ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Neşe İŞLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2009

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Neşe İŞLER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ertan İBİKLİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, çeşitli fonksiyon uzayları tanımlanmış ve temel kavramlar verilmiştir. Yaklaşım hızını belirlemek için süreklilik modülü tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Son olarak lineer pozitif operatörlerin tanımı ve bazı önemli özellikleri verilmiş, yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.
Üçüncü bölümde, I. ve II. tip Bernstein-Chlodowsky polinomları tanımlanmış ve bu polinomların çeşitli uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca II. tip genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky polinomlarının yaklaşım hızı verilmiştir.
Dördüncü bölümde, çeşitli uzaylarda iki değişkenli fonksiyonlar için lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.
Beşinci bölümde, üçgensel ve karesel bölgede iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipli polinomlar tanımlanmış ve çeşitli uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Ocak 2009, 139 sayfa

Anahtar Kelimeler : Bernstein-Chlodowsky polinomları, Lineer pozitif operatör, Süreklilik modülü, Ağırlıklı uzaylar.

ABSTRACT

Master Thesis

BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLYNOMIALS OF ONE AND TWO VARIABLES

Neşe İŞLER

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, several function spaces are defined and fundamental conceptions which are used in the thesis are given. Modulus of continuity and its properties are examined. Finally, definition of linear positive operators and some of their important properties are given. Moreover approximation properties of linear positive operators for one variable functions are investigated.

In the third chapter, I. and II. type Bernstein-Chlodowsky polynomials are defined and their approximation properties are examined in the several spaces. Also a theorem is given about approximation rate of II. type generalized of Bernstein-Chlodowsky polynomials.

In the forth chapter, approximation properties of linear positive operators for functions of two variables are investigated on the several spaces.

In the fifth chapter, Bernstein-Chlodowsky type polynomials of two variables on a triangular and square domain are defined and their approximation properties are examined.

January 2009, 139 pages

Key Words: Bernstein-Chlodowsky polynomials, Linear positive operator, Modulus of continuity, Weighted spaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Ertan İBİKLİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye, tezimle ilgili kendisi ile çalışma fırsatı bulduğum arkadaşım Sezgin SUCU'ya ve bana her zaman destek olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Neşe İŞLER
Ankara, Ocak 2009

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi, verilen bir uzaydaki bir fonksiyona iyi özellikleri olan aynı uzaya ait fonksiyonlar ailesi ile yaklaşım yapılıp yapılamayacağını araştırır.

Yaklaşımlar teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen teorem; kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonu için her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P_n(x)$ polinomunun varlığı, ilk kez 1885 yılında Weierstrass tarafından ifade ve ispat edilmiştir (Korovkin 1960).

Bernstein (1912) tarafından $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşan polinomların tipi hakkında bir teorem ispatlanmıştır.

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

tipinde polinomlar dizisi tanımlamış ve bu polinomlar dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x \in [0,1]$ ve her $n \geq n_0$ için

$$|B_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir.

Chlodowsky (1937) tarafından $[0,\infty)$ aralığı üzerinde Bernstein polinomları genelleştirilmiş ve bu polinomların yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisi olarak adlandırılan bu polinomlar dizisi; (b_n),

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

şartlarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisi olmak üzere

$$B_n^*(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k};\quad 0\leq x\leq b_n$$

şeklinde tanımlıdır.

Korovkin (1953) tarafından lineer pozitif operatörlerin yaklaşımı ile ilgili bir teorem ifade ve ispat edilmiştir. Korovkin Teoremi olarak adlandırılan bu teorem aşağıda ifade edilmiştir:

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında $n\to\infty$ iken

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &\rightrightarrows 1\\ L_n(t;x) &\rightrightarrows x\\ L_n\left(t^2;x\right) &\rightrightarrows x^2 \end{aligned}$$

koşullarını gerçekliyorsa $[a,b]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$L_n(f;x)\rightrightarrows f(x);\quad a\leq x\leq b$$

olur.

Bernstein ve Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisine lineer pozitif operatörler dizisi gözüyle bakıldığında, Bernstein polinomlarının çok araştırılmış ve üzerinde çok fazla çalışmalar yapılmış olmasına rağmen bu polinomların sınırsız bir aralığa genellemesi olan Bernstein-Chlodowsky polinomları çok az incelenmiştir. Bunun nedeni kapalı ve sınırlı $[0,b_n]$ aralığının $n\to\infty$ iken sınırsız $[0,\infty)$ aralığına dönüşmesi ve sonuç olarak Korovkin Teoremi'nin geçerli olmamasından kaynaklanır.

Bu tezde; çeşitli uzaylarda bir ve iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipli operatörlerin yaklaşımı ve yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

2. TANIM VE ÖNBİLGİ

Bu bölümde bazı notasyonlar ve çalışma içinde gerekli olan materyaller verilecektir.

2.1 Bazı Fonksiyon Uzayları

Schumaker *et al.* (1939), Hacıyev vd. (1995), İzgi (2004), İbikli (2005) tarafından bazı bir ve iki değişkenli fonksiyon uzayları tanımlanmıştır. Bunları aşağıda verelim.

$[a, b]$ üzerinde reel değerli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı

$$B(a, b) = \{f | f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x)| < \infty\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

$$C(a, b) = \{f | f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } \forall x \in [a, b] \text{ için sürekli } \}$$

ile $[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı tanımlanabilir. $C(a, b)$ uzayı

$$\|f\|_{C(a,b)} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

normu ile lineer normlu uzaydır.

$$\begin{aligned} B_\rho(\mathbb{R}) &= \left\{f : \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |f(x)| \leq M_f \rho(x)\right\} \\ C_\rho(\mathbb{R}) &= \left\{f \in C(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |f(x)| \leq M_f \rho(x)\right\} \end{aligned}$$

ile $C(\mathbb{R})$ uzayının ağırlıklı fonksiyon uzayları tanımlanabilir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit ve $\rho(x) = 1 + \Phi^2(x)$ olup, Φ, $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli, artan ve

$$\lim_{|x| \to \infty} \Phi(x) = \pm\infty$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. ρ fonksiyonuna ise *ağırlık fonksiyonu* denir.

$B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayları

$$\|f\|_\rho = \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

normu ile birer lineer normlu uzaylardır.

$C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bazı alt uzayları; k_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} C_\rho^k(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \right\} \\ C_\rho^0(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = 0 \right\} \end{aligned}$$

ile tanımlanmıştır.

Lipschitz sınıfı, $0 \le \alpha \le 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Lip^\alpha(a,b) = \{ & f \in C(a,b) : \text{Tüm } a \le x \le x+h \le b \text{ için } |f(x+h) - f(x)| \le Mh^\alpha \\ & \text{olacak şekilde } M < \infty \text{ sayısı vardır} \} \end{aligned}$$

ile tanımlanabilir. $\alpha > 1$ için f fonksiyonu sabit bir fonksiyondur.

$n = 2$ için iki değişkenli ve reel değerli f fonksiyonu; $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $Y \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : \underset{(x,y)\to z}{X \times Y \to \mathbb{R}}$$

şeklinde tanımlı olup, bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa *iki değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar sınıfı* denir.

Aşağıda bazı iki değişkenli fonksiyon uzaylarını verelim.

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bölgesi üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı

$$C(D) = \{ f | f : D \to \mathbb{R} \text{ tanımlı, } \forall (x,y) \in D \text{ için sürekli} \}$$

ile gösterilmek üzere $C(D)$ uzayı

$$\|f\|_{C(D)} = \sup_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$$

normu ile lineer normlu uzaydır.

Diğer yandan $C_b(D)$ uzayı

$$C_b(D) = \left\{ f : f \in C(D) \text{ ve } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } |f(x,y)| < \infty \right\}$$

ile tanımlanabilir.

$$R_2^{++} = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\} \text{ ve } \rho(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

olmak üzere

$$C\left(R_2^{++}\right) = \left\{ f | f : R_2^{++} \to \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } (x,y) \in R_2^{++} \text{ için sürekli} \right\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

$C\left(R_2^{++}\right)$ nin ağırlıklı uzayları; $B_\rho\left(R_2^{++}\right)$ ve $C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ uzayları

$$\begin{aligned} B_\rho\left(R_2^{++}\right) &= \left\{ f : \forall (x,y) \in R_2^{++} \text{ için } |f(x,y)| \leq M_f\left(x^2+y^2+1\right) \right\} \\ C_\rho\left(R_2^{++}\right) &= \left\{ f \in C\left(R_2^{++}\right) : |f(x,y)| \leq M_f\left(x^2+y^2+1\right) \right\} \end{aligned}$$

ile tanımlı olup,

$$\|f\|_{C_\rho\left(R_2^{++}\right)} = \sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{|f(x,y)|}{x^2+y^2+1}$$

normu ile lineer normlu uzaylardır.

Tanım 2.1.1 (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği): $\forall (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Natanson 1964).

Aşağıda verilen Beta ve Gamma fonksiyonları Saraçoğlu vd. (1995) kaynağından yararlanılarak yazılmıştır.

Tanım 2.1.2 $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$B(n, m) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \, dx$$

ile tanımlı fonksiyona *Beta fonksiyonu* denir. $m > 0$ ve $n > 0$ için Beta fonksiyonu yakınsaktır.

Tanım 2.1.3 $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlı fonksiyona *Gamma fonksiyonu* denir. $n > 0$ için Gamma fonksiyonu yakınsaktır.

B ve Γ fonksiyonları arasında

$$B(n, m) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.1.1}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Tanım 2.1.4 $X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$, X in bir yığılma noktası olsun. Eğer

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

ise f fonksiyonuna $x \to a$ iken *sonsuz küçük fonksiyon* denir ve $x \to a$ iken $f(x) = o(1)$ ile gösterilir (Museyev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu 2003).

Tanım 2.1.5 $X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere f ve g, X de tanımlı fonksiyonlar olsun. Eğer $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x > x_0$ için

$$|f(x)| \leq M |g(x)|$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa $x \to \infty$ iken $f(x) = O(g(x))$ şeklindedir (Kurt, Mehlhorn and Stefan 1990).

Tanım 2.1.6 $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in A$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

gerçekleniyorsa *f fonksiyonu A kümesi üzerinde konvekstir,* denir (Rudin 1921).

2.2 Süreklilik Modülü

Museyev vd. (2003) tarafından süreklilik modülü tanımlanmıştır. Aşağıda buna göre süreklilik modülü tanımını verelim.

Tanım 2.2.1 Boş olmayan $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı verilmiş olsun.

$$d(I) = \sup\{|x - y| : x, y \in I\}$$

büyüklüğüne *I kümesinin çapı* denir.

Tanım 2.2.2 $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde sınırlı olsun. $d = d(I)$, I kümesinin çapı olmak üzere $\omega : (0, d] \to [0, \infty)$;

$$\omega_f(\delta) = \omega(f;\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonuna f *fonksiyonunun* I *üzerindeki süreklilik modülü* denir.

Süreklilik modülünün önemli bazı özelliklerini verelim. Bu özelliklerin ifade ve ispatında Museyev vd. (2003), Natanson (1964), İzgi (2004) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Lemma 2.2.1 $\delta > 0$ için $\omega_f(\delta) \geq 0$ dır.

Tanım 2.2.2'den ispatı açıktır.

Lemma 2.2.2 $\omega_f(\delta)$ monoton artandır.

İspat: $\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, d]$, $\delta_1 < \delta_2$ için

$$\begin{aligned} & \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta_1\} \\ \subset \; & \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta_2\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \omega_f(\delta_1) &= \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta_1\} \\ &\leq \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta_2\} \\ &= \omega_f(\delta_2) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Lemma 2.2.3 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\omega_f(n\delta) \leq n\omega_f(\delta)$$

gerçeklenir.

İspat:

$$\omega_f(n\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in I \\ |x_1 - x_2| \leq n\delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

olmak üzere $x_1 = x_2 + nh$ denirse

$$\begin{aligned} \omega_f(n\delta) &= \sup_{\substack{x_2 \in I \\ |h| \leq \delta}} |f(x_2 + nh) - f(x_2)| \\ &= \sup_{\substack{x_2 \in I \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_2 + (k+1)h) - f(x_2 + kh)] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{\substack{x_2 \in I \\ |h| \leq \delta}} |f(x_2 + (k+1)h) - f(x_2 + kh)| \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Tanım 2.2.2'den toplama bağlı ifade $\omega_f(\delta)$ olur. Toplamın sayısı n tane olduğu için istenen eşitsizlik elde edilir.

Lemma 2.2.4 λ pozitif reel sayı olmak üzere

$$\omega_f(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\,\omega_f(\delta)$$

gerçeklenir.

İspat: $[|\lambda|]$ ile λ sayısının tam kısmını gösterelim. Bu durumda

$$[|\lambda|] \leq \lambda < [|\lambda|] + 1$$

eşitsizliği geçerlidir.

$\omega(f;\delta)$ nın monoton artan olma özelliği ve Lemma 2.2.4 gereğince;

$$\begin{aligned}\omega_f(\lambda\delta) &\leq \omega_f(([|\lambda|]+1)\delta) \\ &\leq ([|\lambda|]+1)\,\omega_f(\delta) \\ &\leq (\lambda+1)\,\omega_f(\delta)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.2.5 f, I aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)=0$$

gerçeklenir.

İspat: f sürekli olduğundan her $\varepsilon>0$ için $|x_1-x_2|<\eta$ olduğunda

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &< \varepsilon \\ \sup|f(x_1)-f(x_2)| &< \varepsilon\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\eta>0$ sayısı var olup, $\omega_f(\eta)$'nın tanımından

$$\omega_f(\eta)<\varepsilon$$

olur. Lemma 2.2.2'den $\delta<\eta$ için

$$\omega_f(\delta)<\varepsilon$$

yazılabilir. Bu da istenen ifadeyi verir.

Lemma 2.2.6 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı türeve sahip ise $f\in Lip^1(a,b)$ olur.

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının tüm noktalarında sınırlı türeve sahip olsun. Yani; $\forall x \in [a,b]$ için $\left|f'(x)\right| \leq M$ gerçeklensin. Ortalama Değer Teoremi'nden her x_1, x_2 için

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \, |x_1 - x_2| \, ; \;\; x_1 < \xi < x_2$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir ξ noktası vardır. Buradan

$$\omega_f(\delta) \leq M \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [a,b] \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |x_1 - x_2| \leq M\delta$$

eşitsizliği elde edilir. Lipschitz sınıfı tanımından $f \in Lip^1(a,b)$ olur.

