ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DİFERENSİYEL ve FARK DENKLEMLERİNİN ORTOGONAL POLİNOM ÇÖZÜMLERİ

Zeliha KOCAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ankara, 2012

TEZ ONAYI

Zeliha KOCAMAN tarafından hazırlanan "Bazı Diferensiyel ve Fark Denklemlerinin Ortogonal Polinom Çözümleri" adlı tez çalışması 03/10/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Jüri Üyeleri :

Başkan: Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Üye : Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Üye : Doç. Dr. Ali OLGUN

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özer KOLSARICI
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI DİFERENSİYEL ve FARK DENKLEMLERİNİN ORTOGONAL POLİNOM ÇÖZÜMLERİ

Zeliha KOCAMAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, reel fark denklemleri tanıtılmış ve bu denklemlerin özdeğerleri elde edilmiştir.
Üçüncü bölümde, reel fark denklemlerinin polinom çözümleri verilmiş, bu çözümlerin sağladığı rekürans bağıntısı elde edilmiştir.
Dördüncü bölümde, reel fark denklemlerinin self adjoint hali elde edilmiş, ortogonallik özelliği incelenmiştir.
Beşinci bölümde, pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümler sınıflandırılmıştır.
Altıncı bölümde, pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümlerin özellikleri incelenmiştir.

Ekim 2012, 77 sayfa

Anahtar Kelimeler: Reel fark denklemleri, Ortogonal polinom çözümler, Rodrigues formülü

ABSTRACT

Master Thesis

ORTHOGONAL POLYNOMIAL SOLUTIONS of DIFFERENTIAL EQUATIONS and REAL DIFFERENCE EQUATIONS

Zeliha KOCAMAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of six chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter, reel difference equations have been presented and eigenvalues of these equations have been obtained.
In the third chapter, polynomial solutions of reel difference equations have been given and recurrence relation which these solutions satisfy have been obtained.
In the fourth chapter, self adjoint form of reel difference equations have been obtained and their orthogonality have been examined.
In the fifth chapter, positive definite orthogonal polynomial solutions have been classified.
In the sixth chapter, characteristics of positive definite orthogonal polynomial solutions have been examined.

October 2012, 77 pages

Key Words: Reel difference equations,Orthogonal polynomial solutions,Rodrigues formula

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı olan sayın hocam Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a, destek ve görüşlerini esirgemeyen sevgili arkadaşlarım Araş. Gör. Emrah Sercan YILMAZ'a, Murat DEMİRCİOĞLU'na , yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Zeliha KOCAMAN

Ankara, Ekim 2012

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler uzun süredir çalışılmaktadır ve birçok bilimdalında uygulaması vardır. Ancak yakın geçmişte diferensiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemleri kullanılarak ortadan kaldırılmak istenmiştir. Bu nedenle diferensiyel ve fark denklemlerinin çözümlerinin karakteristiği önemli yer tutmaktadır.

Bu tezde reel fark denklemlerinin en genel özellikleri incelenmiştir. Reel fark denklemlerinin ortogonal polinom çözümleri elde edilmiş, bu çözümlerin sağladığı rekürans bağıntısı bulunmuştur. Ayrıca reel fark denkleminin self adjoint formu elde edilmiş, ortogonallik özelliği incelenmiştir. Daha sonra pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümler sınıflandırılmış ve her durum için ağırlık fonksiyonları ve Rodrigues formülü elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR ve ÖN BİLGİLER

2.1 Reel Fark Denklemleri

$\mathcal{P}$, $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerindeki polinom uzayını göstersin. 1949 yılında W. Hahn tarafından $\pounds_{q,\omega}$ şeklinde lineer bir operatör aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.1.1: $p \in \mathcal{P}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\omega}{1-q}\right\}$ ve $\forall q \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ olmak üzere $(\pounds_{q,\omega}p)(x)$ lineer operatörü

$$(\pounds_{q,\omega}p)(x) = \frac{p(qx+\omega)-p(x)}{qx+\omega-x} \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer (2.1.1)'de $(q,\omega)=(1,1)$ alınırsa

$$(\pounds_{1,1}p)(x) = p(x+1)-p(x) = \Delta p(x)$$

olup, buradaki Δ operatörüne *fark operatörü* denir.
$e, f, g, \varepsilon, \gamma, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \neq 0$, $\varphi(x) = ex^2+2fx+g$ ve $\psi(x) = 2\varepsilon x+\gamma$ olmak üzere

$$\varphi(x)\left(\pounds^2_{q,\omega}y_n\right)(x) + \psi(x)\left(\pounds_{q,\omega}y_n\right)(x) = \lambda_n y_n(qx+\omega) \tag{2.1.2}$$

denklemi ile tanımlanan özdeğer problemini gözönüne alalım. Burada λ_n özdeğerlerini hesaplayabilmek için aşağıdaki temel tanımları verelim.

Tanım 2.1.2: $\alpha \in \mathbb{N}^+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere, bir α tamsayısının q analoğu (temel sayı)

$$[\alpha]_q := [\alpha] = \begin{cases} \frac{1-q^\alpha}{1-q}, & q \neq 1 \; ise \\ \alpha, & q = 1 \; ise \end{cases}$$

dir. Burada $[-1] = \frac{1-q^{-1}}{1-q} = -\frac{1}{q}$, $[0] = \frac{1-q^0}{1-q} = 0$ dır.

Lemma 2.1.1: $(\pounds_{q,\omega}p)(x)$, (2.1.1) ile tanımlanan operatör olmak üzere $n = 2,3,...$ için

$$\pounds^2_{q,\omega}(x^n) = [n][n-1]x^{n-2} + R(x)$$

dir. Burada $R(x)$ en fazla $(n-3)$-üncü dereceden bir polinomdur.

İspat: (2.1.1) eşitliğinde $p(x) = x^n$ alınır ve

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-2}a+b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k, \qquad a,b \in \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\pounds_{q,\omega}\left(x^{n}\right) &= \frac{(qx+\omega)^{n}-x^{n}}{(qx+\omega)-x} \\
&= \frac{\left[(qx+\omega)-x\right]\sum_{k=0}^{n-1}(qx+\omega)^{n-1-k}x^{k}}{(qx+\omega)-x} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(qx+\omega)^{n-1-k}x^{k} \\
&= (qx+\omega)^{n-1}+(qx+\omega)^{n-2}x+...+(qx+\omega)x^{n-2}+x^{n-1} \\
&= \left(q^{n-1}x^{n-1}+r_{1}(x)\right)+\left(q^{n-2}x^{n-1}+r_{2}(x)\right)+... \\
&\quad +\left(qx^{n-1}+r_{n-1}(x)\right)+x^{n-1} \\
&= (q^{n-1}+...+q+1)x^{n-1}+r(x) \\
&= [n]\,x^{n-1}+r\,(x) \qquad (2.1.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $r_1(x), r_2(x), ..., r_{n-1}(x)$ en fazla $(n-2)$-inci dereceden polinomlar olup, $r(x) = r_1(x) + r_2(x) + ... + r_{n-1}(x)$ denirse $r\,(x)$in $(n-2)$-inci dereceden bir polinom olacağı açıktır.

(2.1.3) eşitliğinin her iki yanına $\pounds_{q,\omega}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\pounds_{q,\omega}^{2}\left(x^{n}\right) &= \pounds_{q,\omega}\left([n]\,x^{n-1}+r\,(x)\right) \\
&= [n]\,[n-1]\,x^{n-2}+R\,(x) \qquad (2.1.4)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $R\,(x)$ en fazla $(n-3)$-üncü dereceden bir polinomdur.

Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 2.1.2:

$$\left(ex^{2}+2fx+g\right)\pounds_{q,\omega}^{2}\left(x^{n}\right)+(2\varepsilon x+\gamma)\,\pounds_{q,\omega}\left(x^{n}\right)=\lambda_{n}\,(qx+\omega)^{n} \qquad (2.1.5)$$

ise, bu durumda

$$\lambda_{n}=\frac{[n]}{q^{n}}\left(e\,[n-1]+2\varepsilon\right) \qquad (2.1.6)$$

dir.

İspat: (2.1.2) denkleminde $y_n\,(x) = x^n$ alınır ve (2.1.3), (2.1.4) eşitlikleri gözönüne alınırsa (2.1.2) denklemi

$$\left(ex^{2}+2fx+g\right)\left([n]\,[n-1]\,x^{n-2}+R(x)\right)+(2\varepsilon x+\gamma)\left([n]\,x^{n-1}+r(x)\right)=\lambda_{n}\,(qx+\omega)^{n} \qquad (2.1.7)$$

şekline dönüşür. Burada x^n nin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\lambda_n = \frac{[n]}{q^n}\left(e\left[n-1\right]+2\varepsilon\right)$$

özdeğeri elde edilir.

(2.1.6) ile verilen özdeğerler (2.1.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(ex^2+2fx+g\right)\left(\pounds_{q,\omega}^2 y_n\right)(x)+\left(2\varepsilon x+\gamma\right)\left(\pounds_{q,\omega} y_n\right)(x)=\frac{[n]}{q^n}\left(e\left[n-1\right]+2\varepsilon\right)y_n\left(qx+\omega\right) \tag{2.1.8}$$

olur.

Özel olarak $(q,\omega)=(1,1)$ alınırsa (2.1.8) denklemi

$$\left(ex^2+2fx+g\right)\left(\Delta^2 y_n\right)(x)+\left(2\varepsilon x+\gamma\right)\left(\Delta y_n\right)(x)=n\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right)y_n\left(x+1\right) \tag{2.1.9}$$

yani

$$\varphi\left(x\right)\left(\Delta^2 y_n\right)(x)+\psi\left(x\right)\left(\Delta y_n\right)(x)=\lambda_n y_n\left(x+1\right) \tag{2.1.10}$$

şekline dönüşür.

3. POLİNOM ÇÖZÜMLER

3.1 (2.1.10) Fark Denkleminin Polinom Çözümleri

Tanım 3.1.1:

$$\varphi(x)\left(\Delta^2 y_n\right)(x)+\psi(x)\left(\Delta y_n\right)(x)=\lambda_n y_n(x+1)$$

özdeğer probleminin monik polinom çözümleri $x,\ c\in\mathbb{R}$ için

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c}{k},\quad a_{n,n}=n!,\ n=0,1,2,3,... \tag{3.1.1}$$

şeklindedir.

Lemma 3.1.1: (3.1.1) ile verilen $y_n(x)$ monik polinom çözümlerinin katsayıları olan $a_{n,k}$ lar, c katsayısının

$$e(c+1)^2-2f(c+1)+g=-2\varepsilon(c+1)+\gamma \tag{3.1.2}$$

eşitliğini sağlaması koşuluyla $k=n-1,n-2,n-3,...,0$ için

$$\begin{aligned}&(n-k)\left(e(n+k-1)+2\varepsilon\right)a_{n,k}\\&-\left(e(k-1-c)^2+2f(k-1-c)+g\right)a_{n,k+1}\\=\ &0\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

dir.

İspat: Bu lemmanın ispatı için öncelikle aşağıdaki eşitlikleri gösterelim.

$$\begin{aligned}\Delta y_n(x)&=y_n(x+1)-y_n(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\binom{x+c+1}{k}-\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\binom{x+c}{k}\\&=\left[(a_{n,0})\binom{x+c+1}{0}+(a_{n,1})\binom{x+c+1}{1}+(a_{n,2})\binom{x+c+1}{2}+...\right]\\&\quad-\left[(a_{n,0})\binom{x+c}{0}+(a_{n,1})\binom{x+c}{1}+(a_{n,2})\binom{x+c}{2}+...\right]\\&=0+a_{n,1}\left[\binom{x+c+1}{1}-\binom{x+c}{1}\right]+a_{n,2}\left[\binom{x+c+1}{2}-\binom{x+c}{2}\right]\\&\quad+...+a_{n,n}\left[\binom{x+c+1}{n}-\binom{x+c}{n}\right]\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}\binom{x+c}{k-1}\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_n(x) &= \Delta(\Delta y_n(x)) = \Delta(y_n(x+1) - y_n(x)) \\
&= y_n(x+2) - 2y_n(x+1) + y_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c+2}{k} - 2\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c+1}{k} + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c}{k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c+2}{k} - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c+1}{k}\right) \\
&\quad - \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c+1}{k} - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\binom{x+c+1}{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\binom{x+c}{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n} a_{n,k}\binom{x+c}{k-2} \qquad (3.1.5)
\end{aligned}$$

olup, (3.1.1), (3.1.4), (3.1.5) eşitlikleri (2.1.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(ex^2 + 2fx + g\right)\left(\sum_{k=2}^{n} a_{n,k}\binom{x+c}{k-2}\right) + (2\varepsilon x + \gamma)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\binom{x+c}{k-1}\right) \\
= \; & n(e(n-1) + 2\varepsilon)\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c+1}{k}\right) \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.1.6) denkleminde $c = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left(ex^2 + 2fx + g\right)\sum_{k=2}^{n} a_{n,k}\binom{x}{k-2} + (2\varepsilon x + \gamma)\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\binom{x}{k-1} \\
= \; & n(e(n-1) + 2\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+1}{k} \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
x\binom{x}{k-1} &= k\binom{x}{k} + (k-1)\binom{x}{k-1} \\
x^2\binom{x}{k-2} &= k(k-1)\binom{x}{k} + (k-1)(2k-3)\binom{x}{k-1} + (k-2)^2\binom{x}{k-2} \\
\binom{x+1}{k} &= \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1} \\
\Delta\binom{x}{k} &= \binom{x+1}{k} - \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1} \\
\Delta^2\binom{x}{k} &= \Delta\binom{x}{k-1} = \binom{x}{k-2}
\end{aligned}$$

eşitlikleri (3.1.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& e(\sum_{k=2}^{n} a_{n,k} k\,(k-1)\binom{x}{k} + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k}\,(k-1)\,(2k-3)\binom{x}{k-1} \\
& + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k}\,(k-2)^2\binom{x}{k-2}) \\
& +2f\left(\sum_{k=2}^{n} a_{n,k}\,(k-1)\binom{x}{k-1} + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k}\,(k-2)\binom{x}{k-2}\right) \\
& +g\sum_{k=2}^{n} a_{n,k}\binom{x}{k-2} + 2\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} k\binom{x}{k} + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\,(k-1)\binom{x}{k-1}\right) \\
& +\gamma\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\binom{x}{k-1} \\
= \; & n\,(e\,(n-1)+2\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+1}{k} \qquad (3.1.8)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.1.8) denkleminde $\binom{x}{k}$lı terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}
& e\left(a_{n,k} k\,(k-1) + a_{n,k+1} k\,(2k-1) + a_{n,k+2} k^2\right) \\
& +2f\,(a_{n,k+1} k + a_{n,k+2} k) + g a_{n,k+2} + 2\varepsilon\,(a_{n,k} k + k a_{n,k+1}) \\
& +\gamma a_{n,k+1} \\
= \; & n\,(e\,(n-1)+2\varepsilon)\,(a_{n,k} + a_{n,k+1}) \qquad (3.1.9)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1.9) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& (n-k)\,(e\,(n+k-1)+2\varepsilon)\,a_{n,k} \\
& +(en\,(n-1) - k\,(2k-1) + 2\varepsilon\,(n-k) - 2fk - \gamma)\,a_{n,k+1} \\
& -\left(ek^2 + 2fk + g\right)a_{n,k+2} \\
= \; & 0 \qquad (3.1.10)
\end{aligned}$$

üç terimli rekürans bağıntısı elde edilir.

(3.1.6) denkleminde $c \neq 0$ alınıp benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
0 \; = \; & (n-k)\,(e\,(n+k-1)+2\varepsilon)\,a_{n,k} \\
& +\{en\,(n-1) + 2\varepsilon\,(n-k) - ek\,(2k-1-2\varepsilon) \\
& +2\varepsilon c - 2fk - \gamma\}a_{n,k+1} \\
& -\left(e\,(k-c)^2 + 2f\,(k-c) + g\right)a_{n,k+2} \qquad (3.1.11)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.1.11) denkleminde $s(k) = (n-k)(e(n+k-1)+2\varepsilon)$ ve

$t(k+1) = -\left(e(k-c)^2 + 2f(k-c) + g\right)$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= s(k)\,a_{n,k} + \{s(k+1) + t(k) + \left[e(c+1)^2 - 2f(c+1) + g\right] \\ &\quad +2\varepsilon(c+1) - \gamma\}a_{n,k+1} + t(k+1)\,a_{n,k+2} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

bulunur.

Eğer $e(c+1)^2 - 2f(c+1) + g = -2\varepsilon(c+1) + \gamma$ eşitliği sağlanırsa (3.1.12) denklemi

$$0 = (s(k)\,a_{n,k} + t(k)\,a_{n,k+1}) + (s(k+1)\,a_{n,k+1} + t(k+1)\,a_{n,k+2}) \tag{3.1.13}$$

şekline dönüşür.

(3.1.13) denkleminde $k = n-1$ alınırsa

$$0 = s(n-1)\,a_{n,n-1} + t(n-1)\,a_{n,n} + s(n)\,a_{n,n} + t(n)\,a_{n,n+1}$$

olup, $s(n) = 0$ ve $a_{n,n+1} = 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$s(n-1)\,a_{n,n-1} + t(n-1)\,a_{n,n} = 0$$

elde edilir. $R(k) = s(k)\,a_{n,k} + t(k)\,a_{n,k+1}$ alınırsa

$$R(n-1) = s(n-1)\,a_{n,n-1} + t(n-1)\,a_{n,n} = 0 \tag{3.1.14}$$

bulunur.

(3.1.13) denkleminde $k = n-2$ alınıp, (3.1.14) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= s(n-2)\,a_{n,n-2} + t(n-2)\,a_{n,n-1} + s(n-1)\,a_{n,n-1} + t(n-1)\,a_{n,n} \\ 0 &= R(n-2) + R(n-1) \\ 0 &= R(n-2) \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

elde edilir.

Benzer şekilde devam edilirse $k = n-1, n-2, n-3, ..., 0$ için

$$R(k) = s(k)\,a_{n,k} + t(k)\,a_{n,k+1} = 0$$

bulunur. O halde c katsayısının

$$e(c+1)^2 - 2f(c+1) + g = -2\varepsilon(c+1) + \gamma$$

eşitliğini sağlaması koşuluyla $k = n-1, n-2, ..., 0$ için

$$(n-k)\left(e\left(n+k-1\right)+2\varepsilon\right)a_{n,k} - \left(e\left(k-1-c\right)^2 + 2f\left(k-1-c\right)+g\right)a_{n,k+1} = 0 \tag{3.1.16}$$

iki terimli rekürans bağıntısı elde edilir. Bu ise istenilendir.

Lemma 3.1.2: (3.1.2) ile verilen eşitliği sağlamayan c katsayıları için

$$ec^2 - 2fc + g = 0 \tag{3.1.17}$$

eşitliğinin sağlanması koşuluyla $k = n-1, n-2, ..., 0$ için

$$\begin{aligned} & (n-k)\left(e\left(n+k-1\right)+2\varepsilon\right)b_{n,k} + \left(ek^2 + 2\left(ec-f+\varepsilon\right)k + 2\varepsilon c - \gamma\right)b_{n,k+1} \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

dir.

İspat: (2.1.9) denkleminde $b_{n,n} = n!$ olması koşuluyla $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+c+k-2}{k}$ yazılır,

$$\begin{aligned}
\Delta\binom{x+c+k-2}{k} &= \binom{x+c+k-2}{k-1} \\
\Delta^2\binom{x+c+k-2}{k} &= \binom{x+c+k-2}{k-2} \\
x\binom{x+c+k-2}{k-1} &= k\binom{x+c+k-2}{k} + (1-c)\binom{x+c+k-2}{k-1} \\
x^2\binom{x+c+k-2}{k-2} &= k(k-1)\binom{x+c+k-2}{k} \\
&\quad + (k-1)(1-2c)\binom{x+c+k-2}{k-1} \\
&\quad + c^2\binom{x+c+k-2}{k-2} \\
x\binom{x+c+k-2}{k-2} &= (k-1)\binom{x+c+k-2}{k-1} - c\binom{x+c+k-2}{k-1} \\
\binom{(x+1)+c+k-2}{k} &= \binom{x+c+k-1}{k} \\
&= \binom{x+c+k-2}{k} + \binom{x+c+k-2}{k-1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa, (2.1.9) denklemi

$$\begin{aligned}
&\left(ex^2+2fx+g\right)\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+c+k-2}{k-2}\\
&+\left(2\varepsilon x+\gamma\right)\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+c+k-2}{k-1}\\
=\;& n\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right)\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+c+k-1}{k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e(\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}[k\left(k-1\right)\binom{x+c+k-2}{k}+\left(k-1\right)\left(1-2c\right)\binom{x+c+k-2}{k-1}\\
&+c^2\binom{x+c+k-2}{k-2}])\\
&+2f\left(\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\left[\left(k-1\right)\binom{x+c+k-2}{k-1}-c\binom{x+c+k-2}{k-1}\right]\right)\\
&+g\left(\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+c+k-2}{k-2}\right)\\
&+2\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\left[k\binom{x+c+k-2}{k}+\left(1-c\right)\binom{x+c+k-2}{k-1}\right]\right)\\
&+\gamma\left(\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+c+k-2}{k-1}\right)\\
=\;& n\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\left[\binom{x+c+k-2}{k}+\binom{x+c+k-2}{k-1}\right]\right) \qquad (3.1.19)
\end{aligned}$$

şekline dönüşür.

(3.1.19) denkleminde katsayılar karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left(n-k\right)\left(e\left(n+k-1\right)+2\varepsilon\right)\binom{x+c+k-1}{k}b_{n,k}\\
&+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(e\left(k-1\right)+2\varepsilon\right)\left(k-1\right)+2\left(k-1\right)\left(ec-f\right)+2\varepsilon c-\gamma\right]\binom{x+c+k-2}{k-1}b_{n,k}\\
&-\sum_{k=2}^{n}\left(ec^2-2fc+g\right)\binom{x+c+k-2}{k-2}b_{n,k}\\
=\;& 0 \qquad (3.1.20)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1.20) denkleminde

$$ec^2-2fc+g=0$$

eşitliğinin sağlanması koşuluyla $k = n-1, n-2, ..., 0$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (n-k)\left(e\left(n+k-1\right)+2\varepsilon\right)b_{n,k} \\ &\quad + \left[k\left(ek+2\varepsilon\right)+2k\left(ec-f\right)+2\varepsilon c-\gamma\right]b_{n,k+1} \end{aligned}$$

iki terimli rekürans bağıntısı elde edilir. Bu ise istenilendir.

Lemma 3.1.3: Λ, $\mathcal{P}$ polinomlar uzayında tanımlı ve $n = 1, 2, ...$ için

$$\Lambda\left[1\right] = 1, \quad \Lambda\left[y_n\right] = 0 \tag{3.1.21}$$

koşullarını sağlayan lineer bir operatör olmak üzere $\forall p \in \mathcal{P}$ polinomları için

$$\Lambda\left[\varphi\left(x-1\right)\left(\Delta p\right)\left(x\right)+\psi\left(x-1\right)p\left(x\right)\right] = 0 \tag{3.1.22}$$

ve $\forall m, n \in \{0, 1, 2, ...\}$ için

$$\Lambda\left[\varphi\left(x-1\right)\left(\Delta y_m\right)\left(x\right)\left(\Delta y_n\right)\left(x\right)\right] = -\lambda_n \Lambda\left[y_n\left(x\right)y_m\left(x\right)\right] \tag{3.1.23}$$

eşitliklerini sağlar. Burada y_n ler (2.1.10) denkleminin monik polinom çözümleridir.

İspat:

$$p^*\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k y_k\left(x\right), \quad a_k \in \mathbb{R} \tag{3.1.24}$$

şeklinde bir p^* polinomu tanımlayalım. Burada $p\left(x\right)$ polinomu

$$p\left(x\right) = \left(\Delta p^*\right)\left(x-1\right) = p^*\left(x\right) - p^*\left(x-1\right) \tag{3.1.25}$$

eşitliğini sağlasın.

