

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DOĞURUCU FONKSİYONLAR İÇEREN LİNEER POZİTİF  
OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

**Gürhan İÇÖZ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2008**

**Her hakkı saklıdır**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### DOĞURUCU FONKSİYONLAR İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Gürhan İÇÖZ

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, lineer pozitif operatörlerle ilgili genel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Meyer-König ve Zeller operatörü ve genelleştirilmesi ile ilgili bilgiler verildikten sonra, bu operatörün yaklaşım özellikleri, r-inci genelleşmesi ve diferensiyel denklemlere uygulanması üzerinde durulacaktır.

Dördüncü bölümde; doğurucu fonksiyonların belirli sınıfını içeren pozitif operatörlere yer verilmiştir. Bölümün ileriki kısımlarında operatörlerin yaklaşım özellikleri, r-inci genelleşmesi ve diferensiyel denklemlere uygulanması özelliklerine deгinilmiştir.

Son bölümde; iki değişkenli Meyer-König ve Zeller operatörlerinin genelleşmesi ele alınmıştır. Ayrıca bu operatörlerin de yaklaşım özellikleri ve kısmi türevli denklemlere uygulanması verilmiştir.

**Temmuz 2008, 80 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Lineer pozitif operatörler, Bernstein operatörü, Korovkin teoremi, MKZ operatörü, Süreklik modülü, Lipschitz sınıfı, Modifiye Lipschitz sınıfı, Düzgün yakınsaklık, Peetre K-fonksiyoneli, Taylor integral formülü

## ABSTRACT

Master Thesis

### APPROXIMATION PROPERTIES OF LINEAR POSITIVE OPERATORS INCLUDING GENERATING FUNCTIONS

Gürhan İÇÖZ

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to introduction.

In the second chapter, general informations about the linear positive operators are given.

In the third chapter, after giving informations of MKZ operators and generalizations, the approximation properties of these operators, generalization of r-th order and application to differential equations are analyzed.

In the fourth chapter, on positive operators involving a certain class of generating functions are discussed. In the following parts, the approximation properties of these operators, generalization of r-th order and application to differential equations are examined.

In the last chapter, the generalization of bivariate MKZ operators is dealt. Moreover, the approximation properties of these operators and application to partial differential equations is found.

**July 2008, 80 pages**

**Key Words:** Linear positive operators, Bernstein operators, Korovkin theorem, MKZ operators, modulus of continuity, Lipschitz class, Modified Lipschitz class, Uniform convergence, Peetre's K-functional, Taylor's integral formula

## **TEŞEKKÜR**

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı olan sayın hocam Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ’a, destek ve görüşlerini esirgemeyen sevgili arkadaşım Araş. Gör. Serhan VARMA ’ya, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK ’a ve çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Gürhan İÇÖZ

Ankara, Temmuz 2008

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
SİMGELER DİZİNİ .....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER .....	2
2.1 Lineer Pozitif Operatörlerin Tanımı .....	2
2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri .....	3
2.3 Süreklik Modülü .....	6
2.4 Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi .....	9
2.5 P. P. Korovkin Teoremi .....	15
3. DOĞURUCU FONKSİYON İÇEREN MEYER-KÖNİG ve ZELLER TİPLİ OPERATÖRLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ ...	19
3.1 Giriş .....	19
3.2 Operatörlerin Oluşturulması .....	20
3.3 Korovkin Tipli Bir Teorem .....	21
3.4 $L_n$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri .....	23
3.5 $L_n$ Operatörünün Yakınsama Hızı .....	27
3.6 $L_n$ Operatörünün $r$ -inci Basamaktan Genelleştirilmesi .....	35
3.7 $L_n$ Operatörünün Diferensiyel Denklemlere Uygulanması .....	38
4. DOĞURUCU FONKSİYONLARIN BELİRLİ SINIFINI İÇEREN POZİTİF OPERATÖRLER .....	42
4.1 Giriş .....	42
4.2 $L_n$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri .....	44
4.3 $L_n$ Operatörünün Yakınsama Hızı .....	50
4.4 $L_n$ Operatörünün $r$ -inci Basamaktan Genelleştirilmesi .....	56
4.5 $L_n$ Operatörünün Diferensiyel Denklemlere Uygulanması .....	59

<b>5. KATLI DOĞURUCU FONKSİYON İÇEREN İKİ DEĞİŞKENLİ MKZ OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ .....</b>	<b>62</b>
<b>5.1 Giriş .....</b>	<b>62</b>
<b>5.2 <math>L_{n,m}</math> Operatörünün Yaklaşım Özellikleri .....</b>	<b>64</b>
<b>5.3 <math>L_{n,m}</math> Operatörünün Yakınsama Hızı .....</b>	<b>71</b>
<b>5.4 <math>L_{n,m}</math> Operatörünün Kısmi Diferensiyel Denklemlere Uygulanması</b>	<b>75</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>78</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>80</b>

## SİMGELER DİZİNİ

$A_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$B_n(f; x)$	Bernstein polinom dizisi
$M_n(f; x)$	Meyer-König ve Zeller operatör dizisi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı
$C^2[a, b]$	$g, g', g'' \in C[a, b]$ olan fonksiyon uzayı
$(f_n)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$f_n(x) \Rightarrow f(x)$	$(f_n)$ fonksiyon dizisinin $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\omega(f, \delta)$	$f$ fonksiyonunun süreklilik modülü
$\ f\ _{C[a, b]}$	$x \in [a, b]$ için $\ f\ _{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b}  f(x) $ ile tanımlanan norm
$\ g\ _{C^2[a, b]}$	$\ g\ _{C^2[a, b]} = \ g\ _{C[a, b]} + \ g'\ _{C[a, b]} + \ g''\ _{C[a, b]}$ ile tanımlanan norm
$K(f, \delta)$	$f$ fonksiyonunun Peetre $K$ -fonksiyoneli
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı
$\tilde{Lip}_M(\alpha)$	Modifiye Lipschitz sınıfı
$B(\alpha, r)$	Beta fonksiyonu

## **1. GİRİŞ**

Bu tezde öncelikle lineer pozitif operatörler tanıtılmak ve sağladığı temel özellikler incelenecaktır. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar verilecek ve lineer pozitif operatörlerin önemine değinilecektir. Süreklik modülünün tanımı verilecek ve özellikleri ispatlanacaktır. Bernstein'in Weierstrass problemi için verdiği teorem ve Korovkin teoremi ifade ve ispat edilecektir.

Sonra ise doğurucu fonksiyon içeren tek ve iki değişkenli genelleştirilmiş lineer pozitif operatörler tanıtılmak ve bunların yakınsama hızları sürekli modülü, Peetre K-fonksiyoneli ve modifiye Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır. Ayrıca bu operatörlerin  $r$ -inci basamaktan genellesmeleri verilecek ve bu genelleşmiş operatöründe yakınsama hızı, sürekli modülü ve modifiye Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır. Daha sonra bu operatörlerin diferensiyel denklemlere ve kısmi türevli denklemlere uygulanması konusu üzerinde durulacaktır.

## 2. LINEER POZİTİF OPERATÖRLER

### 2.1 Lineer Pozitif Operatörlerin Tanımı

**Tanım 2.1.1**  $X$  ve  $Y$  iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer  $X$  den alınan herhangi bir  $f$  fonksiyonuna  $Y$  de bir  $g$  fonksiyonu karşılık getiren bir  $L$  kuralı varsa buna  $X$  uzayında bir operatördür denir ve  $L(f; x) = g(x)$  biçiminde gösterilir.

Burada  $L(f; x) = L(f(t); x)$  olmak üzere  $L$  operatörü  $f$  fonksiyonunun bağlı olduğu  $t$  değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise  $x$  değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bundan dolayı  $x$  değişkeni  $L$  işleminde sabit gibidir ve  $L(f(x); x) = f(x)L(1; x)$  yazılabilir.

$X$  uzayı lineer bir uzay olduğunda lineer operatörün tanımı yapılabilir.

**Tanım 2.1.2**  $X$  ve  $Y$  fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$L : X \rightarrow Y$$

şeklindeki  $L$  operatörünü gözönüne alalım. Eğer  $\forall f, g \in X$  ve  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  için

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulu sağlanıyorsa o taktirde  $L$  operatörüne *lineer operatör* denir.

**Tanım 2.1.3** Eğer bir  $L$  operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani,  $f$  bir fonksiyon ve  $L$  bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f; x) \geq 0$$

oluyor ise  $L$  operatörüne *pozitif operatör* denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartını sağlayan operatöre *lineer pozitif operatör* denir.

**Uyarı 2.1.1**  $f \leq 0$  iken  $L(f; x) \leq 0$  gerçekleşir mi?

Kabul edelim ki  $f \leq 0$  olsun. Bu durumda

$$-f \geq 0$$

elde edilir.  $L$  operatörü pozitif olduğundan

$$L(-f; x) \geq 0$$

bulunur.  $L$  operatörünün lineerlik özelliği kullanılrsa

$$-L(f; x) \geq 0 \Rightarrow L(f; x) \leq 0$$

elde edilir. Yani istenilen özelliğin gerçekleştiği görülmüş olur.

## 2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

**Lemma 2.2.1** Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \leq g$  olsun. Bu durumda  $g - f \geq 0$  olacağndan ve  $L$  operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f) \geq 0 \tag{2.2.1}$$

yazılabilir. Diğer taraftan  $L$  operatörü lineer olduğundan

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

elde edilir. Bunun (1.2.1) de kullanılmasıyla

$$L(g - f) = L(g) - L(f) \geq 0 \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

bulunur.

**Lemma 2.2.2**  $L$  bir lineer pozitif operatör ise o taktirde;

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Keyfi bir  $f$  fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \quad (2.2.2)$$

dir.  $L$  operatörünün lineerliğinden, monoton artanlığından ve de (1.2.2) den

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \quad (2.2.3)$$

yazılabilir. Bu ise

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

olduğunu gösterir.

**Tanım 2.2.1**  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $f_n(x)$ 'e bir *fonksiyon dizisi* denir ve  $(f_n)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.2**  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $L_n(f; x)$ 'e bir *operatör dizisi* denir ve  $(L_n)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.3** Kapalı bir  $[a, b]$  aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan

oluşan kümeye  $C [a, b]$  fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm,

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Burada

1.  $\forall f, g \in C [a, b]$  için  $f + g \in C [a, b]$
2.  $\forall f, g \in C [a, b]$  için  $f + g = g + f$
3.  $\forall f, g, h \in C [a, b]$  için  $(f + g) + h = f + (g + h)$
4.  $\forall f \in C [a, b]$  için  $\exists \theta$  vardır ki  $f + \theta = \theta + f = f$
5.  $\forall f \in C [a, b]$  için  $\exists f'$  vardır ki  $f + f' = f' + f = \theta$
6.  $\forall f \in C [a, b]$  ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  için  $\lambda f \in C [a, b]$
7.  $\forall f \in C [a, b]$  ve  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  için  $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$
8.  $\forall f \in C [a, b]$  için  $1.f = f$
9.  $\forall f \in C [a, b]$  ve  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  için  $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$
10.  $\forall f, g \in C [a, b]$  ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  için  $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$
11.  $\forall f \in C [a, b]$  için  $\|f\| \geq 0$
12.  $\forall f \in C [a, b]$  için  $\|f\| = 0 \iff f = 0$
13.  $\forall f \in C [a, b]$  ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  için  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
14.  $\forall f, g \in C [a, b]$  için  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

koşulları sağlandığından  $C [a, b]$  Lineer Normlu Uzaydır.

**Tanım 2.2.4** Bir  $(f_n)$  fonksiyonlar dizisinin  $f$  fonksiyonuna  $C [a, b]$  normunda düzgün yakınsak olması  $\forall x \in [a, b]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olmasıdır. Daha açık olarak ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması demektir.

Düzgün yakınsama  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  şeklinde gösterilir.

### 2.3 Süreklik Modülü

$f \in C[a, b]$  olsun.  $\forall \delta > 0$  için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (2.3.1)$$

ile tanımlanan  $\omega(f; \delta)$  ifadesine  $f$  fonksiyonunun *süreklik modülü* denir.

**Lemma 2.3.1** Süreklik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (i).  $\omega(f; \delta) \geq 0$
- (ii).  $\delta_1 \leq \delta_2$  ise  $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- (iii).  $m \in \mathbb{N}$  için  $\omega(f; m\delta) \leq m \omega(f; \delta)$
- (iv).  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  için  $\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda) \omega(f; \delta)$
- (v).  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$
- (vi).  $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t-x|)$
- (vii).  $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$

**İspat:**

(i). Tanım gereğince, sürekli modülü mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıklır.

(ii).  $\delta_1 \leq \delta_2$  için  $|t-x| \leq \delta_2$  bölgesinin  $|t-x| \leq \delta_1$  bölgesinden daha büyük olduğu açıklır. Bölge büyütükçe alınan supremumda büyüyeceğinden ispat tamamlanır.

(iii). Süreklik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabilir.

$$|t-x| \leq m\delta \Rightarrow x - m\delta \leq t \leq x + m\delta$$

olup,  $t = x + mh$  seçilmesiyle

$$\begin{aligned} x - m\delta &\leq x + mh \leq x + m\delta \\ \Rightarrow -m\delta &\leq mh \leq m\delta \\ \Rightarrow -\delta &\leq h \leq \delta \\ \Rightarrow |h| &\leq \delta \end{aligned}$$

ve

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x + (k+1)h) - f(x + kh)] \right|$$

olup, sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)| \\ &\leq \omega(f; \delta) + \dots + \omega(f; \delta) \\ &= m \omega(f; \delta) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv).  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  sayısının tam kısmı  $[\lfloor \lambda \rfloor]$  ile gösterilirse bu durumda

$$[\lfloor \lambda \rfloor] < \lambda < [\lfloor \lambda \rfloor] + 1$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır. Şimdi bu eşitsizlikten ve (ii) de ispatlanan  $\omega(f; \delta)$  nin azalmayan fonksiyon olmasını kullanarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lfloor \lambda \rfloor] + 1)\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir.  $[\lambda]$  pozitif bir tamsayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanabilir. Bu durumda

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$  için

$$[\lambda] + 1 \leq \lambda + 1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

olur. Sonuç olarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

(v).  $|t - x| \leq \delta$  eşitsizliğindeki  $\delta \rightarrow 0$  olması  $t \rightarrow x$  olması anlamına gelir.  $f$  fonksiyonu sürekli olduğundan, süreklilik tanımına göre  $t \rightarrow x$  için  $|f(t) - f(x)| \rightarrow 0$  olduğundan ispat açıkları.

(vi).  $\omega(f; \delta)$  ifadesinde  $\delta = |t - x|$  seçilirse

$$\omega(f; |t - x|) = \sup_{x \in [a, b]} |f(t) - f(x)|$$

elde edilir. O halde  $|f(t) - f(x)|$  lerin supremumu  $\omega(f; |t - x|)$  olacağından,  $|f(t) - f(x)|$  ifadesi  $\omega(f; |t - x|)$  den küçük kalacaktır. Bu ise istenilendir.

(vii). (vi) özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|) = \omega\left(f; \frac{|t - x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \left( \frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

## 2.4 Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi

Çağdaş fonksiyonel analiz ve fonksiyonlar teorisinde yer alan lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusu son elli yıl içinde ortaya çıkışmış bir araştırma alanıdır.

Alman Matematikçi Weierstrasse 1895 yılında sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ispatlamıştır. 1912 yılında ise Rus Matematikçi S.N.Bernstein bu polinomun,  $x \in [0, 1]$  için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.4.1)$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştır.

Bernstein'ın bu ispatını vermeden önce kullanacağımız bazı ifadeleri ve ispatlarını verelim.