Lemma 2.2.7 $f \in Lip^{\alpha}(a,b) \Longleftrightarrow \omega_f(\delta) \leq M\delta^{\alpha}$ gerçeklenir.

İspat: Eğer $\omega_f(\delta) \leq M\delta^{\alpha}$ ise herbir x, y değerleri için

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|) \leq M|x - y|^{\alpha}$$

olup, $f \in Lip^{\alpha}(a,b)$ elde edilir.

Eğer $f \in Lip^{\alpha}(a,b)$ ise $|x - y| \leq \delta$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha} \leq M\delta^{\alpha}$$

elde edilir.

İki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülleri, Büyükyazıcı (2003a, b), Büyükyazıcı vd. (2004) ve İzgi (2004) makalelerinden yararlanılarak verilmiştir.

Tanım 2.2.3 $D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $f : D \to \mathbb{R}$ tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$\omega_2(f;\delta) = \sup\left\{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| : x, y \in K, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \delta\right\}$$

fonksiyonuna f *fonksiyonunun tam süreklilik modülü* denir.

$$\omega_2^{(1)}(f;\delta) = \sup\{|f(x_1,y) - f(x_2,y)| : (x_1,y), (x_2,y) \in K, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

$$\omega_2^{(2)}(f;\delta) = \sup\{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| : (x,y_1), (x,y_2) \in K, |y_1 - y_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonlarına f *fonksiyonunun x e göre kısmi süreklilik modülü ve y ye göre kısmi süreklilik modülü* denir.

Tam süreklilik modülünün önemli olan bazı özelliklerini verelim.

Özellik 2.2.1 $\delta > 0$ için $\omega_2(f;\delta) \geq 0$ dır.

Tanım 2.2.3'ten ispatı açıktır.

Özellik 2.2.2 $\omega_2(f;\delta)$ monoton artandır.

İspat: $\forall\delta_1, \delta_2 > 0$, $\delta_1 < \delta_2$ için

$$\begin{aligned} & \left\{|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| : x,y \in K,\ \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \leq \delta_1\right\} \\ \subset & \left\{|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| : x,y \in K,\ \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \leq \delta_2\right\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \omega_2(f;\delta_1) &= \sup\left\{|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| : x,y \in K, \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \leq \delta_1\right\} \\ &\leq \sup\left\{|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| : x,y \in K, \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \leq \delta_2\right\} \\ &= \omega_2(f;\delta_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Özellik 2.2.3 $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_2 \left(f; \delta\right) = 0$$

gerçeklenir.

İspat: f fonksiyonu K bölgesinde sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|x - y| \leq \eta$ olmak üzere her $x, y \in K$ için

$$\left|f\left(x_1, y_1\right) - f\left(x_2, y_2\right)\right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\eta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\sup_{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leq \eta} \left|f\left(x_1, y_1\right) - f\left(x_2, y_2\right)\right| < \varepsilon \Longrightarrow \omega\left(f; \eta\right) < \varepsilon$$

yazılabilir. $\delta < \eta$ için $\omega\left(f; \delta\right) < \varepsilon$ olup, istenen ifade elde edilir.

Özellik 2.2.4 $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\omega_2\left(f; m\delta\right) \leq m\omega_2\left(f; \delta\right)$$

gerçeklenir.

İspat:

$$\omega_2\left(f; m\delta\right) = \max_{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leq m\delta} \left|f\left(x_1, y_1\right) - f\left(x_2, y_2\right)\right|$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2} \quad &\leq \quad m\delta \Longrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 \leq m^2\delta^2 \\
&\Longrightarrow \quad \left(x_1 - x_2\right)^2 \leq m^2\delta^2 \text{ ve } \left(y_1 - y_2\right)^2 \leq m^2\delta^2 \\
&\Longrightarrow \quad \left|x_1 - x_2\right| \leq m\delta \text{ ve } \left|y_1 - y_2\right| \leq m\delta
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &\leq m\delta \Longrightarrow -m\delta \leq x_1 - x_2 \leq m\delta \\ &\Longrightarrow -m\delta + x_2 \leq x_1 \leq m\delta + x_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| &\leq m\delta \Longrightarrow -m\delta \leq y_1 - y_2 \leq m\delta \\ &\Longrightarrow -m\delta + y_2 \leq y_1 \leq m\delta + y_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\forall h > 0$ için

$$x_1 = x_2 + mh \text{ ve } y_1 = y_2 + mh$$

olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \omega_2(f; m\delta) &= \max_{\substack{x_2+mh, x_2, y_2+mh, y_2 \in K \\ |h|\leq\delta}} |f(x_2 + mh, y_2 + mh) - f(x_2, y_2)| \\ &= \max_{|h|\leq\delta} \left| \sum_{k=0}^{m-1} f(x_2 + (k+1)h, y_2 + (k+1)h) - f(x_2 + hk, y_2 + kh) \right| \\ &= \max_{|h|\leq\delta} |f(x_2 + h, y_2 + h) - f(x_2, y_2) + f(x_2 + 2h, y_2 + 2h) \\ &\quad - f(x_2 + h, y_2 + h) + ... + f(x_2 + mh, y_2 + mh) \\ &\quad - f(x_2 + (m-1)h, y_2 + (m-1)h)| \\ &\leq \max_{|h|\leq\delta} |f(x_2 + h, y_2 + h) - f(x_2, y_2)| \\ &\quad + \max_{|h|\leq\delta} |f(x_2 + 2h, y_2 + 2h) - f(x_2 + h, y_2 + h)| \\ &\quad + ... + \max_{|h|\leq\delta} |f(x_2 + mh, y_2 + mh) - f(x_2 + (m-1)h, y_2 + (m-1)h)| \\ &= \omega_2(f; \delta) + \omega_2(f; \delta) + ... + \omega_2(f; \delta) \\ &= m\omega_2(f; \delta) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Özellik 2.2.5 $\lambda > 0$ için $\omega_2(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\,\omega_2(f;\delta)$ dır.

İspat: $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\omega_2(f;m\delta) \leq m\omega_2(f;\delta)$$

olduğu biliniyor.

$\lambda \in \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ ise

$$\omega_2(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\,\omega_2(f;\delta)$$

olur.

$\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$[|\lambda|] \leq \lambda \leq [|\lambda|]+1 \leq \lambda+1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\omega_2(f;\lambda\delta) &\leq \omega_2(f;([|\lambda|]+1)\,\delta) \\
&\leq ([|\lambda|]+1)\,\omega_2(f;\delta) \\
&\leq (\lambda+1)\,\omega_2(f;\delta)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Özellik 2.2.6 (δ_n),

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

koşulunu sağlayan pozitif terimli bir dizi ve C_f, f fonksiyonu ve (δ_n) dizisine bağlı bir sabit olmak üzere $\omega_2(f;\delta_n) \geq C_f \cdot \delta_n$ eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Süreklilik modülünün 2.2.5 özelliğinden

$$\omega_2(f;1) = \omega_2\left(f;\delta_n \cdot \frac{1}{\delta_n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(1+\frac{1}{\delta_n}\right)\omega_2\left(f;\delta_n\right)\\
&= \left(\frac{1+\delta_n}{\delta_n}\right)\omega_2\left(f;\delta_n\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\omega_2\left(f;\delta_n\right) \geq \left(\frac{\delta_n}{1+\delta_n}\right)\omega_2\left(f;1\right)
$$

yazılabilir. (δ_n) sıfıra yakınsayan bir dizi olduğundan $1+\delta_n \leq C$ olacak şekilde $C>0$ sayısı vardır. Bu durumda $\frac{1}{1+\delta_n} \geq \frac{1}{C}$ olacağından

$$
\omega_2\left(f;\delta_n\right) \geq \frac{\delta_n}{C}\omega_2\left(f;1\right)
$$

eşitsizliği sağlanır. $\frac{\omega_2(f;1)}{C} = C_f$ denirse

$$
\omega_2\left(f;\delta_n\right) \geq C_f \cdot \delta_n
$$

elde edilir. Bu da istenen eşitsizliktir.

Açıkca görülebilir ki tam süreklilik modülü için geçerli olan özellikler kısmi süreklilik modülleri için de geçerlidir.

2.3 Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $[a,b]$ aralığının bir parçalanması

$$
\tau = \{x_i\}_0^n \left(a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\right)
$$

olsun.

$$
V\left(f\right) = \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right)\right|
$$

toplamını oluşturalım.

Tanım 2.3.1 $[a,b]$ aralığının her τ parçalanması için

$$V_a^b(f) = \sup_{\tau} V(f)$$

ifadesine f *nin total salınımı* denir. Eğer

$$V_a^b(f) \leq M$$

olacak şekilde bir $M = M(f)$ sayısı varsa f *fonksiyonu* $[a,b]$ *üzerinde sonlu veya sınırlı salınımlıdır*, denir. $[a,b]$ de sınırlı salınımlı fonksiyonların kümesi $BV[a,b]$ ile gösterilebilir (Natanson 1961).

Tanım 2.3.2 f fonksiyonu diferensiyellenebilir ve türevi integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$V_a^b(f) = \int_a^b \left| f'(x) \right| dx$$

ifadesi gerçeklenir (Kannan *et al.* 1996).

Teorem 2.3.1 Kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonu sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise sınırlıdır.

İspat: $a \leq x \leq b$ için

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

olmak üzere

$$V = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_a^b(f)$$

olup,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f)$$

elde edilir. Bu durumda $[a,b]$ aralığı üzerinde

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Bu da ispatı tamamlar.

2.4 Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlara Polinomlar İle Yaklaşım

1885'de Weierstrass, kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli her sürekli f fonksiyonuna polinomlar ile yaklaşılabileceğini aşağıdaki teorem ile ifade etmiştir.

Teorem 2.4.1 (Weierstrass): f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise her $\varepsilon > 0$ için $[a, b]$ aralığı üzerinde

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerçekleyen az bir $P(x)$ polinomu vardır (Korovkin 1960).

Bernstein (1912) tarafından $[0, 1]$ aralığı üzerinde Weierstrass Teoremi'ni gerçekleyen polinomların tipi ile ilgili bir teorem ispatlanmıştır. Bernstein polinomları olarak adlandırılan bu polinomların tipleri ve yaklaşım özellikleri, Groetsch *et al.* (1973), Bleimann *et al.* (1980), Martinez (1989), Kampiti *et al.* (1994) gibi birçok makalede araştırılmıştır.

Tanım 2.4.1 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tanımlı, sürekli bir fonksiyon olsun.

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$$

ile tanımlı polinomlara *Bernstein polinomları* adı verilir.

$B_n : C(0, \infty) \to C(0, \infty)$ bir dönüşüm olduğu açıktır. Burada

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{2.4.1}$$

şeklindedir. Her belirli n doğal sayısı için $B_n(f; x)$, n. mertebeden bir polinomdur.

Bu polinomların temel yapısı; a ve b pozitif sayılar ve n bir doğal sayı olmak üzere

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Binom formülüne bağlıdır. Bu formülde $x \in [0,1]$ olmak üzere $a = x$ ve $b = 1-x$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1 \tag{2.4.2}$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 2.4.1 $\forall x \in [0,1]$ için

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

gerçeklenir (Natanson 1964).

Lemma 2.4.2 $x \in [0,1]$ ve $\delta > 0$ olsun.

$$\Delta_n = \left\{ k \quad ; \quad \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta, k = 0, 1, ..., n \right\}$$

olmak üzere

$$\sum_{k \in \Delta_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $k \in \Delta_n$ için

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \Longrightarrow \frac{\left| \frac{k}{n} - x \right|}{\delta} \geq 1 \Longrightarrow \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geq 1$$

olduğundan

$$\sum_{k \in \Delta_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in \Delta_n} \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

eşitsizliği yazılabilir. Lemma 2.4.1 kullanılarak

$$\sum_{k\in\Delta_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n^2\delta^2} nx(1-x)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\Delta_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{n^2\delta^2}\max_{x\in[0,1]} nx(1-x)\\ &= \frac{1}{4n\delta^2}\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

olur. Bu da istenen eşitsizliktir.

Teorem 2.4.2 $[0,1]$ aralığı üzerinde f fonksiyonu sürekli ise

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x)$$

bu aralıkta düzgün olarak gerçeklenir.

İspat: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan sınırlıdır. Yani; $[0,1]$ aralığı üzerinde

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır.

Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon, bu aralık üzerinde düzgün süreklidir. Yani; her $\varepsilon>0$ için $|x_1-x_2|<\delta$ olmak üzere her x_1, $x_2\in[0,1]$ için

$$|f(x_1)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır.

(2.4.2) eşitliğinin her iki yanı $f(x)$ ile çarpılırsa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

olur. $B_n(f;x) - f(x)$ farkı gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} B_n(f;x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. $k = 0, 1, ..., n$ indis kümesi

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \left\{ k \quad ; \quad \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\} \\ \Delta_n &= \left\{ k \quad ; \quad \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \right\} \end{aligned}$$

olacak şekilde iki sınıfa ayrılsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_n(f;x) - f(x) &= \sum_{k \in \Gamma_n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in \Delta_n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} |B_n(f;x) - f(x)| &= \left| \sum_{k \in \Gamma_n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \Delta_n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |B_n(f;x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in \Gamma_n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \qquad (2.4.4) \\ &\quad + \sum_{k \in \Delta_n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

f fonksiyonu sürekli olduğundan $k \in \Gamma_n$ için

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

f fonksiyonu sınırlı olduğundan $k \in \Delta_n$ için

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq 2M$$

eşitsizliği sağlanır. Bulunan bu iki eşitsizlik (2.4.4) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} |B_n(f;x) - f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in\Gamma_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{k\in\Delta_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{k\in\Delta_n} C_n^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{k\in\Delta_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.4.5) eşitsizliğinin sağ tarafındaki toplam ifadesi, Lemma 2.4.2'de verilen (2.4.3) eşitsizliğini gerçekler. Bu durumda

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}$$

elde edilir. Yeterince büyük n değerleri için

$$\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olup, $\forall\varepsilon > 0$ sayısı için istenen

$$|B_n(f;x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ifadesi gerçeklenir.

Keyfi $[a,b]$ aralığı üzerinde de Bernstein polinomları Weierstrass Teoremi'ni gerçekler. Bunu aşağıdaki teorem ile ifade edelim.

Teorem 2.4.3 $f \in C(a,b)$ ise $[a,b]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x)$$

düzgün olarak gerçeklenir.