(3.1.24) eşitliği (2.1.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \varphi\left(x\right)\left(\Delta^2 p^*\right)\left(x\right)+\psi\left(x\right)\left(\Delta p^*\right)\left(x\right) \\ = \; & \varphi\left(x\right)\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\Delta^2 y_k\right)\left(x\right)+\psi\left(x\right)\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\Delta y_k\right)\left(x\right) \\ = \; & \sum_{k=0}^{n} a_k\left\{\varphi\left(x\right)\left(\Delta^2 y_k\right)\left(x\right)+\psi\left(x\right)\left(\Delta y_k\right)\left(x\right)\right\} \\ = \; & \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k y_k\left(x+1\right) \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

elde edilir. (3.1.26) eşitliğinde x yerine $x-1$ alınır, (3.1.25) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \varphi(x-1)\Delta(\Delta p^*(x-1)) + \psi(x-1)(\Delta p^*)(x-1) \\ = & \varphi(x-1)\Delta p(x) + \psi(x-1)p(x) \\ = & \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k y_k(x) \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

bulunur. (3.1.27) denkleminin her iki tarafına Λ operatörü uygulanır, (3.1.21) koşulu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \Lambda[\varphi(x-1)\Delta p(x) + \psi(x-1)p(x)] &= \Lambda\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k y_k(x)\right] \\ &= a_0\lambda_0.1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k\Lambda[y_k(x)] \\ &= a_0.0.1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise (3.1.22) eşitliğidir.

(2.1.10) eşitliğinde x yerine $x-1$ alınırsa

$$\varphi(x-1)\left(\Delta^2 y_n\right)(x-1) + \psi(x-1)(\Delta y_n)(x-1) = \lambda_n y_n(x)$$

olup, bu denklemin her iki tarafı $y_m(x)$ ile çarpılırsa

$$\varphi(x-1)\left(\Delta^2 y_n\right)(x-1)y_m(x) + \psi(x-1)(\Delta y_n)(x-1)y_m(x) = \lambda_n y_n(x)y_m(x) \tag{3.1.28}$$

elde edilir.

$$\Delta(p_1(x)p_2(x)) = (\Delta p_1)(x)p_2(x) + p_1(x+1)(\Delta p_2)(x)$$

eşitliğinde

$$(\Delta y_n)(x-1) = p_1(x) \quad \text{ve} \quad y_m(x) = p_2(x)$$

alınırsa

$$\Delta((\Delta y_n)(x-1)y_m(x)) - (\Delta y_n)(x)(\Delta y_m)(x) = \left(\Delta^2 y_n\right)(x-1)y_m(x) \tag{3.1.29}$$

bulunur. (3.1.29) eşitliği (3.1.28) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_n y_n(x)y_m(x) &= \varphi(x-1)\left(\Delta^2 y_n\right)(x-1)y_m(x) + \psi(x-1)(\Delta y_n)(x-1)y_m(x) \\ &= \varphi(x-1)\{\Delta((\Delta y_n)(x-1)y_m(x)) - (\Delta y_n)(x)(\Delta y_m)(x)\} \\ &\quad + \psi(x-1)\Delta y_n(x-1)y_m(x) \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

elde edilir.

(3.1.30) eşitliğinin her iki tarafına Λ operatörü uygulanır, $p(x) = \Delta y_n(x-1)\, y_m(x)$ alınır ve (3.1.22) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\Lambda\left[\lambda_n y_n(x)\, y_m(x)\right] &= \Lambda\left[\varphi(x-1)(\Delta p)(x) + \psi(x-1)\, p(x)\right] \\
&\quad -\Lambda\left[\varphi(x-1)\,\Delta y_n(x)\,\Delta y_m(x)\right] \\
&= 0 - \Lambda\left[\varphi(x-1)\,\Delta y_n(x)\,\Delta y_m(x)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise (3.1.23) eşitliğidir.

Lemma 3.1.4: (Düzgünlük Koşulu) N, herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere aşağıdaki cümleler denktir.

1) $\forall n = 0, 1, 2, ..., N$ için (2.1.10) ile verilen özdeğer probleminin bir y_n çözümü vardır.

2) $\forall m, n \in \{01, 2, ..., N\}$ için $m \neq n$ ise $\lambda_m \neq \lambda_n$ dir.

Lemma 3.1.5: (2.1.10) ile verilen fark denkleminin monik polinom çözümleri olan y_n ler, $n = 0, 1, 2, ...$ için düzgünlük koşulunu sağlasın. O halde Λ lineer operatörü $m, n \in \{0, 1, 2, ...\}$ için

$$\Lambda\left[y_m y_n\right] = 0, \quad m \neq n \tag{3.1.31}$$

koşulunu sağlar.

İspat: (3.1.23) eşitliğinde n ve m indislerinin yerleri değiştirilirse

$$\begin{aligned}
\Lambda\left[\varphi(x-1)\,\Delta y_m(x)\,\Delta y_n(x)\right] &= -\lambda_n \Lambda\left[y_n(x)\, y_m(x)\right] \\
\Lambda\left[\varphi(x-1)\,\Delta y_n(x)\,\Delta y_m(x)\right] &= -\lambda_m \Lambda\left[y_m(x)\, y_n(x)\right]
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

elde edilir. (3.1.32) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılırsa

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m)\,\Lambda\left[y_n(x)\, y_m(x)\right] \tag{3.1.33}$$

bulunur. Düzgünlük koşuluna göre $m \neq n$ için $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\Lambda\left[y_n(x)\, y_m(x)\right] = 0$$

olup, (3.1.31) eşitliği gerçeklenir.

Lemma 3.1.6: (2.1.10) ile verilen fark denkleminin monik polinom çözümleri olan y_n ler, $n = 1, 2, ...$ için

$$y_{n+1}(x) = (x - c_n)y_n(x) - d_n y_{n-1}(x) \tag{3.1.34}$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlar.

İspat: Bu lemmanın ispatı için öncelikle aşağıdaki lemmaların ispatını vermeliyiz.

Lemma 3.1.7: $N \in \{1, 2, 3, ...\}$ olacak şekilde bir sayıdır. $n = 0, 1, 2, ..., N - 1$ için

$$\Lambda\left[y_n^2\right] \neq 0 \quad \text{ve} \quad \Lambda\left[y_N^2\right] = 0 \tag{3.1.35}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda (2.1.10) denkleminin monik polinom çözümleri olan y_n ler, $n = 0, 1, 2, ..., N + 1$ için

$$y_{n+1}(x) = (x - c_n)\, y_n(x) - d_n y_{n-1}(x) \tag{3.1.36}$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlar ve bu durumda $d_N = 0$ dır.

İspat: $y_{n+1}(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ için

$$y_{n+1}(x) = xy_n(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} y_k(x), \quad a_k^{(n)} \in \mathbb{R} \tag{3.1.37}$$

şeklinde yazılabilir.

$v \in \{0, 1, 2, ..., n - 2\}$ olmak üzere (3.1.37) eşitliğinin her iki yanı $y_v(x)$ ile çarpılırsa,

$$y_{n+1}(x)\, y_v(x) = xy_n(x)\, y_v(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} y_k(x)\, y_v(x) \tag{3.1.38}$$

elde edilir.

(3.1.38) denkleminde $xy_v(x)$ yerine (3.1.37) eşitliğinden elde edilen $y_{v+1}(x) - \sum_{m=0}^{v} a_m^{(v)} y_m(x)$ ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x)\, y_v(x) &= y_n(x)\left(y_{v+1}(x) - \sum_{m=0}^{v} a_m^{(v)} y_m(x)\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} y_k(x)\, y_v(x) \\ &= y_n(x)\, y_{v+1}(x) - \sum_{m=0}^{v} a_m^{(v)} y_n(x)\, y_m(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} y_k(x)\, y_v(x) \end{aligned} \tag{3.1.39}$$

bulunur.

(3.1.39) denkleminin her iki tarafına Λ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Lambda\left[y_{n+1}(x)\, y_v(x)\right] &= \Lambda\left[y_n(x)\, y_{v+1}(x)\right] - \sum_{m=0}^{v} a_m^{(v)} \Lambda\left[y_n(x)\, y_m(x)\right] \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \Lambda\left[y_k(x)\, y_v(x)\right] \\
0 &= 0 - \sum_{m=0}^{v} a_m^{(v)}.0 + a_v^{(n)} \Lambda\left[y_v^2\right] \qquad (3.1.40)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.40) eşitliğinde $v \in \{0, 1, 2, ..., n-2\}$ için $\Lambda\left[y_v^2\right] \neq 0$ olduğu gözönüne alınırsa $a_v^{(n)} = 0$ bulunur. Bu değer (3.1.37) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= x y_n(x) + \sum_{v=0}^{n} a_v^{(n)} y_v(x) \\
&= x y_n(x) + \sum_{v=0}^{n-2} a_v^{(n)} y_v(x) + a_{n-1}^{(n)} y_{n-1}(x) + a_n^{(n)} y_n(x) \\
&= x y_n(x) + 0 + a_{n-1}^{(n)} y_{n-1}(x) + a_n^{(n)} y_n(x) \\
&= \left(x + a_n^{(n)}\right) y_n(x) + a_{n-1}^{(n)} y_{n-1}(x) \qquad (3.1.41)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.1.41) eşitliğinde $c_n = -a_n^{(n)}$ ve $d_n = -a_{n-1}^{(n)}$ alınırsa (3.1.36) ile verilen rekürans bağıntısına ulaşılır.

(3.1.36) denkleminde $n = N$ alınır, denklemin her iki yanı $y_{N-1}(x)$ ile çarpılırsa

$$y_{N+1}(x)\, y_{N-1}(x) = (x - c_N)\, y_N(x)\, y_{N-1}(x) - d_N y_{N-1}^2(x) \qquad (3.1.42)$$

elde edilir. (3.1.42) denkleminde eşitliğin her iki yanına Λ operatörü uygulanırsa

$$\Lambda\left[y_{N+1}(x)\, y_{N-1}(x)\right] = \Lambda\left[x y_N(x)\, y_{N-1}(x)\right] - c_n \Lambda\left[y_N(x)\, y_{N-1}(x)\right] - d_n \Lambda\left[y_{N-1}^2(x)\right]$$

olup (3.1.31) eşitliği gözönüne alınırsa

$$0 = \Lambda\left[x y_N(x)\, y_{N-1}(x)\right] - 0 - d_n \Lambda\left[y_{N-1}^2(x)\right]$$

bulunur. Eşitlik düzenlenip, (3.1.37) denklemi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
d_N &= \frac{\Lambda\left[x y_N(x)\, y_{N-1}(x)\right]}{\Lambda\left[y_{N-1}^2(x)\right]} \\
&= \frac{\Lambda\left[y_N(x)\left(x y_{N-1}(x)\right)\right]}{\Lambda\left[y_{N-1}^2(x)\right]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Lambda\left[y_N(x)\left(y_N(x)-\sum_{s=0}^{N-1}\alpha_s^{(N-1)}y_s(x)\right)\right]}{\Lambda\left[y_{N-1}^2(x)\right]} \\
&= \frac{\Lambda\left[y_N(x)\,y_N(x)\right]-\sum_{s=0}^{N-1}\alpha_s^{(N-1)}\Lambda\left[y_N(x)\,y_s(x)\right]}{\Lambda\left[y_{N-1}^2(x)\right]} \\
&= \frac{0-0}{\Lambda\left[y_{N-1}^2(x)\right]}=0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lemma 3.1.8: (2.1.10) ile verilen fark denkleminin monik polinom çözümleri olan y_n ler (3.1.36) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısını ve $n \to \infty$ için düzgünlük koşulunu sağlasın.

Bu durumda n. dereceden monik polinomlar olan $\tilde{y}_n$ lar $n = 0, 1, 2, ...$ için

$$
y_{N+n} = \tilde{y}_n y_N \tag{3.1.43}
$$

koşulunu sağlar ve

$$
\tilde{\varphi}(x)\left(\Delta^2\tilde{y}_n\right)(x)+\tilde{\psi}(x)\left(\Delta\tilde{y}_n\right)(x)=\tilde{\lambda}_n\tilde{y}_n(x+1) \tag{3.1.44}
$$

fark denkleminin çözümüdür.

İspat: $k = 0$ için $\tilde{y}_0(x) = 1$ olduğu açıktır.

$k = 1$ için, (3.1.36) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısında $n = N$ alınıp, lemma 3.1.7'den $d_N = 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
y_{N+1}(x) &= (x-c_N)\,y_N(x)-d_N y_{N-1}(x) \\
&= (x-c_N)\,y_N(x) \qquad (3.1.45)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.1.45) denkleminde $x - c_N = \tilde{y}_1(x)$ alınırsa

$$
y_{N+1}(x) = \tilde{y}_1(x)\,y_N(x)
$$

bulunur.

$k = 2$ için, (3.1.36) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısında $n = N + 1$ alınıp, (3.1.45) eşitliği gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
y_{N+2}(x) &= (x-c_{N+1})\,y_{N+1}(x)-d_{N+1}y_N(x) \\
&= (x-c_{N+1})(x-c_N)\,y_N(x)-d_{N+1}y_N(x) \\
&= \left((x-c_{N+1})(x-c_N)-d_{N+1}\right)y_N(x) \qquad (3.1.46)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.1.46) denkleminde $(x-c_{N+1})(x-c_N)-d_{N+1}=\tilde{y}_2(x)$ alınırsa

$$y_{N+2}(x)=\tilde{y}_2(x)\,y_N(x)$$

bulunur. Benzer şeklide devam edilirse $k=0,1,2,...$ için $y_{N+k}=\tilde{y}_k y_N$ eşitliği elde edilir.

(3.1.43) eşitliğinin her iki tarafına Δ fark operatörü uygulanırsa

$$\Delta(y_N\tilde{y}_k)=(\Delta y_N)(x)\,\tilde{y}_k(x)+y_N(x+1)(\Delta\tilde{y}_k)(x) \tag{3.1.47}$$

eşitliği elde edilir.

(3.1.43) eşitliğinin her iki tarafına Δ fark operatörü iki kez uygulanır, (3.1.47) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\Delta^2(y_{N+k}) &= \Delta(\Delta(y_N\tilde{y}_k)) \\
&= \Delta((\Delta y_N)(x)\,\tilde{y}_k(x)+(\Delta\tilde{y}_k)(x)\,y_N(x+1)) \\
&= \left(\Delta^2 y_N\right)(x)\,\tilde{y}_k(x+1)+(\Delta y_N)(x)(\Delta\tilde{y}_k)(x) \\
&\quad +y_N(x+2)\left(\Delta^2\tilde{y}_k\right)(x)+(\Delta\tilde{y}_k)(x)(\Delta y_N)(x+1) \qquad (3.1.48)
\end{aligned}$$

bulunur. Aşağıda verilen eşitlikte (3.1.43) ve (3.1.48) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda_{N+k}y_N(x+1)\,\tilde{y}_k(x+1) &= \lambda_{N+k}y_{N+k}(x+1) \\
&= \varphi(x)\left(\Delta^2 y_{N+k}\right)(x)+\psi(x)(\Delta y_{N+k})(x) \\
&= \varphi(x)\{\Delta^2 y_N(x)\,\tilde{y}_k(x+1)+\Delta y_N(x)\,\Delta\tilde{y}_k(x) \\
&\quad +y_N(x+2)\,\Delta^2\tilde{y}_k(x)+\Delta\tilde{y}_k(x)\,\Delta y_N(x+1)\} \\
&\quad +\psi(x)\{\Delta y_N(x)\,\tilde{y}_k(x+1)+y_N(x)\,\Delta\tilde{y}_k(x)\} \\
&= \varphi(x)\,y_N(x+2)\,\Delta^2\tilde{y}_k(x)+\Delta\tilde{y}_k(x)\{\varphi(x)\,\Delta y_N(x) \\
&\quad +\varphi(x)\,\Delta y_N(x+1)+\psi(x)\,y_N(x)\} \\
&\quad +\tilde{y}_k(x+1)\left\{\varphi(x)\,\Delta^2 y_N(x)+\psi(x)\,\Delta y_N(x)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&[\varphi(x)\,y_N(x+2)]\,\Delta^2\tilde{y}_k(x) \\
&+\Delta\tilde{y}_k(x)\,[\varphi(x)\,\Delta y_N(x)+\varphi(x)\,\Delta y_N(x+1)+\psi(x)\,y_N(x)] \\
=\ &(\lambda_{N+k}-\lambda_N)\,y_N(x+1)\,\tilde{y}_k(x+1)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)\, y_N(x+2)}{y_N(x+1)}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{\varphi(x)\, \Delta y_N(x) + \varphi(x)\, \Delta y_N(x+1) + \psi(x)\, y_N(x)}{y_N(x+1)}$$

ve

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_{N+k} - \lambda_n$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.7'den, $N \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$ olacak şekildeki bir N sayısı için $d_N = 0$ olmak üzere y_n polinom çözümleri $n \in \{0, 1, 2, ..., N+1\}$ için (3.1.36) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısını sağlar.

$N' \in \{0, 1, 2, ...\}$ olacak şekildeki bir N' sayısı için $d_{N'} = 0$ olmak üzere $\tilde{y}_n$ polinom çözümleri $n \in \{0, 1, 2, ..., N'+1\}$ için

$$\tilde{y}_{n+1}(x) = (x - \tilde{c}_n)\, \tilde{y}_n - \tilde{d}_n \tilde{y}_{n-1} \tag{3.1.49}$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlar.

(3.1.43) eşitliğinden

$$\begin{aligned} y_N &= y_N \\ y_{N+1} &= \tilde{y}_1 y_N \\ &\vdots \\ y_{N+N'+1} &= \tilde{y}_{N'+1} y_N \end{aligned} \tag{3.1.50}$$

bulunur.

(3.1.49) eşitliğinin her iki yanı y_N ile çarpılırsa

$$y_N \tilde{y}_{n+1}(x) = (x - \tilde{c}_n)\, y_N \tilde{y}_n - \tilde{d}_n \tilde{y}_{n-1} y_N$$

olup, lemma 3.1.8'den

$$y_{N+n+1} = (x - \tilde{c}_n)\, y_{N+n} - \tilde{d}_n y_{N+n-1} \tag{3.1.51}$$

elde edilir.

$\tilde{y}_0,\ \tilde{y}_1, ...,\ \tilde{y}_{N'+1}$ polinom çözümleri (3.1.49) bağıntısını sağladığı için bu çözümlerin y_N ile çarpılmış hali olan (3.1.50) çözümleri de (3.1.51) bağıntısını sağlar. Bu durumda,

(2.1.10) ile verilen fark denkleminin polinom çözümleri olan y_n ler $n = 0, 1, 2, ..., N + N' + 1$ için (3.1.36) bağıntısını sağlar.

Benzer şekilde devam edilirse y_n lerin $n \to \infty$ için (3.1.34) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısını sağladığı görülür. Bu ise istenilendir.

Lemma 3.1.9: $y_n(x)$ ler (3.1.1) eşitliği ile verilen monik polinom çözümler olmak üzere

$$y_{n+1}(x) = (x - c_n)y_n(x) - d_n y_{n-1}(x)$$

üç terimli rekürans bağıntısındaki

$$c_n = \frac{n(e(n-1)+2\varepsilon)(2(e-f)+\varepsilon)+(e-\varepsilon)(\gamma-2\varepsilon)}{2(e(n-1)+\varepsilon)(en+\varepsilon)}$$

ve

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{n(e(n-2)+2\varepsilon)}{4(e(2n-3)+2\varepsilon)(e(n-1)+\varepsilon)^2(e(2n-1)+2\varepsilon)} \\ &\quad \{e(n-1)^2(e(n-1)+2\varepsilon)^2 \\ &\quad +2(n-1)(e(n-1)+2\varepsilon)(2eg+2f(\varepsilon-f)-e\gamma) \\ &\quad +4\varepsilon\left(g\varepsilon - f\gamma + e\gamma^2\right)\} \end{aligned} \tag{3.1.52}$$

dir.

İspat: Üç terimli rekürans bağıntısındaki $c_n,\ d_n$ katsayılarını bulmak için

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k, \quad a_n^{(n)} = 1,\ n = 0, 1, ... \tag{3.1.53}$$

eşitliğini kullanacağız.

1) (3.1.53) eşitliğinde $n = 1$ alınırsa $y_1(x) = a_0^{(1)} + x$ bulunur. (3.1.34) ve (3.1.53) eşitliklerinden

$$y_1(x) = x - c_0 = a_0^{(1)} + x \quad \Longrightarrow \quad c_0 = -a_0^{(1)} \tag{3.1.54}$$

bağıntısı elde edilir.

2) (3.1.34) eşitliğinde $n = 1$ alınırsa

$$y_2(x) = (x - c_1)y_1(x) - d_1 y_0(x) \tag{3.1.55}$$

bulunur. (3.1.53) eşitliğinde $n = 2,\ n = 1$ ve $n = 0$ alınıp (3.1.55) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$a_0^{(2)} + a_1^{(2)}x + a_2^{(2)}x^2 = (x - c_1)\left(a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x\right) - d_1 a_0^{(0)} \tag{3.1.56}$$

elde edilir. Bu denklemde $a_n^{(n)} = 1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$a_0^{(2)} = -c_1 a_0^{(1)} - d_1 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = -a_0^{(2)} - c_1 a_0^{(1)} \tag{3.1.57}$$

bulunur.

(3.1.53) eşitliğindeki polinomlar (3.1.34) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(n+1)} x^k = (x - c_n) \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n-1)} x^k \tag{3.1.58}$$

elde edilir. (3.1.58) eşitliğinde x^n li terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa

$$a_n^{(n+1)} = a_{n-1}^{(n)} - c_n a_n^{(n)} \quad \Longrightarrow \quad c_n = a_{n-1}^{(n)} - a_n^{(n+1)} \tag{3.1.59}$$

bulunur.

Benzer şekilde (3.1.58) eşitliğinde x^{n-1} li terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa

$$a_{n-1}^{(n+1)} = a_{n-2}^{(n)} - c_n a_{n-1}^{(n)} - d_n a_{n-1}^{(n-1)} \quad \Longrightarrow \quad d_n = a_{n-2}^{(n)} - a_{n-1}^{(n+1)} - c_n a_{n-1}^{(n)}, \quad n = 2, 3, 4, ... \tag{3.1.60}$$

elde edilir.

$a_{n,n}$ ile $a_{n,n-1}$ katsayıları arasındaki bağıntıdan yola çıkarak $a_{n-1}^{(n)}$ ve $a_{n-2}^{(n)}$ katsayılarını bulacağız.

(3.1.10) denkleminde k yerine $n-1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & (n-(n-1))\left(e\left(n+(n-1)-1\right)+2\varepsilon\right) a_{n,n-1} \\ & +\{e\left(n(n-1)-(n-1)\left(2(n-1)-1\right)\right) \\ & +2\varepsilon\left(n-(n-1)\right)-2f(n-1)-\gamma\} a_{n,n} \\ & -\left(e(n-1)^2+2f(n-1)+g\right) a_{n,n+1} \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{3.1.61}$$

elde edilir. (3.1.61) bağıntısında $a_{n,n+1} = 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\left(e(2n-2)+2\varepsilon\right) a_{n,n-1} - \left(e\left(n^2-4n+3\right)-2\varepsilon+2f(n-1)+\gamma\right) a_{n,n} = 0$$

bulunur. Buradan $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$a_{n,n-1} = \frac{e\left(n^2-4n+3\right)-2\varepsilon+2f(n-1)+\gamma}{2\left(e(n-1)+\varepsilon\right)} a_{n,n} \tag{3.1.62}$$

elde edilir.