**Lemma 2.4.1** (2.4.1) de tanımlanan Bernstein operatörleri için

$$B_n(1; x) = 1 \quad (2.4.2)$$

$$B_n(t; x) = x \quad (2.4.3)$$

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \quad (2.4.4)$$

dir.

**İspat:** Binom açılımından

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

olup, bu açılımda  $a = x$  ve  $b = 1 - x$  alınırsa

$$B_n(1; x) = 1$$

bulunur. Bu ise (2.4.2) eşitsizliğini verir. (2.4.1) eşitliğinde  $f(t) = t$  alınırsa

$$\begin{aligned} B_n(t; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \end{aligned}$$

olup Binom açılımından

$$B_n(t; x) = x$$

elde edilir ki bu ise (2.4.3) ün ispatını tamamlar. Son olarak (2.4.1) eşitliğinde  $f(t) = t^2$  alınırsa

$$\begin{aligned} B_n(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{k}{n} = \frac{k-1+1}{n} = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n}$$

olduğundan son eşitlik

$$B_n(t^2; x) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} \right) \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} B_n(t^2; x) &= \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{x^2 (n-1)}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)! (k-2)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{x^2 (n-1)}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-k-2} \\ &\quad + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \end{aligned}$$

olup Binom açılımından

$$B_n(t^2; x) = \frac{x^2 (n-1)}{n} + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

bulunur. Bu ise (2.4.4) eşitliğini verir.

**Teorem 2.4.1 (S.N.Bernstein)** (2.4.1) ile tanımlı Bernstein operatörleri  $[0, 1]$  aralığında sürekli olan  $f$  fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsaktır.

**Ispat:** (2.4.1) ve (2.4.2) den

$$\begin{aligned}
 |B_n(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^n (f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|
 \end{aligned}$$

bulunur.  $x \in [0, 1]$  olduğundan  $\binom{n}{k} x^k \geq 0$  ve  $(1-x)^{n-k} \geq 0$  dir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
 |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \sum_{|\frac{k}{n}-x| \leq \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &\quad + \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
 \end{aligned}$$

yazılabilir.  $f$  fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \delta \text{ iken } \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

dur. Öyleyse

$$\begin{aligned}
 |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \varepsilon \sum_{|\frac{k}{n}-x| \leq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &\quad + \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
 \end{aligned}$$

elde edilir.  $f$  sınırlı olduğundan  $\forall x \in [0, 1]$  için öyle bir  $M > 0$  vardır ki

$$|f(x)| < M$$

dir. O halde

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| < 2M$$

yazılabilir. Böylece

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon \sum_{|\frac{k}{n} - x| \leq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} &+ 2M \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &+ 2M \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

bulunur. (2.4.2) den

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.4.5)$$

dir. Diğer taraftan

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta \Rightarrow \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 > \delta^2 \Rightarrow \frac{\left( \frac{k}{n} - x \right)^2}{\delta^2} > 1 \quad (2.4.6)$$

olup (2.4.6), (2.4.5) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \varepsilon + 2M \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \delta} \frac{\left( \frac{k}{n} - x \right)^2}{\delta^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \delta} \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\left| \frac{k}{n} - x \right| &\geq \delta \Rightarrow -\delta \geq \frac{k}{n} - x \geq \delta \\
&\Rightarrow x - \delta \geq \frac{k}{n} \geq x + \delta \\
&\Rightarrow n(x - \delta) \geq k \geq n(x + \delta) \\
&\Rightarrow n(x + \delta) \leq k \leq n(x - \delta) \\
&\Rightarrow 0 \leq k \leq n
\end{aligned}$$

( $x \in [0, 1]$  ve  $\delta$  yeterince küçük) olduğundan

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (2.4.2), (2.4.3) ve (2.4.4) den

$$\begin{aligned}
|B_n(f; x) - f(x)| &\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[ x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 \right] \\
&= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[ \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n} \right] \\
&= \varepsilon + \frac{2M}{n\delta^2} [x - x^2]
\end{aligned}$$

elde edilir.  $x \in [0, 1]$  olduğundan

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow \max\{x - x^2\} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

dür. O halde  $x \in [0, 1]$  için maksimum alınırsa

$$\|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq \varepsilon + \frac{1}{n} \frac{M}{2\delta^2}$$

bulunur. Bu ise

$$\|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olması demektir.

1953 yılında P. P. Korovkin sürekli fonksiyonların sonlu aralıkta lineer pozitif operatörlerin yardımıyla yaklaştırılmasına ilişkin aşağıdaki teoremi vermiştir. P. P. Korovkin'in kendi adıyla verilen bu teorem bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır.

**2.5 P. P. Korovkin Teoremi**  $f \in C[a, b]$  ve tüm reel eksende sınırlı

$$(|f(x)| < M_f) \tag{2.5.1}$$

olsun. Eğer  $L_n(f; x)$  lineer pozitif operatör dizisi  $\forall x \in [a, b]$  için

$$(i). \quad L_n(1; x) \rightrightarrows 1$$

$$(ii). \quad L_n(t; x) \rightrightarrows x$$

$$(iii). \quad L_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda  $[a, b]$  aralığında  $L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$  dir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \in C[a, b]$  olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından dolayı

$$|t - x| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır.  $|t - x| > \delta$  olduğunda ise (2.5.1) den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \tag{2.5.2}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$|t - x| > \delta \Rightarrow \frac{|t - x|}{\delta} > 1$$

olacağından

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{2.5.3}$$

sağlanır. (2.5.2) ve (2.5.3) den

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} |t-x| &\leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon \\ |t-x| &> \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\forall t \in \mathbb{R}$  ve  $\forall x \in [a, b]$  için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.5.4)$$

dir. Eğer (i), (ii), (iii) koşullarını sağlayan  $(L_n)$  operatör dizisinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(t); x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini de sağlandığı gösterilirse ispat tamamlanır.

Lineerlikten;

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |(L_n(1; x) - 1)|$$

yazılabilir. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$f(t) - f(x) \leq |f(t) - f(x)|$$

sağlayacağından

$$|L_n((f(t) - f(x)); x)| \leq |L_n(|f(t) - f(x)|; x)|$$

olur. Operatör pozitif ve

$$|f(t) - f(x)| \geq 0$$

olduğundan

$$|L_n(|f(t) - f(x)|; x)| = L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dir. O halde

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |(L_n(1; x) - 1)|$$

olduğu gösterilmiş olur. (2.5.1) den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |(L_n(1; x) - 1)|$$

yazılabilir. ( $L_n$ ) monoton artan olduğundan (2.5.4) ün kullanılması ile

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) + M_f |(L_n(1; x) - 1)| \quad (2.5.5)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) &= L_n(\varepsilon; x) + L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(t^2 - 2xt + x^2; x) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 \\ &\quad + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x) - x^2] \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) \\ &\quad + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Son bulunan ifadenin (2.5.5) de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon L_n(1; x) + M_f |(L_n(1; x) - 1)| \\ &\quad + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) \\ &\quad + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)] \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

elde edilir. (i), (ii), (iii) koşullarının (2.5.6) da kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

dir.

Görüldüğü gibi Korovkin teoremi bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır. Çünkü verilen operatörün sadece 1,  $t$ ,  $t^2$  ifadelerini sırasıyla 1,  $x$ ,  $x^2$  ye düzgün yakınsaması, sonlu aralıkta sürekli bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla yakınsamasını söylememize yetmektedir.

### **3. DOĞURUCU FONKSİYON İÇEREN MEYER-KÖNİG ve ZELLER TİPLİ OPERATÖRLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ**

Bu bölümde, doğurucu fonksiyon içeren Meyer-König ve Zeller operatörlerinin yaklaşım özellikleri Korovkin tipi bir teorem yardımıyla verilecektir. Burada bu operatörlerin yakınsama hızları sürekli modülü, Peetre  $K$ -fonksiyoneli ve modifiye Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır. Ayrıca bu operatörlerin  $r$ -inci basamaktan genelleşmesi ve bunların yaklaşım özellikleri verilecektir. Son olarak bu operatörlerin diferensiyel denklemlere uygulanması üzerinde durulacaktır (*Altin et al 2005*).

#### **3.1 Giriş**

1960 yılında Meyer-König ve Zeller tarafından tanımlanan

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1}, \quad 0 \leq x < 1 \quad (3.1.1)$$

operatörü Meyer-König ve Zeller operatörü olarak bilinir.

(3.1.1) de  $\frac{k}{k+n+1}$  yerine  $\frac{k}{k+n}$  alırsa, operatör Cheney and Sharma (1964) tarafından tanımlanan Bernstein kuvvet serisine döner. Bu operatörler hakkında birçok çalışma vardır. Bunlardan bazıları Müller'in (1967), Sikkema'nın (1970), Lupaş and Müller'in (1970), Becker and Nessel'in (1978), Khan'ın (1989) ve son olarak Abel'in (1995) yaptığı çalışmalarlardır.

Son zamanlarda bu operatörlerin bazı genelleştirilmesi Doğru (1998) tarafından ve Agratini (2001) tarafından incelenmiştir.

### 3.2 Operatörlerin Oluşturulması

$A, (0, 1)$  aralığında reel bir sayı ve  $0 \leq \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \leq A$  olmak üzere

$$L_n(f; x) = \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right) C_{k,n}(t) x^k \quad (3.2.1)$$

lineer pozitif operatör dizisidir. Burada  $\{h_n(x; t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  ler  $\{C_{k,n}(t)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  fonksiyon dizisi için bir doğurucu fonksiyondur. Yani,

$$h_n(x; t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,n}(t) x^k \quad (3.2.2)$$

şeklindedir. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlanınsın.

1.  $h_n(x; t) = (1 - x) h_{n+1}(x; t)$
2.  $b_n C_{k,n+1}(t) = a_{k+1,n} C_{k+1,n}(t)$
3.  $b_n \rightarrow \infty, \frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow 1$  ve  $b_n \neq 0 (\forall n \in \mathbb{N})$
4.  $C_{k,n}(t) \geq 0 (\forall t \in I \subset \mathbb{R})$
5.  $a_{k+1,n} = a_{k,n+1} + \varphi_n, |\varphi_n| \leq m < \infty$  ve  $a_{0,n} = 0$

**Uyarı 3.2.1** (3.2.1) de

$$h_n(x; t) = (1 - x)^{-n-1}, a_{k,n} = k, C_{k,n}(t) = \binom{n+k}{k} \text{ ve } b_n = n + 1$$

seçilirse  $L_n(f; x)$  operatörü

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \frac{1}{(1-x)^{-n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} \\ &= M_n(f; x) \end{aligned}$$

olup (3.1.1) ile tanımlanan MKZ operatörüne döner.

### 3.3 Korovkin Tipli Bir Teorem

$\left(\frac{x}{1+x}\right)^\nu$  ve  $\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^\nu$ , ( $\nu = 0, 1, 2$ ) test fonksiyonu içeren genel Lipschitz tipli maksimal fonksiyon uzayındaki bazı Korovkin tipli teoremler sırasıyla Gadjiev and Çakar (1999) ve Doğru (2002b) tarafından verilmiştir. Lipschitz tipli maksimal fonksiyon uzayı Lenze (1990) tarafından tanımlanmıştır. İlave olarak Doğru (2002a) ve Gadjiev and Çakar (1999) tarafından da yaklaşım özelliklerini Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleri ve onların Korovkin tipli teoremleri ile Balazs operatörlerinin genelleşmesi için hesaplanmıştır.

Bu bölümde, (3.2.1) operatörünün yaklaşım özelliklerinin araştırması  $\left(\frac{x}{1-x}\right)^\nu$ , ( $\nu = 0, 1, 2$ ) test fonksiyonları kullanılarak Korovkin tipli bir teoremle kanıtlanmıştır.

(3.2.1) de

$$s = \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}$$

denirse

$$\frac{s}{1-s} = \frac{a_{k,n}}{b_n}$$

olup bu ifadenin paydası  $k$  dan bağımsızdır.

$\omega$  sürekli modülü tipinde bir fonksiyon olsun ve aşağıdaki özelliklere sahip olsun.

a)  $\omega, [0, B]$  de negatif olmayan artan bir fonksiyondur.  $B = \frac{A}{1-A}$  dir.

b)  $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

c)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$

$H_\omega, f \in C[0, A]$  da tanımlı fonksiyonların ve aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyonlar uzayı olsun.

$$|f(s) - f(x)| \leq \omega \left( \left| \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right|, x \right); \quad x, s \in [0, A]$$

**Teorem 3.3.1**  $A_n : H_\omega \rightarrow C[0, A]$  ile tanımlı olan  $A_n$  lineer pozitif operatör dizisi ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| A_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^\nu; x \right) - \left( \frac{x}{1-x} \right)^\nu \right\|_{C[0,A]} = 0; \quad (\nu = 0, 1, 2) \quad (3.3.1)$$

olsun. O taktirde  $\forall f \in H_\omega$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_{C[0,A]} = 0$$

dir. Burada  $\|\cdot\|_{C[0,A]}$ ,  $C[0,A]$  uzayındaki supremum normudur.

**İspat:**  $f \in H_\omega$  ve  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$  olduğundan

$$\left| \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right| < \delta \text{ için } |f(s) - f(x)| < \varepsilon$$

yazılabilir.  $x, s \in [0, A]$  ve  $f \in C[0, A]$  olduğundan  $f$  sınırlıdır. O halde

$$\begin{aligned} |f(s) - f(x)| &\leq |f(s)| + |f(x)| \\ &< 2M \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\left| \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right| \geq \delta$$

iken

$$\frac{\left( \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right)^2}{\delta^2} \geq 1$$

bulunur. Buradan

$$|f(s) - f(x)| \leq \frac{2M}{\delta^2} \left( \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right)^2$$

elde edilir. O halde  $\forall x, s \in [0, A]$  için

$$|f(s) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left( \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right)^2$$

yazılabilir. O taktirde

$$\begin{aligned}
\|A_n(f) - f\|_{C[0,A]} &= \|A_n(f(s); x) - f(x) A_n(1; x)\|_{C[0,A]} \\
&= \|A_n(f(s); x) - f(x) A_n(1; x) + f(x) - f(x)\|_{C[0,A]} \\
&= \|A_n(f(s) - f(x); x) - f(x)(A_n(1; x) - 1)\|_{C[0,A]} \\
&\leq \|A_n(|f(s) - f(x)|; x)\|_{C[0,A]} + |f(x)| \|(A_n(1; x) - 1)\|_{C[0,A]} \\
&\leq \left\| A_n \left( \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left( \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right)^2; x \right) \right\|_{C[0,A]} \\
&\quad + M \|(A_n(1; x) - 1)\|_{C[0,A]} \\
&= \|A_n(\varepsilon; x)\|_{C[0,A]} + \frac{2M}{\delta^2} \left\| A_n \left( \left( \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right)^2; x \right) \right\|_{C[0,A]} \\
&\quad + M \|(A_n(1; x) - 1)\|_{C[0,A]} \\
&= \|A_n(\varepsilon; x) + \varepsilon - \varepsilon\|_{C[0,A]} + M \|(A_n(1; x) - 1)\|_{C[0,A]} \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} \left\| A_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^2; x \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2x}{1-x} A_n \left( \frac{s}{1-s}; x \right) + \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 A_n(1; x) \right\|_{C[0,A]} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon \|A_n(1; x) - 1\|_{C[0,A]} \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} \left\| A_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^2; x \right) - \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2x}{1-x} \left\{ A_n \left( \frac{s}{1-s}; x \right) - \frac{x}{1-x} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \{A_n(1; x) - 1\} \right\|_{C[0,A]} + M \|A_n(1; x) - 1\|_{C[0,A]} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar.

### 3.4 $L_n$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

(3.2.1) ile tanımlı  $L_n$  nin pozitif ve lineer olduğunu gösterelim.