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olsun. $[0,1]$ aralığında tanımlı, sürekli

$$\varphi(y) = f(a + y(b-a))$$

fonksiyonunu ve

$$\theta(y) = \sum_{k=0}^{n} c_k y^k$$

polinomunu gözönüne alalım. Teorem 2.4.2 gereğince; $\forall y \in [0,1]$ için

$$\left| f(a + y(b-a)) - \sum_{k=0}^{n} c_k y^k \right| < \varepsilon$$

koşulunun sağlanması gerekir.

$\forall x \in [a,b]$ için $\frac{x-a}{b-a}$ kesri $[0,1]$ aralığındadır. Bu kesir yukarıda y yerine yazılırsa

$$\left| f\left(a + \frac{x-a}{b-a}(b-a)\right) - \sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \right| < \varepsilon$$

olur. Buradan

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k \right| < \varepsilon$$

olup, bu da

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k$$

polinomunun f fonksiyonuna olan yakınsaklığıdır. Böylelikle istenilen elde edilmiş olur.

2.5 Lineer Pozitif Operatörler ve Yaklaşım Özellikleri

Haciyev vd. (1995) tarafından lineer pozitif operatörlerin tanımı ve bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.5.1 X ve Y fonksiyon uzayları olsun. $L : X \to Y$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall f \in X$ fonksiyonuna karşılık gelen bir $g \in Y$ fonksiyonu varsa, L

$$g(x) = L(f; x)$$

şeklinde bir *operatördür*, denir. L operatörünün tanım bölgesi $X = D(L)$, değer kümesi ise $R(L)$ olmak üzere

$$L(f; x) = L(f(t); x)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.5.2 X lineer bir uzay olsun. $\forall f,\ g \in X$ için, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $af + bg \in X$ olmak üzere L operatörü

$$L(af + bg; x) = aL(f; x) + bL(g; x)$$

koşulunu gerçekliyor ise L operatörüne *lineer operatör* adı verilir.

$c \neq 0$ için L lineer bir operatör olduğundan

$$L(0;x) = L(c.0;x) = cL(0;x)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$L(0;x) = 0$$

olduğu görülür.

Lineer operatörler sınıfının çok önemli bir alt sınıfı lineer pozitif operatörlerdir.

Tanım 2.5.3 $X^{+} = \{f \in X : f \geq 0\}$, $Y^{+} = \{g \in Y : g \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^{+} kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa o taktirde bu lineer operatöre *lineer pozitif operatör* denir. L lineer operatörü için $f \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ gerçeklenir.

Şimdi lineer pozitif operatörlerin önemli bazı özelliklerini verelim.

Özellik 2.5.1 Lineer pozitif operatörler monotondur.

Gerçekten; $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq g(x)$ ise $f(x) - g(x) \geq 0$ dır. L operatörü pozitif olduğundan

$$L(f-g;x) \geq 0$$

olur ve L operatörünün lineerlik özelliğinden

$$L(f;x) - L(g;x) \geq 0$$

elde edilir. Bu da istenendir.

Özellik 2.5.2 L lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Gerçekten; $\forall t \in [a,b]$ için

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

eşitsizliği sağlanır. L operatörünün monoton olma özelliğinden

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

elde edilir.

Tanım 2.5.4 $L : X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall f \in X$ için

$$\|L(f;x)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı varsa L operatörüne *sınırlı lineer operatör* adı verilir. Bu C sabitlerinin en küçüğüne L *operatörünün normu* denir.

$$\|L\| = \inf\{C : \|L(f;x)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$$

şeklinde gösterilir.

L lineer operatörü için

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \\ \|L\| &= \sup_{\|f\|_X = 1} \|L(f;x)\|_Y \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

$X = C_\rho(\mathbb{R})$ ve $Y = B_\rho(\mathbb{R})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|L\|_{C_\rho \to B_\rho} &= \sup_{\|f\|_\rho = 1} \|L(f;x)\|_\rho \\ &\leq \sup_{\|f\|_\rho = 1} \left\| L\left(\frac{|f|}{\rho} \cdot \rho; x\right) \right\|_\rho \\ &\leq \|L(\rho;x)\|_\rho \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan $\|\rho\|_\rho = 1$ olduğu için

$$\begin{aligned} \|L\|_{C_\rho \to B_\rho} &= \sup_{\|f\|_\rho = 1} \|L(f;x)\|_\rho \\ &\geq \|L(\rho;x)\|_\rho \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu iki eşitsizlikten

$$\|L\|_{C_\rho \to B_\rho} = \|L(\rho;x)\|_\rho \tag{2.5.1}$$

elde edilir. Bu eşitlik, C_ρ dan B_ρ ya dönüşüm yapan lineer operatörlerin sınırlı olduğunu gösterir. Çünkü $\rho \in C_\rho$ için $L(\rho;x) \in B_\rho$ olur. Operatörün normunun tanımından sınırlı lineer operatörler için

$$\|L(f;x)\| \leq \|L\| \, \|f\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Özel durumda $L : C_\rho \to B_\rho$ olduğunda

$$\|L(f;x)\|_\rho \leq \|L\|_{C_\rho \to B_\rho} \|f\|_\rho$$

olup, (2.5.1) ifadesinden

$$\|L(f;x)\|_\rho \leq \|L(\rho;x)\|_\rho \|f\|_\rho$$

eşitsizliği sağlanır.

Korovkin (1953) tarafından $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli f fonksiyonuna lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşım yapılabileceğini aşağıdaki teorem ile ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 2.5.1 (Korovkin 1953): (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $[a, b]$ aralığında $n \to \infty$ iken

$$L_n(1; x) \rightrightarrows 1 \tag{2.5.2}$$

$$L_n(t; x) \rightrightarrows x \tag{2.5.3}$$

$$L_n\left(t^2; x\right) \rightrightarrows x^2 \tag{2.5.4}$$

koşullarını gerçekliyorsa, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken $a \leq x \leq b$ olmak üzere

$$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$$

gerçeklenir.

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M \tag{2.5.5}$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.

$f \in C(a, b)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t - x| < \delta$ olmak üzere her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.5.6}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan $|t - x| \geq \delta$ için

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \Longrightarrow \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$$

sağlanır. $(2.5.5), (2.5.6)$ eşitsizlikleri ve üçgen eşitsizliği kullanılarak $\forall\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| < \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon \qquad (2.5.7)$$

bulunur.

Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned}
\|L_n(f;x) - f(x)\|_{C(a,b)} &= \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)(L_n(1;x) - 1)\|_{C(a,b)} \\
&\leq \|L_n(f(t) - f(x);x)\|_{C(a,b)} + \|f\|_{C(a,b)} \|L_n(1;x) - 1\|_{C(a,b)} \\
&\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_{C(a,b)} + \|f\|_{C(a,b)} \|L_n(1;x) - 1\|_{C(a,b)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin ikinci terimi (2.5.2) ifadesinden dolayı sıfıra yakınsar. Yani $n \to \infty$ iken

$$\|f\|_{C(a,b)} \|L_n(1;x) - 1\|_{C(a,b)} \leq \varepsilon_n \quad (n \to \infty \text{ iken } \varepsilon_n \to 0)$$

eşitsizliğini sağlayan $\varepsilon_n \to 0$ dizisi vardır. Bu durumda

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_{C(a,b)} \leq \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_{C(a,b)} + \varepsilon_n \qquad (2.5.8)$$

gerçeklenir.

(2.5.8) eşitsizliğinin sağındaki ilk terimi gözönüne alalım. (2.5.7) eşitsizliği ve lineer pozitif operatörlerin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
L_n(|f(t) - f(x)|;x) &\leq L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon; x\right) \\
&= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n\left((t-x)^2;x\right) \\
&= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;x)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon\left[L_n(1;x)-1\right]+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right]\right.\\
&\quad\left.-2x\left[L_n(t;x)-x\right]+x^2\left[Ln(1;x)-1\right]\right\}\\
&= \varepsilon+\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right)\left[Ln(1;x)-1\right]+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right]\\
&\quad-\frac{4M}{\delta^2}x\left[L_n(t;x)-x\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}x^2=g(x)\,ve-\frac{4M}{\delta^2}x=h(x)
$$

olsun. $\forall x\in[a,b]$ için

$$
g(x)\leq\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|=b\text{ ve }h(x)\leq\sup_{x\in[a,b]}|h(x)|=c
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
L_n(|f(t)-f(x)|;x) &\leq \varepsilon+b\left[L_n(1;x)-1\right]+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right]\\
&\quad +c\left[L_n(t;x)-x\right]\\
\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C(a,b)} &\leq \varepsilon+b\|L_n(1;x)-1\|_{C(a,b)}\\
&\quad+\frac{2M}{\delta^2}\left\|L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{C(a,b)}+c\|L_n(t;x)-x\|_{C(a,b)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.5.2), (2.5.3) ve (2.5.4) ifadelerinden dolayı

$$
\lim_{n\to\infty}\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C(a,b)}=0
$$

olur. Bu durumda (2.5.8) ifadesinin

$$
\lim_{n\to\infty}\|L_n(f(t);x)-f(x)\|_{C(a,b)}=0
$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

1962 yılında Baskakov, $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$
|f(x)|\leq M_f\left(1+x^2\right) \tag{2.5.9}
$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonu için Korovkin Teoremi'nin gerçeklendiğini ispatlamıştır.

Gerçekten; $f \in C(a,b)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda $\forall x \in [a,b]$ için f fonksiyonu (2.5.9) koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x)| &\leq M_f\left(1+x^2\right) + M_f\left(1+t^2\right) \\
&= M_f\left(2+t^2+x^2\right) \\
&= M_f\left(2+(t-x+x)^2+x^2\right) \\
&= M_f\left(2+(t-x)^2+2x(t-x)+2x^2\right) \\
&\leq M_f\left(2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}+(t-x)^2+2x\frac{(t-x)^2}{\delta}+2x^2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \\
&= M_f(t-x)^2\left(\frac{2}{\delta^2}+1+\frac{2x}{\delta}+\frac{2x^2}{\delta^2}\right) \\
&\leq M_f(t-x)^2\left(\frac{2}{\delta^2}+1+\sup_{x\in[a,b]}\frac{2x}{\delta}+\sup_{x\in[a,b]}\frac{2x^2}{\delta^2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$c = M_f\left(\frac{2}{\delta^2}+1+\sup_{x\in[a,b]}\frac{2x}{\delta}+\sup_{x\in[a,b]}\frac{2x^2}{\delta^2}\right)$$

alınırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq c(t-x)^2$$

elde edilir. Bu durumda $\forall x \in [a,b]$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + c(t-x)^2$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} L_n(|f(t)-f(x)|;x) &\leq L_n\left(\varepsilon + c(t-x)^2;x\right) \\ &= \varepsilon L_n(1;x) + c\left\{L_n\left(t^2;x\right) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)\right\} \\ &= \varepsilon\left[L_n(1;x)-1\right] + \varepsilon + c\left\{\left[L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right]\right. \\ &\quad \left. -\,2x\left[L_n(t;x)-x\right] + x^2\left[Ln(1;x)-1\right]\right\} \end{aligned}$$

olup, $k = c \sup\limits_{x\in[a,b]} |-2x|$ ve $l = c \sup\limits_{x\in[a,b]} |x^2|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\right\|_{C(a,b)} &\leq \varepsilon + (\varepsilon + l)\left\|L_n(1;x)-1\right\|_{C(a,b)} + k\left\|L_n(t;x)-x\right\|_{C(a,b)} \\ &\quad +c\left\|L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right\|_{C(a,b)} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.5.2), (2.5.3) ve (2.5.4) ifadelerinden dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\right\|_{C(a,b)} = 0$$

olur. Bu durumda (2.5.8) eşitsizliğinden istenen

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n(f;x)-f(x)\right\|_{C(a,b)} = 0$$

elde edilir. O halde Korovkin Teoremi sağlanmış olur.

Diğer yandan sınırsız bölgelerde tanımlanmış $C_\rho(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ uzayında keyfi L_n lineer pozitif operatörler yardımıyla yaklaşımın gerçeklenmediğini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 2.5.2 $L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \to C_\rho(\mathbb{R})$ tanımlı bir lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Bu dizi

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n(1;x)-1\right\|_\rho = 0 \tag{2.5.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n(\Phi,x)-\Phi\right\|_\rho = 0 \tag{2.5.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n\left(\Phi^2;x\right)-\Phi^2\right\|_\rho = 0 \tag{2.5.12}$$

koşullarını sağlar, fakat

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| L_n f^* - f^* \right\|_\rho > 0$$

ifadesini gerçekleyen $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunur (Gadjiev ve İbikli 1999, İbikli 2003).

İspat: Genelliği bozmadan $\Phi(0) = 0$ olsun.

$$l(x;\Phi,f) = \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} f(x+1) - 2f(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} f(x+2)$$

notasyonunu kullanalım.

(L_n) operatörler dizisi

$$L_n(f;x) = \begin{cases} f(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} l(x;\Phi,f) & ; \quad 0 \le x \le n \\ f(x) + \frac{1}{4} l(x;\Phi,f) & ; \quad x \ge n \\ f(x) - \frac{1}{2\rho(n)} f(x) & ; \quad x \le 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın.

(L_n) dizisinin bir lineer pozitif operatörler dizisi olduğunu gösterelim.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \ge 0$ olması koşuluyla $L_n(f;x) \ge 0$ olduğu açıktır.

$\forall f_1, f_2 \in C_\rho(\mathbb{R})$ ve $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için

$0 \le x \le n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_n(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= (a_1 f_1 + a_2 f_2)(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} l(x;\Phi, a_1 f_1 + a_2 f_2) \\ &= a_1 f_1(x) + a_1 \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} l(x;\Phi,f_1) \\ &\quad + a_2 f_2(x) + a_2 \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} l(x;\Phi,f_2) \\ &= a_1 L_n(f_1;x) + a_2 L_n(f_2;x) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$x \geq n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_n\left(a_1 f_1 + a_2 f_2; x\right) &= (a_1 f_1 + a_2 f_2)(x) + \frac{1}{4} l\left(x; \Phi, a_1 f_1 + a_2 f_2\right) \\ &= a_1 f_1\left(x\right) + a_1 \frac{1}{4} l\left(x; \Phi, f_1\right) + a_2 f_2\left(x\right) + a_2 \frac{1}{4} l\left(x; \Phi, f_2\right) \\ &= a_1 L_n(f_1; x) + a_2 L_n\left(f_2; x\right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$x \leq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_n\left(a_1 f_1 + a_2 f_2; x\right) &= \left(a_1 f_1 + a_2 f_2\right)(x) - \frac{1}{2\rho(n)}\left(a_1 f_1 + a_2 f_2\right)(x) \\ &= a_1 f_1\left(x\right) - a_1 \frac{1}{2\rho\left(n\right)} f_1\left(x\right) + a_2 f_2\left(x\right) - a_2 \frac{1}{2\rho\left(n\right)} f_2\left(x\right) \\ &= a_1 L_n\left(f_1; x\right) + a_2 L_n\left(f_2; x\right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için (L_n) operatörler dizisinin lineer olduğu görülür.