(3.1.10) denkleminde k yerine $n-2$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& (n-(n-2))\left(e\left(n+(n-2)-1\right)+2\varepsilon\right)a_{n,n-2} \\
& +\{e\left(n\left(n-1\right)-(n-2)\left(2\left(n-2\right)-1\right)\right) \\
& +2\varepsilon\left(n-(n-2)\right)-2f\left(n-2\right)-\gamma\}a_{n,n-1} \\
& -\left(e\left(n-2\right)^2+2f\left(n-2\right)+g\right)a_{n,n} \\
= \; & 0
\end{aligned} \tag{3.1.63}$$

bulunur. (3.1.63) bağıntısında (3.1.62) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(e\left(2n-3\right)+2\varepsilon\right)a_{n,n-2} \\
& +\left\{e\left(n\left(n-1\right)-(n-2)\left(2n-5\right)\right)+4\varepsilon-2f\left(n-2\right)-\gamma\right\} \\
& \left\{\frac{e\left(n^2-4n+3\right)-2\varepsilon+2f\left(n-1\right)+\gamma}{2e\left(n-1\right)+\varepsilon}\right\}a_{n,n} \\
& -\left(e\left(n-2\right)^2+2f\left(n-2\right)+g\right)a_{n,n} \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $n=2,3,4,...$ için

$$\begin{aligned}
a_{n,n-2} = \; & \{\frac{e\left(n-2\right)^2+2f\left(n-2\right)+g}{2\left(e\left(2n-3\right)+2\varepsilon\right)} \\
& +\left(e\left(n^2-8n+10\right)-4\varepsilon+2f\left(n-2\right)+\gamma\right) \\
& \frac{\left(e\left(n-1\right)\left(n-3\right)-2\varepsilon+2f\left(n-1\right)+\gamma\right)}{4\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)\left(e\left(2n-3\right)+2\varepsilon\right)}\}a_{n,n}
\end{aligned} \tag{3.1.64}$$

bulunur.

(3.1.1) ve (3.1.53) eşitliklerinde x^{n-1} li terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa $n=1,2,3,...$ için

$$\begin{aligned}
a_{n-1}^{(n)} &= \frac{a_{n,n-1}}{(n-1)!}-\frac{n\left(n-1\right)}{2} \\
&= n\left(\frac{a_{n,n-1}}{n!}-\frac{n-1}{2}\right) \\
&= n\left(\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}}-\frac{n-1}{2}\right) \\
&= n\left(\frac{e\left(n-1\right)\left(n-3\right)-2\varepsilon+2f\left(n-1\right)+\gamma}{2\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)}-\frac{n-1}{2}\right) \\
&= \frac{n\left(2\left(n-1\right)\left(f-e\right)-\left(n+1\right)\varepsilon+\gamma\right)}{2\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)}
\end{aligned} \tag{3.1.65}$$

elde edilir.

(3.1.1) ve (3.1.53) eşitliklerinde x^{n-2} li terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$\begin{aligned}
a_{n-2}^{(n)} &= \frac{a_{n,n-2}}{(n-2)!} - \frac{a_{n,n-1}}{(n-2)!}\frac{(n-2)}{2} + \binom{n}{3}\frac{3n-1}{4} \\
&= n(n-1)\left(\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}}\frac{(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(3n-1)}{24}\right) \\
&= n(n-1)(\{\frac{e(n-2)^2 + 2f(n-2) + g}{2(e(2n-3)+2\varepsilon)} \\
&\quad + \left(e\left(n^2 - 8n + 10\right) - 4\varepsilon + 2f(n-2) + \gamma\right) \\
&\quad \frac{(e(n-1)(n-3)) - 2\varepsilon + 2f(n-1) + \gamma}{4(e(n-1)+\varepsilon)(e(2n-3)+2\varepsilon)}\} \\
&\quad - \frac{(n-2)}{2}\frac{e(n^2-4n+3) - 2\varepsilon + 2f(n-1) + \gamma}{2(e(n-1)+\varepsilon)} \\
&\quad + \frac{(n-2)(3n-1)}{24}) \\
&= \frac{n(n-1)}{4(e(n-1)+\varepsilon)(e(2n-3)+2\varepsilon)} \\
&\quad \{\frac{1}{6}(n+1)(3n+2)(e(n-1)+\varepsilon)(e(2n-3)+2\varepsilon) \\
&\quad -en(n-1)^2(e(2n-3)+2\varepsilon) + e^2(n-1)^2(n-2)^2 \\
&\quad -2(2f(n-1)+\gamma)(e(2n-3)+n\varepsilon) - \gamma(e(n-1)+2\varepsilon) \\
&\quad +2(f(n-1)+\gamma)(2f(n-2)+\gamma) + 2g(e(n-1)+\varepsilon)\} \qquad (3.1.66)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi sırasıyla $c_0,\ c_n,\ d_1$ ve d_n katsayılarını bulalım.

$y_1(x) = x + a_0^{(1)}$ eşitliği (2.1.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(ex^2 + 2fx + g\right)(0) + (2\varepsilon x + \gamma)1 = 2\varepsilon\left(x + 1 + a_0^{(1)}\right)$$

bulunur. Sabit terimlerin eşitliğinden

$$\gamma = 2\varepsilon\left(1 + a_0^{(1)}\right)$$

olup,

$$a_0^{(1)} = \frac{\gamma}{2\varepsilon} - 1$$

elde edilir. Bulunan değer (3.1.54) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$c_0 = 1 - \frac{\gamma}{2\varepsilon} \qquad (3.1.67)$$

bulunur.

(3.1.65) eşitliği (3.1.59) denkleminde yerine yazılırsa $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$\begin{aligned} c_n &= a_{n-1}^{(n)} - a_n^{(n+1)} \\ &= \frac{n\left(2\left(n-1\right)\left(f-e\right)-\left(n+1\right)\varepsilon+\gamma\right)}{2\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)} \\ &\quad -\frac{\left(n+1\right)\left(2n\left(f-e\right)-\left(\left(n+1\right)+1\right)\varepsilon+\gamma\right)}{2\left(e\left(\left(n+1\right)-1\right)+\varepsilon\right)} \\ &= \frac{n\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right)\left(2\left(e-f\right)+\varepsilon\right)+\left(e-\varepsilon\right)\left(\gamma-2\varepsilon\right)}{2\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)\left(en+\varepsilon\right)} \end{aligned} \tag{3.1.68}$$

elde edilir.

(3.1.65) eşitliğinde $n = 1$, (3.1.66) eşitliğinde $n = 2$ alınır, (3.1.57) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d_1 &= -a_0^{(2)} - c_1 a_0^{(1)} \\ &= \frac{4\varepsilon\left(f\gamma-g\varepsilon\right)-e\gamma^2}{4\varepsilon^2\left(e+2\varepsilon\right)} \end{aligned}$$

bulunur.

(3.1.66) eşitliği (3.1.60) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d_n &= a_{n-2}^{(n)} - a_{n-1}^{(n+1)} - c_n a_{n-2}^{(n)} \\ &= \frac{n\left(n-1\right)}{4\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)\left(e\left(2n-3\right)+2\varepsilon\right)} \\ &\quad \{\frac{1}{6}\left(n+1\right)\left(3n+2\right)\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)\left(e\left(2n-3\right)+2\varepsilon\right) \\ &\quad -en\left(n-1\right)^2\left(e\left(2n-3\right)+2c\right)+e^2\left(n-1\right)^2\left(n-2\right)^2 \\ &\quad -2\left(2f\left(n-1\right)+\gamma\right)\left(e\left(2n-3\right)+n\varepsilon\right)-\gamma\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right) \\ &\quad +\left(2f\left(n-1\right)+\gamma\right)\left(2f\left(n-2\right)+\gamma\right)+2g\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)\} \\ &\quad -\frac{\left(n-1\right)\left(\left(n+1\right)-1\right)}{4\left(e\left(\left(n+1\right)-1\right)+\varepsilon\right)\left(e\left(2\left(n+1\right)-3\right)+2\varepsilon\right)} \\ &\quad \{\frac{1}{6}\left(\left(n+1\right)+1\right)\left(3\left(n+1\right)+2\right)\left(e\left(\left(n+1\right)-1\right)+\varepsilon\right)\left(e\left(2\left(n+1\right)-3\right)+2\varepsilon\right) \\ &\quad -e\left(n+1\right)\left(\left(n+1\right)-1\right)^2\left(e\left(2\left(n+1\right)-3\right)+2c\right) \\ &\quad +e^2\left(\left(n+1\right)-1\right)^2\left(\left(n+1\right)-2\right)^2 \\ &\quad -2\left(2f\left(\left(n+1\right)-1\right)+\gamma\right)\left(e\left(2\left(n+1\right)-3\right)+\left(n+1\right)\varepsilon\right) \\ &\quad -\gamma\left(e\left(\left(n+1\right)-1\right)+2\varepsilon\right) \\ &\quad +\left(2f\left(\left(n+1\right)-1\right)+\gamma\right)\left(2f\left(\left(n+1\right)-2\right)+\gamma\right)+2g\left(e\left(\left(n+1\right)-1\right)+\varepsilon\right)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{n\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right)\left(2\left(e-f\right)+\varepsilon\right)+\left(e-\varepsilon\right)\left(\gamma-2\varepsilon\right)}{2\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)\left(en+\varepsilon\right)} \\
& \left\{\frac{n\left(2\left(n-1\right)\left(f-e\right)-\left(n+1\right)\varepsilon+\gamma\right)}{2\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)}\right\} \\
= \quad & -\frac{n\left(e\left(n-2\right)+2\varepsilon\right)}{4\left(e\left(2n-3\right)+2\varepsilon\right)\left(e\left(n-1\right)+\varepsilon\right)^{2}\left(e\left(2n-1\right)+2\varepsilon\right)} \\
& \left\{e\left(n-1\right)^{2}\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right)^{2}\right. \\
& +2\left(n-1\right)\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right)\left(2eg+2f\left(\varepsilon-f\right)-e\gamma\right) \\
& \left.+4\varepsilon\left(g\varepsilon-f\gamma\right)+e\gamma^{2}\right\} \qquad (3.1.69)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

4. FARK DENKLEMLERİNİN SELF ADJOİNT FORMU

4.1 (2.1.10) Fark Denkleminin Self Adjoint Formu

Tanım 4.1.1: $f \in \mathcal{P},\ \omega \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\omega}{1-q}\right\}$ ve $\forall q \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ olmak üzere $(\mathbb{P}_{q,\omega}f)(x)$ operatörü

$$(\mathbb{P}_{q,\omega}f)(x) := f(qx+\omega) \tag{4.1.1}$$

ve $\hat{f}$ fonksiyonu

$$\hat{f}(x) := \left(\mathbb{P}_{q,\omega}^{-1}f\right)(x) = f((x-\omega)/q) \tag{4.1.2}$$

şeklinde olsun.

$W \in \mathcal{P}$ olmak üzere, (2.1.2) denkleminin her iki yanı $(\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\varphi(x)\left(\pounds_{q,\omega}^{2}y_n\right)(x) + (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\psi(x)\left(\pounds_{q,\omega}y_n\right)(x) \\ = \ & (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\lambda_n y_n(qx+\omega) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

elde edilir. (4.1.3) denkleminde (4.1.1) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\varphi(x)\left(\pounds_{q,\omega}^{2}y_n\right)(x) + (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\psi(x)\left(\pounds_{q,\omega}y_n\right)(x) \\ = \ & (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\lambda_n\left(\mathbb{P}_{q,\omega}y_n\right)(x) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

bulunur.

$$\left(\pounds_{q,\omega}(f_1f_2)\right)(x) = \left(\pounds_{q,\omega}f_1\right)(x)\,f_2(x) + f_1(qx+\omega)\left(\pounds_{q,\omega}f_2\right)(x) \tag{4.1.5}$$

eşitliğinde $f_1 = W\hat{\varphi},\ f_2 = \pounds_{q,\omega}y_n$ alınırsa

$$\begin{aligned} \left(\pounds_{q,\omega}\left(W\hat{\varphi}\left(\pounds_{q,\omega}y_n\right)\right)\right)(x) &= \left(\pounds_{q,\omega}(W\hat{\varphi})\right)(x)\left(\pounds_{q,\omega}y_n\right)(x) \\ &\quad + (W\hat{\varphi})(qx+\omega)\left(\pounds_{q,\omega}^{2}y_n\right)(x) \\ &= \left(\pounds_{q,\omega}(W\hat{\varphi})\right)(x)\left(\pounds_{q,\omega}y_n\right)(x) \\ &\quad + W(qx+\omega)\,\hat{\varphi}(qx+\omega)\left(\pounds_{q,\omega}^{2}y_n\right)(x) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. (4.1.6) eşitliğinde, (4.1.1) ve (4.1.2) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(\pounds_{q,\omega}\left(W\hat{\varphi}\left(\pounds_{q,\omega}y_n\right)\right)\right)(x) \\ = \ & \left(\pounds_{q,\omega}(W\hat{\varphi})\right)(x)\left(\pounds_{q,\omega}y_n\right)(x) + (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\varphi(x)\left(\pounds_{q,\omega}^{2}y_n\right)(x) \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

bulunur.

(4.1.3) dekleminin sol yanının (4.1.7) denkleminin sağ yanına eşit olabilmesi için, yani

$$\begin{aligned} & (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\varphi(x)\left(\pounds^2_{q,\omega}y_n\right)(x) + (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\psi(x)\,(\pounds_{q,\omega}y_n)(x) \\ = \; & (\pounds_{q,\omega}(W\hat{\varphi}))(x)\,(\pounds_{q,\omega}y_n)(x) + (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\varphi(x)\left(\pounds^2_{q,\omega}y_n\right)(x) \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$(\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\psi(x) = (\pounds_{q,\omega}(W\hat{\varphi}))(x) \tag{4.1.8}$$

olmalıdır. (4.1.8) eşitliğinde $(q,\omega) = (1,1)$ alınırsa

$$\psi(x)W(x+1) = \Delta\left(W(x)\,\varphi(x-1)\right) \tag{4.1.9}$$

elde edilir. (4.1.3) ve (4.1.7) denklemleri (4.1.8) koşulu altında tekrar gözönüne alırsa

$$(\pounds_{q,\omega}(W\hat{\varphi}(\pounds_{q,\omega}y_n)))(x) = (\mathbb{P}_{q,\omega}W)(x)\,\lambda_n y_n(qx+\omega) \tag{4.1.10}$$

olur. Burada $(q,\omega) = (1,1)$ alınırsa

$$\Delta\left(W(x)\,\varphi(x-1)\,\Delta y_n(x)\right) = \lambda_n W(x+1)\,y_n(x+1) \tag{4.1.11}$$

elde edilir. Bu ise (2.1.10) denkleminin self adjoint formudur.
(4.1.9) eşitliğinin sağ yanı açık olarak yazılırsa

$$W(x+1)\,\varphi(x) - W(x)\,\varphi(x-1) = W(x+1)\,\psi(x)$$

$$W(x+1)\left(\varphi(x) - \psi(x)\right) = W(x)\,\varphi(x-1)$$

$$\frac{W(x)}{W(x+1)} = \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\varphi(x-1)} \tag{4.1.12}$$

bulunur. (4.1.12) eşitliğinde $\varphi(x) = ex^2 + 2fx + g,\ \psi(x) = 2\varepsilon x + \gamma$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{W(x)}{W(x+1)} &= \frac{ex^2 + 2fx + g - (2\varepsilon x + \gamma)}{e(x-1)^2 + 2f(x-1) + g} \\ &= \frac{D(x+1)}{C(x)} \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

elde edilir. Burada $D(x) = C(x) - 2\varepsilon(x-1) - \gamma,\ C(x) = e(x-1)^2 + 2f(x-1) + g$ dir.

4.2 (2.1.10) Fark Denkleminin Ortogonallik Özelliği

Tanım 4.2.1: $N \in \{1, 2, 3, ...\}$ için aşağıdaki noktalar kümesini ele alalım:

$$x_v := A + v, \quad A \in \mathbb{R}, \quad v = 0, 1, 2, ..., N + 1 \tag{4.2.1}$$

ayrıca

$$x_{v+1} = A + v + 1 = x_v + 1 \tag{4.2.2}$$

dir.

Lemma 4.2.1: $N \in \{1, 2, 3, ...\}$ olmak üzere y_n polinomları

$$\sum_{v=0}^{N} W(A + v) y_m(A + v) y_n(A + v) = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \in \{0, 1, 2, ..., N\} \tag{4.2.3}$$

ortogonallik bağıntısını

$$W(A - 1) \varphi(A - 2) = 0 \quad \text{ve} \quad W(A + N) \varphi(A + N - 1) = 0 \tag{4.2.4}$$

koşulları altında sağlar.

İspat: Bu lemmanın ispatı için öncelikle aşağıdaki eşitlikleri gösterelim.
Şimdi

$$\sum_{v=0}^{N} \Delta(f_1(x_v)) f_2(x_v) = [f_1(x_v) f_2(x_v)]_{v=0}^{N+1} - \sum_{v=0}^{N} f_1(x_{v+1}) \Delta f_2(x_v) \tag{4.2.5}$$

eşitliğini gösterelim.

$$\Delta(f_1(x) f_2(x)) = f_1(x + 1) \Delta f_2(x) + f_2(x) \Delta f_1(x) \tag{4.2.6}$$

eşitliğinin her iki yanında $\sum$ uygulanırsa

$$\sum_{v=0}^{N} \Delta(f_1(x_v) f_2(x_v)) = \sum_{v=0}^{N} (f_1(x_v + 1) \Delta f_2(x_v) + f_2(x_v) \Delta f_1(x_v)) \tag{4.2.7}$$

bulunur. (4.2.7) eşitliğinin sol yanına fark operatörü tanımı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \Delta(f_1(x_0) f_2(x_0)) + \Delta(f_1(x_1) f_2(x_1)) + ... + \Delta(f_1(x_N) f_2(x_N)) \\
= \; & f_1(x_1) f_2(x_1) - f_1(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_2) f_2(x_2) - f_1(x_1) f_2(x_1) \\
& + ... + f_1(x_{N+1}) f_2(x_{N+1}) - f_1(x_N) f_2(x_N) \\
= \; & (f_1 f_2)(x_{N+1}) - (f_1 f_2)(x_0) \\
= \; & [f_1(x_v) f_2(x_v)]_{v=0}^{N+1}
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

elde edilir.

(4.2.7) ve (4.2.8) denklemlerinin eşitliğinden (4.2.5) eşitliğine ulaşılır.

(4.1.11) eşitliğinde x yerine $x-1$ alınır, eşitliğin her iki tarafı $y_m(x)$ ile çarpılırsa

$$\lambda_n W(x) y_n(x) y_m(x) = \Delta\left(W(x-1)\varphi(x-2)\Delta y_n(x-1)\right) y_m(x) \tag{4.2.9}$$

bulunur. (4.2.9) eşitliğinde n yerine m alınıp taraf tarafa çıkartılırsa

$$\begin{aligned} & (\lambda_n - \lambda_m) W(x) y_n(x) y_m(x) \\ = \; & \Delta\left(W(x-1)\varphi(x-2)\Delta y_n(x-1)\right) y_m(x) \\ & -\Delta\left(W(x-1)\varphi(x-2)\Delta y_m(x-1)\right) y_n(x) \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

elde edilir. (4.2.10) eşitliğinin her iki yanının $v = 0, 1, 2, ..., N$ için toplamı alınırsa

$$\begin{aligned} & (\lambda_n - \lambda_m) \sum_{v=0}^{N} W(x_v) y_n(x_v) y_m(x_v) \\ = \; & \sum_{v=0}^{N} \left[\Delta\left(W(x_v-1)\varphi(x_v-2)\Delta y_n(x_v-1)\right) y_m(x_v)\right. \\ & \left. -\Delta\left(W(x_v-1)\varphi(x_v-2)\Delta y_m(x_v-1)\right) y_n(x_v)\right] \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

bulunur. (4.2.11) eşitliğinde işlemleri kısaltmak için

$$A(x_v) = W(x_v-1)\varphi(x_v-2)$$

alalım. O halde (4.2.11) eşitliği

$$\begin{aligned} & (\lambda_n - \lambda_m) \sum_{v=0}^{N} W(x_v) y_n(x_v) y_m(x_v) \\ = \; & \sum_{v=0}^{N} \left[\Delta\left(A(x_v)\Delta y_n(x_v-1)\right) y_m(x_v)\right. \\ & \left. -\Delta\left(A(x_v)\Delta y_m(x_v-1)\right) y_n(x_v)\right] \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

şekline dönüşür.

(4.2.12) eşitliğinin sağ kısmında

$$\Delta(f_1 f_2)(x) = f_1(x+1)\Delta f_2(x) + f_2(x)\Delta f_1(x)$$

eşitliği gözönüne alınır ve $f_1 = A(x_v)$, $f_2 = \Delta y_n(x_v-1)$; $g_1 = A(x_v)$, $g_2 =$

$\Delta y_m(x_v-1)$ denirse (4.2.12) eşitliği

$$\begin{aligned}
&(\lambda_n-\lambda_m)\sum_{v=0}^{N} W(x_v)\, y_n(x_v)\, y_m(x_v)\\
=\ &\sum_{v=0}^{N}\Big[\big(A(x_v+1)\,\Delta^2 y_n(x_v-1)+\Delta y_n(x_v-1)\,\Delta A(x_v)\big)\, y_m(x_v)\\
&-\big(A(x_v+1)\,\Delta^2 y_m(x_v-1)+\Delta y_m(x_v-1)\,\Delta A(x_v)\big)\, y_n(x_v)\Big]\\
=\ &\sum_{v=0}^{N}\Big[A(x_v+1)\big(\Delta^2 y_n(x_v-1)\, y_m(x_v)-\Delta^2 y_m(x_v-1)\, y_n(x_v)\big)\\
&+\Delta A(x_v)\left(\Delta y_n(x_v-1)\, y_m(x_v)-\Delta y_m(x_v-1)\, y_n(x_v)\right)\Big] \qquad (4.2.13)
\end{aligned}$$

şekline dönüşür. (4.2.13) eşitliğini (4.2.5) eşitliğine benzetebilmek için

$$\begin{aligned}
h_1 &= A(x_v)\\
h_2 &= \Delta y_n(x_v-1)\, y_m(x_v)-\Delta y_m(x_v-1)\, y_n(x_v)
\end{aligned}$$

olmak üzere $\Delta h_2(x_v)=\Delta^2 y_n(x_v-1)\, y_m(x_v)-\Delta^2 y_m(x_v-1)\, y_n(x_v)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\Delta h_2(x_v) &= \Delta\left(\Delta y_n(x_v-1)\, y_m(x_v)-\Delta y_m(x_v-1)\, y_n(x_v)\right)\\
&= \left[\Delta y_n(x_v)\,\Delta y_m(x_v)+y_m(x_v)\,\Delta^2 y_n(x_v-1)\right]\\
&\quad -\left[\Delta y_m(x_v)\,\Delta y_n(x_v)+y_n(x_v)\,\Delta^2 y_m(x_v-1)\right]\\
&= \Delta^2 y_n(x_v-1)\, y_m(x_v)-y_n(x_v)\,\Delta^2 y_m(x_v-1)
\end{aligned}$$

O halde (4.2.13) ve (4.2.12) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&(\lambda_n-\lambda_m)\sum_{v=0}^{N} W(x_v)\, y_n(x_v)\, y_m(x_v)\\
=\ &A(x_v)\left[\Delta y_n(x_v-1)\, y_m(x_v)-\Delta y_m(x_v-1)\, y_n(x_v)\right]_{v=0}^{N+1} \qquad (4.2.14)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.14) denkleminde $A(x_v)$, $y_n(x_v)$, $y_m(x_v)$ değerleri yerlerine yazılırsa (4.2.14) denklemi

$$\begin{aligned}
&(\lambda_n-\lambda_m)\sum_{v=0}^{N} W(x_v)\, y_n(x_v)\, y_m(x_v)\\
=\ &W(x_v-1)\,\varphi(x_v-2)\\
&\left[\Delta y_n(x_v-1)\, y_m(x_v)-\Delta y_m(x_v-1)\, y_n(x_v)\right]_{v=0}^{N+1} \qquad (4.2.15)
\end{aligned}$$

şekline dönüşür.