$x \in [0, A]$  olduğundan bu aralıktaki her  $x$  pozitiftir. 4–üncü özellikten  $C_{k,n}(t) \geq 0$  ( $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ ) dir. O halde  $h_n(x; t) \geq 0$  dir. Aynı düşünceyle  $C_{k,n}(t) x^k$  ifadesi de

pozitiftir. O takdirde  $f \geq 0$  için  $L_n(f; x) \geq 0$  olup  $L_n$  pozitif bir operatördür.  
 $\forall f, g \in C[0, A]$  ve  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
L_n(af + bg; x) &= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} (af + bg) \left( \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) C_{k,n}(t) x^k \\
&= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ af \left( \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) \right. \\
&\quad \left. + bg \left( \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) \right\} C_{k,n}(t) x^k \\
&= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} af \left( \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) C_{k,n}(t) x^k \\
&\quad + \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} bg \left( \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) C_{k,n}(t) x^k \\
&= aL_n(f; x) + bL_n(g; x)
\end{aligned}$$

dir. O halde  $L_n$  lineerdir. Bu iki ifade  $L_n$  operatörünün bir lineer pozitif operatör olduğunu gösterir. Ayrıca (3.2.2) den

$$L_n(1; x) = 1 \tag{3.4.1}$$

dir.

**Lemma 3.4.1** (3.2.1) deki gibi tanımlanan  $L_n$  operatörü için

$$L_n\left(\frac{s}{1-s}; x\right) = \frac{x}{1-x} \tag{3.4.2}$$

dir.

**İspat:** (3.2.1) de  $f(s)$  yerine  $\frac{s}{1-s}$  alınır ve 1-inci, 2-inci ve 5-inci özellikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_n\left(\frac{s}{1-s}; x\right) &= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{b_n} C_{k,n}(t) x^k \\
&= \frac{x}{b_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n} C_{k+1,n}(t) x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{b_n h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} b_n C_{k,n+1}(t) x^k \\
&= \frac{x}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,n+1}(t) x^k \\
&= \frac{x}{1-x}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

**Lemma 3.4.2** (3.2.1) deki gibi tanımlı  $L_n$  operatörü için

$$L_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^2; x \right) = \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \frac{b_{n+1}}{b_n} + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \quad (3.4.3)$$

dir.

**İspat:**  $L_n$  operatörünün (3.2.1) ile verilen ifadesinde  $f(s) = \left( \frac{s}{1-s} \right)^2$  alınır ve 1–inci ve 5–inci özellikler göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned}
L_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^2; x \right) &= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} \right)^2 C_{k,n}(t) x^k \\
&= \frac{1}{b_n^2} \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}^2 C_{k,n}(t) x^k \\
&= \frac{1}{b_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} C_{k-1,n+1}(t) x^k \\
&= \frac{1}{b_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k-1,n+1} + \varphi_n) C_{k-1,n+1}(t) x^k \\
&= \frac{x}{b_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1,n+1} C_{k-1,n+1}(t) x^{k-1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n C_{k-1,n+1}(t) x^{k-1} \right\} \\
&= \frac{x}{b_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n+1} C_{k,n+1}(t) x^k \right. \\
&\quad \left. + \varphi_n \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,n+1}(t) x^k \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{b_n h_n(x; t)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_{n+1} C_{k-1, n+2}(t) x^k \right. \\
&\quad \left. + \varphi_n \sum_{k=0}^{\infty} C_{k, n+1}(t) x^k \right\} \\
&= \frac{x}{b_n h_n(x; t)} \left\{ x b_{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1, n+2}(t) x^{k-1} \right. \\
&\quad \left. + \varphi_n \sum_{k=0}^{\infty} C_{k, n+1}(t) x^k \right\} \\
&= x^2 \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k, n+2}(t) x^k \\
&\quad + x \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k, n+1}(t) x^k \\
&= x^2 \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{1}{(1-x)^2 h_{n+2}(x; t)} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k, n+2}(t) x^k \\
&\quad + x \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{1}{(1-x) h_{n+1}(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k, n+1}(t) x^k \\
&= \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{1}{h_{n+2}(x; t)} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k, n+2}(t) x^k \\
&\quad + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \frac{1}{h_{n+1}(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k, n+1}(t) x^k \\
&= \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \frac{b_{n+1}}{b_n} + \frac{x}{1-x} \frac{\varphi_n}{b_n}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise istenilendir.

**Teorem 3.4.1**  $\forall f \in H_\omega$  ve  $L_n$ , (3.2.1) şeklinde tanımlanan bir operatör ise, bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[0, A]} = 0$$

dir.

**İspat:** *Lemma 3.4.1, Lemma 3.4.2* ve (3.4.1) eşitliğinden dolayı ispat açıktır.

### 3.5 $L_n$ Operatörünün Yakınsama Hızı

Bu kısımda  $L_n(f)$  operatörlerinin  $f$  ye yakınsama hızı, süreklilik modülü, modifiye Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar ve Peetre  $K$ -fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır.

**Teorem 3.5.1**  $L_n$  operatörü (3.2.1) şeklinde tanımlı ve  $\forall f \in H_\omega$  ise

$$\|L_n(f) - f\|_{C[0,A]} \leq \left(1 + \sqrt{K_1}\right) \omega(f; \delta_n)$$

dir. Burada

$$K_1 = \max \left\{ \frac{A}{1-A}, \left( \frac{A}{1-A} \right)^2 \right\} \text{ ve } \delta_n = \left\{ \frac{b_{n+1}}{b_n} - 1 + \frac{\varphi_n}{b_n} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ve  $\omega(f; \delta_n)$   $f$  nin süreklilik modülü olup (2.3.1) ile tanımlandığı gibidir.

**İspat:** Bu teoremi ispatlamak için Popoviciu'nun (1935) tekniğini kullanalım.  $f \in H_\omega$ ,  $L_n$  nin lineerlik ve monotonluk özelliklerinden

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &= |L_n(f(s) - f(x); x)| \\ &\leq L_n(|f(s) - f(x)|; x) \\ &\leq L_n(\omega(f; |s-x|); x) \\ &\leq L_n\left(\omega\left(f; \left|\frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x}\right|\right); x\right) \\ &\leq L_n\left(\omega(f; \delta_n)\left(\frac{1}{\delta_n}\left|\frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x}\right| + 1\right); x\right) \\ &= \omega(f; \delta_n) L_n\left(\left(\frac{1}{\delta_n}\left|\frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x}\right| + 1\right); x\right) \\ &= \omega(f; \delta_n) \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta_n} \left|\frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x}\right| + 1\right) C_{k,n}(t) x^k \\ &= \omega(f; \delta_n) \left\{ \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,n}(t) x^k \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x}\right| C_{k,n}(t) x^k \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \frac{1}{h_n(x; t)} \right. \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right| C_{k,n}(t) x^k \left. \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum a_k b_k \leq \left( \sum (a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum (b_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanan Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
|L_n(f; x) - f(x)| &\leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right| \right. \\
&\quad \times \sqrt{\frac{C_{k,n}(t) x^k}{h_n(x; t)}} \sqrt{\frac{C_{k,n}(t) x^k}{h_n(x; t)}} \left. \right\} \\
&\leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \left[ \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \times C_{k,n}(t) x^k \left. \right]^{\frac{1}{2}} \left. \right\} \\
&= \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} (A_n(x; t))^{\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$A_n(x; t) = \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right)^2 C_{k,n}(t) x^k \quad (3.5.1)$$

dir.

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} (A_n(x; t))^{\frac{1}{2}} \right\}$$

eşitsizliğinin her iki yanının  $[0, A]$  üzerinden supremumu alırsa

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} \leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \left( \sup_{x \in [0, A]} A_n(x; t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.5.2)$$

elde edilir.  $\forall x \in [0, A]$  için (3.4.2) ve (3.4.3) den dolayı (3.5.2) eşitliği

$$\begin{aligned} A_n(x; t) &= L_n\left(\left(\frac{s}{1-s}\right)^2; x\right) - \frac{2x}{1-x}L_n\left(\frac{s}{1-s}; x\right) + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \frac{b_{n+1}}{b_n} + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} - 2 \frac{x}{1-x} \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) + \frac{x}{1-x} \frac{\varphi_n}{b_n} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının  $\forall x \in [0, A]$  için supremumu alınırsa

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, A]} A_n(x; t) &= \sup_{x \in [0, A]} \left[ \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \right] \\ &\leq K_1 \left[ \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) + \frac{\varphi_n}{b_n} \right] = K_1 \delta_n^2 \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

elde edilir. Burada

$$K_1 = \max \left\{ \frac{A}{1-A}, \left(\frac{A}{1-A}\right)^2 \right\}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \|L_n(f) - f\|_{C[0, A]} &\leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{K_1 \delta_n^2} \right\} \\ &= \left(1 + \sqrt{K_1}\right) \omega(f; \delta_n) \end{aligned}$$

bulunur ki bu ise istenilendir.

Şimdi ise  $L_n(f)$  in  $f$  e yaklaşma hızını Peetre  $K$ -fonksiyoneli yardımıyla hesapyalım.  $f$ ,  $f'$ , ve  $f''$  fonksiyonları  $C[0, A]$  da olsun.  $C^2[0, A]$  uzayındaki norm,

$$\|f\|_{C^2[0, A]} = \|f\|_{C[0, A]} + \|f'\|_{C[0, A]} + \|f''\|_{C[0, A]}$$

ile tanımlanır. Peetre  $K$ -foksiyoneli ise

$$K(f; \delta) = \inf_{g \in C^2[0, A]} \left\{ \|f - g\|_{C[0, A]} + \delta \|g\|_{C^2[0, A]} \right\} \quad (3.5.4)$$

ile tanımlanmaktadır. Burada  $f \in C[0, A]$  ise  $\lim_{\delta \rightarrow 0} K(f; \delta) = 0$  dir.

**Theorem 3.5.2**  $f \in C[0, A]$  ve  $L_n$ , (3.2.1) ile tanımlı operatör olmak üzere

$$\|L_n(f) - f\|_{C[0, A]} \leq 2K(f; \delta_n)$$

dir. Burada  $K(f; \delta_n)$ , Peetre  $K$ -fonksiyoneli ve

$$\delta_n = \left( \frac{A}{1-A} \right) \left[ \left( \frac{A}{1-A} \right) \left( \frac{b_{n+1}}{b_n} - 1 \right) + \frac{\varphi_n}{b_n} \right]$$

dir.

**İspat:** Bir  $f$  fonksiyonunun  $x = x_0$  noktasındaki Taylor açılımı

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

dir.  $g \in C^2[0, A]$  olsun. Bu durumda  $g$  fonksiyonunun  $s = x$  noktasındaki Taylor açılımı

$$g(s) = g(x) + (s - x)g'(x) + \frac{(s - x)^2}{2}g''(x)$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanına  $L_n$  operatörü uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılrsa

$$|L_n(g; x) - g(x)| \leq |L_n(s - x; x)| |g'| + \frac{1}{2} |L_n((s - x)^2; x)| |g''| \quad (3.5.5)$$

elde edilir.  $g \in C^2[0, A]$  olduğundan üç ve daha yüksek basamaktan türevleri sıfırdır.

$$\begin{aligned} 0 &\leq s \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - s \leq 1 \\ 0 &\leq x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \end{aligned}$$

sağlandığından

$$\left| \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right| = \left| \frac{s-x}{(1-s)(1-x)} \right| \geq |s-x|$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(s - x; x)| &\leq L_n(|s - x|; x) \\
&\leq L_n\left(\left|\frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x}\right|; x\right) \\
&= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right| C_{k,n}(t) x^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılsrsa

$$\begin{aligned}
|L_n(s - x; x)| &\leq \left[ \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right)^2 C_{k,n}(t) x^k \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[ L_n\left(\left(\frac{s}{1-s}\right)^2; x\right) - \frac{2x}{1-x} L_n\left(\frac{s}{1-s}; x\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 L_n(1; x) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[ \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \right]^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow |L_n(s - x; x)| &\leq \left[ \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \right]^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow 0 &\leq |L_n(s - x; x)| \leq 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\
\Rightarrow |L_n(s - x; x)| &= 0 \tag{3.5.6}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
L_n((s-x)^2; x) &\leq L_n\left(\left(\frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x}\right)^2; x\right) \\
&= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x}\right)^2 C_{k,n}(t) x^k \\
&= L_n\left(\left(\frac{s}{1-s}\right)^2; x\right) - \frac{2x}{1-x} L_n\left(\frac{s}{1-s}; x\right) \\
&\quad + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 L_n(1; x) \\
&= \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \\
\Rightarrow L_n((s-x)^2; x) &\leq \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \tag{3.5.7}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.5.5) eşitsizliğinde (3.5.6) ve (3.5.7) eşitsizlikleri kullanılır ve de her iki yanın  $[0, A]$  üzerinden maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\|L_n(g) - g\|_{C[0,A]} &\leq \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{A}{1-A}\right)^2 \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) + \frac{\varphi_n}{b_n} \left(\frac{A}{1-A}\right) \right] \|g''\|_{C[0,A]} \\
&\leq \frac{\|g\|_{C^2[0,A]}}{2} \left[ \left(\frac{A}{1-A}\right)^2 \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) + \frac{\varphi_n}{b_n} \left(\frac{A}{1-A}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
|L_n(f; x) - f(x)| &= |L_n(f; x) - L_n(g; x) + L_n(g; x) \\
&\quad - g(x) + g(x) - f(x)| \\
&\leq |L_n(f; x) - L_n(g; x)| + |f(x) - g(x)| \\
&\quad + |L_n(g; x) - g(x)| \\
&\leq L_n(|f(s) - g(s)|; x) + |f(x) - g(x)| \\
&\quad + |L_n(g; x) - g(x)|
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizliğin her iki yanının  $[0, A]$  üzerinden maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [0, A]} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq L_n \left( \max_{x \in [0, A]} |f(s) - g(s)|; x \right) \\
&\quad + \max_{x \in [0, A]} |f(x) - g(x)| \\
&\quad + \max_{x \in [0, A]} |L_n(g; x) - g(x)| \\
\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} &\leq \|f - g\|_{C[0, A]} L_n(1; x) + \|f - g\|_{C[0, A]} \\
&\quad + \|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0, A]} \\
\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} &\leq 2 \|f - g\|_{C[0, A]} \\
&\quad + \|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0, A]}
\end{aligned}$$

olur. (3.5.8) eşitsizliği bu son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} &\leq 2 \left[ \|f - g\|_{C[0, A]} + \frac{\|g\|_{C^2[0, A]}}{4} \right. \\
&\quad \left. \left[ \left( \frac{A}{1-A} \right)^2 \left( \frac{b_{n+1}}{b_n} - 1 \right) + \frac{\varphi_n}{b_n} \left( \frac{A}{1-A} \right) \right] \right] \\
&= 2 \left[ \|f - g\|_{C[0, A]} + \frac{\delta_n}{4} \|g\|_{C^2[0, A]} \right]
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

elde edilir. Burada

$$\delta_n = \left( \frac{A}{1-A} \right) \left[ \left( \frac{A}{1-A} \right) \left( \frac{b_{n+1}}{b_n} - 1 \right) + \frac{\varphi_n}{b_n} \right]$$

dir. (3.5.9) un her iki yanının  $g \in C^2[0, A]$  üzerinden infimumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} &\leq 2 \inf_{g \in C^2[0, A]} \left\{ \|f - g\|_{C[0, A]} + \frac{\delta_n}{4} \|g\|_{C^2[0, A]} \right\} \\
&= 2K(f; \delta_n)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

Şimdi ise  $L_n(f)$  nin  $f$  e yaklaşma hızını modifiye Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla inceleyelim.