L_n'nin $C\rho\left(\mathbb{R}\right)$ den $C\rho\left(\mathbb{R}\right)$ ye bir dönüşüm olduğunu gösterelim. Bunun için $L_n\left(\rho; x\right) \leq M\rho\left(x\right)$ olacak şekilde $M > 0$ sayısının varlığını göstermek yeterlidir.

$0 \leq x \leq n$ için,

$$\begin{aligned} L_n(\rho; x) &= \rho\left(x\right) + \frac{\rho\left(x\right)}{4\rho\left(n\right)}\left[\frac{\Phi^2\left(x\right)}{\Phi^2\left(x+1\right)}\rho(x+1) - 2\rho\left(x\right) + \frac{\Phi^2\left(x\right)}{\Phi^2(x+2)}\rho\left(x+2\right)\right] \\ &= \rho\left(x\right) + \frac{\rho\left(x\right)}{4\rho\left(n\right)}\left[\frac{\Phi^2\left(x\right)}{\Phi^2\left(x+1\right)}\left(\Phi^2\left(x+1\right)+1\right) - 2(\Phi^2\left(x\right)+1)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\Phi^2\left(x\right)}{\Phi^2\left(x+2\right)}\left(\Phi^2\left(x+2\right)+1\right)\right] \\ &= \rho\left(x\right) + \frac{\rho\left(x\right)}{4\rho\left(n\right)}\left[\frac{\Phi^2\left(x\right)}{\Phi^2\left(x+1\right)} + \frac{\Phi^2\left(x\right)}{\Phi^2\left(x+2\right)} - 2\right] \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

olarak yazılabilir. Φ fonksiyonu monoton artan olduğundan

$$\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} \leq 1$$

olup, bu eşitsizlik (2.5.13) ifadesinde kullanılırsa

$$L_n(\rho; x) \leq \rho(x)$$

eşitsizliği elde edilir.

$x \geq n$ için,

$$L_n(\rho; x) = \rho(x) + \frac{1}{4}\left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)}\rho(x+1) - 2\rho(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)}\rho(x+2)\right]$$

olmak üzere bu ifadede $\rho(x)$ fonksiyonu yerine yazılıp, Φ fonksiyonunun artanlığı kullanılırsa

$$L_n(f; x) \leq \rho(x)$$

ifadesi elde edilir.

$x \leq 0$ için,

$$L_n(\rho; x) = \rho(x) - \frac{\rho(x)}{2\rho(n)} = \frac{2\rho(n) - 1}{2\rho(n)}\rho(x)$$

olup,

$$\frac{2\rho(n) - 1}{2\rho(n)} \leq 1$$

olduğundan

$$L_n(\rho; x) \leq \rho(x)$$

ifadesi elde edilir.

Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için $L_n(f; x) \leq \rho(x)$ ifadesi sağlanır. (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin $C_\rho(\mathbb{R})$'den $C_\rho(\mathbb{R})$'ye bir dönüşüm olduğu ispatlanmış olur.

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin Teorem 2.5.2'nin koşullarını gerçeklediğini gösterelim.

$0 \leq x \leq n$ için,

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &= 1 + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} - 2 + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \right] \\ \frac{|L_n(1;x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{4\rho(n)} \left[\left| \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} \right| + \left| \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \right| + 2 \right] \end{aligned}$$

olup, Φ fonksiyonunun monoton artanlığından

$$\frac{|L_n(1;x) - 1|}{\rho(x)} \leq \frac{1}{\rho(n)}$$

olarak yazılabilir. Buradan $\rho(n) = 1 + \Phi^2(n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{|L_n(1;x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{1 + \Phi^2(n)} \\ \lim_{n \to \infty} \sup_{0 \leq x \leq n} \frac{|L_n(1;x) - 1|}{\rho(x)} &\leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \Phi^2(n)} = 0 \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \to \infty} \|L_n(1;x) - 1\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \geq n$ için,

$$L_n(1;x) = 1 + \frac{1}{4} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} - 2 + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \right]$$

$$\frac{|L_n(1;x) - 1|}{\rho(x)} \leq \frac{1}{4\rho(x)} \left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)} + 2 + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)} \right]$$

olup, Φ fonksiyonunun monoton artanlığından

$$\frac{|L_n(1;x) - 1|}{\rho(x)} \leq \frac{1}{\rho(x)}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sup_{x\geq n}\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)} &\leq \sup_{x\geq n}\frac{1}{\rho(x)} \\
&= \frac{1}{\rho(n)} \\
&= \frac{1}{1+\Phi^2(n)} \\
\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq n}\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\Phi^2(n)}=0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(1;x)-1\|_\rho=0$$

elde edilir.

$x\leq 0$ için,

$$\begin{aligned}
L_n(1;x) &= 1-\frac{1}{2\rho(n)} \\
\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{2\rho(n)} \\
\sup_{x\leq 0}\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{2\rho(n)}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\leq 0}\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\rho(n)}=0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(1;x)-1\|_\rho=0$$

elde edilir. Bu durumda $\forall x\in\mathbb{R}$ için (2.5.10) koşulu gerçeklenir.

$0 \leq x \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
L_n(\Phi;x) &= \Phi(x) + \frac{\rho(x)}{4\rho(n)}\left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi(x+1)} - 2\Phi(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi(x+2)}\right] \\
|L_n(\Phi;x) - \Phi(x)| &\leq \frac{\rho(x)}{4\rho(n)}\left[\frac{\Phi^2(x)}{|\Phi(x+1)|} + 2|\Phi(x)| + \frac{\Phi^2(x)}{|\Phi(x+2)|}\right] \\
\frac{|L_n(\Phi;x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \frac{1}{4\rho(n)}\left[\frac{\Phi^2(x)}{|\Phi(x+1)|} + 2|\Phi(x)| + \frac{\Phi^2(x)}{|\Phi(x+2)|}\right] \\
&= \frac{1}{4\rho(n)}\left[|\Phi(x)|\left(\left|\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+1)}\right| + \left|\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+2)}\right| + 2\right)\right] \\
&\leq \frac{|\Phi(x)|}{\rho(n)}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq x\leq n}\frac{|L_n(\Phi;x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \sup_{0\leq x\leq n}\frac{|\Phi(x)|}{\rho(n)} \\
&= \frac{|\Phi(n)|}{\rho(n)} \\
\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq n}\frac{|L_n(\Phi;x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{|\Phi(n)|}{(1+\Phi^2(n))} = 0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(\Phi;x) - \Phi(x)\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \geq n$ için,

$$\begin{aligned}
L_n(\Phi;x) &= \Phi(x) + \frac{1}{4}\left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi(x+1)} - 2\Phi(x) + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi(x+2)}\right] \\
|L_n(\Phi;x) - \Phi(x)| &\leq \frac{1}{4}|\Phi(x)|\left[\left|\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+1)}\right| + 2 + \left|\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+2)}\right|\right] \\
\frac{|L_n(\Phi;x) - \Phi(x)|}{\rho(x)} &\leq \frac{|\Phi(x)|}{4\rho(x)}\left[\left|\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+1)}\right| + 2 + \left|\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+2)}\right|\right] \\
&\leq \frac{|\Phi(x)|}{\rho(x)}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\geq n}\frac{\left|L_n\left(\Phi;x\right)-\Phi\left(x\right)\right|}{\rho\left(x\right)} &\leq \sup_{x\geq n}\frac{\left|\Phi\left(x\right)\right|}{\rho\left(x\right)} \\
&= \frac{\left|\Phi\left(n\right)\right|}{\rho\left(n\right)} \\
\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq n}\frac{\left|L_n\left(\Phi;x\right)-\Phi\left(x\right)\right|}{\rho\left(x\right)} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\Phi\left(n\right)\right|}{\rho\left(n\right)}=0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(\Phi;x\right)-\Phi\left(x\right)\right\|_{\rho}=0$$

elde edilir.

$x\leq 0$ için,

$$\begin{aligned}
L_n\left(\Phi;x\right) &= \Phi\left(x\right)-\frac{1}{2\rho\left(n\right)}\Phi\left(x\right) \\
\frac{\left|L_n\left(\Phi;x\right)-\Phi\left(x\right)\right|}{\rho\left(x\right)} &= \frac{1}{\rho\left(x\right)}\left|-\frac{1}{2\rho\left(n\right)}\Phi\left(x\right)\right| \\
&\leq \frac{\left|\Phi\left(x\right)\right|}{2\rho\left(n\right)} \\
\sup_{x\leq n}\frac{\left|L_n\left(\Phi;x\right)-\Phi\left(x\right)\right|}{\rho\left(x\right)} &\leq \sup_{x\leq n}\frac{1}{2\rho\left(n\right)}\left|\Phi\left(n\right)\right| \\
&\leq \frac{\left|\Phi\left(n\right)\right|}{2\rho\left(n\right)}
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\leq n}\frac{\left|L_n\left(\Phi;x\right)-\Phi\left(x\right)\right|}{\rho\left(x\right)}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\Phi\left(n\right)\right|}{2\rho\left(n\right)}=0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(\Phi;x\right)-\Phi\left(x\right)\right\|_{\rho}=0$$

elde edilir. Bu durumda $\forall x\in\mathbb{R}$ için (2.5.11) koşulu gerçeklenir.

$0 \leq x \leq n$ için,

$$\begin{aligned} L_n\left(\Phi^2; x\right) - \Phi^2(x) &= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)}\left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)}\Phi^2(x+1) - 2\Phi^2(x)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)}\Phi^2(x+2)\right] \\ &= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)}\left[2\Phi^2(x) - 2\Phi^2(x)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(\Phi^2; x\right) - \Phi^2(x)\right\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \geq n$ için,

$$\begin{aligned} L_n\left(\Phi^2; x\right) - \Phi^2(x) &= \frac{1}{4}\left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)}\Phi^2(x+1) - 2\Phi^2(x)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)}\Phi^2(x+2)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[2\Phi^2(x) - 2\Phi^2(x)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(\Phi^2; x\right) - \Phi^2(x)\right\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$x \leq 0$ için,

$$\begin{aligned} L_n\left(\Phi^2; x\right) - \Phi^2(x) &= -\frac{1}{2\rho(n)}\Phi^2(x) \\ \frac{\left|L_n\left(\Phi^2; x\right) - \Phi^2(x)\right|}{\rho(x)} &= \frac{1}{\rho(x)}\left|-\frac{1}{2\rho(n)}\Phi^2(x)\right| \\ &\leq \frac{\Phi^2(x)}{\rho(n)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\leq 0}\frac{|L_n(\Phi^2;x)-\Phi^2(x)|}{\rho(x)} &= \sup_{x\leq 0}\frac{\Phi^2(x)}{2\rho(n)} \\
&\leq \frac{\Phi^2(0)}{2\rho(n)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(\Phi^2;x\right)-\Phi^2(x)\right\|_\rho = 0
$$

elde edilir. Bu durumda $\forall x\in\mathbb{R}$ için (2.5.12) koşulu gerçeklenir.

(L_n) operatörler dizisinin lineer pozitif ve $(2.5.10)$, $(2.5.11)$, $(2.5.12)$ koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Burada (L_n) operatörler dizisi yardımıyla yaklaşımı gerçeklemeyen $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayına ait olan f^* fonksiyonu bulunur.

$$
f^*(x)=\Phi^2(x)\cos\pi x
$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$
\begin{aligned}
|f^*(x)| &= \left|\Phi^2(x)\right|\cdot|cos\pi x| \\
&\leq \rho(x)
\end{aligned}
$$

olduğundan $f^*\in C_\rho(\mathbb{R})$ olur.

$0\leq x\leq n$ için

$$
\begin{aligned}
L_n(f^*;x)-f^*(x) &= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)}\left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)}f^*(x+1)-2f^*(x)+\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)}f^*(x+2)\right] \\
&= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)}\left[\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+1)}\Phi^2(x+1)\cos\pi(x+1)\right. \\
&\quad \left. -2\Phi^2(x)\cos\pi x+\frac{\Phi^2(x)}{\Phi^2(x+2)}\Phi^2(x+2)\cos\pi(x+2)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)}\left[\Phi^2(x)(\cos\pi x\cos\pi - \sin\pi x\sin\pi) - 2\Phi^2(x)\cos\pi x\right. \\
&\quad \left.+\Phi^2(x)(\cos\pi x\cos 2\pi - \sin\pi x\sin 2\pi)\right] \\
&= \frac{\rho(x)}{4\rho(n)}\left[-\Phi^2(x)\cos\pi x - 2\Phi^2(x)\cos\pi x + \Phi^2(x)\cos\pi x\right] \\
&= \frac{\rho(x)}{2\rho(n)}\left[-\Phi^2(x)\cos\pi x\right]
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\frac{|L_n(f^*;x) - f^*(x)|}{\rho(x)} = \frac{\Phi^2(x)|\cos\pi x|}{2\rho(n)}
$$

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\le x\le n}\frac{|L_n(f^*;x) - f^*(x)|}{\rho(x)} &= \sup_{0\le x\le n}\frac{\Phi^2(x)|\cos\pi x|}{2\rho(n)} \\
&\le \frac{\Phi^2(n)}{2\rho(n)} \\
&= \frac{\Phi^2(n)}{2(1+\Phi^2(n))}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\lim_{n\to\infty}\|L_n(f^*;x) - f^*(x)\|_\rho \le \lim_{n\to\infty}\frac{\Phi^2(n)}{2(1+\Phi^2(n))} = \frac{1}{2}
$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.5.1 Eğer $L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$
\lim_{n\to\infty}\|L_n(\Phi^\nu;x) - \Phi^\nu(x)\|_\rho = 0;\ \ \upsilon = 0,1,2
$$

ifadesini sağlarsa $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için herhangi bir sonlu $[a,b]$ aralığında

$$
\lim_{n\to\infty}\|L_n(f;x) - f\|_{C(a,b)} = 0
$$

gerçeklenir (Haciyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Aşağıdaki teorem, $C_\rho^k(\mathbb{R}) \subset C_\rho(\mathbb{R})$ uzayında keyfi (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşımın mümkün olduğunu gösterir.

