ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

POZİTİF LİNEER OPERATÖR DİZİLERİNİN A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Çiğdem ÇULHA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

<u>ANKARA</u>
2007

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POZİTİF LİNEER OPERATÖRLERİN A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Çiğdem ÇULHA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, pozitif lineer operatör, ağırlıklı uzay kavramları tanıtılıp bunlara ilişkin bazı sonuçlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, ağırlıklı uzaylarda klasik Korovkin tipi yaklaşım teoremleri ve bunlara ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, A-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak ağırlıklı fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde edilmiştir.

Son bölümde ise, A-istatistisel yakınsaklık oranı kavramı tanıtılmıştır ve A-istatistiksel yakınsama oranına ilişkin bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bu sonuçlardan klasik yakınsama oranı da elde edilmiştir.

2007, 38 sayfa

Anahtar Kelimeler: A-istatistiksel yakınsaklık, pozitif lineer operatör dizisi, ağırlıklı uzay, Korovkin teoremi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

A-STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF POSITIVE LINEAR OPERATORS

Çiğdem ÇULHA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of five chapters. The first chapter has been devoted to the introduction.

In Chapter two, the concepts of positive linear operator and weighted spaces have been recalled and some results concerning these concepts have also been considered.

In Chapter three, the classical Korovkin type convergence teorems and results concerning these teorems of sequences of positive linear operators on weighted spaces are considered.

In Chapter four, the concepts of A-statistical convergence has been recalled and then some Korovkin type approximation theorems on weighted spaces has been studied via A-statistical convergence.

In the final chapter, the concept of A-statistical rates of convergence has been given. Furthermore some theorems and results have been examied. Moreover the classical rates of convergence of the sequence of positive linear operators have also been deduced.

2007, 38 pages

Key Words: A-statistical convergence, sequence of positive linear operators, weighted spaces, the Korovkin theorem.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana vererek, çalışmalarımın her aşamasında ilgi ve desteğini eksik etmeyen, önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, yardımlarından dolayı Sayın Araş. Gör. Özlem Girgin (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e ve aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çiğdem ÇULHA
ANKARA, Eylül 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$Ax := (Ax)_n$	: $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right)$ dönüşüm dizisi
B_{ρ_2}	: ρ_2 fonksiyonuna göre sınırlı fonksiyonların ağırlıklı uzayı
c	: Yakınsak dizilerin uzayı
$C\left[a,b\right]$	: $\left[a,b\right]$ üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı
C_1	: Cesaro matrisi
C_{ρ_1}	: ρ_1 fonksiyonuna göre sınırlı ve sürekli fonksiyonların ağırlıklı uzayı
$\lvert E\rvert$	: E kümesinin eleman sayısı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\delta(E)$	: E kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_A(E)$	: E kümesinin A-yoğunluğu
ρ	: Ağırlık fonksiyonu
$\mathcal{X}_E$	: E kümesinin karakteristik fonksiyonu
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
st_A	: A-istatistiksel yakınsak diziler uzayı
st_A-o(a_k)	: o(a_k) oranında A-istatistiksel yakınsak
st_A-O(a_k)	: O(a_k) oranında A-istatistiksel sınırlı
st_A-o_μ(a_k)	: o_μ(a_k) oranında A-istatistiksel yakınsak
st_A-O_μ(a_k)	: O_μ(a_k) oranında A-istatistiksel sınırlı

1. GİRİŞ

İlk olarak 1949 yılında Steinhaus tarafından Polonya'da bir konferansta tanıtılan istatistiksel yakınsaklık kavramı 1951 yılında Fast tarafından geliştirilmiştir. Toplanabilme Teorisi, Fonksiyonel Analiz, Fourier Serileri, Sayılar Teorisi, Ölçü Teorisi, İstatistik, Optimizasyon Teorisi ve Yaklaşımlar Teorisi gibi birçok alanda kullanılan bu kavram Salat (1980), Connor (1988) ve Fridy (1985) gibi birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirme fikri ilk defa 1953 yılında Buck tarafından ortaya atılmıştır. Freedman ve Sember 1981 yılında yoğunluk ve negatif olmayan regüler matrisler arasındaki ilişkiyi incelemiş, Kolk (1988, 1990) ve Connor (1988, 1990) istatistiksel yakınsaklık kavramında C_1 Cesaro matrisi yerine negatif olmayan regüler A matrisini koyarak A-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmışlardır. A-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak klasik yakınsaklık yardımıyla çözülemeyen problemler çözülmeye çalışılmıştır. 1974 yılında Gadjiev tarafından verilmiş olan ağırlıklı uzaylar üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin klasik Korovkin tipi yaklaşım sonuçlarının A-istatistiksel genişlemeleri 2004 yılında Duman ve Orhan tarafından yayınlanan bir makalede verilmiştir. Yine Duman ve Orhan 2005 yılında A-istatistiksel yakınsama oranı ile ilgili sonuçlar vermişlerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, "*pozitif lineer operatörler*", "*istatistiksel yakınsaklık*" ve "*A − İstatistiksel yakınsaklık*" konularına ilişkin tez boyunca ihtiyaç duyulacak bazı tanım, teorem ve notasyonlar hatırlatılacaktır.

2.1 Pozitif Lineer Operatörler

Bu kısımda pozitif lineer operatörlere ilişkin bazı temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.1.1 X ve Y reel değerli fonksiyonların iki uzayı olmak üzere L, X uzayını Y uzayına dönüştüren lineer operatör olsun. X tanım uzayından alınan her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ koşulu gerçekleniyor ise bu durumda L operatörüne "*pozitif lineer operatör*" adı verilir.

Pozitif lineer operatörler aşağıdaki özellikleri gerçekler:

1. $f \leq g \Longrightarrow L(f\ ; x) \leq L(g\ ; x)$

2. $|L(f; x)| \leq L(|f|\ ; x)$.

Şimdi 1960 yılında Korovkin tarafından verilen ve literatürde "*Korovkin Teoremi*" olarak bilinen aşağıdaki sonucu hatırlayalım.

Teorem 2.1.2 $L_n : C\,[a, b] \to C\,[a, b]$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{L_n\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $f_i\,(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$ olmak üzere $\lim\limits_{n} \|L_n f_i - f_i\|_{C[a,b]} = 0$

(ii) Her $f \in C\,[a, b]$ için $\lim\limits_{n} \|L_n f - f\,\|_{C[a,b]} = 0$ (Korovkin 1960).

2.2 Ağırlıklı Uzaylar

Bu kısımda ağırlıklı uzaylarla ilgili bazı temel özellikler hatırlatılacaktır.

Tanım 2.2.1 ρ fonksiyonu $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde sürekli ve de

(i) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$

(ii) $\rho(x) \geq 1$ (her $x \in \mathbb{R}$)

koşullarını sağlıyor ise bu fonksiyona "*ağırlık fonksiyonu*" denir.

Tanım 2.2.2 ρ bir ağırlık fonksiyonu olsun. $|f(x)| \leq M_f.\rho(x)$ ($\forall\ x \in \mathbb{R}$) koşulunu sağlayan $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonlarının uzayına "*ağırlıklı uzay*" denir ve B_ρ ile gösterilir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabittir.

C_ρ ağırlıklı uzayı ise $C_\rho := \{f : f \in B_\rho$ ve f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli$\}$ şeklinde tanımlanır.

B_ρ ve C_ρ ağırlıklı uzayları $\|f\|_\rho := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$ normuna göre Banach uzayıdır (Gadjiev 1974/1976, Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Önerme 2.2.3 L, operatörünün C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştürmesi için gerek ve yeter koşul $\|L\rho_1\|_{\rho_2} \leq M$ olacak biçimde bir M > 0 sabitinin mevcut olmasıdır.

İspat. Gereklilik: L operatörü C_{ρ_1}uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştürsün.Yani her $f \in C_{\rho_1}$ için $L(f;x) \in B_{\rho_2}$ olsun. ρ_1 fonksiyonu sürekli olduğundan ve $|\rho_1(x)| \leq H\rho_1(x)$ koşulu sağlanacak şekilde bir $H > 0$ sayısı mevcut olduğundan $\rho_1 \in C_{\rho_1}$ olup özel olarak $f = \rho_1$ alırsak $L(\rho_1;x) \in B_{\rho_2}$ elde edilir. O halde $|L(\rho_1;x)| \leq M\rho_2(x)$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır. Buradan

$$\|L\rho_1\|_{\rho_2} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|L(\rho_1;x)|}{\rho_2(x)} \leq M$$

ifadesi elde edilir.

