overrightarrow{\beta_t}\rangle \\ &= \frac{-k_2 - u^2k_2^3}{(u^2k_2^2+1)^2}\end{aligned}$$

ve

$$\mu_2 = \langle S(\overrightarrow{\beta_u}), \overrightarrow{\beta_u}\rangle = 0$$

olacaktır. Ayrıca

$$\mu_1 = \frac{-k_2(u^2k_2^2+1)}{(u^2k_2^2+1)^2} = \frac{-k_2}{u^2k_2^2+1} = \lambda_2$$

olduğundan L^3 uzayında S şekil operatörünün $\tilde{S}$ matrisi simetriktir. O halde,

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+uk_2+u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-k_2}{u^2k_2^2+1} \\ \frac{-k_2}{u^2k_2^2+1} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 6.2.5 (Gauss Eğriliği): L^3 3−boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili B−scroll'un K Gauss eğriliği; yüzeyin space-like birim normali N olmak üzere,

$$\varepsilon = \langle N, N\rangle = 1$$

için

$$
\begin{aligned}
K &= \varepsilon \det \tilde{S} = \det \tilde{S} \\
&= \frac{-k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

dir.

Tanım 6.2.6 (Ortalama Eğrilik): L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili $B-$scroll'un H ortalama eğriliği,

$$
\begin{aligned}
H &= \operatorname{iz} \tilde{S} \\
&= \lambda_1 = \frac{-k_1 - uk_2 - u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

dir.

Tanım 6.2.7 (I. Temel Form): L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili $B-$scroll'un I. temel formu I ile gösterilmek üzere,

$$
I = \langle d\varphi, d\varphi \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi = \varphi_t dt + \varphi_u du
$$

olduğundan

$$
I = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle dtdt + 2\langle \varphi_t, \varphi_u \rangle dtdu + \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle dudu
$$

olur. Burada

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle &= 1 + u^2k_2^2 \\
\langle \varphi_t, \varphi_u \rangle &= 0 \\
\langle \varphi_u, \varphi_t \rangle &= 0 \\
\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle &= \langle V_3, V_3 \rangle = -1 \quad ; \quad V_3 \ \text{time-like vektör}
\end{aligned}
$$

olup dolayısıyla

$$
I = \left(u^2k_2^2 + 1 \right) dtdt - dudu
$$

elde edilir ve bu kuadratik forma karşılık gelen matris

$$I = \begin{bmatrix} u^2k_2^2+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olup

$$\det I = -\left(u^2k_2^2+1\right)$$

dir.

Tanım 6.2.8 (II. Temel Form): L^3 3 − boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili B − scroll'un II. temel formu II ile gösterilmek üzere,

$$II = \langle S(d\varphi), d\varphi\rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi = \varphi_t dt + \varphi_u du$$

olduğundan

$$\begin{aligned} II &= \langle S(\varphi_t)dt + S(\varphi_u)du, \varphi_t dt + \varphi_u du\rangle \\ &= \langle S(\varphi_t), \varphi_t\rangle dtdt + \langle S(\varphi_t), \varphi_u\rangle dtdu \\ &\quad + \langle S(\varphi_u), \varphi_t\rangle dudt + \langle S(\varphi_u), \varphi_u\rangle dudu \end{aligned}$$

bulunur. $\langle S(\overline{\varphi_t}), \overline{\varphi_t}\rangle = \lambda_1$ idi. O halde

$$\langle S(\overline{\varphi_t}), \overline{\varphi_t}\rangle = \left\langle \frac{S(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|}, \frac{\varphi_t}{\|\varphi_t\|}\right\rangle = \frac{1}{u^2k_2^2+1}\langle S(\varphi_t), \varphi_t\rangle = \lambda_1$$

olacağından

$$\langle S(\varphi_t), \varphi_t\rangle = \lambda_1\left(u^2k_2^2+1\right)$$

olur.

$$\mu_2 = \langle S(\overline{\varphi_u}), \overline{\varphi_u}\rangle = 0 = \langle S(\varphi_u), \varphi_u\rangle$$

dur.

$$\langle S(\overline{\varphi_t}), \overline{\varphi_u}\rangle = \langle S(\overline{\varphi_u}), \overline{\varphi_t}\rangle = \lambda_2 = \mu_1$$

idi. Dolayısıyla

$$\left\langle \frac{S(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|}, \frac{\varphi_u}{1}\right\rangle = \frac{1}{\|\varphi_t\|}\langle S(\varphi_t), \varphi_u\rangle = \lambda_2 = \mu_1$$

eşitliğinden

$$\langle S(\varphi_t), \varphi_u \rangle = \langle S(\varphi_u), \varphi_t \rangle = \lambda_2 \left(u^2 k_2^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olacaktır. Buradan

$$II = \lambda_1 \left(u^2 k_2^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} dtdt + 2\lambda_2 \left(u^2 k_2^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} dtdu + 0\, dudu$$

eşitliğinde λ_1 ve λ_2 değerlerini yerlerine yazarsak

$$II = -\frac{k_1 + uk_2 + u^2 k_1 k_2^2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dtdt - \frac{2k_2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dtdu$$

olur ve bu II. temel forma karşılık gelen matris

$$\overline{II} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1 + uk_2 + u^2 k_1 k_2^2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} & \frac{k_2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{k_2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir ve

$$\det \overline{II} = \frac{-k_2^2}{u^2 k_2^2 + 1}$$

dir.

