ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİORTOGONAL ve q-BİORTOGONAL POLİNOMLAR

Serhan VARMA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2008

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİORTOGONAL ve q-BİORTOGONAL POLİNOMLAR

Serhan VARMA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ortogonal polinomların tanımı ve bu polinomlara ilişkin birkaç örnek verilmiştir.

Üçüncü bölümde, q-analizi ile ilgili bazı tanım ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca q-ortogonal polinomlar ve bu polinomlara örnek olan q-Laguerre polinomları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde, biortogonal polinomlar tanıtılmış ve bu polinomların genel özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, biortogonal polinomlara örnek teşkil eden Jacobi polinomları tarafından belirtilen polinomlar ve $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ ve $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ ile gösterilen Konhauser polinomları üzerinde durulmuştur. Konhauser polinomlarının biortogonallik ve ortogonallik bağıntılarını sağladığı ve Laguerre polinomlarıyla ilişkili olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu polinom ailelerinden $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için doğurucu fonksiyon $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için ise, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden bir açılım elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, q-biortogonal polinomlar tanıtılmış ve bu polinomların genel özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde ise, q-Konhauser polinomları tanıtılmış ve bu polinomlar için yükseltme operatörü, Rodrigues formülü ve multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar elde edilmiştir.

Temmuz 2008, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler : Laguerre polinomları, q- Laguerre polinomları, Konhauser polinomları, q- Konhauser polinomları, Rodrigues formülü, Doğurucu fonksiyon, Yükseltme operatörü

ABSTRACT

Master Thesis

BIORTHOGONAL and q-BIORTHOGONAL POLYNOMIALS

Serhan VARMA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter provides definition of orthogonal polynomials and a few examples related with these polynomials.

In the third chapter, some definitions and results about q-analysis have been given. Additionaly q-orthogonal polynomials and q-Laguerre polynomials which are samples of these polynomials have been defined.

In the fourth chapter, biorthogonal polynomials have been presented and general characteristics of these polynomials have been examined.

In the fifth chapter, polynomials indicated by Jacobi polynomials and Konhauser polynomials shown by $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ and $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ which are samples of biorthogonal polynomials have been examined. It has been shown that Konhauser polynomials satisfy biorthogonal and orthogonal relations and are related with Laguerre polynomials. Moreover an expansion in the form of hypergeometric functions for $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polynomials and generating function for $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polynomials have been obtained.

In the sixth chapter, q-biorthogonal polynomials have been introduced and general characteristics of these polynomials have been examined.

The last chapter presents q-Konhauser polynomials and raising operator, Rodrigues type formula and multilinear and multilateral generating functions have been obtained for these polynomials.

July 2008, 66 pages

Key Words: Laguerre polynomials, q- Laguerre polynomials, Konhauser polynomials, q-Konhauser polynomials, Rodrigues formula, Generating function, Raising operator

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı olan sayın hocam Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'a, destek ve görüşlerini esirgemeyen sevgili arkadaşım Araş. Gör. Gürhan İÇÖZ 'e, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Serhan VARMA
Ankara, Temmuz 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

SİMGELER DİZİNİ vi

1. GİRİŞ 1

2. ORTOGONAL POLİNOMLAR ve BAZI ÖRNEKLERİ 2

2.1 Ortogonal Polinomlar 2

2.2 Laguerre ve Jacobi Polinomları 4

2.2.1 Laguerre polinomları 4

2.2.2 Jacobi polinomları 4

2.3 Doğurucu Fonksiyonlar 5

3. q-ORTOGONAL POLİNOMLAR 7

3.1 Temel Tanımlar 7

3.2 q-Ortogonal Polinomların Tanımı ve q-Laguerre Polinomları 11

3.2.1 q-Ortogonal polinomların tanımı 11

3.2.2 q-Laguerre polinomları 12

3.3 q-Laguerre Polinomları İçin Yükseltme Operatörü ve Rodrigues Formülü 14

4. BİORTOGONAL POLİNOMLAR 19

4.1 Biortogonal Polinomların Tanımı 19

4.2 Biortogonal Polinomların Genel Özellikleri 21

4.2.1 Biortogonallik için eşdeğer koşullar 21

4.2.2 Biortogonal polinomların varlığı için bir gerek ve yeter koşul 24

4.2.3 Biortogonal polinomların sıfırları 24

4.2.4 Biortogonal polinomlar için türev içermeyen rekürans bağıntısı 27

5. BAZI BİORTOGONAL POLİNOM ÖRNEKLERİ 30

5.1 Konhauser Polinomları 30

5.1.1 Konhauser polinomları ile Laguerre polinomları arasındaki bağıntı 37
5.1.2 $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için bir integral gösterim ve doğurucu fonksiyon 38
5.1.3 $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarının hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden gösterimi 41
5.2 Jacobi Polinomları Tarafından Belirtilen Biortogonal Polinomlar 42
6. q-BİORTOGONAL POLİNOMLAR 44
6.1 q-Biortogonal Polinomların Tanımı 44
6.2 q-Biortogonal Polinomların Genel Özellikleri 45
6.2.1 q-Biortogonallik için eşdeğer koşullar 45
6.2.2 q-Biortogonal polinomlar için türev içermeyen reküerans bağıntısı 48
7. q-KONHAUSER POLİNOMLARI ve BAZI ÖZELLİKLERİ 51
7.1 q-Konhauser Polinomları 51
7.2 q-Konhauser Polinomlarının Bazı Özellikleri 52
7.2.1 $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için yükseltme operatörü 52
7.2.2 Rodrigues formülü 55
7.2.3 q-Konhauser polinomları için doğurucu fonksiyonlar 56
KAYNAKLAR 64
ÖZGEÇMİŞ 66

SİMGELER DİZİNİ

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomları
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre polinomları
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$[a]_q$	a reel sayısının $q-$analoğu
$[n]_q!$	n faktöriyelin $q-$analoğu
D_q	$q-$fark operatörü
$e_q(x)$	$q-$üstel fonksiyon
$L_n^{(\alpha)}(x;q)$	$q-$Laguerre polinomları
$Z_n^{(\alpha)}(x;k)$	$(0,\infty)$ aralığında biortogonallik koşulunu sağlayan x^k ya göre $n-$inci dereceden olan Konhauser polinomları
$Y_n^{(\alpha)}(x;k)$	$(0,\infty)$ aralığında biortogonallik koşulunu sağlayan x e göre $n-$inci dereceden olan Konhauser polinomları
$J_n(\alpha,\beta,k;x)$	$[-1,1]$ aralığında biortogonallik koşulunu sağlayan $nk-$yıncı dereceden olan polinomlar
$K_n(\alpha,\beta,k;x)$	$[-1,1]$ aralığında biortogonallik koşulunu sağlayan $n-$yinci dereceden olan polinomlar
$Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$	$(0,\infty)$ aralığında $q-$biortogonallik koşulunu sağlayan x^k ya göre $n-$inci dereceden olan $q-$Konhauser polinomları
$Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)$	$(0,\infty)$ aralığında $q-$biortogonallik koşulunu sağlayan x e göre $n-$inci dereceden olan $q-$Konhauser polinomları

1. GİRİŞ

Biortogonal polinomlar

$$A(x)\,y''' + B(x)\,y'' + C(x)\,y' = \lambda y \tag{1.1}$$

diferensiyel denkleminin x^m ye göre $n-$inci dereceden ve bu denklemin adjoint denkleminin x e göre $n-$inci dereceden polinom çözümleri olarak karşımıza çıkarlar (Preiser 1962). İlk defa Spencer ve Fano 1951 yılında x ve x^2 ye göre olan polinomların biortogonalliğini incelemişlerdir. Bu polinomları maddeye giren gamma ışınlarının hesaplanmasında kullanmışlardır. Biortogonal polinomların genel özelliklerini, sıfırlarını ve türev içermeyen rekürans bağıntılarının varlığını Konhauser 1965 yılında göstermiştir. Konhauser kendi adını taşıyan, $(0,\infty)$ aralığında $x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre biortogonal olan $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarını 1967 yılında tanımlamıştır. 1983 yılında Al-Salam ve Verma bu polinomların q genişlemesini vermiştir.

Bu tezde biortogonal ve q-biortogonal polinomların en genel özellikleri incelenmiştir. Bu polinomlara örnek teşkil eden Konhauser polinomlarının biortogonallik koşulunu sağladığı ve Laguerre polinomlarıyla ilişkisi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için bir doğurucu fonksiyon elde edilmiş ve $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarının hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden bir açılımı bulunmuştur. Daha sonra da q-Konhauser polinomları için yükseltme operatörü, Rodrigues formülü, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar elde edilmiştir.

2. ORTOGONAL POLİNOMLAR VE BAZI ÖRNEKLERİ

2.1 Ortogonal Polinomlar

Tanım 2.1.1 n bir doğal sayı ve $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ler de, $a_n \neq 0$ olmak üzere, sabit sayılar olsun.

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir *polinom* denir. Buradaki n doğal sayısına *polinomun derecesi*, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sayılarına da *polinomun katsayıları* adı verilir. Eğer $a_n = 1$ ise p_n polinomuna *monik polinom* denir.

Tanım 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega(x)$, I da tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq n$ olmak üzere,

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_I \omega(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0 \tag{2.1.1}$$

oluyorsa $\{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ polinom sistemine I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre *ortogonal*dir denir.

Teorem 2.1.1 $I \subset \mathbb{R}$ aralığında $\{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ polinom sisteminin $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter koşul,

$$\int_I \phi_n(x)\omega(x)x^k dx = 0 \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{2.1.2}$$

ifadesinin gerçeklenmesidir.

İspat $(\Rightarrow)$ $\phi_m(x)$ ve $\phi_n(x)$ polinomları I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal iseler,

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_I \omega(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0 \qquad , \quad m \neq n$$

olduğu bilinmektedir. x in $k-$yıncı kuvveti

$$x^k = a_0\phi_0\left(x\right) + a_1\phi_1\left(x\right) + ... + a_k\phi_k\left(x\right) = \sum_{m=0}^{k} a_m\phi_m\left(x\right) \tag{2.1.3}$$

şeklinde $\phi_m\left(x\right)$ lerin sonlu bir serisi olarak ifade edilebilir. Buradan (2.1.3) ün (2.1.2) de yerine yazılmasıyla, $0 \leq m \leq k < n$ için

$$\begin{aligned} \int_I \phi_n(x)\omega(x)x^k dx &= \int_I \phi_n(x)\omega(x)\left[\sum_{m=0}^{k} a_m\phi_m\left(x\right)\right] dx \\ &= \sum_{m=0}^{k} a_m \int_I \omega(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $0 \leq m < n$ olmak üzere $\phi_m(x)$ ve $\phi_n(x)$ lerin (2.1.1) de verilen ortogonallik tanımı kullanılmıştır.

($\Longleftarrow$) İspatın ikinci kısmı için $0 \leq m < n$ alalım. $\phi_m(x)$, $m-$yinci dereceden bir polinom olduğundan

$$\phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \tag{2.1.4}$$

şeklinde yazılabilecektir. (2.1.1) ortogonallik bağıntısında (2.1.4) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \int_I \omega(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx &= \int_I \omega(x)\phi_n(x)\left[\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right] dx \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k \int_I \phi_n(x)\omega(x)x^k dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.2) den dolayı ispat tamamlanır.

2.2 Laguerre ve Jacobi Polinomları

2.2.1 Laguerre polinomları

$\operatorname{Re} z > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde tanımlanan $\Gamma(z)$ fonksiyonu olmak üzere $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları, $\alpha > -1$ için, $I = [0, \infty)$ aralığında

$$\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Yani

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} & , m = n \end{cases} \tag{2.2.1}$$

ortogonallik bağıntısı gerçeklenir. $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)\,, \quad (a)_0 = 1$$

Pochhammer sembolü olmak üzere, $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının açık ifadeleri

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k\, x^k}{(\alpha+1)_k\, k!} \tag{2.2.2}$$

şeklindedir.

2.2.2 Jacobi polinomları

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları $\alpha, \beta > -1$ olmak üzere $I = [-1, 1]$ aralığında

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Yani

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \neq 0 & , m = n \end{cases} \tag{2.2.3}$$

ortogonallik bağıntısını gerçekler.

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarından α ve β nın bazı özel durumlarına karşılık çeşitli klasik ortogonal polinom aileleri elde edilir. Bunlar, $\alpha = \beta = 0$ için $I = [-1, 1]$ aralığında $\omega(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan Legendre polinomları, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ için $I = [-1, 1]$ aralığında $\omega(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan birinci tür Chebyshev polinomları ve $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ için $I = [-1, 1]$ aralığında $\omega(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan ikinci tür Chebyshev polinomlarıdır.

2.3 Doğurucu Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1 $F(x, t)$ iki değişkenli fonksiyonu değişkenlerden birine göre örneğin t ye göre,

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)\, t^n \tag{2.3.1}$$

biçiminde bir Taylor serisine açılıyor ise $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonlar cümlesinin *doğurucu fonksiyonu* denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız olup n nin fonksiyonudur.

Örnek 2.3.1 (2.2.2) ile tanımlanan $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları için bilinen bazı doğurucu fonksiyonlar, $|t| < 1$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n = (1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) \tag{2.3.2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x)\, t^n = (1+t)^{\alpha} \exp(-xt) \tag{2.3.3}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.2 (**Bilateral Doğurucu Fonksiyon**)**:** Üç değişkenli $H(x, y, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$H(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) g_n(y) t^n \tag{2.3.4}$$

şeklinde bir seriye açılabiliyor ise $H(x, y, t)$ fonksiyonuna f_n ve g_n fonksiyon cümleleri için *bilateral doğurucu fonksiyon* denir.

Tanım 2.3.3 (**Bilineer Doğurucu Fonksiyon**)**:** Üç değişkenli $G(x, y, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$G(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) f_n(y) t^n \tag{2.3.5}$$

şeklinde bir seriye açılabiliyor ise $G(x, y, t)$ fonksiyonuna f_n fonksiyon cümlesi için *bilineer doğurucu fonksiyon* denir.

3. q-ORTOGONAL POLİNOMLAR

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1 a bir reel sayı olmak üzere, a sayısının q-analoğu

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q} \tag{3.1.1}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ dir.

Tanım 3.1.2 $q\,(|q|<1)$ reel veya kompleks bir sayı olmak üzere,

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1 & ; \quad n=0 \\ \prod\limits_{j=0}^{n-1} (1-aq^j) & ; \quad n \in \mathbb{N} = \{1,2,...\} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

ve

$$(a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1-aq^j\right) \tag{3.1.3}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1.3 a bir reel sayı olmak üzere, a sayısının $q-Pochhammer$ sembolü

$$[a]_{n,q} = \prod_{m=0}^{n-1} [a+m]_q \tag{3.1.4}$$

ile tanımlanmaktadır. Burada $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ dir.

Tanım 3.1.4 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n faktöriyelin $q-$analoğu

$$[n]_q! = \prod_{m=1}^{n} [m]_q \,, \quad [0]_q! = 1 \tag{3.1.5}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ dir.

Tanım 3.1.5 D_q ile gösterilen $q-fark\ operatörü$, $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ olmak üzere

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \tag{3.1.6}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Uyarı 3.1.1 Dikkat edilmelidir ki n doğal sayısı ve a reel sayısı için $q \longrightarrow 1^-$ durumunda $[a]_q \longrightarrow a$, $(a)_n$ *Pochhammer* sembolü olmak üzere $[a]_{n,q} \longrightarrow (a)_n$, $[n]_q! \longrightarrow n!$ ve f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $D_q f(x) \longrightarrow \frac{d}{dx}(f(x))$ olacaktır.

Örnek 3.1.1 α bir reel sayı olmak üzere, x^α fonksiyonunun $q-$türevi

$$D_q(x^\alpha) = [\alpha]_q x^{\alpha-1} \tag{3.1.7}$$

dir.

Çözüm x^α ifadesine (3.1.6) $q-fark\ operatörünün$ uygulanmasıyla

$$D_q(x^\alpha) = \frac{(qx)^\alpha - x^\alpha}{(q-1)x} = \frac{1-q^\alpha}{1-q} x^{\alpha-1} = [\alpha]_q x^{\alpha-1}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.2 $|q| < 1$ olmak üzere $q-üstel\ fonksiyon$

$$e_q(x) = \frac{1}{((1-q)x;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} \tag{3.1.8}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu durumda a bir reel sayı olmak üzere $e_q(ax)$ fonksiyonunun $q-$türevi

$$D_q(e_q(ax)) = a e_q(ax) \tag{3.1.9}$$

dir.