Teorem 2.5.3 $L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\Phi^\nu; x) - \Phi^\nu(x)\|_\rho = 0; \quad \nu = 0, 1, 2 \tag{2.5.14}$$

ifadesini sağlarsa keyfi $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\rho = 0 \tag{2.5.15}$$

gerçeklenir (Gadjiev 1974, Haciyev ve Hacısalihoğlu 1995).

İspat: Bu teoremi $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayı için ispatlamak yeterlidir. Bunun için (2.5.15) ifadesinin $C_\rho^0(\mathbb{R})$ den alınan keyfi bir fonksiyon için geçerli olduğunu kabul edelim ve $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayının tanımına göre

$$F(x) = f(x) - k_f \rho(x)$$

fonksiyonu $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayına aittir. Buradan

$$f(x) = F(x) + k_f \rho(x)$$

olmak üzere

$$\|L_n f - f\|_\rho \leq \|L_n F - F\|_\rho + k_f \|L_n \rho - \rho\|_\rho$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte birinci terim $F \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ olduğundan sıfıra yakınsar. İkinci terim ise (2.5.14) koşulundan dolayı sıfıra yakınsar. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\rho = 0$$

olur. Dolayısıyla ispatı $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayı için yapmak yeterlidir.

$f \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ olsun. $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayının tanımı gereğince;

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f = 0$$

olur. O halde her $\varepsilon > 0$ için $|x| > x_0^{'}$ olmak üzere

$$|f(x)| < \varepsilon\rho(x)$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $x_0^{'}$ noktası bulunabilir. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x) = \infty$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|x| > x_0^{''}$ iken

$$\rho(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

eşitsizliği gerçekleyen en az bir $x_0^{''}$ noktası vardır.

Eğer

$$x_0 = \max_{-\infty<x<\infty} \left\{x_0^{'}, x_0^{''}\right\}$$

olarak belirlenirse tüm $|x| > x_0$ için

$$|f(x)| < \varepsilon\rho(x) \text{ ve } \rho(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

koşulları gerçeklenir.

Kabul edelim ki $x_1 > x_0$ olsun.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad |x| \le x_0 \\ doğrusal & ; \quad x \in [-x_1, -x_0] \cup [x_0, x_1] \\ 0 & ; \quad |x| > x_1 \end{cases}$$

şeklinde sürekli bir g fonksiyonu tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \|L_n f - f\|_\rho &= \|L_n(f;x) - f - L_n(g;x) + L_n(g;x) - g + g\|_\rho \\ &\le \|L_n(f;x) - L_n(g;x)\|_\rho + \|L_n(g;x) - g\|_\rho \\ &\quad + \|f - g\|_\rho \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

olarak yazılabilir. (2.5.16) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadeleri teker teker inceleyelim.

$L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \to C_\rho(\mathbb{R})$ dönüşüm yapan bir operatör dizisi olduğundan sınırlıdır. Ayrıca (L_n) operatörler dizisi lineer olduğundan

$$\begin{aligned}\|L_n(f;x) - L_n(g;x)\|_\rho &= \|L_n(f-g;x)\|_\rho \\ &\leq \|L_n(\rho;x)\|_\rho \|f-g\|_\rho \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

sağlanır. (2.5.17) eşitsizliğinin sağındaki ifadeleri gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}\|L_n(\rho;x)\|_\rho &= \left\|L_n\left(1+\Phi^2;x\right)\right\|_\rho \\ &= \left\|L_n(1;x) + L_n\left(\Phi^2;x\right) + 1 + \Phi^2(x) - 1 - \Phi^2(x)\right\|_\rho \\ &\leq \|L_n(1;x)-1\|_\rho + \left\|L_n\left(\Phi^2;x\right) - \Phi^2(x)\right\|_\rho + \left\|1+\Phi^2(x)\right\|_\rho \\ &= \|L_n(1;x)-1\|_\rho + \left\|L_n\left(\Phi^2;x\right) - \Phi^2(x)\right\|_\rho + \|\rho\|_\rho\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (2.5.14) ve $\|\rho\|_\rho = 1$ ifadesi gözönüne alınarak $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\|L_n(\rho;x)\|_\rho &< \varepsilon + \varepsilon + 1 \\ &= 2\varepsilon + 1\end{aligned}$$

yazılabilir. ε keyfi olduğundan $\varepsilon = 1$ seçilebilir. O halde

$$\|L_n(\rho;x)\|_\rho < 3 \tag{2.5.18}$$

elde edilir. Bu da (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin düzgün sınırlı olduğunu gösterir.

$E = [-x_1, -x_0] \cup [x_0, x_1]$ olmak üzere g fonksiyonunun tanımı gereğince;

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_\rho &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)-g(x)|}{\rho(x)} \\
&\leq \sup_{|x|\leq x_0} \frac{|f(x)-g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x\in E} \frac{|f(x)-g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>x_1} \frac{|f(x)-g(x)|}{\rho(x)} \\
&= \sup_{|x|\leq x_0} \frac{|f(x)-f(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x\in E} \frac{|f(x)-g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>x_1} \frac{|f(x)-0|}{\rho(x)} \\
&= \sup_{x\in E} \frac{|f(x)-g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>x_1} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \\
&\leq \sup_{x\in E} \left\{ \frac{|f(x)|+|g(x)|}{\rho(x)} \right\} + \sup_{|x|>x_1} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \\
&\leq \sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x\in E} \frac{|g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>x_1} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$E \subset |x| \geq x_0 \text{ ve } |x| > x_1 \subset |x| \geq x_0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_\rho &\leq \sup_{|x|\geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x\in E} \frac{|g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x|\geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \\
&= 2 \sup_{|x|\geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} + \sup_{x\in E} \frac{|g(x)|}{\rho(x)}
\end{aligned}$$

olup,

$$G(x_0) = \max_{x\in E} |g(x)| = \max\{f(x_0), -f(x_0)\}$$

denirse

$$\|f-g\|_\rho \leq 2 \sup_{|x|\geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} + G(x_0) \sup_{x\in E} \frac{1}{\rho(x)}$$

elde edilir. $f \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ olduğundan

$$\sup_{|x|\geq x_0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} < \varepsilon$$

gerçeklenir. Ayrıca $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\rho(x)} < \varepsilon$$

olduğundan $G(x_0)$, ε na bağlı olmak üzere

$$\frac{1}{\rho(x)} < \frac{\varepsilon}{G(x_0)}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|f-g\|_\rho &\leq 2\varepsilon + G(x_0)\cdot\frac{\varepsilon}{G(x_0)} \\ &= 3\varepsilon \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

elde edilir. (2.5.18) ve (2.5.19) ifadeleri (2.5.17) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|L_n(f;x) - L_n(g;x)\|_\rho \leq 9\varepsilon$$

bulunur.

g fonksiyonunun tanımı gereğince;

$$\begin{aligned} \|L_n(g;x) - g(x)\|_\rho &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|L_n(g;x)-g(x)|}{\rho(x)} \\ &\leq \sup_{|x|\leq x_1} \frac{|L_n(g;x)-g(x)|}{\rho(x)} + \sup_{|x|>x_1} \frac{|L_n(g;x)|}{\rho(x)} \end{aligned}$$

olur. Lemma 2.5.1 kullanılarak

$$\sup_{|x|\leq x_1} \frac{|L_n(g;x)-g(x)|}{\rho(x)} = o(1)$$

gerçeklenir. O halde

$$\begin{aligned} \|L_n(g;x) - g(x)\|_\rho &\leq o(1) + \sup_{|x|>x_1} \frac{L_n(|g|;x)}{\rho(x)} \\ &\leq o(1) + \sup_{|x|>x_1} \frac{L_n\left(\sup\limits_t |g|;x\right)}{\rho(x)} \\ &= o(1) + G(x_0)\sup_{|x|>x_1} \frac{L_n(1;x)}{\rho(x)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= o(1)+G(x_0)\sup_{|x|>x_1}\frac{L_n(1;x)+1-1}{\rho(x)} \\
&\le o(1)+G(x_0)\sup_{|x|>x_1}\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)}+G(x_0)\sup_{|x|>x_1}\frac{1}{\rho(x)} \\
&< o(1)+G(x_0)\sup_{|x|>x_1}\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)}+G(x_0)\frac{\varepsilon}{G(x_0)} \\
&= o(1)+G(x_0)\sup_{|x|>x_1}\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)}+\varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.5.14) ifadesinden dolayı $\forall\varepsilon>0$ için

$$
\sup_{|x|>x_1}\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)}<\varepsilon
$$

sağlandığından

$$
\lim_{n\to\infty}\|L_n(g;x)-g(x)\|_\rho=0 \tag{2.5.20}
$$

bulunur. (2.5.18), (2.5.19) ve (2.5.20) ifadeleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\|L_nf-f\|_\rho &\le \|L_n(f-g;x)\|_\rho+\|L_n(g;x)-g\|_\rho+\|g-f\|_\rho \\
&\le \|f-g\|_\rho\cdot\|L_n\|_\rho+\|L_n(g;x)-g\|_\rho+\|g-f\|_\rho \\
&= \|f-g\|_\rho\Big(\|L_n\|_\rho+1\Big)+\|L_n(g;x)-g\|_\rho \\
&< 3\varepsilon(3+1)+\varepsilon \\
&= 13\varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da (2.5.15) ifadesinin gerçeklendiğini gösterir.

3. TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLAR DİZİSİ İLE YAKLAŞIM

Chlodowsky (1937) tarafından sınırsız bir aralık üzerinde Bernstein polinomları genelleştirilmiş ve bu polinomların bazı yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. Bernstein-Chlodowsky polinomları olarak adlandırılan bu polinomların, Lorentz (1953), Gadjiev (1995), Gadjiev (1998), Gadjiev vd. (1999), İbikli (2001) ve bunun gibi birçok kaynakda tanımı ve yaklaşım özellikleri verilmiştir. Ayrıca sınırsız bir aralık üzerinde Bernstein tipi polinomlar dizisine örnek polinomlar Totik (1984) ve Khan (1988) tarafından tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri araştırılmıştır, fakat burada bu polinom tipine yer verilmemiştir.

Tanım 3.0.1 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $0 \leq x \leq b_n$ için

$$B_n^*(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \tag{3.0.1}$$

şeklinde tanımlı polinomlara *Bernstein-Chlodowsky polinomları* adı verilir.

$f(t) = 1$ olmak üzere,

$$B_n^*(1;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} = 1 \tag{3.0.2}$$

şeklindedir.

$f(t) = t$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
B_n^*(t;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= x \qquad (3.0.3)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$f(t) = t^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
B_n^*\left(t^2;x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_n^2 \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} b_n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=2}^{n} (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{x^2}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{b_n}{n} x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= x^2 \left(\frac{n-1}{n}\right) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x \\
&= x^2 \left(\frac{n-1}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} + \frac{b_n}{n} x \\
&= x^2 + x\frac{(b_n - x)}{n} \qquad (3.0.4)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Bernstein-Chlodowsky polinomları, tanımlı olduğu $[0, b_n]$ aralığının $n \to \infty$ iken $[0, \infty)$ aralığına dönüşmesinden dolayı Korovkin Teoremi'ni gerçeklemez.

Örneğin; sınırsız aralık üzerinde $f(x) = x^2 \in C(0, \infty)$ fonksiyonuna (3.0.1) polinomlar dizisi ile yaklaşım mümkün değildir. Çünkü (3.0.4) ifadesi gözönüne alındığında

$$\left\| B_n^* \left(t^2; x\right) - x^2 \right\|_{C(0,b_n)} = \frac{b_n^2}{4n}$$

olup,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| B_n^* \left(t^2; x\right) - x^2 \right\|_{C(0,b_n)} = \infty$$

elde edilir. Bu ise yakınsamanın gerçeklenmediğini gösterir.

Aşağıdaki teoremler ile sınırsız aralık üzerinde tanımlanmış fonksiyon uzaylarında (3.0.1) polinomlar dizisi ile yaklaşım koşulları ortaya koyulmuştur.

Teorem 3.0.1 $\forall f \in C(0, \infty)$ fonksiyonu

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k_f < \infty$$

olma koşulunu ve (b_n) dizisi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n^2}{n} = 0 \tag{3.0.5}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\lim_{n \to \infty} \left\| B_n^* (f; x) - f(x) \right\|_{C(0,b_n)} = 0$$

gerçeklenir.

İspat: $k_f = 0$ olması durumunda teoremin ispatını yapmak yeterlidir. Bu durumda $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ olur. Yani; her $\varepsilon > 0$ için $x \geq x_0$ iken $|f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen en az bir x_0 noktası vardır.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad 0\le x\le x_0 \\ lineer & ; \quad x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2} \\ 0 & ; \quad x\ge x_0+\frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde sürekli bir g fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda g fonksiyonunun tanımı gereğince;

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le x\le b_n}|f(x)-g(x)| &\le \sup_{0\le x\le x_0}|f(x)-g(x)|+\sup_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)| \\
&\quad +\sup_{x\ge x_0+\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)| \\
&= \sup_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\ge x_0+\frac{1}{2}}|f(x)| \\
&\le \sup_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|f(x)|+\sup_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|g(x)|+\sup_{x\ge x_0+\frac{1}{2}}|f(x)|
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$\max_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|g(x)|=|f(x_0)| \text{ ve } \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

olduğundan

$$\sup_{0\le x\le b_n}|f(x)-g(x)|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le x\le b_n}|B_n^*(f;x)-f(x)| &= \sup_{0\le x\le b_n}|B_n^*(f;x)-B_n^*(g;x)+B_n^*(g;x) \\
&\quad -g(x)+g(x)-f(x)| \\
&\le \sup_{0\le x\le b_n}|B_n^*(f-g;x)|+\sup_{0\le x\le b_n}|B_n^*(g;x)-g(x)| \\
&\quad +\sup_{0\le x\le b_n}|g(x)-f(x)| \\
&\le \sup_{0\le x\le b_n}B_n^*\left(\sup_{0\le t\le b_n}|f-g|;x\right)+\sup_{0\le x\le b_n}|B_n^*(g;x)-g(x)| \\
&\quad +\sup_{0\le x\le b_n}|g(x)-f(x)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad 3\varepsilon B_n^*(1;x) + \sup_{0\leq x\leq b_n} |B_n^*(g;x) - g(x)| + 3\varepsilon \\
&\leq \quad 6\varepsilon + \sup_{0\leq x\leq b_n} |B_n^*(g;x) - g(x)|
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq b_n} |B_n^*(f;x) - f(x)| \leq 6\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq b_n} |B_n^*(g;x) - g(x)| \tag{3.0.6}
$$

yazılabilir. (3.0.6) eşitsizliğinde yer alan

$$
\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq b_n} |B_n^*(g;x) - g(x)|
$$

ifadesini gözönüne alalım.