Tanım 6.2.9 (Asimptotik Çizgiler): L^3 $3-$boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili $B-$scroll'un asimptotik çizgileri,

$$II = \langle S(d\varphi), d\varphi \rangle = 0$$

şeklinde diferensiyel denkleme sahip olan eğrilerdir. İki farklı asimptotik çizgi bulunur.

$$II = -\frac{k_1 + uk_2 + u^2 k_1 k_2^2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dtdt - \frac{2k_2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dtdu = 0$$

ya da

$$-\left(\frac{k_1 + uk_2 + u^2 k_1 k_2^2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dt + \frac{2k_2}{(u^2 k_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} du \right) dt = 0$$

şeklindedir.

i) $dt = 0 \Rightarrow t = C_1$ sabitlerine karşılık gelen anadoğruları asimptotik çizgilerdir.

ii) Diğer asimptotik çizgileri

$$\frac{k_1 + uk_2 + u^2k_1k_2^2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dt + \frac{2k_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}du = 0$$

diferensiyel denklemine sahiptir.

Tanım 6.2.10 (L^3 −boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili B−scroll'un eğrilik çizgileri): M yüzeyi üzerindeki bir eğrinin teğet vektör alanı T olsun. O halde $T \in \chi(M) = Sp\{\varphi_t, \varphi_u\}$ dur. T vektör alanı, şekil operatörünün $\tilde{S}$ matrisinin karakteristik vektörü ise yani $\tilde{S}T = \lambda T$ diferensiyel denklemi eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi olup hesaplandığında

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_t dt + \varphi_u du \\ &= (V_1 + uk_2V_2)\, dt + V_3 du \end{aligned}$$

ve

$$T = \frac{V_1 + uk_2V_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} dt + V_3\, du$$

olsun. Bu durumda

$$T = \frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}\varphi_t + du\, \varphi_u$$

olup matris gösterimi

$$T = \begin{bmatrix} \frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ du \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu değerleri $\tilde{S}T = \lambda T$ eşitliğinde yerlerine yazarsak

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\ \lambda\, du \end{bmatrix}$$

olacaktır.

$$\frac{\lambda_1}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dt + \lambda_2 du = \frac{\lambda\, dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\frac{\lambda_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dt + 0 = \lambda\, du$$

olup buradan

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dt + \lambda_2 du = 0$$
$$\frac{\lambda_2}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}}dt - \lambda\, du = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Birinci denklemi λ ile ikinci denklemi de λ_2 ile çarparak elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\lambda(\lambda_1-\lambda)\frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \lambda_2^2\frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} = 0$$
$$\left[\lambda(\lambda_1-\lambda)+\lambda_2^2\right]\frac{dt}{(u^2k_2^2+1)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

bulunur.

i) $dt = 0 \Rightarrow t = C_1$ sabitlerine karşılık gelen anadoğrular eğrilik çizgileridir.

ii) $-\lambda^2 + \lambda_1\lambda + \lambda_2^2 = 0$; λ nın 2. dereceden bir denklemidir. $\Delta_\lambda = \lambda_1^2 + 4\lambda_2^2$ daima pozitif olduğundan iki farklı reel λ değeri bulunur.

$$\lambda(\lambda_1-\lambda)+\lambda_2^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda_1\lambda - \lambda_2^2 = 0$$

ın

$$\lambda = \frac{-\lambda_1 \mp \sqrt{\lambda_1^2+4\lambda_2^2}}{2\lambda_1}$$

çözümlerinde λ_1 ve λ_2 değerleri yerlerine yazılırsa diğer eğrilik çizgilerine ait diferensiyel denklem elde edilir.

6.3 L^n $n-$Boyutlu Lorentz Uzayında p. Mertebeden Genelleştirilmiş $B-$Scroll'lar

Tanım 6.3.1 (L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında time-like dayanak eğrili p. mertebeden $B-$scroll'lar ve merkez uzayı): L^n de Frenet $r-$ayaklısı $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ olan bir time-like eğri $\alpha(I)$ olsun. α nın yay parametresi t olmak üzere, p. mertebeden oskülatör düzlemi

$$Sp\{V_1, V_2, \ldots, V_p\} \quad ; \quad p < r$$

şeklindedir. Bu durumda, p. mertebeden B−scroll'un denklemi

$$\varphi(t; u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_r) = \alpha(t) + \sum_{j=p+1} u_j V_j(t)$$

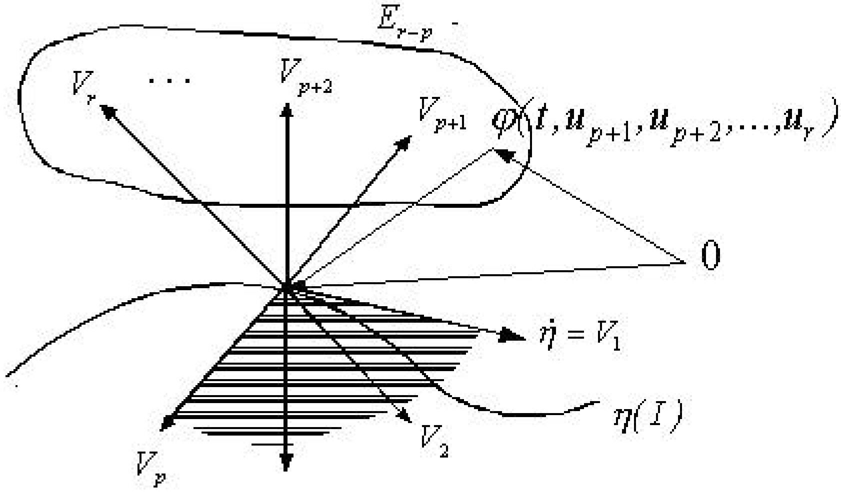
dir. $\alpha(I)$ bu yüzeyin time-like dayanak eğrisidir.