Çözüm (3.1.8) den

$$D_q\left(e_q\left(ax\right)\right)=D_q\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(ax\right)^k}{\left[k\right]_q!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\left[k\right]_q!}D_q\left(x^k\right)$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadede (3.1.7) kullanılırsa

$$D_q\left(e_q\left(ax\right)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\left[k\right]_q!}\left[k\right]_q x^{k-1}=a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(ax\right)^{k-1}}{\left[k-1\right]_q!}=ae_q\left(ax\right)$$

elde edilir.

Lemma 3.1.1 $f\left(x\right)$ ve $g\left(x\right)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere

$$D_q\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=f\left(x\right)D_q\left(g\left(x\right)\right)+g\left(x\right)D_q\left(f\left(x\right)\right)+\left(q-1\right)xD_q\left(f\left(x\right)\right)D_q\left(g\left(x\right)\right) \tag{3.1.10}$$

dir.

İspat (3.1.10) un sol yanında (3.1.6) kullanılırsa,

$$D_q\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=\frac{f\left(qx\right)g\left(qx\right)-f\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g\left(qx\right)-f\left(x\right)g\left(qx\right)}{\left(q-1\right)x}$$

$$=f\left(x\right)D_qg\left(x\right)+g\left(qx\right)D_qf\left(x\right) \tag{3.1.11}$$

bağıntısı gerçeklenir. (3.1.6) yardımıyla elde edilen

$$g\left(qx\right)=g\left(x\right)+\left(q-1\right)xD_qg\left(x\right)$$

ifadesi (3.1.11) de yerine yazılırsa, ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.6 Herhangi bir f parçalı sürekli fonksiyonun $q-integrali$ sonlu ve yarı sonsuz aralıklarında sırasıyla

$$\int_a^b f\left(x\right)d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(bq^n-bq^{n+1}\right)f\left(bq^n\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\left(aq^n-aq^{n+1}\right)f\left(aq^n\right) \tag{3.1.12}$$

ve

$$\int_0^\infty f(x)\, d_q x = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k f\left(q^k\right) \tag{3.1.13}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Lemma 3.1.2 (q-Kısmi integrasyon): f ve g parçalı sürekli iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)\, D_q g(x)\, d_q x &= \lim_{n\to\infty} \left(f\left(q^{-n}\right) g\left(q^{-n}\right) - f\left(q^{n+1}\right) g\left(q^{n+1}\right)\right) \\ &\quad - \int_0^\infty g(x)\, D_q f(x)\, d_q x - (q-1) \int_0^\infty x(D_q f(x))\,(D_q g(x))\, d_q x \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

dir.

İspat (3.1.10) ifadesinin her iki yanının $[0,\infty)$ aralığında $q-integrali$ alınır ve (3.1.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)\, D_q g(x)\, d_q x &= \lim_{n\to\infty} \left((1-q) \sum_{k=-n}^{n} q^k D_q (fg)\left(q^k\right)\right) \\ &\quad - \int_0^\infty g(x)\, D_q f(x)\, d_q x - (q-1) \int_0^\infty x(D_q f(x))\,(D_q g(x))\, d_q x \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

ifadesine varılır.(3.1.15) in sağ tarafındaki ilk terimde $q-fark$ *operatörünün* tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left((1-q) \sum_{k=-n}^{n} q^k D_q (fg)\left(q^k\right)\right) &= \lim_{n\to\infty} \left((1-q) \sum_{k=-n}^{n} q^k \frac{(fg)\left(q^{k+1}\right) - (fg)\left(q^k\right)}{(q-1)\, q^k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left[(fg)\left(q^k\right) - (fg)\left(q^{k+1}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(f\left(q^{-n}\right) g\left(q^{-n}\right) - f\left(q^{n+1}\right) g\left(q^{n+1}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin (3.1.15) de dikkate alınmasıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1 1 (q-Binom teoremi): $|x| < 1$ ve $|q| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \tag{3.1.16}$$

dır.

Sonuç 3.1.1

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{(q;q)_n} = \tfrac{1}{(x;q)_\infty}, |x| < 1, |q| < 1 \tag{3.1.17}$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n}{(q;q)_n} = (x;q)_\infty, |x| < 1, |q| < 1 \tag{3.1.18}$$

dir.

3.2 q-Ortogonal Polinomların Tanımı ve q-Laguerre Polinomları

3.2.1 q-Ortogonal polinomların tanımı

Tanım 3.2.1 $|q| < 1$ olmak üzere $\{aq^n, bq^n; n \in \mathbb{N}\}$ kümesi üzerinde tanımlı pozitif bir ağırlık fonksiyonu $\omega(x;q)$ olsun, $n - yinci$ dereceden $\{p_n(x;q)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ polinomu

$$\int_a^b p_m(x;q)\, p_n(x;q)\, \omega(x;q)\, d_q x = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \neq 0 & ; \quad m = n \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.2.1}$$

bağıntısını gerçekliyorsa, $p_n(x;q)$ polinomu $[a, b]$ aralığında $\omega(x;q)$ ağırlık fonksiyonuna göre $q - ortogonaldir$ denir. Burada $[a, b]$ aralığı, yarı sonsuz ya da sonsuz bir aralık olabilir.

3.2.2 q-Laguerre polinomları

Açık ifadesi (Moak, 1981)

$$L_n^{(\alpha)}(x;q)=\frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n};q)_k\,q^{\binom{k}{2}}\,(1-q)^k\,(q^{n+\alpha+1}x)^k}{(q^{\alpha+1};q)_k\,(q;q)_k},\ \ \alpha>-1 \qquad (3.2.2)$$

ile verilen $q-Laguerre$ polinomları $[0,\infty)$ aralığında $\omega(x;q)=x^{\alpha}e_q(-x)$ ağırlık fonksiyonuna göre $q-ortogonal$ olan monik bir polinom ailesidir. Yani

$$\int_{o}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(x;q)\,L_m^{(\alpha)}(x;q)\,x^{\alpha}e_q(-x)\,d_qx=0 \qquad ,\ m\neq n \qquad (3.2.3)$$

ifadesi gerçeklenmektedir.

Lemma 3.2.1 $L_n^{(\alpha)}(x)$ (2.2.2) ile tanımlanan Laguerre polinomları olmak üzere

$$L_n^{(\alpha)}(x;q)\longrightarrow L_n^{(\alpha)}(x) \quad , \quad q\longrightarrow 1^- \text{ için}$$

dir.

İspat (3.2.2) ile tanımlanan $L_n^{(\alpha)}(x;q)$ ifadesinin her iki tarafında $q\longrightarrow 1^-$ için limit alınırsa

$$\lim_{q\to1^-}L_n^{(\alpha)}(x;q)=\lim_{q\to1^-}\left[\frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n};q)_k\,q^{\binom{k}{2}}\,(1-q)^k\,(q^{n+\alpha+1}x)^k}{(q^{\alpha+1};q)_k\,(q;q)_k}\right]$$

elde edilir.

$$\left(q^{\alpha+1};q\right)_n=\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-q^{\alpha+1+i}\right)=\left(1-q^{\alpha+1}\right)\left(1-q^{\alpha+2}\right)...\left(1-q^{\alpha+n}\right)$$

$$[\alpha+1]_q\,[\alpha+2]_q\,...\,[\alpha+n]_q=\frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}\frac{1-q^{\alpha+2}}{1-q}...\frac{1-q^{\alpha+n}}{1-q}$$

$$\begin{aligned}\left(q^{\alpha+1};q\right)_n &= [\alpha+1]_q\,[\alpha+2]_q\ldots[\alpha+n]_q\,(1-q)^n\\ &= [\alpha+1]_{n,q}\,(1-q)^n\end{aligned}$$

Diğer semboller için de benzer işlemler yapılırsa

$$\lim_{q\to1^-} L_n^{(\alpha)}(x;q) = \lim_{q\to1^-}\left[\frac{[\alpha+1]_{n,q}}{[n]_q!}\sum_{k=0}^{n}\frac{[-n]_{k,q}\,q^{\binom{k}{2}}\left(q^{n+\alpha+1}x\right)^k}{[\alpha+1]_{k,q}\,[k]_q!}\right]$$

sonucuna varılır. Burada Uyarı(3.1.1) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{q\to1^-} L_n^{(\alpha)}(x;q) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k x^k}{(\alpha+1)_k k!}\\ &= L_n^{(\alpha)}(x)\end{aligned}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.2.2 $L_n^{(\alpha)}(x;q)$ $q-$ Laguerre polinomları olmak üzere $0<q<1$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(q^{-n}\right)^k\left(q^{-n}\right)^\alpha e_q\left(-q^{-n}\right)L_n^{(\alpha)}\left(q^{-n};q\right)-\left(q^{n+1}\right)^k\left(q^{n+1}\right)^\alpha e_q\left(-q^{n+1}\right)L_n^{(\alpha)}\left(q^{n+1};q\right)\right\}=0 \tag{3.2.4}$$

dır.

İspat $0<q<1$ olmak üzere (3.2.4) eşitliğinin sol yanında, $q^{-n}=t$ dönüşümü yapılırsa $n\longrightarrow\infty$ için $t\longrightarrow\infty$ olup, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\left(q^{-n}\right)^k\left(q^{-n}\right)^\alpha e_q\left(-q^{-n}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\alpha+k}}{e_q(t)}=0$$

bulunur. (3.2.2) ile verilen $L_n^{(\alpha)}(x;q)$ Laguerre polinomlarının ifadesinde $x=q^{-n}$ alınır ve $k=n$ için limit değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} L_n^{(\alpha)}\left(q^{-n};q\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(q^{-n};q\right)_n q^{\binom{n}{2}}(1-q)^n q^{(\alpha+1)n}}{(q;q)_n\,(q;q)_n}\\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}}(1-q)^n q^{(\alpha+1)n}}{(q;q)_n}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{(1-q)^n q^{\alpha n}}{(q;q)_n} = 0$$

olur. Benzer işlemler ikinci terim içinde yapılırsa o da sıfır olur ki ispat tamamlanır.

3.3 q-Laguerre Polinomları İçin Yükseltme Operatörü ve Rodrigues Formülü

Tanım 3.3.1(Yükseltme operatörü): Herhangi bir polinoma uygulandığında o polinomun derecesini yükselten operatöre *yükseltme operatörü* denir.

Şimdi $L_n^{(\alpha)}(x;q)$ polinomlarının yükseltme operatörü ile ilgili aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.3.1 $\alpha > 0$ ve

$$R(...) = D_q\left(x^\alpha e_q(-x)...\right)$$

olmak üzere $q - Laguerre$ polinomlarının yükseltme bağıntısı

$$\begin{aligned} R\left(L_n^{(\alpha)}(x;q)\right) &= D_q\left(x^\alpha e_q(-x) L_n^{(\alpha)}(x;q)\right) \\ &= -\left[1 + [\alpha]_q (q-1) + [n]_q (q-1)\left(1 + (q-1)[\alpha]_q\right)\right] \\ &\quad \times x^{\alpha-1} e_q(-x) L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x;q) \qquad (3.3.1) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat $Q_{n+1}(x;q)$, $(n+1)-$inci dereceden monik bir polinom olmak üzere (3.1.10) ifadesinde $f(x) = e_q(-x)$ ve $g(x) = x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x;q)$ seçilirse

$$\begin{aligned} g(x) D_q f(x) &= -e_q(-x) x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x;q) = -e_q(-x) x^{\alpha-1} Q_{n+1}(x;q) \\ f(x) D_q g(x) &= e_q(-x)\Big[[\alpha]_q x^{\alpha-1} x L_{n-1}^{(\alpha)}(x;q) + [n]_q x^{\alpha-1} x L_{n-1}^{(\alpha)}(x;q) \\ &\quad + (q-1)[\alpha]_q [n]_q x^{\alpha-1} x L_{n-1}^{(\alpha)}(x;q)\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e_q(-x)\Big[[\alpha]_q x^{\alpha-1}Q_n(x;q)+[n]_q x^{\alpha-1}Q_n(x;q)\\
&\quad +(q-1)[\alpha]_q[n]_q x^{\alpha-1}Q_n(x;q)\Big]\\
&= e_q(-x)x^{\alpha-1}Q_n(x;q)\Big[[\alpha]_q+[n]_q+(q-1)[\alpha]_q[n]_q\Big]
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
(q-1)xD_qf(x)D_qg(x) &= -e_q(-x)x^{\alpha-1}Q_{n+1}(x;q)\\
&\quad\times\Big[[\alpha]_q(q-1)+[n]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha]_q\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu değerler (3.1.10) da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
D_q\left(x^\alpha e_q(-x)L_n^{(\alpha)}(x;q)\right) &= -\Big[1+[\alpha]_q(q-1)+[n]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha]_q\Big)\Big]\\
&\quad\times x^{\alpha-1}e_q(-x)Q_{n+1}(x;q)+x^{\alpha-1}e_q(-x)Q_n(x;q)\\
&\quad\times\Big[[\alpha]_q+[n]_q+(q-1)[\alpha]_q[n]_q\Big] \qquad (3.3.2)
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.3.2) eşitliği düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
D_q\left(x^\alpha e_q(-x)L_n^{(\alpha)}(x;q)\right) &= -\Big[1+[\alpha]_q(q-1)+[n]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha]_q\Big)\Big]\\
&\quad\times x^{\alpha-1}e_q(-x)Q_{n+1}(x;q) \qquad (3.3.3)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Öte yandan, (3.3.3) ifadesi $k=0,1,...,n$ için x^k ile çarpılır, $(0,\infty)$ aralığında integrali alınır ve $u=x^k$, $dv=D_q\left(x^\alpha e_q(-x)L_n^{(\alpha)}(x;q)\right)$ olmak üzere (3.1.14) kullanılırsa

$$
-\Big[1+[\alpha]_q(q-1)+[n]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha]_q\Big)\Big]\int_0^\infty x^{k+\alpha-1}e_q(-x)Q_{n+1}(x;q)\,d_qx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty x^kD_q\left(x^\alpha e_q(-x)L_n^{(\alpha)}(x;q)\right)d_qx\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big\{\left(q^{-n}\right)^k\left(q^{-n}\right)^\alpha e_q\left(-q^{-n}\right)L_n^{(\alpha)}\left(q^{-n};q\right)\\
&\quad -\left(q^{n+1}\right)^k\left(q^{n+1}\right)^\alpha e_q\left(-q^{n+1}\right)L_n^{(\alpha)}\left(q^{n+1};q\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$-\left[k\right]_q \int_0^\infty x^{k-1} x^\alpha e_q\left(-x\right) L_n^{(\alpha)}\left(x;q\right) d_q x$$

$$-\left[k\right]_q \left(q-1\right) \int_0^\infty x^k D_q \left(x^\alpha e_q\left(-x\right) L_n^{(\alpha)}\left(x;q\right)\right) d_q x$$

elde edilir. Lemma (3.2.2) den

$$\begin{aligned} & -\left[1+\left[\alpha\right]_q\left(q-1\right)+\left[n\right]_q\left(q-1\right)\left(1+\left(q-1\right)\left[\alpha\right]_q\right)\right] \int_0^\infty x^{k+\alpha-1} e_q\left(-x\right) Q_{n+1}\left(x;q\right) d_q x \\ = & -\left[k\right]_q \int_0^\infty x^{k-1} x^\alpha e_q\left(-x\right) L_n^{(\alpha)}\left(x;q\right) d_q x \\ & -\left[k\right]_q \left(q-1\right) \int_0^\infty x^k D_q \left(x^\alpha e_q\left(-x\right) L_n^{(\alpha)}\left(x;q\right)\right) d_q x \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

bulunur. (3.3.4) ifadesindeki son eşitliğin sağ yanındaki ilk terim $q-$ortogonallikten dolayı $k=1,2,...,n$ için sıfırdır. Dolayısıyla

$$\int_0^\infty x^{k+\alpha-1} e_q\left(-x\right) Q_{n+1}\left(x;q\right) d_q x = 0 \quad , \quad k=0,1,2,...,n$$

olacaktır. Bu ifade $Q_{n+1}\left(x;q\right)$ polinom ailesinin $[0,\infty)$ aralığında $\omega\left(x;q\right) = x^{\alpha-1} e_q\left(-x\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre $q-$ortogonal olduğunu gösterir. $[0,\infty)$ aralığında $\omega\left(x;q\right) = x^{\alpha-1} e_q\left(-x\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre $q-$ortogonal olan monik polinom ailesi tek olduğundan

$$Q_{n+1}\left(x;q\right) = L_{n+1}^{(\alpha-1)}\left(x;q\right)$$

dur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.3.2 $L_n^{(\alpha)}(x;q)$, $q-$Laguerre polinomları olmak üzere

$$\begin{aligned}D_q^n\left(x^{\alpha+n}e_q(-x)\right) &= (-1)^n\prod_{k=1}^{n}\Big\{1+[\alpha+n+1-k]_q(q-1)\\&\quad+[k-1]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha+n+1-k]_q\Big)\Big\}\\&\quad\times x^\alpha e_q(-x)L_n^{(\alpha)}(x;q) \qquad (3.3.5)\end{aligned}$$

dir. (3.3.5) formülü Rodrigues formülü olarak bilinir.