Yeterlilik: $L(f;x) \in B_{\rho_2}$ olduğunu göstermeliyiz. $\|L\rho_1\|_{\rho_2} \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısının varlığını biliyoruz. Diğer yandan $f \in C_{\rho_1}$ olduğundan $\|f\|_{\rho_1} \leq M_f$

olacak biçimde bir $M_f > 0$ vardır.

$$\begin{aligned}
|L(f;x)| &\leq L(|f|\,;x) \\
&= L(|f|\frac{\rho_1(x)}{\rho_1(x)};x) \\
&\leq \frac{\|f\|_{\rho_1} L(\rho_1;x)\rho_2(x)}{\rho_2(x)} \\
&\leq \|f\|_{\rho_1} \|L\rho_1\|_{\rho_2} \rho_2(x) \\
&\leq M.M_f.\rho_2(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $K := M.M_f$ olmak üzere $|L\,(f;x)| \leq K\rho_2(x)$ olup bu da $L\,(f;x) \in B_{\rho_2}$ olduğunu gösterir.

Önerme 2.2.4 L, operatörü C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştürsün. Bu taktirde $\|L\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} := \sup\limits_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|L\,f\|_{\rho_2} = \|L\rho_1\|_{\rho_2}$ şeklindedir.

İspat.

$$\begin{aligned}
\|L\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} &= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|L\,f\|_{\rho_2} \\
&= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|L(\,f;x)|}{\rho_2(x)} \\
&\leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(|\,f|\,\frac{\rho_1(x)}{\rho_1(x)};x)}{\rho_2(x)} \qquad \text{(i)} \\
&\leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|f\|_{\rho_1} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(\rho_1;x)}{\rho_2(x)} \\
&= \|L\rho_1\|_{\rho_2}
\end{aligned}$$

Diğer yandan $\|L\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} = \sup\limits_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|L\,f\|_{\rho_2}$ ifadesinde $f = \rho_1$ alırsak

$$\|L\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} \geq \|L\,\rho_1\|_{\rho_2} \qquad \text{(ii)}$$

elde edilir. (i) ve (ii) eşitsizliklerini birlikte gözönüne alırsak $\|L\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} = \|L\rho_1\|_{\rho_2}$ olduğu görülür.

3. AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIM

Bu bölümde, ağırlıklı uzaylar için Korovkin tipi yaklaşım teoremleri ve bunların bazı sonuçları verilecektir.

Lemma 3.1 $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{L_n\}$ olsun ve aynı zamanda $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}$ üzerinde düzgün sınırlı olmak üzere ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları da

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0 \tag{1}$$

koşulunu sağlasın.

$$\varphi_n(s) = \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\le s} \frac{|L_n(f;x)|}{\rho_1(x)}$$

olmak üzere herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n} \varphi_n(s) = 0 \tag{2}$$

ise

$$\lim_{n} \ \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev 1974, 1976).

İspat. (1) koşulu nedeniyle her $\varepsilon > 0$ için en az bir $s_0 > 0$ vardır öyle ki $|x| > s_0$ için $\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonlarının sürekli olması nedeniyle $|x| \le s_0$ için $\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} < H$ olacak biçimde bir $H > 0$ sayısı vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} &= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|L_n(f;x)|}{\rho_2(x)} \\
&\le \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left\{ \sup_{|x|>s_0} \frac{|L_n(f;x)|}{\rho_2(x)} + \sup_{|x|\le s_0} \frac{|L_n(f;x)|}{\rho_2(x)} \right\} \\
&\le \varepsilon \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|L_n f\|_{\rho_1} + H\varphi_n(s_0) \qquad (3) \\
&= \varepsilon \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + H\varphi_n(s_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3)'de her iki tarafta $n \to \infty$ için limit alırsak (2) ve düzgün sınırlılık sebebiyle istenen sonuç elde edilir.

Lemma 3.2 $\{L_n\}$, *Lemma* 3.1'deki gibi olmak üzere ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları için de (1) koşulu gerçeklensin. Eğer herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} |L_n(f;x) - f(x)| = 0 \tag{4}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev 1974, 1976).

İspat. E , C_{ρ_1} uzayında birim operatör olsun. $A_n := L_n - E$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} &\leq \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + \|E\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \\ &= \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + 1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\sup_n \|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} < \infty$$

olduğu görülür. $\mathbb{R}$ üzerinde $\rho_1 \geq 1$ olduğundan herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{|A_n(f;x)|}{\rho_1(x)} &\leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} |A_n(f;x)| \\ &= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} |L_n(f;x) - f(x)| \end{aligned}$$

sağlanır.(4) dolayısıyla

$$\lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{|A_n(f;x)|}{\rho_1(x)} = 0$$

gerçeklenir. Bu durumda $\{A_n\}$ dizisi *Lemma* 3.1'in koşullarını gerçekler. Bu ise

$$\lim_n \|L_n - E\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} = 0 \tag{5}$$

olduğunu verir. Bu durumda ispat,

$$\|L_n f - f\|_{\rho_2} \leq \|L_n - E\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} \|f\|_{\rho_1}$$

eşitsizliğinden elde edilir.

Şimdi esas teoremimizi verelim.

Teorem 3.3 $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{L_n\}$ olsun. Ayrıca $\rho_1$ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları (1) koşulunu sağlasın. Eğer $j = 0, 1, 2$ için $F_j(t) = \frac{t^j \rho_1(t)}{1+t^2}$ olmak üzere

$$\lim_n \|LnF_j - F_j\|_{\rho_1} = 0 \tag{6}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0 \tag{7}$$

gerçeklenir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995).

İspat. Kabul edelim ki (6) sağlansın.Bu durumda her bir n için

$$\begin{aligned} \|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} &= \|L_n \rho_1 + \rho_1 - \rho_1\|_{\rho_1} \\ &\leq \left\| L_n \rho_1 \frac{1+t^2}{1+t^2} - \rho_1 \frac{1+t^2}{1+t^2} \right\|_{\rho_1} + \|\rho_1\|_{\rho_1} \\ &\leq \|L_n F_2 - F_2\|_{\rho_1} + \|L_n F_0 - F_0\|_{\rho_1} + 1 \\ &< M \end{aligned} \tag{8}$$

olacak biçimde bir $M > 0$ vardır.

Şimdi de (4) ifadesinin sağlandığını gösterelim. Açık olarak

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \tag{9}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Şimdi $f \in C_{\rho_1}$ ve $|x| \leq s$ olsun. f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan her t, x için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan $|t - x| \geq \delta$ olduğunda da

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \, \rho_1(x) \rho_1(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2M_f\,\rho_1(x)F_0(t)(1+t^2) \\
&\leq K_{\rho_1}(x)(t-x)^2F_0(t)
\end{aligned}
$$

gerçeklenir. Burada $K_{\rho_1}(x) := 4M_f\,\rho_1(x)(\frac{1+x^2}{\delta^2}+1)$ şeklinde tanımlıdır. O halde her $t\in\mathbb{R}$ ve $|x|\leq s$ için

$$
|f(t)-f(x)| < \varepsilon + K_{\rho_1}(x)(t-x)^2F_0(t) \tag{10}
$$

olur. Herhangi bir $s\in\mathbb{R}$ için $C_1 := C_1(s) = \sup\limits_{|x|\leq s}\rho_1(x)$, $C_2 := C_2(s) = \sup\limits_{|x|\leq s}K_{\rho_1}(x)$ ve $C_3 := C_3(s) = \sup\limits_{|x|\leq s}|f(x)|$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
z_n \quad &:= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\ \sup_{|x|\leq s}|L_n(f(t);x)-f(x)| \qquad (11)\\
&\leq C_1\varepsilon\,\|L_n1\|_{\rho_1} + C_2\sup_{|x|\leq s}L_n((t-x)^2F_0(t);x) + C_3\sup_{|x|\leq s}|L_n(1;x)-1|
\end{aligned}
$$