$$\{V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r\}$$

tarafından gerilen $(r - p)-$boyutlu alt vektör uzayı, doğrultman uzayıdır ve E_{r-p} ile gösterilir. B−scroll'un boyutu $(r - p) + 1$ dir. $\dot{\alpha}(t) = V_1$ time-like vektör olmak üzere, $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayın baz vektörleri

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \dot{\alpha}(t) + \sum_{j=p+1} u_j \dot{V}_j(t) = V_1 + \sum_{j=p+1} u_j \dot{V}_j(t) \\
\varphi_{u_{p+1}} &= V_{p+1} \\
\varphi_{u_{p+2}} &= V_{p+2} \\
&\vdots \\
\varphi_{u_r} &= V_r
\end{aligned}$$

şeklindedir.



Şekil 6.1 L^n de p. mertebeden $B - $ scroll

Aşağıdaki teoremde, Teorem 2.2.3 de verilen Frenet formüllerinin $q = 1$ özel hali ele alınmıştır.

Teorem 6.3.1 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında

$$\varepsilon_{i-1} = \langle V_i, V_i \rangle \quad \text{ve} \quad i \leq r \quad \text{için} \quad k_i \neq 0$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= k_1 V_2 \\
&\vdots \\
\dot{V}_j &= -\varepsilon_{j-2}\varepsilon_{j-1} k_{j-1} V_{j-1} + k_j V_{j+1} \\
&\vdots \\
\dot{V}_r &= -\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1} k_{r-1} V_{r-1}
\end{aligned}$$

dir. q indeksi 1 olduğundan $\varepsilon_{i-1} = \langle V_i, V_i \rangle$; $1 < i < r$; değerlerinden sadece biri -1 değerini alacaktır.

Burada $\eta(I)$ eğrisi time-like dır yani V_1 time-like vektör olduğundan sadece $\varepsilon_0 = -1$

dir. $V_2, V_3, \ldots, V_r$ space-like olduğundan $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = \varepsilon_{r-1} = +1$ dir.

V_1 nin time-like olması durumunda karşılık gelen Frenet formüllerinin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \\ \vdots \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \ddots & & & \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & k_{r-2} & 0 \\ & & & & & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & \cdots & & & & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Ekmekçi and İlarslan 1998).

Benzer şekilde V_2 time-like vektör ise matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \\ \vdots \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 & \ddots & & & \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & k_{r-2} & 0 \\ & & & & & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & \cdots & & & & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Her bir V_i vektörünün time-like olması durumu için ayrı ayrı benzer matrisler elde edilir.

L^n Lorentz uzayında eğrinin time-like olması durumunda yani $\alpha'(t) = V_1$ için $\langle V_1, V_1 \rangle = -1$ durumunda $p.$ mertebeden time-like dayanak eğrili $B-$scroll'un merkez uzayının varlığını ve denklemini inceleyelim.

Tanım 6.3.2 L^n de p. mertebeden time-like dayanak eğrili $B-$scroll'un asimptotik demeti

$$A(t) = Sp\left\{V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r, \dot{V}_{p+1}, \dot{V}_{p+2}, \ldots, \dot{V}_r\right\}$$

ile tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{p+1} &= -k_p V_p + k_{p+1} V_{p+2} \\
\dot{V}_{p+2} &= -k_{p+1} V_{p+1} + k_{p+2} V_{p+3} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olduğundan sadece $\dot{V}_{p+1}$ vektörü $V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r$ vektörlerinden lineer bağımsızdır. $\dot{V}_{p+2}, \ldots, \dot{V}_r$ vektörleri $V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r$ vektörleri ile lineer bağımlıdırlar. Bu vektörlerin hepsi space-like vektörlerdir. O halde $A(t)$ nin ortonormal bazı

$$\{V_p, V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r\}$$

olup boy $A(t) = r - p + 1$ dir. V_1 time-like vektörü $A(t)$ nin elemanı olmadığından $A(t)$ space-like bir uzaydır.

Tanım 6.3.3 L^n de p. mertebeden time-like dayanak eğrili $B-$scroll'un teğetsel demeti,

$$T(t) = Sp\left\{V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r, \dot{V}_{p+1}, \dot{V}_{p+2}, \ldots, \dot{V}_r, \dot{\eta}\right\}$$

ile tanımlanır. $\dot{\eta} = V_1$ olduğundan $T(t)$ nin ortonormal bazı

$$\{V_1, V_p, V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r\}$$

olup boy $T(t) = r - p + 2$ dir. V_1 time-like vektörü $T(t)$ nin elemanı olduğundan $T(t)$ time-like bir uzaydır.

Tanım 6.3.4 boy $A(t) \neq$ boy $T(t)$ olduğundan sırt uzay yoktur, merkez uzay vardır. Bu merkez uzayın boyutu $(r - p)$ dir. V_{p+i}; $1 < i$; vektörleri space-like olduğundan bu uzay, E^n Öklid uzayındaki merkez uzayı ile aynı şekilde bulunur. Yani merkez uzayın yer vektörleri aşağıdaki matris gösteriminde olan denklem sisteminin çözümleridir.