İspat $q-$Laguerre polinomları için yükseltme operatörü Lemma (3.3.1) de ifade edilen R operatörüdür. Yükseltme operatöründe n yerine sıfır alınır, $L_0^{(\alpha+n)}(x;q)=1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}D_q\Big(x^\alpha e_q(-x)L_0^{(\alpha)}(x;q)\Big) &= -\Big[1+[\alpha]_q(q-1)+[0]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha]_q\Big)\Big]\\&\quad\times x^{\alpha-1}e_q(-x)L_1^{(\alpha-1)}(x;q)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada α yerine $\alpha+n$ yazılırsa

$$\begin{aligned}D_q\Big(x^{\alpha+n}e_q(-x)L_0^{(\alpha+n)}(x;q)\Big) &= \Big[-1+[\alpha+n]_q(q-1)+[0]_q(q-1)\\&\quad\times\Big(1+(q-1)[\alpha+n]_q\Big)\Big]x^{\alpha+n-1}e_q(-x)L_1^{(\alpha+n-1)}(x;q)\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanına (3.3.1) eşitliği bir kez daha uygulanırsa

$$\begin{aligned}D_q^2\left(x^{\alpha+n}e_q(-x)\right) &= -\Big[1+[\alpha+n]_q(q-1)+[0]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha]_q\Big)\Big]\\&\quad\times D_q(x^{\alpha+n-1}e_q(-x)L_1^{(\alpha+n-1)}(x;q))\\&= \Big[1+[\alpha+n]_q(q-1)+[0]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha+n]_q\Big)\Big]\\&\quad\times\Big[1+[\alpha+n-1]_q(q-1)+[1]_q(q-1)\\&\quad\times\Big(1+(q-1)[\alpha+n-1]_q\Big)\Big]x^{\alpha+n-2}e_q(-x)L_2^{(\alpha+n-2)}(x;q)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde bu işleme n kez devam edilirse $L_n^{(\alpha)}(x;q)$, $q-$Laguerre polinomları için Rodrigues formülü

$$\begin{aligned} D_q^n\left(x^{\alpha+n}e_q\left(-x\right)\right) &= \left(-1\right)^n\prod_{k=1}^{n}\Big\{1+\left[\alpha+n+1-k\right]_q\left(q-1\right) \\ &\quad +\left[k-1\right]_q\left(q-1\right)\Big(1+\left(q-1\right)\left[\alpha+n+1-k\right]_q\Big)\Big\} \\ &\quad \times x^{\alpha}e_q\left(-x\right)L_n^{(\alpha)}\left(x;q\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

4. BİORTOGONAL POLİNOMLAR

Biortogonal polinomlar ilk olarak 1951 yılında Spencer ve Fano tarafından tanımlanmıştır. Bunlar biortogonal polinomların herhangi genel özelliklerini belirtmemişler, sadece c negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $(0,\infty)$ aralığında $x^c e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre x ve x^2 cinsinden polinomların biortogonalliğini incelemişlerdir. 1965 yılında Konhauser tarafından biortogonal polinomların en genel özellikleri incelenmiştir. Daha sonraki yıllarda çeşitli matematikçiler tarafından biortogonal polinomlar fikri geliştirilmiştir. Özellikle klasik ortogonal polinomlar tarafından belirtilen biortogonal polinom aileleri üzerinde çalışılmış ve bu polinom ailelerinin sağladıkları rekürans bağıntıları, Rodrigues formülleri gibi birçok özellikleri elde edilmiştir.

4.1 Biortogonal Polinomların Tanımı

Tanım 4.1.1 $r(x)$ ve $s(x)$ sırasıyla x e göre $h>0$ ve $k>0$ ıncı dereceden reel değerli polinomlar olsunlar. $R_m(x)$ ve $S_n(x)$ de sırasıyla $r(x)$ ve $s(x)$ e göre $m-$yinci ve $n-$yinci dereceden polinomları göstersinler. Bu durumda $R_m(x)$ ve $S_n(x)$ sırasıyla x e göre $mh-$ıncı ve $nk-$yıncı dereceden polinomlar olurlar. $r(x)$ ve $s(x)$ polinomlarına *temel polinomlar* denir.

Gösterim 4.1.1 $[R_n(x)]$, $r(x)$ e göre $0,1,2,...$ inci dereceden olan $R_0(x)$,$R_1(x)$,$R_2(x)$,... polinomlarının bir kümesini, $[S_n(x)]$ de $s(x)$ e göre $0,1,2,...$ inci dereceden olan $S_0(x)$,$S_1(x)$,$S_2(x)$ ... polinomlarının bir kümesini göstersinler.

Tanım 4.1.2 Eğer tüm

$$I_{i,j}=\int_a^b \rho(x)\,[r(x)]^i\,[s(x)]^j\,dx \quad , \quad i,j=0,1,2,... \tag{4.1.1}$$

momentleri mevcut ve

$$I_{0,0}=\int_a^b \rho\left(x\right)dx\neq 0 \tag{4.1.2}$$

ise, sonlu veya sonsuz bir (a,b) aralığı üzerinde reel değerli $\rho\left(x\right)$ fonksiyonuna *uygun bir ağırlık fonksiyonu* denir.

(4.1.1) den görülür ki, eğer $i,j=0,1,2,...$ için $I_{i,j}$ momentleri mevcut ise

$$\int_a^b \rho\left(x\right)x^i dx \quad , \quad i=0,1,2,...$$

integralleri de mevcuttur.

Ortogonal polinomlar için $\rho\left(x\right)$ fonksiyonunun (a,b) aralığında pozitif olması şartı alışılagelmiştir. Bu şart, ortogonal polinomların belirli özelliklerinin kurulmasında gereklidir. Bu özelliklerin biortogonal polinomlar için benzeri elde edilirken görülmektedir ki, $\rho\left(x\right)$ fonksiyonunun, $I_{0,0}\neq 0$ olmak üzere, (a,b) aralığında negatif veya pozitif olması gerekmektedir.

Şimdi biortogonal polinomlarım tanımını verelim:

Tanım 4.1.3 $m,n\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere eğer

$$J_{m,n}=\int_a^b \rho\left(x\right)R_m\left(x\right)S_n\left(x\right)dx=\begin{cases}0 & ;\quad m\neq n\\ \neq 0 & ;\quad m=n\end{cases} \tag{4.1.3}$$

ise, $[R_m\left(x\right)]$ ve $[S_n\left(x\right)]$ polinom kümelerine, (a,b) aralığı üzerinde, $\rho\left(x\right)$ uygun ağırlık fonksiyonuna ve $r\left(x\right)$ ve $s\left(x\right)$ temel polinomlarına göre *biortogonaldirler* denir.

4.2 Biortogonal Polinomların Genel Özellikleri

4.2.1 Biortogonallik için eşdeğer koşullar

Aşağıdaki teoremde biortogonallik için (4.1.3) e eşdeğer olan koşulları verelim

Teorem 4.2.1 $\rho(x)$, (a,b) aralığı üzerinde uygun bir ağırlık fonksiyonu olsun. $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlar olmak üzere

$$\int_a^b \rho(x)\,[r(x)]^j\, S_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , \quad j = 0,1,2,...,n-1 \\ \neq 0 & , \quad j = n \end{cases} \tag{4.2.1}$$

ve

$$\int_a^b \rho(x)\,[s(x)]^j\, R_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , \quad j = 0,1,2,...,m-1 \\ \neq 0 & , \quad j = m \end{cases} \tag{4.2.2}$$

ifadelerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $m,n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$J_{m,n} = \int_a^b \rho(x)\,R_m(x)\,S_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \neq 0 & ; \quad m = n \end{cases} \tag{4.2.3}$$

olmasıdır.

İspat (4.2.1) ve (4.2.2) sağlansın. $R_m(x)$, $r(x)$ temel polinomlarına göre $m-$yinci dereceden bir polinom olduğundan

$$R_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_{m,j}\,[r(x)]^j$$

dir. Burada $c_{m,j}$ $(j = 0,1,2,...,m)$ ler için $c_{m,m} \neq 0$ olan sabitlerdir. Eğer $m \leq n$ ise

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x)\,R_m(x)\,S_n(x)\,dx &= \int_a^b \rho(x)\left\{\sum_{j=0}^{m} c_{m,j}\,[r(x)]^j\right\} S_n(x)\,dx \\ &= \sum_{j=0}^{m} c_{m,j}\int_a^b \rho(x)\,[r(x)]^j\, S_n(x)\,dx \end{aligned}$$

olur.(4.2.1) den $j=n=m$ durumu hariç

$$\int_a^b \rho(x)\left[r(x)\right]^j S_n(x)\,dx = 0$$

elde edilir. $m>n$ olması durumunda ise, $d_{n,n}\neq 0$ olmak üzere, $d_{n,j}\ (j=0,1,2,...,n)$ sabitleri için

$$S_n(x)=\sum_{j=0}^{n} d_{n,j}\left[s(x)\right]^j$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(x) R_m(x) S_n(x)\,dx &= \int_a^b \rho(x)\left\{\sum_{j=0}^{n} d_{n,j}\left[s(x)\right]^j\right\} R_m(x)\,dx \\ &= \sum_{j=0}^{n} d_{n,j}\int_a^b \rho(x)\left[s(x)\right]^j R_m(x)\,dx\end{aligned}$$

olur.(4.2.2) den $0\leq j\leq n$ ve $m>n$ için

$$\int_a^b \rho(x)\left[s(x)\right]^j R_m(x)\,dx = 0$$

elde edilir. Bütün durumlarda (4.2.3) ün sağlandığı görülür.

Tersine olarak, kabul edelim ki (4.2.3) sağlansın. $R_m(x)$ ve $S_n(x)$ sırasıyla $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarına göre polinomlar olduklarından, öyle $e_{m,i}$ ve $f_{n,i}$ sabitleri vardır ki

$$\left[r(x)\right]^j=\sum_{i=0}^{j} e_{m,i}R_i(x)$$

ve

$$\left[s(x)\right]^j=\sum_{i=0}^{j} f_{n,i}S_i(x)$$

yazılabilir. Eğer $0 \leq j \leq n$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(x)\,[r(x)]^j\, S_n(x)\,dx &= \int_a^b \rho(x)\left\{\sum_{i=0}^{j} e_{m,i} R_i(x)\right\} S_n(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{j} e_{m,i}\int_a^b \rho(x)\,R_i(x)\,S_n(x)\,dx\end{aligned}$$

olur. $i = 0, 1, 2, ..., j$ için, eğer $j < n$ ise (4.2.3) eşitliğinden dolayı sağ yandaki her integral sıfır olur. Eğer $j = n$ ise sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (4.2.1) sağlanır.

Diğer taraftan $0 \leq j \leq m$ için

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(x)\,[s(x)]^j\, R_m(x)\,dx &= \int_a^b \rho(x)\left\{\sum_{i=0}^{j} f_{n,i} S_i(x)\right\} R_m(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{j} f_{n,i}\int_a^b \rho(x)\,S_i(x)\,R_m(x)\,dx\end{aligned}$$

elde edilir. $i = 0, 1, ..., j$ için, eğer $j < m$ ise (4.2.3) eşitliğinden dolayı sağ yandaki integral sıfır olur. Eğer $j = m$ ise integral sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (4.2.2) eşitliği de elde edilmiş olur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.1 Eğer (4.2.1) ve (4.2.2) eşitlikleri sağlanıyorsa, bu durumda

$$\int_a^b \rho(x)\,S_n(x)\,F_{n-1}(x)\,dx = 0 \tag{4.2.4}$$

ve

$$\int_a^b \rho(x)\,R_m(x)\,G_{m-1}(x)\,dx = 0 \tag{4.2.5}$$

dir. Burada $F_{n-1}(x)$ ve $G_{m-1}(x)$ ler sırasıyla $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarına göre dereceleri en fazla $n-1$ ve $m-1$ olan keyfi polinomlardır.

4.2.2 Biortogonal polinomların varlığı için bir gerek ve yeter koşul

Ortogonal polinomlarda (a, b) aralığı verildiğinde, (a, b) aralığı üzerinde $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan tek bir $P_n(x)$ polinomlar kümesi vardır. Biortogonal polinomlarda ise durum farklıdır. Gösterim (4.2.1) de tanımlanacak olan $\triangle_n$ determinantı, temel polinomlar, ağırlık fonksiyonu ve ortogonallik aralığına bağlıdır. $\triangle_n$ determinantı $n = 1, 2, 3, ...$ için sıfırdan farklı olacak şekilde seçilirse, biortogonal polinom ailelerinin varlığından bahsedebiliriz.

Gösterim 4.2.1 $\triangle_n$,

$$\begin{vmatrix} I_{0,0} & I_{0,1} & . & . & . & I_{0,n-1} \\ I_{1,0} & I_{1,1} & . & . & . & I_{1,n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ I_{n-1,0} & I_{n-1,1} & . & . & . & I_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

determinantını göstersin. Eğer $\rho(x)$ uygun bir ağırlık fonksiyonu ise $\triangle_1 = I_{0,0} \neq 0$ dır.

Şimdi biortogonal polinomların varlığı için bir gerek ve yeter koşul veren aşağıdaki teoremi ispatsız verelim.

Teorem 4.2.2 $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomları ve (a, b) aralığı üzerinde uygun bir ağırlık fonksiyonu keyfi olarak verilsin. Bu durumda $[R_m(x)]$ ve $[S_n(x)]$ polinom kümelerinin (4.1.3) biortogonallik şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul $n = 1, 2, 3, ...$ için $\triangle_n$ determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. Dahası bu polinomların herbiri sabit çarpan farkıyla tektir.

4.2.3 Biortogonal polinomların sıfırları

Ortogonal polinomlarda, ağırlık fonksiyonunun (a, b) aralığı üzerinde tek işaretli olması şartıyla, $P_n(x)$ polinomlarının n tane sıfırı da reel, basit ve (a, b) aralığı içindedir. Biortogonal polinomlarda ise ağırlık fonksiyonunun uygun ve (a,b) aralığında negatif ya da pozitif olması koşuluyla birlikte, $r(x)$ ve $s(x)$ polinomlarının birinci türevlerinin (a,b) aralığı içinde sıfır olmaması, biortogonal polinom ailelerinin (a,b) aralığı içinde n tane basit sıfıra sahip olmalarını gerektirir. $R_n(x), r(x)$ temel polinomuna göre $n-$yinci dereceden olup, $r(x)$ in derecesi ile n nin çarpımı kadar reel sıfıra sahip olabilir. Göstereceğiz ki, gerekli koşullar sağlandığında $R_n(x)$ in reel sıfırlarından kesinlikle n tanesi (a,b) aralığının içindedirler ve basittirler. Benzer düşünceyle, $R_n(x)$ ve $S_n(x)$ in rolleri değiştirilerek, $S_n(x)$ in sıfırlarının n tanesinin (a,b) aralığının içinde ve basit olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.2.3 Eğer $\rho(x)$ uygun ağırlık fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde negatif ya da pozitif ise ve eğer $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarının $r'(x)$ ve $s'(x)$ türevleri (a,b) aralığının içinde sıfır olmuyorsa, $R_n(x)$ ve $S_n(x)$ polinomlarının herbiri (a,b) içinde tam n tane basit sıfıra sahiptirler. Geriye kalan bütün sıfır yerleri (a,b) aralığının dışındadırlar.