Burada modifiye Lipschitz sınıfı  $\tilde{Lip}_M(\alpha)$  ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$|f(s) - f(x)| \leq M \left| \frac{s}{1-s} - \frac{x}{1-x} \right|^{\alpha} \quad (x, s \in [0, A], 0 < A < 1) \quad (3.5.10)$$

Burada

$$M > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad \text{ve} \quad f \in C[0, A]$$

dir.

$$f \in Lip_M(\alpha) \Rightarrow f \in \tilde{Lip}_M(\alpha)$$

dir. Bundan dolayı

$$Lip_M(\alpha) \subset \tilde{Lip}_M(\alpha)$$

olduğu kolayca görürlür.

**Teorem 3.5.3**  $L_n$ , (3.2.1) ile tanımlı operatör ve  $\forall f \in \tilde{Lip}_M(\alpha)$  olsun. O taktirde;

$$\|L_n(f) - f\|_{C[0, A]} \leq MK_1^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^{\alpha}$$

dir. Burada  $K_1$  ve  $\delta_n$ , Teorem 3.5.1 de tanımlandığı gibidir.

**İspat:**  $f \in \tilde{Lip}_M(\alpha)$  ve  $0 < \alpha \leq 1$  dir.  $L_n$  nin lineerlik ve monotonluk özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq L_n(|f(s) - f(x)|; x) \\ &= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right) - f(x) \right| C_{k,n}(t) x^k \\ &\leq \frac{M}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right|^{\alpha} C_{k,n}(t) x^k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanına  $p = \frac{2}{\alpha}$  ve  $q = \frac{2}{2-\alpha}$  olmak üzere

$$\sum a_k b_k \leq \left( \sum (a_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (b_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(f; x) - f(x)| &\leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right|^{\alpha} \left( \frac{C_{k,n}(t) x^k}{h_n(x; t)} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{C_{k,n}(t) x^k}{h_n(x; t)} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&\leq M \left[ \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right)^2 C_{k,n}(t) x^k \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= M (A_n(x; t))^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

bulunur. Burada

$$A_n(x; t) = \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right)^2 C_{k,n}(t) x^k$$

dir. (3.5.3) den dolayı

$$\sup_{x \in [0, A]} A_n(x; t) \leq K_1 \delta_n^2$$

olduğu dikkate alınırsa (3.5.11) eşitsizliği

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} \leq M (K_1 \delta_n^2)^{\frac{\alpha}{2}} = M K_1^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^{\alpha}$$

şekline dönüşür. Bu ise ispatı tamamlar.

### 3.6 $L_n$ Operatörünün $r$ -inci Basamaktan Genelleştirilmesi

$$L_n^{[r]}(f; x) = \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^r f^{(i)} \left( \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) \left( x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right)^i \frac{1}{i!} C_{k,n}(t) x^k \tag{3.6.1}$$

$f \in C^{[r]}[0, A]$ , ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere (3.6.1) ile tanımlanan operatöre  $L_n$  operatörünün  $r$ -inci basamaktan genelleştirilmesi denir.

Eğer (3.6.1) de  $r = 0$  alınırsa bu operatör (3.2.1) ile tanımlanan operatöre dönüşür.

**Teorem 3.6.1**  $L_n^{[r]}$  (3.6.1) ile tanımlanan operatör,  $\forall f \in C^{[r]}[0, A]$  ve  $f^{(r)} \in$

$Lip_M(\alpha)$  ise, o taktirde

$$\|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} \leq \frac{\alpha}{\alpha + r} \frac{MB(\alpha, r)}{(r-1)!} \|L_n(|s-x|^{\alpha+r}; x)\|_{C[0, A]} \quad (3.6.2)$$

dir. Burada  $B(\alpha, r)$  Beta fonksiyonu ve  $r, n \in \mathbb{N}$  dir.

**İspat:** (3.6.1) den

$$\begin{aligned} f(x) - L_n^{[r]}(f; x) &= \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ f(x) - \sum_{i=0}^r f^{(i)}\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right) \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{i!} \left(x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right)^i \right] C_{k,n}(t) x^k \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

yazılabilir. Taylor integral formülünden

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k \\ &\quad + \frac{(x - \alpha)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-z)^{r-1} [f^{(r)}(\alpha + z(x-\alpha)) - f^{(r)}(\alpha)] dz \end{aligned}$$

dir. Burada  $\alpha = \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}$  alınırsa

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{i=0}^r f^{(i)}\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right) \left(x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right)^i \frac{1}{i!} \\ = \frac{\left(x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left[ f^{(r)}\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} + t\left(x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right)\right) \right. \\ \left. - f^{(r)}\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right) \right] dt \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

bulunur.  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  olduğundan

$$\left| f^{(r)}\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} + t\left(x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}\right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \left| \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} + t \left( x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right|^{\alpha} \\
&= Mt^{\alpha} \left| x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right|^{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

yazılabilir. (3.6.5) eşitsizliği (3.6.4) de yerine konursa ve Beta fonksiyonunun

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)^{r-1} t^{\alpha} dt &= B(1+\alpha, r) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r)
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

tanımı kullanırsa bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
f(x) - \sum_{i=0}^r f^{(i)} \left( \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) \frac{1}{i!} \left( x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right)^i &= \left( x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right)^{r+\alpha} \\
&\times \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r)
\end{aligned}$$

olduğu gözönüne alınır ve her iki yanın mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{i=0}^r f^{(i)} \left( \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right) \frac{1}{i!} \left( x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right)^i \right| &\leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \\
&\times \left| x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right|^{\alpha+r}
\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

olur. (3.6.3) ve (3.6.7) eşitlikleri birlikte düşünültürse

$$\begin{aligned}
|f(x) - L_n^{[r]}(f; x)| &\leq \frac{1}{h_n(x; t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \right. \\
&\quad \times \left. \left| x - \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \right|^{r+\alpha} \right) C_{k,n}(t) x^k \\
\|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0,A]} &\leq \frac{\alpha}{\alpha+r} \frac{MB(\alpha, r)}{(r-1)!} \\
&\quad \times \|L_n(|s-x|^{\alpha+r}; x)\|_{C[0,A]}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Şimdi

$$g(s) = |s - x|^{r+\alpha} \quad (3.6.8)$$

olmak üzere  $g \in C[0, A]$  olsun. Bu durumda  $s = x$  alırsa  $g(x) = 0$  olur. *Teorem 3.6.1* in ifadesinde  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  ve  $\forall f \in C^{[r]}[0, A]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} = 0$$

dir.  $g \in Lip_{A^r}(\alpha)$  ise *Teorem 3.5.1*, *Teorem 3.5.2* ve *Teorem 3.6.1* den dolayı aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

**Sonuç 3.6.1**  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  deki  $\forall f \in C^{[r]}[0, A]$  için

$$\|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \left(1 + \sqrt{K_1}\right) \omega(g, \delta_n)$$

dir.  $K_1$  ve  $\delta_n$ , *Teorem 3.5.1* de ve  $g$  ise (3.6.8) de tanımlandıkları gibidirler.

**Sonuç 3.6.2**  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  deki  $\forall f \in C^{[r]}[0, A]$  için

$$\|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, A]} \leq \frac{MA^r}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) K_1^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha$$

dir.  $K_1$  ve  $\delta_n$ , *Teorem 3.5.1* de tanımlandığı gibidir.

$\delta_n$  ifadesi *Teorem 3.5.1*, *Sonuç 3.5.1* ve *Sonuç 3.5.2* deki ile aynı olduğundan bu sonuçlarda geçerli olmaktadır. Bu yüzden son iki sonuç  $\{L_n^{[r]}(f; x)\}$  operatör dizisinin sırasıyla sürekli modülü ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla yakınsama hızını vermektedir.

### 3.7 $L_n$ Operatörünün Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

Bu kısımda öncelikle genel çözümü  $L_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^\nu; x \right)$ , ( $\nu = 0, 1, 2$ ) nin ifadesini içeren Riccati diferensiyel denklemi verilecektir.

$y_1, y_2, y_3$  gibi üç özel çözümü bilinen Riccati diferensiyel denkleminin genel çözümünün

$$\frac{(y - y_1)(y_3 - y_2)}{(y - y_2)(y_3 - y_1)} = c \quad (c \text{ sabit}) \quad (3.7.1)$$

olduğu bilinmektedir.

$$y_\nu(x) = L_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^{\nu-1}; x \right), \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

olmak üzere Riccati denkleminin genel çözümü aşağıdaki teoremlle verilebilir.

### Teorem 3.7.1

$$y' + p_n(x)y^2 + q_n(x)y + r_n(x) = 0$$

Riccati diferensiyel denklemi olmak üzere, bu denklem

$$\frac{(y - L_n(1; x)) \left( L_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^2; x \right) - L_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right); x \right) \right)}{\left( y - L_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right); x \right) \right) \left( L_n \left( \left( \frac{s}{1-s} \right)^2; x \right) - L_n(1; x) \right)} = c$$

gibi bir çözüme sahiptir. Burada  $c$  bir sabit  $p_n, q_n$  ve  $r_n$  ise

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \left( \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{\varphi_n}{b_n(1-x)^2} - \frac{2b_{n+1}x}{b_n(1-x)^3} + \frac{b_{n+1}x^2}{b_n(1-x)^4} \right) / \\ &\quad \left( \frac{x}{1-x} - \frac{\varphi_n}{b_n(1-x)} - \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 - \frac{b_{n+1}x^2}{b_n(1-x)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_n^2x^2}{b_n^2(1-x)^2} + \frac{\varphi_nx^3}{b_n(1-x)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2b_{n+1}\varphi_nx^3}{b_n^2(1-x)^3} - \frac{\varphi_n^2x^3}{b_n^2(1-x)^3} + \frac{b_{n+1}x^4}{b_n(1-x)^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_{n+1}x^4}{b_n^2(1-x)^4} - \frac{2b_{n+1}\varphi_nx^4}{b_n^2(1-x)^4} - \frac{b_{n+1}^2x^5}{b_n^2(1-x)^5} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_n(x) = & \left( -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{\varphi_n}{b_n(1-x)^2} + \frac{2\varphi_{n+1}x}{b_n(1-x)^3} - \frac{\varphi_n x^2}{b_n(1-x)^4} \right. \\
& + \frac{\varphi_n^2 x^2}{b_n^2(1-x)^4} - \frac{2b_{n+1}x^3}{b_n(1-x)^5} + \frac{2b_{n+1}\varphi_n x^3}{b_n^2(1-x)^5} + \frac{b_{n+1}^2 x^4}{b_n^2(1-x)^6} \Big) / \\
& \left( \frac{x}{1-x} - \frac{\varphi_n x}{b_n(1-x)} - \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 - \frac{b_{n+1}x^2}{b_n(1-x)^2} \right. \\
& + \frac{\varphi_n^2 x^2}{b_n^2(1-x)^2} + \frac{\varphi_n x^3}{b_n(1-x)^3} \\
& + \frac{2b_{n+1}\varphi_n x^3}{b_n^2(1-x)^3} - \frac{\varphi_n^2 x^3}{b_n^2(1-x)^3} + \frac{b_{n+1}x^4}{b_n(1-x)^4} \\
& \left. + \frac{b_{n+1}^2 x^4}{b_n^2(1-x)^4} - \frac{2b_{n+1}\varphi_n x^4}{b_n^2(1-x)^4} - \frac{b_{n+1}^2 x^5}{b_n^2(1-x)^5} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_n(x) = & \left( -\frac{b_{n+1}x^2}{b_n(1-x)^4} + \frac{\varphi_n x^2}{b_n(1-x)^4} - \frac{\varphi_n^2 x^2}{b_n^2(1-x)^4} \right. \\
& + \frac{2b_{n+1}x^3}{b_n(1-x)^5} - \frac{2b_{n+1}\varphi_n x^3}{b_n^2(1-x)^5} - \frac{b_{n+1}^2 x^4}{b_n^2(1-x)^6} \Big) / \\
& \left( \frac{x}{1-x} - \frac{\varphi_n x}{b_n(1-x)} - \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 - \frac{b_{n+1}x^2}{b_n(1-x)^2} \right. \\
& + \frac{\varphi_n^2 x^2}{b_n^2(1-x)^2} + \frac{\varphi_n x^3}{b_n(1-x)^3} \\
& + \frac{2b_{n+1}\varphi_n x^3}{b_n^2(1-x)^3} - \frac{\varphi_n^2 x^3}{b_n^2(1-x)^3} + \frac{b_{n+1}x^4}{b_n(1-x)^4} \\
& \left. + \frac{b_{n+1}^2 x^4}{b_n^2(1-x)^4} - \frac{2b_{n+1}\varphi_n x^4}{b_n^2(1-x)^4} - \frac{b_{n+1}^2 x^5}{b_n^2(1-x)^5} \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu katsayılar bilgisayarda Mathematica programı ile hesaplanmıştır.

Şimdi aşağıdaki operatörü gözönüne alalım.

$$L_n^*(f; x) = \frac{1}{h_n(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}\right) C_{k,n}(t) x^k \quad (3.7.2)$$

(3.2.1) ile tanımlanan  $L_n(f; x)$  operatöründe  $a_{n,k} = k$  alındığında (3.7.2) ile tanımlanan  $L_n^*(f; x)$  operatörü elde edilir.

**Teorem 3.7.2**  $\{h_n(x, t)\}$  doğurucu fonksiyon dizisi

$$\frac{\partial}{\partial x} \{h_n(x, t)\} = K_n(x) h_n(x, t) \quad (3.7.3)$$

özellikine sahip olsun.  $\forall x \in [0, A]$  ve  $f \in H_\omega$  ise bu taktirde,

$$x \frac{\partial}{\partial x} L_n^*(f; x) = -x K_n(x) L_n^*(f; x) + b_n L_n^*(fg; x) \quad (3.7.4)$$

dir. Burada  $g(s) = \frac{s}{1-s}$  ( $\forall s \in [0, A]$ ) ile tanımlı bir fonksiyon ve  $K_n(x)$  herhangi bir fonksiyon dizisidir.

**İspat:** (3.7.2) nin her iki yanının  $x$ 'e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} L_n^*(f; x) &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x} \{h_n(x, t)\}}{(h_n(x, t))^2} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}\right) C_{k,n}(t) x^k \\ &\quad + \frac{1}{h_n(x, t)} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}\right) C_{k,n}(t) k x^{k-1} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanı  $x$  ile çarpılır,  $\frac{k}{b_n} = g\left(\frac{k}{k+b_n}\right)$  ve (3.7.3) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} x \frac{\partial}{\partial x} L_n^*(f; x) &= -\frac{x K_n(x)}{h_n(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}\right) C_{k,n}(t) x^k \\ &\quad + \frac{b_n}{h_n(x, t)} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}\right) g\left(\frac{k}{k+b_n}\right) C_{k,n}(t) x^k \\ &= -x K_n(x) L_n^*(f; x) + b_n L_n^*(fg; x) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

## 4. DOĞURUCU FONKSİYONLARIN BELİRLİ SINIFINI İÇEREN POZİTİF OPERATÖRLER

Bu bölümde doğruncu fonksiyon içeren lineer pozitif operatörler dizisinin genel hali verilmiştir. Bu operatörlerin yaklaşım özellikleri Korovkin teoremi yardımıyla verilmiştir. Bu operatörlerin yakınsama hızı süreklilik modülü, Peetre  $K$ -fonksiyoneli ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanmıştır. Ayrıca bu operatörlerin  $r$ -inci basamaktan genelleştirilmesi verilmiştir. Son olarak bu operatörlerin diferensiyel denklemlere uygulanması üzerinde durulmuştur (*Doğru et al 2004*).