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{p+1} \\ \underline{u}_{p+2} \\ \underline{u}_{p+3} \\ \vdots \\ \underline{u}_{r-2} \\ \underline{u}_{r-1} \\ \underline{u}_{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{p+1} & 0 & \cdots & & & 0 \\ -k_{p+1} & 0 & k_{p+2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -k_{p+2} & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 0 & k_{r-2} & 0 \\ & & & & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ u_{p+3} \\ \vdots \\ u_{r-2} \\ u_{r-1} \\ u_{r} \end{bmatrix}$$

L^n Lorentz uzayında time-like olan vektörün $V_2, V_3, \ldots, V_p$ olması durumunda da yine aynı merkez uzayı bulunacaktır.

Tanım 6.3.5 (L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili p. mertebeden $B-$scroll'lar ve merkez uzayı): L^n de Frenet $r-$ayaklısı $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ olan space-like eğri $\alpha(I)$ olsun. α nın yay parametresi t olmak üzere, time-like doğrultman uzayı

$$E_{r-p} = Sp\{V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r\}$$

ve dayanak eğrisi $\alpha(I)$ olan $B-$scroll'un time-like olan tek bir baz vektörü vardır. İlk olarak, V_{p+1} time-like baz vektörü olsun. Bu durumda $\varepsilon_p = \langle V_{p+1}, V_{p+1}\rangle = -1$ ve diğerleri $\varepsilon_{p+1} = \langle V_{p+2}, V_{p+2}\rangle; \ldots; \varepsilon_{r-1} = \langle V_r, V_r\rangle = 1$ dir. Asimptotik demet, teğetsel demet tanımlarından ve Frenet formüllerinden

$$\begin{aligned} V_p' &= -\varepsilon_{p-2}\varepsilon_{p-1}k_{p-1}V_{p-1} + k_pV_{p+1} \\ V_{p+1}' &= -\varepsilon_{p-1}\varepsilon_p k_pV_p + k_{p+1}V_{p+2} \\ &= k_pV_p + k_{p+1}V_{p+2} \\ V_{p+2}' &= -\varepsilon_p\varepsilon_{p+1}k_{p+1}V_{p+1} + k_{p+2}V_{p+3} \\ &= k_{p+1}V_{p+1} + k_{p+2}V_{p+3} \\ V_{p+3}' &= -\varepsilon_{p+1}\varepsilon_{p+2}k_{p+2}V_{p+2} + k_{p+3}V_{p+4} \\ &= -k_{p+2}V_{p+2} + k_{p+3}V_{p+4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi V_{p+1} in time-like olması durumunda sadece $\dot{V}_{p+1}$ ve $\dot{V}_{p+2}$ türevlerinin birinci terimleri işaret değiştirir. Diğer türev vektörleri aynı kalır.

$p(t)$ herhangi bir dayanak uzayı (eğriler ailesi) olsun. Denklemi

$$p(t) = \beta(t) + \sum_{j=p+1} u_j(t)V_j(t)$$

ise

$$\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= \dot{\beta} + \sum_{j=p+1} \dot{u}_j V_j + \sum_{j=p+1} u_j \dot{V}_j \\
&= V_1 + \sum_{j=p+1} \dot{u}_j V_j + \sum_{j=p+1}^{r-1} u_j\left(-\varepsilon_{j-2}\varepsilon_{j-1}k_{j-1}V_{j-1} + k_jV_{j+1}\right) - \varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}u_rk_{r-1}V_{r-1} \\
&= V_1 + \sum_{j=p+1} \dot{u}_j V_j - \varepsilon_{j-2}\varepsilon_{j-1}\sum_{j=p+1}^{r-1} u_jk_{j-1}V_{j-1} + \sum_{j=p+1}^{r-1} u_jk_jV_{j+1} - \varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}u_rk_{r-1}V_{r-1} \\
&= V_1 + \dot{u}_{p+1}V_{p+1} + \dot{u}_{p+2}V_{p+2} + \dot{u}_{p+3}V_{p+3} + \dots + \dot{u}_{r-2}V_{r-2} + \dot{u}_{r-1}V_{r-1} + \dot{u}_rV_r \\
&\quad + u_{p+1}k_pV_p + u_{p+2}k_{p+1}V_{p+1} - u_{p+3}k_{p+2}V_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3}V_{p+3} - \dots \\
&\quad - u_{r-2}k_{r-3}V_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2}V_{r-2} + u_{p+1}k_{p+1}V_{p+2} + u_{p+2}k_{p+2}V_{p+3} + \dots \\
&\quad + u_{r-3}k_{r-3}V_{r-2} + u_{r-2}k_{r-2}V_{r-1} + u_{r-1}k_{r-1}V_r - u_rk_{r-1}V_{r-1} \\
&= V_1 + u_{p+1}k_pV_p + \left(\dot{u}_{p+1} + u_{p+2}k_{p+1}\right)V_{p+1} + \left(\dot{u}_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} - u_{p+3}k_{p+2}\right)V_{p+2} \\
&\quad + \left(\dot{u}_{p+3} + u_{p+2}k_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3}\right)V_{p+3} + \dots + \left(\dot{u}_{r-2} + u_{r-3}k_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2}\right)V_{r-2} \\
&\quad + \left(\dot{u}_{r-1} + u_{r-2}k_{r-2} - u_rk_{r-1}\right)V_{r-1} + \left(\dot{u}_r + u_{r-1}k_{r-1}\right)V_r
\end{aligned}$$