g fonksiyonu $\left[x_0 + \frac{1}{2}, b_n\right]$ aralığında sıfır olduğundan sınırlıdır. Yani; $|g(x)| \leq M$ koşulunu sağlayan $M > 0$ sayısı vardır. Ayrıca kapalı ve sınırlı $\left[0, x_0 + \frac{1}{2}\right]$ aralığı üzerinde g fonksiyonu düzgün süreklidir. O halde düzgün süreklilik tanımı gereğince; her $\varepsilon > 0$ için $\left|\frac{k}{n}b_n - x\right| < \delta$ iken $x \in [0, b_n]$ için

$$
\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right) - g(x)\right| < \varepsilon \tag{3.0.7}
$$

gerçekleyen en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$\left|\frac{k}{n}b_n - x\right| \geq \delta$ olduğunda g fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$
\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right) - g(x)\right| \leq 2M
$$

gerçeklenir. Ayrıca

$$
\frac{\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2}{\delta^2} \geq 1 \Longrightarrow \frac{2M\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2}{\delta^2} \geq 2M
$$

yazılabileceğinden

$$
\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right) - g(x)\right| \leq \frac{2M\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2}{\delta^2} \tag{3.0.8}
$$

elde edilir. (3.0.7) ve (3.0.8) eşitsizliklerinden

$$\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right)-g\left(x\right)\right|\leq\varepsilon+\frac{2M\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left|B_n^*\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right.\\
&\quad\left.-\sum_{k=0}^{n}g\left(x\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right|\\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right)-g\left(x\right)\right|C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&\leq \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&= \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&\quad -2x\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_nC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\frac{2M}{\delta^2}x^2\\
&= \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[x^2+\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}-2x^2+x^2\right]\\
&= \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq x\leq b_n}\left|B_n^*\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right| &\leq \varepsilon+\max_{0\leq x\leq b_n}\frac{2M}{\delta^2}\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}\\
&\leq \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\frac{b_n^2}{4n}
\end{aligned}$$

elde edilir. (b_n) dizisi (3.0.5) koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}\left|B_n^*\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right| &\leq \varepsilon+\lim_{n\to\infty}\frac{2M}{\delta^2}\frac{b_n^2}{4n}\\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.

Bu ifade (3.0.6) ifadesinde gözönüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}\left|B_n^*\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|=0$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.5.3,

$$L_n\left(f;x\right)=\begin{cases} B_n^*(f;x) & ; \quad 0\leq x\leq b_n \\ f\left(x\right) & ; \quad x\notin[0,b_n]\end{cases}$$

şeklinde tanımlı operatörler dizisine uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.0.2 $\rho\left(x\right)=1+x^2$ olmak üzere $\forall f\in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^*(f;x)-f(x)\right\|_\rho=0 \tag{3.0.9}$$

gerçeklenir.

İspat: $(3.0.2)\,,(3.0.3)$ ve $(3.0.4)$ ifadeleri Teorem 2.5.3'ün koşullarını sağlamalıdır.

$0\leq x\leq b_n$ için (3.0.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|L_n\left(1;x\right)-1\right\|_\rho &= \sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{\left|B_n^*\left(1;x\right)-1\right|}{\rho\left(x\right)}\\ &= \sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{\left|1-1\right|}{\rho\left(x\right)}\\ &= 0\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(1;x\right)-1\right\|_\rho=0$$

olur.

(3.0.3) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|L_n(t;x)-x\right\|_\rho &= \sup_{0\le x\le b_n}\frac{\left|B_n^*(t;x)-x\right|}{\rho(x)}\\ &= \sup_{0\le x\le b_n}\frac{|x-x|}{1+x^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(t;x)-x\right\|_\rho=0$$

olur.

(3.0.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_\rho &= \sup_{0\le x\le b_n}\frac{\left|B_n^*(t^2;x)-x^2\right|}{\rho(x)}\\ &= \sup_{0\le x\le b_n}\frac{\left|x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}-x^2\right|}{1+x^2}\\ &\le \frac{1}{n}\sup_{0\le x\le b_n}(b_n-x)\\ &= \frac{b_n}{n}\end{aligned}$$

bulunur. Bernstein-Chlodowsky polinomlarının tanımında kullanılan (b_n) pozitif sayı dizisi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$ olma koşulunu sağladığından

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_\rho=0$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 2.5.3 gereğince;

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_nf-f\right\|_\rho=0$$

sağlanır. (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin tanımından

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^*f-f\right\|_\rho=0$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.5.2'ye göre (3.0.9) ifadesi keyfi $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu için genel olarak sağlanmaz. Fakat (3.0.1) polinomlar dizisi için özel bir durumda Teorem 2.5.2'nin gerçeklendiğini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.0.3 $\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere $\forall f \in C_\rho(\mathbb{R})$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \left\| B_n^*(f; x) - f(x) \right\|_\rho = 0$$

gerçeklenir.

İspat: Sürekli bir f fonksiyonu sınırlı ve kapalı bir aralıkta düzgün sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t - x| < \delta$ iken her $x \in [0, b_n]$ ve her $t \in [0, \infty)$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$f \in C_\rho(\mathbb{R})$ olduğundan $|t - x| \geq \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x \in [0, b_n]$ ve $\forall t \in [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\
&\leq M_f(1 + t^2) + M_f(1 + x^2) \\
&\leq M_f(2 + t^2 + x^2)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x)| &\leq M_f \left\{ 2 + (t - x + x)^2 + x^2 \right\} \\
&= M_f \left\{ 2 + (t - x)^2 + 2x(t - x) + 2x^2 \right\} \\
&= M_f \left\{ 2\left(x^2 + 1\right) + (t - x)^2 + 2x(t - x) \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M_f \left\{2\left(x^2+1\right)+2\left(t-x\right)^2+2\left(x^2+1\right)\left|t-x\right|\right\}\\
&= 2M_f\left\{\left(x^2+1\right)\left(1+\left|t-x\right|\right)+\left(t-x\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. $\frac{|t-x|}{\delta}\geq 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right| &\leq 2M_f\left\{\left(x^2+1\right)\left(\frac{|t-x|}{\delta}+|t-x|\right)+\left(t-x\right)^2\right\}\\
&= 2M_f\left\{\left(x^2+1\right)|t-x|\left(\frac{1}{\delta}+1\right)+\left(t-x\right)^2\right\}\\
&\leq 2M_f\left\{\left(x^2+1\right)|t-x|\left(\frac{1}{\delta}+1\right)+\left(t-x\right)^2\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\right\}\\
&= 2M_f\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\left\{\left(x^2+1\right)|t-x|+\left(t-x\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

olur.

$$
2M_f\left(\frac{1}{\delta}+1\right)=C_f\left(\delta\right)
$$

ile gösterilirse

$$
\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq C_f\left(\delta\right)\left\{\left(t-x\right)^2+\left(1+x^2\right)|t-x|\right\}
$$

elde edilir.

Bu durumda $\forall x\in[0,b_n]$ ve $\forall t\in[0,\infty)$ için

$$
\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon+C_f\left(\delta\right)\left\{\left(t-x\right)^2+\left(1+x^2\right)|t-x|\right\} \tag{3.0.10}
$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Şimdi $|B_n^*(f;x)-f\left(x\right)|$ ifadesini gözönüne alalım. (3.0.10) eşitsizliği ve B_n^* polinomlarının monotonluk ve lineerlik özelliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left|B_n^*\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq B_n^*\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;x\right)\\
&< B_n^*\left(\varepsilon+C_f\left(\delta\right)\left(t-x\right)^2+C_f\left(\delta\right)\left(1+x^2\right)|t-x|;x\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon B_n^*(1;x) + C_f(\delta) B_n^*\left((t-x)^2;x\right) \\ &\quad + \left(1+x^2\right) C_f(\delta) B_n^*\left(\sqrt{(t-x)^2};x\right) \\ &= \varepsilon B_n^*(1;x) + C_f(\delta) B_n^*(t^2;x) - C_f(\delta) 2x B_n^*(t;x) \\ &\quad + C_f(\delta) x^2 B_n^*(1;x) + (1+x^2) C_f(\delta) B_n^*(\sqrt{(t-x)^2};x) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.0.2) , (3.0.3) , (3.0.4) ifadeleri ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$\left|B_n^*(f;x) - f(x)\right| < \varepsilon + C_f(\delta) \frac{x(b_n - x)}{n} + \left(1+x^2\right) C_f(\delta) \left(\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right)$$

bulunur. Bu ifadenin her iki yanı $\frac{1}{1+x^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\left|B_n^*(f;x) - f(x)\right|}{1+x^2} < \varepsilon + C_f(\delta) \frac{x(b_n - x)}{n\left(1+x^2\right)} + C_f(\delta) \left(\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right)$$

olur. Buradan

$$\sup_{0\le x\le b_n} \frac{\left|B_n^*(f;x) - f(x)\right|}{1+x^2} < \varepsilon + C_f(\delta) \sup_{0\le x\le b_n} \frac{x(b_n - x)}{n\left(1+x^2\right)} + C_f(\delta) \sup_{0\le x\le b_n} \sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}$$

yazılabilir.

$$\sup_{0\le x\le b_n} \frac{x(b_n - x)}{n\left(1+x^2\right)} \le \frac{b_n}{n} \quad \text{ve} \quad \sup_{0\le x\le b_n} \sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}} = \sqrt{\frac{b_n^2}{4n}}$$

olduğundan

$$\sup_{0\le x\le b_n} \frac{\left|B_n^*(f;x) - f(x)\right|}{1+x^2} < \varepsilon + C_f(\delta) \frac{b_n}{n} + C_f(\delta) \sqrt{\frac{b_n^2}{4n}}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki yanı $\frac{1}{\sqrt{b_n}}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{0\le x\le b_n} \frac{\left|B_n^*(f;x) - f(x)\right|}{1+x^2} &< \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} + C_f(\delta) \left[\frac{\sqrt{b_n}}{n} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right] \\ &< \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} + C_f(\delta) \left[\frac{\sqrt{b_n}}{n} + \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right] \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{b_n}}\sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{|B_n^*(f;x)-f(x)|}{1+x^2}<\varepsilon\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{b_n}}+C_f(\delta)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{b_n}}{n}+\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right]$$

olup, (b_n) dizisinin özellikleri gözönüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{b_n}}\sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{|B_n^*(f;x)-f(x)|}{1+x^2}=0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.0.2 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere

$$\widetilde{B}_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}\right)C_n^k\left(\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^k\left(1-\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^{n-k};\ 0\leq x\leq\sqrt{b_n} \quad (3.0.11)$$

şeklinde *Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi* tanımlanabilir (İbikli 2003).

$(3.0.2)$, $(3.0.3)$ ve $(3.0.4)$ ifadelerinden

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_n(1;x)&=1\\ \widetilde{B}_n(t;x)&=x\\ \widetilde{B}_n\left(t^2;x\right)&=x^2+\frac{x\left(\sqrt{b_n}-x\right)}{n}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Sınırsız aralık üzerinde $f(x)=x^2$ fonksiyonuna (3.0.1) polinomlar dizisi yardımıyla yaklaşımın mümkün olmadığını örnek olarak vermiştik. Şimdi sınırsız aralık üzerinde $f(x)=x^2$ fonksiyonuna (3.0.11) polinomlar dizisi ile yaklaşım yapalım.

$f(t) = 1$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \widetilde{B}_n(1;x) - 1 \right\|_{C\left(0,\sqrt{b_n}\right)} = 0$$

$f(t) = t$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \widetilde{B}_n(t;x) - x \right\|_{C\left(0,\sqrt{b_n}\right)} = 0$$

$f(t) = t^2$ için,

$$\begin{aligned}\max_{0\leq x\leq\sqrt{b_n}} \left| \widetilde{B}_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right| &= \frac{\sqrt{b_n}}{2n}\left(\sqrt{b_n} - \frac{\sqrt{b_n}}{2}\right) \\ &= \frac{b_n}{4n}\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \widetilde{B}_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_{C\left(0,\sqrt{b_n}\right)} = 0$$

elde edilir. Bu durumda sınırsız aralık üzerinde $f(x) = x^2$ fonksiyonuna (3.0.11) polinomlar dizisi ile yaklaşım mevcuttur.

Lemma 3.0.1 $a > 0$ sayısı n den bağımsız olmak üzere $\left[a, \sqrt{b_n}\right]$ üzerinde sıfır olan her sürekli f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \widetilde{B}_n(f;x) - f(x) \right\|_{C\left(0,\sqrt{b_n}\right)} = 0$$

gerçeklenir.

İspat: Kapalı ve sınırlı her aralıkta sürekli olan fonksiyon sınırlı olduğundan f fonksiyonu sınırlıdır. $\left[a, \sqrt{b_n}\right]$ aralığında fonksiyon sıfır değerini aldığından $0 \leq x \leq a$ için

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Ayrıca f fonksiyonu, $[0, a]$ kapalı ve sınırlı aralık üzerinde düzgün süreklidir. Dolayısıyla $x \in \left[0, \sqrt{b_n}\right]$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$\left|\frac{k}{n}\sqrt{b_n}-x\right|<\delta$ olduğunda

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon \tag{3.0.12}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0$ sayısı vardır.