### 4.1 Giriş

$x \in [0, 1)$  ve  $t \in (-\infty, 0]$  olmak üzere

$$L_n(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanan  $L_n(f)$  operatörünü göz önüne alalım. Burada  $\{F_n(x; t)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$F_n(x; t) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \quad (4.1.2)$$

şeklinde tanımlı olup,  $\left\{C_v^{(n)}(t)\right\}_{v \in \mathbb{N}_0}$  fonksiyon dizisi için doğruncu fonksiyondur ve  $\forall t \in (-\infty, 0]$  için  $C_v^{(n)}(t) \geq 0$  dir. Aşağıdaki şartlar sağlanınsın.

- 1°  $F_{n+1}(x; t) = p(x) F_n(x; t)$ ,  $p(x) < M < \infty$ ,  $x \in [0, 1)$
- 2°  $AtC_{v-1}^{(n+1)}(t) = a_n(v) C_{v-1}^{(n)}(t) - v C_v^{(n)}(t)$ ,  $A \in [0, a]$ ,  $v \in \mathbb{Z}^-$  için  $C_v^{(n)}(t) = 0$
- 3°  $\max\{v, n\} \leq a_n(v) \leq a_n(v+1)$

**Uyarı 4.1.1** (4.1.1) ile tanımlı  $L_n$  operatörü aşağıdaki bazı özel seçimler altında çok iyi bilinen bazı operatörlere dönüştürmektedir.

$$a_n(v) = v + n, \quad C_v^{(n)}(t) = L_v^{(n)}(t) \quad \text{ve} \quad F_n(x; t) = (1-x)^{-n-1} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right)$$

$\left( L_v^{(n)}(t) \text{ Laguerre polinomudur} \right)$  seçilirse, Cheney ve Sharma tarafından verilen

$$P_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) L_v^{(n)}(t) x^v$$

elde edilir. Burada

$$(1-x)^{-n-1} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} L_v^{(n)}(t) x^v$$

olup,  $(1-x)^{-n-1} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right)$ ,  $L_v^{(n)}(t)$  ile tanımlanan Laguerre polinomlarının doğruluğu fonksiyonudur.

Bir önceki şartlarda  $a_n(v) = v + n + 1$  alınır ve diğer şartlar aynı şekilde alınırsa (4.1.1) operatörü Khan (1989) tarafından verilen

$$Z_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) L_v^{(n)}(t) x^v$$

operatörü elde edilir.

$$L_n^k(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!} t^r$$

olduğundan  $t = 0$  alınırsa

$$\begin{aligned} L_n^k(0) &= (-1)^0 \frac{(n+k)!}{(n-0)!(k+0)!0!} t^0 + 0 \\ &\Rightarrow L_n^k(0) = \frac{(n+k)!}{(n)!(k)!} \\ &= \binom{n+k}{k} \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde  $P_n(f; x)$  de  $t = 0$  alınırsa

$$M_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{n+v}{v} x^v$$

bulunur. Bu ise Cheney and Sharma (1964) tarafından verilen Bernstein kuvvet serisidir.

Benzer düşüncenle  $Z_n(f; x)$  de  $t = 0$  alınırsa

$$Z_n(f; x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{n+v}{v} x^v$$

bulunur. Bu ise Meyer-König ve Zeller (1960) tarafından verilen MKZ operatörüdür.

$$F_n(x; t) = e^{nx}, \quad a_n(v) = n \text{ ve } C_v^{(n)}(t) = \frac{n^v}{v!}$$

seçilmesiyle (4.1.1) operatörü

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{n}\right) \frac{(nx)^v}{v!}$$

operatörüne dönüşür. Bu ise Szasz tarafından 1950 yılında verilmiş Szasz-Mirakyan operatörüdür.

$$F_n(x; t) = e^{h(n)x}, \quad a_n(v) = h(n) \text{ ve } C_v^{(n)}(t) = \frac{(h(n))^v}{v!}$$

seçilmesi ise

$$S_n(f; x) = e^{-h(n)x} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{h(n)}\right) \frac{(h(n)x)^v}{v!}$$

operatörüne dönüşür. Bu operatör ise Doğru (2002b) tarafından verilmiştir.

## 4.2 $L_n$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

$x \in [0, 1]$ ,  $t \in (-\infty, 0]$  ve  $b \in (0, 1)$  olsun.  $L_n$  operatörünün yakınsaklılığı için aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 4.2.1**  $f$ ,  $[0, b]$  de sürekli,  $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$  ise  $L_n(f; x)$  operatörü  $f(x)$  fonksiyonu  $[0, b]$  aralığında düzgün yakınsaktır.

**İspat:** Bu teoremi ispatlamak için Kesim 2.5 de verilen Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığını göstermek yeterlidir. Bunun için önce  $L_n$  operatörünün lineer

pozitif bir operatör olduğunu ispatlayalım. (4.1.1) ile tanımlı  $L_n$  operatöründe  $f$  yerine  $af + bg$  alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
L_n(af + bg; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} (af + bg) \left( \frac{v}{a_n(v)} \right) C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[ af \left( \frac{v}{a_n(v)} \right) + bg \left( \frac{v}{a_n(v)} \right) \right] C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= a \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f \left( \frac{v}{a_n(v)} \right) C_v^{(n)}(t) x^v \\
&\quad + b \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} g \left( \frac{v}{a_n(v)} \right) C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= aL_n(f; x) + bL_n(g; x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise  $L_n$  operatörünün lineer olduğunu gösterir.

$$x \in [0, 1], \quad C_v^{(n)}(t) \geq 0 \quad (t \in (-\infty, 0]) \quad \text{ve} \quad F_n(x; t) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v$$

olduğundan  $F_n(x; t) \geq 0$  dir. Bunlar (4.1.1) de birlikte düşünülsürse  $f \geq 0$  için  $L_n(f; x) \geq 0$  olduğu görülür. Bu ise  $L_n$  operatörünün pozitif olduğunu gösterir. (4.1.1) de  $f(s) = 1$  alınır ve (4.1.2) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
L_n(1; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= \frac{1}{F_n(x; t)} F_n(x; t) = 1 \\
\Rightarrow L_n(1; x) &= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de (4.1.1) de  $f(s) = s$  alalım. 2-inci özellik ve (4.1.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_n(s; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{a_n(v)} C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left( a_n(v) C_{v-1}^{(n)}(t) - At C_{v-1}^{(n+1)}(t) \right) \frac{x^v}{a_n(v)} \\
&= \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ C_{v-1}^{(n)}(t) - \frac{At}{a_n(v)} C_{v-1}^{(n+1)}(t) \right\} x^{v-1} \quad (4.2.1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{Atx}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{a_n(v+1)} C_v^{(n+1)}(t) x^v \leq 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} L_n(s; x) &\geq \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} C_{v-1}^{(n)}(t) x^{v-1} \\ &= \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= x \\ \Rightarrow L_n(s; x) &\geq x \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

elde edilir.

3-üncü özellik kullanırsa,  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{a_n(v+1)}$  dir. Sonuç olarak (4.2.1) den

$$\begin{aligned} L_n(s; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} C_{v-1}^{(n)}(t) x^v - \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{C_{v-1}^{(n+1)}(t) x^v}{a_n(v)} \\ &= \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v - \frac{Atx}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{C_v^{(n+1)}(t) x^v}{a_n(v+1)} \\ &\leq x - \frac{Atx}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{C_v^{(n+1)}(t) x^v}{n} \\ &= x - \frac{Atxp(x)}{n} \frac{1}{F_{n+1}(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\ &= x - \frac{Atxp(x)}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$L_n(s; x) \leq x - \frac{Atxp(x)}{n}$$

dir. Son eşitsizlik ve (4.2.2) den ise

$$\begin{aligned} x &\leq L_n(s; x) \leq x - \frac{Atxp(x)}{n} \\ 0 &\leq L_n(s; x) - x \leq -\frac{Atxp(x)}{n} \\ \Rightarrow |L_n(s; x) - x| &\leq -\frac{Atxp(x)}{n} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

bulunur. Her iki tarafın  $x \in [0, b]$  üzerinden maksimumu alınırsa

$$\|L_n(s; x) - x\|_{C[0, b]} \leq \frac{a |t| b M}{n} \quad (4.2.4)$$

elde edilir. Buradan da  $[0, b]$  de

$$L_n(s; x) \rightrightarrows x$$

olduğu görülür.

Son olarak (4.1.1) de  $f(s) = s^2$  alınırsa

$$L_n(s^2; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left( \frac{v}{a_n(v)} \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v$$

elde edilir. 2-inci özellik iki kez kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left( \frac{v}{a_n(v)} \right)^2 C_v^{(n)}(t) &= \frac{v}{(a_n(v))^2} \left( a_n(v) C_{v-1}^{(n)}(t) - At C_{v-1}^{(n+1)}(t) \right) \\ &= \frac{v C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{(v-1+1) C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{(v-1) C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} + \frac{C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{\left( a_n(v-1) C_{v-2}^{(n)}(t) - At C_{v-2}^{(n+1)}(t) \right)}{a_n(v)} + \frac{C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} \\ &\quad - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{a_n(v-1) C_{v-2}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At C_{v-2}^{(n+1)}(t)}{a_n(v)} + \frac{C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} \\ &\quad - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
|L_n(s^2; x) - x^2| &\leq \left[ \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{a_n(v-1)}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n)}(t) x^v - x^2 \right] \\
&+ \left| \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n+1)}(t) x^v \right| \\
&+ \left| \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-1}^{(n)}(t) x^v \right| \\
&+ \left| \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(a_n(v))^2} C_{v-1}^{(n+1)}(t) x^v \right|
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

olarak elde edilir. 3-üncü özellikten dolayı da

$$\frac{v+1}{(a_n(v+1))^2} \leq \frac{v+1}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

bulunur. (4.2.5) de ki dört ayrı parçayı, ayrı ayrı hesaplayalım. (4.1.2) den

$$\begin{aligned}
\left| \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(a_n(v))^2} C_{v-1}^{(n+1)}(t) x^v \right| &\leq \frac{a|t|x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v+1}{(a_n(v+1))^2} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\
&\leq \frac{p(x)}{n F_{n+1}(x; t)} a|t|x \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\
&= \frac{a|t|x p(x)}{n}
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Benzer olarak  $\frac{1}{a_n(v+2)} \leq \frac{1}{n}$  olduğu ve (4.1.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\left| \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n+1)}(t) x^v \right| &\leq \frac{a|t|x^2}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{a_n(v+2)} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\
&\leq \frac{a|t|x^2}{n F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\
&\leq \frac{a|t|x^2 p(x)}{n} \frac{1}{F_{n+1}(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\
&= \frac{a|t|x^2 p(x)}{n}
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

elde edilir. Yine benzer olarak  $\frac{1}{a_n(v+1)} \leq \frac{1}{n}$  olduğu ve (4.1.2) birlikte dikkate alımlırsa

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-1}^{(n)}(t) x^v \right| &\leq \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{a_n(v+1)} C_v^{(n)}(t) x^v \\
&\leq \frac{x}{n F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= \frac{x}{n}
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

elde edilir. Son olarak  $a_n(v-1) \leq a_n(v)$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{a_n(v-1)}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n)}(t) x^v - x^2 &\leq \frac{x^2}{F_n(x; t)} \sum_{v=2}^{\infty} C_{v-2}^{(n)}(t) x^v - x^2 \\
&= x^2 - x^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$s^2 = (s-x+x)^2 = (s-x)^2 + 2xs - x^2$$

eşitliği kullanılırsa

$$L_n(s^2; x) - x^2 = L_n((s-x)^2; x) + 2xL_n((s-x); x)$$

yazılabilir. (4.2.2) eşitsizliğinden ve  $L_n$  operatörünün pozitifliğinden

$$L_n(s^2; x) - x^2 \geq 0$$

dır. Sonuç olarak (4.2.6), (4.2.7), (4.2.8) ve (4.2.9) dan

$$\begin{aligned}
\|L_n(s^2; x) - x^2\|_{C[0, b]} &\leq \frac{a|t|bM}{n} + \frac{a|t|b^2M}{n} + \frac{b}{n} \\
&= \frac{1}{n}(b + a|t|bM(1+b))
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

yazılabilir. Teoremin hipotezinden dolayı

$$L_n(s^2; x) \rightrightarrows x^2$$

elde edilir. Bunlar ise Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığını gösterir.

### 4.3 $L_n$ Operatörünün Yakınsama Hızı

Bu bölümde  $L_n(f)$  operatörlerinin  $f$  ye yakınsama hızı süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar ve Peetre  $K$ -fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır.

**Teorem 4.3.1**  $L_n$  operatörü (4.1.1) şeklinde tanımlı ve  $\forall f \in C[0, b]$  ise

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq \left(1 + \sqrt{3B}\right) \omega(f; \delta_n)$$

dir. Burada

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad B = \max \{b, bMa|t|, b^2 Ma|t|\}$$

ve  $\omega(f; \delta_n)$ ,  $f$  fonksiyonunun süreklilik modülü olup (2.3.1) de tanımlandığı gibidir.

**İspat:**  $f \in C[0, b]$  olsun.  $L_n$  operatörünün lineerlik ve monotonluk özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq L_n(|f(s) - f(x)|; x) \\ &\leq L_n\left(\omega(f; \delta_n)\left(\frac{|s-x|}{\delta_n} + 1\right); x\right) \\ &= \omega(f; \delta_n) L_n\left(\left(\frac{|s-x|}{\delta_n} + 1\right); x\right) \\ &= \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left|\frac{v}{a_n(v)} - x\right| C_v^{(n)}(t) x^v\right)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{v}{a_n(v)} - x \right| \sqrt{\frac{C_v^{(n)}(t) x^v}{F_n(x; t)}} \sqrt{\frac{C_v^{(n)}(t) x^v}{F_n(x; t)}} \\ & \leq \left[ \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left( \frac{v}{a_n(v)} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \right]^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow & |L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} (A_n(x; t))^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$A_n(x; t) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left( \frac{v}{a_n(v)} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \quad (4.3.1)$$

olup yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanının  $x \in [0, b]$  üzerinden supremumu alınırsa

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [0, b]} |L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \left( \sup_{x \in [0, b]} A_n(x; t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \Rightarrow & \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \left( \sup_{x \in [0, b]} A_n(x; t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4.3.2) \end{aligned}$$

olur.  $\forall x \in [0, b]$  için (4.3.2) eşitliği

$$\begin{aligned} A_n(x; t) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{v}{a_n(v)} \right)^2 - 2x \left( \frac{v}{a_n(v)} \right) + x^2 \right] C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= L_n(s^2; x) - 2x L_n(s; x) + x^2 L_n(1; x) + x^2 - x^2 \\ &= L_n(s^2; x) - x^2 - 2x (L_n(s; x) - x) \\ &\leq |L_n(s^2; x) - x^2| + 2x |L_n(s; x) - x| \end{aligned}$$

şekline dönüşür. (4.2.4) ve (4.2.10) eşitsizlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, b]} A_n(x; t) &\leq \|L_n(s^2; x) - x^2\|_{C[0, b]} + 2b \|L_n(s; x) - x\|_{C[0, b]} \\ &\leq \frac{1}{n} (b + a|t|bM(1+b)) + \frac{2a|t|b^2M}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} (b + a|t|bM(1+3b)) \\
&\leq 3B\delta_n^2
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

bulunur. Burada

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ve } B = \max \{b, bMa|t|, b^2Ma|t|\}$$

dir. (4.3.3) eşitsizliği (4.3.2) de yerine konursa

$$\begin{aligned}
\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} &\leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{3B\delta_n^2} \right\} \\
&= \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \sqrt{3B} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur ki bu ise istenilendir.