dir. Bir açılamaz yüzey üzerindeki iki ardışık anadoğrunun bir ortak dikmesi varsa esas anadoğru üzerindeki ortak dikmenin ayağı merkez noktası olarak adlandırılır. Bu merkez noktalarının geometrik yerine $B-$scroll'un merkez uzayı denir. Denklemi, ortogonallik koşulu ile,

$$\left\langle \dot{p}(t), \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=p+1} u_i(t)V_i(t)\right]\right\rangle = 0$$

ile ifade edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
&(u_{p+1}k_p)^2 - (\underline{u}_{p+1} + u_{p+2}k_{p+1})^2 + (\underline{u}_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} - u_{p+3}k_{p+2})^2 \\
&+ (\underline{u}_{p+3} + u_{p+2}k_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3})^2 + \cdots + (\underline{u}_{r-2} + u_{r-3}k_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2})^2 \\
&+ (\underline{u}_{r-1} + u_{r-2}k_{r-2} - u_r k_{r-1})^2 + (\underline{u}_r + u_{r-1}k_{r-1})^2 = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. $u_{p+1}k_p = 0$ için $k_p \neq 0$ fakat $u_{p+1} = 0$ dır. $u_{p+1} \neq 0$ ise $k_p = 0$ dır. $u_{p+1} = 0 \Rightarrow \underline{u}_{p+1} = 0 \Rightarrow u_{p+2} = 0 \Rightarrow \underline{u}_{p+2} = 0 \Rightarrow u_{p+3} = 0 \Rightarrow \cdots$ ise $\eta(I)$ dayanak eğrisi merkez uzayı (striksiyon eğrisi) olacaktır. Ancak diferensiyel denklem sisteminin çözümü için bir özel hal seçmeliyiz. Negatif işaretli olan ikinci terimin sıfır olduğu bir özel çözüm seçelim. Yani

$$\underline{u}_{p+1} + u_{p+2}k_{p+1} = 0$$

olsun. Bu durumda daha önceki paragraflara paralel olarak Lyapunov matrisine ulaşırız.

$$
\begin{aligned}
\underline{u}_{p+1} &= -k_{p+1}u_{p+2} \\
\underline{u}_{p+2} &= k_{p+2}u_{p+3} - k_{p+1}u_{p+1} \\
\underline{u}_{p+3} &= k_{p+3}u_{p+4} - k_{p+2}u_{p+2} \\
&\vdots \\
\underline{u}_{r-2} &= k_{r-2}u_{r-1} - k_{r-3}u_{r-3} \\
\underline{u}_{r-1} &= k_{r-1}u_r - k_{r-2}u_{r-2} \\
\underline{u}_r &= -k_{r-1}u_{r-1}
\end{aligned}
$$

olacaktır. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$
\begin{bmatrix} \underline{u}_{p+1} \\ \underline{u}_{p+2} \\ \underline{u}_{p+3} \\ \vdots \\ \underline{u}_{r-1} \\ \underline{u}_r \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & -k_{p+1} & 0 & \cdots & & 0 \\
-k_{p+1} & 0 & k_{p+2} & \ddots & & \vdots \\
0 & -k_{p+2} & 0 & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\
 & & & & 0 & k_{r-1} \\
0 & \cdots & & & -k_{r-1} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ u_{p+3} \\ \vdots \\ u_{r-1} \\ u_r \end{bmatrix}
$$

elde edilir.

$$U' = A(t)U$$

homogen diferensiyel denklem sisteminin çözümleri ile merkez uzayı bulunur. Bu özel çözümün dışındaki çözümleri de araştırmak gerekir.

Tanım 6.3.6 L^n $n-$boyutlu Lorentz uzayında space-like dayanak eğrili $B-$scroll'u

$$\varphi_t = \alpha(t) + \sum_{j=p+1} u_j V_j(t)$$

ile parametrize edelim. Time-like doğrultman uzayı

$$E_{r-p} = Sp\{V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots, V_r\}$$

olsun. E_{r-p} time-like doğrultman uzayında V_{p+2} time-like vektör olsun. Bu durumda sadece $\varepsilon_{p+1} = \langle V_{p+2}, V_{p+2}\rangle = -1$ ve diğerleri

$$\varepsilon_p = \langle V_{p+1}, V_{p+1}\rangle = 1; \varepsilon_{p+2} = \langle V_{p+3}, V_{p+3}\rangle = 1; \ldots; \varepsilon_{r-1} = \langle V_r, V_r\rangle = 1$$

dir. Asimptotik demet, teğetsel demet tanımlarından ve Frenet formüllerinden

$$\begin{aligned}
V'_{p+1} &= -\varepsilon_{p-1}\varepsilon_p k_p V_p + k_{p+1}V_{p+2} \\
&= -k_p V_p + k_{p+1}V_{p+2} \\
V'_{p+2} &= -\varepsilon_p \varepsilon_{p+1} k_{p+1} V_{p+1} + k_{p+2}V_{p+3} \\
&= k_{p+1}V_{p+1} + k_{p+2}V_{p+3} \\
V'_{p+3} &= -\varepsilon_{p+1}\varepsilon_{p+2} k_{p+2} V_{p+2} + k_{p+3}V_{p+4} \\
&= k_{p+2}V_{p+2} + k_{p+3}V_{p+4} \\
V'_{p+4} &= -\varepsilon_{p+2}\varepsilon_{p+3} k_{p+3} V_{p+3} + k_{p+4}V_{p+5} \\
&= -k_{p+3}V_{p+3} + k_{p+4}V_{p+5} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

dir. Yani V_{p+2} nin time-like vektör olması durumunda sadece V'_{p+2} ve V'_{p+3} türev vektörlerinin birinci terimleri işaret değiştirir. Diğer türev vektörleri aynı kalır.