gerçeklenir. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
L_n((t-x)^2F_0(t);x) \;&\leq\; |L_n(F_2(t);x)-F_2(x)| + 2\,|x|\,|L_n(F_1(t);x)-F_1(x)| \\
&\quad + x^2\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)|
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $B := B(s) = \max\{\sup\limits_{|x|\leq s}\rho_1(x), 2\sup\limits_{|x|\leq s}|x|\,\rho_1(x), \max\limits_{|x|\leq s}x^2\rho_1(x)\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
u_n \quad &:= \sup_{|x|\leq s}L_n((t-x)^2F_0(t);x) \\
&\leq B\left\{\|L_nF_2-F_2\|_{\rho_1} + \|L_nF_1-F_1\|_{\rho_1} + \|L_nF_0-F_0\|_{\rho_1}\right\} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Diğer yandan

$$
\|L_n1\|_{\rho_1} \leq \|L_n\rho_1\|_{\rho_1} = \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \tag{13}
$$

olup (11), (12) ve (13)'den her n için

$$
z_n \leq C_1\varepsilon\,\|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + C_2\,u_n + C_3\sup_{|x|\leq s}|L_n(1;x)-1| \tag{14}
$$

elde ederiz. Yine

$$F_0(x)\left|L_n(1;x)-1\right| \leq \left|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)\right| + L_n(\left|F_0(t)-F_0(x)\right|;x)$$

yazabiliriz.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $F_0(x)$ sürekli olup diğer yandan

$$\begin{aligned} |F_0(x)| &= \left|\frac{\rho_1(x)}{1+x^2}\right| \\ &\leq \rho_1(x) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $F_0 \in C_{\rho_1}$ elde edilir.

$F_0 \in C_{\rho_1}$ olduğu ve (10) göz önüne bulundurulursa

$$\begin{aligned} |L_n(1;x)-1| &< \frac{1}{F_0(x)}\{|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)| + \varepsilon L_n(1;x) \\ &\quad + K_{\rho_1}(x)L_n((t-x)^2F_0(t);x)\} \end{aligned} \tag{15}$$

sağlanır. (15)'den herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{|x|\leq s}|L_n(1;x)-1| \leq C_4\left\{\left\|L_nF_0-F_0\right\|_{\rho_1} + \varepsilon\left\|L_n\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}\right\} + C_5u_n \tag{16}$$

elde edilir. Burada $C_4 := C_4(s) = \sup\limits_{|x|\leq s}\frac{\rho_1(x)}{F_0(x)}$ ve $C_5 := C_5(s) = \sup\limits_{|x|\leq s}\frac{K_{\rho_1}(x)}{F_0(x)}$ olmak üzere (12), (13) ve (16) gözönüne alınırsa

$H := maks\{\, C_1 + C_3C_4,\ B(C_2+C_5) + C_3C_4 \,\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z_n &\leq \varepsilon H\left\|L_n\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + H\left\|L_nF_0-F_0\right\|_{\rho_1} \\ &\quad + H\left\|L_nF_1-F_1\right\|_{\rho_1} + H\left\|L_nF_2-F_2\right\|_{\rho_1} \end{aligned} \tag{17}$$

bulunur. (17)'de $n \to \infty$ için limit alırsak (6) ve (8) bağıntıları nedeniyle

$$\lim_n z_n = \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\leq s}|L_n(f(t);x)-f(x)| = 0$$

elde edilir. O halde *Lemma* 3.2 göz önüne alınırsa her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

elde edilir.

Şimdi ω ağırlık fonksiyonu özel olarak seçilmiş olmak üzere *Teorem* 3.3 için bir uygulama niteliği taşıyan aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 3.4 $\omega(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu için $L_n : C_\omega \to B_\omega$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olsun. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları için (1) koşulu sağlansın. Şimdi

$P_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ pozitif lineer operatör dizisi

$$P_n(f(t), x) = \frac{\rho_1(x)}{\omega(x)} L_n(\frac{1+t^2}{\rho_1(t)} f(t), x)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$$\lim_n \left\| L_n t^j - x^j \right\|_\omega = 0 \ , \quad (j = 0, 1, 2) \tag{18}$$

ise bu taktirde her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_n \|P_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

olur (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

İspat.

$$\begin{aligned} |P_n(F_j, x) - F_j(x)| &= \left| \frac{\rho_1(x)}{\omega(x)} L_n(\frac{1+t^2}{\rho_1(t)} F_j(t), x) - F_j(x) \right| \\ &= \frac{\rho_1(x)}{\omega(x)} \left| L_n(t^j, x) - x^j \right| \quad , \qquad (j = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

Eşitliğin her iki trafını $\rho_1(x)$ ifadesine bölerek $x \in \mathbb{R}$ için supremum alırsak

$$\|P_n F_j - F_j\|_{\rho_1} = \left\|L_n t^j - x^j\right\|_{\omega} \ , \quad (j = 0, 1, 2) \tag{19}$$

ifadesi elde edilir. (19)'da $n \to \infty$ için limit alınır ve (18), $Teorem$ 3.3'den

her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_n \|P_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi φ, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere

$\rho_1(x) = 1 + \varphi^2(x)$ ağırlık fonksiyonu için C_{ρ_1} üzerinde bir yakınsaklık teoremi vermeden önce buna ilişkin bir lemma verelim.

Lemma 3.5 $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun ayrıca ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları için (1) koşulu sağlansın. Eğer

$$\lim_n \left\|L_n \varphi^j - \varphi^j\right\|_{\rho_1} = 0 \ , \quad (j = 0, 1, 2) \tag{20}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ ve herhangi bir $I = [a, b]$ kapalı aralığı için

$$\lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x \in I} |L_n(f, x) - f(x)| = 0$$

gerçeklenir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995).

İspat. $f \in C_{\rho_1}$ olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olup her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan her t, x için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Diğer yandan $t \in \mathbb{R}$, $x \in I$ için $|t - x| \geq \delta$ olduğunda da

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq 2M_f \, \rho_1(x)\rho_1(t) \\ &= 2M_f \, \rho_1(x)(1 + \varphi^2(t)) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\leq \; K_{\rho_1}(x)\left(\varphi(t)-\varphi(x)\right)^2$$

gerçeklenir.Burada $\Delta_\delta(x) := \min\{\varphi(t+\delta)-\varphi(x), \varphi(x)-\varphi(x-\delta)\}$ olmak üzere $K_{\rho_1}(x) := 2M_f\,\rho_1(x)(\frac{1+\varphi^2(x)}{\Delta_\delta^2(x)}+2\frac{\varphi(x)}{\Delta_\delta}+1)$ şeklinde tanımlıdır. O halde her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in I$ için

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon + K_{\rho_1}(x)\left(\varphi(t)-\varphi(x)\right)^2 \tag{22}$$

olur. Ayrıca (9)'dan

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|\,;x) + |f(x)|\,|L_n(1;x)-1| \tag{23}$$

olduğunu biliyoruz. (21)'i (23)'te yerine yazıp çeşitli düzenlemeler yaparsak

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t);x)-f(x)| \;&\leq\; \varepsilon L_n(1;x) + K_{\rho_1}L_n(((\varphi(t)-\varphi(x))^2;x) \\
&\quad + |f(x)|\,|L_n(1;x)-1| \\
&\leq\; \varepsilon + (\varepsilon + |f(x)|)\,|L_n(1;x)-1| \\
&\quad + K_{\rho_1}(x)\{\left|L_n(\varphi^2(t);x)-\varphi^2(x)\right| \\
&\quad + 2\varphi(x)\,|L_n(\varphi(t);x)-\varphi(x)|\}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. $H := maks\{\sup\limits_{x\in I}\rho_1(x)\left[\varepsilon + |f(x)| + K_{\rho_1}(x) + \varphi^2(x)\right],$

$$\sup_{x\in I} 2\rho_1(x)K_{\rho_1}(x)\,|\varphi(x)|\}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
z_n \;:&= \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{x\in I}|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq \varepsilon + H\{\|L_n 1 - 1\|_{\rho_1} + \|L_n\varphi-\varphi\|_{\rho_1} \\
&\quad + \left\|L_n\varphi^2-\varphi^2\right\|_{\rho_1}\}
\end{aligned} \tag{24}$$

elde ederiz. (24)'de $n \to \infty$ için limit alırsak (20) nedeniyle her $f \in C\rho_1$ ve $x \in I$ için

$$\lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{x\in I}|L_n(f(t);x)-f(x)| = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.6 $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları için (1) koşulu sağlansın.

$$\lim_n \left\| L_n \varphi^j - \varphi^j \right\|_{\rho_1} = 0 \ , \quad (j = 0, 1, 2) \tag{25}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_n \| L_n f - f \|_{\rho_2} = 0$$

olur (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995).

