ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ DERECEDEN BAZI İNDİRGEME DİZİLERİ

Elif TAN KILIÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2010

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ DERECEDEN BAZI İNDİRGEME DİZİLERİ

Elif TAN KILIÇ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali Bülent EKİN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, ikinci basamaktan (p,q) −genelleştirilmiş Fibonacci ve (p,q) −genelleştirilmiş Lucas dizilerinin bazı alt dizileri için birinci basamaktan lineer olmayan indirgeme kuralları elde edilmiştir. Son olarak genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_{k^n}\}$ için k' nın çift olması durumunda indirgeme bağıntısı elde edilmiştir.
Üçüncü bölümde, (p,q) −genelleştirilmiş Lucas dizisi için bir polinom gösterimi verilmiştir.
Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimlerini içeren bazı bağıntılar elde edilmiştir.

Ocak 2011, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler : İkinci basamaktan (p,q) −genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri, lineer ve lineer olmayan indirgeme bağıntıları, polinom gösterimi.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME SECOND ORDER RECURRENCE SEQUENCES

Elif TAN KILIÇ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ali Bülent EKİN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, first order nonlinear recurrence relations for certain subsequences of the second order (p, q) −generalized Fibonacci and Lucas sequences are obtained. Finally a recurrence relation for the generalized Lucas sequence $\{v_{k^n}\}$ is given for even k.

In the third chapter, a polynomial representation is given for the (p, q) −generalized Lucas sequence.

The second chapter, first order nonlinear recurrence relations for certain subsequences of the second order (p, q) −generalized Fibonacci and Lucas sequences are obtained.

In the third chapter, a polynomial representation is given for the (p, q) −generalized Lucas sequence.

The fourth chapter, some relations including the terms of generalized Fibonacci sequence are derived.

January 2011, 39 pages

Key Words: Second order (p, q) −generalized Fibonacci and Lucas sequences, linear and nonlinear recurrence relations, polynomial representation.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her zaman destek olan danışman hocam Prof. Dr. Ali Bülent EKİN' e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi), çalışmalarım süresince destek ve anlayışını esirgemeyen sevgili eşim Emrah KILIÇ' a ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan değerli aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Elif TAN KILIÇ

Ankara, Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
$\{U_n\}$	$(p,q)-$ Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{V_n\}$	$(p,q)-$ Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\{u_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{v_n\}$	Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\{P_n\}$	Pell dizisi
$\{Q_n\}$	Pell-Lucas dizisi
$\{J_n\}$	Jacobsthal dizisi
$\{j_n\}$	Jacobsthal-Lucas dizisi
$\binom{n}{k}$	n' nin k' lı kombinasyonu
$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
Δ	Diskriminant
$\lfloor x \rfloor$	x' i geçmeyen en büyük tamsayı

1. GİRİŞ

Fibonacci sayıları, her $n \geq 1$ doğal sayısı ve $F_0 = 0, \quad F_1 = 1$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanır. Burada F_n; n-inci Fibonacci sayısı ve $\{F_n\}$ ise elemanları Fibonacci sayılarından oluşan Fibonacci dizisidir.

Lucas sayıları ise her $n \geq 1$ doğal sayısı ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere,

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n; n-inci Lucas sayısı ve $\{L_n\}$ ise elemanları Lucas sayılarından oluşan Lucas dizisidir.

Fibonacci ve Lucas dizilerinin çeşitli genelleştirilmeleri bazı yazarlar tarafından elde edilmiş ve bunların çeşitli özellikleri incelenmiştir (Hoggat 1969, Vorob'ev 1978, Vajda 1989, Robbins 1993, Koshy 2001).

Fibonacci dizisinin bir genelleştirilmesi, $\Delta = p^2 - 4q \neq 0$ olacak şekilde p ve q sıfırdan farklı tamsayılar olmak üzere her $n \geq 1$ tamsayısı, $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$U_{n+1} = pU_n - qU_{n-1}$$

şeklinde tanımlanır (Robbins 1993).

Bu tür genelleştirilmiş Fibonacci dizisine, (p, q) −genelleştirilmiş Fibonacci dizisi adını vereceğiz.

Benzer şekilde, (p, q) −genelleştirilmiş Lucas dizisi ise $\Delta = p^2 - 4q \neq 0$ olacak şekilde p ve q sıfırdan farklı tamsayılar olmak üzere her $n \geq 1$ tamsayısı, $V_0 = 2$ ve $V_1 = p$

başlangıç koşulları için

$$V_{n+1} = pV_n - qV_{n-1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Robbins 1993).

Eğer $p = -q = 1$ alınırsa $U_n = F_n$ ve $V_n = L_n$ olur.

Bu tez boyunca, $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizilerinde $q = -1$ olması durumlarını sırasıyla $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ ile göstereceğiz. Bu iki diziye sırasıyla genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizileri adını vereceğiz.

(p, q) −Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ ve (p, q) −genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_n\}$' nin bu iki özel durumunu tanımlamamızın sebebi ise inceleyeceğimiz ve elde etmeye çalışacağımız çeşitli özelliklerin bazen sadece $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri için elde edilebilir olmasıdır. Bu tezin 4. Bölümünde bu iki sayı dizisinin yani genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ ve genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$' nin çeşitli özelliklerini elde edeceğiz.

Şimdi Fibonacci sayılarının Binet gösteriminden bahsedeceğiz. Fransız matematikçi Binet ilk kez 1843 yılında, Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formüllerini vermiştir (Vajda 1989, Koshy 2001); $\forall n > 0$ doğal sayısı için

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi}$$

ve

$$L_n = \phi^n + \psi^n$$

şeklindedir. Burada ϕ ve ψ, Fibonacci sayılarının karakteristik polinomu $x^2 - x - 1$' ın kökleridir. Yani $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ ve $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.61803$' dir.

Benzer şekilde (p, q) −genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ ve (p, q) −genelleştirilmiş

Lucas dizisi $\{V_n\}$ için Binet formülleri; $\forall n > 0$ doğal sayısı için

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$V_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. Burada α ve β, $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizilerinin karakteristik polinomu $x^2 - px + q = 0$' ın kökleridir.

Şimdi bu bahsedilen Binet formülünün genel olarak (p, q) $-$genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için nasıl elde edileceğini gösterelim.

(p, q) $-$Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, $\Delta = p^2 - 4q \neq 0$ olacak şekilde p ve q sıfırdan farklı tamsayılar olmak üzere her $n \geq 1$ tamsayısı, $U_1 = 0$ ve $U_1 = 1$ başlangıç koşulları için

$$U_{n+1} = pU_n - qU_{n-1}$$

indirgeme kuralı ile tanımlanmıştı. İndirgeme dizilerinin birer fark denklemi olmasından dolayı böyle bir dizinin karakteristik denklemi, U_n yerine x^n alınarak bulunur. Böylece

$$x^{n+1} = px^n - qx^{n-1}$$

olup, bu eşitliğin her iki tarafını x^{n-1}' e bölersek bu dizinin karakteristik denklemi

$$x^2 - px + q = 0$$

olarak elde edilir. Buradal α ve β' nin (p, q) $-$genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$'nin karakteristik polinomu $x^2 - px + q$' ın kökleri olmak üzere, açıkça;

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dır. Bu dizinin genel çözümü

$$U_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

şeklindedir.Buradaki A ve B skalerleri, başlangıç koşulları yerine yazılarak elde edilen lineer denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilir. Bu dizinin iki başlangıç koşulunu gözönüne alırsak,

$$U_0 = A\alpha^0 + B\beta^0 = 0$$

ve

$$U_1 = A\alpha^1 + B\beta^1 = 1$$

olacağını biliyoruz. Eğer

$$\begin{cases} A\alpha^0 + B\beta^0 = 0 \\ A\alpha^1 + B\beta^1 = 1 \end{cases}$$

lineer denklem sistemini Cramer metoduyla çözersek, buradan

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} \text{ ve } B = -\frac{1}{\alpha - \beta}$$

olarak bulunur. Böylece

$$U_n = A\alpha^n + B\beta^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

sonucu elde edilir. Böylece $\{U_n\}$ dizisi için bahsedilen Binet formülü elde edilmiş olur. Binet formülü bize bu dizinin herbir teriminin, dizinin karakteristik denkleminin köklerinin kuvvetlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabileceğini belirtir.