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) = {} & V_1 - u_{p+1}k_pV_p + (\dot{u}_{p+1} + u_{p+2}k_{p+1})V_{p+1} + (\dot{u}_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} + u_{p+3}k_{p+2})V_{p+2} \\ & + (\dot{u}_{p+3} + u_{p+2}k_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3})V_{p+3} + \ldots + (\dot{u}_{r-2} + u_{r-3}k_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2})V_{r-2} \\ & + (\dot{u}_{r-1} + u_{r-2}k_{r-2} - u_rk_{r-1})V_{r-1} + (\dot{u}_r + u_{r-1}k_{r-1})V_r\end{aligned}$$

olmak üzere merkez uzayının denklemi

$$\left\langle \dot{p}(t), \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=p+1} u_i(t)V_i(t)\right]\right\rangle = 0$$

ile ifade edilir.

$$\begin{aligned}& -(u_{p+1}k_p)^2 + (\dot{u}_{p+1} + u_{p+2}k_{p+1})^2 - (\dot{u}_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} + u_{p+3}k_{p+2})^2 \\ & + (\dot{u}_{p+3} + u_{p+2}k_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3})^2 + \ldots + (\dot{u}_{r-2} + u_{r-3}k_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2})^2 \\ & + (\dot{u}_{r-1} + u_{r-2}k_{r-2} - u_rk_{r-1})^2 + (\dot{u}_r + u_{r-1}k_{r-1})^2 = 0\end{aligned}$$

$u_{p+1}k_p = 0$ için $k_p \neq 0$ fakat $u_{p+1} = 0$ dır. $\dot{u}_{p+1} = 0 \Rightarrow u_{p+2} = 0 \Rightarrow \dot{u}_{p+2} = 0 \Rightarrow u_{p+3} = 0 \Rightarrow \ldots$ ise $\equiv (I)$ dayanak eğrisi merkez uzayı (striksiyon eğrisi) olacaktır. Burada

$$\dot{u}_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} + u_{p+3}k_{p+2} = 0$$

kabulü ile bir özel çözüm üzerinde duracağız.

$$\begin{aligned}\dot{u}_{p+1} &= -k_{p+1}u_{p+2} \\ \dot{u}_{p+2} &= -k_{p+1}u_{p+1} - k_{p+2}u_{p+3} \\ \dot{u}_{p+3} &= k_{p+3}u_{p+4} - k_{p+2}u_{p+2} \\ & \vdots \\ \dot{u}_{r-2} &= k_{r-2}u_{r-1} - k_{r-3}u_{r-3} \\ \dot{u}_{r-1} &= k_{r-1}u_r - k_{r-2}u_{r-2} \\ \dot{u}_r &= -k_{r-1}u_{r-1}\end{aligned}$$

olacaktır. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$
\begin{bmatrix} u'_{p+1} \\ u'_{p+2} \\ u'_{p+3} \\ \vdots \\ u'_{r-2} \\ u'_{r-1} \\ u'_r \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & -k_{p+1} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
-k_{p+1} & 0 & -k_{p+2} & 0 & \ddots & & \vdots \\
0 & -k_{p+2} & 0 & k_{p+3} & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & -k_{p+3} & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & & k_{r-2} & 0 \\
 & & & & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\
0 & \cdots & & & 0 & -k_{r-1} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ u_{p+3} \\ \vdots \\ u_{r-2} \\ u_{r-1} \\ u_r \end{bmatrix}
$$

şeklini alır. Son olarak V_r vektörünün time-like olması halini ele alalım. Bu durumda sadece $\varepsilon_{r-1} = \langle V_r, V_r \rangle = -1$ ve diğerleri

$$\varepsilon_p = \langle V_{p+1}, V_{p+1} \rangle = 1; \varepsilon_{p+1} = \langle V_{p+2}, V_{p+2} \rangle = 1; \ldots; \varepsilon_{r-2} = \langle V_{r-1}, V_{r-1} \rangle = 1$$

dir. Asimptotik demet, teğetsel demet tanımlarından ve Frenet formüllerinden

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{r-1} &= -\varepsilon_{r-3}\varepsilon_{r-2}k_{r-2}V_{r-2} + k_{r-1}V_r \\
&= -k_{r-2}V_{r-2} + k_{r-1}V_r \\
\dot{V}_r &= -\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}k_{r-1}V_{r-1} \\
&= k_{r-1}V_{r-1}
\end{aligned}
$$

dir. O halde sadece $\dot{V}_r$ türev vektörünün işareti değişir.