Şimdi de  $L_n(f)$  in  $f$  e yaklaşma hızını Peetre  $K$ -fonksiyoneli yardımıyla hesapyalım.  $f, f', f''$  fonksiyonları  $C[0, b]$  de olsun.  $C^2[0, b]$  uzayındaki norm

$$\|f\|_{C^2[0,b]} := \|f\|_{C[0,b]} + \|f'\|_{C[0,b]} + \|f''\|_{C[0,b]}$$

olarak tanımlamıştır. Peetre  $K$ -fonksiyoneli ise

$$K(f, \delta_n) = \inf_{g \in C^2[0,b]} \left\{ \|f - g\|_{C[0,b]} + \delta_n \|g\|_{C^2[0,b]} \right\}$$

ile tanımlanmaktadır.

**Teorem 4.3.2**  $L_n$  operatörü (4.1.1) ile tanımlanan operatör ve  $f \in C[0, b]$  ise

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq 2K(f, \delta_n)$$

dir. Burada

$$\delta_n = \frac{b + a|t|bM(3 + 3b)}{4n}$$

dir ve  $n \rightarrow \infty$  için  $\delta_n \rightarrow 0$  dir.

**İspat:**  $g \in C^2[0, b]$  olsun. Taylor açılımından  $g(s)$  fonksiyonu  $s = x$  noktasında Taylor serisine açılırsa

$$g(s) = g(x) + \frac{g'(x)}{1!}(s-x) + \frac{g''(x)}{2!}(s-x)^2 + 0$$

$$\Rightarrow g(s) - g(x) = \frac{g'(x)}{1!}(s-x) + \frac{g''(x)}{2!}(s-x)^2$$

elde edilir. Her iki yana  $L_n$  operatörü uygulanırsa

$$\Rightarrow |L_n(g; x) - g(x)| = |g'(x)| |L_n((s-x); x)| + \frac{1}{2} |g''(x)| |L_n((s-x)^2; x)| \quad (4.3.4)$$

bulunur. (4.2.4) den

$$|L_n(s-x; x)| \leq \frac{bMa|t|}{n}$$

olur ve

$$\begin{aligned} |L_n((s-x)^2; x)| &= |L_n(s^2 - 2xs + x^2 - 2x^2 + 2x^2; x)| \\ &= |L_n(s^2 - x^2; x) - 2xL_n(s-x; x)| \\ &\leq |L_n(s^2; x) - x^2| + 2b|L_n(s; x) - x| \\ &\leq \frac{1}{n}(b + a|t|bM(1+b)) + \frac{2a|t|b^2M}{n} \\ &= \frac{1}{n}(b + a|t|bM(1+3b)) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.4) den

$$\begin{aligned} \|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0,b]} &\leq \frac{a|t|bM}{n} \|g'\|_{C[0,b]} + \frac{1}{2n}(b + a|t|bM(1+3b)) \|g''\|_{C[0,b]} \\ &\leq \frac{1}{2n}(b + a|t|bM(3+3b)) \|g\|_{C^2[0,b]} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan,  $L_n$  lineer operatör olduğundan

$$|L_n(f; x) - f(x)| = |L_n(f; x) - L_n(g; x) + L_n(g; x) - g(x) + g(x) - f(x)|$$

$$\begin{aligned} &\leq |L_n(f - g; x)| + |g(x) - f(x)| + |L_n(g; x) - g(x)| \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

bulunur. (4.3.6) nn her iki tarafın  $[0, b]$  üzerinden maksimumu alır ve  $L_n(1; x) = 1$  olduğu kullanırsa

$$\begin{aligned} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} &\leq \|f - g\|_{C[0,b]} L_n(1; x) + \|f - g\|_{C[0,b]} \\ &\quad + \|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0,b]} \\ &= 2 \|f - g\|_{C[0,b]} + \|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0,b]} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} |L_n(f(s); x)| &\leq L_n(|f(s)|; x) \leq L_n\left(\max_{x \in [0, b]} |f(s)|; x\right) \\ &\leq \max_{x \in [0, b]} |f(s)| L_n(1; x) \\ &= \|f\|_{C[0,b]} \end{aligned}$$

olduğu kullanılmıştır. Şimdi (4.3.7) de (4.3.5) kullanırsa

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq 2 \left[ \|f - g\|_{C[0,b]} + \frac{1}{4n} (b + a|t|bM(3 + 3b)) \|g\|_{C^2[0,b]} \right] \quad (4.3.8)$$

yazılabilir.  $\delta_n = \frac{b + a|t|bM(3 + 3b)}{4n}$  seçilirse ve  $g \in C^2[0, b]$  üzerinden her iki tarafın infimumu alınırsa

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq 2K(f, \delta_n)$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi  $L_n$  lineer pozitif operatörünün yakınsama hızı  $Lip_M(\alpha)$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) Lipschitz sınıfı anlamında verilsin.  $Lip_M(\alpha)$  sınıfına ait  $f \in C[0, b]$  fonksiyonu

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha, \quad (t, x \in [0, b]) \quad (4.3.9)$$

eşitsizliğini sağlar.

**Teorem 4.3.3**  $\forall f \in Lip_M(\alpha)$  için

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq M (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha$$

dir. Burada  $B$  ve  $\delta_n$ , Teorem 4.3.1 de tanımlandığı gibidir.

**İspat:**  $f \in Lip_M(\alpha)$  ve  $0 < \alpha \leq 1$  olsun. (4.3.9) ve  $L_n$  operatörünün lineerlik ve monotonluk özelliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq L_n(|f(s) - f(x)|; x) \\ &\leq \frac{M}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{v}{a_n(v)} - x \right|^\alpha C_v^{(n)}(t) x^v \end{aligned}$$

olur.  $p = \frac{2}{\alpha}$  ve  $q = \frac{2}{2-\alpha}$  olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq M \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{v}{a_n(v)} - x \right|^\alpha \left( \frac{C_v^{(n)}(t) x^v}{F_n(x; t)} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{C_v^{(n)}(t) x^v}{F_n(x; t)} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\ &\leq M \left[ \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left( \frac{v}{a_n(v)} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= M (A_n(x; t))^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

elde edilir. Burada  $A_n(x; t)$ , (4.3.1) deki gibidir. (4.3.3) ile (4.3.10) kullanırsak

$$\begin{aligned} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} &\leq M (3B \delta_n^2)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= M (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

#### 4.4 $L_n$ Operatörünün $r$ -inci Basamaktan Genelleştirilmesi

$$L_n^{[r]}(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{i=0}^r f^{(i)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \frac{\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^i}{i!} C_v^{(n)}(t) x^v \quad (4.4.1)$$

$f \in C^r [0, b]$ , ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere (4.4.1) ile tanımlanan operatöre  $L_n$  operatörünün  $r$ -inci basamaktan genelleştirilmesi denir.

Eğer (4.4.1) de  $r = 0$  alınırsa bu operatör (4.1.1) ile tanımlanan operatöre döner.

**Teorem 4.4.1**  $L_n^{[r]}$ , (4.4.1) ile tanımlanan operatör,  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  ve  $\forall f \in C^r [0, b]$  ise, o takdirde

$$\|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \|L_n(|s-x|^{\alpha+r}; x)\|_{C[0,b]} \quad (4.4.2)$$

dir. Burada  $B(\alpha, r)$  Beta fonksiyonu ve  $r, n \in \mathbb{N}$  dir.

**İspat:** (4.4.1) den

$$f(x) - L_n^{[r]}(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[ f(x) - \sum_{i=0}^r f^{(i)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \frac{\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^i}{i!} \right] C_v^{(n)}(t) x^v \quad (4.4.3)$$

yazılabilir. Taylor integral formülünden

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (x-\alpha)^k + \frac{(x-\alpha)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-z)^{(r-1)} [f^{(r)}(\alpha + z(x-\alpha)) - f^{(r)}(\alpha)] dz \quad (4.4.4)$$

dir. Burada  $\alpha = \frac{v}{a_n(v)}$  alınırsa

$$\begin{aligned} & f(x) - \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right)}{i!} \left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^i \\ &= \frac{\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{(r-1)} f^{(r)}\left(\frac{v}{a_n(v)} + t\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) dt \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

bulunur.  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| f^{(r)}\left(\frac{v}{a_n(v)} + t\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right| \\ & \leq M \left| \frac{v}{a_n(v)} + t\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right) - \left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right|^\alpha \\ & = Mt^\alpha \left| x - \frac{v}{a_n(v)} \right|^\alpha \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

yazılabilir. (4.4.6) eşitsizliği (4.4.5) de yerine yazılır ve Beta fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$\int_0^1 (1-t)^{(r-1)} t^\alpha dt = \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r)$$

elde edilir. (4.4.6) ve (4.4.5) eşitlikleri, (4.4.4) de kullanılırsa

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right)}{i!} \left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^i \right| \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \left| x - \frac{v}{a_n(v)} \right|^{\alpha+r} \quad (4.4.7)$$

bulunur. Bu son eşitsizlik (4.4.3) de gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} |f(x) - L_n^{[r]}(f; x)| & \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left| x - \frac{v}{a_n(v)} \right|^{r+\alpha} C_v^{(n)}(t) x^v \\ & = \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) L_n(|s-x|^{\alpha+r}; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede her iki tarafın önce mutlak değeri alınır sonra ise  $[0, b]$  üzerinden maksimumu alınırsa

$$\Rightarrow \|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \|L_n(|s-x|^{\alpha+r}; x)\|_{C[0,b]}$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

Şimdi

$$g(s) = |s-x|^{r+\alpha} \quad (4.4.8)$$

olmak üzere  $g \in C[0, b]$  olsun.  $g(x) = 0$  olduğundan Teorem 4.2.1 den  $L_n(f; x)$  operatörü  $f(x)$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığı için  $L_n(g; x)$  operatörü ise  $g(x)$  e

düzungün yakınsar. O taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(g; x)\|_{C[0, b]} = 0$$

olur. *Teorem 4.4.1* den  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  deki  $\forall f \in C^r[0, b]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \|L_n(g; x)\|_{C[0, b]} = 0$$

bulunur. *Teorem 4.3.1* ve *Teorem 4.3.3* de  $M = b^r$  olduğu düşünülür ve  $g \in Lip_{b^r}(\alpha)$  dikkate alınırsa *Teorem 4.4.1* in sonucu olarak aşağıdaki sonuçlar verebilir.

**Sonuç 4.4.1**  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  ve  $f \in C^{[r]}[0, b]$  ise, o taktirde

$$\|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \left(1 + \sqrt{3B}\right) \omega(g; \delta_n)$$

dir. Burada  $\delta_n$ , *Teorem 4.3.1* de ve  $g$  ise (4.4.8) de tanımlandıkları gibidirler.

**İspat:**  $g(x) = 0$  olduğu için

$$\begin{aligned} |L_n(g(s); x)| &\leq L_n(|g(s) - g(x)|; x) \\ &\leq L_n\left(\omega(g; \delta_n) \left(1 + \frac{|s-x|}{\delta_n}\right); x\right) \\ &= \omega(g; \delta_n) L_n\left(1 + \frac{|s-x|}{\delta_n}; x\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. *Teorem 4.3.1* deki ile aynı işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} \|L_n(g(s); x)\|_{C[0, b]} &= \|L_n(g(s) - g(x); x)\|_{C[0, b]} \\ &\leq \left(1 + \sqrt{3B}\right) \omega(g; \delta_n) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik (4.4.2) de yazılırsa

$$\|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \left(1 + \sqrt{3B}\right) \omega(g; \delta_n)$$

olur.

**Sonuç 4.4.2**  $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$  ve  $f \in C^r[0, b]$  ise, o taktirde

$$\|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, b]} \leq \frac{Mb^r}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha$$

dir. Burada  $\delta_n$ , *Teorem 4.3.1* de tanımlandığı gibidir.

**İspat:** Benzer şekilde  $g(x) = 0$  olduğundan

$$|L_n(g(s); x)| \leq L_n(|g(s) - g(x)|; x)$$

yazılabilir. Geriye kalan işlemler için *Teorem 4.3.3* deki işlemlerin aynısı uygulanırsa

$$\|L_n(g(s); x)\|_{C[0, b]} \leq M (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha$$

olarak bulunur. Bu son eşitsizlik (4.4.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|L_n^{[r]}(f; x) - f(x)\|_{C[0, b]} &\leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) M (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha \\ &\leq \frac{Mb^r}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha \end{aligned}$$

olur.

Bu iki sonuç  $\left\{L_n^{[r]}(f; x)\right\}$  dizisinin yakınsaklık hızını sırasıyla, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfının elemanları yardımıyla vermektedir.

#### 4.5 $L_n$ Operatörünün Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

$$L_n^*(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+b_n}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \quad (4.5.1)$$

operatörü verilsin. Burada  $b_n \leq b_{n+1}$  dir.

(4.1.1) ile tanımlanan  $L_n(f; x)$  operatöründe  $a_n(v) = v + b_n$  alındığında  $L_n^*(f; x)$  operatörü elde edilir.

Bu kesimde  $L_n^*$  operatörünün diferensiyel denklemlere uygulanması üzerinde durulacaktır.

**Teorem 4.5.1.**  $\{F_n(x; t)\}$  doğurucu fonksiyon dizisi

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_n(x; t)\} = K_n(x) F_n(x; t) \quad (4.5.2)$$

özellikine sahip olsun.  $\forall x \in [0, b]$  ve  $f \in C[0, b]$  ise bu taktirde,

$$x \frac{d}{dx} L_n^*(f; x) = -x K_n(x) L_n^*(f; x) + b_n L_n^*(fg; x) \quad (4.5.3)$$

dir. Burada  $g(s) = \frac{s}{1-s}$  ile tanımlı bir fonksiyon ve  $K_n(x)$  herhangi bir fonksiyon dizisidir.

**İspat:** (4.5.1) in her iki yanının  $x$ 'e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_n^*(f; x) &= \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(F_n(x; t))}{F_n^2(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+b_n}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+b_n}\right) C_v^{(n)}(t) v x^{v-1} \end{aligned}$$

olur. Burada

$$g\left(\frac{v}{v+b_n}\right) = \frac{\frac{v}{v+b_n}}{1 - \frac{v}{v+b_n}} = \frac{v}{b_n}$$

olduğu ve (4.5.2) eşitliği kullanılrsa

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} L_n^*(f; x) &= \frac{-x K_n(x)}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+b_n}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{b_n}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+b_n}\right) g\left(\frac{v}{v+b_n}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.5.1) kullanılırsa

$$x \frac{d}{dx} L_n^*(f; x) = -x K_n(x) L_n^*(f; x) + b_n L_n^*(fg; x)$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

**Uyarı 4.5.1** (4.5.3),  $L_n^*(f; x)$  için bir diferensiyel denklem değildir. Daha çok bir fonksiyonel diferensiyel denklemdir.

## 5. KATLI DOĞURUCU FONKSİYON İÇEREN İKİ DEĞİŞKENLİ MKZ OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu kısımda Volkov tipli teorem yardımıyla katlı doğurucu fonksiyon içeren iki değişkenli MKZ operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelenecaktır. Bu opartörlerin yakınsama hızları süreklilik modülü ve modifiye Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır. Son kısımda bu operatörün kısmi diferensiyel denklemle uygulanması üzerinde durulacaktır (*Tasdelen and Ercan 2007*).