Benzer şekilde (p,q) $-$genelleştirilmiş Lucas dizisi ile (p,q) $-$genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin indirgeme kuralı aynı olduğundan karakteristik denklemleri ve karakteristik kökleri aynıdır. Buna göre genelleştirilmiş Lucas dizisi için

$$V_n = C\alpha^n + D\beta^n$$

olacak şekilde C ve D skalerlerini belirleyelim. Burada $\{V_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarını gözönüne alarak,

$$V_0 = C + D = 2$$

ve

$$V_1 = C\alpha + D\beta = 1$$

yazarız. Buradan

$$\begin{cases} C + D = 2 \\ C\alpha + D\beta = 1 \end{cases}$$

lineer denklem sistemini çözersek, çözümü $C = D = 1$ olarak buluruz. Böylece

$$V_n = \alpha^n + \beta^n$$

sonucu ortaya çıkar. Böylece $\{V_n\}$ dizisi için bahsedilen Binet formülü elde edilmiş olur.

Burada özel olarak genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin Binet formülleri ise

$$u_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve

$$v_n = \gamma^n + \delta^n$$

şeklindedir. Burada γ ve δ ise genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ ve genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$'nin karakteristik polinomu $x^2 - px + 1$' in kökleridir.

Şimdi (p,q) $-$genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ ve (p,q) $-$genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_n\}$ ' nin bilinen bazı özel durumlarını aşağıda belirtelim:

U_n	p	q	0	1	$x^2-px+q=0$	$U_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$	(p,q) −Gen. Fibonacci
V_n	p	q	2	p	$x^2-px+q=0$	$V_n=\alpha^n+\beta^n$	(p,q) −Gen. Lucas
u_n	p	-1	0	1	$x^2-px-1=0$	$u_n=\frac{\gamma^n-\delta^n}{\gamma-\delta}$	Gen. Fibonacci
v_n	p	-1	2	p	$x^2-px-1=0$	$v_n=\gamma^n+\delta^n$	Gen. Lucas
F_n	1	-1	0	1	$x^2-x-1=0$	$F_n=\frac{\phi^n-\psi^n}{\phi-\psi}$	Fibonacci
L_n	1	-1	2	1	$x^2-x-1=0$	$L_n=\phi^n+\psi^n$	Lucas
P_n	2	-1	0	1	$x^2-2x-1=0$	$P_n=\frac{c^n-d^n}{c-d}$	Pell
Q_n	2	-1	2	2	$x^2-2x-1=0$	$Q_n=c^n+d^n$	Pell-Lucas
J_n	1	-2	0	1	$x^2-x-2=0$	$J_n=\frac{e^n-f^n}{e-f}$	Jacobsthal
j_n	1	-2	2	1	$x^2-x-2=0$	$j_n=e^n+f^n$	Jacobsthal-Lucas

Not: Yukarıda 7. sütunda belirtilen sabitler, 6. sütunda verilen denklemlerin çözümleridir.

Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ ve onun bazı alt dizilerinin çeşitli özelliklerinden bahsetmeden önce Fibonacci dizisinin özel bir durumuna değinelim. Fibonacci dizisinin indirgeme kuralının, herbir Fibonacci sayısının kendisinden önceki ilk iki Fibonacci sayısının toplamı şeklinde verildiğini biliyoruz. Eğer biz bu kuralı geriye doğru çalıştırırsak yani negatif indisli Fibonacci sayılarının nasıl bir indirgeme kuralı sağlayacağını inceleyecek olursak, buradan $F_0=0$ ve $F_1=1$ başlangıç kuralları için

$$F_{-1}+F_0=F_1$$

kuralının sağlanması için $F_{-1}=1$ olması gerektiğini buluruz. Bir adım daha geriye hareketle,

$$F_{-2}+F_{-1}=F_0$$

olması gerektiğini gözönüne alırsak, $F_{-2} = -1$ olduğunu elde ederiz. Benzer şekilde

$$F_{-3} + F_{-2} = F_{-1}$$

olması gerektiğinden buradan $F_{-3} = 2$ olarak buluruz. Genel olarak

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

olduğu elde edilir.

Benzer şekilde negatif indisli Lucas sayılarının ise

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

kuralını sağlayacağı kolayca elde edilir (Vajda 1989).

Bilinen Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ ve onun bazı alt dizilerinin çeşitli özellikleri birçok yazar tarafından çalışılmış ve incelenmiştir. Fibonacci dizisinin indirgeme kuralına karşılık çeşitli alt dizileri acaba hangi indirgeme kurallarını sağlayacaktır problemide oldukça ilgi çekmiştir ve bazı yazarlar tarafından bu konu hakkında çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin Fibonacci dizisi $\{F_n\}$' nin çift indisli terimlerinden oluşan $\{F_{2n}\}$ dizisinin indirgeme kuralı

$$F_{2n} = 3F_{2(n-1)} - F_{2(n-2)}$$

şeklindedir.

Buradan hareketle, n bir doğal sayı ve k herhangi bir tamsayı olmak üzere $\{F_{kn}\}$ formundaki dizilerin

$$F_{kn} = L_k F_{k(n-1)} + (-1)^{k+1} F_{k(n-2)}$$

ile verilen indirgeme kuralını sağladıkları elde edilmiştir (Kılıç ve Stanica 2009).

Burada L_n, n. Lucas sayısını göstermektedir.

Dikkat edilirse, k pozitif bir tamsayı iken $\{F_{kn}\}$ formundaki diziler, Fibonacci dizisi $\{F_n\}$' nin bir alt dizisidir. Fakat negatif k tamsayıları için bu durum doğru değildir.

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	$\cdots$

Ayrıca bu sonucun (p,q) −genelleştirilmiş Fibonacci disizi $\{U_n\}$ için

$$U_{kn} = V_k U_{k(n-1)} - q^k U_{k(n-2)}$$

şeklinde olduğu elde edilmiştir (Kılıç ve Stanica 2009). Burada V_n, (p,q) −genelleştirilmiş Lucas dizisinin n. terimidir.

Benzer şekilde (p,q) −genelleştirilmiş Lucas sayıları için

$$V_{kn} = V_k V_{k(n-1)} - q^k V_{k(n-2)}$$

olduğu gösterilmiştir.

Buraya kadar Fibonacci dizisinin, indisleri n doğal sayısının bir pozitif tamsayı katı formundaki alt dizilerini gözönüne aldık. Bundan sonra ise Fibonacci dizisinin daha farklı yapıdaki alt dizilerini gözönüne alacağız ve onlarla ilgili bazı ön bilgiler vereceğiz.

Şimdi ilk problemimizin kaynağını oluşturan ön bilgileri sunalım.

Stinchcomb (1994) tarafından $n \geq 0$ için, aşağıdaki birinci basamaktan kübik indirgeme bağıntısının çözümü, bir problem olarak ortaya atılmıştır:

$$a_{n+1} = 5a_n^3 - 3a_n, \quad a_0 = 1.$$

Terr (1995) ise bu problemin çözümünü $a_n = F_{3^n}$ olarak vermiştir. Yani $\{F_{3^n}\}$ dizisi

$$F_{3^{n+1}} = 5F_{3^n}^3 - 3F_{3^n}$$

indirgeme kuralını sağlar.

Benzer şekilde Crux Mathematicorum (1994) dergisinde $n \geq 0$ olmak üzere,

$$b_{n+1} = 25b_n^5 - 25b_n^3 + 5b_n, \quad b_0 = 1$$

ile verilen indirgeme bağıntısının çözümü, bir problem olarak sorulmuştur. Bu problemin çözümünün ise $b_n = F_{5^n}$ olduğu ispatlanmıştır.

Ayrıca yine aynı dergide, Klamkin (1994) tarafından $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n^2 - 2, \;\; A_1 = 3, \\ B_{n+1} &= B_n^4 - 4B_n^2 + 2, \quad B_1 = 7, \\ C_{n+1} &= C_n^6 - 6C_n^4 + 9C_n^2 - 2, \quad C_1 = 18, \end{aligned}$$

ile verilen indirgeme bağıntılarının çözümleri sırasıyla $A_n = L_{2^n}$, $B_n = L_{4^n}$ ve $C_n = L_{6^n}$ olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra Filipponi (1996) , makalesinde $\{F_{3^n}\}$ dizisinin sağlamış olduğu

$$F_{3^{n+1}} = 5F_{3^n}^3 - 3F_{3^n}, \; F_{3^0} = 1$$

indirgeme kuralından yola çıkarak, pozitif k tek tamsayısı ve $n \geq 0$ için $\{F_{k^n}\}$ 'lere,

$$C_{i,k} = (-1)^{(k+1)/2+i} \binom{(k+1)/2+i}{2i+1} \frac{k}{(k+1)/2+i} \quad ,0 \leq i \leq (k-3)/2$$

olmak üzere

$$F_{k^{n+1}} = 5^{(k-1)/2} F_{k^n}^k - \sum_{i=0}^{(k-3)/2} 5^i C_{i,k} F_{k^n}^{2i+1} \tag{1.1}$$

birinci basamaktan lineer olmayan homogen indirgeme bağıntısı bulmuştur.