$m \neq n$ için $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğundan

$$W(x_{N+1}-1)\,\varphi(x_{N+1}-2)=0 \quad \text{ve} \quad W(x_0-1)\,\varphi(x_0-2)=0$$

olmalıdır.

$$\sum_{v=0}^{N} W(x_v)\,y_m(x_v)\,y_n(x_v)=0$$

olur, bu ise ispatı tamamlar.

Burada

$$\begin{aligned} W(x_{N+1}-1)\,\varphi(x_{N+1}-2) &= W(A+N)\,\varphi(A+N-1), \quad \text{ve} \\ W(x_0-1)\,\varphi(x_0-2) &= W(A-1)\,\varphi(A-2) \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

olduğu açıktır.

5. POZİTİF TANIMLI ORTOGONAL POLİNOM ÇÖZÜMLERİN SINIFLANDIRILMASI

5.1 $\varphi(x)$ Polinomunun Durumuna Göre Polinom Çözümlerinin Sınıflandırılması

Tanım 5.1.1: $n = 1, 2, 3, ...$ için $c_n \in \mathbb{R}$ ve $d_n > 0$ olmak üzere

$$y_n(x+1) = (x - c_n) y_n(x) - d_n y_{n-1}(x)$$

rekürans bağıntısını sağlayan polinom çözümlere pozitif tanımlı ortogonal polinom denir.

Aşağıdaki durumlarda fark denkleminin ortogonal polinom çözümleri $\varphi(x)$ polinomunun derecesine göre incelenecektir.

Durum 1: $\varphi(x) = ex^2 + 2fx + g$ olmak üzere $der(\varphi) = 0$ ise $e = f = 0$ dır ve özel olarak $g = 1$ alınırsa (3.1.52) eşitliğinden

$$c_n = \frac{2(n+1)\varepsilon - \gamma}{2\varepsilon}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.1.1}$$

ve

$$d_n = -\frac{n}{2\varepsilon}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

bulunur. $n, \varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$ olduğundan $c_n \in \mathbb{R}$ dir. $2\varepsilon < 0$ için $d_n > 0$ olduğu görülmektedir.

Durum 2: $\varphi(x) = ex^2 + 2fx + g$ olmak üzere $der(\varphi) = 1$ ise $e = 0$ dır ve özel olarak $2f = 1$ alınırsa (3.1.52) eşitliğinden

$$c_n = \frac{2n(\varepsilon - 1) + 2\varepsilon - \gamma}{2\varepsilon}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.1.2}$$

ve

$$d_n = -\frac{n((n-1)(2\varepsilon - 1) + 2g\varepsilon - \gamma)}{4\varepsilon^2}, \quad n = 1, 2, ..$$

bulunur. $n, \varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$ olduğundan $c_n \in \mathbb{R}$ dir.

$d_n > 0$ koşulunun sağlandığı durumlar incelenecektir.

Durum 2.a: $2\varepsilon \leq 1$ ve $2g\varepsilon - \gamma < 0$ olsun.

Bu durumda

$$d_n = -\frac{n}{4\varepsilon^2}((n-1)(2\varepsilon - 1) + (2g\varepsilon - \gamma)) > 0, \quad 2\varepsilon \neq 0.$$

dır.

Durum 2.b: $2\varepsilon > 1$ ve $-N \leq \frac{2g\varepsilon-\gamma}{2\varepsilon-1} < -N+1$ olsun.
Bu durumda $n = 1, 2, ..., N$ için

$$d_n = -\frac{n}{4\varepsilon^2}(2\varepsilon - 1)\left((n-1) + \frac{(2g\varepsilon - \gamma)}{2\varepsilon - 1}\right) > 0$$

dır.

Durum 3: $\varphi(x) = ex^2 + 2fx + g$ olmak üzere $der(\varphi) = 2$ için özel olarak $e = 1$ alınırsa (3.1.52) eşitliğinden

$$c_n = \frac{n(n-1+2\varepsilon)(2(1-f)+\varepsilon)(1-\varepsilon)[\gamma - 2\varepsilon]}{2(n-1+\varepsilon)(n+\varepsilon)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ve

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{n(n-2+2\varepsilon)}{4(2n-3+2\varepsilon)(n+1+\varepsilon)^2(2n-1+2\varepsilon)} \\ &\quad \{(n-1)^2(n-1+2\varepsilon)^2 + 2(n-1)(n-1+2\varepsilon)(2g+2f(\varepsilon-f)-\gamma) \\ &\quad +4\varepsilon(g\varepsilon - f\gamma) + \gamma^2\} \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

bulunur. (5.1.3) eşitliğinde $n = 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned} D_n &= \left((n-1+\varepsilon)^2 - \delta^2 - \eta^2\right)^2 - 4\delta^2\eta^2 \\ &= (n-1+\varepsilon)^4 - 2\left(\delta^2+\eta^2\right)(n-1+\varepsilon)^2 + \left(\delta^2-\eta^2\right)^2 \\ &= (n-1+\varepsilon+\delta+\eta)(n-1+\varepsilon+\delta-\eta)(n-1+\varepsilon-\delta+\eta)(n-1+\varepsilon-\delta-\eta) \\ \delta^2 &= (f-\varepsilon)^2 - g + \gamma \\ \eta^2 &= f^2 - g \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

alınırsa

$$d_n = -\frac{n(n-2+2\varepsilon)}{4(2n-3+2\varepsilon)(n+1+\varepsilon)^2(2n-1+2\varepsilon)} D_n \tag{5.1.5}$$

olur.

Durum 3.a: $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$-\frac{n(n-2+2\varepsilon)}{4(2n-3+2\varepsilon)(n+1+\varepsilon)^2(2n-1+2\varepsilon)} < 0, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

dır. O halde $d_n > 0$ koşulunun sağlanması için $D_n < 0$ olması gerekir.
$(\delta - \eta)^2 < (n-1+\varepsilon)^2 < (\delta+\eta)^2$ eşitsizliği sağlanırsa

$$D_n = \left((n-1+\varepsilon)^2 - (\delta+\eta)^2\right)\left((n-1+\varepsilon)^2 - (\delta-\eta)^2\right) < 0$$

olur.

Durum 3.b: $N \in \{1,2,3,...\}$ ve $-1 < t \leq 1$ için $2\varepsilon = -2N - t$ olsun. Bu durumda

$$-\frac{n\left(n-2+2\varepsilon\right)}{4\left(2n-3+2\varepsilon\right)\left(n+1+\varepsilon\right)^{2}\left(2n-1+2\varepsilon\right)} > 0, \quad n = 1,2,3,...,N$$

dır. O halde $d_n > 0$ koşulunun sağlanması için $D_n > 0$ olmalıdır.

$\delta + \eta < |n-1+\varepsilon|$ ve $|n-1+\varepsilon| < |\delta - \eta|$ eşitsizliklerinden sadece biri gerçeklendiğinde

$$D_n = \left(n-1+\varepsilon+\delta+\eta\right)\left(n-1+\varepsilon+\delta-\eta\right)\left(n-1+\varepsilon-\delta+\eta\right)\left(n-1+\varepsilon-\delta-\eta\right) > 0$$

olur.

Durum 3.c: $N \in \{1,2,3,...\}$ ve $-1 < t \leq 1$ için $2\varepsilon = -2N - t$ olsun.

$\delta^2 \leq 0$ veya $\eta^2 \leq 0$, $\varepsilon \pm \delta \pm \eta \neq 0, -1, -2, ..., -N+1$ koşulların gerçeklendiğinde

$$D_n = \left(n-1+\varepsilon+\delta+\eta\right)\left(n-1+\varepsilon+\delta-\eta\right)\left(n-1+\varepsilon-\delta+\eta\right)\left(n-1+\varepsilon-\delta-\eta\right) > 0$$

olur.

Teorem 5.1.1: $e, f, g, \varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$ ve $n = 0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned} & \left(ex^2+2fx+g\right)\left(\Delta^2 y_n\right)(x) + \left(2\varepsilon x+\gamma\right)\left(\Delta y_n\right)(x) \\ = \; & n\left(e\left(n-1\right)+2\varepsilon\right) y_n\left(x+1\right) \end{aligned}$$

fark denkleminin y_n polinom çözümleri aşağıdaki durumlarda pozitif-tanımlı ortogonaldir.

Durum 1: $e = f = 0$, $g = 1$ ve $2\varepsilon < 0$ ise sonsuz sayıda ortogonal polinomdan oluşan sistem elde edilir.

Durum 2.a: $e = 0$, $2f = 1$, $2\varepsilon \leq 1$ ve $2g\varepsilon - \gamma < 0$ ise sonsuz sayıda ortogonal polinomdan oluşan sistem elde edilir.

Durum 2.b: $e = 0$, $2f = 1$, $2\varepsilon > 1$ ve $-N \leq \frac{2g\varepsilon-\gamma}{2\varepsilon-1} < -N+1$ ise $N+1$ tane ortogonal polinomdan oluşan sonlu sistem elde edilir.

Durum 3.a: $e = 1$, $\varepsilon > 0$, $|\delta - \eta| < \varepsilon$ ve $N - 1 < \delta + \eta - \varepsilon \leq N$ ise $N+1$ tane ortogonal polinomdan oluşan sonlu sistem elde edilir.

Durum 3.b: $N \in \{1,2,3,...\}$ olmak üzere $e = 1$, $2\varepsilon = -2N - t$, $-1 < t \leq 1$ için

$$\left(\frac{|t|}{2} \leq |\delta - \eta| \leq \quad\right) \delta + \eta < 1 + \frac{t}{2} \quad \text{ve} \quad N + \frac{t}{2} < |\delta - \eta|$$

eşitsizliklerinden sadece biri gerçeklendiğinde $N+1$ tane ortogonal polinomdan oluşan sonlu sistem elde edilir.

Durum 3.c: $N \in \{1, 2, 3, ...\}$ olmak üzere $e = 1$, $2\varepsilon = -2N - t$, $-1 < t \leq 1$ için $\delta^2 \leq 0$ veya $\eta^2 \leq 0$, $\varepsilon \pm \delta \pm \eta \neq 0, -1, -2, ..., -N + 1$ ise $N + 1$ tane ortogonal polinomdan oluşan sonlu sistem elde edilir.

6. POZİTİF TANIMLI ORTOGONAL POLİNOM ÇÖZÜMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

6.1 (2.1.10) Fark Denkleminin Ortogonal Polinom Çözümlerinin Özellikleri

Aşağıdaki durumlarda ağırlık fonksiyonları, $a_{n,k}$ katsayıları hesaplanıp bunlara karşılık gelen polinom çözümler ve Rodrigues formülleri elde edilecektir.

Durum 1: $e, f, g, 2\varepsilon \in \mathbb{R}$ için $e = f = 0,\ \ g = 1$ ve $2\varepsilon < 0$ ise (4.1.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{W(x)}{W(x+1)} &= \frac{ex^2 + 2fx + g - (2\varepsilon x + \gamma)}{e(x-1)^2 + 2f(x-1) + g} \\ &= -2\varepsilon x - \gamma + 1 \\ &= (-2\varepsilon)\left(x + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

elde edilir. $x = 0, 1, 2, 3, ...$ için

$$\begin{aligned} \frac{W(0)}{W(x)} &= \frac{W(0)}{W(1)}\frac{W(1)}{W(2)}...\frac{W(x-1)}{W(x)} \\ &= (-2\varepsilon)\left(0 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)(-2\varepsilon)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)...(-2\varepsilon)\left(x - 1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right) \\ &= (-2\varepsilon)^x\left(0 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)...\left(x - 1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right) \\ &= (-2\varepsilon)^x \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)...\left(x - 1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right) \\ &= (-2\varepsilon)^x \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}\Gamma\left(1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)...\left(x - 1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right) \\ &= (-2\varepsilon)^x \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}\left(x - 1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)\Gamma\left(x - 1 + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right) \\ &= (-2\varepsilon)^x \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}\Gamma\left(x + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

olup

$$W(x) = \frac{W(0)\,\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}{(-2\varepsilon)^x\,\Gamma\left(x + \frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)} \tag{6.1.3}$$

bulunur.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarından $W(A-1)\,\varphi(A-2) = 0$ dır. Bu eşitlikte $\varphi(x) = 1$ ve $W(-1) = W(0)(2\varepsilon - \gamma + 1)$ olduğu gözönüne alınırsa $A = 0$ için

$$\begin{aligned} W(-1)\,\varphi(-2) &= W(0)(2\varepsilon - \gamma + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $W(0) \neq 0$ için

$$\gamma = 2\varepsilon + 1$$

dır.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarından $W(A+N)\varphi(A+N-1)=0$ dır. Bu eşitlikte $A+N=x$ alınır ve her iki tarafın $x\to\infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} W(x)\varphi(x-1) &= \lim_{x\to\infty} W(x)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{W(0)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}{(-2\varepsilon)^x\Gamma\left(x+\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $A=0$ için $N\to\infty$ olur.

(6.1.3) eşitliğinde $\gamma=2\varepsilon+1$ değeri yerine yazılırsa $x=0,1,2,3,...,$ $2\varepsilon<0$ için

$$\begin{aligned}W(x) &= \frac{W(0)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}{(-2\varepsilon)^x\Gamma\left(x+\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}\right)}\\ &= \frac{1}{(-2\varepsilon)^x\Gamma(x+1)}\\ &= 0 \qquad (6.1.4)\end{aligned}$$

elde edilir, bu ise Charlier polinomlarının ağırlık fonksiyonudur. Burada $W(0)=1$ dir.

(2.1.9) denkleminde $e=f=0,\ \ g=1$ ve $\gamma=2\varepsilon+1$ değerleri yerlerine yazılırsa $n=0,1,2,...$ için

$$\left(\Delta^2 y_n\right)(x)+(2\varepsilon(x+1)+1)(\Delta y_n)(x)=2n\varepsilon y_n(x+1) \qquad (6.1.5)$$

olur. (6.1.5) denkleminde

$$\begin{aligned}(\Delta y_n)(x) &= y_n(x+1)-y_n(x),\\ \left(\Delta^2 y_n\right)(x) &= y_n(x+2)-2y_n(x+1)+y_n(x)\end{aligned}$$

ifadeleri yerlerine yazılır, x yerine $x-1$ alınırsa, $n=0,1,2,...$ için

$$y_n(x+1)+(2\varepsilon-1)y_n(x)-2\varepsilon x y_n(x-1)=2n\varepsilon y_n(x)$$

bulunur.

(3.1.34) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısında (5.1.1) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$y_{n+1}(x)=\left(x-\left(n-\frac{1}{2\varepsilon}\right)\right)y_n(x)-\left(-\frac{n}{2\varepsilon}\right)y_{n-1}(x)$$

elde edilir. Burada $y_0(x)=1$ ve $y_1(x)=x+\frac{1}{2\varepsilon}$ dur.

(3.1.3) eşitliğinde $e = f = 0,\ g = 1$ alınırsa

$$(n-k)(2\varepsilon)\, a_{n,k} - a_{n,k+1} = 0 \tag{6.1.6}$$

bağıntısı elde edilir. (6.1.6) bağıntısından

$$a_{n,k+1} = (n-k)\, 2\varepsilon a_{n,k}$$

olup, k yerine sırasıyla $n-1, n-2, ..., 0$ değerleri yerlerine yazılır ve $a_{n,n} = n!$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= n! \\ &= 2\varepsilon\,(n-(n-1))\, a_{n,n-1} \\ &= 2\varepsilon.2\varepsilon\,(n-(n-2))\, a_{n,n-2} \\ &= (2\varepsilon)^2 .1.2.a_{n,n-2} \\ &\ \ \vdots \\ &= (2\varepsilon)^{n-k} .1.2...(n-k)\, a_{n,k} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a_{n,k} = \frac{n!}{(2\varepsilon)^{n-k}\,(n-k)!} \tag{6.1.7}$$

elde edilir.

Tanım 6.1.1: (Pochhammer Sembolü)

$$(a)_0 = 1 \quad \text{ve} \quad (a)_k = \prod_{i=1}^{k} (a+i-1)\,, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

ve

$$\binom{a}{k} := \frac{(-a)_k}{k!}\,(-1)^k\,, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{6.1.8}$$

dir.

(6.1.7) ve (6.1.8) eşitliklerinden $k = 0, 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \frac{n!}{(2\varepsilon)^{n-k}\,(n-k)!} \\ &= \frac{(2\varepsilon)^k}{(2\varepsilon)^n}\binom{n}{k} k! \\ &= \frac{(2\varepsilon)^k}{(2\varepsilon)^n}\frac{(-n)_k}{k!}\,(-1)^k\, k! \\ &= \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\,(-1)^k\,(-n)_k\,(2\varepsilon)^k \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

olarak elde edilir.

(3.1.1) eşitliğinde $c=0$ alınır ve (6.1.9) ile verilen $a_{n,k}$ katsayıları yerlerine yazılırsa

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2\varepsilon)^n}(-1)^k(-n)_k(2\varepsilon)^k\binom{x}{k} \tag{6.1.10}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
{}_2F_0\left(\begin{matrix}-n,-x\\ -\end{matrix};2\varepsilon\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(-x)_k}{k!}(2\varepsilon)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k}{k!}(2\varepsilon)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)^k\left(\binom{x}{k}(-1)^k k!\right)}{k!}(2\varepsilon)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-n)^k(-1)^k(2\varepsilon)^k\binom{x}{k} \qquad (6.1.11)
\end{aligned}$$

olup, (6.1.10) ve (6.1.11) eşitliklerinden $n=0,1,2,...$ için

$$y_n(x)=\frac{1}{(2\varepsilon)^n}\,{}_2F_0\left(\begin{matrix}-n,-x\\ -\end{matrix};2\varepsilon\right)$$

elde edilir. Bu ise $e=f=0,\ g=1,\ 2\varepsilon<0$ olması durumunda (2.1.10) ile verilen fark denkleminin pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümüdür.

Tanım 6.1.2: (Rodrigues Formülü)

$$K_n=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(e(2n-k-1)+2\varepsilon)}$$

olmak üzere

$$y_n(x)=\frac{K_n}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi(x-k-1)\right) \tag{6.1.12}$$

şeklinde tanımlanır.

(6.1.12) eşitliğinde $e=f=0,\ g=1$ alınırsa $n=0,1,2,...$ için (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(2\varepsilon)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n(W(x-n).1)\\
&= \frac{1}{(2\varepsilon)^n}(-2\varepsilon)^x\Gamma(x+1)\Delta^n\left(\frac{1}{(-2\varepsilon)^{x-n}\Gamma(x-n+1)}\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Lemma 6.1.1: (2.1.10) ile verilen denklemin monik polinom çözümleri olan, (3.1.34) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısını sağlayan $y_n(x)$ ler için

$$\Lambda[1] = 1 \quad \text{ve} \quad \Lambda[y_m y_n] = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \in \{0, 1, 2, ...\}$$

olacak şekilde bir lineer operatör vardır.

İspat: $n = 1, 2, ...$ için

$$\Lambda : \begin{cases} y_0 \to 1 \\ y_n \to 0 \end{cases}$$

olacak şekilde lineer bir operatör tanımlayalım.

1) $y_0 = 1$ için $\Lambda[y_0] = 1$ dir.

2) Kabul edelim ki $m \neq 0$ olsun. O halde $m = 1, 2, 3, ...$ için

$$\begin{aligned} \Lambda[y_m y_0] &= \Lambda[y_m.1] \\ &= \Lambda[y_m] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

olur.

3) (3.1.34) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısı

$$xy_n(x) = y_{n+1}(x) + c_n y_n(x) + d_n y_{n-1}(x) \tag{6.1.14}$$

şeklinde yazılabilir. (6.1.14) denkleminin her iki tarafına Λ operatörü uygulanır, (6.1.13) eşitliği gözönüne alınırsa $n = 2, 3, 4, ...$ için

$$\begin{aligned} \Lambda[xy_n(x)] &= \Lambda[y_{n+1}(x)] + c_n \Lambda[y_n(x)] + d_n \Lambda[y_{n-1}(x)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

bulunur.

(6.1.14) eşitliğinin her iki tarafı x ile çarpılırsa

$$x^2 y_n(x) = xy_{n+1}(x) + c_n xy_n(x) + d_n xy_{n-1}(x) \tag{6.1.16}$$

elde edilir. (6.1.16) denkleminin her iki tarafına Λ operatörü uygulanır, (6.1.15) eşitliği gözönüne alınırsa $n = 3, 4, 5, ...$ için

$$\begin{aligned} \Lambda\left[x^2 y_n(x)\right] &= \Lambda[xy_{n+1}(x)] + c_n \Lambda[xy_n(x)] + d_n \Lambda[xy_{n-1}(x)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilir ve $m < n$ alınırsa

$$\begin{aligned}\Lambda\left[y_m y_n\right] &= \Lambda\left[\left(a_0 + a_1 x + ... + x^m\right) y_n\right] \\ &= a_0 \Lambda\left[y_n\right] + a_1 \Lambda\left[x y_n\right] + ... + \Lambda\left[x^m y_n\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

(6.1.14) eşitliğinin her iki tarafı $y_{n-1}(x)$ ile çarpılırsa $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$x y_n(x) y_{n-1}(x) = y_{n+1}(x) y_{n-1}(x) + c_n y_n(x) y_{n-1}(x) + d_n y_{n-1}(x) y_{n-1}(x) \tag{6.1.18}$$

bulunur.

$$x y_{n-1}(x) = y_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} s_i y_i(x), \quad s_i \in \mathbb{R}$$

eşitliği (6.1.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & y_n(x)\left(y_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} s_i y_i(x)\right) \\ = \; & y_{n+1}(x) y_{n-1}(x) + c_n y_n(x) y_{n-1}(x) + d_n y_{n-1}(x) y_{n-1}(x) \end{aligned}$$

olur. Bu denkleminin her iki tarafına Λ operatörü uygulanır, (6.1.17) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \Lambda\left[y_n(x) y_n(x)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} s_i \Lambda\left[y_n(x) y_i(x)\right] \\ = \; & \Lambda\left[y_{n+1}(x) y_{n-1}(x)\right] + c_n \Lambda\left[y_n(x) y_{n-1}(x)\right] + d_n \Lambda\left[y_{n-1}(x) y_{n-1}(x)\right] \end{aligned}$$

olup $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$\Lambda\left[y_n^2\right] = d_n \Lambda\left[y_{n-1}^2\right]$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Lambda\left[y_n^2\right] &= d_n \Lambda\left[y_{n-1}^2\right] \\ &= d_n d_{n-1} \Lambda\left[y_{n-2}^2\right] \\ &= d_n d_{n-1} d_{n-2} \Lambda\left[y_{n-3}^2\right] \\ &= d_n d_{n-1} ... d_1 \Lambda\left[y_0^2\right] \\ &= d_n d_{n-1} ... d_1 \Lambda[1] \\ &= d_n d_{n-1} ... d_1 . 1 \\ &= \prod_{k=1}^{n} d_k \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

bulunur.

$d_0 = \sum_{x=0}^{\infty} W(x)$ ve $\Lambda[y] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{W(x)}{d_0} y$ alalım.

1) $\Lambda[1] = \frac{1}{d_0} \sum_{x=0}^{\infty} W(x) = \frac{1}{d_0} d_0 = 1$

2) $\Lambda[y_m y_n] = \frac{1}{d_0} \sum_{x=0}^{\infty} W(x) y_m(x) y_n(x) = 0, \ \ m \neq n$

olduğundan lemma 6.1.1'den $m = n$ için

$$\begin{aligned} \Lambda[y_m y_n] &= \frac{1}{d_0} \sum_{x=0}^{\infty} W(x) y_m(x) y_n(x) \\ &= d_1 d_2 ... d_n \end{aligned}$$

olup eşitlik düzenlenirse

$$\sum_{x=0}^{\infty} W(x) y_m(x) y_n(x) = d_0 d_1 ... d_n \delta_{m,n} \tag{6.1.20}$$

elde edilir.

$$d_0 := \sum_{x=0}^{\infty} W(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-2\varepsilon)^x}{\Gamma(x+1)} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-2\varepsilon)^x}{x!} = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right) > 0$$

şeklinde tanımlansın. Bu eşitlik (6.1.20) eşitliğinde gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} W(x) y_n(x) y_n(x) &= d_0 d_1 ... d_n \delta_{m,n} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right) \frac{-1}{2\varepsilon} \frac{-2}{2\varepsilon} ... \frac{-n}{2\varepsilon} \delta_{m,n} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right) n!}{(-2\varepsilon)^n} \delta_{m,n} \end{aligned}$$

olup $m, n = 0, 1, 2, ...$ için

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{y_m(x) y_n(x)}{(-2\varepsilon)^x x!} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right) n!}{(-2\varepsilon)^n} \delta_{m,n}$$

elde edilir.

