ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİĞİ

Meltem METİNEREN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2009

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN
MONOTON İTERASYON TEKNİĞİ

Meltem METİNEREN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. A.Feza GÜVENİLİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm temel kavramlara ayrılmıştır. Alt ve üst çözümler yardımıyla monoton iterasyon tekniği lineer olmayan diferensiyel denklemlere uygulanmıştır.
İkinci bölümde, monoton iterasyon tekniği gecikmeli diferensiyel denklemler için verilmiştir.
Üçüncü bölümde, hem gecikmeli hem de ileri terim içeren fonksiyonel diferensiyel denklemler için monoton iterasyon tekniği incelenmiştir.
Dördüncü bölümde, beşinci bölümde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilmiştir.
Beşinci bölümde ise monoton iterasyon tekniği, ilk olarak sadece ileri terim içeren fonksiyonel diferensiyel sistemler için ve daha sonra da gecikmeli ve ileri terimli fonksiyonel diferensiyel sistemler için incelenmiştir.

Şubat 2009, 72 sayfa

Anahtar Kelimeler : Alt ve üst çözümler, gecikmeli diferensiyel denklemler, gecikmeli ve ileri terimli fonksiyonel diferensiyel denklemler, monoton iterasyon tekniği.

ABSTRACT

Master Thesis

MONOTONE ITERATIVE TECHNIQUE FOR
FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Meltem METINEREN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. A.Feza GUVENILIR

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to basic notions. By the help of lower and upper solutions we apply monotone iterative technique to non-linear differential equations.

In the second chapter, we give monotone iterative technique for delay differential equations.

In the third chapter, we investigate the monotone iterative technique for functional differential equations with retardation and anticipation.

In the fourth chapter we give the definitions and theorems which are used in the fifth chapter.

In the fifth chapter, we first investigate the monotone iterative technique for functional differential systems with anticipation, then we investigate the technique for functional differential systems with retardation and anticipation.

February 2009, 72 pages

Key Words: Lower and upper solutions, Delay differential equations, Functional differential equations with retardation and anticipation, Monotone iterative technique

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Yrd.Doç.Dr. A.Feza GÜVENİLİR (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e, çalışmalarım sırasında önemli katkılarda bulunan ve yönlendiren Prof.Dr. A.Okay ÇELEBİ (Yeditepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)'ye, çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme ve Araş.Gör. Çağlar UYANIK (ODTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi)'a en derin duygularla teşekkür ederim.

Meltem METİNEREN
Ankara, Şubat 2009

İÇİNDEKİLER

1. LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİĞİ

1.1 Giriş

Monoton iterasyon tekniği, çözümü elde edilemeyen diferensiyel denklemlerin çözümlerinin alt ve üst çözümler yardımı ile varlığının ve tekliğinin elde edilmesini sağlamaktadır. Bu konuda temel oluşturan bir kaynak Ladde *et al.*(1985) 'nın kitabıdır.

1.2 Başlangıç Değer Problemleri İçin Alt ve Üst Çözümler

$f \in C\,[J \times \mathbb{R},\mathbb{R}]$ ve $J = [0, T]$ de tanımlı olmak üzere,

$$u' = f\,(t, u)\,,\;\; u\,(0) = u_0 \tag{1.2.1}$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

Tanım 1.2.1. (a) $t \in J$ için $v' \leq f\,(t, v)\,,\; v\,(0) \leq u_0$ ise $v \in C^1\,[J, \mathbb{R}]$ fonksiyonuna (1.2.1) in bir alt çözümü denir.
(b) $t \in J$ için $\omega' \geq f\,(t, \omega)$, $\omega\,(0) \geq u_0$ ise $\omega \in C^1\,[J, \mathbb{R}]$ fonksiyonuna (1.2.1) in bir üst çözümü denir.

Tanım 1.2.2. (a) $r\,(t)\,,$ J de (1.2.1) in bir çözümü olsun. Eğer, J de (1.2.1) in $u\,(t)$ çözümü için

$$u\,(t) \leq r\,(t)\,,\;\; t \in J$$

oluyorsa $r\,(t)$ ye (1.2.1) in maksimal çözümü denir.
(b) $\rho\,(t)\,,$ J de (1.2.1) in bir çözümü olsun. Eğer, J de (1.2.1) in $u\,(t)$ çözümü için

$$u\,(t) \geq \rho\,(t)\,,\;\; t \in J$$

oluyorsa $\rho\,(t)$ ye (1.2.1) in minimal çözümü denir.

Alt ve üst çözümlerle ilgili önemli bir sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.1. $\upsilon, \omega \in C^1[J, \mathbb{R}]$ sırasıyla (1.2.1) in alt ve üst çözümleri olsun. $x \geq y$ için,

$$f(t,x) - f(t,y) \leq L(x-y)\,, \quad (L > 0) \tag{1.2.2}$$

sağlansın. Bu durumda $\upsilon(0) \leq \omega(0)$ ise

$$\upsilon(t) \leq \omega(t)\,, t \in J$$

olur.

İspat: Teorem ilk olarak kesin eşitsizlik için ispatlanacaktır.

$$\omega' > f(t,\omega)\,,\ \upsilon' \leq f(t,\upsilon)\,, t \in J$$

ve $\upsilon(0) < \omega(0)$ olsun.

$$\upsilon(t) < \omega(t)\,,\ t \in J$$

eşitsizliği olmayana ergi yöntemi ile gösterilecektir. O halde, $\upsilon(t_1) = \omega(t_1)$ olacak şekilde bir $t_1 \in (0,T]$ vardır ve

$$\upsilon(t) < \omega(t)\,,\ t \in (0,t_1)$$

dir. Bu durumda yeteri kadar küçük $h > 0$ için

$$\upsilon(t_1 - h) - \upsilon(t_1) < \omega(t_1 - h) - \omega(t_1)$$

dir. Burada t_1 yerine $t_1 + h$ alınıp, $h \to 0$ için limite geçilirse;

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\upsilon(t_1+h) - \upsilon(t_1)\right] > \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\omega(t_1+h) - \omega(t_1)\right]$$

elde edilir. Bu durumda;

$$\upsilon'(t_1) \geq \omega'(t_1) \tag{1.2.3}$$

dır. O halde

$$v'(t_1) \leq f(t_1, v(t_1)), \ \omega'(t_1) > f(t_1, \omega(t_1))$$

olmasından dolayı (1.2.3) den;

$$f(t_1, v(t_1)) \geq v'(t_1) \geq \omega(t_1) > f(t_1, \omega(t_1))$$

dir. Kabulden $f(t_1, v(t_1)) = f(t_1, \omega(t_1))$ olup bu bir çelişkidir. Böylece

$$v(t) < \omega(t), \ t \in J$$

elde edilir. Artık eşitlik durumu ispatlanabilir. $\varepsilon > 0$ yeterince küçük olmak üzere $\widetilde{\omega}(t)$,

$$\widetilde{\omega}(t) = \omega(t) + \varepsilon e^{2Lt} \tag{1.2.4}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca,

$$\widetilde{\omega}'(t) = \omega'(t) + 2L\varepsilon e^{2Lt}$$

dır. ω, (1.2.1) in üst çözümü olduğundan,

$$\widetilde{\omega}'(t) \geq f(t, \omega(t)) + 2L\varepsilon e^{2Lt}$$

elde edilir.Burada

$$\widetilde{\omega}'(t) \geq -[f(t, \widetilde{\omega}(t)) - f(t, \omega(t))] + f(t, \widetilde{\omega}(t)) + 2L\varepsilon e^{2Lt}$$

yazılabilir. (1.2.2.) den;

$$\widetilde{\omega}'(t) \geq -L[\widetilde{\omega}(t) - \omega(t)] + f(t, \widetilde{\omega}(t)) + 2L\varepsilon e^{2Lt}$$

dir. (1.2.4) den;

$$-L[\widetilde{\omega}(t) - \omega(t)] + f(t, \widetilde{\omega}(t)) + 2L\varepsilon e^{2Lt} = L\varepsilon e^{2Lt} + f(t, \widetilde{\omega}(t))$$

bulunur. O halde;

$$\widetilde{\omega}'(t) > f(t, \widetilde{\omega}(t))$$

elde edilir. Aynı zamanda $\upsilon(0) \leq \omega(0) \leq \widetilde{\omega}(0)$ dır. Böylece önceki ispattan

$$\upsilon(t) < \widetilde{\omega}(t)\,,\ t \in J$$

dir. $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa;

$$\upsilon(t) \leq \omega(t)\,,\ t \in J$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 1.2.1. (1.2.1) in çözümü tek değilse Teorem 1.2.1. doğru olmak zorunda değildir. Bu durumda υ, (1.2.1) in maksimal çözümü ve ω da minimal çözümü olarak alınabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \upsilon' &= f(t, \upsilon)\,,\ \upsilon(0) = u_0 \\ \omega' &= f(t, \omega)\,,\ \omega(0) = u_0 \end{aligned}$$

dır. Fakat J de $\upsilon(t) \nleq \omega(t)$ dir.
Sonuç olarak tekliği garantileyen bazı kabuller kaçınılmazdır. (1.2.2) koşulu Teorem 1.2.1. in geçerliliği için yeterlidir.
Ayrıca tek yanlı Lipschitz koşulu olan (1.2.2), Teorem 1.2.1. in sadece kesin olmayan eşitsizlik durumunun ispatı için kullanıldı. Ayrıca ispata dikkat edilirse, υ ve ω nın C^1 sınıfında olması gerekmez. Bu durumda sadece alt ve üst çözümleri Dini türevleri cinsinden tanımlamak gerekir. Örneğin;

$$D_{-}\upsilon = \lim_{h \to 0^-} \inf h^{-1}\left[\upsilon(t+h) - \upsilon(t)\right]$$

olmak üzere

$$D_{-}\upsilon \leq f(t, \upsilon)\,, \quad D_{-}\omega \geq f(t, \omega)$$

tanımları yapılabilir.

Teorem 1.2.1. in ardışık uygulamasının bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.2.2. Teorem 1.2.1. in kabulleri sağlansın. Bu durumda (1.2.1) in

$$\upsilon(0) \leq u_0 \leq \omega(0)$$

olacak şekildeki her $u(t)$ çözümü J de ;

$$\upsilon(t) \leq u(t) \leq \omega(t)$$

eşitsizliğini sağlar.

Dikkat edilirse Teorem 1.2.1. de f in tek yanlı Lipschitz koşulunu gerçekleştirmesi durumunda, (1.2.1) in bir üst çözümünün bir alt çözümünü üstten sınırladığı gösterilmiştir. Lipschitz koşulu kabul edilmeden de (1.2.1) in $\upsilon(t) \leq \omega(t)$ olacak şekilde υ, ω alt ve üst çözümleri oluşturulabilir. Buna ilişkin şu teorem verilebilir;

Teorem 1.2.3. $f, f_1, f_2 \in C[J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ ve

$$f_1(t,u) \leq f(t,u) \leq f_2(t,u), \quad (t,u) \in J \times \mathbb{R} \tag{1.2.5}$$

olsun. υ, J de

$$\upsilon' = f_1(t,\upsilon), \ \upsilon(0) \leq u_0$$

probleminin herhangi bir çözümü ve ω de ,

$$\omega' = f_2(t,\omega), \ \omega(0) \geq u_0$$

probleminin maksimal çözümü olsun. Bu durumda υ ve ω,

$$\upsilon(t) \leq \omega(t), \ t \in J$$

olacak şekilde (1.2.1) in alt ve üst çözümleridir.

İspat: (1.2.5) ten

$$v' \leq f_2(t, v), \ v(0) \leq u_0$$

dır. Böylece

$$D_- v = \liminf_{h \to 0} h^{-1} [v(t+h) - v(t)] \leq f_2(t, v)$$

olup,

$$v(t) \leq \omega(t) \ \ t \in J$$

dir (Lakshmikantham 1985). Ayrıca (1.2.5) den;

$$v' \leq f(t, v), \ v(0) \leq u_0$$

ve

$$\omega' \geq f(t, \omega), \ \omega(0) \geq u_0$$

olduğu kolayca görülebilir, ki bu da v ve ω nın (1.2.1) in alt ve üst çözümleri olması demektir. Böylece ispat tamamlanır.

$$v' = f_1(t, v), \ v(0) \leq u_0$$

$$\omega' = f_2(t, \omega), \ \omega(0) \geq u_0$$

$v \leq \omega$ olacak biçimde v ve ω nın (1.2.1) in alt ve üst çözümleri olduğu biliniyorsa,

$$\Omega = [(t, u) : \ v(t) \leq u \leq \omega(t), \ t \in J]$$

kapalı cümlesinde bir çözümün varlığı aşağıdaki teorem ile ispatlanabilir.

Teorem 1.2.4. $f \in C[\Omega, \mathbb{R}]$ ve J de $v, \omega \in C^1[J, \mathbb{R}]$, $v(t) \leq \omega(t)$ olacak şekilde (1.2.1) in alt ve üst çözümleri olsun. Bu durumda J de ,

$$v(t) \leq u(t) \leq \omega(t)$$

olacak şekilde (1.2.1) in bir $u(t)$ çözümü vardır.

İspat: İspat için $P : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$P(t,u) = \max\left[\upsilon(t),\ \min(u(t), \omega(t))\right]$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $f(t, P(t,u))$, f in $J \times \mathbb{R}$ ye sürekli bir genişlemesidir. Gerçekten, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ operatörünün bir $J \times \mathbb{R} \supset \Omega$ cümlesine olan genişlemesi her $(t,u) \in \Omega$ için $P(t,u) = f(t,u)$ olacak şekilde tanımlanan bir $P : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ operatörüdür.

υ ve ω (1.2.1) in alt ve üst çözümleri olduklarından f sınırlıdır. Böylece $f(t, P(t,u))$ sınırlı ve sürekli olduğundan J de

$$u' = f(t, P(t,u)),\ u(0) = u_0 \tag{1.2.6}$$

bir çözüme sahiptir (Lakshmikantham 1985). $\varepsilon > 0$ için

$$\omega_\varepsilon(t) = \omega(t) + \varepsilon(1+t)$$

$$\upsilon_\varepsilon(t) = \upsilon(t) - \varepsilon(1+t)$$

tanımlansın. Teoremdeki kabulden J de

$$\upsilon(0) \leq \omega(0)$$

dır. Ayrıca $\omega_\varepsilon(0) > \omega(0)$ ve $\upsilon_\varepsilon(0) < \upsilon(0)$ dır. υ ve ω alt ve üst çözüm olduklarından;

$$\upsilon(0) \leq u_0 \leq \omega(0)$$

dır. Bu durumda;

$$\upsilon_\varepsilon(0) < u_0 < \omega_\varepsilon(0)$$

dır. Şimdi J de,

$$\upsilon_\varepsilon(t) < u(t) < \omega_\varepsilon(t)$$

olduğu olmayana ergi yöntemiyle gösterilecektir. $[0, t_1)$ de

$$\upsilon_\varepsilon(t) < u(t) < \omega_\varepsilon(t)$$

olacak biçimde bir $t_1 \in (0, T]$ vardır ve $u(t_1) = \omega_\varepsilon(t_1)$ dir.

$$\omega_\varepsilon(t_1) > \omega(t_1)$$

olduğundan $u(t_1) > \omega(t_1)$ dir. Böylece

$$P(t_1, u(t_1)) = \max[\upsilon(t_1), \ \omega(t_1)]$$

dır. υ ve ω, (1.2.1) in alt ve üst çözümleri olduğundan $\upsilon(t_1) < \omega(t_1)$ dir. O halde;

$$P(t_1, u(t_1)) = \omega(t_1) \tag{1.2.7}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\upsilon(t_1) \leq P(t_1, u(t_1)) \leq \omega(t_1)$$

dir. ω üst çözüm olduğundan;

$$\omega'(t_1) \geq f(t_1, \omega(t_1))$$

dir ve (1.2.7) den;

$$\omega'(t_1) \geq f(t_1, P(t_1, u(t_1)))$$

eşitsizliği elde edilir. (1.2.6) dan;

$$\omega'(t_1) \geq f(t_1, P(t_1, u(t_1))) = u'(t_1)$$

dir. $\omega_\varepsilon(t)$ nin tanımından $\omega'_\varepsilon(t_1) > u'(t_1)$ dir. Bu $t \in [0, t_1)$ için $u(t) < \omega_\varepsilon(t)$ ile çelişir. Böylece J de $\upsilon_\varepsilon(t) < u(t) < \omega_\varepsilon(t)$ dir ve $\varepsilon \to 0$ alınırsa

$$\upsilon(t) \le u(t) \le \omega(t)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

1.3 Başlangıç Değer Problemleri İçin Monoton İterasyon Tekniği

Teorem 1.3.1. $f \in C[J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, υ_0, ω_0, J de $\upsilon_0 \le \omega_0$ olacak şekilde (1.2.1) in alt ve üst çözümleri olsun. Ayrıca

$$f(t,u) - f\left(t,\bar{u}\right) \ge -M\left(u - \bar{u}\right),\ \upsilon_0 \le \bar{u} \le u \le \omega_0,\ M \ge 0 \tag{1.3.1}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda J de $\upsilon_n \to \upsilon$, $\omega_n \to \omega$ ($n \to \infty$ için) düzgün yakınsak ve monoton olacak şekilde $\{\upsilon_n\}, \{\omega_n\}$ monoton dizileri vardır. υ ve ω sırasıyla (1.2.1) in minimal ve maksimal çözümleridir.

İspat: Herhangi $\mu \in C[J, \mathbb{R}]$, $\upsilon_0 \le \mu \le \omega_0$ için

$$u' = f(t,\mu) - M(u - \mu),\ u(0) = u_0 \tag{1.3.2}$$

lineer diferensiyel denklemi ele alınsın. İlk olarak her μ için J de (1.3.2) nin bir tek u çözümünün varolduğu olmayana ergi yöntemiyle gösterilecektir. O halde (1.3.2) nin iki çözümü u_1 ve u_2 olsun. Bu durumda,

$$u_1' = f(t,\mu) - M(u_1 - \mu),\ u_1(0) = u_0$$

$$u_2' = f(t,\mu) - M(u_2 - \mu),\ u_2(0) = u_0$$

olup,

$$(u_1 - u_2)' + M(u_1 - u_2) = 0$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. O halde;

$$e^{Mt}(u_1 - u_2) = 0$$

dır. $e^{Mt} > 0$ olduğundan $u_1 = u_2$ dir. Yani (1.3.2) nin çözümü tektir.