İspat. *Lemma* 3.2'nin koşullarının sağlandığını göstermeliyiz. (25) ve *Lemma* 3.5 gereğince herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1} = 1} \sup_{-s \le x \le s} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

sağlanır.

Diğer yandan

$$\begin{aligned} \|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} &= \|L_n \rho_1\|_{\rho_1} \\ &\le \left\| L_n \varphi^2 - \varphi^2 \right\|_{\rho_1} + \|L_n 1 - 1\|_{\rho_1} + 1 \\ &< K \end{aligned}$$

olacak biçimde bir $K > 0$ sayısı vardır. O halde $\{L_n\}$ dizisi düzgün sınırlı olup *Lemma* 3.2 gereğince her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_n \| L_n f - f \|_{\rho_2} = 0$$

sağlanır ve böylece ispat tamamlanır.

4. AĞIRLIKLI UZAYLARDA A-İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

Bu bölümde, Bölüm 3'de verilen sonuçların benzerleri A-İstatistiksel yakıkınsaklık yardımıyla genişletilecektir.

4.1 A-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda istatistiksel ve A-istatistiksel yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır.

Tanım 4.1.1 Bir $E \subset \mathbb{N}$ kümesi için $E_n := \{k \leq n : k \in E\}$ olmak üzere

E_n kümesinin eleman sayısı $|E_n|$ ile gösterilsin.

$$\lim_n \frac{1}{n} |E_n|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine E cümlesinin "*yoğunluğu*" (veya *doğal yoğunluğu*) denir ve $\delta(E)$ ile gösterilir. Ayrıca $\lambda(n)$ pozitif tamsayıların bir dizisi ve

$$E = \{\lambda(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

olmak üzere $\delta(E)$ mevcut ise bu durumda

$$\delta(E) := \lim_n \frac{n}{\lambda(n)}$$

ile verilir (Niven and Zuckerman 1980).

Örneğin

$$\delta(\mathbb{N}) = 1, \qquad \delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$$

$$\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$$

olduğu yoğunluk tanımından kolaylıkla elde edilebilir. Hatta asal sayılar kümesi ve doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi sıfır yoğunlukludur. Ayrıca bir K kümesi yoğunluğa sahip ise, bu durumda

$$\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1 - \delta(K)$$

olacaktır.(Niven and Zuckerman 1980, Freedman and Sember 1981).

Tanım 4.1.2 $x := (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda x dizisi L sayısına "*istatistiksel yakınsaktır*" denir ve

$$st - \lim x = L$$

şeklinde gösterilir (Fast 1951, Steinhaus 1951).

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılabileceği gibi, eğer x dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla yakınsak diziler uzayını c ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını da st ile gösterirsek bu durumda $c \subset st$ olduğu kolayca görülür. Üstelik aşağıdaki örnek bu önermenin karşıtının doğru olamayacağını göstermektedir.

Örnek 4.1.3 $x := (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \ \ ise \\ 0, & k \neq m^2 \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda *Tanım* 4.1.2 uyarınca $st-\lim_k x_k = 0$ bulunur fakat buradaki x dizisi alt ve üst limitlerin farklı olması nedeniyle yakınsak değildir.

Yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu biliyoruz. Fakat istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez. Bu durum aşağıda örneklendirilmiştir.

Örnek 4.1.4 $x := (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \quad \text{ise} \\ 0\ , & k \neq m^2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $st-\lim_k x_k = 0$ olmasına rağmen x dizisi üstten sınırsızdır.

Aşağıda istatistiksel yakınsaklık için bazı karakterizasyonlar hatırlatılmıştır.

Teorem 4.1.5 Bir $x := (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\delta\left(n_k : k \in \mathbb{N}\right) = 1 \text{ ve } \lim_k x_{n_k} = L$$

olacak biçimde en az bir (n_k) indis dizisinin mevcut olmasıdır (Salat 1980, Fridy 1985, Connor 1989).

O halde *Teorem* 4.1.5'den $st-\lim_k x_k = L$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $\delta\left(E\right) = 1$ olacak şekilde öyle bir $E \subset \mathbb{N}$ alt kümesi ve $n_0 = n_0\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in E$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ gerçeklenir. Kısaca sıfır yoğunluklu indis kümesi dışında (ya da buna eşdeğer olarak 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde) x dizisi L değerine klasik anlamda yakınsak ise bu durumda x dizisi L değerine istatistiksel yakınsaktır.

Şimdi A-İstatistiksel yakınsaklık kavramını hatırlayalım. Öncelikle istatistiksel yakınsaklık için aşağıdaki denk tanımları verelim:

Bir x dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması demek her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olması demektir; ya da buna denk olarak,

$$E := E\left(\varepsilon\right) = \left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}$$

olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\underset{n}{lim} \left(C_1 \mathcal{X}_{E(\varepsilon)}\right)_n := \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{X}_{E(\varepsilon)}(k) = 0$$

olması demektir. Burada $\mathcal{X}_E$, E kümesinin karakteristik fonksiyonu olup, $C_1 = (c_{nk})$ matrisi ise

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}; & 1 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0; & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile verilir. Bu matris $Cesaro$ matrisi olarak da adlandırılır.

Freadman ve Sember (1981) yukarıdaki düşünceyi kullanarak, istatistiksel yakınsaklık tanımında Cesaro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisini alarak istatistiksel yakınsaklığı daha da genelleştirmişlerdir. Bu durumu incelemeden önce kullanacağımız bazı kavramları hatırlayalım.

Tanım 4.1.6 $A = (a_{nk})$, $(k, n = 1, 2, ...)$ sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere,

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi her n için yakınsak ise $Ax := ((Ax)_n)$ dizisine x 'in *"A-dönüşüm dizisi"* denir. Eğer $\underset{n}{lim}\, x_n = L$ olduğunda $\underset{n}{lim}\, (Ax)_n = L$ koşulu gerçekleniyorsa, bu durumda A matrisine "*regüler matris*" denir (Boos 2000).

Örneğin C_1 $Cesaro$ matrisi regülerdir. Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması, Silverman-Toeplitz koşulları olarak bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilmektedir.

Teorem 4.1.7 Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\underset{n}{sup} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

(ii) Her k için $a_k := \lim_n a_{nk} = 0$,

(iii) $\underset{n}{lim} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır (Hardy 1949, Boos 2000).

Tanım 4.1.8 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bir $E \subset \mathbb{N}$ alt kümesi için

$$\lim_n (A\mathcal{X}_E)_n = \underset{n}{lim} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\mathcal{X}_E(k) = \underset{n}{lim} \sum_{k \in E} a_{nk}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine E kümesinin " *A yoğunluğu*" denir ve $\delta_A(E)$ ile gösterilir (Freedman ve Sember 1981, Miller 1995).

Tanım 4.1.9 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$E := E(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\mathcal{X}_{E(\varepsilon)}(k) = 0$$

ise ya da buna denk olarak her $\varepsilon > 0$ için

$$\underset{n}{lim} \sum_{k:|x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına "$A-istatistiksel\ yakınsaktır$" denir ve

$$st_A - \lim x = L$$

ile gösterilir (Freedman ve Sember 1981, Miller 1995).

Teorem 4.1.5'in bir benzeri A-istatistiksel yakınsaklık için şöyle verilir:

Teorem 4.1.10 Bir $x := (x_k)$ dizisinin bir L sayısına A-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\delta_A\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1 \text{ ve } \underset{k}{lim}\ x_{n_k} = L$$

olacak şekilde en az bir (n_k) indis dizisinin mevcut olmasıdır. (Kolk 1993, Miller 1995).