Durum 2.a: $e, f, g, 2\varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$ için $e = 0, \ 2f = 1, \ 2\varepsilon \leq 1, \ 2\varepsilon \neq 0$ ve $2g\varepsilon < \gamma$ olması halinde aşağıdaki durumlar ayrı ayrı incelenecektir.

Durum 2.a.1: $e = 0$, $2f = 1$, $2g\varepsilon < \gamma$, $2\varepsilon < 0$ ise (4.1.13) eşitliğinde

$$\begin{aligned} \frac{W(x)}{W(x+1)} &= \frac{(1-2\varepsilon)x + g - \gamma}{x + g - 1} \\ &= (1-2\varepsilon) \frac{x + \frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{x + g - 1} \end{aligned} \tag{6.1.21}$$

elde edilir. $x=0,1,2,3,...$ için

$$\begin{aligned}
\frac{W(0)}{W(x)} &= \frac{W(0)}{W(1)}\frac{W(1)}{W(2)}...\frac{W(x-1)}{W(x)} \\
&= (1-2\varepsilon)\frac{0+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{0+g-1}(1-2\varepsilon)\frac{1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{1+g-1}...(1-2\varepsilon)\frac{x-1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{x-1+g-1} \\
&= (1-2\varepsilon)^x\frac{0+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{0+g-1}\frac{1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{1+g-1}...\frac{x-1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{x-1+g-1} \\
&= (1-2\varepsilon)^x\frac{\Gamma(g-1)}{\Gamma\left(\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}\frac{\Gamma\left(0+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)\left(0+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)\left(1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)...\left(x-1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(0+g-1)(0+g-1)(1+g-1)...(x-1+g-1)} \\
&= (1-2\varepsilon)^x\frac{\Gamma(g-1)}{\Gamma\left(\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}\frac{\Gamma\left(x-1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)\left(x-1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(x-1+g-1)(x-1+g-1)} \\
&= (1-2\varepsilon)^x\frac{\Gamma(g-1)}{\Gamma\left(\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}\frac{\Gamma\left(x+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(x+g-1)}
\end{aligned}$$

olup,

$$W(x)=W(0)\frac{\Gamma(x+g-1)\Gamma\left(\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)\Gamma(g-1)}\left(\frac{1}{1-2\varepsilon}\right)^x \tag{6.1.22}$$

olarak bulunur.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarından $W(A-1)\varphi(A-2)=0$ dır. Bu eşitlikte $\varphi(x)=x+g$ ve $W(-1)=W(0)\frac{(-1+2\varepsilon+g-\gamma)}{g-2}$ olduğu gözönüne alınırsa $A=0$ için

$$\begin{aligned}
W(-1)\varphi(-2) &= W(0)\frac{(-1+2\varepsilon+g-\gamma)}{g-2}(g-2) \\
&= W(0)(-1+2\varepsilon+g-\gamma)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $W(0)\neq 0$ için

$$g=\gamma-2\varepsilon+1$$

olur.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarından $W(A+N)\varphi(A+N-1)=0$ dır. Bu eşitlikte $A+N=x$ alınır, ve her iki tarafın $x\to\infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}W(x)\varphi(x-1) &= \lim_{x\to\infty}W(0)\frac{\Gamma\left(\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(g-1)}\frac{\Gamma(x+g-1)}{\Gamma\left(x+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}\frac{(x+g-1)}{(1-2\varepsilon)^x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $A=0$ için $N\to\infty$ olur.

(3.1.2) eşitliğinde $e=0,\ 2f=1,\ g=\gamma-2\varepsilon+1$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
e(c+1)^2-2f(c+1)+g &= -2\varepsilon(c+1)+\gamma\ , \\
-(c+1)+\gamma-2\varepsilon+1 &= -2\varepsilon(c+1)+\gamma
\end{aligned}$$

olup $c=0$ bulunur.

(6.1.22) eşitliğinde $g=\gamma-2\varepsilon+1$ değeri yerine yazılırsa $x=0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned} W(x) &= W(0)\frac{\Gamma(x+g-1)\Gamma\left(\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)\Gamma(g-1)}\frac{1}{(1-2\varepsilon)^x} \\ &= \frac{\Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)}{\Gamma(x+1)(1-2\varepsilon)^x} \end{aligned} \tag{6.1.23}$$

elde edilir, bu ise Meixner polinomlarının ağırlık fonksiyonudur. Burada $W(0)=\Gamma(g-1)$ dir.

(2.1.9) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ \ g=\gamma-2\varepsilon+1$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$(x+\gamma-2\varepsilon+1)\left(\Delta^2 y_n\right)(x)+(2\varepsilon x+\gamma)(\Delta y_n)(x)=2n\varepsilon y_n(x+1) \tag{6.1.24}$$

elde edilir. (6.1.24) denkleminde

$$(\Delta y_n)(x)=y_n(x+1)-y_n(x)\ ,$$

$$\left(\Delta^2 y_n\right)(x)=y_n(x+2)-2y_n(x+1)+y_n(x)$$

ifadeleri yerlerine yazılır, x yerine $x-1$ alınırsa, $n=0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned} & (x+\gamma-2\varepsilon)y_n(x+1)-(2(1-\varepsilon)x+\gamma-2\varepsilon)y_n(x)+(1-2\varepsilon)xy_n(x-1) \\ = \ & 2n\varepsilon y_n(x) \end{aligned}$$

bulunur.

(3.1.34) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısında (5.1.2) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$y_{n+1}(x)=\left(x-\frac{2n(\varepsilon-1)+2\varepsilon-\gamma}{2\varepsilon}\right)y_n(x)-\frac{n(1-2\varepsilon)(n-1+\gamma-2\varepsilon)}{4\varepsilon^2}y_{n-1}(x)$$

elde edilir. Burada $y_0(x)=1$, ve $y_1(x)=x-1+\frac{\gamma}{2\varepsilon}$ dır.

(3.1.3) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ \ g=\gamma-2\varepsilon+1,\ c=0$ alınırsa $k=n-1,n-2,...,0$ için

$$(n-k)(e(n+k-1)+2\varepsilon)a_{n,k}-\left(e(k-1-c)^2+2f(k-1-c)+g\right)a_{n,k+1}=0$$

$$(n-k)2\varepsilon a_{n,k}=(k+\gamma-2\varepsilon)a_{n,k+1} \tag{6.1.25}$$

iki terimli rekürans bağıntısı elde edilir. (6.1.25) bağıntısında k yerine sırasıyla $n-1, n-2, ..., 0$ değerleri yazılır ve $a_{n,n} = n!$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
a_{n,n} &= n! \\
&= \frac{2\varepsilon\left(n-(n-1)\right)}{n-1+\gamma-2\varepsilon} a_{n,n-1} \\
&= \frac{2\varepsilon}{(n+\gamma-2\varepsilon)-1} \frac{2\varepsilon.2}{(n+\gamma-2\varepsilon)-2} a_{n,n-2} \\
&\vdots \\
&= \frac{(2\varepsilon)^{n-k}.1.2.3...(n-k)}{[(n+\gamma-2\varepsilon)-1]...[(n+\gamma-2\varepsilon)-(n-k)]} a_{n,k} \\
&= \frac{(2\varepsilon)^{n-k}(n-k)!}{[(k+\gamma-2\varepsilon)]...[(k+\gamma-2\varepsilon)+(n-k-1)]} a_{n,k} \\
&= \frac{(2\varepsilon)^{n-k}(n-k)!}{(k+\gamma-2\varepsilon)_{n-k}} a_{n,k}
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitlik düzenlenirse $k = 0, 1, 2, ..., n$ için

$$a_{n,k} = \frac{n!\,(k+\gamma-2\varepsilon)_{n-k}}{(2\varepsilon)^{n-k}(n-k)!} \tag{6.1.26}$$

olur. (6.1.26) denkleminde

$$\begin{aligned}
(2\varepsilon)^{n-k} &= \frac{(-1)^k (2\varepsilon)^n}{(-2\varepsilon)^k}, \\
\frac{n!}{(n-k)!} &= (n-k+1)(n-k+2)...(n-2)(n-1)n \\
&= (-n)...(-n+k-1)(-1)^k \\
&= (-n)_k (-1)^k, \\
\frac{(\gamma-2\varepsilon)_n}{(\gamma-2\varepsilon)_k} &= \frac{(\gamma-2\varepsilon)...(\gamma-2\varepsilon+k-1)(\gamma-2\varepsilon+k)...(\gamma-2\varepsilon+k+(n-k-1))}{(\gamma-2\varepsilon)...(\gamma-2\varepsilon+k-1)} \\
&= (k+\gamma-2\varepsilon)_{n-k}
\end{aligned}$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
a_{n,k} &= \frac{n!\,(k+\gamma-2\varepsilon)_{n-k}}{(2\varepsilon)^{n-k}(n-k)!} \\
&= \frac{(\gamma-2\varepsilon)_n}{(\gamma-2\varepsilon)_k} \frac{(-2\varepsilon)^k}{(-1)^k (2\varepsilon)^n} (-n)_k (-1)^k \\
&= \frac{(\gamma-2\varepsilon)_n}{(2\varepsilon)^n} \frac{(-n)_k}{(\gamma-2\varepsilon)_k} (-2\varepsilon)^k
\end{aligned} \tag{6.1.27}$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n,-x \\ \gamma-2\varepsilon \end{array};2\varepsilon\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(\gamma-2\varepsilon)_k}\frac{(2\varepsilon)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(\gamma-2\varepsilon)_k}\frac{(2\varepsilon)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\binom{x}{k}k!}{(\gamma-2\varepsilon)_k(-1)^k}\frac{(-2\varepsilon)^k(-1)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\gamma-2\varepsilon)_k}(-2\varepsilon)^k\binom{x}{k} \qquad (6.1.28)
\end{aligned}
$$

olup, (6.1.27), (6.1.28) eşitlikleri (3.1.1) denkleminde yerlerine yazılırsa $n=0,1,2,...$ için

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\binom{x}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\gamma-2\varepsilon)_n}{(2\varepsilon)^n}\frac{(-n)_k}{(\gamma-2\varepsilon)_k}(-2\varepsilon)^k\binom{x}{k} \\
&= \frac{(\gamma-2\varepsilon)_n}{(2\varepsilon)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\gamma-2\varepsilon)_k}(-2\varepsilon)^k\binom{x}{k} \\
&= \frac{(\gamma-2\varepsilon)_n}{(2\varepsilon)^n}\,{}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n,-x \\ \gamma-2\varepsilon \end{array};2\varepsilon\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ise $e=0,\ 2f=1,\ 2\varepsilon<0$ olması durumunda (2.1.10) ile verilen fark denkleminin pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümüdür.

(6.1.12) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ \ g=\gamma-2\varepsilon+1$ değerleri yerlerine yazılır, (6.1.23) eşitliği gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(e(2n-k-1)+2\varepsilon)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi(x-k-1)\right) \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(e(2n-k-1)+2\varepsilon)}\frac{\Gamma(x+1)(1-2\varepsilon)^x}{\Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)} \\
&\quad \Delta^n\left(\frac{\Gamma(x-n+\gamma-2\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)^{x-n}\Gamma(x-n+1)}\prod_{k=1}^{n}\varphi(x-k-1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1-2\varepsilon)^x \Gamma(x+1)}{(2\varepsilon)^n \Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)} \Delta^n \left(\frac{\Gamma(x-n+\gamma-2\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)^{x-n} \Gamma(x-n+1)} \prod_{k=1}^{n} \varphi(x-k-1) \right) \\
&= \frac{(1-2\varepsilon)^x \Gamma(x+1)}{(2\varepsilon)^n \Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)} \Delta^n \left(\frac{\Gamma(x-n+\gamma-2\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)^{x-n} \Gamma(x-n+1)} \prod_{k=1}^{n} (x+\gamma-2\varepsilon-k) \right)
\end{aligned} \tag{6.1.29}
$$

elde edilir. (6.1.29) denkleminde

$$
\begin{aligned}
& \Gamma(x-n+\gamma-2\varepsilon) \prod_{k=1}^{n} (x+\gamma-2\varepsilon-k) \\
= \; & \Gamma(x+\gamma-2\varepsilon-n)(x+\gamma-2\varepsilon-n)(x+\gamma-2\varepsilon-(n-1))\ldots(x+\gamma-2\varepsilon-1) \\
= \; & \Gamma(x+\gamma-2\varepsilon-(n-1))(x+\gamma-2\varepsilon-(n-1))\ldots(x+\gamma-2\varepsilon-1) \\
& \vdots \\
= \; & \Gamma(x+\gamma-2\varepsilon-1)(x+\gamma-2\varepsilon-1) \\
= \; & \Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)
\end{aligned}
$$

eşitliği yerine yazılırsa (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$
y_n(x) = \frac{(1-2\varepsilon)^x \Gamma(x+1)}{(2\varepsilon)^n \Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)} \Delta^n \left(\frac{\Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)^{x-n} \Gamma(x-n+1)} \right)
$$

şeklinde bulunur.

$$
d_0 := \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon+x)}{(1-2\varepsilon)^x x!} \tag{6.1.30}
$$

şeklinde tanımlansın. (6.1.30) denkleminde

$$
\begin{aligned}
{}_1F_0 \left(\begin{matrix} \gamma-2\varepsilon \\ - \end{matrix} ; \frac{1}{1-2\varepsilon} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma-2\varepsilon)_k \frac{(1/(1-2\varepsilon))^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon+k)}{\Gamma(\gamma-2\varepsilon)} \frac{(1/(1-2\varepsilon))^k}{k!} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma-2\varepsilon)} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon+x)}{(1-2\varepsilon)^x x!}
\end{aligned}
$$

eşitliği gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
d_0 \quad : &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon+x)}{(1-2\varepsilon)^x x!} \\
&= \Gamma(\gamma-2\varepsilon) \; {}_1F_0 \left(\begin{matrix} \gamma-2\varepsilon \\ - \end{matrix} ; \frac{1}{1-2\varepsilon} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma(\gamma-2\varepsilon)\left(1-\frac{1}{1-2\varepsilon}\right)^{-(\gamma-2\varepsilon)} \\
&= \Gamma(\gamma-2\varepsilon)\left(\frac{1-2\varepsilon}{-2\varepsilon}\right)^{\gamma-2\varepsilon} \qquad (6.1.31)
\end{aligned}
$$

olur.

(5.1.2) ve (6.1.31) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $2\varepsilon < 0,\ \ \gamma > 2\varepsilon$ ve $m, n = 0, 1, 2, ...$ için

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{\infty} W(x)\, y_m(x)\, y_n(x) \\
&= d_0 d_1 d_2 ... d_n \delta_{m,n} \\
&= \Gamma(\gamma-2\varepsilon)\left(\frac{1-2\varepsilon}{-2\varepsilon}\right)^{\gamma-2\varepsilon} \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{-i\left[(i-1)(2\varepsilon-1)+2g\varepsilon-\gamma\right]}{4\varepsilon^2}\right\}\delta_{m,n} \\
&= \Gamma(\gamma-2\varepsilon)\left(\frac{1-2\varepsilon}{-2\varepsilon}\right)^{\gamma-2\varepsilon} \frac{1}{(4\varepsilon^2)^n}\prod_{i=1}^{n}\left\{-i\left[(i-1)(2\varepsilon-1)+2g\varepsilon-\gamma\right]\right\}\delta_{m,n} \\
&= \Gamma(\gamma-2\varepsilon)\left(\frac{1-2\varepsilon}{-2\varepsilon}\right)^{\gamma-2\varepsilon} \frac{1}{(4\varepsilon^2)^n}\prod_{i=1}^{n}\left\{-i\left[(2\varepsilon-1)(i-1-2\varepsilon)+\gamma(2\varepsilon-1)\right]\right\}\delta_{m,n} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon)(1-2\varepsilon)^{n+\gamma-2\varepsilon}}{(-2\varepsilon)^{2n+\gamma-2\varepsilon}} n! \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon+n)}{\Gamma(\gamma-2\varepsilon)}\delta_{m,n} \\
&= \frac{(1-2\varepsilon)^{n+\gamma-2\varepsilon}\Gamma(\gamma-2\varepsilon+n)\, n!}{(-2\varepsilon)^{2n+\gamma-2\varepsilon}}\delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Durum 2.a.2: $e = 0,\ 2f = 1,\ 2g\varepsilon < \gamma,\ \ 0 < 2\varepsilon < 1$ alalım.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarından $W(A+N)\,\varphi(A+N-1) = 0$ dır. Bu eşitlikte $A + N = x$ alınır ve her iki tarafın $x \to \infty$ için limiti alınırsa

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} W(x)\,\varphi(x-1) &= \lim_{x\to\infty} \frac{W(0)\,\Gamma\left(\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(g-1)} \frac{\Gamma(x+g-1)}{\Gamma\left(x+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}\right)} \frac{x+g-1}{(1-2\varepsilon)^x} \\
&= \pm\infty \neq 0
\end{aligned}
$$

bulunur.

$x = -1, -2, ...$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{W(x)}{W(0)} &= \frac{W(-1)}{W(0)}\frac{W(-2)}{W(-1)}\cdots\frac{W(x+1)}{W(x+2)}\frac{W(x)}{W(x+1)} \\
&= (1-2\varepsilon)^{-x}\,\frac{-1+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{-1+(g-1)}\,\frac{-2+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{-2+(g-1)}\cdots\frac{x+\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{x+(g-1)} \\
&= (1-2\varepsilon)^{-x}\,\frac{1-\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{1-(g-1)}\cdots\frac{-x-\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}}{-x-(g-1)} \\
&= (1-2\varepsilon)^{-x}\,\frac{\Gamma\left(-x-\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}+1\right)/\Gamma\left(-\frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon}+1\right)}{\Gamma(-x-(g-1)+1)/\Gamma(1-(g-1))}
\end{aligned}
$$

olup

$$W(x) = W(0)\frac{\Gamma\left(\frac{1-2\varepsilon-g+\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(2-g)}\frac{\Gamma\left(-x+\frac{1-2\varepsilon-g+\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(-x+2-g)}\frac{1}{(1-2\varepsilon)^x} \tag{6.1.32}$$

elde edilir.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarında $A+N=x$ alınır ve her iki tarafın $x\to-\infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} W(x)\varphi(x-1) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{W(0)\Gamma\left(\frac{1-2\varepsilon-g+\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(2-g)}\frac{\Gamma\left(-x+\frac{1-2\varepsilon-g+\gamma}{1-2\varepsilon}\right)}{\Gamma(-x+2-g)}\frac{x+g-1}{(1-2\varepsilon)^x}\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $A\to-\infty$ olur.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarında $A+N$ yerine sıfır alınırsa

$$\begin{aligned}W(A+N)\varphi(A+N-1) &= W(0)\varphi(-1)\\ &= W(0)(-1+g)\\ &= 0\end{aligned}$$

olup, $W(0)\neq 0$ için $g=1$ bulunur.

(6.1.32) eşitliğinde $g=1$ alınırsa $x=0,-1,-2,...$ için

$$W(x) = \frac{\Gamma(r-x)}{(1-2\varepsilon)^x\Gamma(1-x)} \tag{6.1.33}$$

elde edilir, bu ise Meixner polinomlarının ağırlık fonksiyonudur. Burada $W(0)=\frac{1}{\Gamma(r)}$, $r=\frac{\gamma-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}$ dur.

(2.1.9) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ g=1$ değerleri yerlerine yazılırsa $n=0,1,2,...$ için

$$(x+1)\left(\Delta^2 y_n\right)(x)+(2\varepsilon x+\gamma)(\Delta y_n)(x) = 2n\varepsilon y_n(x+1)$$

diğer bir gösterimle

$$xy_n(x+1)-(2(1-\varepsilon)x+2\varepsilon-\gamma)y_n x+((1-2\varepsilon)x+2\varepsilon-\gamma)y_n(x-1) = 2n\varepsilon y_n(x)$$

denklemi elde edilir.

(3.1.34) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısında (5.1.2) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$y_n(x+1) = \left(x-\frac{2n(\varepsilon-1)+2\varepsilon-\gamma}{2\varepsilon}\right)y_n(x)-\frac{n((n-1)(1-2\varepsilon)-2\varepsilon+\gamma)}{4\varepsilon^2}y_{n-1}(x)$$

elde edilir. Burada $y_0(x)=1,\ y_1(x)=x-1+\frac{\gamma}{2\varepsilon}$ dur.

(3.1.3) eşitliğinde $e=0,\ 2f=1,\ g=1,\ c=0$ alınırsa $k=n-1,n-2,...,0$ için

$$2\varepsilon\left(n-k\right)a_{n,k}=\left(k+r\right)a_{n,k+1} \tag{6.1.34}$$

iki terimli rekürans bağıntısı elde edilir. (6.1.34) bağıntısında k yerine sırasıyla $n-1,n-2,...,0$ değerleri yazılır ve $a_{n,n}=n!$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
a_{n,n} &= n! \\
&= \frac{2\varepsilon\left(n-(n-1)\right)}{n-1+r}a_{n,n-1} \\
&= \frac{2\varepsilon}{(r+n-1)}\frac{2\varepsilon.2}{(r+n-2)}a_{n,n-2} \\
&\vdots \\
&= \frac{(2\varepsilon)^{n-k}\,1.2...\left(n-k\right)}{(r+n-1)\left(r+n-2\right)...\left(r+k\right)}a_{n,k}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $k=0,1,2,...,n$ için

$$\begin{aligned}
a_{n,k} &= \frac{(r)_n\ n!}{(2\varepsilon)^{n-k}\,(r)_k\,(n-k)!} \\
&= \frac{(r)_n}{(2\varepsilon)^n}\frac{(-n)_k}{(r)_k}\left(-2\varepsilon\right)^k
\end{aligned} \tag{6.1.35}$$

olur.

(3.1.1) eşitliğinde (6.1.35) ile verilen $a_{n,k}$ değerleri yerlerine yazılır ve $c=-r$ alınırsa

$$\begin{aligned}
y_n\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\binom{x-r}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(r)_n}{(2\varepsilon)^n}\frac{(-n)_k}{(r)_k}\left(-2\varepsilon\right)^k\binom{x-r}{k} \\
&= \frac{(r)_n}{(2\varepsilon)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(r)_k}\left(-2\varepsilon\right)^k\frac{(r-x)_k}{k!}\left(-1\right)^k \\
&= \frac{(r)_n}{(2\varepsilon)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(r-x)_k}{(r)_k}\frac{(2\varepsilon)^k}{k!} \\
&= \frac{(r)_n}{(2\varepsilon)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k\,(r-x)_k}{(r)_k}\frac{(2\varepsilon)^k}{k!} \\
&= \frac{(r)_n}{(2\varepsilon)^n}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,r-x\\ r\end{matrix};2\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $e=0,\ 2f=1,\ 0<2\varepsilon<1$ olması durumunda (2.1.10) ile verilen fark denkleminin pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümüdür.