$\{\upsilon_n\}, \{\omega_n\}$ dizilerini tanımlamak için A dönüşümü, $A\mu = u$ ile tanımlansın. Şimdi;

(a) $\upsilon_0 \leq A\upsilon_0$, $\omega_0 \geq A\omega_0$

(b) A, $[\upsilon_0, \omega_0] = [u \in C[J, \mathbb{R}] : \upsilon_0 \leq u_0 \leq \omega_0]$ aralığında bir monoton operatör oldukları gösterilmelidir.

(a) yı ispatlamak için $A\upsilon_0 = \upsilon_1$ alınsın. Burada υ_1, (1.3.2) nin $\mu = \upsilon_0$ olacak biçimdeki tek çözümüdür. $p = \upsilon_1 - \upsilon_0$ alınırsa ve (1.3.2) de u yerine υ_1, μ yerine υ_0 yazılırsa;

$$\upsilon_1' = f(t, \upsilon_0) - M.(\upsilon_1 - \upsilon_0), \; \upsilon_1(0) = u_0$$

elde edilir. υ_0, (1.2.1) in alt çözümü olduğundan,

$$\upsilon_0' \leq f(t, \upsilon_0), \; \upsilon_0(0) \leq u_0$$

dır. O halde;

$$p' = \upsilon_1' - \upsilon_0' \geq -Mp, \; p(0) \geq 0$$

olduğu görülür. Böylece $\upsilon_1 \geq \upsilon_0$ dır. O halde $\upsilon_0 \leq A\upsilon_0$ dır. Benzer şekilde $\omega_0 \geq A\omega_0$ olduğu görülebilir.

(b) yi ispatlamak için $\mu_1 \leq \mu_2$ olacak şekilde $\mu_1, \mu_2 \in [\upsilon_0, \omega_0]$ olsun. $u_1 = A\mu_1$ ve $u_2 = A\mu_2$ ve $p = u_2 - u_1$ seçilirse (1.3.2) den;

$$\begin{cases} u_1' = f(t, \mu_1) - M(u_1 - \mu_1), \; u_1(0) = u_0 \\ u_2' = f(t, \mu_2) - M(u_2 - \mu_2), \; u_2(0) = u_0 \end{cases}$$

dir. O halde

$$p' = u_2' - u_1' = f(t, \mu_2) - M(u_2 - \mu_2) - f(t, \mu_1) + M(u_1 - \mu_1)$$

dır. $\mu_1 \leq \mu_2$ olduğundan (1.3.1) den;

$$f(t, \mu_2) - f(t, \mu_1) \geq -M(\mu_2 - \mu_1)$$

olup;

$$p' \geq -Mp,\ p(0) = 0$$

elde edilir. $p(t) \geq p(0)\, e^{-Mt}$ olduğundan $A\mu_1 \leq A\mu_2$ elde edilir. O halde A monotondur. Şimdi

$$\upsilon_n = A\upsilon_{n-1},\ \omega_n = A\omega_{n-1}$$

dizileri tanımlanırsa A nın özelliğinden;

$$\upsilon_0 \leq \upsilon_1 \leq \upsilon_2 \leq ... \leq \upsilon_n \leq \omega_n \leq ... \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq \omega_0$$

dir. Böylece;

$$\lim_{n\to\infty} \upsilon_n = \upsilon, \quad \lim_{n\to\infty} \omega_n = \omega$$

monoton ve düzgün yakınsaklık elde edilir. (1.3.2) den;

$$\upsilon_n' = f(t, \upsilon_{n-1}) - M(\upsilon_n - \upsilon_{n-1}),\ \upsilon_n(0) = u_0$$

olup, $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\upsilon' = f(t, \upsilon),\ \upsilon(0) = u_0$$

elde edilir. O halde υ, (1.2.1) in bir çözümüdür. Benzer şekilde

$$\omega' = f(t, \omega),\ \omega(0) = u_0$$

olduğu da gösterilebilir.

u, J de $\upsilon_0 \leq u \leq \omega_0$ olacak şekilde (1.2.1) in bir çözümü olsun. Ayrıca bazı n ler için I da

$$\upsilon_n \leq u \leq \omega_n \tag{1.3.3}$$

ve $p = u - \upsilon_{n+1}$ olsun.

$$\upsilon_{n+1}' = f(t, \upsilon_n) - M(\upsilon_{n+1} - \upsilon_n),\ \upsilon_{n+1}(0) = u_0$$

olduğundan;

$$p' = u' - v'_{n+1} = f(t,u) - f(t,v_n) + M(v_{n+1} - v_n)$$

dır. (1.3.3) ve (1.3.1) den;

$$f(t,u) - f(t,v_n) \geq -M(u - v_n)$$

dir. O halde;

$$p' \geq -Mp, \; p(0) = 0$$

elde edilir. Bu da $u \geq v_{n+1}$ olmasını gerektirir. Benzer şekilde $u \leq \omega_{n+1}$ dir. Böylece J de

$$v_{n+1} \leq u \leq \omega_{n+1}$$

elde edilir. J de $v_0 \leq u \leq \omega_0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için tümevarımdan

$$v_n \leq u \leq \omega_n$$

dir. $n \to \infty$ için limit alınırsa, J de,

$$v \leq u \leq \omega$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Dikkat edilmelidir ki, özel olarak Teorem 1.3.1., f in u ya göre monoton azalmayan olmasını içerir. Bunu görmek için (1.3.1) koşulunda $M = 0$ almak yeterlidir. Buna rağmen, Teorem 1.3.1., f in monoton artmayan olmasını içermez. Şimdi bu özel durum incelenecektir.

Lemma 1.3.1. $f(t,u)$, u ya göre artmayan fonksiyon olsun. Bu durumda,
(i) $v_0 \leq \omega_0$ olacak şekilde (1.2.1) in v_0, ω_0 alt ve üst çözümleri vardır.
(ii) J de, $v_0 \leq u \leq \omega_0$ olacak şekilde (1.2.1) in bir tek u çözümü vardır.

İspat: $\phi(t)$ fonksiyonu,

$$\phi'(t) = f(t,0), \ \phi(0) = u_0 \tag{1.3.4}$$

ın çözümü olmak üzere,

$$\begin{cases} v_0 = -R_0 + \phi(t) \\ \omega_0 = R_0 + \phi(t) \end{cases} \tag{1.3.5}$$

olsun. J de

$$v_0(t) \leq 0 \leq \omega_0(t) \tag{1.3.6}$$

olacak şekilde $R_0 > 0$ yeterince büyük olsun. (1.3.6) dan ve f fonksiyonu artmayan olduğundan $f(t,0) \geq f(t,\omega_0)$, $f(t,0) \leq f(t,v_0)$ dır. O halde (1.3.4) ve (1.3.5) den;

$$\begin{aligned} \omega_0' &\geq f(t,\omega_0) \\ v_0' &\leq f(t,v_0) \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

elde edilir. (1.3.6) ve (1.3.7) den; v_0 ve ω_0 (1.2.1) in alt ve üst çözümleridir. O halde Teorem 1.2.4. ten

$$v_0 \leq u \leq \omega_0$$

olacak şekilde (1.2.1) in bir $u(t)$ çözümü vardır.

Şimdi (1.2.1) in çözümünün tekliği olmayana ergi yöntemiyle gösterilecektir. u_1 ve u_2 (1.2.1) in çözümleri olsun. Bu durumda;

$$u_1' - u_2' = f(t,u_1) - f(t,u_2), \ u_1(0) - u_2(0) = 0$$

dır. $u_1 \leq u_2$ olsun. f artmayan fonksiyon olduğundan, $f(t,u_1) \geq f(t,u_2)$ dır. Bu da

$$u_1' - u_2' \geq 0$$

olmasını gerektirir. O halde; $u_1 \geq u_2$ olup, $u_1 = u_2$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

f artmayan fonksiyon ise tek bir iterasyon yapısı ile çözümü aşağıdan ve yukarıdan

sınırlayacak şekilde bir dizi oluşturulabilir.
$M = 0$ için;

$$\upsilon'_{n+1} = f(t, \upsilon_n), \ \upsilon_{n+1}(0) = u_0 \tag{1.3.8}$$

ya da

$$\omega'_{n+1} = f(t, \omega_n), \ \omega_{n+1}(0) = u_0 \tag{1.3.9}$$

ele alınsın.

Teorem 1.3.2. *f, u ya göre artmayan fonksiyon olsun. Bu durumda ya*
(i) (1.3.8) ile verilen $\upsilon_n(t)$ iterasyonları ve (1.2.1) in tek çözümü olan $u(t)$,

$$\upsilon_2(t) \geq \upsilon_0(t)$$

olmak üzere J de,

$$\upsilon_0(t) \leq \upsilon_2(t) \leq ... \leq \upsilon_{2n}(t) \leq u(t) \leq \upsilon_{2n+1}(t) \leq ... \leq \upsilon_3(t) \leq \upsilon_1(t) \tag{1.3.10}$$

eşitsizliğini sağlar.
Ayrıca $\{\upsilon_{2n}(t)\}, \{\upsilon_{2n+1}(t)\}$ dizileri sırasıyla $\rho(t)$ ve $r(t)$ ye düzgün ve monoton yakınsaktır ve J de

$$\rho(t) \leq u(t) \leq r(t)$$

dir, ya da
(ii) (1.3.9) ile verilen $\omega_n(t)$ iterasyonları ve (1.2.1) in tek çözümü olan $u(t)$,

$$\omega_2(t) \leq \omega_0(t)$$

olmak üzere J de,

$$\omega_1(t) \leq \omega_3(t) \leq ... \leq \omega_{2n+1}(t) \leq u(t) \leq \omega_{2n}(t) \leq ... \leq \omega_2(t) \leq \omega_0(t)$$

eşitsizliğini sağlar.
Ayrıca $\{\omega_{2n}(t)\}, \{\omega_{2n+1}(t)\}$ dizileri sırasıyla $r^*(t), \rho^*(t)$ ye monoton düzgün yakın-

saktır ve J de

$$\rho^{*}(t) \leq u(t) \leq r^{*}(t)$$

dir.

İspat: Lemma 1.3.1. den J de $\upsilon_0 \leq u \leq \omega_0$ olacak şekilde (1.2.1) in bir tek u çözümü ve υ_0, ω_0 alt ve üst çözümleri vardır. Sadece (i) nin ispatlanması yeterlidir. Çünkü (ii) nin ispatı benzerdir. J de $\upsilon_0 \leq \upsilon_2$ olsun. İlk olarak J de

$$\upsilon_0 \leq \upsilon_2 \leq u \leq \upsilon_3 \leq \upsilon_1$$

olduğu gösterilecektir. $p = \upsilon_1 - \upsilon_0$ denirse ve her iki tarafın t ye göre türevi alınırsa; $p' = \upsilon_1' - \upsilon_0'$ elde edilir. (1.3.8) den;

$$\upsilon_1' = f(t, \upsilon_0), \ \upsilon_1(0) = u_0$$

ve υ_0, (1.2.1) in alt çözümü olduğundan

$$p' = \upsilon_1' - \upsilon_0' \geq f(t, \upsilon_0) - f(t, \upsilon_0)$$

dır. Sonuç olarak

$$p'(t) \geq 0, \ p(0) \geq 0$$

olup

$$p(t) \geq p(0) \geq 0$$

elde edilir. O halde $\upsilon_1 \geq \upsilon_0$ dır. Şimdi de $p = u - \upsilon_1$ denirse

$$p' = u' - \upsilon_1' = f(t, u) - f(t, \upsilon_0), \ p(0) = 0$$

dır. $\upsilon_0 \leq u$ ve f artmayan olduğundan, $f(t, u) \leq f(t, \upsilon_0)$ dır.
O halde $p' = u' - \upsilon_1' \leq 0$, $p(0) = 0$ olup $u \leq \upsilon_1$ elde edilir. Benzer şekilde sırasıyla J de $\upsilon_2 \leq u$, $\upsilon_3 \leq \upsilon_1$ ve $u \leq \upsilon_3$ olduğu kolayca görülebilir. O halde J de

$$\upsilon_0 \leq \upsilon_2 \leq u \leq \upsilon_3 \leq \upsilon_1$$

dır. (1.3.10) u ispatlamak için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. J de n ler için,

$$\upsilon_0 \leq \upsilon_2 \leq ... \leq \upsilon_{2n} \leq u \leq \upsilon_{2n+1} \leq ... \leq \upsilon_3 \leq \upsilon_1 \tag{1.3.11}$$

olsun. $p = \upsilon_{2n+2} - \upsilon_{2n+1}$ olmak üzere (1.3.8) den;

$$\upsilon'_{2n+2} = f\left(t, \upsilon_{2n+1}\right), \ \upsilon_{2n+2}\left(0\right) = u_0$$

$$\upsilon'_{2n+1} = f\left(t, \upsilon_{2n}\right), \ \upsilon_{2n+1}\left(0\right) = u_0$$

dır. O halde

$$p' = f\left(t, \upsilon_{2n+1}\right) - f\left(t, \upsilon_{2n}\right), \ p\left(0\right) = 0$$

dır. f artmayan olduğundan

$$p' = \upsilon'_{2n+2} - \upsilon'_{2n+1} \leq 0, \ p\left(0\right) = 0$$

elde edilir. Önceki benzer işlemlerle $\upsilon_{2n+2} \leq \upsilon_{2n+1}$ ve

$$\upsilon_0 \leq \upsilon_2 \leq ... \leq \upsilon_{2n} \leq \upsilon_{2n+2} \leq u \leq \upsilon_{2n+3} \leq \upsilon_{2n+1} \leq ... \leq \upsilon_3 \leq \upsilon_1$$

olduğu gösterilebilir. O halde her n için (1.3.11) doğrudur. $\{\upsilon_{2n}(t)\}, \{\upsilon_{2n+1}(t)\}$ dizileri sırasıyla $\rho(t)$ ve $r(t)$ ye monoton düzgün yakınsaktır. $\upsilon_{2n} \leq u \leq \upsilon_{2n+1}$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa, J de

$$\rho\left(t\right) \leq u\left(t\right) \leq r\left(t\right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\upsilon'_{2n}\left(t\right) = f\left(t, \upsilon_{2n-1}\right), \ \upsilon_{2n}\left(0\right) = u_0$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\rho'\left(t\right) = f\left(t, r\left(t\right)\right), \ \rho\left(0\right) = u_0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$r'(t) = f(t, \rho(t)), \ r(0) = u_0$$

dır. Bu ispatı tamamlar.

2. GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİĞİ

2.1 Giriş

Maksimal ya da minimal çözümün varlığı,

$$u' = f\left(t, u\left(t\right), u_t\right), \; u_{t_0} = \phi_0 \in C\left(\left[-\tau, 0\right], \mathbb{R}\right) \tag{2.1.1}$$

gecikmeli diferensiyel denklemi için Lakshmikantham and Zhang (1986) tarafından incelenmiştir. Burada

$$f \in C\left[I_0 \times \mathbb{R} \times C\left(\left[-\tau, 0\right], \mathbb{R}\right), \mathbb{R}\right], \; I_0 = \left[t_0, t_0 + T\right], \; t_0 \geq 0$$

ve herhangi bir $t \in I_0$ için,

$$u_t \in C\left(\left[-\tau, 0\right], \mathbb{R}\right), \; u_t\left(s\right) = u\left(t + s\right), \quad -\tau \leq s \leq 0$$

ile tanımlansın.

Lemma 2.1.1. $p \in C\left(\left[t_0 - \tau, t_0 + T\right], \mathbb{R}\right) \cap C^1\left[I_0, \mathbb{R}\right]$ ve I_0 da

$$p'\left(t\right) \leq -Mp\left(t\right) - N \int_{-\tau}^{0} p_t\left(s\right) ds \tag{2.1.2}$$

olsun. Ayrıca, ya

(i)

$$p\left(t_0\right) \leq p_{t_0}\left(s\right) \leq 0, \; s \in \left[-\tau, 0\right], \quad \left(M + N\tau\right) T \leq 1 \tag{2.1.3}$$

ya da

(ii) $p_{t_0}\left(s\right) \leq 0, \, s \in \left[-\tau, 0\right], \, p \in C^1\left(\left[t_0 - \tau, t_0\right], \mathbb{R}\right)$ ve

$$p'\left(t\right) \leq \frac{\lambda}{T + \tau}, \; t \in \left[t_0 - \tau, t_0\right] \tag{2.1.4}$$

olsun. Burada

$$\min_{[t_0-\tau,t_0]} p(t) = -\lambda,\ \lambda \geq 0$$

ve

$$(M + N\tau)(T + \tau) \leq 1,\ M, N \geq 0 \tag{2.1.5}$$

olarak alınmıştır. Bu durumda I_0 da $p(t) \leq 0$ dır.

İspat: İspat olmayana ergi yöntemiyle yapılacaktır. Bunun için (i) ve (ii) durumları ayrı ayrı düşünülecektir.

(i) $t_1 < t_2$, $p(t_2) > 0$ ve

$$\min_{[t_0-\tau,t_2]} p(t) = p(t_1) = -\lambda \leq 0 \tag{2.1.6}$$

olacak şekilde $t_1, t_2 \in I_0$ vardır.