Özel olarak $k = 5, 7$ ve 9 değerleri için

$$F_{5^{n+1}} = 25F_{5^n}^5 - 25F_{5^n}^3 + 5F_{5^n},$$

$$F_{7^{n+1}} = 125F_{7^n}^7 - 175F_{7^n}^5 + 70F_{7^n}^3 - 7F_{7^n}$$

ve

$$F_{9^{n+1}} = 625F_{9^n}^9 - 1125F_{9^n}^7 + 675F_{9^n}^5 - 150F_{9^n}^3 + 9F_{9^n}$$

örneklerini vermiştir.

Bizim bu tezde ilgileneceğimiz iki temel problemden birincisi; Filipponi (1996)' nin (1.1) ile verdiği sonucu göz önüne alarak, bu sonucun ikinci basamaktan indirgeme dizileri $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ için elde edilip edilemeyeceğini araştırmaktır. Bu problemi aşağıdaki şekilde daha detaylı bir şekilde açıklayalım:

- Filipponi (1996) tarafından sadece pozitif k tek tamsayıları gözönüne alınarak Fibonacci sayıları, F_{k^n}, için elde edilen sonuçları, (p, q) −genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, U_{k^n}, için elde edilip edilemeyeceğini araştırmak,

- Yukarıda Fibonacci sayıları ve pozitif k tek tamsayıları için elde edilen sonuçların (p, q) −genelleştirilmiş Lucas sayıları, V_{k^n}, için elde edilmesi durumunun incelenmesi

- Yukarıda genelleştirilmiş (p, q) −genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için elde edilebilen sonuçların, pozitif k çift tamsayıları için de elde edilip edilemeyeceği durumunun incelenmesi

- k pozitif bir çift tam sayı olmak üzere; $(p,q)-$ genelleştirilmiş Lucas sayılarını, $(p,q)-$ genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının k-inci dereceden bir polinomu olarak ifade edilip edilemeyeceğinin araştırılmasıdır.

Şimdi ise ikinci problemimizin kaynağını oluşturan bazı ön bilgileri sunalım.

Usiskin (1973 a, b) aşağıdaki ifadelerin ispatlarını sormuştur.

$$F_{3^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(L_{2.3^k} - 1\right), \quad n > 0 \tag{1.2}$$

$$L_{3^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(L_{2.3^k} + 1\right), \quad n > 0 \tag{1.3}$$

Sonrasında Garfield (1974) ve Zeitlin (1974) tarafından bu iki eşitliğin doğruluğu ispatlanmıştır.

Janous (2001) tarafından (1.2) ile verilen çarpımsal ifadenin değeri tekrar bir problem olarak ortaya atılmıştır. Seiffert (2002) bu problemin çözümüne ithafen Filipponi (1996) 'nin makalesini referans göstererek kolayca ispatlanabileceğini söylemiştir.

Filipponi (1996) makalesinde k tek tamsayısı ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$F_{k^n} = (-1)^{(n-1)(k-1)/2} F_k \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} (-1)^j L_{2jk^i}\right] \tag{1.4}$$

olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde çift k tamsayıları için ise

$$F_{k^n} = F_k \prod_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{k/2} L_{(2j-1)k^i}\right] \tag{1.5}$$

sonucunu elde etmiştir.

Eğer (1.4)' de $k = 3$ alınırsa Janous (2001) ve Usiskin (1973 a) 'in problemlerinin cevabı elde edilir. Açıkca

$$\begin{aligned} F_{3^n} &= (-1)^{(n-1)} F_3 \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} (-1)^j L_{2jk^i} \right] \\ &= (-1)^{(n-1)} 2 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - L_{3^i 2}) \\ &= 2 \prod_{i=1}^{n-1} (L_{3^i 2} - 1) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (L_{3^i 2} - 1) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir ki bu ise (1.2) ile verilen sonuçtur.

Bizim bu tezdeki ikinci temel problemimiz ise Filipponi (1996)' nin (1.4) ile vermiş olduğu sonucun, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, u_{k^n}, için elde edilip edilemeyeceğinin araştırılmasıdır.

2. İNDİRGEME BAĞINTILARI

Bu bölümde k herhangi bir pozitif tek tamsayı olmak üzere (p,q) $-$genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için birinci basamaktan lineer olmayan indirgeme bağıntıları elde edilecektir. Daha sonra k herhangi bir pozitif çift tamsayı olmak üzere genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_{k^n}\}$ için indirgeme bağıntısı elde edilecektir.

Şimdi ileride vereceğimiz sonuçlarda kullanmak üzere aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.1: Her $n,t \geq 0$ tamsayıları için, $\Delta = p^2 - 4q$ olmak üzere

i) $$U_{(2t+1)n} = U_n \sum_{k=0}^{t} \frac{2t+1}{t+k+1} \binom{t+k+1}{2k+1} \Delta^k q^{n(t-k)} U_n^{2k},$$

ii) $$U_{(2t+1)n} = U_n \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+k} \binom{t+k}{2k} q^{n(t-k)} V_n^{2k},$$

iii) $$V_{2tn} = \sum_{k=0}^{t} \frac{2t}{t+k} \binom{t+k}{2k} \Delta^k q^{n(t-k)} U_n^{2k},$$

iv) $$V_{(2t+1)n} = V_n \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+k} \frac{2t+1}{t+k+1} \binom{t+k+1}{2k+1} q^{n(t-k)} V_n^{2k},$$

v) $$V_{2tn} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+k} \frac{2t}{t+k} \binom{t+k}{2k} q^{n(t-k)} V_n^{2k}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Bu lemmada iddia edilen sonuçları ispatlamak için aşağıdaki iki formülden yararlanacağız (Swamy 1997): Her $m > 0$ tamsayısı için

$$X^m + Y^m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \frac{m}{m-k} \binom{m-k}{k} (XY)^k (X+Y)^{m-2k} \qquad (2.1)$$

ve

$$\frac{X^m - Y^m}{X - Y} = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-1}{k} (XY)^k (X+Y)^{m-2k-1}. \qquad (2.2)$$

Burada (2.1) ile verilen formül literatürde Waring formülü olarak bilinmektedir.

i) Eğer (2.1) ile verilen formülde $X = \alpha^n, Y = -\beta^n$ alınırsa, $X + Y = \sqrt{\Delta} U_n$ ve $XY = -q^n$ olup buradan

$$\alpha^{mn} + (-1)^m \beta^{mn} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{m}{m-k} \binom{m-k}{k} (-1)^k q^{nk} \Delta^{\frac{m-2k}{2}} U_n^{m-2k}$$

sonucu elde edilir. Bu son eşitlikte $m = 2t + 1$ alınarak,

$$\alpha^{(2t+1)n} - \beta^{(2t+1)n} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^{2k} \frac{2t+1}{2t+1-k} \binom{2t+1-k}{k} q^{nk} \Delta^{t-k+\frac{1}{2}} U_n^{2(t-k)+1}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitliğin her iki tarafı $(\alpha - \beta)$' ya bölünür ve (p, q) −genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin Binet formülü gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} U_{(2t+1)n} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{k=0}^{t} \frac{2t+1}{2t+1-k} \binom{2t+1-k}{2t+1-2k} q^{nk} \Delta^{t-k+\frac{1}{2}} U_n^{2(t-k)+1} \\ &= U_n \sum_{k=0}^{t} \frac{2t+1}{2t+1-k} \binom{2t+1-k}{2(t-k)+1} q^{nk} \Delta^{t-k} U_n^{2(t-k)} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Burada $t - k$ yerine k alınırsa,

$$U_{(2t+1)n} = U_n \sum_{k=0}^{t} \frac{2t+1}{t+k+1} \binom{t+k+1}{2k+1} \Delta^k q^{n(t-k)} U_n^{2k}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (i) maddesi ispatlanmış olur.

ii) (2.2) ile verilen formülde $X = \alpha^n$ ve $Y = \beta^n$ alınırsa, $X + Y = V_n$ ve $XY = q^n$

olup buradan

$$\frac{\alpha^{mn}-\beta^{mn}}{\alpha^{n}-\beta^{n}} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^{k} \binom{m-k-1}{k} q^{nk} V_{n}^{m-2k-1}$$

sonucu elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı $(\alpha-\beta)$' ya bölünür ve (p,q) $-$genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin Binet formülü gözönüne alınırsa

$$U_{mn} = U_{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^{k} \binom{m-k-1}{k} q^{nk} V_{n}^{m-2k-1}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $m = 2t+1$ alınırsa

$$U_{(2t+1)n} = U_{n} \sum_{k=0}^{t} (-1)^{k} \binom{2t-k}{k} q^{nk} V_{n}^{2(t-k)}$$

olur. Burada $t-k$ yerine k alınması ile,

$$U_{(2t+1)n} = U_{n} \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+k} \binom{t+k}{2k} q^{n(t-k)} V_{n}^{2k}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (ii) maddesi ispatlanmış olur.