### 5.1 Giriş

$[0, 1]$  aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon  $f$  olmak üzere sırasıyla Meyer-König and Zeller (1960) tarafından tanımlanan MKZ operatörü ve Cheney and Sharma (1964) tarafından tanımlanan Bernstein kuvvet serisi aşağıdaki gibidir.

$$M_n(f; x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k \quad (5.1.1)$$

$$M_n^*(f; x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) \binom{n+k}{k} x^k \quad (5.1.2)$$

Son zamanlarda bu operatörlerle ilgili bazı genelleştirmeler Gupta, Doğru, Abel, Agratini ve Ivan tarafından verilmiştir. Doğru (1998) MKZ operatörünü içeren genelleştirilmiş lineer pozitif operatör dizisini tanımlamıştır ve bu operatörün bazı yaklaşım özelliklerini vermiştir. Agratini (2001), Doğru'nun yaptığı çalışmada bulunan diziyi içeren başka bir genelleştirilmiş lineer pozitif operatör dizisi tanımlamıştır. Bu kısımda doğurucu fonksiyon içeren

$$L_{n,m}(f; x, y) = \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}, \frac{c_{l,m}}{c_{l,m} + d_m}\right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \quad (5.1.3)$$

şeklinde tanımlanan  $L_{n,m}(f; x, y)$  iki değişkenli lineer pozitif operatör dizisi ele alı-

nacaktır. Burada

$$0 \leq \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \leq A \text{ ve } 0 \leq \frac{c_{l,m}}{c_{l,m} + d_m} \leq B; \quad A, B \in (0, 1)$$

dir. Ayrıca

$$\psi_{n,m}(x, y, s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l$$

ve

$$\Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) \geq 0 \quad (\forall (s, t) \in D^2 \subset \mathbb{R}^2)$$

dir. Burada  $\{\psi_{n,m}(x, y, s, t)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  fonksiyonuna,  $\{\Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t)\}_{k,l \in \mathbb{N}_0}$  fonksiyonu için bir doğrucu fonksiyon denir.

Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlanınsın.

1.  $\psi_{n,m}(x, y, s, t) = (1 - x) \psi_{n+1,m}(x, y, s, t)$
2.  $a_{k+1,n} \Gamma_{k+1,l}^{n,m}(s, t) = b_n \Gamma_{k,l}^{n+1,m}(s, t)$
3.  $a_{k+1,n} = a_{k,n+1} + \varphi_n$ ,  $|\varphi_n| \leq n_1 < \infty$  ve  $a_{0,n} = 0$
4.  $b_n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow 1$  ve  $b_n \neq 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )
5.  $\psi_{n,m}(x, y, s, t) = (1 - y) \psi_{n,m+1}(x, y, s, t)$
6.  $c_{l+1,m} \Gamma_{k,l+1}^{n,m}(s, t) = d_m \Gamma_{k,l}^{n,m+1}(s, t)$
7.  $c_{l+1,m} = c_{l,m+1} + \phi_m$ ,  $|\phi_m| \leq m_1 < \infty$  ve  $c_{0,m} = 0$
8.  $d_m \rightarrow \infty$ ,  $\frac{d_{m+1}}{d_m} \rightarrow 1$  ve  $d_m \neq 0$  ( $\forall m \in \mathbb{N}$ )

**Uyarı 5.1.1** (5.1.3) ile tanımlı  $L_{n,m}$  operatörü bazı özel seçimler altında aşağıdaki operatörlere dönüştürmektedir.

**Durum 1** Eğer;

- a)  $\psi_{n,m}(x, y, s, t) = h_n(x, t) h_m(y, s)$
- b)  $\Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) = C_{k,n}(t) C_{l,m}(s)$

almırsa (5.1.3) ile tanımlı  $L_{n,m}$  operatörü, (3.2.1) ile verilen operatörün iki değişkenli bir genişlemesi olur. Ayrıca

$$c) \quad f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

almırsa

$$L_{n,m}(f; x, y) = L_n(f_1; x) L_m(f_2; y)$$

bulunur.

**Durum 2** Eğer;

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(x, y, s, t) &= (1-x)^{-n-1} (1-y)^{-m-1}, \quad \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) = \binom{n+k}{k} \binom{l+m}{m}, \\ a_{k,n} &= k, \quad b_n = n+1, \quad c_{l,m} = l \text{ ve } d_m = m+1 \end{aligned}$$

seçilirse Durum1 in bir sonucu olarak (5.1.3) ile verilen operatör, iki değişkenli MKZ operatörüne döner.

**Durum 3** Eğer, (c) deki özel durum alınır ve  $\psi_{n,m}(x, y, s, t)$ ,  $\Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t)$ ,  $a_{k,n}$ ,  $b_n$  ve  $c_{l,m}$  Durum 2 deki gibi seçilir ve de  $d_m = m$  alırsa

$$L_{n,m}(f; x, y) = M_n(f_1; x) M_m^*(f_2; y)$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi  $L_{n,m}(f; x, y)$  operatörü (5.1.1) ve (5.1.2) de tanımlanan operatörlerin çarpımı şeklindedir.

## 5.2 $L_{n,m}$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde

$$\begin{aligned} f_0(u, v) &= 1, \quad f_1(u, v) = \frac{u}{1-u}, \quad f_2(u, v) = \frac{v}{1-v} \\ f_3(u, v) &= \left(\frac{u}{1-u}\right)^2 + \left(\frac{v}{1-v}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

test fonksiyonları yardımıyla  $L_{n,m}$  operatörünün yaklaşım özelliklerini incelenecektir.

$$u = \frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n} \text{ ve } v = \frac{c_{l,m}}{c_{l,m} + d_m}$$

almırsa

$$\frac{u}{1-u} = \frac{a_{k,n}}{b_n} \text{ ve } \frac{v}{1-v} = \frac{c_{l,m}}{d_m}$$

olup paydaları sırasıyla  $k$  ve  $l$  den bağımsız olurlar.

$[0, A] \times [0, B] = I^2$  ve  $H_\omega(I^2)$  gerçek değerli fonksiyon uzayı olmak üzere  $f \in C(I^2)$  olsun.

$$\left| \left( \frac{u}{1-u}, \frac{v}{1-v} \right) - \left( \frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-y} \right) \right| = \left( \left( \frac{u}{1-u} - \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{v}{1-v} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere,  $\delta > 0$  için iki değişkenli  $f$  fonksiyonunun sürekli modülü

$$\omega(f, \delta) = \sup \{ |f(u, v) - f(x, y)| : (u, v), (x, y) \in I^2, |(u, v) - (x, y)| < \delta \}$$

dir. Burada

$$|f(u, v) - f(x, y)| \leq \omega \left( f, \left| \left( \frac{u}{1-u}, \frac{v}{1-v} \right) - \left( \frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-y} \right) \right| \right) \quad (5.2.2)$$

dir. Süreklik modülünün bilinen özelliklerinden

(i)  $\omega(f, \delta)$ , negatif olmayan artan

(ii)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0$

dir. Ayrıca  $\forall (u, v) \in I^2$  için

$$\begin{aligned} |f(u, v) - f(x, y)| &\leq \omega(f, |(u, v) - (x, y)|) \\ &= \omega \left( f, |(u, v) - (x, y)| \frac{\delta}{\delta} \right) \\ &\leq \left( 1 + \frac{|(u, v) - (x, y)|}{\delta} \right) \omega(f, \delta) \end{aligned}$$

özellikî kullanılırsa

$$|f(u, v) - f(x, y)| \leq \omega(f, \delta) \left(1 + \frac{|(u, v) - (x, y)|}{\delta}\right) \quad (5.2.3)$$

sağlanır.

$(x, y) \in I^2$  olmak üzere  $L_{n,m}(f(u, v); x, y)$  lineer pozitif operatörü  $L_{n,m}(f; x, y)$  ile gösterilecektir.

İki değişkenli lineer pozitif operatörler için Korovkin teoreminin bir genelleştirilmesi Korovkin (1960) tarafından ve Volkov (1957) tarafından verilmiştir.  $H_\omega(I^2)$  den  $C(I^2)$  ye tanımlı (5.2.1) deki gibi tanımlı iki değişkenli  $L_{n,m}(f; x, y)$  operatörünün yaklaşım özelliklerini Volkov tipli bir teorem ile verilecektir.

**Teorem 5.2.1**  $H_\omega(I^2)$  den  $C(I^2)$  ye tanımlı  $A_{n,m}$  lineer pozitif operatör dizileri aşağıdaki şartları sağlaması.

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|A_{n,m}(f_i; x, y) - f_i(x, y)\|_{C(I^2)} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (5.2.4)$$

Bu taktirde  $\forall f \in H_\omega(I^2)$  için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|A_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(I^2)} = 0$$

dir. Burada  $f_0, f_1, f_2$  ve  $f_3$ , (5.2.1) de tanımlandıkları gibidirler. Ayrıca  $\|\cdot\|_{C(I^2)}$ ,  $C(I^2)$  uzayındaki supremum normunu belirtmektedir.

**İspat:**  $f \in H_\omega(I^2)$  olsun.  $H_\omega(I^2)$  nin tanımındaki (ii) özelliği kullanılırsa

$$\left( \left( \frac{u}{1-u} - \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{v}{1-v} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \delta \text{ için } |f(u, v) - f(x, y)| < \varepsilon$$

yazılabilir. Burada

$$(u, v), (x, y) \in I^2 \text{ ve } f \in C(I^2)$$

olduğundan bir  $M$  sabiti vardır. Bu durumda

$$|f(u, v) - f(x, y)| \leq |f(u, v)| + |f(x, y)| < M + M = 2M$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\left( \left( \frac{u}{1-u} - \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{v}{1-v} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \delta$$

olduğunda

$$\left( \frac{u}{1-u} - \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{v}{1-v} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \geq \delta^2$$

dir. Buradan

$$|f(u, v) - f(x, y)| < \frac{2M}{\delta^2} \left[ \left( \frac{u}{1-u} - \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{v}{1-v} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right]$$

yazılabilir. O halde  $\forall (u, v), (x, y) \in I^2$  ve  $f \in C(I^2)$  için

$$|f(u, v) - f(x, y)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[ \left( \frac{u}{1-u} - \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{v}{1-v} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right] \quad (5.2.5)$$

yazılabilir.  $A_{n,m}$  operatörünün lineerlik ve pozitiflik özellikleri ve de (5.2.5) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & |A_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \\ &= |A_{n,m}(f(u, v) - f(x, y) + f(x, y); x, y) - f(x, y)| \\ &= A_{n,m}(f(u, v) - f(x, y); x, y) - f(x, y)(A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y)) \\ &\leq |A_{n,m}(f(u, v) - f(x, y); x, y)| + |f(x, y)| |(A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y))| \\ &\leq A_{n,m}(|f(u, v) - f(x, y)|; x, y) + |f(x, y)| |(A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y))| \\ &\leq A_{n,m} \left( \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[ \left( \frac{u}{1-u} - \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{v}{1-v} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right]; x, y \right) \\ &\quad + |f(x, y)| |(A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y))| \\ &= \varepsilon A_{n,m}(f_0; x, y) + \frac{2M}{\delta^2} [A_{n,m}(f_3; x, y) - \frac{2x}{1-x} A_{n,m}(f_1; x, y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 A_{n,m}(f_0; x, y) \\
& - \frac{2y}{1-y} A_{n,m}(f_2; x, y) + \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 A_{n,m}(f_0; x, y) \Big] \\
& + |f(x, y)| |(A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y))| \\
= & \varepsilon [A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y)] + \varepsilon \\
& + \frac{2M}{\delta^2} \left\{ [A_{n,m}(f_3; x, y) - f_3(x, y)] + \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \right. \\
& + \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 - \frac{2x}{1-x} [A_{n,m}(f_1; x, y) - f_1(x, y)] \\
& + \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 [A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y)] \\
& - 2 \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 [A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y)] \\
& - 2 \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 + \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 - \frac{2y}{1-y} [A_{n,m}(f_2; x, y) - f_2(x, y)] \\
& \left. + \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 \right\} + M |A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y)| \\
\leq & \left( \varepsilon + M + \left[ \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 + \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 \right] \frac{2M}{\delta^2} \right) \\
& \times |A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y)| \\
& + \frac{2x}{1-x} \frac{2M}{\delta^2} |A_{n,m}(f_1; x, y) - f_1(x, y)| + \varepsilon \\
& + \frac{2y}{1-y} \frac{2M}{\delta^2} |A_{n,m}(f_2; x, y) - f_2(x, y)| \\
& + \frac{2M}{\delta^2} |A_{n,m}(f_3; x, y) - f_3(x, y)| \\
\leq & \varepsilon + \left( \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} \right) |A_{n,m}(f_0; x, y) - f_0(x, y)| \\
& + \frac{4M}{\delta^2} |A_{n,m}(f_1; x, y) - f_1(x, y)| \\
& + \frac{4M}{\delta^2} |A_{n,m}(f_2; x, y) - f_2(x, y)| \\
& + \frac{2M}{\delta^2} |A_{n,m}(f_3; x, y) - f_3(x, y)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitsizlikte her iki yanın  $(x, y) \in I^2$  üzerinden supremumu alınır ve (5.2.4) ile verilen şartlar göz önüne alınırsa istenilen elde edilir.

**Theorem 5.2.2**  $L_{n,m}$ , (5.1.4) ile tanımlı operatör ve  $\forall f \in H_\omega(I^2)$  ise o taktirde

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(I^2)} = 0$$

dir.

**İspat:** Bu teoremi ispatlamak için  $f \in H_\omega(I^2)$  olmak üzere

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f_i; x, y) - f_i(x, y)\|_{C(I^2)} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (5.2.6)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Burada  $f_0, f_1, f_2$  ve  $f_3$  fonksiyonları (5.2.1) de tanımladıkları gibidirler.  $L_{n,m}$  operatörünün (5.1.3) ile verilen ifadesinde  $f(u, v) = f_0$  alınırsa

$$L_{n,m}(f_0; x, y) = \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l = 1 \quad (5.2.7)$$

elde edilir. Şimdi  $L_{n,m}$  operatörünün (5.1.3) ile verilen ifadesinde  $f(u, v) = f_1$  alınır ve 1–inci–3–üncü özellikler göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned} L_{n,m}(f_1; x, y) &= \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{b_n} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\ &= \frac{1}{b_n} \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,n} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\ &= \frac{x}{b_n} \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+1,n} \Gamma_{k+1,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\ &= \frac{x}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n+1,m}(s, t) x^k y^l \\ &= \frac{x}{(1-x) \psi_{n+1,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n+1,m}(s, t) x^k y^l \\ &= \frac{x}{1-x} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

bulunur. Benzer şekilde  $L_{n,m}$  operatörünün (5.1.3) ile verilen ifadesinde  $f(u, v) = f_2$

alır, 5-inci ve 7-inci özellikler dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
L_{n,m}(f_2; x, y) &= \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_{l,m}}{d_m} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{1}{d_m} \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{l,m} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{y}{d_m} \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{l+1,m} \Gamma_{k,l+1}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{y}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n,m+1}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{y}{(1-y) \psi_{n,m+1}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n,m+1}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{y}{1-y} \tag{5.2.9}
\end{aligned}$$

olur. Son olarak  $L_{n,m}$  operatörünün (5.1.3) ile verilen ifadesinde  $f(u, v) = f_3$  alınır ve 1-inci–8-inci özellikler göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned}
L_{n,m}(f_3; x, y) &= \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} \right)^2 + \left( \frac{c_{l,m}}{d_m} \right)^2 \right] \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} \right)^2 \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&\quad + \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{c_{l,m}}{d_m} \right)^2 \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{x}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{a_{k+1,n}}{b_n} \right)^2 \Gamma_{k+1,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&\quad + \frac{y}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{c_{l+1,m}}{d_m} \right)^2 \Gamma_{k,l+1}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{x}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{k+1,n}}{b_n} \Gamma_{k,l}^{n+1,m}(s, t) x^k y^l \\
&\quad + \frac{y}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_{l+1,m}}{d_m} \Gamma_{k,l}^{n,m+1}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{x}{b_n \psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,n+1} \Gamma_{k,l}^{n+1,m}(s, t) x^k y^l \\
&\quad + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n+1,m}(s, t) x^k y^l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y}{d_m} \frac{1}{\psi_{n,m}(x,y,s,t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{l,m+1} \Gamma_{k,l}^{n,m+1}(s,t) x^k y^l \\
& + \frac{\phi_m}{d_m} \frac{y}{\psi_{n,m}(x,y,s,t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n,m+1}(s,t) x^k y^l \\
= & \frac{x^2}{b_n} \frac{1}{\psi_{n,m}(x,y,s,t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+1,n+1} \Gamma_{k+1,l}^{n+1,m}(s,t) x^k y^l + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \\
& + \frac{y^2}{d_m} \frac{1}{\psi_{n,m}(x,y,s,t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{l+1,m+1} \Gamma_{k,l+1}^{n,m+1}(s,t) x^k y^l + \frac{\phi_m}{d_m} \frac{y}{1-y} \\
= & \frac{x^2}{b_n (1-x)^2} \frac{1}{\psi_{n+2,m}(x,y,s,t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{n+1} \Gamma_{k,l}^{n+2,m}(s,t) x^k y^l + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} \\
& + \frac{y^2}{d_m (1-y)^2} \frac{1}{\psi_{n,m+2}(x,y,s,t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} d_{m+1} \Gamma_{k,l}^{n,m+2}(s,t) x^k y^l + \frac{\phi_m}{d_m} \frac{y}{1-y} \\
L_{n,m}(f_3; x, y) = & \frac{b_{n+1}}{b_n} \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 + \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} + \frac{d_{m+1}}{d_m} \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 + \frac{\phi_m}{d_m} \frac{y}{1-y} \quad (5.2.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.2.7), (5.2.8), (5.2.9) ve (5.2.10) eşitliklerinden (5.2.6) koşullarının gerçekleştiği görülür. Bu koşullar ise Teorem 5.2.1'in hipotezlerini verir. Bu ise ispatı tamamlar.