İspat İspatı $R_n(x)$ polinomu için verelim.

$$\int_a^b \rho(x) R_n(x)\, dx \tag{4.2.6}$$

integralini göz önüne alalım. Burada hipotez gereği $\rho(x)$, (a,b) aralığı üzerinde tek işaretlidir ve $I_{0,0} \neq 0$ dır. Eğer $n>0$ ise (2.1.2) ile belirtilen ortogonallikten (4.2.6) integrali sıfır olur. Bu da $R_n(x)$ polinomunun (a,b) aralığının en az bir iç noktasında işaret değiştirdiğini gösterir. Dolayısıyla $R_n(x)$, (a,b) nin içinde en az bir sıfır yerine sahiptir.

$R_n(x)$ polinomu, $r(x)$ e göre $n-$yinci dereceden olduğundan ve ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned} R_n(x) &= c_{n,n}(r-r_1)(r-r_2)...(r-r_n) \\ &= c_{n,n}(x-x_1)\, r_1^*(x-x_2)\, r_2^* ...(x-x_n)\, r_n^* \quad , \quad c_{n,n} \neq 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. $r^{'}(x)$ türevi hipotezden dolayı (a,b) aralığı içinde sıfır olmadığından $r_1^* r_2^* ... r_n^* \neq 0$ dır. Dolayısıyla $R_n(x)$, (a,b) aralığı içinde n taneden fazla sıfıra sahip olamaz.

Kabul edelim ki $R_n(x)$, (a,b) aralığı içinde x_1,x_2,...,x_q, $q \leq n$ noktalarında işaret değiştirsin. Bu durumda x_1,x_2,...,x_q noktaları $R_n(x)$ in (a,b) içinde tek katlılığa sahip sıfırlarıdır. x_1,x_2,...,x_q noktalarının katlılıkları sırasıyla σ_1,σ_2,...,σ_q olsun. Bu durumda $\sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_q \leq n$ olup $R_n(x)$ polinomu

$$R_n(x) = (x - x_1)^{\sigma_1} (x - x_2)^{\sigma_2} ... (x - x_q)^{\sigma_q} R^* \tag{4.2.7}$$

olarak yazılabilir. Burada R^*, (a,b) aralığı içinde tek işaretlidir.

Şimdi $s(x)$ e göre $q-$yuncu dereceden

$$G_q(x) = \prod_{i=1}^{q} [s(x) - s(x_i)] \tag{4.2.8}$$

polinomunu tanımlayalım. (4.2.5) ifadesinden, eğer $q < n$ ise

$$\int_a^b \rho(x) R_n(x) G_q(x) dx = 0 \tag{4.2.9}$$

olur. Diğer yandan $G_q(x)$, (4.2.8) tanımı gereğince ve ortalama değer teoreminden

$$G_q(x) = (x - x_1) s_1^* (x - x_2) s_2^* ... (x - x_q) s_q^* \tag{4.2.10}$$

şeklinde yazılabilir. Hipotezden, (a,b) içinde $s^{'}(x) \neq 0$ olduğundan $s_1^* s_2^* ... s_q^* \neq 0$ olur. (4.2.9) ifadesinde $R_n(x)$ ve $G_q(x)$ polinomları yerine sırasıyla (4.2.7) ve (4.2.10) deki ifadelerini yazarsak

$$\int_a^b \rho(x) \prod_{i=1}^{q} (x - x_i)^{1+\sigma_i} \prod_{i=1}^{q} s_i^* R^* dx \tag{4.2.11}$$

elde edilir. (4.2.11) ifadesi, R^* (a,b) aralığının içinde tek işaretli, (a,b) üzerinde $s_i^* \neq 0$, $i = 1,2,...,q$ ve $1+\sigma_i$ çift iken sıfır olamaz. Fakat bu (4.2.9) ile çelişir. Dolayısıyla $q = n$ olmalıdır. Yani her σ_i değeri 1 dir. Bu nedenle $\sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_n = n$ olur. Bu ise $R_n(x)$ in (a,b) aralığı içinde n tane basit sıfıra sahip olduğunu gösterir.

$S_n(x)$ polinomları için eşdeğer bir ispat $R_n(x)$ ve $S_n(x)$ in rolleri değiştirilerek verilebilir.

4.2.4 Biortogonal polinomlar için türev içermeyen rekürans bağıntısı

Ortogonal polinomlar için üç ardışık polinoma bağlı rekürans bağıntısı her zaman mevcuttur. Biortogonal polinomlarda benzer basit ilişki yok gibi görülür. Rekürans bağıntısı, $r(x)$ ve $s(x)$ temel polinomlarına bağlı olarak bulunabilecek üç ya da daha çok ardışık polinoma bağlıdır. Genel olarak, biortogonal polinomlar için rekürans bağıntılarının varlığı, aşağıdaki teoremde görülen temel polinomlar dışında bilinmemektedir.

Teorem 4.2.4 $s(x)$, $r(x)$ e göre $k-$yıncı dereceden bir $\omega(x)$ polinomunu göstermek üzere $r(x)$ ve $s(x)$ ler temel polinomlar olsunlar. Eğer $[R_n(x)]$ ve $[S_n(x)]$ (a,b) aralığı üzerinde bir $\rho(x)$ uygun ağırlık fonksiyonu için biortogonal polinom kümeleri iseler bu durumda herbiri $k+2$ ardışık polinom içeren

$$\omega(x)\, R_n(x) = \sum_{i=n-1}^{n+k} a_{n,i} R_i(x) \tag{4.2.12}$$

ve

$$\omega(x)\, S_n(x) = \sum_{i=n-k}^{n+1} b_{n,i} S_i(x) \tag{4.2.13}$$

rekürans bağıntıları vardır. Burada $a_{n,i}$ ve $b_{n,i}$ katsayıları x e bağlı olmayıp n nin fonksiyonlarıdır.

İspat $R_n(x)$ polinomu $r(x)$ temel polinomuna göre $n-$yinci derecedendir. Hipotezden dolayı

$$s(x) = [r(x)]^k = \omega(x)$$

dir. Böylece $\omega(x) R_n(x)$ çarpımı $r(x)$ e göre $(n+k)-$yıncı dereceden olur ve

$$\omega(x) R_n(x) = \sum_{i=0}^{n+k} a_{n,i} R_i(x) \tag{4.2.14}$$

olacak şekilde $a_{n,i}$ sabitleri mevcuttur. (4.2.14) ün her iki yanını $\rho(x) S_j(x)$ ile çarpar ve (a,b) aralığı üzerinde integre edersek, ortogonallikten

$$\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x)\omega(x) R_n(x) S_j(x)\,dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n+k} a_{n,i} R_i(x)\rho(x) S_j(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n+k} a_{n,i}\int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x)\,dx \\
&= \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+k} a_{n,i}\int_a^b \rho(x) R_i(x) S_j(x)\,dx \\
&\quad + a_{n,j}\int_a^b \rho(x) R_j(x) S_j(x)\,dx \\
&= a_{n,j}\int_a^b \rho(x) R_j(x) S_j(x)\,dx
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

elde edilir. $\omega(x) S_j(x)$ çarpımı $S_{j+1}(x)$, $S_j(x)$, ..., $S_0(x)$ in bir lineer kombinasyonudur ve $j+1 < n$ için $R_n(x)$, $\omega(x) S_j(x)$ e ortogonaldir. Buradan $j = 0, 1, ...,$ $n-2$ için $a_{n,j} = 0$ olur ve (4.2.14) toplamı $n-1$ den $n+k$ ya yazılabilir ki bu da $k+2$ tane ardışık $R_n(x)$ polinomlarının oluşturduğu (4.2.12) formunda bir rekürans bağıntısının varlığını gösterir.

(4.2.13) ifadesini elde etmek için, $s(x)$ temel polinomuna göre $(n+1)-$inci dereceden olan $\omega(x) S_n(x)$ polinomunu göz önünde tutalım. Buradan

$$\omega(x) S_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_{n,i} S_i(x) \tag{4.2.16}$$

olacak şekilde $b_{n,i}$ sabitleri mevcuttur. (4.2.16) nın her iki yanını $\rho(x) R_j(x)$ ile çarpar ve (a,b) aralığı üzerinde integre edersek, ortogonallikten

$$\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x)\,\omega(x)\,R_j(x)\,S_n(x)\,dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n+1} b_{n,i} S_i(x)\,\rho(x)\,R_j(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} b_{n,i} \int_a^b \rho(x)\,S_i(x)\,R_j(x)\,dx \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+1} b_{n,i} \int_a^b \rho(x)\,S_i(x)\,R_j(x)\,dx \\
&\quad + b_{n,j} \int_a^b \rho(x)\,S_j(x)\,R_j(x)\,dx \\
&= b_{n,j} \int_a^b \rho(x)\,S_j(x)\,R_j(x)\,dx \qquad (4.2.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\omega(x) R_j(x)$ çarpımı $R_{j+k}(x)$, $R_{j+k-1}(x)$, ..., $R_0(x)$ polinomlarının bir lineer kombinasyonudur. Ortogonallikten $\omega(x) R_j(x)$ çarpımı, $j+k<n$ için $S_n(x)$ ile ortogonaldir. Dolayısıyla $j = 0, 1, ..., n-k-1$ için $b_{n,j} = 0$ olur ve (4.2.16) toplamı $n-k$ dan $n+1$ e yazılabilir. Bu da $k+2$ tane ardışık $S_n(x)$ polinomlarına bağlı (4.2.13) formunda bir reküranс bağıntısının varlığını gösterir.

5. BAZI BİORTOGONAL POLİNOM ÖRNEKLERİ

1965 yılında Konhauser'in biortogonal polinomların genel özelliklerini elde etmesiyle konuya artan ilgi, Konhauser'in 1967 'de bir çift biortogonal polinom ailesini tanımlamasıyla üst noktaya ulaşmıştır. Laguerre polinomları tarafından belirtilen biortogonal polinomlar denilen bu polinom aileleri Konhauser polinomları olarak da adlandırılmaktadır. Bu yıldan sonra matematikçiler, özellikle klasik ortogonal polinomlar tarafından belirtilen biortogonal polinom aileleri tanımlamışlardır. Daha sonra matematikçiler çalışmalarında bu polinom aileleri için birçok özellik elde etmişlerdir.

5.1 Konhauser Polinomları

Konhauser polinomları $\alpha > -1$ olmak üzere

$$Z_n^{(\alpha)}(x;k) = \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^{kj}}{\Gamma(kj+\alpha+1)} \tag{5.1.1}$$

ve

$$Y_n^{(\alpha)}(x;k) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \left(\frac{j+\alpha+1}{k}\right)_n \tag{5.1.2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu polinomlar $(0,\infty)$ aralığında $\omega(x) = x^{\alpha}e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre biortogonaldir. Yani $m,n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_m^{(\alpha)}(x;k)\, Z_n^{(\alpha)}(x;k)\, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!} & ; \quad m = n \end{cases} \tag{5.1.3}$$

sağlanır. Gerçekten

$$J_{m,n} = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} Y_m^{(\alpha)}(x;k)\, Z_n^{(\alpha)}(x;k)\, dx$$

ifadesinde (5.1.1) ve (5.1.2) ile tanımlanan polinomları yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} J_{m,n} &= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{1}{\Gamma(kj+\alpha+1)}\frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{r!} \\ &\times\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\left(\frac{s+\alpha+1}{k}\right)_m\int_0^\infty e^{-x}x^{kj+\alpha+r}dx \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağında $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_{m,n} &= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{1}{\Gamma(kj+\alpha+1)}\frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{r!} \\ &\times\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\left(\frac{s+\alpha+1}{k}\right)_m\Gamma(kj+\alpha+r+1) \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\frac{\Gamma(kj+\alpha+r+1)}{r!\Gamma(kj+\alpha+1)}=\frac{(kj+\alpha+r)!}{r!(kj+\alpha)!}=\binom{kj+\alpha+r}{r}$$

olduğu (5.1.4) de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} J_{m,n} &= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!m!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} \\ &\times\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\left(\frac{s+\alpha+1}{k}\right)_m\binom{kj+\alpha+r}{r} \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

sonucuna varılır. Carlitz 1968 yılında göstermiştir ki eğer $f(x)$ $m-$inci dereceden bir polinom ise, o takdirde

$$f(x)=\sum_{r=0}^{m}\binom{x}{r}\Delta^r f(0)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\Delta^r f(0)=\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}f(s)$$

şeklindedir. Özellikle $f(x)=\binom{\frac{x+\alpha+1}{k}}{m}$ için,

$$\binom{\frac{x+\alpha+1}{k}}{m}=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{x}{r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{\frac{s+\alpha+1}{k}}{m}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}(-1)^r\binom{x}{r} &= (-1)^r\frac{x!}{r!\,(x-r)!}=\frac{(-x)(-x+1)\ldots(-x+r-1)}{r!}\\ &= \frac{(-x)_r}{r!}=\binom{-x+r-1}{r}\end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\binom{\frac{x+\alpha+1}{k}}{m}=\sum_{r=0}^{m}\binom{-x+r-1}{r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{\frac{s+\alpha+1}{k}}{m}$$

bulunur. $x=-kj-\alpha-1$ için

$$(-j)_m=\sum_{r=0}^{m}\binom{kj+\alpha+r}{r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{\frac{s+\alpha+1}{k}}{m}$$

dir. Bu elde edilen ifade (5.1.5) de yerine yazılırsa

$$J_{m,n}=\frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(-j)_m}{m!} \tag{5.1.6}$$

olur. (5.1.6) da

$$\frac{(-j)_m}{m!}=(-1)^m\frac{j!}{m!\,(j-m)!}=(-1)^m\binom{j}{m}$$

özelliği kullanılırsa

$$J_{m,n}=(-1)^m\frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{j}{m} \tag{5.1.7}$$

elde edilmiş olur. (5.1.7) nin sağındaki toplam düzenlenirse

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{j}{m} &= \binom{n}{m}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{(n-m)!}{(n-j)!\,(j-m)!}\\ &= \binom{n}{m}\sum_{j=m}^{n}(-1)^j\binom{n-m}{j-m}\\ &= (-1)^m\binom{n}{m}\sum_{j=0}^{n-m}(-1)^j\binom{n-m}{j}\\ &= (-1)^m\binom{n}{m}(1-1)^{n-m}\end{aligned}$$

bulunur. Son bulunan eşitlik (5.1.7) de dikkate alınırsa

$$J_{m,n}=\frac{\Gamma\left(kn+\alpha+1\right)}{n!}\delta_{n,m}$$

elde edilir ki bu da (5.1.3) ifadesinin gerçeklendiğini gösterir ($Carlitz$ 1968).

(5.1.3) eşitliği ve teorem (4.2.1) göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.1 (5.1.1) ve (5.1.2) ile tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları $(0,\infty)$ aralığında $x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre sırasıyla

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}Z_n^{(\alpha)}(x;k)\,x^i dx=\begin{cases}0 & ;\quad i=0,1,...,n-1\\ \neq 0 & ;\quad i=n\end{cases} \tag{5.1.8}$$

ve

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}Y_n^{(\alpha)}(x;k)\,x^{ki} dx=\begin{cases}0 & ;\quad i=0,1,...,n-1\\ \neq 0 & ;\quad i=n\end{cases} \tag{5.1.9}$$

ortogonallik bağıntılarını sağlarlar.

İspat (5.1.8) in sol tarafında, $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarının (5.1.1) ile verilen ifadesini yazar ve sonlu toplam olduğu için integral ile toplamın yerini değiştirirsek,

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Z_n^{(\alpha)}(x;k)\, x^i dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^{kj}}{\Gamma(kj+\alpha+1)} x^i dx \\
&= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{1}{\Gamma(kj+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-x} x^{kj+\alpha+i} dx \\
&= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{\Gamma(kj+\alpha+i+1)}{\Gamma(kj+\alpha+1)} \qquad (5.1.10)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
D^i x^{kj+\alpha+i}\Big|_{x=1} &= (kj+\alpha+i)(kj+\alpha+i-1)\ldots(kj+\alpha+1)\, x^{kj+\alpha}\Big|_{x=1} \\
&= (kj+\alpha+i)(kj+\alpha+i-1)\ldots(kj+\alpha+1)\frac{\Gamma(kj+\alpha+1)}{\Gamma(kj+\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(kj+\alpha+i+1)}{\Gamma(kj+\alpha+1)}
\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınırsa, (5.1.10) ifadesi

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Z_n^{(\alpha)}(x;k)\, x^i dx &= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!} \left\{ \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} D^i x^{kj+\alpha+i} \right\}\Bigg|_{x=1} \\
&= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!} \left\{ D^i x^{\alpha+i} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{kj} \right\}\Bigg|_{x=1} \\
&= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!} D^i\, x^{\alpha+i} \left(1-x^k\right)^n \Big|_{x=1}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade $i = 0, 1, ..., n-1$ için sıfır, $i = n$ için sıfırdan farklıdır. Bu ise (5.1.8) ifadesinin gerçeklendiğini gösterir.