iii) Eğer (2.1) ile verilen formülde benzer şekilde $X = \alpha^{n}, Y = -\beta^{n}$ alınırsa $X+Y = \sqrt{\Delta}U_{n}$ ve $XY = -q^{n}$ olup böylece

$$\alpha^{mn} + (-1)^{m}\beta^{mn} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^{k} \frac{m}{m-k} \binom{m-k}{k} (-1)^{k} q^{nk} \Delta^{\frac{m-2k}{2}} U_{n}^{m-2k}$$

olur. Burada $m = 2t$ alınır ve (p,q) $-$genelleştirilmiş Lucas dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$V_{2tn} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^{2k} \frac{2t}{2t-k} \binom{2t-k}{2(t-k)} q^{nk} \Delta^{t-k} U_{n}^{2(t-k)}$$

eşitliği elde edilir. Burada $t-k$ yerine k alınması sonucunda

$$V_{2tn} = \sum_{k=0}^{t} \frac{2t}{t+k} \binom{t+k}{2k} q^{n(t-k)} \Delta^{k} U_{n}^{2k}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

iv) Yine benzer şekilde (2.1) ile verilen formülde $X = \alpha^n, Y = \beta^n$ alınırsa $X + Y = V_n$ ve $XY = q^n$ olup (p, q) −genelleştirilmiş Lucas dizisinin Binet formülünden yararlanarak

$$\alpha^{mn} + \beta^{mn} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{m}{m-k} \binom{m-k}{k} q^{nk} V_n^{m-2k}$$

sonucu elde edilir. Burada $m = 2t + 1$ alınırsa

$$V_{(2t+1)n} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \frac{2t+1}{2t+1-k} \binom{2t+1-k}{2(t-k)+1} q^{nk} V_n^{2(t-k)+1}$$

olarak elde edilir. Eğer $t - k$ yerine k alınırsa,

$$V_{(2t+1)n} = V_n \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+k} \frac{2t+1}{t+k+1} \binom{t+k+1}{2k+1} q^{n(t-k)} V_n^{2k}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat biter.

v) Eğer (2.1) ile verilen formülde $X = \alpha^n, Y = \beta^n$ alınırsa $X + Y = V_n$ ve $XY = q^n$ olup buradan da

$$\alpha^{mn} + \beta^{mn} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{m}{m-k} \binom{m-k}{k} q^{nk} V_n^{m-2k}$$

sonucu elde edilir. Ayrıca $m = 2t$ alınır ve (p, q) −genelleştirilmiş Lucas dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$V_{2tn} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \frac{2t}{2t-k} \binom{2t-k}{2(t-k)} q^{nk} V_n^{2(t-k)}$$

olup $t - k$ yerine k alınırsa,

$$V_{2tn} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+k} \frac{2t}{t+k} \binom{t+k}{2k} q^{n(t-k)} V_n^{2k}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

2.1 (p,q) −Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi $\{U_{k^n}\}$ İçin İndirgeme Bağıntısı

Şimdi k herhangi bir pozitif tek tamsayı olmak üzere $\{U_{k^n}\}$ dizisinin birinci basamaktan lineer olmayan bir indirgeme bağıntısını sağladığını aşağıdaki teoremle göstereceğiz.

Teorem 2.1.1: Her $n \geq 0$ tamsayısı ve k pozitif tek tamsayısı için

$$C_{i,k} = -\frac{2k}{k+2i+1}\binom{(k+1)/2+i}{2i+1}$$

ve $0 \leq i \leq (k-3)/2$ olmak üzere (p,q) −genelleştirilmiş Fibonacci sayıları birinci basamaktan lineer olmayan

$$U_{k^{n+1}} = \triangle^{(k-1)/2}U_{k^n}^k - \sum_{i=0}^{(k-3)/2} \triangle^i q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)} C_{i,k} U_{k^n}^{2i+1}$$

indirgeme kuralını sağlar.

İspat: $\{U_n\}$ dizisinin Binet formülünden

$$U_{k^n} = \frac{\alpha^{k^n} - \beta^{k^n}}{\alpha - \beta}$$

olup, bu eşiliğin her iki tarafının k. kuvveti alınırsa, $\alpha - \beta = \triangle^{1/2}$ olmak üzere

$$U_{k^n}^k = \frac{1}{\triangle^{k/2}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \beta^{jk^n} \alpha^{(k-j)k^n} \tag{2.1.1}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğin sağ tarafının açık bir şekilde yazılması ile aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
U_{k^n}^k &= \frac{1}{\triangle^{k/2}}\left(\binom{k}{0}\alpha^{k^{n+1}} - \binom{k}{1}\beta^{k^n}\alpha^{(k-1)k^n} + \binom{k}{2}\beta^{2k^n}\alpha^{(k-2)k^n}\right. \\
&\left. +... - \binom{k}{k-2}\beta^{(k-2)k^n}\alpha^{2k^n} + \binom{k}{k-1}\beta^{(k-1)k^n}\alpha^{k^n} - \binom{k}{k}\beta^{k^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{\triangle^{k/2}}\left(\left(\alpha^{k^{n+1}} - \beta^{k^{n+1}}\right) - \binom{k}{1}(\alpha\beta)^{k^n}\left(\alpha^{(k-2)k^n} - \beta^{(k-2)k^n}\right)\right. \\
&+\binom{k}{2}(\alpha\beta)^{2k^n}\left(\alpha^{(k-4)k^n} - \beta^{(k-4)k^n}\right) \\
&\left. +... + (-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}(\alpha\beta)^{\left(\frac{k-1}{2}\right)k^n}\left(\alpha^{k^n} - \beta^{k^n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\triangle^{(k-1)/2}}\left(U_{k^{n+1}} + \sum_{j=1}^{(k-1)/2}\binom{k}{j}\left(-q^{k^n}\right)^j U_{(k-2j)k^n}\right).
\end{aligned}$$

Böylece herhangi bir pozitif k tek tamsayısı için

$$U_{k^{n+1}} = \triangle^{(k-1)/2}U_{k^n}^k - \sum_{j=1}^{(k-1)/2}\binom{k}{j}q^{k^n j}(-1)^j U_{(k-2j)k^n} \tag{2.1.2}$$

sonucu elde edilir. Lemma 2.1' in (i) şıkkı gözönüne alınarak, (2.1.2) ile verilen eşitlik

$$\begin{aligned}
U_{k^{n+1}} &= \triangle^{(k-1)/2}U_{k^n}^k \qquad (2.1.3)\\
&-\sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}}\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}-j}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{\frac{k+1}{2}+i-j}{2i+1}\frac{k-2j}{\frac{k+1}{2}+i-j}\triangle^i q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)}U_{k^n}^{2i+1}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu son eşitliğin sağında bulunan iki toplamın sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}
U_{k^{n+1}} &= \triangle^{(k-1)/2}U_{k^n}^k \\
&-\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}-i}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{\frac{k+1}{2}+i-j}{2i+1}\frac{k-2j}{\frac{k+1}{2}+i-j}\triangle^i q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)}U_{k^n}^{2i+1}
\end{aligned}$$

olup, bu son eşitlikteki

$$\sum_{j=1}^{(k-1)/2-i}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{(k+1)/2+i-j}{2i+1}\frac{k-2j}{(k+1)/2+i-j}$$

toplamının değerini $C_{i,k}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$U_{k^{n+1}} = \triangle^{(k-1)/2} U_{k^n}^k - \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \triangle^i q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)} C_{i,k} U_{k^n}^{2i+1}$$

sonucu elde edilir.

Tanımı gereği $C_{(k-1)/2,k} = 0$ olduğundan yukarıdaki formül

$$U_{k^{n+1}} = \triangle^{(k-1)/2} U_{k^n}^k - \sum_{i=0}^{(k-3)/2} \triangle^i C_{i,k} q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)} U_{k^n}^{2i+1}$$

şeklinde yazılabilir.