$$
\begin{aligned}
p'(t) = {} & V_1 - u_{p+1}k_pV_p + (u'_{p+1} - u_{p+2}k_{p+1})V_{p+1} + (u'_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} - u_{p+3}k_{p+2})V_{p+2} \\
& + (u'_{p+3} + u_{p+2}k_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3})V_{p+3} + \ldots + (u'_{r-2} + u_{r-3}k_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2})V_{r-2} \\
& + (u'_{r-1} + u_{r-2}k_{r-2} + u_rk_{r-1})V_{r-1} + (u'_r + u_{r-1}k_{r-1})V_r
\end{aligned}
$$

olmak üzere merkez uzayının denklemi

$$\left\langle p'(t), \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=p+1} u_i(t)V_i(t)\right]\right\rangle = 0$$

ile ifade edilir. Bu durumda

$$(u_{p+1}k_p)^2 + (\dot{u}_{p+1} - u_{p+2}k_{p+1})^2 + (\dot{u}_{p+2} + u_{p+1}k_{p+1} - u_{p+3}k_{p+2})^2$$
$$+ (\dot{u}_{p+3} + u_{p+2}k_{p+2} - u_{p+4}k_{p+3})^2 + \cdots + (\dot{u}_{r-2} + u_{r-3}k_{r-3} - u_{r-1}k_{r-2})^2$$
$$+ (\dot{u}_{r-1} + u_{r-2}k_{r-2} + u_r k_{r-1})^2 - (\dot{u}_r + u_{r-1}k_{r-1})^2 = 0$$

olacaktır. $u_{p+1}k_p = 0$ için $k_p \neq 0$ fakat $u_{p+1} = 0$ dır. $\dot{u}_{p+1} = 0 \Rightarrow u_{p+2} = 0 \Rightarrow \dot{u}_{p+2} = 0 \Rightarrow u_{p+3} = 0 \Rightarrow \cdots$ ise $\equiv (I)$ dayanak eğrisi merkez uzayı (striksiyon eğrisi) olacaktır. Burada

$$(\dot{u}_r + u_{r-1}k_{r-1}) = 0$$

kabulü ile bir özel çözüm üzerinde duracağız.

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{p+1} &= k_{p+1}u_{p+2} \\
\dot{u}_{p+2} &= -k_{p+1}u_{p+1} + k_{p+2}u_{p+3} \\
\dot{u}_{p+3} &= -k_{p+2}u_{p+2} + k_{p+3}u_{p+4} \\
&\vdots \\
\dot{u}_{r-2} &= -k_{r-3}u_{r-3} + k_{r-2}u_{r-1} \\
\dot{u}_{r-1} &= -k_{r-1}u_r - k_{r-2}u_{r-2} \\
\dot{u}_r &= -k_{r-1}u_{r-1}
\end{aligned}$$

Bu nedenle yukarıdaki denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{p+1} \\ \dot{u}_{p+2} \\ \dot{u}_{p+3} \\ \vdots \\ \dot{u}_{r-2} \\ \dot{u}_{r-1} \\ \dot{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{p+1} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -k_{p+1} & 0 & k_{p+2} & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -k_{p+2} & 0 & k_{p+3} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & -k_{p+3} & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & & k_{r-2} & 0 \\ & & & & -k_{r-2} & 0 & -k_{r-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ u_{p+3} \\ \vdots \\ u_{r-2} \\ u_{r-1} \\ u_r \end{bmatrix}$$

matris formunu alır. Bu da

$$\dot{U} = AU$$

Lyapunov denklemidir.

KAYNAKLAR

Akutugawa, K. and Nishikawa S. 1990. The Gauss map and space like surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3−space. Tohoku Math. J.(2), 42(1); 67-82

Alias, L.J., Ferrandez, A., Lucas, P. and Merono, M.A. 1998. On the Gauss map of B−scroll. Tsukuba J. Math., 22; 371-377.

Altın, A. 1995. Yüksek mertebeden regle yüzeyler üzerine. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 65 s., Ankara.

Arslaner, R. 1989. Regle altmanifoldlar. Yüksek lisans tezi, İnönü Üni., Malatya.

Asil, V. and Aydın, A.P. 1995. On the mean curvature of a B−scroll surface at the movement of space with one parameter $H=H^0$ in L^3 (The Lorentzian 3−space). J. Inst. Math. Compt. Sci. Math. Ser., 8; 153-157.

Aydemir, I. 1995. R^n_1 Minkowski uzayında time-like doğrultman uzaylı genelleştirilmiş time-like regle yüzeyler. Doktora tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 64 s., Samsun.

Balgetir, H. and Ergüt, M. 2001. On characterization of null helix. Bull. Ins. Math. Acad. Sinica, 29; 71-78.

Balgetir, H. 2002. Lorentz uzayında genelleştirilmiş null scroll'lar. Doktora tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 101 s., Elazığ.

Balgetir, H. Bektaş, M. and Ergüt, M. 2003. Null scrolls in the 3−dimensional Lorentzian space. Appl. Sciences, 5(1); 1-5.

Beem, J.K and Ehrlich, P.E. 1981. Global Lorentzian geometry. Marcell Dekker Inc., New York.

Blair, D.E. 1976. Contact manifolds in Riemannian geometry. Lecture notes in Math. 509, Springer-Verlag.

Choi, S.M., Ki, U.H. and Suh Y.J. 1998. On the Gauss map of null scrolls.Tsukuba J. Math., Vol. 22, No: 1; 273-279.

Çalışkan, M. 1983. Homotetik hareketlere iştirak eden genelleştirilmiş regle yüzey çiftleri. Doktora tezi, Inönü Üniversitesi, 47s., Malatya.