(5.1.9) un ispatı için tümevarım yöntemini kullanalım. $n = 0$ için, (5.1.9) daki integral sadece $i = 0$ için hesaplanabilir. $n = 0$ için $Y_0^{(\alpha)}(x;k) = 1$ olduğundan

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \Gamma(\alpha+1) \neq 0$$

bulunur. Bu sonuç ise, (5.1.9) integralinin sıfırdan farklı olduğunu gösterir.

$n = 1$ için, (5.1.9) integralini $i = 0$ için sıfır ve $i = 1$ için sıfırdan farklı bulunması gerekmektedir. Bu integrali hesaplamak için Konhauser (1967) tarafından $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için bulunan

$$k(n+1)\,Y_{n+1}^{(\alpha)}(x;k) = xDY_n^{(\alpha)}(x;k) + (kn+\alpha+1-x)\,Y_n^{(\alpha)}(x;k) \qquad (5.1.11)$$

rekürans bağıntısından yararlanalım. (5.1.11) de $n = 0$ yazarsak,

$$\begin{aligned} Y_1^{(\alpha)}(x;k) &= k^{-1}\left(xDY_0^{(\alpha)}(x;k) + (\alpha+1-x)\,Y_0^{(\alpha)}(x;k)\right) \\ &= k^{-1}(\alpha+1-x) \end{aligned}$$

olur. Bu sonuç $i = 0$ için (5.1.9) integralinde göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Y_1^{(\alpha)}(x;k)\,dx &= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} k^{-1}(\alpha+1-x)\,dx \\ &= k^{-1}\left[(\alpha+1)\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx - \int_0^\infty x^{\alpha+1}e^{-x}dx\right] \\ &= k^{-1}\left[(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+2)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $i = 1$ için

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Y_1^{(\alpha)}(x;k)\,x^k dx &= \int_0^\infty x^{\alpha+k} e^{-x} k^{-1}(\alpha+1-x)\,dx \\ &= k^{-1}\left[(\alpha+1)\int_0^\infty x^{\alpha+k} e^{-x}dx - \int_0^\infty x^{\alpha+k+1}e^{-x}dx\right] \\ &= k^{-1}\left[(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+k+1) - \Gamma(\alpha+k+2)\right] \\ &= -\Gamma(\alpha+k+1) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n = 1$ için (5.1.9) eşitliği doğrudur. Tümevarım yöntemini tamamlamak için göstermeliyiz ki

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Y_{n+1}^{(\alpha)}(x;k)\, x^{ki} dx = \begin{cases} 0 & ; \quad i = 0, 1, ..., n \\ \neq 0 & ; \quad i = n+1 \end{cases} \tag{5.1.12}$$

olmalıdır. Hipotezden $0 \leq i < n$ için $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ nın x^{ik} ile ortogonal olduğunu biliyoruz. Bu yüzden (5.1.12) deki integralin $i = n$ için sıfır ve $i = n+1$ için sıfırdan farklı olduğunu göstermemiz yeterlidir. (5.1.11) den $Y_{n+1}^{(\alpha)}(x;k)$ çekilir ve (5.1.12) nin solunda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Y_{n+1}^{(\alpha)}(x;k)\, x^{ki} dx &= k^{-1}(n+1)^{-1} \int_0^\infty x^{\alpha+ik+1} e^{-x} D Y_n^{(\alpha)}(x;k)\, dx \\ &\quad + k^{-1}(n+1)^{-1} \int_0^\infty (kn + \alpha + 1 - x)\, x^{\alpha+ik} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x;k)\, dx \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

elde edilir. (5.1.13) eşitliğinin sağ yanındaki ilk integrale $u = x^{\alpha+ik+1}e^{-x}$ ve $dv = DY_{n+1}^{(\alpha)}(x;k)\, dx$ olmak üzere kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} Y_{n+1}^{(\alpha)}(x;k)\, x^{ki} dx &= k^{-1}(n+1)^{-1} x^{\alpha+ik+1}\, e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x;k)\Big|_0^\infty + k^{-1} \\ &\quad \times (n+1)^{-1} \int_0^\infty [x - (\alpha + ik + 1) + (kn + \alpha + 1 - x)] \\ &\quad \times x^{\alpha+ik} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x;k)\, dx \\ &= (n+1)^{-1} \int_0^\infty x^{\alpha+ik} e^{-x} (n - i)\, Y_n^{(\alpha)}(x;k)\, dx \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

bulunur. (5.1.14) $i = n$ için sıfır ve $i = n+1$ için

$$-(n+1)^{-1} \int_0^\infty x^{\alpha+kn+k} e^{-x} Y_n^{(\alpha)}(x;k)\, dx \tag{5.1.15}$$

integralinin değerine eşittir. (5.1.15) de (5.1.11) rekürans bağıntısı n kez uygulanır ve herbir uygulamayı takiben kısmi integrasyon kullanılırsa

$$-(n+1)^{-1}\int_0^{\infty} x^{\alpha+kn+k}e^{-x}Y_n^{(\alpha)}(x;k)\,dx=(-1)^{n+1}\Gamma(\alpha+kn+k+1)$$

elde edilir ki bu $i=n+1$ için (5.1.14) ün sıfırdan farklı olduğunu gösterir. O halde (5.1.9) ifadesi tümevarım yöntemiyle ispatlanmış olur.

5.1.1 Konhauser polinomları ile Laguerre polinomları arasındaki bağıntı

(5.1.1) ve (5.1.2) tanımlarından görülmektedir ki $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları $k=1$ için (2.2.2) ile tanımlanan $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarına indirgenirler. Yine benzer şekilde, (5.1.8) ve (5.1.9) ile verilen ortogonallik bağıntıları da $k=1$ için Laguerre polinomlarının (2.2.1) ile tanımlanan ortogonallik bağıntısına indirgenirler. Dolayısıyla $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarına Laguerre polinomları tarafından belirtilen biortogonal polinomlar veya Konhauser polinomları denilmektedir.

Şimdi de $Z_n^{(\alpha)}(x;1)=L_n^{(\alpha)}(x)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x;1)=L_n^{(\alpha)}(x)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten (5.1.1) ile tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ ifadesinde $k=1$ alınırsa,

$$Z_n^{(\alpha)}(x;1)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{x^j}{\Gamma(\alpha+j+1)}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\Gamma(\alpha+n+1)=\alpha!\,(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)=\alpha!\,(\alpha+1)_n$$

ve

$$(-1)^j\binom{n}{j}=\frac{(-n)_j}{j!}$$

olduğu göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned} Z_n^{(\alpha)}(x;1) &= \frac{\alpha!(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{j!}\frac{x^j}{\alpha!(\alpha+1)_j} \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j}\frac{x^j}{j!} \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

bulunur. (5.1.16) eşitliğinin sağ tarafı (2.2.2) ile tanımlanan $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları olduğundan $Z_n^{(\alpha)}(x;1) = L_n^{(\alpha)}(x)$ gerçeklenir.

Benzer şekilde (5.1.2) ile tanımlanan $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ ifadesinde $k=1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} Y_n^{(\alpha)}(x;1) &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}(j+\alpha+1)_n \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\Big\{(\alpha+1)_n - i(\alpha+2)_n + \frac{1}{2!}i(i-1) \\ &\quad \times(\alpha+3)_n + ... + (-1)^i(\alpha+i+1)_n\Big\} \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\Big\{1 - \frac{i(\alpha+n+1)}{(\alpha+1)} + \frac{1}{2!}i(i-1) \\ &\quad \times\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + ... + (-1)^i\frac{(\alpha+n+1)_i}{(\alpha+1)_i}\Big\} \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\Big\{1 + \frac{(-n)_1}{(\alpha+1)_1}x + \frac{(-n)_2}{(\alpha+1)_2}\frac{x^2}{2!} + ... + \frac{(-n)_n}{(\alpha+1)_n}\frac{x^n}{n!}\Big\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının açık ifadesi olduğundan $Y_n^{(\alpha)}(x;1) = L_n^{(\alpha)}(x)$ olduğu görülür.

5.1.2 $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için bir integral gösterim ve doğurucu fonksiyon

Konhauser (1967) $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için

$$Y_n^{(\alpha)}(x;k) = \frac{k}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{\left[(t+1)^k - 1\right]^{n+1}}dt \tag{5.1.17}$$

şeklinde bir integral gösterim elde etmiştir. Burada C t düzleminde orijini kapsayan bir dairedir. Cauchy integral formülü kullanılarak $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için bir başka gösterim

$$
\begin{aligned}
Y_n^{(\alpha)}(x;k) &= \frac{k}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{\left(t^{k-1}+kt^{k-2}+...+k\right)^{n+1}}}{t^{n+1}}dt \\
&= \frac{k}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}}{\left(t^{k-1}+kt^{k-2}+...+k\right)^{n+1}}\right\}_{t=0} \\
&= \frac{k}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}t^{n+1}}{\left[(t+1)^k-1\right]^{n+1}}\right\}_{t=0}
\end{aligned}
\tag{5.1.18}
$$

şeklinde bulunur.

$Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarının bir doğurucu fonksiyonunu bulmak için

$$
\frac{f(t)}{1-\omega\phi'(t)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}\left\{\frac{d^n}{dt^n}\left[f(t)\phi(t)^n\right]\right\}_{t=0}
\tag{5.1.19}
$$

ile verilen "Lagrange genişlemesi"ni (Szegö 1937) kullanalım. Burada $\omega=\frac{t}{\phi(t)}$ ve $\phi(t)=a_0+a_1t+...\quad(a_0\neq 0)$ şeklindedir. $f(t)=\frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha}t}{(t+1)^k-1}$ ve $\phi(t)=\frac{(t+1)^k t}{(t+1)^k-1}$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
1-\omega\phi'(t) &= 1-\frac{t}{\phi(t)}\frac{\left[(t+1)^k+tk(t+1)^{k-1}\right]\left[(t+1)^k-1\right]-tk(t+1)^{2k-1}}{\left[(t+1)^k-1\right]^2} \\
&= 1-\frac{(t+1)^k-1}{(t+1)^k}\frac{(t+1)^k\left[(t+1)^k-1-\frac{tk}{(t+1)}\right]}{\left[(t+1)^k-1\right]^2} \\
&= 1-\frac{\left[(t+1)^k-1-\frac{tk}{(t+1)}\right]}{\left[(t+1)^k-1\right]} \\
&= \frac{tk}{(t+1)\left[(t+1)^k-1\right]}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\frac{f(t)}{1-\omega\phi'(t)} = \frac{1}{k}e^{-xt}(t+1)^{\alpha+1} \tag{5.1.20}$$

dir. (5.1.18) ve (5.1.20) eşitlikleri, (5.1.19) da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} e^{-xt}(t+1)^{\alpha+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\omega^n \frac{k}{n!}\left\{\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{e^{-xt}(t+1)^{\alpha+kn}t^{n+1}}{\left[(t+1)^k-1\right]^{n+1}}\right]\right\}_{t=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\omega^n Y_n^{(\alpha)}(x;k) \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

bulunur. $\omega = \frac{t}{\phi(t)} = 1-(t+1)^{-k}$ ifadesinden t çekilir ve (5.1.21) de yerlerine yazılırlarsa, $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomları için

$$(1-\omega)^{-(\alpha+1)/k}\exp\left\{-x\left[(1-\omega)^{-1/k}-1\right]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\omega^n Y_n^{(\alpha)}(x;k) \quad , \quad |w|<1 \tag{5.1.22}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon ifadesi bulunmuş olur.

(5.1.22) ifadesinin sol tarafındaki

$$F(x,\omega) = (1-\omega)^{-(\alpha+1)/k}\exp\left\{-x\left[(1-\omega)^{-1/k}-1\right]\right\}$$

fonksiyonu $x=0$ noktasında seriye açılır ve binom açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} F(x,\omega) &= (1-\omega)^{-(\alpha+1)/k}\exp\left\{-x\left[(1-\omega)^{-1/k}-1\right]\right\} \\ &= (1-\omega)^{-(\alpha+1)/k}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\left[1-(1-\omega)^{-1/k}\right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}(1-\omega)^{-(\alpha+s+1)/k} \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

olur. $G(\omega) = (1-\omega)^{-(\alpha+s+1)/k}$ denir ve bu fonksiyon $|\omega|<1$ için $\omega=0$ noktasında

Taylor serisine açılır, (5.1.23) de dikkate alınırsa

$$F(x,\omega)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha+s+1}{k}\right)_n\frac{\omega^n}{n!} \tag{5.1.24}$$

bulunur. (5.1.24) ifadesindeki toplamlar düzenlenir ve (5.1.22) de göz önüne alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\omega^n Y_n^{(\alpha)}(x;k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{x^r}{r!}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\left(\frac{\alpha+s+1}{k}\right)_n \tag{5.1.25}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte ω^n nin karşılıklı katsayılarının eşitliğinden, $Y_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarının (5.1.2) ile verilen ifadesine varılır.

5.1.3 $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarının hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden gösterimi

Pochhammer sembolü ve Gamma fonksiyonunun özelliklerinden faydalanarak

$$\begin{aligned}
k^{kj}\Gamma(\alpha+1)\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\alpha+i}{k}\right)_j &= \Gamma(\alpha+1)\,k^{kj}\left(\frac{\alpha+1}{k}\right)_j\left(\frac{\alpha+2}{k}\right)_j\cdots\left(\frac{\alpha+k}{k}\right)_j\\
&= \Gamma(\alpha+1)\,k^{kj}\left(\frac{\alpha+1}{k}\right)\left(\frac{\alpha+1}{k}+1\right)\cdots\left(\frac{\alpha+1}{k}+j-1\right)\\
&\quad\times\left(\frac{\alpha+2}{k}\right)\left(\frac{\alpha+2}{k}+1\right)\cdots\left(\frac{\alpha+2}{k}+j-1\right)\cdots\\
&\quad\times\left(\frac{\alpha+k}{k}\right)\left(\frac{\alpha+k}{k}+1\right)\cdots\left(\frac{\alpha+k}{k}+j-1\right)\\
&= \Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+kj-k+1)\\
&\quad\times(\alpha+2)(\alpha+k+2)\ldots(\alpha+kj-k+2)\ldots\\
&\quad\times(\alpha+k)(\alpha+2k)\ldots(\alpha+kj)\\
&= \Gamma(kj+\alpha+1)
\end{aligned}$$

ve $\Gamma(kn+\alpha+1)=\Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)_{kn}$ olduğu gösterilebilir. Bu özellikler (5.1.1) ile tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarında dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} Z_n^{(\alpha)}(x;k) &= \frac{\Gamma(kn+\alpha+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{x^{kj}}{\Gamma(kj+\alpha+1)} \\ &= \frac{(\alpha+1)_{kn}}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k}\left(\frac{\alpha+i}{k}\right)_j}\left[\left(\frac{x}{k}\right)^k\right]^j \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

bulunur. Son olarak

$$(-1)^j\binom{n}{j} = \frac{(-n)_j}{j!}$$

olduğu (5.1.26) da kullanılırsa

$$\begin{aligned} Z_n^{(\alpha)}(x;k) &= \frac{(\alpha+1)_{kn}}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{j!\prod\limits_{i=1}^{k}\left(\frac{\alpha+i}{k}\right)_j}\left[\left(\frac{x}{k}\right)^k\right]^j \\ &= \frac{(\alpha+1)_{kn}}{n!}\,{}_1F_k\left[-n;\left(\frac{\alpha+1}{k}\right),...,\left(\frac{\alpha+k}{k}\right);\left(\frac{x}{k}\right)^k\right] \end{aligned}$$

olduğu görülür (*Srivastava* 1982). Bu ise $Z_n^{(\alpha)}(x;k)$ polinomlarının hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden bir gösterimidir. Burada ${}_1F_k$,

$${}_pF_r\left[\alpha_1,...,\alpha_{p;}\beta_1,...,\beta_r;x\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n...(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n...(\beta_r)_n}\frac{x^n}{n!}$$

ile gösterilen genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun bir özel halidir.