Riordan (1979)' dan biliyoruz ki $1 \leq m \leq (k-1)/2$ için

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^j \frac{k-2j}{k-m-j} \binom{k}{j} \binom{k-m-j}{m-j} = -\frac{k}{k-m} \binom{k-m}{m} \tag{2.1.4}$$

formülü sağlanır. Eğer bu son eşitlikte m yerine $\left(\frac{k-1}{2} - i\right)$ alınırsa,

$$C_{i,k} = -\frac{2k}{k+2i+1} \binom{(k+1)/2+i}{2i+1}$$

olarak elde edilir ve sonuç olarak

$$U_{k^{n+1}} = \triangle^{(k-1)/2} U_{k^n}^k - \sum_{i=0}^{(k-3)/2} \triangle^i q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)} C_{i,k} U_{k^n}^{2i+1}$$

olur. Böylece iddia ispatlanmış olur.

Örneğin, $\Delta = p^2 - 4q$ olmak üzere sırasıyla $k = 5, 7$ ve $k = 9$ değerleri için

$U_{5^{n+1}} = \triangle^2 U_{5^n}^5 + 5\triangle q^{5^n} U_{5^n}^3 + 5q^{5^n 2} U_{5^n},$

$U_{7^{n+1}} = \triangle^3 U_{7^n}^7 + 7\triangle^2 q^{7^n} U_{7^n}^5 + 14\triangle q^{7^n 2} U_{7^n}^3 + 7q^{7^n 3} U_{7^n}$

$$U_{9^{n+1}} = \triangle^4 U_{9^n}^9 + 9\triangle^3 q^{9^n} U_{9^n}^7 + 27\triangle^2 q^{9^n 2} U_{9^n}^5 + 30\triangle q^{9^n 3} U_{9^n}^3 + 9q^{9^n 4} U_{9^n}$$

sonuçları elde edilir.

Özel olarak, eğer $p = 1$ ve $q = -1$ alınırsa, $(1, -1)$ −genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, bilinen Fibonacci dizisi $\{F_n\}$' e dönüşür ve bu durumda sırasıyla $k = 5, 7$ ve $k = 9$ için

$$F_{5^{n+1}} = 25F_{5^n}^5 - 25F_{5^n}^3 + 5F_{5^n},$$

$$F_{7^{n+1}} = 125F_{7^n}^7 - 175F_{7^n}^5 + 70F_{7^n}^3 - 7F_{7^n}$$

$$F_{9^{n+1}} = 625F_{9^n}^9 - 1125F_{9^n}^7 + 675F_{9^n}^5 - 150F_{9^n}^3 + 9F_{9^n}$$

sonuçlarına ulaşılır..

Buna ilaveten, eğer $p = 2$ ve $q = -1$ alınırsa, $(2, -1)$ −genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, Pell dizisi $\{P_n\}$' e dönüşür ve bu durumda benzer şekilde sırasıyla $k = 5, 7$ ve $k = 9$ için

$$P_{5^{n+1}} = 64P_{5^n}^5 - 40P_{5^n}^3 + 5P_{5^n},$$

$$P_{7^{n+1}} = 512P_{7^n}^7 - 448P_{7^n}^5 + 112P_{7^n}^3 - 7P_{7^n}$$

$$P_{9^{n+1}} = 4096P_{9^n}^9 - 4608P_{9^n}^7 + 1728P_{9^n}^5 - 240P_{9^n}^3 + 9P_{9^n}$$

sonuçları elde edilir.

2.2 (p, q) −Genelleştirilmiş Lucas Dizisi $\{V_{k^n}\}$ İçin İndirgeme Bağıntısı

Bu bölümde k herhangi bir pozitif tek tamsayı olmak üzere genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_{k^n}\}$ için birinci basamaktan lineer olmayan bir indirgeme bağıntısı elde edeceğiz.

Teorem 2.2.1: Her $k>1$ tek tamsayısı ve her $n>0$ tamsayısı için

$$E_{i,k}=\binom{(k-1)/2+i}{2i+1}\frac{2k}{2i-k+1},\quad 0\leq i<(k-1)/2$$

olmak üzere (p,q) −genelleştirilmiş Lucas sayıları birinci basamaktan lineer olmayan

$$V_{k^{n+1}}=V_{k^n}^{k}-(-1)^{\frac{k-1}{2}}\sum_{i=0}^{(k-3)/2}(-1)^{i}E_{i,k}q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)}V_{k^n}^{2i+1}$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat: İlk olarak (p,q) −genelleştirilmiş Lucas dizisinin Binet formülünden

$$V_{k^n}=\alpha^{k^n}+\beta^{k^n}$$

dir. Bu eşiliğin her iki tarafının k. kuvveti alınırsa,

$$V_{k^n}^{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\beta^{jk^n}\alpha^{(k-j)k^n}$$

sonucu elde edilir. Bu son eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}V_{k^n}^{k} &= \binom{k}{0}\alpha^{k^{n+1}}+\binom{k}{1}\beta^{k^n}\alpha^{(k-1)k^n}+\binom{k}{2}\alpha^{(k-2)k^n}\beta^{2k^n}\\ &\quad+\binom{k}{3}\alpha^{(k-3k^n}\beta^{3k^n}+...+\binom{k}{k-3}\alpha^{3k^n}\beta^{(k-3)k^n}\\ &\quad+\binom{k}{k-2}\alpha^{2k^n}\beta^{(k-2)k^n}+\binom{k}{k-1}\alpha^{k^n}\beta^{(k-1)k^n}+\binom{k}{k}\beta^{k^{n+1}}\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
V_{k^n}^k &= \left(\alpha^{k^{n+1}}+\beta^{k^{n+1}}\right)+\binom{k}{1}(\alpha\beta)^{k^n}\left(\alpha^{(k-2)k^n}+\beta^{(k-2)k^n}\right) \\
&\quad +\binom{k}{2}(\alpha\beta)^{2k^n}\left(\alpha^{(k-4)k^n}+\beta^{(k-4)k^n}\right) \\
&\quad +...+\binom{k}{\frac{k-1}{2}}(\alpha\beta)^{\left(\frac{k-1}{2}\right)k^n}\left(\alpha^{k^n}+\beta^{k^n}\right) \\
&= V_{k^{n+1}}+\sum_{j=1}^{(k-1)/2}\binom{k}{j}q^{k^n j}V_{(k-2j)k^n}.
\end{aligned}$$

Böylece herhangi bir pozitik k tek tamsayısı için

$$V_{k^n}^k = V_{k^{n+1}}+\sum_{j=1}^{(k-1)/2}\binom{k}{j}q^{jk^n}V_{(k-2j)k^n}. \tag{2.2.1}$$

sonucu elde edilir. Lemma 2.1' in (iv) şıkkı gözönüne alınarak yukarıdaki son eşitlik

$$\begin{aligned}
V_{k^{n+1}} = V_{k^n}^k - &\sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}}\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}-j}\binom{k}{j}\binom{(k+1)/2+i-j}{2i+1}(-1)^{\frac{k-1}{2}-j+i}q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)} \\
&\times\frac{k-2j}{(k+1)/2+i-j}V_{k^n}^{2i+1}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafında bulunan iki toplamın sıralarının yer değiştirilmesi ile

$$\begin{aligned}
V_{k^{n+1}} = V_{k^n}^k - &\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}-i}\binom{k}{j}\binom{(k+1)/2+i-j}{2i+1}(-1)^{\frac{k-1}{2}-j+i}q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)} \\
&\times\frac{k-2j}{(k+1)/2+i-j}V_{k^n}^{2i+1}
\end{aligned}$$

ve buradan da son eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
V_{k^n}^k - &\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}-i}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{(k+1)/2+i-j}{2i+1}\frac{k-2j}{(k+1)/2+i-j} \\
&\times(-1)^{\frac{k-1}{2}+i}q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)}V_{k^n}^{2i+1}.
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Burada

$$E_{i,k} = \binom{(k-1)/2+i}{2i+1} \frac{2k}{2i-k+1}$$

olarak alınır ve (2.1.4) ile verilen eşitlikte $m = (k-1)/2 - i$ alınırsa

$$V_{k^{n+1}} = V_{k^n}^{k} - (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{i=0}^{(k-3)/2} (-1)^i E_{i,k} q^{k^n\left(\frac{k-1}{2}-i\right)} V_{k^n}^{2i+1}$$

formülü elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örneğin Teorem 2.2.1' de sırasıyla $k = 5, 7$ ve $k = 9$ alınırsa

$$V_{5^{n+1}} = V_{5^n}^5 - 5q^{5^n} V_{5^n}^3 + 5q^{5^n 2} V_{5^n},$$

$$V_{7^{n+1}} = V_{7^n}^7 - 7q^{7^n} V_{7^n}^5 + 14q^{7^n 2} V_{7^n}^3 - 7q^{7^n 3} V_{7^n}$$

ve

$$V_{9^{n+1}} = V_{9^n}^9 - 9q^{9^n} V_{9^n}^7 + 27q^{9^n 2} V_{9^n}^5 - 30q^{9^n 3} V_{9^n}^3 + 9q^{9^n 4} V_{9^n}$$

sonuçları elde edilir.