Tanım 4.1.9'da eğer A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa, bu durumda klasik anlamdaki yakınsaklık elde edilir. Üstelik A matrisi yerine C_1 *Cesaro* matrisi alındığı taktirde ise A-istatistiksel yakınsaklık bilinen istatistiksel yakınsaklığa indirgenir. Buradan yakınsak veya istatistiksel yakınsak her dizinin A-istatistiksel yakınsak olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Yani A-istatistiksel yakınsak diziler uzayını st_A ile gösterirsek $c \subset st_A$ bağıntısı sağlanır. Fakat bu önermenin karşıtı her zaman doğru değildir. Aşağıdaki teorem A-istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak olmaması durumunu daha da kesinleştirmektedir.

Teorem 4.1.11 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matrisi için

$$\underset{n}{lim} \max_{k} \{a_{nk}\} = 0$$

ise bu durumda A-istatistiksel yakınsaklık, klasik anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetlidir (Kolk 1993).

Tanım 4.1.12 Bir $x := (x_k)$ dizisi için $\delta_A \{k : |x_k| > M\} = 0$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x dizisi "$A - istatistiksel\ sınırlıdır$" denir.

4.2 A-İstatistiksel Yaklaşım

Bu kısımda Bölüm 3'de verilen Korovkin tipi yaklaşım teoremlerinin A-istatistiksel benzerlerini inceleyeceğiz.

Lemma 4.2.1 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları (1) koşulunu sağlasın. Kabul edelim ki bir $M > 0$ için

$$K := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} \leq M \right\}$$

olmak üzere $\delta_A (K) = 1$ olsun. Eğer herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$st_A - \lim_{n} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{|L_n(f;x)|}{\rho_1(x)} = 0$$

ise

$$st_A - \lim_n \ \|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}} = 0 \tag{26}$$

gerçeklenir (Duman ve Orhan, 2004).

İspat. $\delta_A(K) = 1$ olsun. Ayrıca

$$\varphi_n(s) := \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{|L_n(f;x)|}{\rho_1(x)}$$

olsun. *Lemma* 3.1'deki yöntemle her $n \in K$ için

$$\|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}} \leq \varepsilon + H\varphi_n(s_0) \tag{27}$$

olduğunu elde edebiliriz.

$r > 0$ verildiğinde $\varepsilon < r$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçelim.

$$\sum_{n\in K:\|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}\geq r} a_{jn} \leq \sum_{n\in K:H\varphi_n(s_0)\geq r-\varepsilon} a_{jn}$$

olduğu görülür. Burada $j \to \infty$ için limit alınırsa (26) elde edilir.

Lemma 4.2.2 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları (1) koşulunu sağlasın. Kabul edelim ki bir $M > 0$ için

$$K := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} \leq M \right\}$$

olmak üzere $\delta_A(K) = 1$ olsun. Eğer herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$st_A\text{–} \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} |L_n(f;x) - f(x)| \ = 0 \tag{28}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \ \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

gerçeklenir (Duman ve Orhan, 2004).

İspat. E, C_{ρ_1} üzerindeki özdeşlik operatörü olsun. $A_n := L_n - E$ alalım. Buradan

$$\|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \leq \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + 1$$

elde edilir. Şimdi

$$U := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \leq M \right\}$$

ve

$$V := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \leq M + 1 \right\}$$

tanımlayalım. O halde $U \subset V$ olduğu açıktır. Bu kapsama gereğince $\delta_A(U) = 1$ olduğundan $\delta_A(V) = 1$ eşitliği de sağlanır.

Lemma 3.2'deki yöntemle her hangi bir $s \in \mathbb{R}$ ve her $n \in K$ için

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{|A_n(f;x)|}{\rho_1(x)} \leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} |L_n(f;x) - f(x)| \tag{29}$$

olduğunu gösterebiliriz.

Her iki tarafta $A - istatistiksel$ limit alırsak (28) nedeniyle

$$st_A - \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{|A_n(f;x)|}{\rho_1(x)} = 0$$

gerçeklenir. Bu durumda $\{A_n\}$ dizisi *Lemma* 4.2.1'in koşullarını gerçekler. Bu ise

$$st_A - \lim_n \|L_n - E\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} = 0$$

olduğunu verir. Bu durumda

$$\|L_n f - f\|_{\rho_2} \leq \|L_n - E\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} \|f\|_{\rho_1}$$

olduğundan her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Şimdi esas sonucumuzu verelim.

Teorem 4.2.3 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere, ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları (1) koşulunu sağlasın. Eğer $\nu = 0, 1, 2$ için $F_\nu(t) = \frac{t^\nu \rho_1(t)}{1+t^2}$ olmak üzere

$$st_A - \lim_n \|L_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} = 0 \ , \qquad (\nu = 0, 1, 2) \tag{30}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0 \tag{31}$$

gerçeklenir (Duman ve Orhan, 2004).

İspat. Kabul edelim ki (30) sağlansın. *Teorem* 4.1.10 gereğince $\nu = 0, 1, 2$ için $E_\nu \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_A(E_\nu) = 1$ ve $\underset{n \in E_\nu}{lim} \|L_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} = 0$ elde edilir. Yani verilen bir $\varepsilon > 0$ için $N_\nu(\varepsilon)$ vardır öyleki her $n \in E_\nu$ için $n \geq N_\nu(\varepsilon)$ olacak biçimde $\|L_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} < \varepsilon$ olur. İstatistiksel yakınsak her dizi istatistiksel sınırlı olduğundan her $n \in E_\nu$ için bir $M_\nu > 0$ sayısı vardır öyleki

$$\|L_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} < M_\nu$$

eşitsizliği sağlanır.

$E := E_0 \cap E_1 \cap E_2$ tanımlayalım. $\delta_A(E_\nu) = 1$ olduğundan $\delta_A(E) = 1$ yazabiliriz.

Teorem 3.3'teki yöntemle her $n \in K$ için

$$\begin{aligned} \|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} &\leq \|L_n F_2 - F_2\|_{\rho_1} + \|L_n F_0 - F_0\|_{\rho_1} + 1 \\ &< M \end{aligned}$$

olacak biçimde bir M sayısı bulunabilir.

$K = \{n \in \mathbb{N}\text{: } \|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} \leq M\}$ olmak üzere $E \subset K$ olduğundan $\delta_A(E) \leq \delta_A(K)$

eşitsizliği sağlanır. $\delta_A(E) = 1$ olduğundan $\delta_A(K) = 1$ elde edilir. Yani *Lemma* 4.2.2'nin birinci şartı sağlanır. Eğer (28)'in de sağlandığını gösterebilirsek ispat biter.

Teorem 3.3'teki yöntemle her $n \in K$ ve $s \in \mathbb{R}$ için

$H := \max\{\, C_1 + C_3C_4,\ B(C_2 + C_5) + C_3C_4 \,\}$ olmak üzere

$$z_n := \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} |L_n(f(t);x) - f(x)| \leq H\varepsilon + H \sum_{\nu=0}^{2} \|L_nF_\nu - F_\nu\|_{\rho_1}$$

olduğunu gösterilebilir.

Şimdi verilen bir $r > 0$ için $H\varepsilon < r$ olacak biçimde bir ε seçelim.

$D := \{n \in K : \sum\limits_{\nu=0}^{2} \|LnF_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} \geq \frac{r-H\varepsilon}{H}\}$

$D_\nu := \{n \in K : \|LnF_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} \geq \frac{r-H\varepsilon}{3H}\}$, $(\nu = 0, 1, 2)$

tanımlarsak buradan kolayca $D \subset \bigcup\limits_{\nu=0}^{2} D_\nu$ olduğu görülebilir. O halde

$$\sum_{n\in K:z_n\geq r} a_{jn} \leq \sum_{n\in D} a_{jn} \leq \sum_{n\in D_0} a_{jn} + \sum_{n\in D_1} a_{jn} + \sum_{n\in D_2} a_{jn}$$

olur. Burada $j \to \infty$ için limit alırsak (30) gereğince

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n\in K:z_n\geq r} a_{jn} = 0$$

olup

$$st_A - \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} |L_n(f(t);x) - f(x)| = 0$$

elde edilir.O halde *Lemma* 4.2.2 göz önüne alınırsa her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \|L_nf - f\|_{\rho_2} = 0$$

olur ve ispat tamamlanır.

Eğer $A = I$ birim matrisi olarak alınırsa *Teorem* 3.3 elde edilir.