5.2 Jacobi Polinomları Tarafından Belirtilen Biortogonal Polinomlar

Madhekar ve Thakare (1982) tarafından tanımlanan ve $k=1$ için Jacobi polinomlarına indirgenebilen bir biortogonal polinom çiftini tanımlayalım.

$J_n(\alpha,\beta,k;x)$ ve $K_n(\alpha,\beta,k;x)$ polinomları sırasıyla

$$J_n(\alpha,\beta,k;x) = \frac{(\alpha+1)_{kn}}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(1+\alpha+\beta+n)_{kj}}{(\alpha+1)_{kj}}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{kj} \tag{5.2.1}$$

ve

$$K_n(\alpha,\beta,k;x)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s}\binom{r}{s}\frac{(\beta+1)_n}{n!r!\,(\beta+1)_{n-r}}\left(\frac{\alpha+s+1}{k}\right)_n\left(\frac{x-1}{2}\right)^r\left(\frac{x+1}{2}\right)^n \tag{5.2.2}$$

şeklinde tanımlanırlar.

(5.2.1) ve (5.2.2) eşitlikleri ile verilen $J_n(\alpha,\beta,k;x)$ ve $K_n(\alpha,\beta,k;x)$ polinom aileleri $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonuna göre $(-1,1)$ aralığında biortogonaldirler. Yani

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}J_n(\alpha,\beta,k;x)\,K_m(\alpha,\beta,k;x)\,dx=\begin{cases}0 & ;\ m\neq n\\ \neq 0 & ;\ m=n\end{cases}\quad ;\ m,n=0,1,...$$

dir. $k=1$ için $J_n(\alpha,\beta,k;x)$ ve $K_n(\alpha,\beta,k;x)$ polinomlarının her ikisi de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarına indirgenirler ve Jacobi polinomları tarafından belirtilen biortogonal polinomlar olarak adlandırılırlar.

6. q-BİORTOGONAL POLİNOMLAR

Biortogonal polinomların q-analoğu olan q-biortogonal polinomlar ilk olarak 1983 yılında Al-Salam ve Verma'nın (5.1.1) ve (5.1.2) ile tanımlı Konhauser polinomlarının q-analoğu olan q-Konhauser polinomlarını tanımlamalarıyla karşımıza çıkmaktadır. 1992 yılında ise Jain ve Srivastava bu polinomların birer alternatif tanımlarını elde etmişlerdir. Bu bölümde ilk olarak q-biortogonal polinomların genel tanımı verilecektir. Daha sonra q-biortogonal polinomların genel özellikleri üzerinde durulacaktır.

6.1 q-Biortogonal Polinomların Tanımı

Tanım 6.1.1 $|q| < 1$ olmak üzere $r(x;q)$ ve $s(x;q)$ polinomları sırasıyla x e göre h-ıncı ve k-ıncı dereceden polinomlar olsunlar$(h, k \in \mathbb{N})$. $R_m(x;q)$ ve $S_n(x;q)$ da sırasıyla $r(x;q)$ ve $s(x;q)$ polinomlarına göre m-inci ve n-inci dereceden olsunlar. Bu durumda $R_m(x;q)$ ve $S_n(x;q)$ sırasıyla x e göre mh-ıncı ve nk-ıncı dereceden polinomlar olurlar. $r(x;q)$ ve $s(x;q)$ polinomlarına *q-temel polinomlar* denir.

Gösterim 6.1.1 $|q| < 1$ olmak üzere $\{R_j(x;q)\}_{j=0}^{\infty}$, $r(x;q)$ ya göre $0, 1, 2, ...$ inci dereceden olan $R_0(x;q)$, $R_1(x;q)$, $R_2(x;q)$, ... polinomlarının kümesini göstersin. Benzer olarak $\{S_j(x;q)\}_{j=0}^{\infty}$ de, $s(x;q)$ ya göre $0, 1, 2, ...$ inci dereceden olan $S_0(x;q)$, $S_1(x;q)$, $S_2(x;q)$, ... polinomlarının kümesini göstersin.

Tanım 6.1.2 $|q| < 1$ olmak üzere $\{aq^n, bq^n; n \in \mathbb{N}_0\}$ kümesi üzerinde tanımlı uygun bir ağırlık fonksiyonu $\omega(x;q)$ olsun. Eğer

$$\int_a^b R_m(x;q)\, S_n(x;q)\, \omega(x;q)\, d_q x = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \neq 0 & ; \quad m = n \end{cases} \; ; \; m, n = 0, 1, \ ... \qquad (6.1.1)$$

ise, $\{R_j(x;q)\}_{j=0}^{\infty}$ ve $\{S_j(x;q)\}_{j=0}^{\infty}$ polinom kümelerine, (a, b) aralığı üzerinde, $\omega(x;q)$ uygun ağırlık fonksiyonuna ve $r(x;q)$ ve $s(x;q)$ q-temel polinomlarına göre *q-biortogonaldirler* denir.

(6.1.1) q-biortogonallik koşulu (3.2.1) q-ortogonallik koşulunun benzeridir. Belirtelim ki $q \longrightarrow 1^-$ için (6.1.1) q-biortogonallik koşulu biortogonallik koşulunu verir.

6.2 q-Biortogonal Polinomların Genel Özellikleri

Bu kısımda q-biortogonal polinomların bazı genel özelliklerini elde edeceğiz. İlk olarak (6.1.1) q-biortogonallik tanımı için eşdeğer koşullar elde edilecek, daha sonra ise herhangi iki q-biortogonal polinom ailesinin sağladıkları rekürans bağıntıları gösterilecektir.

6.2.1 q-Biortogonallik için eşdeğer koşullar

Aşağıdaki teoremde (6.1.1) e eşdeğer olan koşulları verelim.

Teorem 6.2.1 $|q| < 1$ olmak üzere $\{aq^n, bq^n; n \in \mathbb{N}_0\}$ kümesi üzerinde tanımlı uygun bir ağırlık fonksiyonu $\omega(x;q)$ olsun. $r(x;q)$ ve $s(x;q)$ q-temel polinomlar olmak üzere

$$\int_a^b \omega(x;q)\left[r(x;q)\right]^j S_n(x;q)\, d_q x = \begin{cases} 0 & ; \quad j = 0,1,...,n-1 \\ \neq 0 & ; \quad j = n \end{cases} \tag{6.2.1}$$

ve

$$\int_a^b \omega(x;q)\left[s(x;q)\right]^j R_m(x;q)\, d_q x = \begin{cases} 0 & ; \quad j = 0,1,...,m-1 \\ \neq 0 & ; \quad j = m \end{cases} \tag{6.2.2}$$

ifadelerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul, $m, n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\int_a^b \omega(x;q) R_m(x;q) S_n(x;q)\, d_q x = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \neq 0 & ; \quad m = n \end{cases} \tag{6.2.3}$$

olmasıdır.

İspat (6.2.1) ve (6.2.2) sağlansın.

$$R_m(x;q)=\sum_{j=0}^{m}{}_qc_{m,j}\left[r(x;q)\right]^j \tag{6.2.4}$$

olacak şekilde ${}_qc_{m,j}$ $(j=0,1,...,m)$, ${}_qc_{m,m}\neq 0$ sabitleri mevcuttur. (6.2.4) değeri (6.2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x;q)\,R_m(x;q)\,S_n(x;q)\,d_qx &= \int_a^b \omega(x;q)\left\{\sum_{j=0}^{m}{}_qc_{m,j}\left[r(x;q)\right]^j\right\}S_n(x;q)\,d_qx\\ &= \sum_{j=0}^{m}{}_qc_{m,j}\int_a^b \omega(x;q)\left[r(x;q)\right]^j S_n(x;q)\,d_qx\end{aligned}$$

olur. Eğer $m\leq n$ ise (6.2.1) den dolayı $j=n=m$ durumu hariç

$$\int_a^b \omega(x;q)\left[r(x;q)\right]^j S_n(x;q)\,d_qx=0$$

elde edilir. $m>n$ olması durumunda ise,

$$S_n(x;q)=\sum_{j=0}^{n}{}_qd_{n,j}\left[s(x;q)\right]^j \tag{6.2.5}$$

olacak şekilde ${}_qd_{n,j}$ $(j=0,1,...,n)$, ${}_qd_{n,n}\neq 0$ sabitleri mevcut olacağından bu değer (6.2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x;q)\,R_m(x;q)\,S_n(x;q)\,d_qx &= \int_a^b \omega(x;q)\left\{\sum_{j=0}^{n}{}_qd_{n,j}\left[s(x;q)\right]^j\right\}R_m(x;q)\,d_qx\\ &= \sum_{j=0}^{n}{}_qd_{n,j}\int_a^b \omega(x;q)\left[s(x;q)\right]^j R_m(x;q)\,d_qx\end{aligned}$$

bulunur. $0\leq j\leq n$, $m>n$ olduğundan ve (6.2.2) den dolayı

$$\int_a^b \omega(x;q)\left[s(x;q)\right]^j R_m(x;q)\,d_qx=0$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi bütün durumlarda (6.2.3) eşitliği sağlanmış olur.

Tersine olarak kabul edelim ki (6.2.3) sağlansın. Bu durumda öyle ${}_qe_{m,i}$ ve ${}_qf_{n,i}$ sabitleri vardır ki

$$[r(x;q)]^j = \sum_{i=0}^{j} {}_qe_{m,i} R_i(x;q) \tag{6.2.6}$$

ve

$$[s(x;q)]^j = \sum_{i=0}^{j} {}_qf_{n,i} S_i(x;q) \tag{6.2.7}$$

yazılabilir. Böylece, eğer $0 \le j \le n$ ise

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(x;q)[r(x;q)]^j S_n(x;q)\, d_qx &= \int_a^b \omega(x;q)\left\{\sum_{i=0}^{j} {}_qe_{m,i} R_i(x;q)\right\} S_n(x;q)\, d_qx \\
&= \sum_{i=0}^{j} {}_qe_{m,i} \int_a^b \omega(x;q) R_i(x;q) S_n(x;q)\, d_qx
\end{aligned}$$

olup, $j < n$ için, (6.2.3) eşitliğinden sağ yandaki her integral sıfır olur. $j = n$ ise $i = j = n$ durumunda sıfırdan farklı diğer durumlarda sıfırdır. Dolayısıyla (6.2.1) eşitliği de sağlanır.

Diğer taraftan $0 \le j \le m$ için

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(x;q)[s(x;q)]^j R_m(x;q)\, d_qx &= \int_a^b \omega(x;q)\left\{\sum_{i=0}^{j} {}_qf_{n,i} S_i(x;q)\right\} R_m(x;q)\, d_qx \\
&= \sum_{i=0}^{j} {}_qf_{n,i} \int_a^b \omega(x;q) S_i(x;q) R_m(x;q)\, d_qx
\end{aligned}$$

olur. $j < m$ için, (6.2.3) eşitliğinden sağ yandaki her integral sıfırdır. Eğer $j = m$ ise $i = j = m$ durumunda sıfırdan farklı diğer durumlarda sıfırdır. Bu nedenle (6.2.2) eşitliğinin de sağlandığı görülür.Böylece teorem iki yönlü ispatlanmış olur.

Sonuç 6.2.1 Eğer (6.2.1) ve (6.2.2) eşitlikleri sağlanıyorsa, bu durumda

$$\int_a^b \omega(x;q)\, S_n(x;q)\, F_{n-1}(x;q)\, d_q x = 0 \tag{6.2.8}$$

ve

$$\int_a^b \omega(x;q)\, R_m(x;q)\, G_{m-1}(x;q)\, d_q x = 0 \tag{6.2.9}$$

dır. Burada $F_{n-1}(x;q)$ ve $G_{m-1}(x;q)$ lar sırasıyla $r(x;q)$ ve $s(x;q)$ q-temel polinomlarına göre dereceleri en fazla $n-1$ ve $m-1$ olan keyfi polinomlardır.

6.2.2 q-Biortogonal polinomlar için türev içermeyen rekürans bağıntısı

q-Biortogonal olan herhangi polinom aileleri için türev içermeyen rekürans bağıntısı elde etmek oldukça zordur. Ancak q-temel polinomlardan birini diğerine bağlı olarak seçersek, $m+2$ ardışık polinoma bağlı türev içermeyen rekürans bağıntıları elde edilebilir. Bunu aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 6.2.2 $|q| < 1$ olmak üzere, $s(x;q)$ ve $r(x;q)$ q-temel polinomları, $s(x;q)$, $r(x;q)$ ya göre $m-$inci dereceden bir $p(x;q)$ polinomunu belirtecek şekilde verilmiş olsun. Eğer $[R_n(x;q)]$ ve $[S_n(x;q)]$ polinom kümeleri (a,b) aralığı üzerinde uygun bir $\omega(x;q)$ ağırlık fonksiyonuna göre q-biortogonal olan polinom kümeleri iseler bu durumda her biri $m+2$ ardışık polinoma bağlı

$$p(x;q)\, R_n(x;q) = \sum_{i=n-1}^{n+m} {}_q a_{n,i} R_i(x;q) \tag{6.2.10}$$

ve

$$p(x;q)\, S_n(x;q) = \sum_{i=n-m}^{n+1} {}_q b_{n,i} S_i(x;q) \tag{6.2.11}$$

bağıntıları mevcuttur. Burada ${}_q a_{n,i}$ ve ${}_q b_{n,i}$ katsayıları x den bağımsızdırlar.

İspat $R_n(x;q)$ polinomu $r(x;q)$ q-temel polinomuna göre $n-$inci dereceden ve

$p\left(x;q\right)$ polinomu da $r\left(x;q\right)$ q-temel polinomuna göre $m-$inci dereceden olduklarından $p\left(x;q\right)R_n\left(x;q\right)$ çarpımı $r\left(x;q\right)$ ya göre $\left(n+m\right)-$inci dereceden olup

$$p\left(x;q\right)R_n\left(x;q\right)=\sum_{i=0}^{n+m}{}_qa_{n,i}R_i\left(x;q\right) \qquad (6.2.12)$$

olacak şekilde ${}_qa_{n,i}$ sabitleri mevcuttur. (6.2.12) eşitliğinin her iki yanı $\omega\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)$ ile çarpılır, $\left(a,b\right)$ üzerinden integral alınır ve q-biortogonallik tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_a^b\omega\left(x;q\right)p\left(x;q\right)R_n\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)d_qx &= \int_a^b\omega\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)\left\{\sum_{i=0}^{n+m}{}_qa_{n,i}R_i\left(x;q\right)\right\}d_qx\\ &= \sum_{i=0}^{n+m}{}_qa_{n,i}\int_a^b\omega\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)R_i\left(x;q\right)d_qx\\ &= \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+m}{}_qa_{n,i}\int_a^b\omega\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)R_i\left(x;q\right)d_qx\\ &\quad +{}_qa_{n,j}\int_a^b\omega\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)R_j\left(x;q\right)d_qx\\ &= {}_qa_{n,j}\int_a^b\omega\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)R_j\left(x;q\right)d_qx \qquad (6.2.13)\end{aligned}$$

elde edilir. $p\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)$ çarpımı $S_{j+1}\left(x;q\right),\ S_j\left(x;q\right),\ ...,\ S_0\left(x;q\right)$ lerin bir lineer kombinasyonu olup $R_n\left(x;q\right)$ polinomu $j+1<n$ için $p\left(x;q\right)S_j\left(x;q\right)$ ile q-biortogonaldir. Bundan dolayı $j=0,1,2,...,n-2$ için ${}_qa_{n,j}=0$ olup (6.2.12) toplamı $n-1$ den $n+m$ e yazılabilir. Dolayısıyla $m+2$ ardışık $R_n\left(x;q\right)$ polinomuna bağlı (6.2.10) rekürans bağıntısı mevcuttur.