Daha özel olarak, eğer $p = 1$ ve $q = -1$ olarak alınırsa $\{V_n\}$ dizisi bilinen Lucas dizisine dönüşür ve bu durumda

$$L_{5^{n+1}} = L_{5^n}^5 + 5L_{5^n}^3 + 5L_{5^n},$$

$$L_{7^{n+1}} = L_{7^n}^7 + 7L_{7^n}^5 + 14L_{7^n}^3 + 7L_{7^n}$$

ve

$$L_{9^{n+1}} = L_{9^n}^9 + 9L_{9^n}^7 + 27L_{9^n}^5 + 30L_{9^n}^3 + 9L_{9^n}$$

özel durumları elde edilir.

2.3 Genelleştirilmiş Lucas Dizisi $\{v_{k^n}\}$ İçin İndirgeme Bağıntısı

Şimdi ise k herhangi bir pozitif çift tamsayı olmak üzere genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_{k^n}\}$ için bir indirgeme bağıntısı elde edeceğiz:

Teorem 2.3.1: Her $k > 0$ çift tamsayısı ve her $n > 0$ tamsayısı için,

$$H_{i,k} = (-1)^i \binom{k/2 + i - 1}{2i} \frac{2k}{k - 2i}, \quad 0 \leq i \leq (k-2)/2,$$

olmak üzere

$$v_{k^{n+1}} = v_{k^n}^k + (-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{(k-2)/2} H_{i,k} v_{k^n}^{2i}$$

dir.

İspat: Genelleştirilmiş Lucas disizi $\{v_n\}$ 'nin Binet formülünden,

$$v_{k^n} = \gamma^{k^n} + \delta^{k^n}$$

olup bu eşiliğin her iki tarafın k. kuvveti alınırsa

$$v_{k^n}^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \delta^{jk^n}\ \gamma^{(k-j)k^n}$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki son eşitliğin sağ tarafını aşağıdaki gibi daha açık bir şekilde yazalım:

$$\begin{aligned}
v_{k^n}^k &= \left(\binom{k}{0}\gamma^{k^{n+1}} + \binom{k}{1}\gamma^{(k-1)k^n}\delta^{k^n} + \binom{k}{2}\gamma^{(k-2)k^n}\delta^{2k^n}\right. \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad \left.\binom{k}{k-2}\gamma^{2k^n}\delta^{(k-2)k^n} + \binom{k}{k-1}\gamma^{k^n}\delta^{(k-1)k^n} + \binom{k}{k}\delta^{k^{n+1}}\right) \\
&= \left(\left(\gamma^{k^{n+1}} + \delta^{k^{n+1}}\right) + \binom{k}{1}(\gamma\delta)^{k^n}\left(\gamma^{(k-2)k^n} + \delta^{(k-2)k^n}\right)\right. \\
&\quad + \binom{k}{2}(\gamma\delta)^{2k^n}\left(\gamma^{(k-4)k^n} + \delta^{(k-4)k^n}\right)\Bigg) \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad \binom{k}{\frac{k-2}{2}}(\gamma\delta)^{(\frac{k-2}{2})k^n}\left(\gamma^{(k-(k-2))k^n} + \delta^{(k-(k-2))k^n}\right) + \binom{k}{k/2}(\gamma\delta)^{(\frac{k}{2})k^n}\Bigg) \\
&= v_{k^{n+1}} + \binom{k}{k/2}(-1)^{\frac{k^{n+1}}{2}} + \sum_{j=1}^{(k-2)/2}\binom{k}{j}(-1)^{jk^n}v_{(k-2j)k^n}.
\end{aligned}$$

Böylece herhangi bir pozitif k çift tamsayısı için

$$v_{k^n}^k = v_{k^{n+1}} + (-1)^{k^{n+1}/2}\binom{k}{k/2} + \sum_{j=1}^{(k-2)/2}\binom{k}{j}(-1)^{jk^n}v_{(k-2j)k^n}$$

sonucu elde edilmiş olur.

Yukarıdaki eşitlikte bulunan $v_{(k-2j)k^n}$ ifadesinin yerine, Lemma 2.1' in (v) şıkkında verilen eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
v_{k^n}^k &= v_{k^{n+1}} + (-1)^{k^{n+1}/2}\binom{k}{k/2} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}}\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-j}(-1)^{(k/2-j+i)}\binom{k}{j}\binom{k/2-j+i}{2i}\frac{k-2j}{k/2-j+i}v_{k^n}^{2i}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu son eşitlikteki iki toplamın sırasının yeri değiştirilirse

$$v_{k^n}^k = v_{k^{n+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-i}(-1)^{(k/2-j+i)}\binom{k}{j}\binom{k/2-j+i}{2i}\frac{k-2j}{k/2-j+i}v_{k^n}^{2i}$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$H_{i,k} = (-1)^i \binom{k/2+i-1}{2i} \frac{2k}{k-2i}, \quad 0 \leq i \leq (k-2)/2,$$

olarak alınır ve (2.1.4) ile verilen eşitlikte $m = k/2 - i$ alınırsa

$$v_{k^{n+1}} = v_{k^n}^k + (-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{(k-2)/2} H_{i,k} v_{k^n}^{2i}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örneğin, Teorem 2.3.1.' de sırasıyla $k = 4, 6, 8$ ve $k = 10$ olarak alınırsa

$v_{4^{n+1}} = v_{4^n}^4 - 4v_{4^n}^2 + 2,$

$v_{6^{n+1}} = v_{6^n}^6 - 6v_{6^n}^4 + 9v_{6^n}^2 - 2,$

$v_{8^{n+1}} = v_{8^n}^8 - 8v_{8^n}^6 + 20v_{8^n}^4 - 16v_{8^n}^2 + 2$

ve

$v_{10^{n+1}} = v_{10^n}^{10} - 10v_{10^n}^8 + 35v_{10^n}^6 - 50v_{10^n}^4 + 25v_{10^n}^2 - 2$

olarak bulunur.

3. (p,q) −GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS DİZİSİ $\{V_{k^n}\}$ İÇİN BİR POLİNOM GÖSTERİMİ

Bu bölümde k herhangi bir pozitif çift tamsayı olmak üzere (p,q) −genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_{k^n}\}$ 'nin terimlerini (p,q) −genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_{k^n}\}$ 'nin terimlerinin k. dereceden bir polinomu olarak yazılabileceğini göstereceğiz.

Teorem 3.1: Her $k>0$ çift tamsayısı ve her $n>0$ tamsayısı için

$$D_{i,k}=\frac{2k}{k+2i}\binom{i+k/2}{2i}, \quad 0\leq i\leq (k-2)/2$$

olmak üzere

$$V_{k^{n+1}}=\sum_{i=0}^{k/2} D_{i,k}\triangle^i U_{k^n}^{2i} q^{k^n(k/2-i)}$$

dir.

İspat: Binet formülünden

$$U_{k^n}=\frac{\alpha^{k^n}-\beta^{k^n}}{\alpha-\beta}$$

olup, bu eşitlikte her iki tarafın k-inci kuvveti alınırsa, $\alpha-\beta=\triangle^{1/2}$ olmak üzere

$$U_{k^n}^k=\frac{1}{\triangle^{k/2}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\beta^{jk^n}\alpha^{(k-j)k^n} \tag{3.1}$$

elde edilir. (3.1) ile verilen eşitliğin sağ tarafını aşağıdaki gibi daha açık bir şekilde yazalım:

$$\begin{aligned} U_{k^n}^k &= \frac{1}{\triangle^{k/2}}\Bigg(\binom{k}{0}\alpha^{k^{n+1}}-\binom{k}{1}\alpha^{(k-1)k^n}\beta^{k^n}+\binom{k}{2}\alpha^{(k-2)k^n}\beta^{2k^n} \\ &\quad +...+\binom{k}{k-2}\alpha^{2k^n}\beta^{(k-2)k^n}-\binom{k}{k-1}\alpha^{k^n}\beta^{(k-1)k^n}+\binom{k}{k}\beta^{k^{n+1}}\Bigg) \\ &= \frac{1}{\triangle^{k/2}}\Bigg(\left(\alpha^{k^{n+1}}+\beta^{k^{n+1}}\right)-\binom{k}{1}(\alpha\beta)^{k^n}\left(\alpha^{(k-2)k^n}+\beta^{(k-2)k^n}\right) \\ &\quad +\binom{k}{2}(\alpha\beta)^{2k^n}\left(\alpha^{(k-4)k^n}+\beta^{(k-4)k^n}\right)+...+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}}(\alpha\beta)^{\frac{k}{2}k^n}\Bigg) \end{aligned}$$