$\left|\frac{k}{n}\sqrt{b_n}-x\right|\geq\delta$ iken f sınırlı olduğundan

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}\right)-f\left(x\right)\right|\leq 2M$$

gerçeklenir. Ayrıca

$$\frac{\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}-x\right)^2}{\delta^2}\geq 1\Longrightarrow\frac{2M\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}-x\right)^2}{\delta^2}\geq 2M$$

yazılabileceğinden

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}\right)-f\left(x\right)\right|\leq\frac{2M\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}-x\right)^2}{\delta^2} \tag{3.0.13}$$

elde edilir. O halde (3.0.12) ve (3.0.13) ifadeleri gözönüne alınırsa

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon+\frac{2M\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}-x\right)^2}{\delta^2}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{B}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}\right)C_n^k\left(\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^k\left(1-\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^{n-k}\right.\\
&\quad\left.-\sum_{k=0}^{n}f\left(x\right)C_n^k\left(\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^k\left(1-\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^{n-k}\right|\\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}\right)-f\left(x\right)\right|C_n^k\left(\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^k\left(1-\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^{n-k}\\
&< \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}-x\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^k\left(1-\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^{n-k}\\
&= \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\sqrt{b_n}\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^k\left(1-\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -2x\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{b_n}C_n^k\left(\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^k\left(1-\frac{x}{\sqrt{b_n}}\right)^{n-k}+\frac{2M}{\delta^2}x^2 \\
= \;& \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[x^2+\frac{x\left(\sqrt{b_n}-x\right)}{n}-2x^2+x^2\right] \\
= \;& \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\frac{x\left(\sqrt{b_n}-x\right)}{n}
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(f;x)-f(x)\right| &< \varepsilon+\max_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\frac{2M}{\delta^2}\frac{x\left(\sqrt{b_n}-x\right)}{n} \\
&< \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\frac{b_n}{4n} \\
\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(f;x)-f(x)\right| &< \varepsilon+\lim_{n\to\infty}\frac{2M}{\delta^2}\frac{b_n}{4n} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.0.4 $\forall f\in C(0,\infty)$ fonksiyonu

$$
\lim_{x\to\infty}f(x)=k_f<\infty
$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{B}_n(f;x)-f(x)\right\|_{C\left(0,\sqrt{b_n}\right)}=0
$$

gerçeklenir.

İspat: $k_f=0$ olması durumunda teoremin ispatını yapmak yeterlidir. Bu durumda $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ olur. Yani; her $\varepsilon>0$ için $x\ge x_0$ iken $|f(x)|<\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan en az bir x_0 noktası vardır.

$$
g(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad 0\le x\le x_0 \\ lineer & ; \quad x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2} \\ 0 & ; \quad x\ge x_0+\frac{1}{2}\end{cases}
$$

şeklinde sürekli bir g fonksiyonu tanımlayalım.

g fonksiyonunun tanımı gereğince;

$$\begin{aligned}\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}|f(x)-g(x)| &\le \sup_{0\le x\le x_0}|f(x)-g(x)|+\sup_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|\\ &\quad+\sup_{x\ge x_0+\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|\\ &= \sup_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\ge x_0+\frac{1}{2}}|f(x)|\\ &\le \sup_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|f(x)|+\sup_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|g(x)|+\sup_{x\ge x_0+\frac{1}{2}}|f(x)|\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$\max_{x_0\le x\le x_0+\frac{1}{2}}|g(x)|=|f(x_0)| \text{ ve } \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

olduğundan

$$\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}|f(x)-g(x)|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(f;x)-f(x)\right| &= \sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(f;x)-\widetilde{B}_n(g;x)+\widetilde{B}_n(g;x)\right.\\ &\quad\left.-g(x)+g(x)-f(x)\right|\\ &\le \sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(f-g;x)\right|+\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(g;x)-g(x)\right|\\ &\quad+\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}|g(x)-f(x)|\\ &\le \sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\widetilde{B}_n\left(\sup_{0\le t\le\sqrt{b_n}}|f-g|;x\right)\\ &\quad+\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(g;x)-g(x)\right|+\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}|g(x)-f(x)|\\ &\le 3\varepsilon\widetilde{B}_n(1;x)+\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(g;x)-g(x)\right|+3\varepsilon\\ &\le 6\varepsilon+\sup_{0\le x\le\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(g;x)-g(x)\right|\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(f;x)-f(x)\right|\leq 6\varepsilon+\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(g;x)-g(x)\right|$$

olur. Lemma 3.0.1 kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq\sqrt{b_n}}\left|\widetilde{B}_n(f;x)-f(x)\right|=0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.1 I. Tip Genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky Polinomlar Dizisi ve Yaklaşımı

İbikli (2001) tarafından I. tip genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisinin tanımı ve yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

Tanım 3.1.1 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisi ve $0\leq\alpha\leq\beta$ olmak üzere

$$S_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\qquad(3.1.1)$$

ile *I. tip genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi* tanımlanabilir (Stancu 1983).

(3.0.2) ifadesi gözönüne alınırsa, (2.4.2) eşitliğinden

$$S_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}=1\qquad(3.1.2)$$

olarak bulunur.

(3.0.3) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
S_n(t;x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b_n}{n+\beta}\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b_n}{n+\beta}\left\{\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right. \\
&\quad \left.+\alpha\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right\} \\
&= \frac{b_n}{n+\beta}\left\{\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\alpha\right\} \\
&= \frac{n}{n+\beta}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n \\
&= \frac{n}{n+\beta}x+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n \qquad (3.1.3)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

(3.0.4) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
S_n\left(t^2;x\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right. \\
&\quad +2\alpha\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad \left.+\alpha^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right\} \\
&= \frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n^2}{n^2}k^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right. \\
&\quad \left.+2\alpha\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n}kC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\alpha^2\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2} b_n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \alpha^2 \frac{b_n^2}{(n+\beta)^2} \\
&= \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2 \left(x^2 + \frac{x(b_n-x)}{n}\right) + \frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2} b_n x \qquad (3.1.4) \\
&\quad + \alpha^2 \frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

$|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$ eşitsizliğini sağlayan $f \in C(\mathbb{R})$ fonksiyonu için (3.1.1) polinomları ile yakınsaklık gerçeklenmeyebilir.

Örneğin; $[0, b_n]$ aralığı üzerinde sonsuz mertebeden diferensiyellenebilir olan $f(x) = x^2$ fonksiyonuna (3.1.1) polinomlar dizisi ile yaklaşım yapalım.

$f(t) = t^2$ için

$$
S_n(t^2; x) = \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2 \left(x^2 + \frac{x(b_n-x)}{n}\right) + \frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2} b_n x + \alpha^2 \left(\frac{b_n}{n+\beta}\right)^2
$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\left|S_n(t^2;x) - x^2\right| &\geq x^2 - S_n(t^2;x) \\
&= x^2\left(1 - \frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right) + \frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{x(b_n-x)}{n} \\
&\quad + \frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2} b_n x + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} b_n^2 \\
\sup_{0\leq x\leq b_n} \left|S_n(t^2;x) - x^2\right| &\geq \sup_{0\leq x\leq b_n} x^2\left(1 - \frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right) + \sup_{0\leq x\leq b_n} \frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{x(b_n-x)}{n} \\
&\quad + \sup_{0\leq x\leq b_n} \frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2} b_n x + \sup_{0\leq x\leq b_n} \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} b_n^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= b_n^2\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{b_n^2}{4n} \\ &+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n^2+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$b_n^2\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{b_n^2}{4n}\geq\frac{b_n^2}{4}\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{b_n^2}{4n}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini gösterelim.

$$\frac{3}{4}\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{4(n+\beta)^2}\geq\frac{1}{4n}$$

$$3\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{(n+\beta)^2}\geq\frac{1}{n}$$

$$3\left(2n^2\beta+n\beta^2\right)+n(n+\beta)^2\geq(n+\beta)^2$$

olup, eşitsizlik geçerlidir. Buradan

$$\sup_{0\leq x\leq b_n}\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|\geq\frac{b_n^2}{4}\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{b_n^2}{4n}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|\geq\infty$$

olup, yakınsama gerçekleşmez.

(3.1.1) polinomlar dizisi gözönüne alındığında, aşağıdaki teorem Lemma 2.5.1'in bir sonucu olarak verilebilir.

Teorem 3.1.1 $\rho(x)=1+x^2$ olmak üzere $f\in C_\rho(0,\infty)$ ise sınırlı ve kapalı $[0,A]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f;x)=f(x)$$

düzgün olarak gerçeklenir.

İspat: İspatı yapmak için Lemma 2.5.1'in koşullarının sağlandığını gösterelim.

(3.1.2) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} S_n(1;x) - 1 &= 0 \\ \sup_{0 \le x \le A} |S_n(1;x) - 1| &= 0 \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(1;x) - 1\|_{C(0,A)} = 0$$

olur.

(3.1.3) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} S_n(t;x) - x &= x\frac{n}{n+\beta} + \frac{\alpha}{n+\beta}b_n - x \\ &= x\left(\frac{n}{n+\beta} - 1\right) + \frac{\alpha}{n+\beta}b_n \\ |S_n(t;x) - x| &\le x\left(1 - \frac{n}{n+\beta}\right) + \frac{\alpha}{n+\beta}b_n \\ \sup_{x\in[0A]} |S_n(t;x) - x| &\le A\left(1 - \frac{n}{n+\beta}\right) + \frac{\alpha}{n+\beta}b_n \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(t;x) - x\|_{C(0,A)} = 0$$

olur.

(3.1.4) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} S_n(t^2;x) - x^2 &= \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2 \left(x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n}\right) + \frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n x \\ &\quad +\alpha^2\frac{b_n^2}{(n+\beta)^2} - x^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right| &\leq \left(\frac{n^2}{(n+\beta)^2}-1\right)x^2+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{b_n}{n}x+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{x^2}{n} \\
&\quad +2\alpha x\frac{n}{n^2\left(1+2\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}b_n+\alpha^2\left(\frac{b_n}{n+\beta}\right)^2 \\
\sup_{x\in[0,A]}\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right| &\leq A^2\left(\frac{n^2}{(n+\beta)^2}-1+\frac{n}{(n+\beta)^2}\right) \\
&\quad +2\alpha A\frac{n}{n^2\left(1+2\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}b_n+\alpha^2\left(\frac{b_n}{n+\beta}\right)^2
\end{aligned}
$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{C(0,A)}=0$$

elde edilir. Bu durumda Lemma 2.5.1'in tüm koşulları sağlanır. O halde Lemma 2.5.1 gereğince istenen yakınsaklık gerçeklenir.

Diğer yandan aşağıdaki teorem, (3.1.1) polinomlar dizisi gözönüne alındığında Teorem 2.5.1'in bir sonucu olarak verilebilir.

Teorem 3.1.2 $\rho(x)=1+x^2$ olmak üzere $f\in C_\rho^k(\mathbb{R})$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n(f;x)-f(x)\right\|_\rho=0$$

gerçeklenir.

İspat: (3.1.2) ifadesi kullanılarak

$$\frac{\left|S_n(1;x)-1\right|}{1+x^2}=\frac{1-1}{1+x^2}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{\left|S_n(1;x)-1\right|}{1+x^2}=0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n(1;x)-1\right\|_\rho=0$$

elde edilir.

(3.1.3) ifadesi kullanılarak

$$S_n(t;x) - x = x\left(\frac{n}{n+\beta} - 1\right) + \frac{\alpha}{n+\beta} b_n$$

olup, $\alpha, \beta, b_n > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|S_n(t;x) - x| &\leq \left|\frac{n}{n+\beta} - 1\right| x + \frac{\alpha}{n+\beta} b_n \\
\frac{|S_n(t;x) - x|}{1+x^2} &\leq \left(1 - \frac{n}{n+\beta}\right)\frac{x}{1+x^2} + \frac{\alpha}{n+\beta} b_n \frac{1}{1+x^2} \\
&\leq \left(1 - \frac{n}{n+\beta}\right) + \frac{\alpha}{n+\beta} b_n \\
\sup_{0\leq x\leq b_n} \frac{|S_n(t;x) - x|}{1+x^2} &\leq \left(1 - \frac{n}{n+\beta}\right) + \frac{\alpha}{n+\beta} b_n
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq b_n} \frac{|S_n(t;x) - x|}{1+x^2} &\leq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n}{n+\beta}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}\frac{\alpha}{n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(t;x) - x\|_\rho = 0$$

elde edilir.

(3.1.4) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
S_n\left(t^2;x\right) - x^2 &= \left(\frac{n^2}{(n+\beta)^2} - 1\right) x^2 + \frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{x(b_n - x)}{n} \\
&\quad + \frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2} b_n x + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} b_n^2 \\
\left|S_n\left(t^2;x\right) - x^2\right| &\leq \left(1 - \frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right) x^2 + \frac{n}{(n+\beta)^2} x(b_n - x) \\
&\quad + \frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2} b_n x + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} b_n^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2} &\leq \left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{n}{(n+\beta)^2}\frac{x\left(b_n-x\right)}{1+x^2} \\
&\quad +\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n\frac{x}{1+x^2}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2\frac{1}{1+x^2} \\
&\leq \left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{(n+\beta)^2}\left(b_n-x\right) \\
&\quad +\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2 \\
\sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2} &\leq \left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{(n+\beta)^2}\sup_{0\leq x\leq b_n}\left(b_n-x\right) \\
&\quad +\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2 \\
&= \left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{(n+\beta)^2}b_n+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n \\
&\quad +\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2} &\leq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{nb_n}{n^2\left(1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)} \\
&\quad +\lim_{n\to\infty}\frac{2\alpha nb_n}{n^2\left(1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}+\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2b_n^2}{n^2\left(1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}
\end{aligned}
$$

olup, (b_n) dizisinin özelliklerinden

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_\rho=0
$$

elde edilir. Bu durumda

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{\left|S_n\left(t^\nu;x\right)-x^\nu\right|}{1+x^2}=0;\quad \nu=0,1,2
$$

olup, Teorem 2.5.1 gereğince;

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}\frac{\left|S_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|}{1+x^2}=0
$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi (3.1.1) ile tanımlı polinomlar dizisinin türevleri için yakınsaklık özelliklerini araştıralım.

Tanım 3.1.2

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)\,; \;\; h \geq 0 \tag{3.1.5}$$

ifadesi f *fonksiyonunun* x *noktasındaki birinci farkı* olarak tanımlanabilir. Ayrıca her m pozitif tamsayısı için

$$\Delta_h^m f = \Delta_h\left(\Delta_h^{m-1} f\right)$$

olsun.

Teorem 3.1.3 Diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için

$$\Delta_h^m f(x) = h^m f^{(m)}(x + \theta m h)\,; \;\; 0 < \theta < 1 \tag{3.1.6}$$

gerçeklenir.

İspat: İspatı tümevarım metodu ile verelim.

f fonksiyonu $(x, x+h)$ aralığında diferensiyellebilir olduğundan, Ortalama Değer Teoremi gereğince;

$$f^{'}(x+\theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \;\; 0 < \theta < 1$$

gerçeklenir. Buradan

$$f(x+h) - f(x) = h f^{'}(x+\theta h)$$

olup,

$$\Delta_h f(x) = h f^{'}(x+\theta h)\,; \;\; 0 < \theta < 1$$

olduğundan $m = 1$ için ifadenin doğruluğu açıktır.