Şimdi de (6.2.11) bağıntısını elde edelim. Bunun için $s\left(x;q\right)$ q-temel polinomuna göre $\left(n+1\right)-$inci dereceden olan $p\left(x;q\right)S_n\left(x;q\right)$ çarpımını göz önüne alalım. Buradan

$$p\left(x;q\right)S_n\left(x;q\right)=\sum_{i=0}^{n+1}{}_qb_{n,i}S_i\left(x;q\right) \qquad (6.2.14)$$

olacak şekilde ${}_qb_{n,i}$ katsayıları mevcuttur. (6.2.14) eşitliğinin her iki yanını $\omega\left(x;q\right)R_j\left(x;q\right)$

ile çarpar, (a,b) aralığı üzerinden integre eder ve q-biortogonallik tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(x;q)\, p(x;q)\, R_j(x;q)\, S_n(x;q)\, d_qx &= \int_a^b \omega(x;q)\, R_j(x;q) \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} {}_qb_{n,i} S_i(x;q) \right\} d_qx \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} {}_qb_{n,i} \int_a^b \omega(x;q)\, S_i(x;q)\, R_j(x;q)\, d_qx \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+1} {}_qb_{n,i} \int_a^b \omega(x;q)\, S_i(x;q)\, R_j(x;q)\, d_qx \\
&\quad + {}_qb_{n,j} \int_a^b \omega(x;q)\, S_j(x;q)\, R_j(x;q)\, d_qx \\
&= {}_qb_{n,j} \int_a^b \omega(x;q)\, S_j(x;q)\, R_j(x;q)\, d_qx \quad (6.2.15)
\end{aligned}$$

elde edilir. $p(x;q)\, R_j(x;q)$ çarpımı $R_{j+m}(x;q)$, $R_{j+m-1}(x;q)$, ..., $R_0(x;q)$ lerin bir lineer kombinasyonudur. $p(x;q)\, R_j(x;q)$ çarpımı $j+m<n$ için $S_n(x;q)$ ile q-biortogonaldir. Buradan $j=0,1,...,n-m-1$ için ${}_qb_{n,j}=0$ olur ve (6.2.14) deki toplam $n-m$ den $n+1$ e kadar yazılabilir. Dolayısıyla $m+2$ ardışık $S_n(x;q)$ polinomuna bağlı (6.2.11) rekürans bağıntısı mevcuttur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$m=1$ durumunda q-temel polinomlar birbirine eşit olur ki bu q-ortogonal polinomları verir. Bu durumda yukarıdaki rekürans bağıntıları üç ardışık polinoma bağlı olur. $q \longrightarrow 1^-$ olması durumunda ise klasik ortogonal polinomlar için üç terimli rekürans bağıntıları elde edilir.

7. q-KONHAUSER POLİNOMLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

7.1 q-Konhauser Polinomları

1983 yılında Al-Salam ve Verma tarafından

$$Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)=\frac{(q^{1+\alpha};q)_{nk}}{(q^k;q^k)_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(q^{-nk};q^k\right)_j q^{\frac{1}{2}kj(kj-1)+kj(n+\alpha+1)}}{(q^k;q^k)_j\,(q^{1+\alpha};q)_{kj}}x^{kj} \tag{7.1.1}$$

ve

$$Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)=\frac{1}{(q;q)_n}\sum_{r=0}^{n}\frac{x^r q^{\frac{1}{2}r(r-1)}}{(q;q)_r}\sum_{j=0}^{r}\frac{(q^{-r};q)_j\left(q^{1+\alpha+j};q^k\right)_n}{(q;q)_j}q^j \tag{7.1.2}$$

q-Konhauser polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomlar $(0,\infty)$ aralığında $\omega(x;q)=x^{\alpha}e_q(-x)$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_0^{\infty}Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\,Y_m^{(\alpha)}(x,k;q)\,x^{\alpha}e_q(-x)\,d_qx=\begin{cases}0 & ; \quad m\neq n\\ \neq 0 & ; \quad m=n\end{cases}\quad,\quad (m,n\in\mathbb{N}_0) \tag{7.1.3}$$

şeklinde q-biortogonallik bağıntısını sağlarlar. (7.1.1) ve (7.1.2) ile tanımlanan q-Konhauser polinomları $q\longrightarrow 1^-$ için (5.1.1) ve (5.1.2) ile tanımlı Konhauser polinomlarına indirgenirler.

q-biortogonallik için eşdeğerlik koşulları aşağıdaki q-ortogonallik bağıntılarını elde etmemizi sağlarlar. Gerçekten $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomlarının

$$\int_0^{\infty}x^{\alpha}e_q(-x)\,x^j Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\,d_qx=\begin{cases}0 & ; \quad j=0,1,...,n-1\\ \neq 0 & ; \quad j=n\end{cases} \tag{7.1.4}$$

ve

$$\int_0^{\infty}x^{\alpha}e_q(-x)\,x^{kj}Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)\,d_qx=\begin{cases}0 & ; \quad j=0,1,...,n-1\\ \neq 0 & ; \quad j=n\end{cases} \tag{7.1.5}$$

eşitliklerinden q-ortogonallik bağıntılarını sağladıkları görülmektedir.

7.2 q-Konhauser Polinomlarının Bazı Özellikleri

Bu bölümde ilk olarak (7.1.1) ile tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomları için yükseltme operatörü ve Rodrigues formülü elde edilecektir. Daha sonra ise $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ q-Konhauser polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon aileleri bulunacaktır.

7.2.1 $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomları için yükseltme operatörü

Bu kısımda (7.1.1) ile tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomları için bir yükseltme operatörü elde edilecektir. Burada $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomları özel olarak monik polinomlar seçilecektir.

Lemma 7.2.1 $k \in \mathbb{N}$ ve

$$R(...) = D_q\left(x^{\alpha} e_q(-x)...\right) \tag{7.2.1}$$

olmak üzere $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomlarının yükseltme operatörü

$$\begin{aligned} R\left(Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\right) &= D_q\left(x^{\alpha} e_q(-x) Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\right) \\ &= -\left[1+[\alpha]_q(q-1)+[nk]_q(q-1)\left(1+(q-1)[\alpha]_q\right)\right] \\ &\quad \times x^{\alpha-k} e_q(-x) Z_{n+1}^{(\alpha-k)}(x,k;q) \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

olarak verilir.

İspat $Q_{n+1}(x,k;q)$ polinomları x^k ya göre $(n+1)$-inci dereceden monik polinomlar olsunlar. $f(x)=e_q(-x)$ ve $g(x)=x^{\alpha}Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
g(x)\,D_q(f(x)) &= x^{\alpha}Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\,D_q(e_q(-x)) \\
&= -e_q(-x)\,x^{\alpha}Z_n^{(\alpha)}(x,k;q) \\
&= -e_q(-x)\,x^{\alpha-k}Q_{n+1}(x,k;q) \\
f(x)\,D_q(g(x)) &= e_q(-x)\,D_q\left(x^{\alpha}Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\right) \\
&= e_q(-x)\left[[\alpha]_q\,x^{\alpha-1}Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)+x^{\alpha}D_q\left(Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\right)\right. \\
&\quad \left.+(q-1)\,[\alpha]_q\,x^{\alpha}D_q\left(Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\right)\right] \\
&= e_q(-x)\,x^{\alpha-k}Q^*(x,k;q)\left[[\alpha]_q+[nk]_q+(q-1)\,[\alpha]_q\,[nk]_q\right]
\end{aligned}$$

ifadeleri (3.1.10) da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
D_q\left(x^{\alpha}e_q(-x)\,Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\right) &= -\left[1+[\alpha]_q(q-1)+[nk]_q(q-1)\left(1+(q-1)\,[\alpha]_q\right)\right] \\
&\quad \times x^{\alpha-k}e_q(-x)\,Q_{n+1}(x,k;q) \\
&\quad +\left[[\alpha]_q+[nk]_q\left(1+(q-1)\,[\alpha]_q\right)\right] \\
&\quad \times x^{\alpha-k}e_q(-x)\,Q^*(x,k;q) \qquad (7.2.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Q^*(x,k;q)$ x^k ya göre $n+1$ den düşük dereceli polinomları göstermektedir. O halde (7.2.3) eşitliği

$$\begin{aligned}
D_q\left(x^{\alpha}e_q(-x)\,Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\right) &= -\left[1+[\alpha]_q(q-1)+[nk]_q(q-1)\left(1+(q-1)\,[\alpha]_q\right)\right] \\
&\quad \times x^{\alpha-k}e_q(-x)\,Q_{n+1}(x,k;q) \qquad (7.2.4)
\end{aligned}$$

şekline dönüşür. (7.2.4) ifadesinin her iki yanı x^i ile çarpılır, $(0,\infty)$ üzerinden integral alınır ve (3.1.14) eşitliği ile verilen q-kısmi integrasyon formülü kullanılırsa

$$-\left[1+[\alpha]_q(q-1)+[nk]_q(q-1)\left(1+(q-1)\,[\alpha]_q\right)\right]\int_0^{\infty}x^{i+\alpha-k}e_q(-x)\,Q_{n+1}(x,k;q)\,d_qx$$

$$= \int_0^\infty x^i D_q \left(x^\alpha e_q(-x) Z_n^{(\alpha)}(x,k;q) \right) d_q x$$

$$\begin{aligned} = \; & \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(q^{-n}\right)^i \left(q^{-n}\right)^\alpha e_q\left(-q^{-n}\right) Z_n^{(\alpha)}\left(q^{-n},k;q\right) \right. \\ & \left. - \left(q^{n+1}\right)^i \left(q^{n+1}\right)^\alpha e_q\left(-q^{n+1}\right) Z_n^{(\alpha)}\left(q^{n+1},k;q\right) \right\} \\ & - [i]_q \int_0^\infty x^{i-1} x^\alpha e_q(-x) Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\, d_q x \\ & - [i]_q (q-1) \int_0^\infty x^i D_q \left(x^\alpha e_q(-x) Z_n^{(\alpha)}(x,k;q) \right) d_q x \end{aligned}$$

elde edilir.Lemma (3.2.2) de $L_n^{(\alpha)}(x;q)$ polinomları yerine $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ alınır ve benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} & - \left[1 + [\alpha]_q (q-1) + [nk]_q (q-1) \left(1 + (q-1)[\alpha]_q \right) \right] \int_0^\infty x^{i+\alpha-k} e_q(-x) Q_{n+1}(x,k;q)\, d_q x \\ & = - [i]_q \int_0^\infty x^{i-1} x^\alpha e_q(-x) Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\, d_q x \\ & - [i]_q (q-1) \int_0^\infty x^i D_q \left(x^\alpha e_q(-x) Z_n^{(\alpha)}(x,k;q) \right) d_q x \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

bulunur. $i = 1, 2, ..., n$ için $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomlarının (7.1.4) ile verilen q-ortogonallik koşulundan (7.2.5) ifadesinin sağ yanındaki ilk terim sıfır olur. Böylece

$$\int_0^\infty x^{i+\alpha-k} e_q(-x) Q_{n+1}(x,k;q)\, d_q x = 0 \quad , \quad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{7.2.6}$$

elde edilir. (7.2.6) eşitliği $Q_{n+1}(x,k;q)$ polinomlarının $(0,\infty)$ aralığı üzerinde $x^{\alpha-k} e_q(-x)$ ağırlık fonksiyonuna göre q-ortogonal olduklarını gösterir. $(0,\infty)$ aralığında $x^{\alpha-k} e_q(-x)$ ağırlık fonksiyonuna göre q-ortogonal olan polinom tek olduğundan $Q_{n+1}(x,k;q)$ polinomları yerine $Z_{n+1}^{(\alpha-k)}(x,k;q)$ polinomları yazılabilir ki bu da ispatı tamamlar.

$k=1$ için (7.2.2) ifadesi q-Laguerre polinomlarının (3.3.1) ile tanımlanan yükseltme operatörüne indirgenir.

7.2.2 Rodrigues formülü

Şimdi de $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomları için Rodrigues formülü elde edelim. R yükseltme operatörünü $Z_0^{(\alpha+nk)}(x,k;q)=1$ polinomuna ardışık olarak n kez uygulayalım. İlk uygulamada

$$\begin{aligned} D_q\left(x^\alpha e_q(-x)\,Z_0^{(\alpha)}(x,k;q)\right) &= -\left[1+[\alpha]_q(q-1)+[0]_q(q-1)\left(1+(q-1)[\alpha]_q\right)\right] \\ &\quad \times x^{\alpha-k}e_q(-x)\,Z_1^{(\alpha-k)}(x,k;q) \end{aligned}$$

olur. Burada α yerine $\alpha+nk$ alınırsa

$$\begin{aligned} D_q\left(x^{\alpha+nk}e_q(-x)\right) &= -\left[1+[\alpha+nk]_q(q-1)+[0]_q(q-1)\left(1+(q-1)[\alpha+nk]_q\right)\right] \\ &\quad \times x^{\alpha+nk-k}e_q(-x)\,Z_1^{(\alpha+nk-k)}(x,k;q) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanına R yükseltme operatörü bir kez daha uygulanırsa

$$\begin{aligned} D_q^2\left(x^{\alpha+nk}e_q(-x)\right) &= -\left[1+[\alpha+nk]_q(q-1)+[0]_q(q-1)\left(1+(q-1)[\alpha+nk]_q\right)\right] \\ &\quad \times D_q\left(x^{\alpha+nk-k}e_q(-x)\,Z_1^{(\alpha+nk-k)}(x,k;q)\right) \\ &= \left[1+[\alpha+nk]_q(q-1)+[0]_q(q-1)\left(1+(q-1)[\alpha+nk]_q\right)\right] \\ &\quad \times\left[1+[\alpha+nk-k]_q(q-1)\right. \\ &\quad \left.+[k]_q(q-1)\left(1+(q-1)[\alpha+nk-k]_q\right)\right] \\ &\quad \times x^{\alpha+nk-2k}e_q(-x)\,Z_2^{(\alpha+nk-2k)}(x,k;q) \end{aligned}$$

bulunur. İşleme bu şekilde devam edilirse $n-$inci uygulamada Rodrigues formülü

$$\begin{aligned}
D_q^n\left(x^{\alpha+nk}e_q(-x)\right) &= (-1)^n\prod_{i=1}^{n}\Big\{1+[\alpha+nk+(1-i)k]_q(q-1) \\
&\quad +[(i-1)k]_q(q-1)\Big(1+(q-1)[\alpha+nk+(1-i)k]_q\Big)\Big\} \\
&\quad \times x^{\alpha}e_q(-x)Z_n^{(\alpha)}(x,k;q) \qquad (7.2.7)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$k=1$ için (7.2.7) Rodrigues formülü (3.3.5) ile verilen q-Laguerre polinomlarının Rodrigues formülüne indirgenir.

7.2.3 q-Konhauser polinomları için doğurucu fonksiyonlar

Bu kısımda (7.1.1) ve (7.1.2) ile tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ q-Konhauser polinomları için doğurucu fonksiyonlar elde edilecektir.

Teorem 7.2.1 (7.1.1) ile tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ q-Konhauser polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)}{(q^{1+\alpha};q)_{nk}}t^n=\frac{f\left(tx^k\right)}{(t;q^k)_{\infty}} \qquad (7.2.8)$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyona sahiptir. Burada

$$f(u)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}kj(kj+j+2\alpha)}}{(q^k;q^k)_j(q^{1+\alpha};q)_{kj}}(-u)^j \qquad (7.2.9)$$

olarak tanımlanır.