ve buradan

$$U_{k^n}^k = \frac{1}{\triangle^{k/2}} \left(V_{k^{n+1}} + (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{k}{\frac{k}{2}} q^{\frac{k^{n+1}}{2}} + \sum_{j=1}^{(k-2)/2} \binom{k}{j} (-1)^j q^{jk^n} V_{(k-2j)k^n} \right)$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $V_{(k-2j)k^n}$ ifadesinin yerine, Lemma 2.1' in (iii) şıkkında verilen eşitlik yazılır ve toplamın sırasının yeri değiştirilirse;

$$\begin{aligned} U_{k^n}^k &= \frac{1}{\triangle^{k/2}} \left(V_{k^{n+1}} + (-1)^{\frac{k}{2}} q^{k^{n+1}/2} \binom{k}{k/2} + \sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-j} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{k-2j}{k/2-j+i} \right. \\ &\quad \left. \times \binom{k/2-j+i}{2i} \triangle^i q^{k^n(k/2-i)} U_{k^n}^{2i} \right) \\ &= \frac{1}{\triangle^{k/2}} \left(V_{k^{n+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-i} (-1)^j \frac{k-2j}{\frac{k}{2}-j+i} \binom{k}{j} \binom{\frac{k}{2}-j+i}{2i} q^{k^n(k/2-i)} \triangle^i U_{k^n}^{2i} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer (2.1.4)' da $1 \leq m \leq k/2$ için (2.1.4) ile verilen formülde $m = \frac{k}{2} - i$ alınırsa

$$D_{i,k} = \frac{2k}{k+2i} \binom{i+k/2}{2i}$$

olmak üzere,

$$U_{k^n}^k = \frac{1}{\triangle^{k/2}} \left(V_{k^{n+1}} - \sum_{i=0}^{(k-2)/2} D_{i,k} \triangle^i U_{k^n}^{2i} q^{k^n(k/2-i)} \right)$$

yazılabilir. Bu son eşitlikten $V_{k^{n+1}}$ değeri yalnız bırakılırsa,

$$V_{k^{n+1}} = U_{k^n}^k \triangle^{k/2} + \sum_{i=0}^{(k-2)/2} D_{i,k} \triangle^i U_{k^n}^{2i} q^{k^n(k/2-i)}$$

ve böylece

$$V_{k^{n+1}} = \sum_{i=0}^{k/2} D_{i,k} \triangle^i U_{k^n}^{2i} q^{k^n(k/2-i)}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örneğin, eğer bu son sonuçta sırasıyla $k = 4, 6$ ve $k = 8$ alınırsa, $\triangle = p^2 - 4q$ olmak üzere

$$V_{4^{n+1}} = \triangle^2 U_{4^n}^4 + 4\triangle U_{4^n}^2 q^{4^n} + 2q^{4^n 2},$$

$$V_{6^{n+1}} = \triangle^3 U_{6^n}^6 + 6\triangle^2 U_{6^n}^4 q^{6^n} + 9\triangle U_{6^n}^2 q^{6^n 2} + 2q^{6^n 3}$$

ve

$$V_{8^{n+1}} = \triangle^4 U_{8^n}^8 + 8\triangle^3 U_{8^n}^6 q^{8^n} + 20\triangle^2 U_{8^n}^4 q^{8^n 2} + 16\triangle U_{8^n}^2 q^{8^n 3} + 2q^{8^n 4}$$

örnekleri elde edilir.

Burada daha özel olarak, $p = 1$ ve $q = -1$, alınması durumunda $(1, -1)$—genelleştirilmiş Fibonacci $\{U_n\}$ ve Lucas $\{V_n\}$ dizileri bilinen Fibonacci $\{F_n\}$ ve Lucas $\{L_n\}$ dizisine dönüşür ve bu durumda $k = 4, 6$ ve $k = 8$ için

$$L_{4^{n+1}} = 25F_{4^n}^4 + 20F_{4^n}^2 + 2,$$

$$L_{6^{n+1}} = 125F_{6^n}^6 + 150F_{6^n}^4 + 45F_{6^n}^2 + 2$$

ve

$$L_{8^{n+1}} = 625F_{8^n}^8 + 1000F_{8^n}^6 + 500F_{8^n}^4 + 80F_{8^n}^2 + 2$$

formülleri elde edilir.

Son olarak, eğer $p = 2$ ve $q = -1$ olarak alınırsa $(2, -1)$ −genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, bilinen Pell dizisi $\{P_n\}$ ' e ve $(2, -1)$ −genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_n\}$ ise Pell-Lucas dizisi $\{Q_n\}$' e dönüşür. Bu durumda $k = 4, 6$ ve $k = 8$ için

$$Q_{4^{n+1}} = 64P_{4^n}^4 + 32P_{4^n}^2 + 2,$$

$$Q_{6^{n+1}} = 512P_{6^n}^6 + 384P_{6^n}^4 + 72P_{6^n}^2 + 2$$

ve

$$Q_{8^{n+1}} = 4096P_{8^n}^8 + 4096P_{8^n}^6 + 1280P_{8^n}^4 + 128P_{8^n}^2 + 2$$

sonuçlarına ulaşılır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI SAYILARINI İÇEREN BAZI BAĞINTILAR

Giriş bölümünde Fibonacci sayıları için

$$F_{3^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(L_{2.3^k} - 1 \right), \; n > 0$$

formülü verilmişti. Daha sonra k pozitif çift tamsayısı ve $n \geq 1$ tamsayısı için

$$F_{k^n} = F_k \prod_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{k/2} L_{(2j-1)k^i} \right]$$

ve k pozitif tek tamsayısı ve $n \geq 1$ tamsayısı için

$$F_{k^n} = (-1)^{(n-1)(k-1)/2} F_k \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} (-1)^j L_{2jk^i} \right]$$

sonuçları verilmişti.

Bu bölümde k pozitif tamsayısının tek ve çift olma durumlarını göz önüne alarak, yukarıda verilen sonuçları genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_{k^n}\}$ için elde edeceğiz.

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ ve genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$' nin Binet formüllerinin $\forall n > 0$ doğal sayısı için

$$u_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve

$$v_n = \gamma^n + \delta^n$$

olduğunu tekrar hatırlatalım.

Şimdi k pozitif tamsayısının tek ve çift olma durumlarına göre iddia ettiğimiz genel durumları vereceğiz.

Teorem 4.1: Her $k \geq 2$ çift tamsayısı ve $n \geq 1$ tamsayısı için

$$u_{k^n} = u_k \prod_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k/2} v_{(2j-1)k^i} \right)$$

dir.

İspat: Açıkça

$$u_{k^n} = u_k \frac{u_{k^2}}{u_k} \frac{u_{k^3}}{u_{k^2}} \frac{u_{k^4}}{u_{k^3}} ... \frac{u_{k^n}}{u_{k^{n-1}}} = u_k \prod_{i=1}^{n-1} \frac{u_{k^{i+1}}}{u_{k^i}}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{u_{k^n}}{u_k} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{u_{k^{i+1}}}{u_{k^i}}$$

olduğu kolayca görülür.