(6.1.12) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ g=1$ değerleri yerlerine yazılır, (6.1.33) eşitliği gözönüne alınırsa $n=0,1,2,...$ için (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(e\left(2n-k-1\right)+2\varepsilon\right)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi\left(x-k-1\right)\right)\\
&= \frac{1}{(2\varepsilon)^n}\frac{(1-2\varepsilon)^x\Gamma(1-x)}{\Gamma(r-x)}\Delta^n\left(\frac{\Gamma(r-x+n)}{(1-2\varepsilon)^{x-n}\Gamma(1-x+n)}\prod_{k=1}^{n}(x-k)\right)\\
&= \frac{(1-2\varepsilon)^x\Gamma(1-x)}{(2\varepsilon)^n\Gamma(r-x)}\Delta^n\left(\frac{\Gamma(r-x+n)}{(1-2\varepsilon)^{x-n}\Gamma(1-x+n)}\frac{(-1)^n\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(1-x)}\right)\\
&= \frac{(1-2\varepsilon)^x\Gamma(1-x)}{(-2\varepsilon)^n\Gamma(r-x)}\Delta^n\left(\frac{\Gamma(r-x+n)}{(1-2\varepsilon)^{x-n}\Gamma(1-x)}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}
d_0 \ :&= \sum_{x=-\infty}^{0}W(x)\\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{(1-2\varepsilon)^x\Gamma(x+r)}{\Gamma(x+1)}\\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{(1-2\varepsilon)^x\Gamma(x+r)}{x!}\\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\Gamma(r)(r)_x\frac{(1-2\varepsilon)^x}{x!}\\
&= \Gamma(r)\ {}_1F_0\left(\begin{matrix} r \\ - \end{matrix};1-2\varepsilon\right)\\
&= \frac{\Gamma(r)}{(2\varepsilon)^r} \qquad (6.1.36)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

(5.1.2) ve (6.1.36) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $0<2\varepsilon<1,\ \gamma>2\varepsilon$ ve $m,n=0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty}W(-x)\,y_m(-x)\,y_n(-x) &= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{(1-2\varepsilon)^x\Gamma(x+r)}{x!}y_m(-x)\,y_n(-x)\\
&= d_0d_1d_2...d_n\delta_{m,n}\\
&= \frac{\Gamma(r)}{(2\varepsilon)^r}\prod_{i=1}^{n}-\frac{i\left[(i-1)(2\varepsilon-1)+2\varepsilon-\gamma\right]}{\left(4\varepsilon^2\right)^2}\delta_{m,n}\\
&= \frac{\Gamma(r)}{(2\varepsilon)^{2n+r}}(-1)^n n!\prod_{i=1}^{n}(1-2\varepsilon)\left(1-i-\frac{\gamma-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right)\delta_{m,n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(r)}{(2\varepsilon)^{2n+r}} n!\,(1-2\varepsilon)^n \prod_{i=1}^{n}(i-1+r)\,\delta_{m,n} \\
&= \frac{(1-2\varepsilon)^n}{(2\varepsilon)^{2n+r}} \Gamma(n+r)\, n!\delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Durum 2.a.3: $e=0,\ 2f=1,\ 2g\varepsilon<\gamma,\ 2\varepsilon=1$ alalım.

(3.1.2) eşitliğinde $e=0,\ 2f=1$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
e(c+1)^2 - 2f(c+1) + g &= -2\varepsilon(c+1)+\gamma \\
-(c+1)+g &= -(c+1)+\gamma \\
g &= \gamma
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer taraftan $2g\varepsilon<\gamma$ ve $2\varepsilon=1$ olduğundan $g<\gamma$ bulunur, bu ise çelişkidir. Bu durumda (3.1.2) eşitliğini sağlayan bir c katsayısı mevcut değildir. Lemma 3.1.2'den c katsayısı

$$ec^2 - 2fc + g = 0$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlikte $e=0,\ 2f=1$ alınırsa $c=g$ bulunur.

(4.1.13) eşitliğinde $e=0,\ 2f=1,\ c=g$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{W(x)}{W(x+1)} &= \frac{(1-2\varepsilon)x+g-\gamma}{x+g-1} \\
&= \frac{g-\gamma}{x+g-1} \qquad (6.1.37)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $x=0,1,2,3,...$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{W(0)}{W(x)} &= \frac{W(0)}{W(1)}\frac{W(1)}{W(2)}\cdots\frac{W(x-1)}{W(x)} \\
&= \frac{g-\gamma}{0+g-1}\frac{g-\gamma}{1+g-1}\cdots\frac{g-\gamma}{x-1+g-1} \\
&= \frac{(g-\gamma)^x}{\Gamma(x+g-1)/\Gamma(g-1)}
\end{aligned}
$$

olup

$$W(x) = W(0)\frac{\Gamma(x+g-1)}{\Gamma(g-1)(g-\gamma)^x} \qquad (6.1.38)$$

bulunur.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarından $W(A+N)\varphi(A+N-1)=0$ dır. Bu eşitlikte $A+N=x$ alınır ve her iki tarafın $x\to\infty$ için limiti alınırsa

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} W(x)\varphi(x-1) &= \lim_{x\to\infty}\frac{W(0)}{\Gamma(g-1)}\frac{\Gamma(x+g-1)}{(g-\gamma)^x}(x-1+g) \\
&= \pm\infty
\end{aligned}
$$

olur.

$x=-1,-2,...$ için

$$\begin{aligned}\frac{W(x)}{W(0)} &= \frac{W(-1)}{W(0)}\frac{W(-2)}{W(-1)}\cdots\frac{W(x)}{W(x+1)}\\ &= \frac{g-\gamma}{-1+(g-1)}\frac{g-\gamma}{-2+(g-1)}\cdots\frac{g-\gamma}{x+(g-1)}\\ &= \frac{(\gamma-g)^{-x}}{(-1)^{x}(2-g)(3-g)...(1-g-x)}\\ &= \frac{(\gamma-g)^{-x}}{\Gamma(2-g-x)/\Gamma(2-g)}\end{aligned}$$

olup

$$W(x)=\frac{W(0)(\gamma-g)^{-x}\Gamma(2-g)}{\Gamma(2-g-x)} \tag{6.1.39}$$

elde edilir. (4.2.4) ile verilen sınır koşullarında $A+N=x$ alınır ve her iki tarafın $x\to-\infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}W(x)\varphi(x-1) &= \lim_{x\to-\infty}W(0)\Gamma(2-g)\frac{(\gamma-g)^{-x}(x-1+g)}{\Gamma(2-g-x)}\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $A\to-\infty$ olur.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarında $A+N$ yerine sıfır alınırsa

$$\begin{aligned}W(A+N)\varphi(A+N-1) &= W(0)\varphi(-1)\\ &= W(0)(g-1)\\ &= 0\end{aligned}$$

olup, $W(0)\neq 0$ için $g=1$ bulunur.

(6.1.39) eşitliğinde $g=1$ alınırsa $x=0,-1,-2,...$ için

$$W(x)=\frac{1}{(\gamma-1)^{x}\Gamma(1-x)} \tag{6.1.40}$$

elde edilir, bu ise Charlier polinomlarının ağırlık fonksiyonudur. Burada $W(0)=1$ dir.

(2.1.9) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ g=1,\ 2\varepsilon=1$ değerleri yerlerine yazılırsa $n=0,1,2,...$ için

$$(x+1)\left(\Delta^{2}y_{n}\right)(x)+(x+\gamma)(\Delta y_{n})(x)=ny_{n}(x+1)$$

diğer bir gösterimle

$$xy_n(x+1)-(x+1-\gamma)\,y_n(x)+(1-\gamma)\,y_n(x-1)=ny_n(x)$$

denklemi elde edilir.

(5.1.2) eşitliğinde $g=1,\ 2\varepsilon=1$ alınır ise $n=1,2,3,...$ için

$$c_n=1-n-\gamma$$

ve

$$d_n=-n(1-\gamma) \tag{6.1.41}$$

bulunur.

(3.1.34) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısında (6.1.41) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$y_{n+1}(x)=(x+n-1+\gamma)\,y_n(x)+n(1-\gamma)\,y_{n-1}(x)$$

olur. Burada $y_0(x)=1$ ve $y_1(x)=x-1+\gamma$ dır.

(3.1.18) eşitliğinde $e=0,\ 2f=1,\ g=1,\ c=1$ alınırsa $k=n-1,n-2,...,0$ için

$$(n-k)\,b_{n,k}=(\gamma-1)\,b_{n,k+1} \tag{6.1.42}$$

iki terimli rekürans bağıntısı elde edilir. (6.1.42) bağıntısında k yerine sırasıyla $n-1,n-2,...,0$ değerleri yazılır ve $b_{n,n}=n!$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
b_{n,n} &= n! \\
&= \frac{n-(n-1)}{\gamma-1}b_{n,n-1} \\
&\ \ \vdots \\
&= \frac{(n-(n-1))}{(\gamma-1)}...\frac{(n-k)}{(\gamma-1)}b_{n,k} \\
&= \frac{(n-k)!}{(\gamma-1)^{n-k}}b_{n,k}
\end{aligned}$$

olup

$$b_{n,k}=\frac{n!\,(\gamma-1)^{n-k}}{(n-k)!} \tag{6.1.43}$$

bulunur.

$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+c+k-2}{k}$ eşitliğinde (6.1.43) ile verilen $b_{n,k}$ değerleri yerine yazılır ve $c = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\gamma-1)^n (-n)_k \left(\frac{1}{1-\gamma}\right)^k \binom{x+k-1}{k} \\
&= (\gamma-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-n)_k (x)_k \frac{(1/(1-\gamma))^k}{k!} \\
&= (\gamma-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-n)_k (x)_k \frac{(1/(1-\gamma))^k}{k!} \\
&= (\gamma-1)^n \ {}_2F_0\left(\begin{matrix} -n, x \\ - \end{matrix} ; \frac{1}{1-\gamma}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $e = 0,\ 2f = 1,\ g = 1,\ 2\varepsilon = 1$ olması durumunda (2.1.10) ile verilen fark denkleminin pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümüdür.

(6.1.12) denkleminde $e = 0,\ 2f = 1,\ g = 1$ değerleri yerlerine yazılır, (6.1.40) eşitliği gözönüne alınırsa $n = 0, 1, 2, ...$ için (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(e(2n-k-1)+2\varepsilon)} \frac{1}{W(x)} \Delta^n \left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi(x-k-1)\right) \\
&= (\gamma-1)^x \Gamma(1-x)\Delta^n \left(\frac{1}{(\gamma-1)^{x-n}\Gamma(1-x+n)} \frac{(-1)^n \Gamma(n-x+1)}{\Gamma(1-x)}\right) \\
&= (-1)^n (\gamma-1)^x \Gamma(1-x)\Delta^n \left(\frac{(\gamma-1)^{n-x}}{\Gamma(1-x)}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}
d_0 \ :&= \sum_{x=-\infty}^{0} W(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma-1)^{-x}\Gamma(1+x)} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\gamma-1)^x}{x!} \\
&= e^{\gamma-1} \qquad (6.1.44)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

(6.1.41) ve (6.1.44) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $2\varepsilon = 1,\ \gamma > 2\varepsilon$ ve $m, n = 0, 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{x=-\infty}^{0} W(x)\, y_n(x)\, y_m(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} W(-x)\, y_n(-x)\, y_m(-x) \\
&= d_0 d_1 ... d_n \delta_{m,n} \\
&= e^{\gamma-1} \prod_{i=1}^{n} i(\gamma-1)\, \delta_{m,n} \\
&= e^{\gamma-1} n!\, (\gamma-1)^n\, \delta_{m,n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2.b: $e = 0,\ 2f = 1,\ 2\varepsilon > 1$ ve $-N \leq \frac{2g\varepsilon-\gamma}{2\varepsilon-1} < -N+1$ olsun.

(3.1.2) eşitliğinde $e = 0,\ 2f = 1$ alınırsa

$$c + 1 = \frac{g-\gamma}{1-2\varepsilon} \tag{6.1.45}$$

elde edilir.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarında $A = 0$ alınır ve (4.1.12) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= W(-1)\, \varphi(-2) \\
&= W(0)\, (\varphi(-1) - \psi(-1)) \\
&= W(0)\, ((-1+g) - (2\varepsilon(-1) + \gamma))
\end{aligned}$$

olup, $W(0) \neq 0$ için $g = \gamma - 2\varepsilon + 1$ dir. (6.1.45) eşitliğinde $g = \gamma - 2\varepsilon + 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\gamma - 2\varepsilon + 1 - \gamma}{1-2\varepsilon} - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

(4.1.13) eşitliğinde $e = 0,\ 2f = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{W(x)}{W(x+1)} &= \frac{(1-2\varepsilon)\, x + g - \gamma}{x + g - 1} \\
&= \frac{(1-2\varepsilon)\,(x+1)}{x + \gamma - 2\varepsilon}
\end{aligned} \tag{6.1.46}$$

elde edilir.

Durum 2.b.1: $\frac{2g\varepsilon-\gamma}{2\varepsilon-1} = \gamma - 2\varepsilon = -N$ alalım.

(6.1.46) eşitliğinde $\gamma - 2\varepsilon = -N$ değeri yerine yazılırsa

$$\frac{W(x)}{W(x+1)} = \frac{(1-2\varepsilon)(x+1)}{x-N} \tag{6.1.47}$$

bulunur.

$x = 0, 1, 2, 3, ..., N$ için

$$\begin{aligned}
\frac{W(0)}{W(x)} &= \frac{W(0)}{W(1)} \cdots \frac{W(x-1)}{W(x)} \\
&= \frac{(1-2\varepsilon)\,1}{0-N} \cdots \frac{(1-2\varepsilon)(x)}{(x-1)-N} \\
&= \frac{(2\varepsilon-1)^x\, x!}{N(N-1)\ldots(N-(x-1))} \\
&= \frac{(2\varepsilon-1)^x\, x!}{N!/(N-x)!}
\end{aligned}$$

olup

$$W(x) = \frac{W(0)\,N!}{(2\varepsilon-1)^x\,\Gamma(x+1)\,\Gamma(N+1-x)} \tag{6.1.48}$$

elde edilir. (6.1.48) eşitliğinde $W(0) = \frac{1}{N!}$ alınırsa $x = 0, 1, 2, ..., N$ için

$$W(x) = \frac{1}{(2\varepsilon-1)^x\,\Gamma(x+1)\,\Gamma(N+1-x)} \tag{6.1.49}$$

elde edilir, bu ise Krowtchouk polinomlarının ağırlık fonksiyonudur.

(2.1.9) denkleminde $e = 0,\ 2f = 1,\ \gamma - 2\varepsilon = -N$ değerleri yerlerine yazılırsa $x = 0, 1, 2, ..., N$ için

$$(x-N+1)\left(\Delta^2 y_n\right)(x) + (2\varepsilon(x+1)-N)(\Delta y_n)(x) = 2n\varepsilon y_n(x+1)$$

diğer bir gösterimle

$$(x-N)\,y_n(x+1) - (2(1-\varepsilon)+N)\,y_n(x) + (1-2\varepsilon)\,x y_{n-1}(x) = 2n\varepsilon y_n(x)$$

eşitlikleri elde edilir.

(5.1.2) eşitliğinde $e = 0,\ 2f = 1,\ \gamma - 2\varepsilon = -N$ değerleri yerlerine yazılırsa $n = 1, 2, .., N-1$ için

$$c_n = \frac{2n(\varepsilon-1)+N}{2\varepsilon}\ ,\quad \text{ve}\quad d_n = \frac{n(1-2\varepsilon)(n-1-N)}{4\varepsilon^2} \tag{6.1.50}$$

bulunur.

(3.1.34) ile verilen üç terimli rekürans bağıntısında (6.1.50) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$y_{n+1}(x)=\left(x-\frac{2n(\varepsilon-1)+N}{2\varepsilon}\right)y_n(x)-\frac{n(1-2\varepsilon)(n-1-N)}{4\varepsilon^2}y_{n-1}(x)$$

elde edilir. Burada $y_0(x)=1,\ y_1(x)=x-\frac{N}{2\varepsilon}$ dur.

(3.1.3) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ \gamma-2\varepsilon=-N$ alınırsa $k=n-1,n-2,...,0$ için

$$2\varepsilon(n-k)a_{n,k}=(k-N)a_{n,k+1} \tag{6.1.51}$$

iki terimli rekürans bağıntısı bulunur. (6.1.51) bağıntısında k yerine sırasıyla $n-1,n-2,...,0$ değerleri yazılır ve $a_{n,n}=n!$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
a_{n,n} &= n! \\
&= \frac{2\varepsilon.1}{(n-1-N)}a_{n,n-1} \\
&= \frac{2\varepsilon.1}{(n-1-N)}\cdots\frac{2\varepsilon(n-k)}{(k-N)}a_{n,k} \\
&\ \vdots \\
&= \frac{(2\varepsilon)^{n-k}(n-k)!}{(-N+k)...(-N+n-1)}a_{n,k} \\
&= \frac{(2\varepsilon)^{n-k}(n-k)!}{(-N)_n\ /(-N)_k}a_{n,k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $k=0,1,2,...,n$ için

$$\begin{aligned}
a_{n,k} &= \frac{n!(-N)_n}{(2\varepsilon)^{n-k}(-N)_k(n-k)!} \\
&= \frac{(-N)_n(-n)_k(-2\varepsilon)^k}{(2\varepsilon)^n(-N)_k}
\end{aligned} \tag{6.1.52}$$

olur. (6.1.52) eşitliği (3.1.1) denkleminde yerine yazılırsa $n=0,1,2,...,N$ için

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\binom{x}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-N)_n}{(2\varepsilon)^n}\frac{(-n)_k}{(-N)_k}(-2\varepsilon)^k\binom{x}{k} \\
&= \frac{(-N)_n}{(2\varepsilon)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(-N)_k}(-2\varepsilon)^k\binom{x}{k} \\
&= \frac{(-N)_n}{(2\varepsilon)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(-N)_k k!}(-2\varepsilon)^k \\
&= \frac{(-N)_n}{(2\varepsilon)^n}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,-x\\-N\end{matrix};2\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $e=0,\ 2f=1,\ \gamma-2\varepsilon=-N$ olması durumunda (2.1.10) ile verilen fark denkleminin pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümüdür.

(6.1.12) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ \gamma-2\varepsilon=-N$ değerleri yerlerine yazılır, (6.1.49) eşitliği gözönüne alınırsa $n=0,1,2,...,N$ için (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(e\left(2n-k-1\right)+2\varepsilon\right)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi\left(x-k-1\right)\right)\\
&= \frac{\left(2\varepsilon-1\right)^x\Gamma\left(x+1\right)\Gamma\left(N+1-x\right)}{\left(2\varepsilon\right)^n}\\
&\quad \Delta^n\left(\frac{1}{\left(2\varepsilon-1\right)^{x-n}\Gamma\left(x-n+1\right)\Gamma\left(N+1-x+n\right)}\prod_{k=1}^{n}\left(x-k-N\right)\right)\\
&= \frac{\left(2\varepsilon-1\right)^x\Gamma\left(x+1\right)\Gamma\left(N+1-x\right)}{\left(2\varepsilon\right)^n}\\
&\quad \Delta^n\left(\frac{1}{\left(2\varepsilon-1\right)^{x-n}\Gamma\left(x-n+1\right)\Gamma\left(N+1-x+n\right)}\frac{\left(-1\right)^N\Gamma\left(N+n-x+1\right)}{\Gamma\left(N+1-x\right)}\right)\\
&= \frac{\left(2\varepsilon-1\right)^x\Gamma\left(x+1\right)\Gamma\left(N+1-x\right)}{\left(-2\varepsilon\right)^n}\Delta^n\left(\frac{1}{\left(2\varepsilon-1\right)^{x-n}\Gamma\left(x-n+1\right)\Gamma\left(N+1-x\right)}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Durum 2.b.2: $-N<\gamma-2\varepsilon<-N+1$ alınırsa $x=0,1,2,...,N$ için

$$W(x)=\frac{\left(-1\right)^n\Gamma\left(x+\gamma-2\varepsilon\right)\Gamma\left(1-x\right)}{\left(2\varepsilon-1\right)^x} \tag{6.1.53}$$

Krowtchouk polinomlarının ağırlık fonksiyonu bulunur.

(6.1.12) denkleminde $e=0,\ 2f=1,\ g=\gamma-2\varepsilon+1$ değerleri yerlerine yazılır, (6.1.53) eşitliği gözönüne alınırsa $n=0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(e\left(2n-k-1\right)+2\varepsilon\right)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi\left(x-k-1\right)\right)\\
&= \frac{1}{\left(2\varepsilon\right)^n}\frac{\left(-1\right)^N\left(2\varepsilon-1\right)^x}{\Gamma\left(x+\gamma-2\varepsilon\right)\Gamma\left(-x\right)}\\
&\quad \Delta^n\left(\frac{\left(-1\right)^N\Gamma\left(x-n+\gamma-2\varepsilon\right)\Gamma\left(-x+n\right)}{\left(2\varepsilon-1\right)^{x-n}}\prod_{k=1}^{n}\left(x+\gamma-2\varepsilon-k\right)\right)\\
&= \frac{1}{\left(2\varepsilon\right)^n}\frac{\left(-1\right)^N\left(2\varepsilon-1\right)^x}{\Gamma\left(x+\gamma-2\varepsilon\right)\Gamma\left(-x\right)}\\
&\quad \Delta^n\left(\frac{\left(-1\right)^N\Gamma\left(x-n+\gamma-2\varepsilon\right)\Gamma\left(-x+n\right)}{\left(2\varepsilon-1\right)^{x-n}}\frac{\Gamma\left(x+\gamma-2\varepsilon\right)}{\Gamma\left(x+\gamma-2\varepsilon-n\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(2\varepsilon-1)^x}{(2\varepsilon)^n \Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)\Gamma(-x)} \Delta^n \left(\frac{\Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)\Gamma(n-x)}{(2\varepsilon-1)^{x-n}} \right)$$

elde edilir.

Barnes integral formülünden

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)}{z^x} d_x = \Gamma(a+b) \frac{z^a}{(1+z)^{a+b}}$$

olup, $a = \gamma - 2\varepsilon,\ b = 0,\ z = 2\varepsilon - 1$ alınırsa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)\Gamma(-x)}{(2\varepsilon-1)^x} d_x = \Gamma(\gamma-2\varepsilon) \frac{(2\varepsilon-1)^{\gamma-2\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{\gamma-2\varepsilon}} \tag{6.1.54}$$

bulunur.

$$d_0 := \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)\Gamma(-x)}{(2\varepsilon-1)^x} d_x \tag{6.1.55}$$

şeklinde tanımlayalım.

(6.1.55) eşitliğinde (6.1.54) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} d_0 &= (-1)^N \Gamma(\gamma-2\varepsilon) \left(\frac{2\varepsilon-1}{2\varepsilon} \right)^{\gamma-2\varepsilon} \\ &= (-1)^N \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon+N)}{(\gamma-2\varepsilon)_N} \left(\frac{2\varepsilon-1}{2\varepsilon} \right)^{\gamma-2\varepsilon} \end{aligned} \tag{6.1.56}$$

elde edilir.

(5.1.5) ve (6.1.56) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $m, n = 0, 1, 2, ..., N$ için

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(x+\gamma-2\varepsilon)\Gamma(-x)}{(2\varepsilon-1)^x} y_n(x)\, y_m(x)\, d_x \\ = \ & d_0 d_1 ... d_n \delta_{m,n} \\ = \ & (-1)^N \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon+N)}{(\gamma-2\varepsilon)_N} \left(\frac{2\varepsilon-1}{2\varepsilon} \right)^{\gamma-2\varepsilon} \prod_{i=1}^{n} \frac{-i}{(2\varepsilon)^2} (2\varepsilon-1)(\gamma-2\varepsilon+(i-1))\, \delta_{m,n} \\ = \ & (-1)^N \frac{\Gamma(\gamma-2\varepsilon+N)}{(\gamma-2\varepsilon)_N} \left(\frac{2\varepsilon-1}{2\varepsilon} \right)^{\gamma-2\varepsilon} \frac{(-1)^n n!}{(2\varepsilon)^{2n}} (2\varepsilon-1)^n (\gamma-2\varepsilon)_n\, \delta_{m,n} \\ = \ & \frac{n!\,(-1)^{N+n} \Gamma(\gamma-2\varepsilon+N)(\gamma-2\varepsilon)_n}{(\gamma-2\varepsilon)_N} \left(\frac{2\varepsilon-1}{2\varepsilon} \right)^{n+\gamma-2\varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)^n \delta_{m,n} \end{aligned}$$

bulunur.