Öncelikle $\lambda > 0$ durumu düşünülsün. Ortalama Değer Teoremi'nden;

$$p'\left(\bar{t}\right) = \frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$$

olacak şekilde bir $\bar{t} \in [t_1, t_2]$ vardır. $p(t_1) = -\lambda$ ve $p(t_2) > 0$ olduğundan;

$$p'\left(\bar{t}\right) = \frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1} > \frac{\lambda}{t_2 - t_1} > \frac{\lambda}{T}$$

dir. Diğer taraftan (2.1.2) eşitsizliği $\bar{t} \in [t_1, t_2]$ için de yazılabilir. (i) koşulundan $p(t_0) \leq p_{t_0}(s) \leq 0$, $s \in [-\tau, 0]$ olduğundan $p\left(\bar{t}\right) \leq p_{\bar{t}}(s) \leq 0$ dır. Ayrıca

$$\min_{[t_0-\tau,t_2]} p\left(\bar{t}\right) = -\lambda$$

olduğundan;

$$p'\left(\bar{t}\right) \leq -M(-\lambda) - N\int_{-\tau}^{0} (-\lambda)\, ds = \lambda(M + N\tau)$$

elde edilir.

$$p'\left(\bar{t}\right) \leq \lambda(M + N\tau),\ \ p'\left(\bar{t}\right) > \frac{\lambda}{T}$$

olup;

$$(M + N\tau)\, T > 1$$

bulunur. Bu ise (2.1.3) ile çelişir.

Eğer $\lambda = 0$ ise yine Ortalama Değer Teoremi' nden,

$$p'\left(\bar{t}\right) > \frac{p\,(t_2)}{T} > 0$$

olacak şekilde bir $\bar{t} \in [t_1, t_2]$ vardır. Diğer taraftan

$$\min_{[t_0-\tau, t_2]} p\left(\bar{t}\right) = -\lambda = 0$$

olduğundan;

$$p'\left(\bar{t}\right) \leq -Mp\left(\bar{t}\right) - N\int_{-\tau}^{0} p_{\bar{t}}\,(s)\, ds = 0$$

dır. O halde $p'\left(\bar{t}\right) > 0$ ile $p'\left(\bar{t}\right) \leq 0$ olması bir çelişkidir.

(ii) $p\,(t)$ nin $[t_0 - \tau, t_2]$ deki minimal değeri $[t_0 - \tau, t_0]$ içindedir. Bu durumda;

$$-\lambda = p\left(t^1\right),\ t^1 \in [t_0 - \tau, t_0]$$

ve $p\,(t^1)$, $[t_0 - \tau, t_0]$ da $p\,(t)$ nin minimum değeri olmak üzere Ortalama Değer Teoremi kullanılırsa,

$$p'\left(\bar{\bar{t}}\right) = \frac{p\,(t_2) - p\,(t^1)}{t_2 - t^1}$$

olacak şekilde bir $\bar{\bar{t}} \in [t^1, t_2]$ vardır. $p\,(t_2) > 0$ ve $-\lambda = p\,(t^1)$ olduğundan;

$$p'\left(\bar{\bar{t}}\right) > \frac{\lambda}{t_2 - t^1}$$

dır. Ayrıca,

$$p'\left(\bar{\bar{t}}\right) = \frac{p\,(t_2) - p\,(t^1)}{t_2 - t^1} > \frac{\lambda}{T + \tau} \tag{2.1.7}$$

dır. Aynı zamanda $\bar{\bar{t}} \in [t_0, t_2]$ ve $\bar{\bar{t}} \in [t_0 - \tau, t_0]$ olacak şekilde iki olasılık vardır.

Eğer $\overline{\overline{t}} \in [t_0, t_2]$ ise (2.1.2) den;

$$p'\left(\overline{\overline{t}}\right) \leq -Mp\left(\overline{\overline{t}}\right) - N\int\limits_{-\tau}^{0} p_{\overline{\overline{t}}}(s)\,ds$$

ve

$$\min_{[t_0-\tau,t_0]} p\left(\overline{\overline{t}}\right) = -\lambda$$

dır. Bu durumda;

$$p'\left(\overline{\overline{t}}\right) \leq -M(-\lambda) - N\int\limits_{-\tau}^{0} p_{\overline{\overline{t}}}(s)\,ds$$

ve $p_{t_0}(s) \leq 0$ dan $p_{\overline{\overline{t}}}(s) \leq 0$ dır. O halde;

$$p'\left(\overline{\overline{t}}\right) \leq (M + N\tau)\,\lambda$$

dir. Bu eşitsizlik ve (2.1.7) den;

$$\frac{\lambda}{T+\tau} < (M + N\tau)\,\lambda$$

olup $(M + N\tau)(T + \tau) > 1$ elde edilir. Ancak bu (2.1.5) ile çelişir.
Eğer $\overline{\overline{t}} \in [t_0 - \tau, t_0]$ ise bu durumda; (2.1.7) ile (2.1.4) çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

2.2 Monoton İterasyon Tekniği

Teorem 2.2.1. (A) $\upsilon, \omega \in C[I, \mathbb{R}] \cap C^1[I_0, \mathbb{R}]$ olsun. Burada $I = [t_0 - \tau, t_0 + T]$ dır. I da $\upsilon(t) \leq \omega(t)$ ve $\upsilon_{t_0} \leq \phi_0 \leq \omega_{t_0}$ ile I_0 da $\upsilon' \leq f(t, \upsilon, \upsilon_t)$ ve $\omega' \geq f(t, \omega, \omega_t)$
(B)

$$f(t, x, \phi_2) - f(t, y, \phi_1) \geq -M(x - y) - N\int\limits_{-\tau}^{0} [\phi_2(s) - \phi_1(s)]\,ds \tag{2.2.1}$$

sağlansın. Burada $\upsilon(t) \leq y \leq x \leq \omega(t)$, I_0 da $\upsilon_t \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \omega_t$ ve $M, N \in \mathbb{R}_+$ dır.
(C) $\upsilon_0 - \phi_0, \phi_0 - \omega_0$ fark fonksiyonları lemmanın (i) ya da (ii) varsayımını sağlasın.

Bu durumda I_0 da ($n \to \infty$ için) $\upsilon_n \to \rho$, $\omega_n \to r$ düzgün yakınsak olacak şekilde $\{\upsilon_n\}, \{\omega_n\}$ monoton dizileri vardır ve sırasıyla ρ ve r (2.1.1) in minimal ve maksimal çözümleridir.

İspat: I da $\upsilon \leq \eta \leq \omega$ olacak şekilde herhangi bir $\eta \in C[I, \mathbb{R}]$ için

$$F(t, u(t), u_t) = f(t, \eta(t), \eta_t) - M(u(t) - \eta(t)) - N \int_{-\tau}^{0} [u_t(s) - \eta_t(s)]\, ds \quad (2.2.2)$$

olmak üzere,

$$u'(t) = F(t, u(t), u_t), \; u_{t_0} = \phi_0 \quad (2.2.3)$$

başlangıç değer problemi ele alınsın. İlk olarak $\forall \eta$ için (2.2.3) ün bir tek çözümünün varolduğu olmayana ergi yöntemi kullanılarak gösterilecektir. Bunun için, u_1 ve u_2 (2.2.3) başlangıç değer probleminin farklı iki çözümü olsun. Bu durumda;

$$u_1'(t) = f(t, \eta(t), \eta_t) - M(u_1(t) - \eta(t)) - N \int_{-\tau}^{0} [u_{1_t}(s) - \eta_t(s)]\, ds, \; u_{1_{t_0}} = \phi_0$$

$$u_2'(t) = f(t, \eta(t), \eta_t) - M(u_2(t) - \eta(t)) - N \int_{-\tau}^{0} [u_{2_t}(s) - \eta_t(s)]\, ds, \; u_{2_{t_0}} = \phi_0$$

dır. $p = u_1 - u_2$ denirse ve t ye göre türev alınırsa;

$$p'(t) = -Mp(t) - N \int_{-\tau}^{0} p_t(s)\, ds, \; p_{t_0} = 0$$

elde edilir. O halde Lemma 2.1.1. den $p(t) \leq 0$ dır. Bu durumda $u_1 \leq u_2$ elde edilir. Benzer şekilde $u_2 \leq u_1$ olduğu da görülebilir. O halde (2.2.3) ün bir tek çözümü vardır.

Şimdi $\{\upsilon_n\}, \{\omega_n\}$ dizilerini oluşturmak için A dönüşümü $A\eta = u$ ile tanımlansın ve

(i) $\upsilon \leq A\upsilon$, $\omega \geq A\omega$ ve

(ii) $[\upsilon, \omega] = [u \in C[I, \mathbb{R}] : \upsilon \leq u \leq \omega]$ aralığında A nın monoton bir operatör olduğu gösterilsin.

(i) yi ispatlamak için $A\omega = \omega_1$ ve $p(t) = \omega_1(t) - \omega(t)$ olsun. Her iki tarafın t ye göre türevi alınırsa; $p'(t) = \omega_1'(t) - \omega'(t)$ dir. (2.2.2) de u yerine ω_1, η yerine ω alınırsa,

$$\omega_1'(t) = f(t, \omega, \omega_t) - M(\omega_1 - \omega) - N\int_{-\tau}^{0} [\omega_{1t}(s) - \omega_t(s)]\, ds$$

ve ω üst çözüm olduğundan;

$$\omega_1'(t) - \omega'(t) \leq -M(\omega_1 - \omega) - N\int_{-\tau}^{0} [\omega_{1_t}(s) - \omega_t(s)]\, ds$$

dır. Sonuç olarak

$$p'(t) \leq -Mp(t) - N\int_{-\tau}^{0} p_t(s)\, ds, \;\; p_{t_0} \leq 0$$

elde edilir. O halde Lemma 2.1.1. den I_0 da $p(t) \leq 0$ dır. Buradan da $\omega_1(t) \leq \omega(t)$ dır. $A\omega = \omega_1$ olduğundan $A\omega \leq \omega$ dır. Benzer şekilde $\upsilon \leq A\upsilon$ olduğu görülebilir.

(ii) yi ispatlamak için $\eta_1, \eta_2 \in [\upsilon, \omega]$ ve $\eta_1 \leq \eta_2$ alınsın. $u_1 = A\eta_1$, $u_2 = A\eta_2$ olsun. $p = u_1 - u_2$ seçip her iki tarafın t ye göre türevi alınırsa;

$$p'(t) = u_1'(t) - u_2'(t)$$

dir. (2.2.2) de u_1 ve u_2 yerlerinde yazılıp farkları alınırsa;

$$\begin{aligned} p'(t) &= -\left[f\left(t, \eta_2(t), \eta_{2_t}\right) - f\left(t, \eta_1, \eta_{1_t}\right)\right] - M(u_1 - u_2) \\ &\quad -N\int_{-\tau}^{0} [u_{1_t}(s) - u_{2_t}(s)]\, ds - M(\eta_1 - \eta_2) - N\int_{-\tau}^{0} \left[\eta_{1_t}(s) - \eta_{2_t}(s)\right] ds \end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.1) de x yerine η_2, y yerine η_1, ϕ_2 yerine η_{2t}, ϕ_1 yerine η_{1t}, yazılırsa ve $\eta_1 \leq \eta_2$ olduğundan;

$$f\left(t, \eta_2(t), \eta_{2_t}\right) - f\left(t, \eta_1, \eta_{1_t}\right) \geq -M(\eta_2 - \eta_1) - N\int_{-\tau}^{0} \left[\eta_{2_t}(s) - \eta_{1_t}(s)\right] ds$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa;

$$p'(t) = u_1'(t) - u_2'(t) \leq -M(u_1 - u_2) - N \int_{-\tau}^{0} [u_{1_t}(s) - u_{2_t}(s)]\, ds$$

ve buradan;

$$p'(t) \leq -Mp(t) - N \int_{-\tau}^{0} p_t(s)\, ds, \;\; p_{t_0} = 0$$

elde edilir. O halde Lemma 2.1.1. den I_0 da $p(t) \leq 0$ dır. Sonuç olarak $u_1 \leq u_2$ dır. Bu durumda $u_1 = A\eta_1$, $u_2 = A\eta_2$ olduğundan $A\eta_1 \leq A\eta_2$ elde edilir. Ayrıca $\eta_1 \leq \eta_2$ olduğundan A operatörü $[\upsilon, \omega]$ üzerinde monotondur.

Artık I da diziler tanımlanabilir.

$$\upsilon_1 = A\upsilon, \upsilon_n = A\upsilon_{n-1}, \;\; n = 2, 3, ...$$

$$\omega_1 = A\omega, \;\; \omega_n = A\omega_{n-1}, \;\; n = 2, 3, ...$$

(i) ve (ii) özelliklerinden I da $\forall t$ için

$$\upsilon \leq \upsilon_1 \leq \upsilon_2 \leq ... \leq \upsilon_n \leq \omega_n \leq ... \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq \omega$$

olduğu görülür. Böylece A monoton ve sınırlı olduğundan, I da

$$\lim_{n\to\infty} \upsilon_n = \rho, \quad \lim_{n\to\infty} \omega_n = r$$

yakınsaklığı düzgün yakınsaklıktır.

υ_n ve ω_n, (2.2.3) ü sağladıklarından;

$$\upsilon_n' = f\left(t, \upsilon_{n-1}, \upsilon_{(n-1)_t}\right) - M(\upsilon_n - \upsilon_{n-1}) - N \int_{-\tau}^{0} \left[\upsilon_{n_t}(s) - \upsilon_{(n-1)_t}(s)\right] ds, \;\; \upsilon_{n_{t_0}} = \phi_0$$

yazılabilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\rho' = f(t, \rho, \rho_t), \;\; \rho_{t_0} = \phi_0$$

elde edilir. Bu durumda ρ, I_0 da (2.1.1) in bir çözümüdür. Benzer şekilde r nin de (2.1.1) in bir çözümü olduğu kolayca görülebilir.

Eğer u, I da $\upsilon \leq u \leq \omega$ olacak şekilde (2.1.1) in bir çözümü ise, ρ ve r nin sırasıyla (2.1.1) in minimal ve maksimal çözümleri olduğu gösterilsin. Bunun için $p = \upsilon_n - u$ alınsın. Her iki tarafın t ye göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} p'(t) &= -\left[f(t,u,u_t) - f\left(t,\upsilon_{n-1},\upsilon_{(n-1)_t}\right)\right] - M(\upsilon_n - \upsilon_{n-1}) \\ &\quad -N\int_{-\tau}^{0}\left[\upsilon_{n_t}(s) - \upsilon_{(n-1)_t}(s)\right]ds \end{aligned}$$

dır. (2.2.1) de x yerine u, y yerine υ_{n-1}, ϕ_2 yerine u_t, ϕ_1 yerine $\upsilon_{(n-1)t}$ denirse;

$$f(t,u,u_t) - f\left(t,\upsilon_{n-1},\upsilon_{(n-1)_t}\right) \geq -M(u - \upsilon_{n-1}) - N\int_{-\tau}^{0}\left[u_t(s) - \upsilon_{(n-1)_t}(s)\right]ds$$

elde edilir. O halde;

$$p'(t) \leq Mp(t) - N\int_{-\tau}^{0} p_t(s)\,ds,\ p_{t_0} = 0$$

dır. Böylece Lemma 2.1.1. den I_0 da $p(t) \leq 0$ dır.Bu durumda $\upsilon_n \leq u$ dir. Benzer şekilde $\omega_n \geq u$ olduğu görülebilir. O halde,

$$\upsilon_n \leq u \leq \omega_n$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\rho \leq u \leq r$$

elde edilir. İspat tamamlanmıştır.

3. GECİKMELİ VE İLERİ TERİMLİ FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİĞİ

3.1 Giriş

Gecikmeli terim içeren diferensiyel denklemlerin yanı sıra, hem gecikmeli hem de ileri terim içeren diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğinin incelenmesi, daha geniş bir sınıf diferensiyel denklem için yapıldığından ayrı bir önem taşımaktadır.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_t, x^t), \ t \in I = [t_0, T] \\ x_{t_0} = \phi_0, \ x^T = \psi_0, \ t_0 \geq 0, \ t_0 < T \end{cases} \tag{3.1.1}$$

gecikmeli ve ileri terimli fonksiyonel diferensiyel denklemi için monoton iterasyon tekniği, Bhaskar *et al.* (2007) tarafından incelenmiştir. Burada,

$$\begin{aligned} C_1 &= C([-h_1, 0], \mathbb{R}), \ C_2 = C([0, h_2], \mathbb{R}), \ \phi_0 \in C_1, \ \psi_0 \in C_2, \\ f &\in C(I \times \mathbb{R} \times C_1 \times C_2, \mathbb{R}), \ h_1, h_2 > 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x_t &= x_t(s) = x(t+s), \ -h_1 \leq s \leq 0 \\ x^t &= x^t(\sigma) = x(t+\sigma), \ 0 \leq \sigma \leq h_2 \end{aligned}$$

sembolleri sırasıyla gecikmeli ve ileri terimleri ifade etmektedir.

(3.1.1) in bir tek çözümünün varlığının ispatı, (3.1.1) in alt ve üst çözümleriyle kurulan bağlantı kullanılarak, monoton iterasyon tekniği ile ispatlanacaktır.

Lemma 3.1.1. (i) $p \in C([t_0 + h_1, T + h_2], \mathbb{R})$, p, $I = [t_0, T]$ de sürekli türevlenebilir

$$p'(t) \leq -Mp(t) - N \int_{-h_1}^{0} p_t(s)\, ds, \ t \in I \tag{3.1.2}$$

ve

(ii) $p_{t_0}(s) \leq 0,\ -h_1 \leq s \leq 0,\ p \in C^1([t_0 - h_1, t_0], \mathbb{R})$,

$$p'(s) \leq \frac{\lambda}{T + h_1} \tag{3.1.3}$$

olsun. Burada,

$$\min_{[t_0 - h_1, t_0]} p(s) = -\lambda,\ \ \lambda \geq 0,\ \ [M + Nh_1](T + h_1) \leq 1$$

sağlansın. Bu durumda $t_0 \leq t \leq T$ de $p(t) \leq 0$ dır.