Ayrıca her $k \geq 2$ çift tamsayısı ve herhangi X ve Y tamsayıları için, Swamy (1997)

$$\frac{X^k - Y^k}{X - Y} = \sum_{j=0}^{k/2-1} (XY)^j \left(X^{k-2j-1} + Y^{k-2j-1} \right)$$

formülünü vermiştir. Bu formülde $X = \gamma^n$ ve $Y = \delta^n$ olarak alınır ve genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\frac{u_{kn}}{u_n} = \sum_{j=0}^{k/2-1} (\gamma\delta)^{jn} \left(\gamma^{(k-2j-1)n} + \delta^{(k-2j-1)n} \right) = \sum_{j=0}^{k/2-1} (-1)^{jn} v_{(k-2j-1)n} \tag{4.1}$$

sonucu elde edilir. Buradan son eşitlikte n yerine k^i alınması sonucunda

$$\begin{aligned} \frac{u_{k^{i+1}}}{u_{k^i}} &= \sum_{j=0}^{k/2-1} (-1)^{jk^i} v_{(k-2j-1)k^i} \\ &= \sum_{j=1}^{k/2} v_{(2j-1)k^i} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca biliyoruz ki

$$\frac{u_{k^n}}{u_k}=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{u_{k^{i+1}}}{u_{k^i}}$$

olup, bu son iki eşitlikten

$$\begin{aligned}u_{k^n} &= u_k\prod_{i=1}^{n-1}\frac{u_{k^{i+1}}}{u_{k^i}}\\ &= u_k\prod_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k/2}v_{(2j-1)k^i}\right)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örneğin $k=4$ alınırsa,

$$u_{4^n}=u_4\prod_{i=1}^{n-1}\left(v_{4^i}+v_{4^i3}\right)$$

eşitliği elde edilir. Özel olarak $p=1$ durumunda ise genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ ve Lucas dizisi $\{v_n\}$, bilinen Fibonacci ve Lucas dizilerine indirgenir ve böylece

$$F_{4^n}=3\prod_{i=1}^{n-1}\left(L_{4^i}+L_{4^i3}\right)$$

sonucu elde edilir. Koshy (2001)' den biliyoruz ki

$$L_{m+n}+L_{m-n}=\begin{cases}5F_mF_n & \text{eğer } n \text{ bir tek tamsayı ise,}\\ L_mL_n & \text{eğer } n \text{ bir çift tamsayı ise,}\end{cases}$$

dir. Eğer $m=4^i2$ ve $n=4^i$ alınırsa

$$L_{4^i3}+L_{4^i}=L_{4^i2}L_{4^i}$$

olacaktır. O halde sonuç olarak

$$F_{4^n}=3\prod_{i=1}^{n-1}L_{4^i2}L_{4^i}$$

olur.

Şimdi bazı ara sonuçlar verelim.

Genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$' nin ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$' nin Binet formülleri gözönüne alındığında, $\Delta = p^2 + 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} (-1)^i v_{ai} &= \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \alpha^{ai} + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \beta^{ai} \\
&= \frac{-\alpha^a + (-1)^r (\alpha^a)^{r+1}}{1+\alpha^a} + \frac{-\beta^a + (-1)^r (\beta^a)^{r+1}}{1+\beta^a} \\
&= \frac{(-1)^{a+r} v_{ar} + (-1)^r v_{a(r+1)} - v_a - 2(-1)^a}{v_a + 1 + (-1)^a} \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

ve

$$v_{a+b} - (-1)^b v_{a-b} = \Delta u_a u_b \qquad (4.3)$$

sonuçları elde edilir.

Teorem 4.2: Her $k > 1$ tek tamsayısı ve $n \geq 1$ tamsayısı için

$$u_{k^n} = (-1)^{(n-1)(k-1)/2} u_k \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} (-1)^j v_{2k^i j} \right)$$

dir.

İspat: Burada k' nın pozitif tek tamsayı olmasını gözönüne alarak, ispatı iki durumda ele alacağız.

1. Durum: Eğer $(k-1)/2$ bir çift tamsayı ise (4.2) ve (4.3) ile verilen eşitliklerden

$$\begin{aligned}
u_{k^n} &= u_k \prod_{i=1}^{n-1} \frac{u_{k^{i+1}}}{u_{k^i}} \\
&= u_k \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta u_{k^{i+1}} u_{k^i}}{\Delta u_{k^i} u_{k^i}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= u_k \prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{v_{k^{i+1}+k^i}-(-1)^{k^i} v_{k^{i+1}-k^i}}{v_{k^i+k^i}-(-1)^{k^i} v_{k^i-k^i}}-1\right) \\
&= u_k \prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{v_{2k^i\left(\frac{k+1}{2}\right)}+v_{2k^i\left(\frac{k-1}{2}\right)}-v_{2k^i}-2}{v_{2k^i}+2}\right) \\
&= u_k \prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\sum_{j=1}^{(k-1)/2}(-1)^j v_{2k^i j}\right) \\
&= (-1)^{(n-1)(k-1)/2} u_k \prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\sum_{j=1}^{(k-1)/2}(-1)^j v_{2k^i j}\right).
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Böylece $(k-1)/2$' nin bir çift tamsayı olması durumunda ispat tamamlanır.

2. Durum: Eğer $(k-1)/2$ bir tek tamsayı ise bu durumda

$$
\begin{aligned}
u_{k^n} &= (-1)^{n-1} u_k \prod_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{u_{k^{i+1}}}{u_{k^i}}\right)=(-1)^{n-1} u_k \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{\Delta u_{k^{i+1}} u_{k^i}}{\Delta u_{k^i}^2}-1\right) \\
&= (-1)^{n-1} u_k \prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{-v_{2k^i\left(\frac{k+1}{2}\right)}-v_{2k^i\left(\frac{k-1}{2}\right)}-v_{2k^i}-2}{v_{2k^i}+2}\right) \\
&= (-1)^{n-1} u_k \prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\sum_{j=1}^{(k-1)/2}(-1)^j v_{2k^i j}\right).
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Böylece $(k-1)/2$' nin bir tek tamsayı olması durumunda ispat tamamlanır. O halde iddiamız ispatlanmış olur.

Örneğin $k=5$ ve $p=1$ için $u_n=F_n$ ve $v_n=L_n$ olacaktır. O halde

$$
F_{5^n}=5\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-L_{2k^i}+L_{4k^i}\right)
$$

olur. Koshy (2001)' nin verdiği

$$
L_{m+n}-L_{m-n}=\begin{cases} 5F_mF_n & \text{eğer } n \text{ bir tek tamsayı ise,} \\ L_mL_n & \text{eğer } n \text{ bir çift tamsayı ise,} \end{cases}
$$

sonuç gözönüne alındığında, k pozitif tek tamsayı olmak üzere

$$L_{4k^i} - L_{2k^i} = 5F_{3k^i}F_{k^i}$$

olur ve sonuç olarak

$$F_{5^n} = 5\prod_{i=1}^{n-1}(5F_{3k^i}F_{k^i} + 1)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

Filipponi, P. 1996. On the Fibonacci numbers whose subscript is a power. The Fibonacci Quarterly, 34(3), 271-276.

Garfield, R. 1974. Solution B-265: Fibonacci numbers for powers of 3. The Fibonacci Quarterly. 12(3), 315.

Hoggat, V.E. 1969. Fibonacci and Lucas numbers, Houghton-Mifflin, 92 p, Palo Alto, California.

Kılıç, E. and Stanica, P. 2009. Factorizations and representations of second order linear recurrences with indices in arithmetic progressions, Bul. Mex. Math. Soc. 15(1), 23-36.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, 641 p, New York.

Prodinger, H. 2008/2009. On a sum of Melham and its variants. The Fibonacci Quarterly, 46/47, 207-215.

Riordan, J. 1979. Combinatorial identities, Wiley-Interscience, 256 p, New York.

Robbins, N. 1993. Beginning number theory, Wm. C. Brown Publishers, 308 p, Dubuque, Iowa.

Seiffert, H.-J. 2002, Solution B-916: Subscript Is Power, The Fibonacci Quarterly, 40(1), 86.

Stinchcomb, A. 1994. Problem B-769: First order cubic recurrence relation. The Fibonacci Quarterly, 32(4), 373.

Swamy, M.N.S. 1997. On certain identities involving Fibonacci and Lucas numbers. The Fibonacci Quarterly, 35(3), 230–232.

Terr, D.C. 1995. Solution B-769: The recurrence of F_{3^n}. The Fibonacci Quarterly, 33(5), 468.

Usiskin, Z. 1973 a. Problem B-265: Fibonacci numbers from Lucas products. The Fi- bonacci Quarterly, 11(3), 333.

Usiskin, Z. 1973 b. Problem B-266: Lucas numbers from Lucas products. The Fibonacci Quarterly, 11(3), 334.

Vajda, S. 1989. Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section, John Wiley & Sons, Inc. 190 p, New York,

Vorob'ev, N.N. 1978. Fibonacci Numbers, Nauka, 142 p, Moscow.

Zeitlin, D. 1974. Solution B-266: Lucas Numbers for powers of 3. The Fibonacci Quarterly, 12(3), 315.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Elif TAN KILIÇ
Doğum Yeri	:	Ankara
Doğum Tarihi	:	12.11.1984
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lisans	:	Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2008)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2010-Ocak 2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

TOBB ETÜ Matematik Bölümü Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi (2008 – 2009)
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Araş. Gör. (2009 – ...)

Yayınları (SCI ve diğer)

1) E. Kılıç and **E. Tan**, More general identities involving the terms of $\{W_n(a,b;p,q)\}$, Ars Combinatoria 93 (2009) 459-461.

2) E. Kilic and **E. Tan**, Second order linear recursions whose subscripts are a power by, Miskolc Mathematical Notes (yayına kabül edildi).