Durum 3: $e, f, g, 2\varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$ için $e = 1$ alalım.

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ katsayılarında $\delta = \sqrt{(f-\varepsilon)^2 - g + \gamma}$ ve $\eta = \sqrt{f^2 - g}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= ex^2 + 2fx + g \\
&= (x+f)^2 - \left(f^2 - g\right) \\
&= (x+f)^2 - \eta^2 \\
&= (x+f+\eta)(x+f-\eta) \qquad (6.1.57)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= 2\varepsilon x + \gamma \\
&= 2\varepsilon x + (f-\varepsilon)^2 - g + \gamma - \left(f^2 - g\right) + 2\varepsilon f - \varepsilon^2 \\
&= 2\varepsilon(x+f) + \delta^2 - \eta^2 - \varepsilon^2 \\
&= 2\varepsilon(x+f-\eta) + \delta^2 - (\eta-\varepsilon)^2 \\
&= 2\varepsilon(x+f-\eta) + (\delta+\eta-\varepsilon)(\delta-\eta+\varepsilon) \qquad (6.1.58)
\end{aligned}$$

bulunur.

(2.1.9) denkleminde $e = 1$ alınır ve (6.1.57), (6.1.58) eşitlikleri gözönüne alınırsa $n = 0, 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned}
& (x+f+\eta)(x+f-\eta)\left(\Delta^2 y_n\right)(x) \\
& + \{2\varepsilon(x+f-\eta) + (\delta+\eta-\varepsilon)(\delta-\eta+\varepsilon)\}(\Delta y_n)(x) \\
= \; & n(n-1+2\varepsilon)\, y_n(x+1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.1.2) eşitliğinde $e = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
(c+1)^2 - 2f(c+1) + g &= -2\varepsilon(c+1) + \gamma \\
(c+1)^2 + (2\varepsilon - 2f)(c+1) + g - \gamma &= 0
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
c+1 &= \frac{-(-2(f-\varepsilon)) \pm \sqrt{(-2(f-\varepsilon))^2 - 4(g-\gamma)}}{2} \\
&= f - \varepsilon \pm \sqrt{(f-\varepsilon)^2 - g + \gamma} \\
&= f - \varepsilon \pm \delta
\end{aligned}$$

bulunur.

(3.1.3) denkleminde $e=1$ alınırsa, $k=n-1,n-2,...,0$ için

$$\begin{aligned}
(n-k)(n+k-1+2\varepsilon)\,a_{n,k} &= \left[(k-1-c)^2+2f(k-1-c)+g\right]a_{n,k+1}\\
&= [\,(k-1-c)^2+2f(k-1-c)\\
&\quad +g+\left(f^2-g\right)-\eta^2]a_{n,k+1}\\
&= \left[(k-1-c+f)^2-\eta^2\right]a_{n,k+1}\\
&= [(k-1-c+f+\eta)(k-1-c+f-\eta)]\,a_{n,k+1}\\
&= [(k+\varepsilon\mp\delta+\eta)(k+\varepsilon\mp\delta-\eta)]\,a_{n,k+1} \qquad (6.1.59)
\end{aligned}$$

iki terimli rekürans bağıntısı elde edilir. (6.1.59) denkleminde k yerine sırasıyla $n-1,n-2,...,0$ değerleri yazılır ve $a_{n,n}=n!$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
a_{n,n} &= n!\\
&= \frac{1.(n-1+2\varepsilon+n-1)}{(\varepsilon\pm\delta+\eta+n-1)(\varepsilon\pm\delta-\eta+n-1)}a_{n,n-1}\\
&\quad \vdots\\
&= \frac{1.(n-1+2\varepsilon+n-1)}{(\varepsilon\pm\delta+\eta+n-1)(\varepsilon\pm\delta-\eta+n-1)}\\
&\quad \frac{2.(n-1+2\varepsilon+n-2)}{(\varepsilon\pm\delta+\eta+n-2)(\varepsilon\pm\delta-\eta+n-2)}\cdots\\
&\quad \frac{(n-k)(n-1+2\varepsilon+k)}{(\varepsilon\pm\delta+\eta+k)(\varepsilon\pm\delta-\eta+k)}a_{n,k}\\
&= \frac{(n-k)!\,[(n-1+2\varepsilon)_n\ /(n-1+2\varepsilon)_k]}{[(\varepsilon\pm\delta+\eta)_n\ /(\varepsilon\pm\delta+\eta)_k]\,[(\varepsilon\pm\delta-\eta)_n\ /(\varepsilon\pm\delta-\eta)_k]}a_{n,k}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $k=0,1,2,...,n$ için

$$\begin{aligned}
a_{n,k} &= \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(\varepsilon\pm\delta+\eta)_n(\varepsilon\pm\delta-\eta)_n}{(n-1+2\varepsilon)_n}\frac{(n-1+2\varepsilon)_k}{(\varepsilon\pm\delta+\eta)_k(\varepsilon\pm\delta-\eta)_k}\\
&= \frac{(\varepsilon\pm\delta+\eta)_n\ \ (\varepsilon\pm\delta-\eta)_n}{(n-1+2\varepsilon)_n}\frac{(-n)_k(n-1+2\varepsilon)_k}{(\varepsilon\pm\delta+\eta)_k(\varepsilon\pm\delta-\eta)_k}(-1)^k \qquad (6.1.60)
\end{aligned}$$

olur.

(3.1.1) denkleminde (6.1.60) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\binom{x+c}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(-1)^k\frac{(-x-c)_k}{k!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(\varepsilon\mp\delta+\eta)_n(\varepsilon\mp\delta-\eta)_n}{(n-1+2\varepsilon)_n}\frac{(-n)_k(n-1+2\varepsilon)_k}{(\varepsilon\mp\delta+\eta)_k(\varepsilon\mp\delta-\eta)_k}(-1)^k\right)\\
&\quad (-1)^k\frac{(-x-c)_k}{k!}\\
&= \frac{(\varepsilon\mp\delta+\eta)_n(\varepsilon\mp\delta-\eta)_n}{(n-1+2\varepsilon)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n-1+2\varepsilon)_k(-x-c)_k}{(\varepsilon\mp\delta+\eta)_k(\varepsilon\mp\delta-\eta)_k}\frac{1^k}{k!}\\
&= \frac{(\varepsilon\mp\delta+\eta)_n(\varepsilon\mp\delta-\eta)_n}{(n-1+2\varepsilon)_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(n-1+2\varepsilon)_k(-x-c)_k}{(\varepsilon\mp\delta+\eta)_k(\varepsilon\mp\delta-\eta)_k}\frac{1^k}{k!}\\
&= \frac{(\varepsilon\mp\delta+\eta)_n(\varepsilon\mp\delta-\eta)_n}{(n-1+2\varepsilon)_n}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,n-1+2\varepsilon,\varepsilon\mp\delta+1-f-x\\ \varepsilon\mp\delta+\eta,\varepsilon\mp\delta-\eta\end{matrix};1\right)
\end{aligned}
\tag{6.1.61}
$$

elde edilir.

(4.1.13) eşitliğinde $e=1$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{W(x)}{W(x+1)} &= \frac{(x+f-\varepsilon+\delta)(x+f-\varepsilon-\delta)}{(x-1+f+\eta)(x-1+f-\eta)} && (6.1.62)\\
&= \frac{(x+f-\varepsilon+\delta)(\varepsilon+\delta-f-x)}{(x-1+f+\eta)(1+\eta-f-x)} && (6.1.63)\\
&= \frac{(\varepsilon-\delta-f-x)(\varepsilon+\delta-f-x)}{(x-1+f+\eta)(x-1+f-\eta)} && (6.1.64)\\
&= \frac{(x+f-\varepsilon+\delta)(x+f-\varepsilon-\delta)}{(1-\eta-f-x)(1+\eta-f-x)} && (6.1.65)\\
&= \frac{(\varepsilon-\delta-f-x)(\varepsilon+\delta-f-x)}{(1-\eta-f-x)(1+\eta-f-x)} && (6.1.66)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Durum 3.a: $\varepsilon>0,\ |\delta-\eta|<\varepsilon$ ve $N-1<\delta+\eta-\varepsilon\,(\leq N)$ alalım.

(6.1.63) eşitliğinden $x=0,1,2,...$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{W(0)}{W(x)} &= \frac{W(0)}{W(1)}\cdots\frac{W(x-1)}{W(x)}\\
&= \frac{(f-\varepsilon+\delta)(\varepsilon+\delta-f)}{(-1+f+\eta)(1+\eta-f)}\cdots\frac{(x-1+f-\varepsilon+\delta)(\varepsilon+\delta-f-x+1)}{(x-2+f+\eta)(2+\eta-f-x)}\\
&\quad\vdots\\
&= \frac{[\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)/\Gamma(f-\varepsilon+\delta)][\Gamma(\varepsilon+\delta-f+1)/\Gamma(1+\varepsilon+\delta-f-x)]}{[\Gamma(x-1+f+\eta)/\Gamma(-1+f+\eta)][\Gamma(2+\eta-f)/\Gamma(2+\eta-f-x)]}
\end{aligned}
$$

olup

$$
W(x)=\frac{W(0)\,\Gamma(f-\varepsilon+\delta)\,\Gamma(2+\eta-f)}{\Gamma(\varepsilon+\delta-f+1)\,\Gamma(-1+f+\eta)}\frac{\Gamma(x-1+f+\eta)\,\Gamma(1+\varepsilon+\delta-f-x)}{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\,\Gamma(2+\eta-f-x)}
\tag{6.1.67}
$$

elde edilir.

(6.1.67) eşitliğinde

$$W(0)=\frac{\Gamma(\varepsilon+\delta-f+1)\,\Gamma(-1+f+\eta)}{\Gamma(f-\varepsilon+\delta)\,\Gamma(2-\eta-f)}$$

alınırsa

$$W(x)=\frac{\Gamma(x-1+f+\eta)\,\Gamma(1+\varepsilon+\delta-f-x)}{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\,\Gamma(2-\eta-f-x)} \tag{6.1.68}$$

bulunur.

Durum 3.a.1: $\varepsilon>0$ ve $|\delta-\eta|<\varepsilon,\ \ \delta+\eta-\varepsilon=N$ alalım.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarından $W(A-1)\,\varphi(A-2)=0$ dır. Bu eşitlikte $A=0$ alınır ve (4.1.12), (6.1.57), (6.1.58) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
W(-1)\,\varphi(-2) &= W(0)\,(\varphi(-1)-\psi(-1))\\
&= W(0)\left[(-1+f+\eta)(-1+f-\eta)-2\varepsilon(-1+f)-\delta^2+\eta^2+\varepsilon^2\right]\\
&= W(0)\left[(-1+f-\varepsilon)^2-\delta^2\right]\\
&= W(0)\left[(-1+f-\varepsilon-\delta)(-1+f-\varepsilon+\delta)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $W(0)\neq 0$ için

$$f-\varepsilon+\delta=1 \quad \text{ve} \quad 1-f+\eta=N \tag{6.1.69}$$

bulunur. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$\delta+\eta-\varepsilon=N \tag{6.1.70}$$

olur.

$$\varepsilon+\delta-\eta=\alpha+1 \quad \text{ve} \quad \varepsilon-\delta+\eta=\beta+1 \tag{6.1.71}$$

alalım. (6.1.69), (6.1.70) ve (6.1.71) eşitliklerinden

$$2\varepsilon=\alpha+\beta+2,\quad 2\delta=\alpha+N+1 \quad \text{ve} \quad 2\eta=\beta+N+1 \tag{6.1.72}$$

elde edilir.

(6.1.70), (6.1.71), (6.1.72) eşitlikleri (6.1.57) ve (6.1.58) eşitliklerinde gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (x+\beta+2)(x-N+1)\\
\psi(x) &= 2\varepsilon(x+f-\eta)+(\delta+\eta-\varepsilon)(\delta-\eta+\varepsilon)\\
&= (\alpha+\beta+2)(x+(f-\eta-1)+1)+N(\alpha+1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha+\beta+2)(x-N+1)+N(\alpha+1) \\
&= (\alpha+\beta+2)(x+1)+(\alpha+\beta+2)(-N)+(\alpha+1)N \\
&= (\alpha+\beta+2)(x+1)+N(-\alpha-\beta-2+\alpha+1) \\
&= (\alpha+\beta+2)(x+1)+N(-\beta-1) \\
&= (\alpha+\beta+2)(x+1)-(\beta+1)N \qquad (6.1.73)
\end{aligned}
$$

bulunur. (6.1.73) ile verilen eşitlikler (2.1.9) denkleminde yerlerine yazılırsa $n = 0, 1, 2, ...$ için

$$
\begin{aligned}
& (x+\beta+2)(x-N+1)\left(\Delta^2 y_n\right)(x)+\{(\alpha+\beta+2)(x+1)-(\beta+1)N\}(\Delta y_n)(x) \\
= \; & n(n+\alpha+\beta+1)\, y_n(x+1)
\end{aligned}
$$

diğer bir gösterimle

$$
\begin{aligned}
& (x+\beta+1)(x-N)\, y_n(x+1)-\{(x+\beta+1)(x-N)+x(x-\alpha-N-1)\}\, y_n(x) \\
& +x(x-\alpha-N-1)\, y_n(x-1) \\
= \; & n(n+\alpha+\beta+1)\, y_n(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(6.1.61) eşitliğinde (6.1.70), (6.1.71) ve (6.1.72) eşitlikleri gözönüne alınırsa $n = 0, 1, 2, ...$ için

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{(\varepsilon-\delta+\eta)_n(\varepsilon-\delta+\eta)_n}{(n-1+2\varepsilon)_n}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, n-1+2\varepsilon, \varepsilon-\delta+1-f-x \\ \varepsilon-\delta+\eta, \varepsilon-\delta-\eta \end{matrix}; 1\right) \\
&= \frac{(\beta+1)_n(-N)_n}{(n+\alpha+\beta+1)_n}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, -x \\ \beta+1, -N \end{matrix}; 1\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ise $e = 1,\ \varepsilon > 0$ ve $\delta+\eta-\varepsilon = N$ olması durumunda (2.1.10) denkleminin pozitif tanımlı ortogonal polinom çözümüdür.

(6.1.68) eşitliğinde (6.1.69), (6.1.71) eşitlikleri gözönüne alınırsa $n = 0, 1, 2, ..., N$ için

$$
W(x) = \frac{\Gamma(x+\beta+1)\,\Gamma(\alpha+N+1-x)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(N+1-x)} \qquad (6.1.74)
$$

elde edilir. Pozitif tanımlılık için $\alpha+1 > 0$ ve $\beta+1 > 0$ olmalıdır.

(6.1.12) denkleminde (6.1.74) eşitliği yerine yazılırsa (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(e\left(2n-k-1\right)+2\varepsilon\right)}\frac{1}{W(x)} \\
&\quad \Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi\left(x-k-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(2n-k-1+\alpha+\beta+2\right)}\frac{1}{W(x)} \\
&\quad \Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\left(x+\beta+1-k\right)\left(x-N-k\right)\right) \\
&= \frac{1}{\left(n+\alpha+\beta+1\right)\ldots\left(2n+\alpha+\beta\right)}\frac{1}{W(x)} \\
&\quad \Delta^n\left(W(x-n)\left(x+\beta+1-n\right)\ldots\left(x+\beta\right)(-1)^n\left(N+1-x\right)\ldots\left(N+n-x\right)\right) \\
&= \frac{1}{\left(n+\alpha+\beta+1\right)_n}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-x)}{\Gamma(x+\beta-1)\Gamma(\alpha+N+1-x)} \\
&\quad \Delta^n\left(\frac{\Gamma(x+\beta+1-n)\Gamma(\alpha+N+1-x+n)}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(N+1-x+n)}(-1)^n\frac{\left(x+\beta+1-n\right)_n}{\left(N+1-x\right)_n}\right) \\
&= \frac{(-1)^n\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-x)}{\left(n+\alpha+\beta+1\right)_n\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1-x)} \\
&\quad \Delta^n\left(\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(\alpha+N+n+1-x)}{\Gamma(N+1-x)\Gamma(x-n+1)}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

$$
\begin{aligned}
d_0 \quad : &= \sum_{x=0}^{N}\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1-x)}{x!\,(N-x)!} \\
&= \sum_{x=0}^{N}\frac{\Gamma(\beta+1)\left(\beta+1\right)_x\left(\Gamma(\alpha+N+1)/\left(-\alpha-N\right)_x\right)}{\left(\Gamma(N+1)/\left(-N\right)_x\right)}\frac{1^x}{x!} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1)}{\Gamma(N+1)}\sum_{x=0}^{N}\frac{\left(-N\right)_x\left(\beta+1\right)_x}{\left(-\alpha-N\right)_x}\frac{1^x}{x!} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1)}{\Gamma(N+1)}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(-N\right)_x\left(\beta+1\right)_x}{\left(-\alpha-N\right)_x}\frac{1^x}{x!} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1)}{\Gamma(N+1)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-N,\beta+1\\-\alpha-N\end{matrix};1\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1)}{\Gamma(N+1)}\frac{\left[\left(-\alpha-N\right)-\left(\beta+1\right)\right]_N}{\left(-\alpha-N\right)_N}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1)}{\Gamma(N+1)}\frac{(-1-N-\alpha-\beta)_N}{(-\alpha-N)_N} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1)}{\Gamma(N+1)}\frac{(\alpha+\beta+2)...(\alpha+\beta+N+1)}{(\alpha+1)...(\alpha+N)}\frac{(-1)^N}{(-1)^N} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+N+1)}{\Gamma(N+1)}\frac{(\alpha+\beta+2)_N}{(\alpha+1)_N} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)}{N!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+N+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} > 0 \qquad (6.1.75)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlansın.

(5.1.5) ve (6.1.75) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $m, n = 0, 1, 2, ..., N$ için

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{N} W(x)\, y_n(x)\, y_m(x) \\
&= d_0 d_1 d_2 ... d_n \delta_{m,n} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+N+2)}{N!\Gamma(\alpha+\beta+2)} \\
&\quad \prod_{i=1}^{n}(-1)\prod_{i=1}^{n} i \prod_{i=1}^{n}(2\varepsilon-1+(i-1)) \\
&\quad \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(2\varepsilon-3+2i)(2i-2+2\varepsilon)\prod_{i=1}^{n}(2i-2+2\varepsilon)(2i-1+2\varepsilon)} \\
&\quad \prod_{i=1}^{n} D_i \delta_{m,n} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+N+2)}{N!\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{(-1)^n n!(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+\beta+1)_{2n}(\alpha+\beta+2)_{2n}} \\
&\quad \prod_{i=1}^{n}(\varepsilon+\delta+\eta+(i-1))\prod_{i=1}^{n}(\varepsilon+\delta-\eta+(i-1)) \\
&\quad \prod_{i=1}^{n}(\varepsilon-\delta+\eta+(i-1))\prod_{i=1}^{n}(\varepsilon-\delta-\eta+(i-1))\,\delta_{m,n} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+N+2)}{N!\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{(-1)^n n!(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+\beta+1)_{2n}(\alpha+\beta+2)_{2n}} \\
&\quad (\alpha+\beta+N+2)_n(\alpha+1)_n(\beta+1)_n(-N)_n\,\delta_{m,n} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha+n+\beta+N+2)\left[\Gamma(\alpha+\beta+1+n)/\Gamma(\alpha+\beta+1)\right]}{\Gamma(\alpha+\beta+2+2n)\left[\Gamma(\alpha+\beta+1+2n)/\Gamma(\alpha+\beta+1)\right]} \\
&\quad \frac{(-1)^n(-N)_n\,\delta_{m,n}}{N!} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+N+2)\,n!}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)(N-n)!}\delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Durum 3.b: $N \in \{1,2,3,...\}$ ve $-1 < t \leq 1$ için $2\varepsilon = -2N - t$ ve $\left(\frac{|t|}{2} \leq |\delta - \eta| \leq\right) \delta + \eta < 1 + \frac{t}{2}$, $N + \frac{t}{2} < |\delta - \eta|$ eşitsizliklerinden yalnızca biri gerçeklensin.

Durum 3.b.1: $\left(\frac{|t|}{2} \leq |\delta - \eta| \leq\right) \delta + \eta < 1 + \frac{t}{2}$ ve $\varepsilon \pm \delta \pm \eta = -N$ alalım.

(6.1.65) eşitliğinden $x = 0, 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned}
\frac{W(0)}{W(x)} &= \frac{W(0)}{W(1)} \cdots \frac{W(x-1)}{W(x)} \\
&= \frac{(f-\varepsilon+\delta)(f-\varepsilon-\delta)}{(1-\eta-f)(1+\eta-f)} \cdots \frac{(f-\varepsilon+\delta+(x-1))(f-\varepsilon-\delta+(x-1))}{(2-\eta-f-x)(2+\eta-f-x)} \\
&= \frac{(f-\varepsilon+\delta)_x (f-\varepsilon-\delta)_x}{(2-\eta-f-x)_x (2+\eta-f-x)_x} \\
&= \frac{[\Gamma(f-\varepsilon+\delta+x)/\Gamma(f-\varepsilon+\delta)][\Gamma(f-\varepsilon-\delta+x)/\Gamma(f-\varepsilon-\delta)]}{[\Gamma(1-\eta-f)/\Gamma(2-\eta-f-x)][\Gamma(1+\eta-f)/\Gamma(2+\eta-f-x)]}
\end{aligned}$$

olup

$$W(x) = \frac{W(0)\Gamma(f-\varepsilon+\delta)\Gamma(f-\varepsilon-\delta)\Gamma(1-\eta-f)\Gamma(1+\eta-f)}{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)\Gamma(2-\eta-f-x)\Gamma(2+\eta-f-x)} \tag{6.1.76}$$

elde edilir.

(6.1.76) eşitliğinde $W(0) = 1/(\Gamma(f-\varepsilon+\delta)\Gamma(f-\varepsilon-\delta)\Gamma(1-\eta-f)\Gamma(1+\eta-f))$ alınırsa

$$W(x) = \frac{1}{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)\Gamma(2-\eta-f-x)\Gamma(2+\eta-f-x)} \tag{6.1.77}$$

bulunur.

(4.2.4) ile verilen sınır koşullarında $A = 0$ alınır, (4.1.12), (6.1.57), (6.1.58) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= W(0)(\varphi(-1) - \psi(-1)) \\
&= W(0)[(-1+f-\varepsilon+\delta)(-1+f-\varepsilon-\delta)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten $W(0) \neq 0$ için

1) $f - \varepsilon + \delta = 1$ ve $1 - \eta - f = N$ olsun.

İki eşitlik toplanırsa $\delta - \eta - \varepsilon = N$ bulunur.

$$\varepsilon + \delta + \eta = \alpha + 1 \quad \text{ve} \quad \varepsilon - \delta - \eta = \beta + 1 \tag{6.1.78}$$

şeklinde tanımlayalım.

2) $f-\varepsilon+\delta=1$ ve $1+\eta-f=N$ olsun.

İki eşitlik toplanırsa $\delta+\eta-\varepsilon=N$ bulunur.

$$\varepsilon+\delta-\eta=\alpha+1 \quad \text{ve} \quad \varepsilon-\delta+\eta=\beta+1 \tag{6.1.79}$$

şeklinde tanımlayalım.

3) $f-\varepsilon-\delta=1$ ve $1-\eta-f=N$ olsun.

İki eşitlik toplanırsa $-\delta-\eta-\varepsilon=N$ bulunur.

$$\varepsilon-\delta+\eta=\alpha+1 \quad \text{ve} \quad \varepsilon+\delta-\eta=\beta+1 \tag{6.1.80}$$

şeklinde tanımlayalım.

4) $f-\varepsilon-\delta=1$ ve $1+\eta-f=N$ olsun.

İki eşitlik toplanırsa $-\delta+\eta-\varepsilon=N$ bulunur.

$$\varepsilon-\delta-\eta=\alpha+1 \quad \text{ve} \quad \varepsilon+\delta+\eta=\beta+1 \tag{6.1.81}$$

şeklinde tanımlayalım.