İspat: İspat için olmayana ergi yöntemi kullanılacaktır. Bu durumda $t_1 < t_2$, $p(t_2) > 0$ ve

$$\min_{[t_0 - h_1, t_2]} p(s) = -\lambda = p(t_1) \leq 0$$

olacak şekilde $t_1, t_2 \in I$ vardır. $p(t)$ nin $[t_0 - h_1, t_2]$ deki minimal değeri, $[t_0 - h_1, t_0]$ içindedir. Bu durumda $-\lambda = p(t^1)$, $t^1 \in [t_0 - h_1, t_0]$ ve $p(t^1)$, $[t_0 - h_1, t_0]$ da $p(t)$ nin minimal değeri olmak üzere ve $p \in C^1([t_0 - h_1, t_0], \mathbb{R})$, p, $I = [t_0, T]$ de sürekli türevlenebilir olduğundan ve $t^1 \in [t_0 - h_1, t_0]$, $t_2 \in I$ dan p, $[t^1, t_2]$ aralığında sürekli ve türevlenebilirdir. O halde Ortalama Değer Teoremi' nden;

$$p'(\bar{t}) = \frac{p(t_2) - p(t^1)}{t_2 - t^1}$$

olacak şekilde bir $\bar{t} \in [t^1, t_2]$ vardır. $p(t_2) > 0$ ve $-\lambda = p(t^1)$ olduğundan

$$p'(\bar{t}) = \frac{p(t_2) - p(t^1)}{t_2 - t^1} > \frac{\lambda}{t_2 - t^1} > \frac{\lambda}{T + h_1}$$

elde edilir. Aynı zamanda iki durum vardır. Yani; $\bar{t} \in [t^1, t_2]$, $t^1 \in [t_0 - h_1, t_0]$, $t_2 \in [t_0, T]$ olduğundan $\bar{t} \in [t_0, t_2]$, ve $\bar{t} \in [t_0 - h_1, t_0]$ dır.

Eğer $\bar{t} \in [t_0, t_2]$ ise (3.1.2) den;

$$p'(\bar{t}) \leq -Mp(\bar{t}) - N \int_{-h_1}^{0} p_{\bar{t}}(s)\, ds$$

ve

$$\min_{[t_0-h_1,t_0]} p\left(\bar{t}\right) = -\lambda$$

dır. Bu durumda,

$$p'\left(\bar{t}\right) \leq M\lambda - N\int_{-h_1}^{0} p_{\bar{t}}\left(s\right) ds$$

ve $p_{t_0}\left(s\right) \leq 0$ dan $p_{\bar{t}}\left(s\right) \leq 0$ dır.

$$p'\left(\bar{t}\right) \leq M\lambda + Nh_1 \leq M\lambda + Nh_1\lambda = \lambda\left(M + Nh_1\right)$$

dir. Bu eşitsizlik ve

$$p'\left(\bar{t}\right) > \frac{\lambda}{T + h_1}$$

den;

$$\left[M + Nh_1\right]\left(T + h_1\right) > 1$$

elde edilir. Bu ise

$$\left[M + Nh_1\right]\left(T + h_1\right) \leq 1$$

ile çelişir.

Eğer $\bar{t} \in [t_0 - h_1, t_0]$ ise (3.1.3) ile

$$p'\left(\bar{t}\right) > \frac{\lambda}{T + h_1}$$

eşitsizliği çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.2. $p \in C\left(\left[t_0 - h_1, T + h_2\right], \mathbb{R}\right)$, $p'\left(s\right)$, I da mevcut, sürekli ve

$$p'\left(t\right) \leq -Lp\left(t\right) + N_1\int_{-h_1}^{0} p_t\left(s\right) ds + N_2\int_{0}^{h_2} p^t\left(\sigma\right) d\sigma, \ t \in I \tag{3.1.4}$$

olsun. Ayrıca $L, N_1, N_2 > 0$ için $N_1h_1 + N_2h_2 < L$ sağlansın. Bu durumda $p_{t_0} \leq 0$, $p^T \leq 0$ olması I da $p\left(t\right) \leq 0$ olmasını gerektirir.

İspat: Lemmanın sonucu yanlış olsun. Bu durumda $p_{t_0} \leq 0$, $p^T \leq 0$ ancak $p\left(t\right) > 0$

dır. O halde I da $p(t_1) = \varepsilon$, $p(t) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ ve bir $t_1 \in (t_0, T)$ vardır. I da $p'(t_0) = 0$ dır. $p(t_1) = \varepsilon$ ve $t_1 \in (t_0, T)$ olduğundan $p(t_0) = \varepsilon$ alınabilir. Bu durumda (3.1.4) den;

$$0 = p'(t_0) \leq -L\varepsilon + N_1 \int_{-h_1}^{0} p_{t_0}(s)\, ds + N_2 \int_{0}^{h_2} p^{t_0}(\sigma)\, d\sigma,\ p_{t_0} \leq 0$$

dır. $\varepsilon > 0$ olduğundan $p_{t_0} < \varepsilon$ dır. Aynı şekilde $p^T \leq 0$ ise $p^{t_0} < \varepsilon$ dır. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= p'(t_0) \leq -L\varepsilon + N_1\varepsilon \int_{-h_1}^{0} ds + N_2\varepsilon \int_{0}^{h_2} d\sigma \\ &= -L\varepsilon + N_1\varepsilon\,(0 - (-h_1)) + N_2\varepsilon\,(h_2 - 0) \\ &= \varepsilon\,(-L + N_1 h_1 + N_2 h_2) \end{aligned}$$

dır. $N_1 h_1 + N_2 h_2 < L$ olduğundan;

$$0 = p'(t_0) < 0$$

elde edilir. O halde bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi uygunluk için (3.1.1) e ilişkin aşağıdaki kabul edilsin.
(i) $\alpha_0, \beta_0 \in C^1(I, \mathbb{R})$, I da $\phi_1 \leq \phi_0 \leq \phi_2$, $\psi_1 \leq \psi_0 \leq \psi_2$, $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ ve $\phi_1, \phi_2 \in C_1$, $\psi_1, \psi_2 \in C_2$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \alpha_0'(t) &\leq f\left(t, \alpha_0(t), \alpha_{0_t}, \beta_0^t\right),\ \alpha_{0_{t_0}} = \phi_1,\ \alpha_0^T = \psi_1 \\ \beta_0'(t) &\geq f\left(t, \beta_0(t), \beta_{0_t}, \alpha_0^t\right),\ \beta_{0_{t_0}} = \phi_2,\ \beta_0^T = \psi_2 \end{aligned}$$

(ii) $f(t, x, \phi, \psi)$, ψ ye göre her bir (t, x, ϕ) için azalan
(iii) $\alpha_0(t) \leq y \leq x \leq \beta_0(t)$, $\alpha_{0_t} \leq \psi \leq \phi \leq \beta_{0_t}$, keyfi $\xi \in C_2$ ve $M, N \geq 0$ için

$$f(t, x, \phi, \xi) - f(t, y, \psi, \xi) \geq -M(x - y) - N \int_{-h_1}^{0} (\phi - \psi)(s)\, ds \qquad (3.1.5)$$

(iv) $\alpha_{0_t} - \phi_0, \phi_0 - \beta_{0_t}$, Lemma 3.1.1. in (ii) koşulu sağlanır

olsun.

3.2 Monoton İterasyon Tekniği

Teorem 3.2.1. $(i) - (iv)$ sağlansın. Bu durumda $[t_0 - h_1, T + h_2]$ de $\alpha_n(t) \to \rho(t), \beta_n(t) \to r(t), (n \to \infty$ için) düzgün yakınsak olacak şekilde $\{\alpha_n(t)\}$, $\{\beta_n(t)\}$ monoton dizileri vardır ve (ρ, r) çifti (3.1.1) in minimal ve maksimal çözümleridir. Ek olarak

(v)

$$f(t, x, \phi_1, \psi_2) - f(t, y, \phi_2, \psi_1) \leq -L(x - y) + N_1 \int_{-h_1}^{0} (\phi_1 - \phi_2)(s)\, ds + N_2 \int_{0}^{h_2} (\psi_1 - \psi_2)(\sigma)\, d\sigma \tag{3.2.1}$$

olsun. Burada $L, N_1, N_2 > 0$, $\alpha_0(t) \leq y \leq x \leq \beta_0(t)$, $\alpha_{0_t} \leq \phi_2 \leq \phi_1 \leq \beta_{0_t}$, $\alpha_0^T \leq \psi_2 \leq \psi_1 \leq \beta_0^T$ ve $N_1 h_1 + N_2 h_2 < L$ geçerli olursa, bu durumda I da

$$\rho(t) = r(t) = x(t)$$

(3.1.1) in bir tek çözümü olur.

İspat: Her bir $n = 1, 2, ...$ için

$$\begin{cases} \alpha'_{n+1} = f\left(t, \alpha_n, \alpha_{n_t}, \beta_n^t\right) - M(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ \qquad -N \displaystyle\int_{-h_1}^{0} \left[\alpha_{(n+1)_t} - \alpha_{n_t}\right](s)\, ds \\ \beta'_{n+1} = f\left(t, \beta_n, \beta_{n_t}, \alpha_n^t\right) - M\left(\beta_{n+1} - \beta_n\right) \\ \qquad -N \displaystyle\int_{-h_1}^{0} \left[\beta_{(n+1)_t} - \beta_{n_t}\right](s)\, ds \end{cases} \tag{3.2.2}$$

linner problemi ele alınsın. $\alpha_{(n+1)_{t_0}} = \phi_0$, $\beta_{(n+1)_{t_0}} = \phi_0$ ve $\alpha_{n+1}^T, \beta_{n+1}^T$,

$$\alpha_0^T \leq \alpha_n^T \leq \alpha_{n+1}^T \leq \psi_0 \leq \beta_{n+1}^T \leq \beta_n^T \leq \beta_0^T \tag{3.2.3}$$

olacak şekilde seçilsin. $[0, h_2]$ de α_n^T, β_n^T, ψ_0 a düzgün yakınsaktır.

İlk olarak $[t_0 - h_1, T + h_2]$ de her bir lineer problemin bir tek çözüme sahip olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$\alpha'_{n+1} = f\left(t, \alpha_n, \alpha_{n_t}, \beta_n^t\right) - M\left(\alpha_{n+1} - \alpha_n\right) - N \int_{-h_1}^{0} \left[\alpha_{(n+1)_t} - \alpha_{n_t}\right](s)\, ds$$

lineer denkleminin iki farklı çözümü $\alpha_{1(n+1)}$ ve $\alpha_{2(n+1)}$ olsun. Bu durumda;

$$\alpha'_{1_{(n+1)}} = f\left(t, \alpha_n, \alpha_{n_t}, \beta_n^t\right) - M\Big(\alpha_{1_{(n+1)}} - \alpha_n\Big) - N \int_{-h_1}^{0} \left[\alpha_{1(n+1)_t} - \alpha_{n_t}\right](s)\, ds$$

$$\alpha'_{2_{(n+1)}} = f\left(t, \alpha_n, \alpha_{n_t}, \beta_n^t\right) - M\Big(\alpha_{2_{(n+1)}} - \alpha_n\Big) - N \int_{-h_1}^{0} \Big[\alpha_{2_{(n+1)_t}} - \alpha_{n_t}\Big](s)\, ds$$

dır. Taraf tarafa farkları alınırsa ve $p = \alpha_{1_{(n+1)}} - \alpha_{2_{(n+1)}}$ denirse (3.1.2) elde edilir. Lemma 3.1.1. den $p(t) \leq 0$ dır. O halde $\alpha_{1_{(n+1)}} \leq \alpha_{2_{(n+1)}}$ dır. Benzer şekilde $\alpha_{1_{(n+1)}} \geq \alpha_{2_{(n+1)}}$ olduğu görülür. Bu durumda $\alpha_{1_{(n+1)}} = \alpha_{2_{(n+1)}}$ dir. Yani (3.2.2) deki lineer problemlerin herbiri bir tek çözüme sahiptir. Şimdi I da

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq ... \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta_0 \tag{3.2.4}$$

olduğu gösterilecektir. İlk iddia I da $\alpha_0 \leq \alpha_1$ olmasıdır. Bunun için $p = \alpha_0 - \alpha_1$ alınsın. (i) den

$$\alpha'_0(t) \leq f\left(t, \alpha_0(t), \alpha_{0_t}, \beta_0^t\right), \ \alpha_{0_{t_0}} = \phi_1, \ \alpha_0^T = \psi_1$$

ve (3.2.2) de $n=0$ için

$$\alpha_1' = f\left(t,\alpha_0,\alpha_{0_t},\beta_0^t\right) - M\left(\alpha_1-\alpha_0\right) - N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{1_t}-\alpha_{0t}\right](s)\,ds,\ \ \alpha_{1t_0}=\phi_0 \qquad (3.2.5)$$

dır. Bu eşitsizliklerden;

$$\begin{aligned} p' &= \alpha_0'-\alpha_1' \leq f\left(t,\alpha_0(t),\alpha_{0_t},\beta_0^t\right) - f\left(t,\alpha_0(t),\alpha_{0t},\beta_0^t\right) \\ &\quad +M\left(\alpha_1-\alpha_0\right)+N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{1t}-\alpha_{0t}\right](s)\,ds \end{aligned}$$

olup (3.1.2) elde edilir. Lemma 3.1.1. den $\alpha_0 \leq \alpha_1$ bulunur. Benzer olarak I da $\beta_1 \leq \beta_0$ olduğu görülebilir. Şimdi I da $\alpha_1 \leq \beta_1$ olduğu ispatlanacaktır. Bunun için $p=\alpha_1-\beta_1$ alınarak benzer işlemlerle (3.1.2) elde edilir. Lemma 3.1.1. den $\alpha_1 \leq \beta_1$ dır.

O halde;

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0 \qquad (3.2.6)$$

dır. Bazı $k>1$ ler için, I da

$$\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_{k-1} \qquad (3.2.7)$$

olsun. I da

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k \qquad (3.2.8)$$

olduğu gösterilecektir. Bunun için $p_{t_0}=0$ olacak şekilde $p=\alpha_k-\alpha_{k+1}$ seçilsin. (3.2.2) den;

$$\alpha_k' = f\left(t,\alpha_{k-1},\alpha_{(k-1)_t},\beta_{k-1}^t\right) - M\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right) - N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{k_t}-\alpha_{(k-1)_t}\right](s)\,ds,\ \ \alpha_{k_{t_0}}=\phi_0$$

$$\alpha_{k+1}' = f\left(t,\alpha_k,\alpha_{k_t},\beta_k^t\right) - M\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right) - N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{(k+1)_t}-\alpha_{k_t}\right](s)\,ds,\ \ \alpha_{(k+1)_{t_0}}=\phi_0$$

dır. O halde;

$$p' = \alpha_k' - \alpha_{k+1}' = -\left[f\left(t,\alpha_k,\alpha_{k_t},\beta_k^t\right) - f\left(t,\alpha_{k-1},\alpha_{(k-1)_t},\beta_{k-1}^t\right)\right] - M\left(\alpha_k - \alpha_{k-1}\right)$$
$$-N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{k_t} - \alpha_{(k-1)_t}\right](s)\,ds + M\left(\alpha_{k+1} - \alpha_k\right) + N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{(k+1)_t} - \alpha_{k_t}\right](s)\,ds$$

dir. (3.1.5) de x yerine α_k, y yerine α_{k-1}, ϕ yerine α_{k_t} ve ψ yerine $\alpha_{(k-1)_t}$ alınırsa;

$$f\left(t,\alpha_k,\alpha_{k_t},\beta_k^t\right) - f\left(t,\alpha_{k-1},\alpha_{(k-1)_t},\beta_{k-1}^t\right) \geq -M\left(\alpha_k - \alpha_{k-1}\right) - N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{k_t} - \alpha_{(k-1)_t}\right](s)\,ds$$

elde edilir. Bu durumda

$$p' = \alpha_k' - \alpha_{k+1}' \leq -M\left(\alpha_k - \alpha_{k+1}\right) - N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{kt} - \alpha_{(k+1)t}\right](s)\,ds,\ \ p_{t_0} = 0$$

dır. Sonuç olarak (3.1.2) elde edilir. Lemma 3.1.1. den I da $p(t) \leq 0$ dır. Böylece $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde I da $\beta_{k+1} \leq \beta_k$ olduğu da kolayca görülebilir.

Şimdi de $p_{t_0} = 0$ olacak şekilde $p = \alpha_{k+1} - \beta_{k+1}$ ele alınarak I da $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$ olduğu ispatlanacaktır. Bunun için daha önce yapılan benzer işlemlerle

$$\begin{aligned} p' = \alpha_{k+1}' - \beta_{k+1}' &= -\left[f\left(t,\beta_k,\beta_{k_t},\alpha_k^t\right) - f\left(t,\alpha_k,\alpha_{k_t},\beta_k^t\right)\right] \\ &- M\left(\alpha_{k+1} - \alpha_k\right) - N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{(k+1)_t} - \alpha_{k_t}\right](s)\,ds \\ &+ M\left(\beta_{k+1} - \beta_k\right) + N\int_{-h_1}^{0}\left[\beta_{(k+1)_t} - \beta_{k_t}\right](s)\,ds \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. (3.1.5) de x yerine β_k, y yerine α_k, ϕ yerine β_{k_t} ve ψ yerine α_{k_t} alınırsa,

$$f\left(t,\beta_k,\beta_{k_t},\alpha_k^t\right) - f\left(t,\alpha_k,\alpha_{k_t},\beta_k^t\right) \geq -M\left(\beta_k - \alpha_k\right) - N\int_{-h_1}^{0}\left(\beta_{k_t} - \alpha_{k_t}\right)(s)\,ds$$

dır. Bu eşitsizlik, (3.2.9) da yerine yazılırsa (3.1.2) eşitsizliği elde edilir. O halde Lemma 3.1.1. den I da $p(t) \leq 0$ dır. Böylece I da $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$ olup, (3.2.8) elde edilir. Tümevarımdan, (3.2.4) bulunur. (3.2.4) ile (3.2.3) birlikte ele alınırsa (3.2.4) ün $[t_0, T+h_2]$ de de doğru olduğu görülür. Bu durumda $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ dizileri sınırlıdır. f monoton ve sınırlı olduğundan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ dizileri yakınsaktır, hatta düzgün yakınsaktır. O halde $[t_0, T]$ de

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \rho, \ \lim_{n\to\infty} \beta_n = r$$

dir. α_n, (3.2.2) yi sağladığından;

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \alpha_n' &= f\left(t, \lim_{n\to\infty} \alpha_{n-1}, \lim_{n\to\infty} \alpha_{(n-1)_t}, \lim_{n\to\infty} \beta_{n-1}^t\right) - \lim_{n\to\infty} M\left(\alpha_n - \alpha_{n-1}\right) \\ &\quad -N \int_{-h_1}^{0} \lim_{n\to\infty} \left[\alpha_{n_t} - \alpha_{(n-1)_t}\right](s)\, ds \end{aligned}$$

ve $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{n_{t_0}} = \phi_0$ dir. Bu durumda;

$$\rho' = f\left(t, \rho, \rho_t, r^t\right), \ \rho_{t_0} = \phi_0$$

dir. Benzer şekilde

$$r' = f\left(t, r, r_t, \rho^t\right), \ r_{t_0} = \phi_0$$

elde edilir. I da $\alpha_n \leq \beta_n$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$ ve böylece $\rho \leq r$ ve $\rho^T = r^T$ dir.