İspat (7.1.1) ile ifade edilen q-Konhauser polinomunun açık ifadesi (7.2.8) de yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)}{(q^{1+\alpha};q)_{nk}}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(q^{-nk};q^k\right)_j q^{\frac{1}{2}kj(kj-1)+kj(n+\alpha+1)}}{(q^k;q^k)_n(q^k;q^k)_j(q^{1+\alpha};q)_{kj}}t^nx^{kj}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)}{(q^{1+\alpha};q)_{nk}}t^n &= \sum_{n=j}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(q^{-nk};q^k\right)_j q^{\frac{1}{2}kj(kj-1)+kj(n+\alpha+1)}}{\left(q^k;q^k\right)_n\left(q^k;q^k\right)_j\left(q^{1+\alpha};q\right)_{kj}}t^n x^{kj} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{kj}{2}(kj+j+2\alpha)}\left(-tx^k\right)^j}{\left(q^k;q^k\right)_j\left(q^{1+\alpha};q\right)_{kj}}\frac{\left(q^{-(n+j)k};q^k\right)_j(-1)^j q^{kj\left(n+\frac{j+1}{2}\right)}}{\left(q^k;q^k\right)_{n+j}}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(q^{-(n+j)k};q^k\right)_j(-1)^j q^{kj\left(n+\frac{j+1}{2}\right)}}{\left(q^k;q^k\right)_{n+j}}t^n f\left(tx^k\right) \qquad (7.2.10)
\end{aligned}$$

bulunur. (7.2.10) eşitliğinin sağındaki ifade hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\left(q^{-(n+j)k};q^k\right)_j(-1)^j q^{kj\left(n+\frac{j+1}{2}\right)}}{\left(q^k;q^k\right)_{n+j}} &= (-1)^j q^{kj\left(n+\frac{j+1}{2}\right)}\frac{\left(1-q^{-(n+j)k}\right)}{\left(1-q^k\right)} \\
&\quad\times\frac{\left(1-q^{-(n+j)k+k}\right)...\left(1-q^{-(n+j)k+k(j-1)}\right)}{\left(1-q^{2k}\right)...\left(1-q^{k(n+j)}\right)} \\
&= \frac{q^{kj\left(n+\frac{j+1}{2}\right)}}{q^{kj\left(n+\frac{j+1}{2}\right)}}\frac{1}{\left(1-q^k\right)\left(1-q^{2k}\right)...\left(1-q^{kn}\right)} \\
&\quad\times\frac{\left(1-q^{k(n+1)}\right)\left(1-q^{k(n+2)}\right)...\left(1-q^{k(n+j)}\right)}{\left(1-q^{k(n+1)}\right)...\left(1-q^{k(n+j)}\right)} \\
&= \frac{1}{\left(q^k;q^k\right)_n} \qquad (7.2.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu değer (7.2.10) da yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)}{(q^{1+\alpha};q)_{nk}}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{\left(q^k;q^k\right)_n}f\left(tx^k\right) \qquad (7.2.12)$$

bulunur. Sonuç (3.1.1) den

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)}{(q^{1+\alpha};q)_{nk}}t^n=\frac{f\left(tx^k\right)}{\left(t;q^k\right)_\infty}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Al-Salam ve Verma 1983 yılında yaptıkları çalışmada, (7.2.8) ifadesinde x yerine xy

alarak $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomlarının

$$Z_n^{(\alpha)}(xy,k;q)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(q^{1+\alpha};q)_{kn}}{(q^{1+\alpha};q)_{kn-kj}}\frac{\left(1/y^k;q^k\right)_j}{\left(q^k;q^k\right)_j}y^{kj}Z_{n-j}^{(\alpha)}(x,k;q) \qquad (7.2.13)$$

eşitliğini sağladıklarını göstermişlerdir. Ayrıca $Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomları için de

$$Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(q^k;q^k\right)_n}{\left(q^k;q^k\right)_m}\frac{(q;q)_m}{(q;q)_n}\frac{\left(q^{\alpha-\beta};q^k\right)_{n-m}}{\left(q^k;q^k\right)_{n-m}}q^{m(\alpha-\beta)}Y_m^{(\beta)}(x,k;q) \qquad (7.2.14)$$

şeklinde bir eşitlik elde etmişlerdir.

Şimdi sırasıyla $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ polinomları için doğurucu fonksiyonlar elde edelim.

Teorem 7.2.2 $n,p,s\in\mathbb{N}$, $\psi\in\mathbb{C}$ ve $a_k\neq 0$ olmak üzere s kompleks $\xi_1,...,\xi_s$ değişkene ve μ kompleks basamağa bağlı sıfır olmayan bir fonksiyon $\Omega_\mu(\xi_1,...,\xi_s)$ ve bu fonksiyon tarafından belirtilen diğer bir fonksiyon

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu,\psi,\alpha}^{n,p}(x,y;\xi_1,...,\xi_s,z,r;q) &= \sum_{k=0}^{[n/p]}a_kZ_{n-pk}^{(\alpha)}(xy,r;q)\\ &\quad\times\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)z^k \qquad (7.2.15)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $[n/p]$ ile n/p den küçük veya eşit en büyük tamsayı belirtilmektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{[k/p]}a_l\frac{(q^{1+\alpha};q)_{r(n-pl)}}{(q^{1+\alpha};q)_{r(n-pl)-r(k-pl)}}\frac{(1/y^r;q^r)_{k-pl}}{(q^r;q^r)_{k-pl}}y^{r(k-pl)}Z_{n-k}^{(\alpha)}(x,r;q)\\ &\times\Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s)z^l\\ =\ &\Lambda_{\mu,\psi,\alpha}^{n,p}(x,y;\xi_1,...,\xi_s,z,r;q) \qquad (7.2.16)\end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

İspat (7.2.16) eşitliğinin sol yanını S ile gösterelim.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \frac{\left(q^{1+\alpha};q\right)_{r(n-pl)}}{\left(q^{1+\alpha};q\right)_{r(n-pl)-r(k-pl)}} \frac{\left(1/y^r;q^r\right)_{k-pl}}{\left(q^r;q^r\right)_{k-pl}} y^{r(k-pl)} Z_{n-k}^{(\alpha)}\left(x,r;q\right) \\
&\quad \times \Omega_{\mu+\psi l}\left(\xi_1,...,\xi_s\right) z^l
\end{aligned}
$$

Burada $\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{[k/p]} A\left(k,l\right) = \sum_{k=0}^{n-pl}\sum_{l=0}^{[n/p]} A\left(k+pl,l\right)$ (*Rainville* 1960) bağıntısı kullanılır ve ifadeler düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \Omega_{\mu+\psi l}\left(\xi_1,...,\xi_s\right) z^l \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{n-pl} \frac{\left(q^{1+\alpha};q\right)_{r(n-pl)}}{\left(q^{1+\alpha};q\right)_{r(n-pl)-rk}} \frac{\left(1/y^r;q^r\right)_k}{\left(q^r;q^r\right)_k} y^{rk} Z_{n-k-pl}^{(\alpha)}\left(x,r;q\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ yanındaki ifadede (7.2.13) kullanılırsa

$$
S = \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \Omega_{\mu+\psi l}\left(\xi_1,...,\xi_s\right) Z_{n-pl}^{(\alpha)}\left(xy,r;q\right) z^l
$$

bulunur. (7.2.15) den dolayı

$$
S = \Lambda_{\mu,\psi,\alpha}^{n,p}\left(x,y;\xi_1,...,\xi_s,z,r;q\right)
$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 7.2.3 $n,p,s\in\mathbb{N}$ olmak üzere s kompleks $\xi_1,...,\xi_s$ değişkene ve μ kompleks basamağa bağlı sıfır olmayan bir fonksiyon $\Omega_\mu\left(\xi_1,...,\xi_s\right)$ ve bu fonksiyon tarafından belirtilen diğer bir fonksiyon

$$
\Lambda_{\mu,\psi}^{(1)}\left(\xi_1,...,\xi_s;\tau\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}\left(\xi_1,...,\xi_s\right)\tau^k \quad , \quad \left(a_k\neq 0,\psi\in\mathbb{C}\right) \qquad (7.2.17)
$$

ve

$$\begin{aligned}\Theta_{n,p}^{\alpha,\mu,\psi}\left(x;\xi_1,...,\xi_s;\zeta;r;q\right) &= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{1}{\left(q^{1+\alpha};q\right)_{r(n-pk)}} Z_{n-pk}^{(\alpha)}\left(x,r;q\right) \\ &\quad \times \Omega_{\mu+\psi k}\left(\xi_1,...,\xi_s\right)\zeta^k \qquad (7.2.18)\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\alpha,\mu,\psi}\left(x;\xi_1,...,\xi_s;\frac{\eta}{t^p};r;q\right)t^n = \frac{f\left(tx^r\right)}{\left(t;q^r\right)_\infty}\Lambda_{\mu,\psi}^{(1)}\left(\xi_1,...,\xi_s;\eta\right) \qquad (7.2.19)$$

bağıntısı gerçeklenir. Burada f, (7.2.9) ile tanımlandığı şekildedir.

İspat R ile (7.2.19) eşitliğinin sol yanını gösterelim.

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\alpha,\mu,\psi}\left(x;\xi_1,...,\xi_s;\frac{\eta}{t^p};r;q\right)t^n$$

(7.2.18) den dolayı

$$R = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{1}{\left(q^{1+\alpha};q\right)_{r(n-pk)}} Z_{n-pk}^{(\alpha)}\left(x,r;q\right)\Omega_{\mu+\psi k}\left(\xi_1,...,\xi_s\right)\eta^k t^{n-pk}$$

elde edilir. Burada $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} B\left(k,n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B\left(k,n+pk\right)$ bağıntısı kullanılır ve ifadeler düzenlenirse

$$\begin{aligned}R &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{\left(q^{1+\alpha};q\right)_{rn}} Z_n^{(\alpha)}\left(x,r;q\right)\Omega_{\mu+\psi k}\left(\xi_1,...,\xi_s\right)\eta^k t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}\left(\xi_1,...,\xi_s\right)\eta^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(q^{1+\alpha};q\right)_{rn}} Z_n^{(\alpha)}\left(x,r;q\right)t^n \qquad (7.2.20)\end{aligned}$$

bulunur. (7.2.20) ifadesinde (7.2.8) ve (7.2.17) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$R = \frac{f\left(tx^r\right)}{\left(t;q^r\right)_\infty}\Lambda_{\mu,\psi}^{(1)}\left(\xi_1,...,\xi_s;\eta\right)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 7.2.4 $n,p,s\in\mathbb{N}$, $\psi\in\mathbb{C}$ ve $a_k\neq 0$ olmak üzere s kompleks $\xi_1,...,\xi_s$ değişkene ve μ kompleks basamağa bağlı sıfır olmayan bir fonksiyon $\Omega_\mu(\xi_1,...,\xi_s)$ ve bu fonksiyon tarafından belirtilen diğer bir fonksiyon

$$\begin{aligned}\Delta^{n,p}_{\mu,\psi,\alpha}(x;\xi_1,...,\xi_s,z,r;q) &= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k Y^{(\alpha)}_{n-pk}(x,r;q)\\ &\quad\times\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,...,\xi_s)\,z^k \end{aligned}\qquad(7.2.21)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{[k/p]} a_l\frac{(q^r;q^r)_{n-pl}(q;q)_{k-pl}\left(q^{\alpha-\beta};q^r\right)_{(n-pl)-(k-pl)}}{(q^r;q^r)_{k-pl}(q;q)_{n-pl}(q^r;q^r)_{(n-pl)-(k-pl)}}q^{(k-pl)(\alpha-\beta)}\\ &\times Y^{(\beta)}_{k-pl}(x,r;q)\,\Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s)\,z^l\\ =\ &\Delta^{n,p}_{\mu,\psi,\alpha}(x;\xi_1,...,\xi_s,z,r;q)\end{aligned}\qquad(7.2.22)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat (7.2.22) eşitliğinin sol yanını K ile gösterelim.

$$\begin{aligned}K &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{[k/p]} a_l\frac{(q^r;q^r)_{n-pl}(q;q)_{k-pl}\left(q^{\alpha-\beta};q^r\right)_{(n-pl)-(k-pl)}}{(q^r;q^r)_{k-pl}(q;q)_{n-pl}(q^r;q^r)_{(n-pl)-(k-pl)}}q^{(k-pl)(\alpha-\beta)}\\ &\quad\times Y^{(\beta)}_{k-pl}(x,r;q)\,\Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s)\,z^l\end{aligned}$$

Burada $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{l=0}^{[k/p]}A(k,l)=\sum\limits_{k=0}^{n-pl}\sum\limits_{l=0}^{[n/p]}A(k+pl,l)$ bağıntısı kullanılır ve ifadeler düzenlenirse

$$\begin{aligned}K &= \sum_{k=0}^{n-pl}\sum_{l=0}^{[n/p]} a_l\frac{(q^r;q^r)_{n-pl}(q;q)_{k}\left(q^{\alpha-\beta};q^r\right)_{(n-pl)-k}}{(q^r;q^r)_{k}(q;q)_{n-pl}(q^r;q^r)_{(n-pl)-k}}q^{k(\alpha-\beta)}\\ &\quad\times Y^{(\beta)}_{k}(x,r;q)\,\Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s)\,z^l\\ &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l\Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s)\,z^l\\ &\quad\times\sum_{k=0}^{n-pl}\frac{(q^r;q^r)_{n-pl}(q;q)_{k}\left(q^{\alpha-\beta};q^r\right)_{(n-pl)-k}}{(q^r;q^r)_{k}(q;q)_{n-pl}(q^r;q^r)_{(n-pl)-k}}q^{k(\alpha-\beta)}Y^{(\beta)}_{k}(x,r;q)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ yanı (7.2.14) den dolayı $Y_{n-pl}^{(\alpha)}(x,r;q)$ olduğundan

$$K=\sum_{l=0}^{[n/p]} a_l Y_{n-pl}^{(\alpha)}(x,r;q)\,\Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1,...,\xi_s)\,z^l \tag{7.2.23}$$

bulunur. (7.2.23) ifadesinde (7.2.21) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$K=\Delta_{\mu,\psi,\alpha}^{n,p}(x;\xi_1,...,\xi_s,z,r;q)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Bu teoremlerden görülmektedir ki, $a_k\,(k\in\mathbb{N}_0)$ katsayılarının her bir uygun seçimi için, eğer çok değişkenli $\Omega_\mu(\xi_1,...,\xi_s)$ fonksiyonunu farklı basit fonksiyonların uygun çarpımı olarak seçersek, yukarıdaki teoremler $Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)$ q-Konhauser polinomları için çok sayıda multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar belirtirler.

Kısım 7 de belirttiğimiz gibi

$$Z_n^{(\alpha)}(x,1;q)=L_n^{(\alpha)}(x;q)=Y_n^{(\alpha)}(x,1;q) \tag{7.2.24}$$

olduğundan, $r=1$ özel durumu için yukarıdaki teoremlerde elde ettiğimiz sonuçların hepsi (3.2.2) ile tanımlanan $L_n^{(\alpha)}(x;q)$ q-Laguerre polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar belirtirler.

Ayrıca

$$Z_n^{(\alpha)}(x,k;q)\longrightarrow Z_n^{(\alpha)}(x,k)\ \text{ ve } Y_n^{(\alpha)}(x,k;q)\longrightarrow Y_n^{(\alpha)}(x,k)\quad,\ q\longrightarrow 1^-\ \text{ için}$$

ve

$$L_n^{(\alpha)}(x;q)\longrightarrow L_n^{(\alpha)}(x)\quad,\ q\longrightarrow 1^-\quad \text{için}$$

olduğundan yukarıda elde ettiğimiz bütün sonuçlar $q\longrightarrow 1^-$ olduğunda (5.1.1) ve

(5.1.2) ile tanımlanan $Z_n^{(\alpha)}(x,k)$ ve $Y_n^{(\alpha)}(x,k)$ Konhauser polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon aileleri belirtirler. Ayrıca (7.2.24) ün ışığı altında (2.2.2) ile tanımlanan $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları için, daha önce Rassias ve Srivastava (2002) tarafından çalışılan, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon aileleri elde edilir .

KAYNAKLAR

Al-Salam, W. and Verma, A. 1983. q-Konhauser polynomials. Pacific Journal of Mathematics, 108; 1-7.

Carlitz, L. 1968. A note on certain biorthogonal polynomials. Pacific Journal of Mathematics, 24; 425-430.

Konhauser, J. D. E. 1965. Some properties of biorthogonal ploynomials.Journal of Mathematical Analysis and Applications, 11; 242-260.

Konhauser, J. D. E. 1967. Biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre Polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 21; 303-314.

Madhekar, H. C. and Thakare, N. K. 1982. Biorthogonal polynomials suggested by the Jacobi polynomials. Pacific Journal of Mathematics, 100; 417-424.

Moak, D. S. 1981. The q-analogue of the Laguerre polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 81; 20-47.

Preiser, S. 1962. An investigation of biorthogonal polynomials derivable from ordinary differential equations of the third order. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 4; 38-64.

Rainville, E. D. 1960. Special functions. 365 p. The Macmillan Company. New York.

Rassias, T. M. and Srivastava, H. M. 2002.A certain class of biorthogonal polynomials associated with the Laguerre polynomials. Applied Mathematics and Computation, 128; 379-385.

Srivastava, H. M. 1982. Some biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials. Pacific Journal of Mathematics, 98; 235-250.

Szegö, G. 1975. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Colloquim Publications, Vol 23. American Mathematical Society.

Şekeroğlu, B. 2006. q-Biortogonal Polinomların Bazı Özellikleri. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimeri Enstitütüsü. Ankara.

Şekeroğlu, B., Srivastava, H. M. and Taşdelen, F. 2007. Some properties of q-biorthogonal ploynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 326; 896-907.

Srivastava, H. M., Taşdelen, F. and Şekeroğlu, B. Some families of generating functions for the q-Konhauser polynomials, (*Baskıda*).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Serhan VARMA
Doğum Yeri	:	Mersin
Doğum Tarihi	:	04.04.1984
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	İçel Anadolu Lisesi (2002)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2006)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2006 – Temmuz 2008)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2007 – ...)