(6.1.78), (6.1.79), (6.1.80), (6.1.81) ile verilen eşitliklerin her birinden $2\varepsilon=\alpha+\beta+2$ elde edilir.

(6.1.78) ve (6.1.79) eşitliklerinden $2\delta=\alpha+N+1$ bulunur.

(6.1.80) ve (6.1.81) eşitliklerinden $-2\delta=\alpha+N+1$ bulunur.

(6.1.79) ve (6.1.81) eşitliklerinden $2\eta=\beta+N+1$ bulunur.

(6.1.78) ve (6.1.80) eşitliklerinden $-2\eta=\beta+N+1$ bulunur.

Yukarıda verilen tüm durumlar (6.1.77) denkleminde gözönüne alınırsa $n=0,1,2,...,N$ için

$$W(x)=\frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-x)\Gamma(x-N-\alpha)\Gamma(-\beta-x)} \tag{6.1.82}$$

elde edilir.

(6.1.12) denkleminde (6.1.82) eşitliği yerine yazılırsa (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$y_n(x)=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(e(2n-k-1)+2\varepsilon)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi(x-k-1)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(2n-k+\alpha+\beta+1)}\frac{1}{W(x)} \\
&\quad \Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}(x+\beta+1-k)(x-N-k)\right) \\
&= \frac{1}{(n+\beta+\alpha+1)\ldots(2n+\alpha+\beta)}\frac{1}{W(x)} \\
&\quad \Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}(x+\beta+1-n)\ldots(x+\beta)\prod_{k=1}^{n}(x-N-n)\ldots(x-N-1)\right) \\
&= \frac{1}{(n+\alpha+\beta+1)_n}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)(-x-\beta)_n(-1)^n(-1)^n(N+1-x)_n\right) \\
&= \frac{1}{(n+\alpha+\beta+1)_n}\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-x)\Gamma(x-N-\alpha)\Gamma(-\beta-x) \\
&\quad \Delta^n\Big(\frac{1}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(N+1-x+n)\Gamma(x-n-N-\alpha)\Gamma(n-\beta-x)} \\
&\quad (-x-\beta)_n(N+1-x)_n\Big) \\
&= \frac{1}{(n+\alpha+\beta+1)_n}\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-x)\Gamma(x-N-\alpha)\Gamma(-\beta-x) \\
&\quad \Delta^n\left(\frac{1}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(N+1-x)\Gamma(x-n-N-\alpha)\Gamma(-\beta-x)}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

Dougall's bilateral toplamından $2f-2+1<2f-2\varepsilon$ yani $2\varepsilon<1$ için

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+c)\Gamma(n+d)\Gamma(1-a-n)\Gamma(1-b-n)} \\
&= \frac{\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)} \qquad (6.1.83)
\end{aligned}
$$

olup, $c=f-\varepsilon+\delta,\ \ d=f-\varepsilon-\delta,\ \ a=-1+\eta+f,\ \ b=-1-\eta+f$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)\Gamma(2-\eta-f-x)\Gamma(2+\eta-f-x)} \\
&= \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$f-\varepsilon\pm\delta=1$ ve $1\pm\eta-f=N$ için

$$
\begin{aligned}
d_0 \quad &: \quad =\sum_{x=0}^{N}W(x) \\
&= \frac{1}{x!(N-x)!\Gamma(x-N-\alpha)\Gamma(-\beta-x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x!\,(N-x)!\Gamma\,(x-N-\alpha)\,\Gamma\,(-\beta-x)} \\
&= \frac{\Gamma\,(-\alpha-\beta-1)}{N!\Gamma\,(-N-\alpha-\beta-1)\,\Gamma\,(-\alpha)\,\Gamma\,(-\beta)} \qquad (6.1.84)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlayalım.

(5.1.5) ve (6.1.84) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $m, n = 0, 1, 2, ..., N$ için

$$
\begin{aligned}
& \sum_{x=0}^{N} W\,(x)\,y_m\,(x)\,y_n\,(x) \\
= \; & d_0 d_1 ... d_n \delta_{m,n} \\
= \; & \frac{\Gamma\,(-\alpha-\beta-1)}{N!\Gamma\,(-N-\alpha-\beta-1)\,\Gamma\,(-\alpha)\,\Gamma\,(-\beta)} \\
& \prod_{i=1}^{n} \frac{(-1)\,i\,((2\varepsilon-1)+i-1)}{4\,(2i-3+2\varepsilon)\,(i-1+2\varepsilon)^2\,(2i-1+2\varepsilon)} D_i\;\delta_{m,n} \\
= \; & \frac{\Gamma\,(-\alpha-\beta-1)}{N!\Gamma\,(-N-\alpha-\beta-1)\,\Gamma\,(-\alpha)\,\Gamma\,(-\beta)} \frac{(-1)^n\,n!\,(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+\beta+1)_{2n}\,(\alpha+\beta+2)_{2n}} \\
& \prod_{i=1}^{n} (\varepsilon+\delta+\eta+(i-1)) \prod_{i=1}^{n} (\varepsilon+\delta-\eta+(i-1)) \\
& \prod_{i=1}^{n} (\varepsilon-\delta+\eta+(i-1)) \prod_{i=1}^{n} (\varepsilon-\delta-\eta+(i-1))\,\delta_{m,n} \\
= \; & \frac{\Gamma\,(-\alpha-\beta-1)}{N!\Gamma\,(-N-\alpha-\beta-1)\,\Gamma\,(-\alpha)\,\Gamma\,(-\beta)} \\
& \frac{(-1)^n\,n!\,(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+\beta+1)_{2n}\,(\alpha+\beta+2)_{2n}} (\alpha+\beta+N+2)_n\,(\alpha+1)_n\,(\beta+1)_n\,(-N)_n\,\delta_{m,n} \\
= \; & \frac{\Gamma\,(-2n-\alpha-\beta)\,\Gamma\,(-2n-\alpha-\beta-1)\,n!}{\Gamma\,(-n-\alpha-\beta)\,\Gamma\,(-n-\alpha)\,\Gamma\,(-n-\beta)\,\Gamma\,(-n-N-\alpha-\beta-1)\,(N-n)!}\delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Durum 3.b.2: $\left(\frac{|t|}{2} \leq |\delta-\eta| \leq\right) \delta+\eta < 1+\frac{t}{2}$ ve $\varepsilon \pm \delta \pm \eta \neq -N$ alalım.

(6.1.77) eşitliğinde, işlemlerde kolaylık sağlamak için $f-\varepsilon-\delta = 1$ alınırsa

$$
W\,(x) = \frac{1}{\Gamma\,(x+1)\,\Gamma\,(x+2\delta+1)\,\Gamma\,(1-\varepsilon-\delta-\eta-x)\,\Gamma\,(1-\varepsilon-\delta+\eta-x)} \qquad (6.1.85)
$$

elde edilir.

(6.1.12) denkleminde (6.1.85) eşitliği yerine yazılırsa (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(e(2n-k-1)+2\varepsilon)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi(x-k-1)\right) \\
&= \frac{1}{(n+\alpha+\beta+1)_n}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)(-x-\beta)_n(-1)^n(-1)^n(N+1-x)_n\right) \\
&= \frac{1}{(n+\alpha+\beta+1)_n}\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1) \\
&\quad \Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta-x)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta-x) \\
&\quad \Delta^n\Big(\frac{(-x-\beta)_n(-1)^n(-1)^n(N+1-x)_n}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(x-n+2\delta+1)} \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta-x+n)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta-x+n)}\Big) \\
&= \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta-x)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta-x)}{(n-1+2\varepsilon)_n} \\
&\quad \Delta^n\Big(\frac{1}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(x-n+2\delta+1)} \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta-x)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta-x)}\Big)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \sum_{x=0}^{\infty} W(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta-x)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta-x)} \\
&= \sum_{x=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta-x)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta-x)}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlayalım.

(6.1.83) eşitliğinde $a=\varepsilon+\delta+\eta,\ \ b=\varepsilon+\delta-\eta,\ \ c=2\delta+1,\ \ d=1$ alınırsa

$$
d_0 = \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta)} \tag{6.1.86}
$$

olur.

(5.1.5) ve (6.1.86) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $m,n=0,1,2,...,N$ için

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{\infty} W(x)\,y_n(x)\,y_m(x) \\
&= d_0 d_1 ... d_n \delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta)} \\
&\quad \prod_{i=1}^{n} \frac{(-1)\, i\,((2\varepsilon-1)+i-1)}{4(2i-3+2\varepsilon)(i-1+2\varepsilon)^2(2i-1+2\varepsilon)} D_i\ \delta_{m,n} \\
&= \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta)} \\
&\quad \frac{(-1)^n\, n!\,(2\varepsilon-1)_n}{(2\varepsilon-1)_{2n}(2\varepsilon)_{2n}} \Gamma(\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(\varepsilon+\delta-\eta)\Gamma(\varepsilon-\delta+\eta)\Gamma(\varepsilon-\delta-\eta)\,\delta_{m,n} \\
&= \frac{\Gamma(1-2\varepsilon-2n)\Gamma(2-2\varepsilon-2n)}{\Gamma(2-2\varepsilon-n)\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta-n)\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta-n)} \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta-n)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta-n)} \delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Durum 3.b.3: $|\delta-\eta| > N+\frac{t}{2}$ alalım. Bu durumda $\delta > \eta > 0$ için $\delta-\eta > N+\frac{t}{2}$ olur.

(6.1.62) eşitliğinden $x = 0, 1, 2, ...$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{W(0)}{W(x)} &= \frac{W(0)}{W(1)} \cdots \frac{W(x-1)}{W(x)} \\
&= \frac{(f-\varepsilon+\delta)(f-\varepsilon-\delta)}{(-1+f+\eta)(-1+f-\eta)} \cdots \frac{(f-\varepsilon+\delta+x-1)(f-\varepsilon-\delta+x-1)}{(-1+f+\eta+x-1)(-1+f-\eta+x-1)} \\
&= \frac{(f-\varepsilon+\delta)_x (f-\varepsilon-\delta)_x}{(-1+f+\eta)_x (-1+f-\eta)_x} \\
&= \frac{\Gamma(-1+f+\eta)\Gamma(-1+f-\eta)}{\Gamma(f-\varepsilon+\delta)\Gamma(f-\varepsilon-\delta)} \frac{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)}{\Gamma(x-1+f+\eta)\Gamma(x-1+f-\eta)}
\end{aligned}
$$

olup

$$
W(x) = \frac{W(0)\Gamma(f-\varepsilon+\delta)\Gamma(f-\varepsilon-\delta)\Gamma(x-1+f+\eta)\Gamma(x-1+f-\eta)}{\Gamma(-1+f+\eta)\Gamma(-1+f-\eta)\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)} \tag{6.1.87}
$$

elde edilir.

(6.1.87) eşitliğinde

$$
W(0) = \frac{\Gamma(-1+f+\eta)\Gamma(-1+f-\eta)}{\Gamma(f-\varepsilon+\delta)\Gamma(f-\varepsilon-\delta)}
$$

alınırsa

$$
W(x) = \frac{\Gamma(x-1+f+\eta)\Gamma(x-1+f-\eta)}{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)}
$$

bulunur. İşlemlerde kolaylık sağlamak için $f-\varepsilon-\delta = 1$ alınırsa

$$
W(x) = \frac{\Gamma(x+\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(x+\varepsilon+\delta-\eta)}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1)} \tag{6.1.88}
$$

olur.

(6.1.12) denkleminde $e=1$ alınır, (6.1.88) eşitliği gözönüne alınırsa $n=0,1,2,...,N$ için (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(e(2n-k-1)+2\varepsilon)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi(x-k-1)\right)\\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(n-1+2\varepsilon+(n-k))}\frac{1}{W(x)}\\
&\quad \Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}(x-k-1+f+\eta)\prod_{k=1}^{n}(x-k-1+f-\eta)\right)\\
&= \frac{1}{(n-1+2\varepsilon)_n}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1)}{\Gamma(x+\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(x+\varepsilon+\delta-\eta)}\\
&\quad \Delta^n(\frac{\Gamma(x-n+\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(x-n+\varepsilon+\delta-\eta)}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(x-n+2\delta+1)}\\
&\quad (x-n-1+f+\eta)_n(x-n-1+f-\eta)_n)\\
&= \frac{1}{(n-1+2\varepsilon)_n}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1)}{\Gamma(x+\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(x+\varepsilon+\delta-\eta)}\\
&\quad \Delta^n(\frac{\Gamma(x-n+\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(x-n+\varepsilon+\delta-\eta)}{\Gamma(x-n+1)\Gamma(x-n+2\delta+1)}\\
&\quad (x-n+\varepsilon+\delta+\eta)_n(x-n+\varepsilon+\delta-\eta)_n)\\
&= \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1)}{\Gamma(n-1+2\varepsilon)_n\Gamma(x+\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(x+\varepsilon+\delta-\eta)}\\
&\quad \Delta^n\left(\frac{\Gamma(x+\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(x+\varepsilon+\delta-\eta)}{\Gamma(x-n-1)\Gamma(x-n+2\delta+1)}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}
d_0 &:= \sum_{x=-\infty}^{\infty} W(x)\\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\Gamma(x+\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(x+\varepsilon+\delta-\eta)}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+2\delta+1)}\\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\varepsilon+\delta+\eta)(\varepsilon+\delta+\eta)_x\Gamma(\varepsilon+\delta-\eta)(\varepsilon+\delta-\eta)_x}{\Gamma(2\delta+1)(2\delta+1)_x.x!}\\
&= \frac{\Gamma(\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(\varepsilon+\delta-\eta)}{\Gamma(2\delta+1)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\varepsilon+\delta+\eta,\ \varepsilon+\delta-\eta\\ 2\delta+1\end{matrix};1\right) \qquad (6.1.89)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

Gauss toplam formülünden

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};1\right)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} $$

olup, $a=\varepsilon+\delta+\eta,\ \ b=\varepsilon+\delta-\eta,\ \ c=2\delta+1$ alınırsa

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c} \varepsilon+\delta+\eta,\ \varepsilon+\delta-\eta \\ 2\delta+1 \end{array};1\right)=\frac{\Gamma(2\delta+1)\,\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\delta-\varepsilon-\eta)\,\Gamma(1+\delta-\varepsilon+\eta)} \tag{6.1.90} $$

bulunur.

(6.1.90) eşitliği (6.1.89) eşitliğinde gözönüne alınırsa

$$ \begin{aligned} d_0 &= \frac{\Gamma(\varepsilon+\delta+\eta)\,\Gamma(\varepsilon+\delta-\eta)}{\Gamma(2\delta+1)}\frac{\Gamma(2\delta+1)\,\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\delta-\varepsilon-\eta)\,\Gamma(1+\delta-\varepsilon+\eta)} \\ &= \frac{\Gamma(\varepsilon+\delta+\eta)\,\Gamma(\varepsilon+\delta-\eta)\,(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\delta-\varepsilon-\eta)\,\Gamma(1+\delta-\varepsilon+\eta)} \end{aligned} \tag{6.1.91} $$

olur.

(5.1.5) ve (6.1.91) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $m,n=0,1,2,...,N$ için

$$ \begin{aligned} & \sum_{x=0}^{\infty} W(x)\,y_n(x)\,y_m(x) \\ = \ & d_0 d_1 ... d_n \delta_{m,n} \\ = \ & \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)\,\Gamma(\varepsilon+\delta+\eta)\,\Gamma(\varepsilon+\delta-\eta)}{\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta)\,\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta)} \\ & \frac{(-1)^n\,n!\,(2\varepsilon-1)_n}{(2\varepsilon-1)_{2n}\,(2\varepsilon)_{2n}}(\varepsilon+\delta+\eta)_n\,(\varepsilon+\delta-\eta)_n\,(\varepsilon-\delta+\eta)_n\,(\varepsilon-\delta-\eta)_n\ \delta_{m,n} \\ = \ & \frac{\Gamma(1-2\varepsilon-2n)\,\Gamma(2-2\varepsilon-2n)\,\Gamma(n+\varepsilon+\delta+\eta)\,\Gamma(n+\varepsilon+\delta-\eta)\,n!}{\Gamma(2-2\varepsilon-n)\,\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta-n)\,\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta-n)}\delta_{m,n} \end{aligned} $$

elde edilir.

$\eta>\delta>0$ ise $\eta-\delta>N+\frac{t}{2}$ olur.

(6.1.66) eşitliğinden $x=0,1,2,...$ için

$$ \begin{aligned} \frac{W(0)}{W(x)} &= \frac{W(0)}{W(1)}...\frac{W(x-1)}{W(x)} \\ &= \frac{(\varepsilon-\delta-f)(\varepsilon+\delta-f)}{(1-\eta-f)(1+\eta-f)}...\frac{(\varepsilon-\delta-f-(x-1))(\varepsilon+\delta-f-(x-1))}{(1-\eta-f-(x-1))(1+\eta-f-(x-1))} \\ &= \frac{(1+\varepsilon-\delta-f)_x\,(1+\varepsilon+\delta-f-x)_x}{(2+\eta-f-x)_x\,(2-\eta-f-x)_x} \\ &= \frac{[\Gamma(\varepsilon-\delta-f)/\Gamma(1+\varepsilon-\delta-f-x)]\,[\Gamma(\varepsilon+\delta-f)/\Gamma(1+\varepsilon+\delta-f-x)]}{[\Gamma(1-\eta-f)/\Gamma(2+\eta-f-x)]\,[\Gamma(1+\eta-f)/\Gamma(2-\eta-f-x)]} \end{aligned} $$

olup

$$W(x)=\frac{W(0)\,\Gamma(1-\eta-f)\,\Gamma(1+\eta-f)\,\Gamma(1+\varepsilon-\delta-f-x)\,\Gamma(1+\varepsilon+\delta-f-x)}{\Gamma(2+\eta-f-x)\,\Gamma(2-\eta-f-x)\,\Gamma(\varepsilon-\delta-f)\,\Gamma(\varepsilon+\delta-f)} \tag{6.1.92}$$

elde edilir.

(6.1.92) eşitliğinde

$$W(0)=\frac{\Gamma(\varepsilon-\delta-f)\,\Gamma(\varepsilon+\delta-f)}{\Gamma(1-\eta-f)\,\Gamma(1+\eta-f)}$$

alınırsa

$$W(x)=\frac{\Gamma(1+\varepsilon-\delta-f-x)\,\Gamma(1+\varepsilon+\delta-f-x)}{\Gamma(2+\eta-f-x)\,\Gamma(2-\eta-f-x)}$$

bulunur. İşlemlerde kolaylık sağlamak için $f+\eta=1$ alınırsa

$$W(x)=\frac{\Gamma(-x+\varepsilon+\delta+\eta)\,\Gamma(-x+\varepsilon-\delta+\eta)}{\Gamma(-x+1)\,\Gamma(-x+2\eta+1)}$$

olur.

Durum 3.c: $N\in\{1,2,3,...\}$ ve $-1<t\leq 1$ için $2\varepsilon=-2N-t$ ve δ veya η den en az biri sanal, $\varepsilon\pm\delta\pm\eta\neq 0,-1,-2,...,-N+1$ alalım.

(6.1.77) eşitliğinden

$$W(x)=\frac{1}{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\,\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)\,\Gamma(2-\eta-f-x)\,\Gamma(2+\eta-f-x)} \tag{6.1.93}$$

dir. Burada $\delta_1\delta_2=0=\eta_1\eta_2$ için $\delta=\delta_1+i\delta_2$ ve $\eta=\eta_1+i\eta_2$ yazılabilir.

(6.1.12) denkleminde $e=1$ alınır, (6.1.93) eşitliği gözönüne alınırsa $n=0,1,2,...,N$ için (2.1.10) denkleminin Rodrigues formülü

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(e(2n-k-1)+2\varepsilon)}\frac{1}{W(x)}\Delta^n\left(W(x-n)\prod_{k=1}^{n}\varphi(x-k-1)\right)\\
&= \frac{1}{(n-1+2\varepsilon)_n}\frac{1}{W(x)}\\
&\quad \Delta^n\left(W(x-n)(x-n-1+f+\eta)_n(x-n-1+f-\eta)_n\right)\\
&= \frac{1}{(n-1+2\varepsilon)_n}\\
&\quad \frac{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\,\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)\,\Gamma(2-\eta-f-x)\,\Gamma(2+\eta-f-x)}{1}\\
&\quad \Delta^n\Big(\frac{(2-f-\eta-x)_n}{\Gamma(x-n+f-\varepsilon+\delta)\,\Gamma(x-n+f-\varepsilon-\delta)}\\
&\quad \frac{(2-f+\eta-x)_n}{\Gamma(2-\eta-f-x+n)\,\Gamma(2+\eta-f-x+n)}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)\Gamma(2-\eta-f-x)\Gamma(2+\eta-f-x)}{(n-1+2\varepsilon)_n}$$
$$\Delta^n\left(\frac{1}{\Gamma(x-n+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x-n+f-\varepsilon-\delta)}\right.$$
$$\left.\frac{1}{\Gamma(2+\eta-f-x)\Gamma(2-\eta-f-x)}\right)$$

şeklinde bulunur.

$A \to -\infty$ ve $N \to \infty$ için

$$d_0 := \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(x+f-\varepsilon+\delta)\Gamma(x+f-\varepsilon-\delta)\Gamma(2-\eta-f-x)\Gamma(2+\eta-f-x)}$$

şeklinde tanımlayalım.

(6.1.83) eşitliğinde $a=-1+\eta+f,\ \ b=-1-\eta+f,\ \ c=f-\varepsilon+\delta,\ \ d=f-\varepsilon-\delta$ alınırsa

$$d_0 = \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta)} \tag{6.1.94}$$

bulunur.

(5.1.5) ve (6.1.94) eşitlikleri (6.1.20) denkleminde yerlerine yazılırsa $m,n=0,1,2,...,N$ için

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} W(x)\,y_n(x)\,y_m(x)$$
$$= d_0 d_1 ... d_n \delta_{m,n}$$
$$= \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta)}$$
$$\frac{(-1)^n n!\,(2\varepsilon-1)_n}{(2\varepsilon-1)_{2n}(2\varepsilon)_{2n}}(\varepsilon+\delta+\eta)_n(\varepsilon+\delta-\eta)_n(\varepsilon-\delta+\eta)_n(\varepsilon-\delta-\eta)_n\,\delta_{m,n}$$
$$= \frac{\Gamma(1-2\varepsilon-2n)\Gamma(2-2\varepsilon-2n)\,n!}{\Gamma(2-2\varepsilon-n)\Gamma(1-\varepsilon+\delta+\eta-n)\Gamma(1-\varepsilon-\delta-\eta-n)}$$
$$\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon+\delta-\eta-n)\Gamma(1-\varepsilon-\delta+\eta-n)}\delta_{m,n}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

R. KOEKOEK, Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues, Springer Monographs in Mathematics, 95-97

T. S. CHIHARA, An introduction to orthogonal polynomials. Gordon and Breach, New York, 1978.

W. SCHOUTENS, Stochastics Processes and Orthogonal Polynomials. Lecture Notes in Stochastics 146, Springer-Verlag,New York, 2000

G. E. ANDREWS and R. ASKEY, Classical Orthogonal Polynomials. 36-62

R. ASKEY and M. E. H. ISMAIL, Recurrence Relations, Continued Fractions and Orthogonal Polynomials. 300

T. S. CHIHARA, An Introductıon to Orthogonal Polynomials. 78-82

G. GASPER and M. RAHMAN, Basic Hypergeometric Series. 35

S. LEWANOWICZ, Recurrence Relations for the Connection Coefficients of Orthogonal Polynomials of a Dıscrete Variable. 213-229

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Zeliha KOCAMAN

Doğum Yeri: Rize

Doğum Tarihi: 12.12.1987

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu(Kurum ve Yıl)

Lise:İnönü Lisesi(2005)

Lisans:Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü(2009)

Yüksek Lisans:Ankara üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı(Eylül2009-Temmuz 2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Devlet Hava Meydanları İşletmesi Hava Trafik Kontrolörü(2012-...)