Şimdi ω ağırlık fonksiyonu özel olarak seçilmiş olmak üzere $Teorem$ 4.2.3 için bir uygulama niteliği taşıyan aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 4.2.4 $\omega(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu için $L_n : C_\omega \to B_\omega$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi, $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları için (1) koşulu sağlansın.

$$P_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}, P_n(f(t), x) = \frac{\rho_1(x)}{\omega(x)} L_n(\frac{1+t^2}{\rho_1(t)} f(t), x)$$

ile tanımlı pozitif lineer operatör dizisi $\{P_n\}$ olsun. Eğer

$$st_A - \lim_n \|L_n t^\nu - x^\nu\|_\omega = 0 \ , \quad (\nu = 0, 1, 2) \tag{32}$$

ise bu taktirde her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \|P_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

olur (Duman ve Orhan, 2004).

İspat. *Sonuç* 3.4'te

$$\frac{|P_n(F_\nu, x) - F_\nu(x)|}{\rho_1(x)} = \frac{|L_n(t^\nu, x) - x^\nu|}{\omega(x)} \ , \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

olduğu elde edilmişti. Eşitliğin her iki tarafında $x \in \mathbb{R}$ için supremum alırsak

$$\|P_n F_\nu - F_\nu\|_{\rho_1} = \|L_n t^\nu - x^\nu\|_\omega \ , \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

ifadesi elde edilir. Burada $n \to \infty$ için A-istatistiksel limit alınırsa (32) ve $Teorem$ 4.2.3 gereğince

her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \|P_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

olur ve tamamlanır.

Şimdi φ reel eksende sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere

$\rho_1(x) = 1 + \varphi^2(x)$ ağırlık fonksiyonu için C_ρ üzerinde bir yakınsaklık teoremi vermeden önce buna ilişkin bir lemma verelim.

Lemma 4.2.5 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris, $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{L_n\}$ olsun. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları için (1) koşulu sağlansın.

$$st_A - \lim_n \|L_n\varphi^\nu - \varphi^\nu\|_{\rho_1} = 0 \ , \quad (\nu = 0, 1, 2) \tag{33}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ ve herhangi bir $I = [a, b]$ kapalı aralığı için

$$st_A - \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x\in I} |L_n(f, x) - f(x)| = 0$$

olur (Duman ve Orhan, 2004).

İspat. *Lemma* 3.5'te $f \in C_{\rho_1}$ olmasından faydalanarak

$$H := maks \left\{ \sup_{x\in I} \rho_1(x) \left[\varepsilon + |f(x)| + K_{\rho_1}(x) + \varphi^2(x)\right], \sup_{x\in I} 2\rho_1(x) K_{\rho_1}(x) |\varphi(x)| \right\}$$

olmak üzere

$$z_n := \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x\in I} |L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \varepsilon + H \left\{ \sum_{\nu=0}^{2} \|L_n\varphi^\nu - \varphi^\nu\|_{\rho_1} \right\} \ , \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

eşitsizliğini elde etmiştik.

Şimdi verilen bir $r > 0$ için $\varepsilon < r$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçelim.

$$D := \{n \in K : \sum_{\nu=0}^{2} \|L_n\varphi^\nu - \varphi^\nu\|_{\rho_1} \geq \tfrac{r-\varepsilon}{H}\} \ , \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

$$D_\nu := \{n \in K : \|L_n\varphi^\nu - \varphi^\nu\|_{\rho_1} \geq \tfrac{r-\varepsilon}{3H}\} \ , \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

tanımlarsak buradan kolayca $D \subset \bigcup_{\nu=0}^{2} D_\nu$ olduğu görülebilir.

O halde

$$\sum_{n\in K:z_n\geq r} a_{jn} \leq \sum_{n\in D} a_{jn} \leq \sum_{n\in D_0} a_{jn} + \sum_{n\in D_1} a_{jn} + \sum_{n\in D_2} a_{jn}$$

olur. Burada $j \to \infty$ için limit alırsak (33) gereğince

$$st_A - \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x\in I} |L_n(f(t);x) - f(x)| = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ olmak üzere $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları için (1) koşulu sağlansın.

$$st_A - \lim_n \|L_n\varphi^\nu - \varphi^\nu\|_{\rho_1} = 0 \ , \quad (\nu = 0, 1, 2) \tag{34}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

olur (Duman ve Orhan, 2004).

İspat. *Lemma* 4.2.2'nin koşullarının sağlandığını göstermeliyiz. (34) ve *Lemma* 4.2.5 gereğince herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$st_A - \lim_n \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{-s\leq x\leq s} |L_n(f(t);x) - f(x)| = 0$$

sağlanır.

Diğer yandan $Teorem$ 4.2.3'ün ispatındaki gibi

$$\delta_A\{n \in \mathbb{N} : \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \leq M\} = 1$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısının varlığı kolayca gösterilebilir. O halde *Lemma* 4.2.2'nin şartları sağlanır ve her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$st_A - \lim_n \|L_n f - f\|_{\rho_2} = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.2.7 $\{L_n\}$, C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren ve klasik Korovkin teoremini gerçekleyen pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları da (1) koşulunu sağlasın. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matrisi ise $\lim\limits_{n} \underset{k}{maks} \{a_{nk}\} = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde seçilsin. *Teorem* 4.1.11 gereğince A-istatistiksel yakınsaklık, klasik anlamdaki yakınsalıktan daha kuvvetlidir. O halde genellikten birşey kaybetmeden sıfıra A-istatistiksel yakınsak fakat klasik anlamda yakınsak olmayan ve hatta terimleri negatif olmayan bir (u_n) dizisi seçebiriz. C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren $\{T_n\}$ pozitif lineer operatör dizisini her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$T_n(f;x) = (1 + u_n)L_n(f;x)$$

biçiminde tanımlayalım. Buna göre açık olarak söylenebilir ki $\{T_n\}$ dizisi $f \in C_{\rho_1}$ fonksiyonuna A-istatistiksel yakınsak olduğu halde klasik anlamda yakınsak değildir.

5. A-İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ORANI

Bu bölümde, "*$A-$İstatistiksel yakınsama oranı*" ve "*$A-$İstatistiksel sınırlılık oranı*" kavramları tanıtılarak bu kavramlara ilişkin bir takım sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 5.1 $A=(a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris, (a_n) reel sayıların pozitif artmayan bir dizisi olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_j \frac{1}{a_j} \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon} a_{jn}=0$$

koşulu sağlanıyorsa $x=(x_n)$ dizisi L sayısına "*$o(a_n)$ oranında $A-$İstatistiksel yakınsaktır*" denir ve $x_n-L=st_A-o(a_n)\ \ (n\to\infty)$ biçiminde gösterilir.

Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_j \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon a_n} a_{jn}=0$$

koşulu sağlanıyorsa $x=(x_n)$ dizisi L sayısına "*$o_\mu(a_n)$ oranında $A-$İstatistiksel yakınsaktır*" denir ve $x_n-L=st_A-o_\mu(a_n)\ \ (n\to\infty)$ biçiminde gösterilir (Duman, Khan ve Orhan, 2003).

Tanım 5.2 $A=(a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris, (a_n) reel sayıların pozitif artmayan bir dizisi olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$\sup_j \frac{1}{a_j} \sum_{n:|x_n|\geq\varepsilon} a_{jn}<\infty$$

koşulu sağlanıyorsa $x=(x_n)$ dizisi "*$O(a_n)$ oranında $A-$istatistiksel sınırlıdır*" denir ve $x_n=st_A-O(a_n)\ \ (n\to\infty)$ biçiminde gösterilir.

Eğer

$$\lim_j \sum_{n:|x_n|\geq Ma_n} a_{jn}=0$$

olacak biçimde bir pozitif M sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisi "*$O_\mu(a_n)$ oranında $A-$istatistiksel sınırlıdır*" denir ve $x_n=st_A-O_\mu(a_n)\ \ (n\to\infty)$ biçiminde gösterilir

(Duman, Khan ve Orhan, 2003).

Bu kısımda $\mathbb{R}$ de tanımlı $\rho_1(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu için "*ağırlıklı süreklilik modülü*" $\delta > 0$ ve $f \in C_{\rho_1}$ olmak üzere

$$\omega_{\rho_1}(f,\delta) = \sup_{|x-t|\leq\delta} \frac{|f(t)-f(x)|}{\rho_1(x)}$$

biçiminde tanımlıdır (Doğru 2002).