Artık (ρ, r) çiftinin (3.1.1) in sırasıyla minimal ve maksimal çözümleri olduğu gösterilebilir. Bunun için $x(t)$, I da $\alpha_0 \leq x \leq \beta_0$ olacak şekilde $x_{t_0} = \phi_0$, $x^T = \psi_0$ ile (3.1.1) in bir çözümü olsun. Bu durumda (ρ, r) nin tanımından $\rho \leq x \leq r$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\rho^T = x^T = r^T$ olduğu zaten bilinmektedir. $p_{t_0} = 0$ olacak şekilde $p=\alpha_1-x$ alınsın. (3.2.5) den ve $x(t)$, (3.1.1) in çözümü olduğundan

$$\begin{aligned} p' &= \alpha_1'-x' = -\left[f\left(t,x,x_t,x^t\right)-f\left(t,\alpha_0,\alpha_{0_t},\beta_0^t\right)\right] \\ & \quad -M\left(\alpha_1-\alpha_0\right)-N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{1_t}-\alpha_{0_t}\right](s)\,ds \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.1.5) de y yerine α_0, ϕ yerine x_t ve ψ yerine de α_{0_t} alınırsa

$$f\left(t,x,x_t,x^t\right)-f\left(t,\alpha_0,\alpha_{0_t},\beta_0^t\right)\geq -M\left(x-\alpha_0\right)-N\int_{-h_1}^{0}\left[x_t-\alpha_{0_t}\right](s)\,ds$$

elde edilir. O halde

$$p'=\alpha_1'-x'\leq -M\left(\alpha_1-x\right)-N\int_{-h_1}^{0}\left[\alpha_{1_t}-x_t\right](s)\,ds$$

dır. Bu durumda (3.1.2) eşitsizliği ve $p_{t_0}=0$ elde edilir. O halde Lemma 3.1.1. den I da $p(t)\leq 0$ dır. Böylece $\alpha_1\leq x$ elde edilmiş olur. Benzer şekilde $x\leq\beta_1$ ve $\alpha_{n+1}\leq x\leq\beta_{n+1}$ olduğu görülebilir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n+1}\leq\lim_{n\to\infty}x\leq\lim_{n\to\infty}\beta_{n+1}$$

dan;

$$\rho\leq x\leq r$$

elde edilir. Bu da (ρ,r) çiftinin (3.1.1) in minimal ve maksimal çözümleri olduğunu gösterir.

Ek olarak (v) koşulu sağlansın ve $\rho\leq r$ olduğundan $p=r-\rho$ alınsın. ρ ve r (3.1.1) in çözümleri olduğundan

$$p'=r'-\rho'=f\left(t,r,r_t,\rho^t\right)-f\left(t,\rho,\rho_t,r^t\right)$$

ve $p_{t_0}=0$, $p^T=0$ dır. (3.2.1) da x yerine r, y yerine ρ, ϕ_1 yerine r_t,ϕ_2 yerine ρ_t, ψ_1

yerine r^t, ψ_2 yerine ρ^t denirse;

$$\begin{aligned} f\left(t, r, r_t, \rho^t\right) - f\left(t, \rho, \rho_t, r^t\right) &\leq -L(r-\rho) + N_1 \int_{-h_1}^{0} [r_t - \rho_t](s)\, ds \\ &\quad + N_2 \int_{0}^{h_2} \left[r^t - \rho^t\right](\sigma)\, d\sigma \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (3.1.4) eşitsizliği elde edilir. O halde Lemma 3.1.2. den I da $p(t) \leq 0$ dır. Böylece $r \leq \rho$ elde edilmiş oldu. Benzer şekilde $\rho \leq r$ dir. Bu durumda $\rho = r$ dir. Sonuç olarak $x = \rho = r$ ortak değeri, $x_{t_0} = \phi_0$, $x^T = \psi_0$ ile (3.1.1) in bir tek çözümüdür. İspat tamamlanır.

4. DİFERENSİYEL EŞİTSİZLİKLER VE SABİT NOKTA TEOREMİ

Bu bölümde, bundan sonraki bölümde kullanılacak olan teoremler için temel kavramlar ve sabit nokta teoremi verilecektir. Bu temel kavramlar Lakshmikantham and Leela (1969) tarafından incelenmiştir.

4.1 Çözümlerin Varlığı

$$u' = g(t, u), \ u(t_0) = u_0 \tag{4.1.1}$$

birinci dereceden diferensiyel denklem sistemi ele alınsın. Burada,

$$u' = \frac{du}{dt}, \ u_0 = (u_{1_0}, u_{2_0}, ..., u_{n_0})$$

ve $g \in C[E, \mathbb{R}^n]$, $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, E açık kümedir.

Tanım 4.1.1. Bir $F = \{f(u)\}$ fonksiyon ailesi $E \subset \mathbb{R}^n$ deki bir u kümesinde tanımlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $u_1, u_2 \in E$ için, $\|u_1 - u_2\| < \delta$ olduğunda $\|f(u_1) - f(u_2)\| < \varepsilon$ olacak şekilde, $f \in F$ den bağımsız bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ varsa F fonksiyon ailesine $E \subset \mathbb{R}^n$ de eşsüreklidir denir.

Teorem 4.1.1. (Ascoli-Arzela). Eşsürekli ve eşsınırlı olan $F = \{f\}$ fonksiyon dizisi $E \subset \mathbb{R}^n$ deki bir kompakt u kümesi üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda E de düzgün yakınsak olan bir $\{f_n\}$, $n = 1, 2, ...$ alt dizisi vardır.

Teorem 4.1.2. (Peono Varlık Teoremi). $\mathbb{R}_0$, bir

$$[(t, u) : \ t_0 \leq t \leq t_0 + a, \ \ \|u - u_0\| \leq b]$$

kümesi olmak üzere $g \in C[\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^n]$ alınsın ve $\mathbb{R}_0$ da $\|g(t, u)\| \leq M$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

olmak üzere, (4.1.1) başlangıç değer problemi $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ da en az bir $u(t)$ çözümüne sahiptir.

4.2 Skaler Diferensiyel Eşitsizlikler

$u \in C[(t_0, t_0 + a), \mathbb{R}]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} D^+u(t) &= \lim_{h\to 0^+} \sup h^{-1}[u(t+h) - u(t)] \\ D_+u(t) &= \lim_{h\to 0^+} \inf h^{-1}[u(t+h) - u(t)] \\ D^-u(t) &= \lim_{h\to 0^-} \sup h^{-1}[u(t+h) - u(t)] \\ D_-u(t) &= \lim_{h\to 0^-} \inf h^{-1}[u(t+h) - u(t)] \end{aligned}$$

Dini türevleri ele alınsın.

$D^+u(t) = D_+u(t)$ olduğunda sağdan türev $u'_+(t)$ ile gösterilir. Benzer olarak $u'_-(t)$ gösterimi de soldan türevdir.

Tanım 4.2.1. $E \subset \mathbb{R}^2$, E açık küme ve $g \in C[E, \mathbb{R}^n]$ olsun. $u(t_0) = u_0$ başlangıç koşuluyla verilen

$$u' = g(t, u) \tag{4.2.1}$$

skaler diferensiyel denklemi ele alınsın.

$\upsilon \in C[[t_0, t_0 + a), \mathbb{R}]$, $\upsilon'_+(t)$, $t \in (t_0, t_0 + a)$ için var ve $(t, \upsilon(t)) \in E$ olsun. Eğer $\upsilon(t)$,

$$\upsilon'_+(t) < g(t, \upsilon(t)),\ t \in [t_0, t_0 + a)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\upsilon(t)$ ye alt-fonksiyon denir. Öte yandan eğer,

$$\upsilon'_+(t) > g(t, \upsilon(t)),\ t \in [t_0, t_0 + a)$$

ise $\upsilon(t)$ ye üst-fonksiyon denir.

Teorem 4.2.1. $E \subset \mathbb{R}^2$, E açık küme ve $g \in C[E, \mathbb{R}^n]$ olsun.

$$\upsilon, \omega \in C[[t_0, t_0 + a), \mathbb{R}], \quad (t, \upsilon(t)), (t, \omega(t)) \in E,\ t \in [t_0, t_0 + a)$$

olsun.

$$\upsilon(t_0) < \omega(t_0) \tag{4.2.2}$$

ve $t \in (t_0, t_0 + a)$ için

$$D_{-}\upsilon(t) \leq g(t, \upsilon(t)) \tag{4.2.3}$$

$$D_{-}\omega(t) > g(t, \omega(t)) \tag{4.2.4}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda;

$$\upsilon(t) < \omega(t), \ t \in [t_0, t_0 + a) \tag{4.2.5}$$

dır.

İspat: (4.2.5) iddiası yanlış ise,

$$Z = [t \in [t_0, t_0 + a) : \ \omega(t) \leq \upsilon(t)]$$

kümesi boş değildir. $t_1 = \inf Z$ ile tanımlansın. (4.2.2) den $t_0 < t_1$ olduğu açıktır. Ayrıca iddiadan öyle bir t_1 vardır ki,

$$\upsilon(t_1) = \omega(t_1) \tag{4.2.6}$$

ve

$$\upsilon(t) < \omega(t), \ t \in [t_0, t_1) \tag{4.2.7}$$

dır. (4.2.6) ve (4.2.7) nin kullanılmasıyla küçük $h < 0$ için;

$$\upsilon(t_1 + h) < \omega(t_1 + h)$$

elde edilir. $\upsilon(t_1) = \omega(t_1)$ olduğundan;

$$\upsilon(t_1 + h) - \upsilon(t_1) < \omega(t_1 + h) - \omega(t_1)$$

dır. $h < 0$ olduğundan;

$$\frac{\upsilon(t_1+h)-\upsilon(t_1)}{h} > \frac{\omega(t_1+h)-\omega(t_1)}{h}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\lim_{h\to 0^-}\inf\left[\frac{\upsilon(t_1+h)-\upsilon(t_1)}{h}\right] > \lim_{h\to 0^-}\inf\left[\frac{\omega(t_1+h)-\omega(t_1)}{h}\right]$$

olduğundan;

$$D_-\upsilon(t_1) \geq D_-\omega(t_1) \tag{4.2.8}$$

elde edilir. $(4.2.3)$, $(4.2.4)$ ve $(4.2.8)$ eşitsizliklerinden;

$$g(t_1,\upsilon(t_1)) > g(t_1,\omega(t_1))$$

dir. Bu (4.2.6) dan dolayı çelişkidir. Bu durumda Z boştur. O halde (4.2.5) elde edilir. İspat tamamlanmıştır.

Uyarı 4.2.1. Teorem 4.2.1. den $t \in (t_0, t_0+a)$ için (4.2.3) ve (4.2.4) eşitsizliklerinden sırasıyla

$$\begin{aligned} D_-\upsilon(t) &< g(t,\upsilon(t)) \\ D_-\omega(t) &\geq g(t,\omega(t)) \end{aligned}$$

olduğu söylenebilir.

Lemma 4.2.1. $\upsilon, \omega \in C\left[[t_0, t_0+a), \mathbb{R}\right]$ ve S, $[t_0, t_0+a)$ nin en fazla sayılabilir bir alt kümesi olmak üzere, $t \in [t_0, t_0+a) - S$ için

$$D\upsilon(t) \leq \omega(t)$$

Dini türevi ele alınsın. Bu durumda;

$$D_-\upsilon(t) \leq \omega(t)$$

dir.

4.3 Maksimal ve Minimal Çözümler

Tanım 4.3.1. $[t_0, t_0 + a)$ da (4.2.1) skaler diferensiyel denkleminin bir $r(t)$ çözümü alınsın. Bu durumda $[t_0, t_0 + a)$ da varolan (4.2.1) in her $u(t)$ çözümü için

$$u(t) \leq r(t), \ t \in [t_0, t_0 + a) \tag{4.3.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $r(t)$ ye (4.2.1) in bir maksimal çözümüdür denir. $\rho(t)$ minimal çözümü benzer şekilde tanımlanabilir.

Teorem 4.3.1. $g \in C[\mathbb{R}_0, \mathbb{R}]$, $\mathbb{R}_0 : t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $|u - u_0| \leq b$ ve $\mathbb{R}_0$ da $|g(t, u)| \leq M$ olsun. Bu durumda $[t_0, t_0 + \alpha]$ da, (4.2.1) denkleminin bir maksimal ve minimal çözümü vardır. Burada

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{2M + b}\right)$$

dir.

İspat: İlk olarak maksimal çözümün varlığı gösterilecektir, minimal çözümün varlığı benzerdir. $0 < \varepsilon \leq \frac{b}{2}$ alınsın.

$$u' = g(t, u) + \varepsilon, \ u(t_0) = u_0 + \varepsilon \tag{4.3.2}$$

başlangıç değer problemi alınsın.

$$g_\varepsilon(t, u) = g(t, u) + \varepsilon$$

olarak tanımlanırsa,

$$R_\varepsilon : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \ \ |u - u_0| - \varepsilon \leq \frac{b}{2}$$

ve süreklilikten;

$$|g_\varepsilon(t,u)| \leq M + \frac{b}{2}$$

dir. Teorem 4.1.2. den, (4.3.2) başlangıç değer problemi $[t_0, t_0+\alpha]$ aralığında bir $u(t,\varepsilon)$ çözümüne sahiptir.

$0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ için,

$$\begin{aligned} u(t_0,\varepsilon_2) &< u(t_0,\varepsilon_1) \\ u'(t,\varepsilon_2) &= g(t,u(t,\varepsilon_2)) + \varepsilon_2 \\ u'(t,\varepsilon_1) &> g(t,u(t,\varepsilon_1)) + \varepsilon_2,\ t \in [t_0, t_0+\alpha] \end{aligned}$$

dir. Teorem 4.2.1. den;

$$u(t,\varepsilon_2) < u(t,\varepsilon_1),\ t \in [t_0, t_0+\alpha]$$

elde edilir. Bu durumda $u(t,\varepsilon)$ fonksiyon ailesi $[t_0, t_0+\alpha]$ da eşsürekli ve düzgün sınırlıdır. Teorem 4.1.1. den $n \to \infty$ için $\varepsilon_n \to 0$ olacak şekilde bir $\{\varepsilon_n\}$ azalan dizisi ve $[t_0, t_0+\alpha]$ da

$$r(t) = \lim_{n\to\infty} u(t,\varepsilon_n)$$

düzgün limiti vardır.

$$u'(t,\varepsilon_n) = g(t,u(t,\varepsilon_n)) + \varepsilon_n,\ u(t_0,\varepsilon_n) = u_0 + \varepsilon_n$$

den;

$$\lim_{n\to\infty} u(t_0,\varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} (u_0 + \varepsilon_n)$$

dır. O halde;

$$r(t_0) = u_0$$

bulunur. $n \to \infty$ için $g(t,u(t,\varepsilon_n))$ nin $g(t,r(t))$ ye yakınsaması g nin düzgün sürekli olmasını gerektirir. Dolayısıyla;

$$u(t,\varepsilon_n) = u_0 + \varepsilon_n + \int_{t_0}^{t} g(s, u(s,\varepsilon_n))\, ds$$

dir. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$r(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, r(s))\, ds$$

elde edilir. $r(t_0) = u_0$ olduğu bilindiğinden $r(t)$, (4.2.1) probleminin bir çözümüdür. Tanım 4.3.1. den $r(t)$ nin (4.2.1) in maksimal çözümü olması için $[t_0, t_0+\alpha]$ da (4.3.1) eşitsizliğini sağlaması gerekir.

$[t_0, t_0+\alpha]$ da (4.2.1) in herhangi bir $u(t)$ çözümü varolsun. Bu durumda, $\varepsilon \leq \frac{b}{2}$ için

$$u(t_0) = u_0 < u_0 + \varepsilon = u(t_0, \varepsilon)$$

$$u'(t) = g(t, u(t)) < g(t, u(t)) + \varepsilon$$

$$u'(t,\varepsilon) = g(t, u(t,\varepsilon)) + \varepsilon$$

dir. Uyarı 4.2.1. den;

$$u(t) < u(t,\varepsilon),\ t \in [t_0, t_0+\alpha]$$

elde edilir. $\varepsilon \to 0$ için $u(t,\varepsilon)$ nun $r(t)$ ye düzgün olması maksimal çözümün tekliğini gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. $g \in C[E, \mathbb{R}]$ olsun. Burada $E \subset \mathbb{R}^2$, E açık küme ve $(t_0, u_0) \in E$ dir. Bu durumda (4.2.1) denkleminin, E sınırına genişletilebilen, maksimal ve minimal çözümleri vardır.

Lemma 4.3.1. Teorem 4.3.2. nin hipotezleri sağlansın. (4.2.1) denkleminin $r(t)$ maksimal çözümü en geniş $[t_0, t_0+a)$ aralığında varolsun. Ayrıca $[t_0, t_1]$ kompakt bir alt aralık olsun. Bu durumda $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ olacak şekilde $\varepsilon_0 > 0$ için $[t_0, t_1]$ de

(4.3.2) denkleminin $r(t,\varepsilon)$ maksimal çözümü vardır. $[t_0, t_1]$ de

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon) = r(t)$$

düzgün limiti vardır.