Duggal, K.L. and Bejancu, A. 1996. Lightlike submanifolds of semi-Riemanian manifolds and applications. Kluwer Academic Publishers.

Ekmekçi, N. 1991. Lorentz manifoldlar¬ üzerinde eğilim çizgileri. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 54 s., Ankara.

Ekmekçi, N. and Hac¬salihoğlu, H.H. 1996. On the helices of a Lorentzian manifolds. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara A.1, 45; 45-50.

Ekmekçi, N., Hac¬salihoğlu, H.H. and İlarslan, K. 2001. Harmonic curvatures in Lorentzian space. Bull. Malaysian Sc. Soc., 23; 173-179.

Ekmekçi, N. and Ilarslan, K. 1998. Higher curvatures of a regular curve in Lorentzian space. Jour. of Inst. of Math & Camp. Sci. (Math. Ser) Vol. 11, No.2; 97-102.

Frank, H., and Giering, O. 1976. Verallgemeinerte fegel‡achen. Math. Zelt., 150; 261-271.

Gantmacher, F.R. 1960. The theory of matrices, Vol. II. Chelsea Publishing Company, 276 p., New York.

Giacomo, S. 1954. Sur les congruenges cylindriques. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Série A, Vol. 18; 108-118.

Graves, L.K. 1979. Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 252; 367-392.

Greub, W.H. 1963. Linear Algebra. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

Hac¬salihoğlu, H.H. 1994. Diferensiyel geometri, cilt 1. Inönü Üniversitesi Yay¬nlar¬, 269 s., Malatya.

Hicks, J.H. 1971. Notes on di¤erential geometry. Van Nostrand Reinhold Company, London.

Ikawa, T. 1985 .On curves and submanifolds in an inde…nite Riemannian manifolds. Tsukuba J. Math Vol.9, No.2; 353-371.

Inoguchi, J. 2005. Extension B ¡ scrolls are B ¡ scrolls, Yay¬nlanmakta.

Juza, M. 1962. Ligne de striction sur une generalisation a plusierurs dimensions d'une surface reglee. Czechosl. Math. J., 12(87); 243-250

İlarslan, K. 2002. Öklid olmayan manifoldlar üzerindeki baz¬ özel eğriler. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 118 s., Ankara.

Juza. M. 1962. Ligne de striction suune generalisation a plusierus dimension d'une surface re‡ee. Zechosl. Math.J., 12 (87), 243-250.

McCarthy, J.M. 1990. An introduction to theoretical kinematics. The MIT Press, 129 p., London.

Nassar, H.A.A. and Fathi, M.H. 2001. On an extension of the B-scroll surface in Lorentz 3-space R_1^3. Riv. Math. Univ. Parma, (6)3; 57-67.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, 468 p., New York.

O'Neill, B. 1996. Elementary differential geometry. Acad. Press, New York

Sabuncuoğlu, A. 1982. Genelleştirilmiş regle yüzeyler. Doçentlik tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 60 s., Ankara.

Sabuncuoğlu, A. 2001. Diferensiyel geometri. Nobel Yayın, 593 s., Ankara.

Thas, C. 1978. Properties of ruled surfaces in the Euclidean space E^n. Academica Sinica, Vol.6, No.1; 133-142.

Tosun, M. 1995. R_1^n Minkowski uzayında space-like doğrultman uzaylı genelleştirilmiş time-like regle yüzeyler. Doktora tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 66 s., Samsun.

Tosun, M. 1997. On the $(k - m - 1)$-dimensional time-like center ruled surface in the Minkowski space R_1^n. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Sakarya Üniversitesi, Seri 1, No 1; 69-73.

Turgut, A. 1995. 3-Boyutlu Minkowski uzayında space-like ve time-like regle yüzeyler. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 97 s., Ankara.

Turgut, A. and Hacısalihoğlu, H.H. 1997. Time like ruled surfaces in the Minkowski 3-space. Far East. J. Math. Sci., 5(1); 83-90.

Turgut, A. and Hacısalihoğlu, H.H. 1997. On the distribution parameter of time like ruled surfaces in the Minkowski 3-space. Far East J. Math. Sci., 5(2); 321-328.

Uğurlu, H.H. 1997. The relations among instantaneous velocities of trihedrons depending on a space-like ruled surfaces. Comm. Fac. Sci. Ankara Ser. A.1, 46; 211-223. 1999. Hadronic Journal, 22; 145-155.

Uğurlu, H.H. and Gündoğan, H. 1999. Differential geometric conditions between time like curves and time like ruled surfaces. Studii … Correctori Stiintifice, Seria Matematica Nr. 9.

Weinstein, T. 1996. An introduction to Lorentz surfaces ,Walter de Gruyter, 213 p., Berlin, New York.

ÖZGEÇMIŞ

Adı Soyadı : Şeyda KILIÇOĞLU

Doğum Yeri : Kütahya

Doğum Tarihi : 07.02.1964

Medeni Hali : Evli ve 3 çocuklu

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kütahya Maltepe Lisesi (1981)

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü (1985)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (1993)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ordu - Mesudiye, Mesudiye Lisesi 1986-1987

Ankara Anafartalar Lisesi 1987-1989

Ankara Gazi Anadolu Lisesi 1989-1998

Ankara Çankaya Milli Piyango Anadolu Lisesi 1998-...

Yayınları (SCI ve diğer)