Şimdi ağırlıklı süreklilik modülünün bazı özelliklerini verelim:

$a)$ $x, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq \rho_1(x)\omega_{\rho_1}(f,|t-x|) \tag{35}$$

$b)$ $[H]$, H 'ın tam değerini göstermek üzere herhangi bir $H > 0$ ve her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\omega_{\rho_1}(f,H\delta) \leq (1+[H])\omega_{\rho_1}(f,\delta) \tag{36}$$

özellikleri sağlanır.

Şimdi ilk lemmamızı verelim.

Lemma 5.3 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $\{L_n\}$, C_{ρ_1} üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizisi öyleki $\left\{\|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}\right\}$ dizisi A-istatistiksel sınırlı olsun. Yani $M > 0$ olmak üzere $K := \left\{n \in \mathbb{N} : \|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \leq M\right\}$ kümesi için $\delta_A(K) = 1$ gerçeklensin. $\varphi_x(t) = (t-x)^2$, $F_0(t) = 1$ olmak üzere $L_n\varphi_x$, $L_nF_0 \in C_{\rho_1}$ olsun. Herhangi bir $s > 0$ ve her $n \in K$ için

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left(\sup_{|x|\leq s} |L_n(f;x)-f(x)|\right) \leq H\left\{\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} (\omega_{\rho_1}(f,\alpha_n)) + \|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1}\right\} \tag{37}$$

olacak biçimde en az bir $H > 0$ sayısı vardır. Burada $\alpha_n := \sqrt{\|L_n\varphi_x\|_{\rho_1}}$ olup H, s sayısına bağlı pozitif bir sabittir (Duman ve Orhan, 2005).

İspat.

$F_0(x)=1$ ve $F_0(t)=1$ ifadelerini ve (35) bağıntısını (9)'da yerine yazarsak her $n\in\mathbb{N}$ ve herhangi bir $\delta>0$ için

$$\begin{aligned}|L_n(f(t);x)-f(x)| &\leq L_n(|f(t)-f(x)|\,;x)+|f(x)|\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)|\\ &\leq L_n(\rho_1\omega_{\rho_1}(f,\delta\frac{|t-x|}{\delta});x)+|f(x)|\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)|\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi bu eşitsizlikte (36) ifadesini ve L_n'nin lineerliğini de kullanarak,

$$\begin{aligned}|L_n(f(t);x)-f(x)| &\leq \rho_1(x)\omega_{\rho_1}(f,\delta)L_n(1+\left[\frac{|t-x|}{\delta}\right]);x)\\ &\quad+|f(x)|\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)|\\ &\leq \rho_1(x)\omega_{\rho_1}(f,\delta)L_n(1+\frac{(t-x)^2}{\delta^2});x)\\ &\quad+|f(x)|\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)|\\ &\leq \rho_1(x)\omega_{\rho_1}(f,\delta)\left\{L_n(1;x)+\frac{1}{\delta^2}L_n((t-x)^2\,;x)\right\}\\ &\quad+|f(x)|\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)| \qquad (38)\\ &\leq \rho_1(x)\omega_{\rho_1}(f,\delta)\left\{L_n(\rho_1;x)+\frac{1}{\delta^2}L_n(\varphi_x;x)\right\}\\ &\quad+|f(x)|\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)|\end{aligned}$$

elde ederiz. (38)'de $\varphi_x\in C_{\rho_1}$, herhangi bir $s>0$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $|x|\leq s$ üzerinden supremum alırsak,

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\leq s}|L_n(f(t);x)-f(x)| &\leq \sup_{|x|\leq s}\{\rho_1(x)\omega_{\rho_1}(f,\delta)\left\{L_n(\rho_1;x)+\frac{1}{\delta^2}L_n(\varphi_x;x)\right\}\\ &\quad+|f(x)|\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)|\}\\ &\leq \omega_{\rho_1}(f,\delta)\left\{\sup_{|x|\leq s}L_n(\rho_1;x)\frac{\rho_1(x)}{\rho_1(x)}+\frac{1}{\delta^2}\sup_{|x|\leq s}L_n(\varphi_x;x)\frac{\rho_1(x)}{\rho_1(x)}\right\}\\ &\quad+\sup_{|x|\leq s}\left\{|f(x)|\,|L_n(F_0(t);x)-F_0(x)|\,\frac{\rho_1(x)}{\rho_1(x)}\right\} \qquad (39)\\ &\leq c_1\omega_{\rho_1}(f,\delta)\left\{c_1\left\|L_n\rho_1\right\|_{\rho_1}+\frac{c_1}{\delta^2}\left\|L_n\varphi_x\right\|_{\rho_1}\right\}\\ &\quad+c_2\left\|L_nF_0-F_0\right\|_{\rho_1}\end{aligned}$$

olup burada $c_1 := c_1(s) = \sup_{|x|\le s} \rho_1(x) = 1+s^2$ ve $c_2 := c_2(s) = \sup_{|x|\le s} |f(x)|\,\rho_1(x)$ şeklinde tanımlıdır. $\delta := \alpha_n = \sqrt{\|L_n\varphi_x\|_{\rho_1}}$ ifadesi ve *Önerme* 2.2.3'de verilen $\|L_n\rho_1\|_{\rho_1} \le M$ eşitsizliği (39)'da kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sup_{|x|\le s} |L_n(f(t);x) - f(x)| &\le c_1\omega_{\rho_1}(f,\alpha_n)\{c_1M + c_1\} + c_2\|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1} \\
&= (1+M)c_1^2\omega_{\rho_1}(f,\alpha_n) + c_2\|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1} \qquad (40)\\
&\le H\left\{\omega_{\rho_1}(f,\alpha_n) + \|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $H := maks\{(1+M)c_1^2, c_2\}$ şeklinde tanımlanmıştır. (40)'da $\|f\|_{\rho_1} = 1$ üzerinden supremum alırsak,

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left\{\sup_{|x|\le s}|L_n(f(t);x) - f(x)|\right\} \le H\left\{\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}(\omega_{\rho_1}(f,\alpha_n)) + \|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1}\right\}$$

ifadesi elde edilir.

Aşağıdaki lemma *Lemma* 4.2.2 nin bir sonucudur.

Lemma 5.4 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun ayrıca ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonları için (1) şartı sağlansın. $L_n{:}C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olsun ve $\left\{\|L_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}\right\}$ dizisi A-istatistiksel sınırlı olsun. Ayrıca kabul edelim ki (c_n) reel sayıların pozitif artmayan bir dizisi olsun. Eğer herhangi bir $s > 0$ için

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{|x|\le s}|L_n(f;x) - f(x)|\right) = st_A - o(c_n) \quad , \quad (n\to\infty) \qquad (41)$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\|L_nf - f\|_{\rho_2} = st_A - o(c_n)\ ,\ \ (n\to\infty) \qquad (42)$$

gerçeklenir. Benzer sonuç "O", "o_μ" ve "O_μ" için de gösterilebilir (Duman ve Orhan, 2005).

Teorem 5.5 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun ayrıca ρ_1 ve ρ_2

fonksiyonları için (1) şartı sağlansın. L_n:$C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olsun ve $\left\{\|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}}\right\}$ dizisi A-istatistiksel sınırlı olsun. Ayrıca $\varphi_x(t) = (t-x)^2$, $F_0(t) = 1$ olmak üzere $L_n\varphi_x$, $L_nF_0 \in C_{\rho_1}$ olsun. (a_n) ve (b_n) artmayan pozitif diziler olmak üzere L_n operatörleri

(i) $\|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1} = st_A - o(a_n)$, $(n \to \infty)$,

(ii) $\alpha_n = \sqrt{\|L_n\varphi_x\|_{\rho_1}}$ olmak üzere $\underset{\|f\|_{\rho_1}=1}{sup} \left(\omega_{\rho_1}(f, \alpha_n)\right) = st_A - o(b_n)$, $(n \to \infty)$

şartlarını sağlıyorsa $c_n := maks\,\{a_n, b_n\}$ olmak üzere her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\|L_nf - f\|_{\rho_2} = st_A - o(c_n) \ , \quad (n \to \infty) \tag{43}$$

gerçeklenir. Benzer sonuç "O" için de gösterilebilir (Duman ve Orhan, 2005).