4.4 Karşılaştırma Teoremleri

Teorem 4.4.1. $E \subset \mathbb{R}^2$, E açık küme ve $g \in C[E,\mathbb{R}]$ alınsın. $[t_0, t_0+a)$, (4.2.1) denkleminin $r(t)$ maksimal çözümünün varolduğu en büyük aralık olsun. $m \in C[[t_0, t_0+a), \mathbb{R}]$, $t \in [t_0, t_0+a)$ için $(t, m(t)) \in E$; $m(t_0) \leq u_0$ ve bir Dini türevi için

$$Dm(t) \leq g(t, m(t)), \; t \in [t_0, t_0+a) - S \tag{4.4.1}$$

alınsın. Bu durumda;

$$m(t) \leq r(t), \; t \in [t_0, t_0+a) \tag{4.4.2}$$

dır.

İspat: Lemma 4.2.1. ve (4.4.1) den

$$D_{-}m(t) \leq g(t, m(t)), \; t \in (t_0, t_0+a) \tag{4.4.3}$$

dır. $t_0 < \tau < t_0 + a$ alınsın. Lemma 4.3.1. den (4.3.2) nin yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ için $[t_0, \tau]$ da $r(t,\varepsilon)$ maksimal çözümleri vardır ve

$$r(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon) \tag{4.4.4}$$

limiti düzgündür. (4.3.2) ve (4.4.3) kullanılarak Teorem 4.2.1. e uygulansın. Bu durumda;

$$m(t) < r(t,\varepsilon), \; t \in [t_0, \tau] \tag{4.4.5}$$

elde edilir. Son eşitsizlik ve (4.4.4) ten;

$$m(t) \leq r(t)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Uyarı 4.4.1. Eğer (4.4.1) in yerine

$$Dm\left(t\right) \geq g\left(t, m\left(t\right)\right), \ t \in \left[t_0, t_0 + a\right) - S$$

alınırsa ve $m\left(t_0\right) \geq u_0$ ise, bu durumda (4.4.2) sonucu

$$m\left(t\right) \geq \rho\left(t\right)$$

ile değiştirilmelidir. Burada $\rho\left(t\right)$, (4.2.1) in minimal çözümüdür.

Teorem 4.4.2. E, $\left[t_0, t_0 + a\right) \times \mathbb{R}^2$ çarpım uzayı ve $g \in C\left[E, \mathbb{R}\right]$ alınsın. g, v ye göre her bir t ve u için azalmayan olsun. $\left[t_0, t_0 + a\right)$ da

$$u' = g\left(t, u, u\right), \ u\left(t_0\right) = u_0 \geq 0 \tag{4.4.6}$$

diferensiyel denkleminin $r\left(t\right)$ maksimal çözümü var ve

$$r\left(t\right) \geq 0, \ t \in \left[t_0, t_0 + a\right) \tag{4.4.7}$$

olsun. Bu durumda $\left[t_0, t_0 + a\right)$ da;

$$u' = g_1\left(t, u\right), \ u\left(t_0\right) = u_0 \geq 0 \tag{4.4.8}$$

probleminin $r_1\left(t\right)$ maksimal çözümü vardır ve

$$r\left(t\right) = r_1\left(t\right), \ t \in \left[t_0, t_0 + a\right) \tag{4.4.9}$$

dır. Burada

$$g_1\left(t, u\right) = g\left(t, u, r\left(t\right)\right)$$

alınmıştır.

İspat: Teorem 4.3.1. ve Teorem 4.3.2. den (4.4.8) in $r_1\left(t\right)$ maksimal çözümü, E

nin sınırına genişletilebilen bir $[t_0, t_0 + \alpha]$, $\alpha < a$ aralığında vardır. Bu da $r_1(t)$ nin $[t_0, t_0 + a)$ da tanımlı olmasını veya $k \to \infty$ için $t_k \to t_1^-$ olmak üzere bir $\{t_k\}$ dizisi için

$$|r_1(t_k)| \to \infty \tag{4.4.10}$$

olacak şekilde $t_1 < t_0 + a$ nın varolmasını gerektirir.

$$r'(t) = g(t, r(t), r(t)) = g_1(t, r(t))$$

ele alınsın. Bu durumda Teorem 4.4.1. den, $r_1(t)$ var ve

$$r(t) \leq r_1(t) \tag{4.4.11}$$

dir. $(4.4.7)$, $(4.4.10)$ ve $(4.4.11)$ den $r_1(t) \geq 0$ dır. O halde $t_k \to t_1^-$ için

$$r_1(t_k) \to +\infty \tag{4.4.12}$$

elde edilir. Şimdi (4.4.12) ün doğru olmadığı gösterilecektir. Bunun için

$$u' = g(t, u, u) + \varepsilon, \ u(t_0) = u_0 + \varepsilon, \ u_0 \geq 0 \tag{4.4.13}$$

denkleminin $r(t, \varepsilon)$ maksimal çözümü ele alınsın. $r(t, \varepsilon)$, Lemma 4.3.1. den, $v > 0$, $[t_0, t_1 + v]$ de vardır ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $t_1 + v < t_0 + a$ dır. $r(t, \varepsilon)$, (4.4.13) ün bir çözümü olduğundan

$$r'(t, \varepsilon) = g(t, r(t, \varepsilon), r(t, \varepsilon)) + \varepsilon, \ r(t_0, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon$$

dır. O halde

$$r'(t, \varepsilon) > g(t, r(t, \varepsilon), r(t, \varepsilon)) \tag{4.4.14}$$

ve $r(t_0, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon$ olduğundan;

$$r(t_0) < r(t_0, \varepsilon)$$

dır. Bu yüzden Teorem 4.2.1. den;

$$r(t) < r(t,\varepsilon), \ t \in [t_0, t_1 + \upsilon] \tag{4.4.15}$$

eşitsizliği gerçeklenir. g, υ ye göre azalmayan olduğundan (4.4.14) ve (4.4.15) den;

$$r'(t,\varepsilon) > g_1(t, r(t,\varepsilon)), \ t \in [t_0, t_1 + \upsilon]$$

dir. Fakat

$$r_1'(t) = g(t, r_1(t), r(t)) = g_1(t, r_1(t)), \ t \in [t_0, t_1]$$

ve $r_1(t_0) < r(t_0, \varepsilon)$ dır. Teorem 4.2.1. den;

$$r_1(t) < r(t,\varepsilon), \ t \in [t_0, t_1] \tag{4.4.16}$$

dir. $\upsilon > 0$ olmak üzere $r(t,\varepsilon)$, $[t_0, t_1 + \upsilon]$ da varolduğundan (4.4.12), (4.4.16) dan dolayı bir çelişkidir. Bu da $[t_0, t_0 + a)$ da $r_1(t)$ nin varlığını ispatlar.

Şimdi (4.4.9) ispatlansın. $t \in [t_0, t_0 + a)$ için (4.4.11) in doğru olduğu bilinmektedir. g, υ ye göre monoton olduğundan ve (4.4.11) den;

$$r_1'(t) \le g(t, r_1(t), r_1(t))$$

elde edilir. Teorem 4.4.1. den;

$$r_1(t) \le r(t), \ t \in [t_0, t_0 + a)$$

dır. Bu eşitsizlik (4.4.11) ile birlikte ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.3. Teorem 4.4.2. deki varsayımlar ve $t \in [t_0, t_0 + a) - S$ için

$$Dm(t) \le g(t, m(t), \upsilon) \tag{4.4.17}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $t \in [t_0, t_0 + a)$, $v \leq r(t)$ ler için,

$$m(t) \leq r(t), \; t \in [t_0, t_0 + a) \tag{4.4.18}$$

dir.

İspat: $v \leq r(t), t \in [t_0, t_0 + a)$ alınsın. Bu durumda g, v ye göre monoton olduğundan $(4.4.17)$,

$$Dm(t) \leq g_1(t, m(t)), \; t \in [t_0, t_0 + a) - S$$

eşitsizliğine indirgenir. Burada

$$g_1(t, m(t)) = g(t, m(t), r(t))$$

dir. Eğer $r_1(t)$, $(4.4.8)$ un maksimal çözümü ise, Teorem 4.4.2. den $[t_0, t_0 + a)$ da $r_1(t)$ vardır ve $(4.4.9)$ doğrudur. Basit bir uygulamayla Teorem 4.4.1. , $(4.4.18)$ eşitsizliğini gerçekler.

4.5 Fonksiyonel Diferensiyel Eşitsizliklerde Varlık

$\tau > 0$, $[-\tau, 0]$ sürekli fonkiyonların uzayı olmak üzere $\mathcal{C}^n = C[[-\tau, 0], \mathbb{R}^n]$, verilsin. $\phi \in \mathcal{C}^n$ için,

$$\|\phi\|_0 = \max_{-\tau \leq s \leq 0} \|\phi(s)\|$$

normu tanımlansın. $x \in C[[-\tau, \infty), \mathbb{R}^n]$, $\forall t \geq 0$ için, x_t,

$$x_t(s) = x(t+s), \quad -\tau \leq s \leq 0$$

ile tanımlansın. Bir $\rho > 0$ verilsin ve

$$C_\rho = [\phi \in \mathcal{C}^n : \; \|\phi\|_0 < \rho]$$

alınsın. Bu gösterimlerle

$$x'(t) = f(t, x_t) \tag{4.5.1}$$

fonksiyonel diferensiyel sistemi ele alınsın.

Tanım 4.5.1. (i) $t_0 \le t \le t_0 + A$ için $x_t(t_0, \phi_0) \in C_\rho$ ve $[t_0 - \tau, t_0 + A]$ da $x(t_0, \phi_0)$ tanımlı ve sürekli
(ii) $x_{t_0}(t_0, \phi_0) = \phi_0$
(iii) $t \in [t_0, t_0 + A)$ için $x(t_0, \phi_0)$ ın t ye göre türevi olan $x'(t_0, \phi_0)(t)$ var ve $t \in [t_0, t_0 + A)$ için (4.5.1) sistemini sağlayacak şekilde bir $A > 0$ sayısı var ise, $t = t_0 \ge 0$ da alınan $\phi_0 \in C_\rho$ başlangıç fonksiyonu ile bir $x(t_0, \phi_0)$ fonksiyonu (4.5.1) in bir çözümüdür.

Teorem 4.5.1. $J = [0, \infty)$ olmak üzere $f \in C[J \times C_\rho, \mathbb{R}^n]$ olsun. Bu durumda $t = t_0 \ge 0$ da bir $\phi_0 \in C_\rho$ başlangıç fonksiyonu için (4.5.1) in bir $x(t_0, \phi_0)$ çözümü $[t_0 - \tau, t_0 + \alpha]$ da varolacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı vardır.

İspat. $a > 0$ alınsın ve $y \in C[[t_0 - \tau, t_0 + a], \mathbb{R}^n]$ için,

$$y(t) = \begin{cases} \phi_0(t - t_0), & t_0 - \tau \le t \le t_0 \\ \phi_0(0), & t_0 \le t \le t_0 + a \end{cases}$$

tanımlansın. Bu durumda $f(t, y_t)$, $[t_0, t_0 + a]$ aralığında t ye göre süreklidir ve

$$\|f(t, y_t)\| \le M_1$$

dir. $t \in [t_0, t_0 + a]$, $\psi \in C_\rho$ ve $\|\psi - y_t\|_0 \le b$ olmak üzere

$$\|f(t, \psi) - f(t, y_t)\| < 1$$

olacak şekilde sabit bir $b \in (0, \rho - \|\phi_0(0)\|)$ ın varolduğu olmayana ergi yöntemi ile gösterilecektir. Bu durumda her bir $k = 1, 2, ...$ için

$$\|\psi_k - y_{t_k}\|_0 < \frac{1}{k}$$

olacak şekilde $t_k \in [t_0, t_0 + a]$ ve $\psi_k \in C_\rho$ var ve

$$\|f(t_k, \psi_k) - f(t_k, y_{tk})\| \geq 1$$

dir. Şimdi

$$\lim_{p \to \infty} t_{k_p} = t_1$$

varolacak şekilde bir $\{t_{k_p}\}$ alt dizisi seçilsin. f, (t_1, y_1) de sürekli olduğundan;

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad \ni \quad \|\psi_1 - y_{t_1}\| < \delta \text{ ise } \|f(t_1, \psi_1) - f(t_1 - y_{t_1})\| < \varepsilon$$

dır. Ancak kabülde $k = 1$ için;

$$\|\psi_1 - y_{t_1}\|_0 < 1 \text{ ise } \|f(t_1, \psi_1) - f(t_1 - y_{t_1})\| \geq 1$$

idi. Bu ise çelişkidir. O halde $t \in [t_0, t_0 + a]$, $\psi \in C_\rho$ ve $\|\psi - y_t\|_0 \leq b$ olmak üzere

$$\|f(t, \psi)\| \leq M = M_1 + 1$$

elde edilir.

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

seçilsin. B, $[t_0 - \tau, t_0 + \alpha]$ dan $\mathbb{R}^n$ e sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $x \in B$ için norm,

$$\|x\|_0 = \max_{t_0 - \tau \leq u \leq t_0 + \alpha} \|x(u)\|$$

şeklinde tanımlansın. Bu norma göre B bir Banach uzayıdır. $S \subset B$, olmak üzere

$$S = \left\{ x \in B; \quad \begin{array}{ll} (i)\ \ x(u) = \phi_0(u - t_0), & t_0 - \tau \leq u \leq t_0 \\ (ii)\ \ \|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|, & t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \alpha] \end{array} \right.$$

tanımlansın. Bu durumda S düzgün sınırlı ve eşsüreklidir. O halde S kompakttır. Şimdi de S in konveks olduğu gösterilecektir. Bunun için $x, y \in S$ olsun. S in tanımından;

$$\begin{aligned}\|x(t_1)-x(t_2)\| &\leq M_1|t_1-t_2| \\ \|y(t_1)-y(t_2)\| &\leq M_2|t_1-t_2|\end{aligned}$$

dir. O halde;

$$\|\alpha x(t_1)-\alpha x(t_2)+(1-\alpha)y(t_1)-(1-\alpha)y(t_2)\| \leq K|t_1-t_2|$$

olduğundan $(\alpha x+(1-\alpha)y)\in S$ dir. Sonuç olarak S konvekstir. Bir $x\in S$ için
(i) $T(x_{t_0})=\phi_0$,
(ii)

$$T(x(t))=\phi_0(0)+\int_{t_0}^{t} f(s,x_s)\,ds,\ t_0\leq t\leq t_0+\alpha$$

tanımlansın. $\forall x\in S$ ve $t\in[t_0,t_0+a]$ için;

$$\|x(t)-\phi_0(0)\|\leq M|t-t_0|\leq M\alpha\leq b$$

dir. Böylece $x_t\in C_\rho$ ve $\|x_t-y_t\|_0\leq b$ dir. Bu nedenle $t_0\leq s\leq t_0+\alpha$ için $f(s,x_s)$ s in sürekli bir fonksiyonu ve

$$\|f(s,x_s)\|\leq M$$

dir. Ayrıca T, S de iyi tanımlı ve S den S e süreklidir.
Schaunder Sabit Nokta Teoremi' nden;
(i) $T(x_{t_0})=x_{t_0}$
(ii) $T(x(t))=x(t)$, $t_0\leq t\leq t_0+\alpha$
yı sağlayan en az bir $x\in S$ vardır. Bu da
(i) $x_{t_0}=\phi_0$,
(ii)

$$x(t)=\phi_0(0)+\int_{t_0}^{t} f(s,x_s)\,ds,\ t_0\leq t\leq t_0+\alpha$$

olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.5.1. $g \in C[J \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$ ve $m \in C[[t_0 - \tau, \infty), \mathbb{R}_+]$ olmak üzere,

$$D_{-}m(t) \leq g(t, |m_t|_0), \ t > t_0$$

eşitsizliği sağlansın. $t \geq t_0$ için

$$u' = g(t, u), \ u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{4.5.2}$$

skaler diferensiyel denkleminin $r(t) = r(t, t_0, u_0)$ maksimal çözümü varolsun. Bu durumda $|m_{t_0}|_0 \leq u_0$ olduğunda;

$$m(t) \leq r(t), \ t \geq t_0$$

dır.

İspat: Eşitsizliğin ispatı için

$$m(t) < u(t, t_0, u_0, \varepsilon), \ t \geq t_0$$

gerçeklendiğinin ispatlanması yeterlidir. Burada $u(t, t_0, u_0, \varepsilon)$, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$u' = g(t, u) + \varepsilon, \ u(t_0) = u_0 + \varepsilon$$

başlangıç değer probleminin herhangi bir çözümüdür. Bu durumda;

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(t, t_0, u_0, \varepsilon) = r(t, t_0, u_0)$$

dır. İspat Teorem 4.2.1. in ispatına çok benzerdir.

$$Z = [t \in [t_0, \infty) : \ m(t) \geq u(t, t_0, u_0, \varepsilon)]$$

boş olmayan bir küme ve $t_1 = \inf Z$ ile tanımlansın.

$$|m_{t_0}|_0 \leq u_0 < u_0 + \varepsilon$$

dan $t_1 > t_0$ dır. Ayrıca;

$$\begin{aligned} m(t_1) &= u(t_1, t_0, u_0, \varepsilon) \\ m(t) &< u(t, t_0, u_0, \varepsilon), \ t_0 \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $h < 0$ için

$$m(t_1 + h) < u(t_1 + h, t_0, u_0, \varepsilon), \ t_0 \leq t \leq t_1$$

elde edilir. O halde $m(t_1) = u(t_1, t_0, u_0, \varepsilon)$ olduğundan ve $h < 0$ dan;

$$\frac{m(t_1 + h) - m(t_1)}{h} > \frac{u(t_1 + h, t_0, u_0, \varepsilon) - u(t_1, t_0, u_0, \varepsilon)}{h}$$

dır. Yukarıdaki eşitliğin her iki yanının infimumu alınıp $h \to 0^-$ için limite geçilirse;

$$D_- m(t_1) \geq u'(t_1, t_0, u_0, \varepsilon) = g(t_1, u(t_1, t_0, u_0, \varepsilon)) + \varepsilon \tag{4.5.3}$$

elde edilir.

$$u' = g(t, u) \geq 0$$

olduğundan;

$$u'(t, t_0, u_0, \varepsilon) = g(t, u(t, t_0, u_0, \varepsilon)) \geq 0$$

dan $u(t, t_0, u_0, \varepsilon)$, t ye göre azalmayandır. Bunlar gözönüne alındığında,

$$|m_{t_1}|_0 = u(t_1, t_0, u_0, \varepsilon) = m(t_1) \tag{4.5.4}$$

elde edilir. Bu durumda

$$D_- m(t_1) \leq g(t_1, |m_{t_1}|_0) = g(t_1, u(t_1, t_0, u_0, \varepsilon))$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da (4.5.3) ile çelişir. O halde Z kümesi boştur. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 4.5.2. $f \in C\left[J \times \mathcal{C}^n, \mathbb{R}^n\right]$ ve $(t, \phi) \in J \times \mathcal{C}^n$ için

$$\|f(t, \phi)\| \leq g\left(t, \|\phi\|_0\right) \tag{4.5.5}$$

alınsın. Burada $g \in C\left[J \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+\right]$ ve her bir $t \in J$ için u ya göre azalmayandır. Her $t \geq t_0$ için (4.5.2) nin $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ çözümleri varolsun. Bu durumda, (4.5.1) in herhangi bir $x(t_0, \phi_0)$ çözümünün varolduğu en büyük aralık $[t_0, \infty)$ dır.