### 5.3 $L_{n,m}$ Operatörünün Yakınsama Hızı

Bu bölümde  $L_{n,m}(f; x, y)$  operatörünün  $f(x, y)$  ye yakınsama hızı, sürekli modülü ve modifiye Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla verilecektir.

**Teorem 5.3.1**  $L_{n,m}$ , (5.1.4) ile tanımlı operatör ve  $\forall f \in H_\omega(I^2)$  ise o taktirde

$$\|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(I^2)} \leq (1 + \sqrt{K}) \omega(f, \delta_{nm})$$

dir. Burada

$$K = \text{maks} \left\{ \frac{A}{1-A}, \frac{B}{1-B}, \left( \frac{A}{1-A} \right)^2, \left( \frac{B}{1-B} \right)^2 \right\}$$

ve

$$\delta_{nm} = \left( \frac{b_{n+1}}{b_n} + \frac{\varphi_n}{b_n} + \frac{d_{m+1}}{d_m} - 2 + \frac{\phi_m}{d_m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir.

**İspat:**  $L_{n,m}$  operatörünün lineerlik ve monotonluk özelliklerinden ve de (5.2.3) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &= |L_{n,m}(f(u, v) - f(x, y); x, y)| \\
&\leq L_{n,m}(|f(u, v) - f(x, y)|; x, y) \\
&= \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{a_{k,n}}{a_{k,n} + b_n}, \frac{c_{l,m}}{c_{l,m} + d_m}\right) - f(x, y) \right| \\
&\quad \times \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&\leq \frac{\omega(f, \delta_{nm})}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{nm}} \left( \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{c_{l,m}}{d_m} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&\quad + \frac{\omega(f, \delta_{nm})}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&= \frac{\omega(f, \delta_{nm})}{\delta_{nm}} \left[ \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{c_{l,m}}{d_m} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \right] + \omega(f, \delta_{nm})
\end{aligned}$$

bulunur. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \frac{\omega(f, \delta_{nm})}{\delta_{nm}} \left[ \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \left( \frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{c_{l,m}}{d_m} - \frac{y}{1-y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \right]^{\frac{1}{2}} + \omega(f, \delta_{nm})
\end{aligned}$$

elde edilir. *Teorem 5.2.2* kullanırsa

$$\begin{aligned}
|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \frac{\omega(f, \delta_{nm})}{\delta_{nm}} \left[ \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} + \frac{b_{n+1}}{b_n} \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 + \frac{\phi_m}{d_m} \frac{y}{1-y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_{m+1}}{d_m} \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 - \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 - \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \omega(f, \delta_{nm}) \\
&= \frac{\omega(f, \delta_{nm})}{\delta_{nm}} \left[ \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} + \left( \frac{b_{n+1}}{b_n} - 1 \right) \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\phi_m}{d_m} \frac{y}{1-y} + \left( \frac{d_{m+1}}{d_m} - 1 \right) \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \omega(f, \delta_{nm})
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki yanın  $\forall (x, y) \in I^2$  için supremumu alınır ve

$$K = \max \left\{ \frac{A}{1-A}, \frac{B}{1-B}, \left( \frac{A}{1-A} \right)^2, \left( \frac{B}{1-B} \right)^2 \right\}$$

ve de

$$\delta_{nm} = \left( \frac{b_{n+1}}{b_n} + \frac{\varphi_n}{b_n} + \frac{d_{m+1}}{d_m} - 2 + \frac{\phi_m}{d_m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

oldukları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(I^2)} &\leq \left( 1 + \frac{1}{\delta_{nm}} (\sqrt{K} \delta_{nm}) \right) \omega(f, \delta_{nm}) \\
&= (\sqrt{K}) \omega(f, \delta_{nm})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Şimdi ise  $L_{n,m}$  lineer pozitif operatörünün yakınsama hızı,  $0 < \alpha \leq 1$  için modifiye Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla verilecektir. Bu sınıf  $\tilde{Lip}_M(\alpha)$  ile gösterilecektir. İki değişkenli fonksiyonlar için modifiye Lipschitz sınıfının tanımı Altın *et al* (2005) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$0 < \alpha \leq 1$  ve  $\tilde{Lip}_M(\alpha)$  ise

$$|f(u, v) - f(x, y)| \leq M \left| \left( \frac{u}{1-u}, \frac{v}{1-v} \right) - \left( \frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-y} \right) \right|^{\alpha} \quad (5.3.1)$$

dir. Burada

$$(x, y), (u, v) \in I^2, M > 0 \text{ ve } f \in C(I^2)$$

dir.

**Theorem 5.3.2**  $L_{n,m}$ , (5.1.4) ile tanımlı operatör ve  $\forall f \in \tilde{Lip}_M(\alpha)$  ise

$$\|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(I^2)} \leq MK^{\frac{\alpha}{2}}\delta_{nm}^{\alpha}$$

dir. Burada  $K$  ve  $\delta_{nm}$ , Theorem 5.3.1 de tanımlandıkları gibidirler.

**İspat:**  $f \in \tilde{Lip}_M(\alpha)$  olsun.  $L_{n,m}$  nin lineerlik ve monotonluk özelliklerinden ve de (5.3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &= |L_{n,m}(f(u, v) - f(x, y); x, y)| \\ &\leq L_{n,m}(|f(u, v) - f(x, y)|; x, y) \\ &\leq L_{n,m}\left(M\left|\left(\frac{u}{1-u}, \frac{v}{1-v}\right) - \left(\frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-y}\right)\right|^{\alpha}; x, y\right) \\ &= \frac{M}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \left(\frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{c_{l,m}}{d_m} - \frac{y}{1-y}\right)^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\quad \times \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \end{aligned}$$

elde edilir.  $p = \frac{2}{\alpha}$  ve  $q = \frac{2}{2-\alpha}$  olmak üzere yukarıdaki eşitsizlikte Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq M \left[ \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \left(\frac{a_{k,n}}{b_n} - \frac{x}{1-x}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{c_{l,m}}{d_m} - \frac{y}{1-y}\right)^2 \right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \right]^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Theorem 5.2.2 kullanılırsa

$$|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \leq M \left[ \frac{\varphi_n}{b_n} \frac{x}{1-x} + \left( \frac{b_{n+1}}{b_n} - 1 \right) \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{\phi_m}{d_m} \frac{y}{1-y} + \left( \frac{d_{m+1}}{d_m} - 1 \right) \left( \frac{y}{1-y} \right)^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir. Her iki yanın  $(x, y) \in I^2$  için supremumu alınır ve  $K$  ve  $\delta_{nm}$ , *Teorem 5.3.1* de tanımlandığı gibi seçilirse

$$\begin{aligned} \|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(I^2)} &\leq M(K\delta_{nm}^2)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= MK^{\frac{\alpha}{2}}\delta_{nm}^{\alpha} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

#### 5.4 $L_{n,m}$ Operatörünün Kısmı Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

$$L_{n,m}^*(f; x, y) = \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m}\right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \quad (5.4.1)$$

operatörünü göz önüne alalım. (5.1.4) ile tanımlanan  $L_{n,m}$  operatöründe  $a_{k,n} = k$  ve  $c_{l,m} = l$  alındığında  $L_{n,m}^*$  operatörü elde edilir.

**Teorem 5.4.1**  $\psi_{n,m}(x, y, s, t)$  doğrulucu fonksiyon dizisi

$$\frac{\partial}{\partial x} (\psi_{n,m}(x, y, s, t)) = K_n(x) \psi_{n,m}(x, y, s, t) \quad (5.4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\psi_{n,m}(x, y, s, t)) = H_m(y) \psi_{n,m}(x, y, s, t) \quad (5.4.3)$$

özelliklerine sahip olsun.  $\forall (x, y) \in I^2$  ve  $f \in H_\omega(I^2)$  ise bu taktirde,

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{b_n} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{d_m} \frac{\partial}{\partial y} \right) L_{n,m}^*(f; x, y) &= - \left( \frac{x}{b_n} K_n(x) + \frac{y}{d_m} H_m(y) \right) L_{n,m}^*(f; x, y) \\ &\quad + L_{n,m}^*(fg; x, y) \end{aligned}$$

dir. Burada  $g(u, v) = \frac{u}{1-u} + \frac{v}{1-v}$  ve  $K_n(x)$  ve  $H_m(y)$  herhangi iki fonksiyon dizileridir.

**İspat:** (5.4.1) in her iki yanının  $x$ 'e göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} L_{n,m}^*(f; x, y) &= -\frac{K_n(x)\psi_{n,m}(x, y, s, t)}{\psi_{n,m}^2(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m}\right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\ &\quad + \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m}\right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) k x^{k-1} y^l\end{aligned}$$

dir. Her iki taraf  $\frac{x}{b_n}$  ile çarpılırsa ve (5.4.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{x}{b_n} \frac{\partial}{\partial x} L_{n,m}^*(f; x, y) &= -\frac{x}{b_n} K_n(x) L_{n,m}^*(f; x, y) \\ &\quad + \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{b_n} f\left(\frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m}\right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l\end{aligned}\tag{5.4.4}$$

bulunur. Şimdi benzer olarak (5.4.1) in her iki yanının  $y$ 'ye göre kısmi türevi almır ve (5.4.3) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} L_{n,m}^*(f; x, y) &= -H_m(y) L_{n,m}^*(f; x, y) \\ &\quad + \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m}\right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k l y^{l-1}\end{aligned}$$

olur. Her iki taraf  $\frac{y}{d_m}$  ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}\frac{y}{d_m} \frac{\partial}{\partial y} L_{n,m}^*(f; x, y) &= -\frac{y}{d_m} H_m(y) L_{n,m}^*(f; x, y) \\ &\quad + \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{d_m} f\left(\frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m}\right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l\end{aligned}\tag{5.4.5}$$

elde edilir. (5.4.4) ve (5.4.5) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa ve de

$$\left(\frac{k}{b_n} + \frac{l}{d_m}\right) = g\left(\frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m}\right)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\left( \frac{x}{b_n} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{d_m} \frac{\partial}{\partial y} \right) L_{n,m}^*(f; x, y) &= - \left( \frac{x}{b_n} K_n(x) + \frac{y}{d_m} H_m(y) \right) L_{n,m}^*(f; x, y) \\
&\quad + \frac{1}{\psi_{n,m}(x, y, s, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( f \left( \frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m} \right) \right. \\
&\quad \left. g \left( \frac{k}{k+b_n}, \frac{l}{l+d_m} \right) \right) \Gamma_{k,l}^{n,m}(s, t) x^k y^l \\
&= - \left( \frac{x}{b_n} K_n(x) + \frac{y}{d_m} H_m(y) \right) L_{n,m}^*(f; x, y) \\
&\quad + L_{n,m}^*(fg; x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

## KAYNAKLAR

- Abel, U. 1995. The moments for the Meyer-König and Zeller operators. *J. Approx. Theory*, 82; 352-361.
- Agratini, O. 2001. Korovkin type error estimates for Meyer-König and Zeller operators. *Math. Inequal. Appl.*, 4; 119-126.
- Altın, A., Doğru, O. and Taşdelen, F. 2005. The generalization of Meyer-König and Zeller operators by generating functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 312; 181-194.
- Becker, M. and Nessel, R. J. 1978. A global approximation theorem for Meyer-König and Zeller operators. *Math. Z.*, 160; 195-206.
- Cheney, E. W. and Sharma, A. 1964. Bernstein power series. *Canad. J. Math.*, 16; 241-253.
- Doğru, O. 1998. Approximation order and asymptotic approximation for generalized Meyer-König and Zeller operators. *Math. Balkanica.*, 12; 359-368.
- Doğru, O. 2002a. On Bleimann, Butzer and Hahn type generalization of Balazs operators, Dedicated to Professor D. D. Stancu on His 75th Birthday. *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* 47; 37-45.
- Doğru, O. 2002b. Weighted approximation properties of Szasz-type operators. *Intern. Math. J.*, 2(9); 889-895.
- Doğru, O., Özarslan, M. A. and Taşdelen, F. 2004. On positive operators involving a certain class of generating functions. *Studia Scientiarum Math. Hungaria*, 41(4); 415-429.
- Gadjiev, A. D. and Çakar, Ö. 1999. On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semi-axis. *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. Tech. Math., Sci.* 19; 21-26.
- Khan, M. K. 1989. On the rate of converge of Bernstein power series for functions of bounded variation, *J. Approx. Theory*, 57; 90-103.
- Kirov, G. and Popova, L. 1993. A genaralization of the linear positive operators. *Math. Balkanica (N.S.)*, 7 no.2; 149-162.
- Korovkin, P. P. 1960. Linear operators and approximation theory. Hindustan Publishing Co., Delhi.

- Lenze, B. 1990. Bernstein-Baskakov-Kantorovich operators and Lipschitz-type maximal functions. *Approx. Th.*, Kecskemet, Hungary, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai., 58; 469-496.
- Lupaş, A. and Müller, M. W. 1970. Approximation properties of the  $M_n$ -operators. *Aequationes Math.*, 5; 19-37.
- Meyer-König, W. and Zeller, K. 1960. Bernsteinsche potenzreihen. *Studia Math.*, 19; 89-94.
- Müller, M. W. 1967. Die folge der gammaoperatoren. Dissertation, Stuttgart.
- Popoviciu, T. 1935. Sur l'approximation Des Functions Convexes D'ordre Supérieur. *Mathematica (Cluj)*, 10; 49-54.
- Sikkema, P. C. 1970. On the asymptotic approximation with operators of Meyer-König and Zeller. *Indag. Math.*, 32; 428-440.
- Taşdelen, F. and Erençin, A. 2007. The genaralization of bivariate MKZ operators by multiple generating functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 331; 727-735.
- Volkov, V. I. 1957. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N.S.)*, 115; 17-19.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Gürhan İÇÖZ

**Doğum Yeri** : Yozgat

**Doğum Tarihi** : 18.09.1984

**Medeni Hali** : Bekar

**Yabancı Dili** : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

**Lise** : İncirli Lisesi (2002)

**Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2006)

**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2006 – Temmuz 2008)

### Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2007 – ...)