İspat. Öncelikle

$u_n := \underset{\|f\|_{\rho_1}=1}{sup} \left(\sup_{|x|\leq s} |L_n(f;x) - f(x)|\right)$

$t_n := \underset{\|f\|_{\rho_1}=1}{sup} \left(\omega_{\rho_1}(f, \alpha_n)\right)$

$z_n := \|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1}$

dizilerini tanımlayalım. *Lemma* 5.3'ün şartları sağlandığından her $n \in K$ için

$u_n \leq H(t_n + z_n)$ olacak biçimde bir $H > 0$ sayısı vardır.

Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$D := \left\{n \in K : t_n + z_n \geq \frac{\varepsilon}{H}\right\}$

$D_1 := \left\{n \in K : t_n \geq \frac{\varepsilon}{2H}\right\}$

$D_2 := \left\{n \in K : z_n \geq \frac{\varepsilon}{2H}\right\}$

tanımlayalım. Burada $D \subset D_1 \cup D_2$ olduğu kolayca görülür. Her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{c_j} \sum_{n \in K: u_n \geq \varepsilon} a_{jn} \leq \frac{1}{c_j} \sum_{n \in D} a_{jn} \leq \frac{1}{c_j} \sum_{n \in D_1} a_{jn} + \frac{1}{c_j} \sum_{n \in D_2} a_{jn}$$

yazabiliriz. $c_j := maks\{a_j, b_j\}$ olmak üzere her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{c_j} \sum_{n \in K: u_n \geq \varepsilon} a_{jn} \leq \frac{1}{b_j} \sum_{n \in D_1} a_{jn} + \frac{1}{a_j} \sum_{n \in D_2} a_{jn} \tag{44}$$

bulunur. (44)'deki eşitsizlikte $j \to \infty$ için limit alıp, (i) ve (ii) şartlarını da kullanarak herhangi bir $s > 0$ için

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} (\sup_{|x| \leq s} |L_n(f;x) - f(x)|) = st_A - o(c_n) , \quad (n \to \infty)$$

sonucunu elde ederiz. Yani *Lemma* 5.4'deki (41) şartı sağlanmış olur. Böylece (42) gerçeklenmiş olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.5'de "o" yerine "o_μ" alarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.6 $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun ayrıca ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonları için (1) şartı sağlansın. $L_n{:}C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olsun ve $\left\{\|L_n\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}}\right\}$ dizisi A-istatistiksel sınırlı olsun. Ayrıca $\varphi_x(t) = (t-x)^2$, $F_0(t) = 1$ olmak üzere $L_n\varphi_x$, $L_nF_0 \in C_{\rho_1}$ olsun. (a_n) ve (b_n) artmayan pozitif diziler olmak üzere L_n operatörleri

(i) $\|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1} = st_A - o_\mu(a_n)$, $\quad (n \to \infty)$,

(ii) $\alpha_n = \sqrt{\|L_n\varphi_x\|_{\rho_1}}$ olmak üzere $\sup\limits_{\|f\|_{\rho_1}=1} (\omega_{\rho_1}(f, \alpha_n)) = st_A - o_\mu(b_n)$, $(n \to \infty)$

şartlarını sağlıyorsa $c_n := maks\{a_n, b_n, a_nb_n\}$ olmak üzere her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\|L_nf - f\|_{\rho_2} = st_A - o_\mu(c_n) , \quad (n \to \infty) \tag{45}$$

gerçeklenir. Benzer sonuç "O_μ" için de gösterilebilir (Duman ve Orhan, 2005).

$Teorem$ 5.5 ve 5.6'da (a_n) ve (b_n) dizilerinin özel seçimleri ile $Teorem$ 4.2.3'ün elde edilebileceğini vurgulayalım. Burada özdeşlik matrisini göz önüne alırsak aşağıdaki sonucu kolayca elde edebiliriz.

Sonuç 5.7 L_n:$C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi verilsin ve $\left\{\|L_n\|_{C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_1}}\right\}$ dizisi sınırlı olsun. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonları için (1) şartı sağlansın. $\varphi_x(t) = (t-x)^2$, $F_0(t) = 1$ olmak üzere $L_n\varphi_x$, $L_nF_0 \in C_{\rho_1}$ olsun. L_n operatörleri

(i) $\lim\limits_{n} \|L_nF_0 - F_0\|_{\rho_1} = 0$

(ii) $\alpha_n = \sqrt{\|L_n\varphi_x\|_{\rho_1}}$ olmak üzere $\lim\limits_{n} \left\{ \sup\limits_{\|f\|_{\rho_1}=1} (\omega_{\rho_1}(f, \alpha_n)) \right\} = 0$

şartlarını sağlıyorsa her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_{n} \|L_nf - f\|_{\rho_2} = 0$$

olur (Duman ve Orhan, 2005).

6. SONUÇ

Bu tezde Korovkin tipi yaklaşım teoremlerinin klasik yakınsaklıktan A-istatistiksel yakınsaklığa taşınması ve A-istatistiksel yakınsama oranlarına ilişkin bazı sonuçlar verilerek klasik yakınsama oranının elde edilmesi amaçlanmıştır. Bunun için pozitif lineer operatör, ağırlıklı uzay, A-istatistiksel yakınsaklık ve A-istatistiksel yakınsama oranı gibi kavramlar tanıtılmış, A-istatistiksel sonuçlara geçmeden klasik sonuçlar verilmiş ve son olarak A-istatistiksel yakınsama oranı kavramından klasik yakınsama oranı elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Altomare, F. and Campiti, M. 1994. Korovkin type Approximation Theory and its Application, Walter de Gruyter Publ. Berlin, Germany.

Connor, J. 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences, Analysis 8 ; 47-63.

Connor, J. 1989. On Strong Matrix Summability with Respect to a Modulus and Statistical Convergence, Canad. Math. Bull. 32 ; 194-198.

Duman, O.,Khan, M. K. and Orhan, C. 2003. A-statistical convergence of approximating operators Math. Inequal. Appl. 6 (4); 689-699.

Duman, O. and Orhan, C. 2004. Statistical approximation by positive linear operators Studia Math. 161 (2); 187-197.

Duman, O. and Orhan, C. 2005. Rates of A-statistical convergence of positive linear operators Applied Math. Letters 18 ; 1339-1344.

Fast, H. 1951. Sur la Convergence Statistique. Colloq. Math. 2; 241-244.

Freedman A. R. and Sember J. J. 1981. Densities and Summability. Pasific J. Math. 95; 293-305.

Fridy, J. A. 1985. On Statistical Convergence. Analysis 5; 301-313.

Fridy, J. A. and Orhan C. 1993. Lacunary Statistical Convergence. Pasific J. Math. 160; 43-51.

Fridy, J. A. and Orhan C. 1997. Statistical Limit Superior and Limit Inferior Prof . Amer. Math. Soc. 125; 3625-3631.

Gadžiev, A.D. 1974. The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P. P. Korovkin. Soviet Math. Dokl. 15 (5); 1433–1436.

Gadjiev, A.D. 1976. Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems. Mat. Zametki, 20; 781–786.

Gadjiev, A.D. and Orhan, C. 2002. Some Aprproximation Theorems Vıa Statistical Convergence. Rocky Mountain Journal of Math. 32 (1); 129-137.

Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü. Yayınları.

Kolk, E. 1991. The Statistical Convergence, in Banach Spaces. Acta Et Comment Tartuensis 928; 41-52.

Kolk, E. 1993. Matrix summability of statistically covergent sequences. Analysis 13; 77-83.

Korovkin, P.P. 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Spaces of Continuous Functions. Dokl. Akad. Nauk. 90; 961-969.

Korovkin, P.P. 1960. Linear operators and Theory of Approximation. Hindustan Publ. Co. Delhi.

Miller, H. I. 1995. A Measure Theoretical Subsequence Characterization of Statistical Convergence. Trans. Amer. Math. Soc. 347; 1811-1819.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Çiğdem ÇULHA
Doğum Yeri	:	DİYARBAKIR
Doğum Tarihi	:	08. 04. 1983
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Çankaya Süper Lisesi, 1997 – 2001
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü , 2001 – 2005
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2005 – 2007