İspat: $[t_0, \beta)$ da varolan (4.5.1) in bir $x(t_0, \phi_0)$ çözümü ele alınsın.
Burada $t_0 < \beta < \infty$ dur. $t \in [t_0, \beta)$ için

$$m_t = \|x_t(t_0, \phi_0)\|$$

olacak şekilde

$$m(t) = \|x(t_0, \phi_0)(t)\|$$

ile tanımlansın. (4.5.5) varsayımının kullanılmasıyla, $t > t_0$ için

$$D_{-}m(t) \leq g\left(t, |m_t|_0\right)$$

eşitsizliği kolayca elde edilebilir.

$$|m_{t_0}|_0 = \|\phi_0\|_0 \leq u_0$$

seçilirse Lemma 4.5.1. den

$$m(t) \leq r(t)$$

bulunur. O halde

$$\|x(t_0, \phi_0)(t)\| \leq r(t, t_0, u_0)\,, \;\; t_0 \leq t \leq \beta \tag{4.5.6}$$

dır. $g(t, u) \geq 0$, $r(t, t_0, u_0)$ in azalmayan olmasından ve (4.5.6) dan

$$\|x_t(t_0, \phi_0)\|_0 \leq r(t, t_0, u_0)\,, \;\; t_0 \leq t \leq \beta \tag{4.5.7}$$

elde edilir.

$t_0 < t_1 < t_2 < \beta$ olacak şekildeki herhangi t_1, t_2 için;

$$\|x(t_0,\phi_0)(t_1) - x(t_0,\phi_0)(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} g\left(s, \|x_s(t_0,\phi_0)\|_0\right) ds$$

dir. (4.5.7) den ve $g(t,u)$ nun u ya göre monoton olmasından;

$$g\left(t, \|x_t(t_0,\phi_0)\|_0\right) \leq g\left(t, r(t,t_0,u_0)\right)$$

elde edilir. $r(t)$, (4.5.2) nin maksimal çözümü olduğundan;

$$\begin{aligned}\|x(t_0,\phi_0)(t_1) - x(t_0,\phi_0)(t_2)\| &\leq \int_{t_1}^{t_2} g\left(s, r(s,t_0,u_0)\right) ds \\ &= r(t_2,t_0,u_0) - r(t_1,t_0,u_0)\end{aligned}$$

dir. $t_1, t_2 \to \beta^-$ iken $\lim\limits_{t\to\beta^-} x(t_0,\phi_0)(t)$ limitinin varlığı elde edilir.

$$x(t_0,\phi_0)(\beta) = \lim_{t\to\beta^-} x(t_0,\phi_0)(t)$$

tanımlansın ve $t = \beta$ da $\psi_0 = x_\beta(t_0,\phi_0)$ yeni başlangıç fonksiyonu ele alınsın.

Teoerm 4.5.1. in bir uygulaması olarak t_0 yerine β alınırsa; $[\beta - \tau, \beta + \alpha] \supset [\beta, \beta + \alpha]$ dır. O halde $\alpha > 0$ olmak üzere $[\beta, \beta + \alpha]$ da (4.5.1) in bir $x(\beta, \psi_0)$ çözümü vardır. Böylece ispat tamamlanır.

4.6 Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda Bernfeld and Lakshmikantham (1977) ın bir çalışması incelenmiştir.

Tanım 4.6.1. E, Banach uzayı ve $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $E_0 = C\left[[a,b], E\right]$ alınsın. T operatörü $T : E_0 \to E$ olarak tanımlansın. Sabit bir $c \in [a,b]$ için

$$T\phi = \phi(c)$$

ise $\phi \in E_0$, T nin bir sabit noktasıdır denir.

Ayrıca $\forall \phi, \psi \in E_0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\|T\phi - T\psi\|_E \leq \alpha \|\phi - \psi\|_{E_0}$$

ve

$$\|\phi\|_{E_0} = \max_{a \leq s \leq b} \|\phi(s)\|_E$$

ise T operatörü bir daralmadır. Burada $\|.\|_E$, E de normu belirtmektedir.

Teorem 4.6.1. $T : E_0 \to E$ ve T bir daralma olsun. Aşağıdakiler sağlansın.
(i) $\phi_0 \in E_0$ olsun. $\{\phi_n\}$ dizisinin ardışık uygulamasıyla elde edilen her dizisi bir $c \in [a, b]$ için

$$T\phi_n = \phi_{n+1}(c)$$

ve

$$\left\|\phi_{n+1} - \phi_n\right\|_{E_0} = \left\|\phi_{n+1}(c) - \phi_n(c)\right\|_E \tag{4.6.1}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde T nin bir ϕ^* sabit noktasına yakınsar.

(ii) $\phi_0, \psi_0 \in E_0$ olsun. ϕ_0 ve ψ_0 ne ilişkin $\{\phi_n\}$ ve $\{\psi_n\}$ dizileri (i) deki gibi verilsin. Bu durumda;

$$\|\phi_n - \psi_n\|_{E_0} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left[\|\phi_1 - \phi_0\|_{E_0} - \|\psi_1 - \psi_0\|_{E_0} + \|\phi_0 - \psi_0\|_{E_0}\right]$$

dır. Ayrıca, $\phi_0 = \psi_0$ ve $\{\phi_n\} \neq \{\psi_n\}$ ise

$$\|\phi_n - \psi_n\|_{E_0} \leq \frac{2}{1-\alpha} \left[\|\phi_1 - \phi_0\|_{E_0}\right]$$

elde edilir.

(iii) $\Omega_0 = \left[\phi \in E_0 : \|\phi\|_{E_0} = \|\phi(c)\|_E\right]$ olsun. $\{\phi_n\}$ ve $\{\psi_n\}$, (ii) deki gibi alınsın. Her n için $(\phi_n - \psi_n) \in \Omega_0$ ise;

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n$$

dir. Son olarak,

$$\Omega_{\phi^*} = \left\{ \phi \in E_0 : \ \ \|\phi - \phi^*\|_{E_0} = \|\phi(c) - \phi^*(c)\|_E \right\}$$

da ϕ^*, T nin bir tek sabit noktasıdır.

İspat: (i) nin ispatı: $\phi_0 \in E_0$ olsun. Hipotezlerden $T\phi_0 \in E$ dir. $x_1 = \phi_1(c)$ ve

$$\|\phi_1(c) - \phi_0(c)\|_E = \|\phi_1 - \phi_0\|_{E_0}$$

olacak şekilde $\phi_1 \in E$ alınsın. $E_0 = C\left[[a,b], E\right]$, $T\phi_0 = x_1$, $x_1 \in E$,

$$T\phi_n = x_{n+1} = \phi_{n+1}(c)$$

ve

$$\left\|\phi_{n+1}(c) - \phi_n(c)\right\|_E = \left\|\phi_{n+1} - \phi_n\right\|_{E_0}, \ n = 1, 2, ...$$

olarak tanımlansın. T bir daralma olduğundan;

$$\left\|\phi_n - \phi_{n+1}\right\|_{E_0} = \left\|\phi_n(c) - \phi_{n+1}(c)\right\|_E = \left\|T\phi_{n-1} - T\phi_n\right\|_E \leq \alpha \left\|\phi_{n-1} - \phi_n\right\|_{E_0}$$

dır.

$$T\phi_n = \phi_{n+1}$$

olduğundan;

$$\phi_1 = T\phi_0, \ \phi_2 = T\phi_1 = T^2\phi_0, \ \phi_3 = T\phi_2 = T^3\phi_0, ..., \ \phi_n = T^n\phi_0$$

dır. O halde,

$$\left\|\phi_n - \phi_{n+1}\right\|_{E_0} \leq \alpha^n \|\phi_0 - \phi_1\|_{E_0}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$m \geq n$ ise, üçgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
\|\phi_m - \phi_n\|_{E_0} &\leq \left\|\phi_m - \phi_{m-1}\right\|_{E_0} + \left\|\phi_{m-1} - \phi_{m-2}\right\|_{E_0} + ... + \left\|\phi_{n+1} - \phi_n\right\|_{E_0} \\
&\leq \alpha^{m-1} \|\phi_0 - \phi_1\|_{E_0} + \alpha^{m-2} \|\phi_0 - \phi_1\|_{E_0} + ... + \alpha^n \|\phi_0 - \phi_1\|_{E_0} \\
&= \alpha^n \left[1 + ... + \alpha^{m-2-n} + \alpha^{m-1-n}\right] \|\phi_0 - \phi_1\|_{E_0} \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \left[\|\phi_0 - \phi_1\|_{E_0}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden $m, n \to \infty$ iken, $\|\phi_m - \phi_n\|_{E_0} \to 0$ dır. O halde $\{\phi_n\}$ bir Cauchy dizisidir. E_0 tam olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi^*\| = 0$$

olacak şekilde bir ϕ^* varolup $\{\phi_n\}$ dizisi ϕ^* a yakınsar. O halde;

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi^*$$

olacak şekilde $\phi^* \in E_0$ vardır. T daralması sürekli bir dönüşüm olduğundan,

$$T\phi^* = T\left(\lim_{n\to\infty} \phi_n\right) = \lim_{n\to\infty} (T\phi_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1}(c) = \phi^*(c)$$

dir. Bu durumda ϕ^*, T nin bir sabit noktasıdır. Böylece (i) ispatlanır.

(ii) nin ispatı:

$$\left\|\phi_n - \phi_{n-1}\right\|_{E_0} \leq \alpha^{n-1} \|\phi_1 - \phi_0\|_{E_0}$$

eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
\|\phi_n - \psi_n\|_{E_0} &\leq \left\|\phi_n - \phi_{n-1}\right\|_{E_0} + \left\|\phi_{n-1} - \psi_{n-1}\right\|_{E_0} + \left\|\psi_{n-1} - \psi_n\right\|_{E_0} \\
&\leq \alpha^{n-1} \left[\|\phi_1 - \phi_0\|_{E_0} + \|\psi_1 - \psi_0\|_{E_0}\right] + \left\|\phi_{n-1} - \psi_{n-1}\right\|_{E_0}
\end{aligned}$$

bulunur. Tümevarımdan;

$$\left\|\phi_{n-1} - \psi_{n-1}\right\|_{E_0} \leq \alpha^{n-2} \left[\|\phi_1 - \phi_0\|_{E_0} + \|\psi_1 - \psi_0\|_{E_0}\right] + \left\|\phi_{n-2} - \psi_{n-2}\right\|_{E_0}$$

dir. O halde;

$$\begin{aligned}
\|\phi_n-\psi_n\|_{E_0} &\le \alpha^{n-1}\left[\|\phi_1-\phi_0\|_{E_0}+\|\psi_1-\psi_0\|_{E_0}\right] \\
&\quad +\alpha^{n-2}\left[\|\phi_1-\phi_0\|_{E_0}+\|\psi_1-\psi_0\|_{E_0}\right]+\left\|\phi_{n-2}-\psi_{n-2}\right\|_{E_0} \\
&\le \left[\alpha^{n-1}+...+\alpha^0\right]\left[\|\phi_1-\phi_0\|_{E_0}+\|\psi_1-\psi_0\|_{E_0}\right]+\|\phi_0-\psi_0\|_{E_0} \\
&\le \frac{1}{1-\alpha}\left[\|\phi_1-\phi_0\|_{E_0}+\|\psi_1-\psi_0\|_{E_0}\right]+\|\phi_0-\psi_0\|_{E_0}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$T\phi_n=\phi_{n+1}(c)$$

olduğundan $T\psi_0=\psi_1(c)$ ve $T\phi_0=T\phi_1(c)$ dır. Özel olarak $\psi_0\equiv\phi_0$ ise,

$$\psi_0(c)=\phi_0(c)\,,\; T\psi_0=T\phi_0$$

eşitliklerinden;

$$\psi_1(c)=\phi_1(c)$$

bulunur. Bu durumda (4.6.1) den;

$$\begin{aligned}
\|\phi_n-\psi_n\|_{E_0} &\le \frac{1}{1-\alpha}\left[\|\phi_1(c)-\phi_0(c)\|_E+\|\psi_1(c)-\psi_0(c)\|_E\right] \\
&= \frac{2}{1-\alpha}\|\phi_1-\phi_0\|_{E_0}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) nin ispatı tamamlanmıştır.

(iii) nin ispatı: $n=0,1,2...$ için $\phi_n-\psi_n\in\Omega_0$ ve $\{\phi_n\}$ ve $\{\psi_n\}$ dizileri (ii) deki gibi alınsın. T daralma olduğundan;

$$\begin{aligned}
\|\psi_n-\phi_n\|_{E_0} &= \|\psi_n(c)-\phi_n(c)\|_E \\
&= \left\|T\psi_{n-1}-T\phi_{n-1}\right\|_E \\
&\le \alpha\left\|\psi_{n-1}-\phi_{n-1}\right\|_{E_0}
\end{aligned}$$

dır. Bu durumda tümevarımdan;

$$\begin{aligned}\|\psi_n-\phi_n\|_{E_0} &\leq \alpha\left\|\psi_{n-1}-\phi_{n-1}\right\|_{E_0}\\ &\leq \alpha^2\left\|\psi_{n-2}-\phi_{n-2}\right\|_{E_0}\\ &\leq \ldots\\ &\leq \alpha^n\|\psi_0-\phi_0\|_{E_0}\end{aligned}$$

elde edilir. (i) den $\{\phi_n\}$ ve $\{\psi_n\}$ dizileri yakınsak olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n=\lim_{n\to\infty}\psi_n$$

dir. Sonuç olarak, Ω_{ϕ^*} da $\psi^*\neq\phi^*$, T nin bir sabit noktası ise;

$$\begin{aligned}\|\phi^*-\psi^*\|_{E_0} &= \|\phi^*(c)-\psi^*(c)\|_E\\ &= \|T\phi^*-T\psi^*\|_E\\ &\leq \alpha\|\phi^*-\psi^*\|_{E_0}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bir çelişkidir. İspat tamamlanır.

Örnek 4.6.1.

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x_t)\\ x_{t_0}=\phi_0,\ \ \phi_0\in E_0=C\left[[-\tau,0],E\right]\end{cases}\tag{4.6.2}$$

sistemi ele alınsın. Burada $f\in C\left[[t_0,t_0+d]\times E_0,E\right]$ dır. $t\in[t_0,t_0+d]$, $\phi,\psi\in E_0$ için f,

$$\|f(t,\phi)-f(t,\psi)\|_E\leq L\|\phi-\psi\|_{E_0}$$

eşitsizliğini sağlasın. α, $0<\alpha<\frac{1}{2L}$ olacak şekilde seçilsin. Her bir $t\in[t_0,t_0+\alpha]$ için,

$$E_{0,t}=C\left[[t_0-\tau,t],E\right]$$

alınsın. $T_t : E_{0,t} \to E$ operatörü

$$T_t \phi_t = \phi_{0,t}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \widehat{\phi}_s\right) ds$$

olarak tanımlansın. Burada $\phi_t \in E_{0,t}$ olduğundan $\widehat{\phi}_s \in E_0$, $s + \theta \in [t_0 - \tau, t]$ için, $\widehat{\phi}_s(\theta) = \phi_t(s+\theta)$ olarak tanımlanır.

$$\phi_{0,t}(s) = \begin{cases} \phi_0(s), & t_0 - \tau \leq s \leq t_0 \\ \phi_0(t_0), & t_0 \leq s \leq t \end{cases}$$

dir. Her bir $t \geq t_0$ için Teorem 4.6.1., T operatörüne uygulansın. Burada $a = t_0 - \tau$, $b = c = t$ alınmıştır. Lipschitz koşulundan,

$$\begin{aligned} \|T_t\phi_t - T_t\psi_t\|_E &\leq \int_{t_0}^{t} \|f\left(s, \widehat{\phi}_s\right) - f\left(s, \widehat{\psi}_s\right)\|_E ds \\ &\leq L\int_{t_0}^{t} \|\widehat{\phi}_s - \widehat{\psi}_s\|_{E_{0,t}} ds \\ &\leq L\int_{t_0}^{t} \|\phi_t(s+\theta) - \psi_t(s+\theta)\|_{E_{0,t}} ds \\ &= L\|\phi_t(s+\theta) - \psi_t(s+\theta)\|_{E_{0,t}}(t - t_0) \end{aligned}$$

ve $L(t - t_0) \leq \alpha$ dır. Bu durumda T_t operatörü bir daralmadır.

(i) $T_t\phi_{n,t} = \phi_{n+1,t}(t) = x_{n+1}(t)$,

(ii) $\phi_{n,t}$, t ye göre sürekli,

(iii)

$$\begin{aligned} \left\|\phi_{n,t} - \phi_{n-1,t}\right\|_{E_{0,t}} &= \left\|\phi_{n,t}(t) - \phi_{n-1,t}(t)\right\|_E \\ &= \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|_E \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\left\{\phi_{n,t}\right\} \in E_{0,t}$ dizisi tanımlansın. Burada $x_n(t)$,

$$x_n(t) = \phi_{0,t}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f\left(s, \widehat{\phi}_{n-1,s}\right) ds \tag{4.6.3}$$

şeklinde alınmıştır. O halde Teorem 4.6.1. in (i) koşulundan $\left\{\phi_{n,t}\right\}$ dizisi $\overline{\phi}_t \in E_{0,t}$ ye yakınsaktır ve

$$T_t\overline{\phi}_t = \overline{\phi}_t(t) \overset{def}{\equiv} \overline{x}(t)$$

dir. Bu durumda $\overline{\phi}_t$, T_t nin bir sabit noktasıdır.

Ayrıca (ii) ve $s \in [t_0, t]$ için $x_n(s)$, $\overline{x}(s)$ e düzgün yakınsak olduğundan $\overline{x}(t)$, $[t_0, t_0 + \alpha]$ da (4.6.2) nin bir çözümüdür. O halde Teorem 4.6.1. in koşulları sağlanır. Dolayısıyla $\overline{x}(t)$, T_t nin bir tek sabit noktasıdır.

5. FONKSİYONEL DİFERENSİYEL SİSTEMLER İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİĞİ

5.1 İleri Terimli Fonksiyonel Diferensiyel Sistemler

f ve ψ_0 sürekli fonksiyonları için, ileri terimli

$$\begin{cases} y'(\tau) = f(\tau, y(\tau), y(\tau+h)) \\ y(\tau) = \psi_0(\tau), \quad \tau_0 \geq 0, \ h \geq 0, \ [\tau_0, \tau_0+h], \end{cases} \tag{5.1.1}$$

diferensiyel denklemi ele alınsın. Genelleştirme yapılırsa ileri terimli

$$\begin{cases} y'(\tau) = f(\tau, y(\tau), y^{\tau}) \\ y^{\tau_0} = \psi_0 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

fonksiyonel diferensiyel sistemi elde edilir. Burada $\psi_0 \in C([0,h], \mathbb{R}^n)$, her bir $-T \leq \tau \leq \tau_0$ için

$$y^{\tau} = y(\tau+\sigma), \ 0 \leq \sigma \leq h$$

ve $f \in C([-T, \tau_0] \times \mathbb{R}^n \times C, \mathbb{R}^n)$, $C = C([0,h], \mathbb{R}^n)$ dır.
$\phi_0 \in C_0 = C([-h_0, 0], \mathbb{R}^n)$,

$$x_t = x(t+s), \ -h_0 \leq s \leq 0, \ h_0 \geq 0, \ -T \leq t \leq \tau_0$$

ve $f \in C([-T, \tau_0] \times \mathbb{R}^n \times C_0, \mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = F(t, x(t), x_t) \\ x_{t_0} = \phi_0 \end{cases} \tag{5.1.3}$$

gecikmeli fonksiyonel diferensiyel sistemi ele alınsın.

(5.1.3) sisteminin teorisi iyi bilinmektedir. (5.1.2) ileri terimli sistemlerin teorisini incelemeye gerek yoktur. Çünkü, Devi and Lakshmikantham (2007) tarafından (5.1.2) ve (5.1.3) sistemleri arasında birebir bir eşleşme olduğu gösterilmiştir. Şimdi bu iki sistemin denkliği gösterilecektir.

$$\tau = -t,\ \sigma = -s,\quad \frac{d\tau}{dt} = -1$$

olacak şekilde

$$y(\tau) = y(-t) = x(t)$$

tanımlansın. Her $t, \tau \in [-T, \tau_0]$ için

$$y^{\tau} = y(\tau + \sigma) = y(\tau - s) = y(-(t+s)) = x(t+s) = x_t(s) = x_t$$

sağlanır. Burada $0 \leq \sigma \leq h$, $-h_0 \leq s \leq 0$ dır. O halde

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(-t)}{dt} = \frac{dy(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -f(-t, x(t), x_t) \\ x_{t_0} = \phi_0,\ \phi_0 \in C_0 \end{cases} \tag{5.1.4}$$

dır. Bu durumda

$$y^{\tau_0} = y(\tau_0 + \sigma) = y(-(t_0 + s)) = x(t_0 + s) = x_{t_0}(s)$$

dır. O halde $y^{\tau_0} = \psi_0$ eşitliği $x_{t_0} = \phi_0$ eşitliğini gerektirir.

Eğer $F(t, x(t), x_t) = -f(-t, x(t), x_t)$ ve $\phi_0(s) = \psi_0(-s)$ ile tanımlanırsa, (5.1.2) ileri terimli sistemi (5.1.3) gecikmeli sistemine denk olur. Benzer bir dönüşümle (5.1.3) gecikmeli sistemi (5.1.2) ileri terimli sistemine dönüştürülebilir. Bunun için

$$t = -\tau,\ s = -\sigma,\quad x(t) = x(-\tau) = y(\tau),\ \frac{dt}{d\tau} = -1$$

olacak şekilde, $\tau \in [-T, \tau_0]$ için

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{dx(-\tau)}{d\tau} = \frac{dx(t)}{dt}\frac{dt}{d\tau} = f(\tau, y(\tau), y^{\tau})$$

ve

$$y^{\tau_0} = y(\tau_0 + \sigma) = y(-(t_0 + s)) = x(t_0 + s) = x_{t_0}(s) = \phi_0(-\sigma) = \psi_0(\sigma)$$

alınsın. Böylece

$$y(\tau_0, \psi_0)(\tau) = x(t_0, \phi_0)(-\tau) = x(t_0, \phi_0)(t)$$

dir. Bu yüzden, ileri terimli sistemlerin çalışması, gecikmeli terimli sistemlerin çalışmasına indirgenebilir.

Şimdi (5.1.3) sistemi için iyi bilinen temel sonuçlar ispatlanıp, (5.1.2) sistemi için istenilen sonuçların sağlandığı gösterilecektir.
$\phi_0 \in C_0,\ f \in C([t_0, t_0 + d] \times C_0, \mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t),\ t \in [t_0, t_0 + d],\ t_0 \geq 0,\ d > 0 \\ x_{t_0} = \phi_0 \end{cases} \tag{5.1.5}$$

ele alınsın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.1.1. (5.1.5) deki f, $t \in [t_0, t_0 + d]$, $\phi_1, \phi_2 \in C_0$ için

$$|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)| \leq L |\phi_1 - \phi_2|_0 \tag{5.1.6}$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada,

$$|\phi_1 - \phi_2|_0 = \max |\phi_1(s) - \phi_2(s)|$$

dir. Eğer $0 < \alpha < \frac{1}{2L}$ ise, $t_0 \leq t \leq \alpha$ da bir tek $x(t_0, \phi_0)(t)$ çözümü vardır.

İspat: Örnek 4.6.1. in ispatına benzerdir.
Yukarıdaki değişim yapılırsa, gecikmeli sistem,

$$\begin{cases} y'(\tau) = -f(-\tau, y^\tau),\ \tau \in [-(t_0 + d), -t_0],\ t_0 = -\tau_0 \\ y^{\tau_0}(\sigma) = \psi_0(\sigma) = \phi_0(-\sigma) \end{cases} \tag{5.1.7}$$

ileri terimli sisteminin yerini alır. Açıkça $-f$ Lipschitz koşulunu sağlar ve bu yüzden

$[-(t_0+\alpha), -t_0]$ da tanımlı bir tek

$$y(\tau_0, \psi_0)(\tau) = x(t_0, \phi_0)(-\tau) = x(t_0, \phi_0)(t)$$

çözümü vardır.

Teorem 5.1.2. $f \in C([t_0, t_0+\alpha] \times C_\rho, \mathbb{R}^n)$ alınsın. Burada

$$C_\rho = [\phi \in C_0 : \ |\phi|_0 < \rho]$$

dır. Bu durumda $t = t_0 \geq 0$ da alınan herhangi bir $\phi_0 \in C_\rho$ başlangıç fonksiyonu için $[t_0, t_0+\alpha]$ da (5.1.5) in bir $x(t_0, \phi_0)(t)$ çözümü varolacak şekilde bir $\alpha > 0$ vardır.

İspat: Teorem 4.5.1. in ispatına benzerdir.

O halde (5.1.5) için ispatlanan bu teorem (5.1.7) için de geçerlidir. Çünkü (5.1.7) deki $-f$, $[-(t_0+\alpha), -t_0] \times C_0$ da sürekli bir fonksiyoneldir. Böylece $[-(t_0+\alpha), -t_0]$ da

$$y(-t_0, \psi_0)(\tau) = x(t_0, \phi_0)(-\tau) = x(t_0, \phi_0)(t)$$

çözümü vardır.

Şimdi (5.1.5) sistemi için karşılaştırma sonuçları verilsin.

Lemma 5.1.1. $m \in C([t_0 - h_0, \infty), \mathbb{R}_+)$ olsun. $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ olmak üzere

$$m'(t) \leq g(t, |m_t|_0), \ t > t_0 \tag{5.1.8}$$

eşitsizliği sağlansın. $r(t) = r(t, t_0, u_0)$,

$$u' = g(t, u), \ u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{5.1.9}$$

skaler diferensiyel denkleminin $t \geq t_0$ için varolan maksimal çözümü olsun. Bu durumda,

$$|m_t|_0 \leq u_0$$

olduğunda

$$m(t) \leq r(t)\,,\ t \geq t_0$$

dır.

İspat: Lemma 4.5.1. in ispatına benzerdir.

Lemma 5.1.2. $m \in C\left((-\infty, -t_0 + h_0], \mathbb{R}_+\right), g \in C\left[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+\right]$ ve $\tau_0 = -t_0 \leq 0$ olmak üzere

$$\frac{dm(\tau)}{d\tau} \geq -g\left(-\tau, |m^\tau|_0\right), \quad \tau < -t_0 = \tau_0 \tag{5.1.10}$$

eşitsizliği sağlansın. $r(\tau) = r(\tau, -\tau_0, u_0)\,,$

$$u' = -g(\tau, u)\,,\ u(\tau_0) = u_0 \geq 0$$

skaler diferensiyel probleminin $-\infty < \tau \leq \tau_0$ için varolan maksimal çözümü olsun. Bu durumda $\tau \leq \tau_0$ için

$$|m_{\tau_0}| \leq u_0$$

olduğunda

$$m(\tau) \leq r(\tau)$$

dır.

İspat:

$$\sigma = -s,\ \tau = -t,\ \frac{d\tau}{dt} = -1$$

olacak şekilde $m(\tau) = m(-t) = p(t)$ tanımlanırsa;

$$m^\tau = m(\tau + \sigma) = m(\tau - s) = m(-(t+s)) = p(t+s) = p_t(s) = p_t$$

ve $m^{\tau_0} = p_{t_0}$ dır. O halde; (5.1.10) eşitsizliği;

$$\frac{dp(t)}{dt} \leq g\left(t, |p_t|_0\right)$$

şekline dönüşür.

Teorem 5.1.3. $f \in C(\mathbb{R}_+ \times C_0, \mathbb{R}^n)$ ve $(t, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times C_0$ için

$$|f(t, \phi)| \leq g(t, |\phi|_0)$$

alınsın. Burada $g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$ ve $g(t, u)$ her bir $t \in \mathbb{R}_+$ için, u ya göre azalmayandır. (5.1.9) probleminin $\forall t \geq t_0$ için $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ çözümü varolsun. Bu durumda (5.1.5) in herhangi bir $x(t_0, \phi_0)(t)$ çözümünün varolduğu en büyük aralık $[t_0, \infty)$ dır.

İspat: Teorem 4.5.2. nin ispatına benzerdir.

Bu teorem (5.1.7) nin herhangi bir $y(\tau_0, \psi_0)(\tau)$ çözümünün varolduğu en büyük aralığın $(-\infty, \tau_0)$ olmasını gerektirir. Burada $\tau_0 = -t_0$, $t_0 \geq 0$ dır. Böylece ileri terimli bir sistemin gecikmeli bir sisteme çevrilebileceği açıktır.

5.2 Gecikmeli ve İleri Terimli Fonksiyonel Diferensiyel Sistemler

Bu kısımda hem gecikmeli hem de ileri terim içeren fonksiyonel diferensiyel sistemler için monoton iterasyon tekniği, Bhaskar and Lakshmikantham (2007) tarafından incelenmiiştir.

Teorem 5.2.1. $g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}]$ olsun. Her bir $t \in \mathbb{R}_+$ için $g(t, u, v)$, u ve v ye göre azalmayan olsun. $[t_0, \infty)$ da

$$u' = g(t, u, u), \ u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{5.2.1}$$

skaler diferensiyel denkleminin $R(t) \geq 0$ maksimal çözümü varolsun. Bu durumda $t \geq t_0$ için;

$$u' = g(t, u, R(t)), \ u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{5.2.2}$$

denkleminin $r(t)$ maksimal çözümü var ve

$$r(t) = R(t), \ t \geq t_0 \tag{5.2.3}$$

dır.

İspat: Teorem 4.4.2. nin ispatına benzerdir.

Teorem 5.2.2. Teorem 5.2.1. deki varsayımlar sağlansın. $m \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ ve $v \leq R(t)$, $t \geq t_0$ için

$$D_{-}m(t) \leq g(t, m(t), v) \tag{5.2.4}$$

olsun. Burada,

$$D_{-}m(t) = \lim_{h \to 0^-} \inf h^{-1}[m(t+h) - m(t)]$$

alınmıştır. Bu durumda, $r(t)$, (5.2.2) nin maksimal çözümü olmak üzere

$$m(t) \leq r(t), \ t \geq t_0 \tag{5.2.5}$$

dır.

İspat: Teorem 4.4.3. ün ispatına benzerdir.

Şimdi gecikmeli ve ileri terim içeren fonksiyonel diferensiyel bir sistemle ilgili

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t, x^t), \ t \in [t_0, T], \ t_0 \geq 0 \\ x_{t_0} = \phi_0, \ x^T = \psi_0, \ \phi_0 \in C_1, \ \psi_0 \in C_2 \end{cases} \tag{5.2.6}$$

problemi ele alınsın. Burada $C_1 = C([-h_1, 0], \mathbb{R}^n)$, $C_2 = C([0, h_2], \mathbb{R}^n)$, $h_1, h_2 \geq 0$, $f \in C([t_0, T] \times C_1 \times C_2, \mathbb{R}^n)$ ve

$$\begin{aligned} x_t(s) &= x(t+s), \ -h_1 \leq s \leq 0 \\ x^T(s) &= x(T+\sigma), \ 0 \leq \sigma \leq h_2 \end{aligned}$$

dır. (5.2.6) problemi için,

$$z(t_0) = \phi_0(t_0), \ z(T) = \psi_0(T)$$

ve

$$z^t = z(t+\sigma),\ 0 \le \sigma \le h_2,\ z^T = \psi_0$$

ile tanımlanan bir $z \in C([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu seçilsin. Bu fonksiyonun seçimi ile (5.2.6) sistemi,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t, z^t) \equiv F(t, x_t) \\ x_{t_0} = \phi_0 \end{cases} \tag{5.2.7}$$

şeklini alır.

Teorem 5.2.3. (5.2.7) deki f fonksiyonu,

$$\left| f\left(t, \phi_1, z^t\right) - f\left(t, \phi_2, z^t\right)\right| \le L\left|\phi_1 - \phi_2\right|_0$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $\phi_1, \phi_2 \in C_1$ve $t \in [t_0, T]$ için

$$\left|\phi_1 - \phi_2\right|_0 = \max_{-h_1 \le s \le 0} \left|\phi_1(s) - \phi_2(s)\right|$$

dir. Eğer $0 < \alpha < \frac{1}{2L}$ ise $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$ da her seçilen $z(t)$ için bir tek $x(t_0, \phi_0)(t)$ çözümü vardır.

İspat: Örnek 4.6.1. in ispatına benzerdir.

Teorem 5.2.4. $F \in C([t_0, T] \times C_\rho, \mathbb{R}^n)$ olsun. Burada

$$C_\rho = [\phi \in C_1 :\ \ |\phi|_0 < \rho]$$

dır. Bu durumda $t = t_0$ da verilen her $\phi_0 \in C_\rho$ başlangıç fonksiyonu için, $[t_0, t_0 + \eta]$ da (5.2.7) nin bir $x(t_0, \phi_0)(t)$ çözümü varolacak şekilde bir $\eta > 0$ vardır.

İspat: Teorem 4.5.1. in ispatına benzerdir.

KAYNAKLAR

Bernfeld, S.R. and Lakshmikantham, V. 1977. Fixed point theorems of operators with PPF dependence in Banach Spaces. Applicable Analysis, 6; 271-280.

Bhaskar, T.G., Devi, J.V. and Lakshmikantham, V. 2007. Monotone İterative Tecnique for functional differential equation with retardation and anticipation. Nonlinear Analysis, 66; 2237- 2242.

Bhaskar, T.G. and Lakshmikantham, V. 2007. Functional differential systems with retardation and anticipation. Nonlinear Analysis Real World Appl., 8; 865-871.

Devi, J.V. and Lakshmikantham, V. 2007. Functional differential equations with Anticipation. Nonlinear Studies, 14; 235-240

Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. and Vatsala, A.S. 1985. Monotone İterative Tecniques for Nonlinear Differential Equations. Pitman Advanced Publishing, Inc., Boston.

Lakshmikantham, V. and Leela, S. 1969. Differential and integral inequalities. Academic Press, Newyork.

Lakshmikantham, V. and Zhang, B.G. 1986. Monotone İterative Tecnique for Delay Differential Equations. Applicable Analysis, 22; 227-233.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Meltem METİNEREN
Doğum Yeri	:	Çorum
Doğum Tarihi	:	23.06.1983
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Çorum Atatürk Y.D.A. Lisesi (2001)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2005)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2006 – Mart 2009)