$m = k$ için (3.1.6) ifadesi doğru olsun. Yani;

$$\Delta_h^k f(x) = h^k f^{(k)}(x + \theta kh);\ \ 0 < \theta < 1$$

gerçeklensin. $m = k + 1$ için (3.1.6) ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \Delta_h^{k+1} f(x) &= \Delta_h \left(\Delta_h^k f(x)\right) \\ &= \Delta_h \left(h^k f^{(k)}(x + \theta kh)\right) \end{aligned}$$

olmak üzere $g(x) = h^k f^{(k)}(x + \theta kh)$ ile tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \Delta_h^{k+1} f(x) &= \Delta_h (g(x)) \\ &= hg^{'}(x + \theta h) \\ &= h\left(h^k f^{(k)}(x + \theta h + \theta kh)\right)^{'} \\ &= h^{k+1}\left(f^{(k+1)}(x + \theta(k+1)h)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için (3.1.6) ifadesi gerçeklenir.

Not 1. Eğer $\Delta_h f(x) > 0$ ise f fonksiyonu belirtilen aralıkta artandır. Eğer $\Delta_h^2 f(x) > 0$ ise f fonksiyonu konvekstir.

Teorem 3.1.4 (3.1.1) polinomlar dizisi için

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} S_n(f;x) &= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{b_n^m} \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} \\ &\quad \times \Delta_{\frac{b_n}{n+\beta}}^m f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\frac{d}{dx}S_n(f;x)$ ifadesi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}S_n(f;x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\left[\frac{k}{b_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right. \\
&\quad \left. -\frac{n-k}{b_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\frac{k}{b_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad -\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\frac{n-k}{b_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= I_1 - I_2 \qquad (3.1.8)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

I_1 ifadesini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\frac{k}{b_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} f\left(\frac{k+1+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\left(\frac{k+1}{b_n}\right)\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $(k+1)C_n^{k+1}$ ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
(k+1)C_n^{k+1} &= (k+1)\binom{n}{k+1} \\
&= (k+1)\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= n\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \\
&= nC_{n-1}^k \qquad (3.1.9)
\end{aligned}$$

olur. (3.1.9) ifadesi I_1 de yerine yazılırsa

$$I_1 = \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f\left(\frac{k+1+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

elde edilir.

I_2 ifadesini ele alalım.

$$I_2 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \frac{n-k}{b_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

olarak yazılabilir. $(n-k)\, C_n^k$ ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} (n-k)\, C_n^k &= (n-k) \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \\ &= n C_{n-1}^k \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

olur.

(3.1.10) ifadesi I_2 de yerine yazılırsa

$$I_2 = \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \frac{n-k}{b_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

elde edilir. (3.1.8) ifadesi gözönüne alındığında

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} S_n(f;x) &= \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left[f\left(\frac{k+1+\alpha}{n+\beta} b_n\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right)\right] \\ & \quad \times \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \end{aligned}$$

bulunur. (3.1.5) ifadesinde $h = \frac{b_n}{n+\beta}$ ve $x = \frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n$ olarak alınırsa

$$\Delta_{\frac{b_n}{n+\beta}} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) = f\left(\frac{k+1+\alpha}{n+\beta} b_n\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \tag{3.1.11}$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$\frac{d}{dx}S_n(f;x)=\frac{n}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}\Delta_{\frac{b_n}{n+\beta}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\tag{3.1.12}$$

olarak elde edilir.

$\frac{d^2}{dx^2}S_n(f;x)$ ifadesi

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}S_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n}C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\left[\frac{k(k-1)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right.\\
&\quad-\frac{k(n-k)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}\\
&\quad-\frac{k(n-k)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}\\
&\quad\left.+\frac{(n-k)(n-k-1)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\left[\frac{k(k-1)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right.\\
&\quad-2\frac{k(n-k)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}\\
&\quad\left.+\frac{(n-k)(n-k-1)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\frac{k(k-1)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&\quad-2\sum_{k=0}^{n}C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\frac{k(n-k)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\frac{(n-k)(n-k-1)}{b_n^2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}\\
&= T_1-2T_2+T_3
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi eşitliğin sağındaki T_1, T_2 ve T_3 ifadelerini teker teker ele alalım.

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{k=2}^{n} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \frac{k(k-1)}{b_n^2} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} C_n^{k+2} f\left(\frac{k+2+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \frac{(k+2)(k+1)}{b_n^2} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1) C_n^{k+2} &= (k+2)(k+1) \frac{n!}{(n-k-2)!\,(k+2)!} \\ &= (k+2)(k+1) \frac{n!}{(n-k-2)!\,(k+2)(k+1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{k!\,(n-k-2)!} \\ &= n(n-1) C_{n-2}^k \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$T_1 = \frac{n(n-1)}{b_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k f\left(\frac{k+2+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \frac{k(n-k)}{b_n^2} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} C_n^{k+1} f\left(\frac{k+1+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \frac{(k+1)(n-k-1)}{b_n^2} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} (k+1)(n-k-1) C_n^{k+1} &= (k+1)(n-k-1) \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\ &= n(n-1) \frac{(n-2)!}{(n-k-2)!k!} \\ &= n(n-1) C_{n-2}^k \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$T_2 = \frac{n(n-1)}{b_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k f\left(\frac{k+1+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

elde edilir.

$$T_3 = \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \frac{(n-k)(n-k-1)}{b_n^2} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

şeklindedir. Burada

$$(n-k)(n-k-1) C_n^k = n(n-1) C_{n-2}^k$$

olmak üzere,

$$T_3 = \frac{n(n-1)}{b_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) (n-k)(n-k-1) \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} S_n(f;x) &= T_1 - 2T_2 + T_3 \\ &= \frac{n(n-1)}{b_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} \left[f\left(\frac{k+2+\alpha}{n+\beta} b_n\right) - 2f\left(\frac{k+1+\alpha}{n+\beta} b_n\right) + f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \right] \\ &\quad \times C_{n-2}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} \end{aligned}$$

olur.

Diğer yandan

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 f(x) &= \Delta_h (\Delta_h f(x)) \\ &= \Delta_h (f(x+h) - f(x)) \\ &= \Delta_h (f(x+h)) - \Delta_h f(x) \\ &= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$h=\frac{b_n}{n+\beta} \text{ ve } x=\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\Delta^2_{\frac{b_n}{n+\beta}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) &= f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+2\frac{b_n}{n+\beta}\right)-2f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\frac{b_n}{n+\beta}\right)\\ &\quad +f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\end{aligned}$$

olup,

$$\frac{d^2}{dx^2}S_n\left(f;x\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{b_n^2}\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}\Delta^2_{\frac{b_n}{n+\beta}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) \tag{3.1.13}$$

olarak elde edilir. Aynı metod izlenirse her m doğal sayısı için (3.1.7) eşitliği geçerli olur.

(3.1.12) ve (3.1.13) ifadeleri gözönüne alınırsa aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.1.1 f fonksiyonu $(0,b_n)$ aralığında konveks ve artan bir fonksiyon ise (3.1.1) polinomları da $(0,b_n)$ aralığında konveks ve artandır.

Teorem 3.1.5 (3.1.1) polinomları, $[0,b_n]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyon olma özelliğini korur.

İspat: (3.1.1) polinomları diferensiyellenebilir ve türevi integrallenebilir olduğundan Tanım 2.3.2 gereğince;

$$V_0^{b_n}\left(S_nf\right)=\int_0^{b_n}\left|\frac{d}{dx}S_n\left(f;x\right)\right|dx$$

eşitliği gerçeklenir.

(3.1.11) ve (3.1.12) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
V_0^{b_n}(S_n f) &= \int_0^{b_n} \left| \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \Delta_{\frac{b_n}{n+\beta}} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \right| dx \\
&\leq \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \int_0^{b_n} \left| \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \right. \\
&\quad \left. \times \left(f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta} b_n\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right)\right) \right| dx \\
&= \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left| f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta} b_n\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \right| \\
&\quad \times \int_0^{b_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} dx
\end{aligned}$$

olur. $\frac{x}{b_n} = y$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$V_0^{b_n}(S_n f) \leq n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left| f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta} b_n\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \right| \int_0^1 y^k (1-y)^{n-k-1} dy$$

sağlanır. Şimdi

$$\int_0^1 y^k (1-y)^{n-k-1} dy$$

integralini gözönüne alalım.

Beta fonksiyonu tanımından

$$\int_0^1 y^k (1-y)^{n-k-1} dy = B(k+1, n-k)$$

olarak yazılabilir.

(2.1.1) bağıntısı gereğince;

$$\begin{aligned}
B(k+1, n-k) &= \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1+n-k)} \\
&= \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}{\Gamma(n+1)}
\end{aligned}$$

olur. $k \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ için $\Gamma(k+1) = k!$ olduğundan

$$\begin{aligned} B(k+1, n-k) &= \frac{k!\,(n-k-1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{\frac{n!}{k!(n-k-1)!}} \\ &= \frac{1}{\frac{n(n-1)!}{k!(n-1-k)!}} \end{aligned}$$

gerçeklenip,

$$B(k+1, n-k) = \frac{1}{nC_{n-1}^k}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} V_0^{b_n}(S_n f) &\leq n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left| f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta} b_n\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \right| \frac{1}{nC_{n-1}^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta} b_n\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \right| \\ &\leq \sup \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta} b_n\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) \right| \\ &= V_0^{b_n}(f) \end{aligned}$$

sağlanır. f sınırlı salınımlı bir fonksiyon olduğundan $V_0^{b_n}(f) < \infty$ olup, $V_0^{b_n}(S_n f) < \infty$ elde edilir. O halde $S_n f$ sınırlı salınımlıdır.

Teorem 3.1.6 f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında m. mertebeden diferensiyellenebilir ve $f^{(m)} \in Lip^1(0, A)$ olsun. Bu durumda herhangi bir kapalı ve sınırlı $[0, A]$ aralığında

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d^m}{dx^m} S_n(f; x) = f^{(m)}(x)$$

düzgün olarak gerçeklenir.

İspat: $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_k\}$, $[0, A]$ aralığının bir parçalanması olsun. $f^{(m)}$ fonksiyonu $[0, A]$ aralığında Lipschitz koşulunu sağladığından

$$\left| f^{(m)}(x_{k+1}) - f^{(m)}(x_k) \right| \leq M(x_{k+1} - x_k)$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\sup_{P}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f^{(m)}\left(x_{k+1}\right)-f^{(m)}\left(x_{k}\right)\right| &\leq M\sup_{P}\sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}-x_{k}\right)\\ &= M\sup_{P}\left(x_{n}-x_{0}\right)\\ &= M.A\end{aligned}$$

olup,

$$V\left(f^{(m)}\right)\leq M.A$$

elde edilir. Bu durumda $V\left(f^{(m)}\right)<\infty$ olduğundan $f^{(m)}$ fonksiyonu sınırlı salınımlıdır.

$[0,A]$ aralığında $f^{(m)}$, sınırlı salınımlı bir fonksiyon olduğundan sınırlıdır. Yani;

$$\left|f^{(m)}\left(x\right)\right|\leq M$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır. Ayrıca $x\geq 0$ için

$$\left|f^{(m)}\left(x\right)\right|\leq M\left(1+x^{2}\right)\tag{3.1.14}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$f^{(m)}$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığında m. mertebeden diferensiyellenebilir olduğundan süreklidir. Ayrıca $f^{(m)}$ fonksiyonu (3.1.14) eşitsizliğini gerçeklediğinden Teorem 3.1.1 gereğince; $[0,A]$ aralığında $n\geq m$ için

$$\lim_{n\to\infty}S_{n-m}\left(f^{(m)};x\right)=f^{(m)}\left(x\right)\tag{3.1.15}$$

düzgün olarak gerçeklenir.

$$d_{n,m}=\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{m}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\tag{3.1.16}$$

ile tanımlansın.

(3.1.7) ifadesinin her iki yanı n^m ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}S_n(f;x) &= \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{n-(m-1)}{n}\frac{n^m}{b_n^m}\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} \\
&\quad\times\Delta^m_{\frac{b_n}{n+\beta}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{n^m}{b_n^m}\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} \\
&\quad\times\Delta^m_{\frac{b_n}{n+\beta}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)
\end{aligned}$$

olur. (3.1.16) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}S_n(f;x) &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{n^m}{b_n^m}\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} \\
&\quad\times\left(\frac{b_n}{n+\beta}\right)^m f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right) \\
&= d_{n,m}\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $0<\theta_k<1$ dir.

$$\begin{aligned}
& S_{n-m}\left(f^{(m)};x\right)-\frac{d^m}{dx^m}S_n(f;x) \\
={}& \sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n-m+\beta}\right)\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} \\
& -d_{n,m}\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right) \\
& +\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right) \\
& -\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right) \\
={}& -\left\{(d_{n,m}-1)\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)\right. \\
& +\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} \\
& \left.\times\left[f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)-f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n-m+\beta}\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \left|S_{n-m}\left(f^{(m)};x\right)-\frac{d^m}{dx^m}S_n\left(f;x\right)\right| \\
\leq\ & \left|d_{n,m}-1\right|\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k}\left|f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)\right| \\
& +\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k}\left|f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)-f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n-m+\beta}b_n\right)\right|
\end{aligned}
$$

olup, $f^{(m)}$ Lipschitz koşulunu gerçeklediğinden

$$
\begin{aligned}
& \left|f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)-f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n-m+\beta}\right)\right| \\
\leq\ & M\left|\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n-\frac{k+\alpha}{n-m+\beta}\right| \\
=\ & M\left|\frac{m}{n+\beta}b_n\left(\theta_k-\frac{1}{n-m+\beta}\right)\right|
\end{aligned}
$$

sağlanır. Ayrıca $f^{(m)}$ fonksiyonu (3.1.14) ifadesini sağladığından

$$
\left|f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)\right|\leq M\left(1+\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)^2\right)
$$

elde edilir. Burada

$$
A=1+\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)^2
$$

olmak üzere

$$
\left|f^{(m)}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n+\theta_k\frac{m}{n+\beta}b_n\right)\right|\leq MA
$$

olur.

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& \left|S_{n-m}\left(f^{(m)};x\right)-\frac{d^m}{dx^m}S_n\left(f;x\right)\right| \\
\leq\ & MA\left|d_{n,m}-1\right|\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k} \\
& +M\frac{m}{n+\beta}b_n\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k}\left|\left(\theta_k-\frac{1}{n-m+\beta}\right)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq MA\left|d_{n,m}-1\right|\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k}\\
&\quad+M\frac{m}{n+\beta}b_n\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k}\\
&\leq M\left(A\left|d_{n,m}-1\right|+\frac{m}{n+\beta}b_n\right)\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-m-k}\\
&= M\left(A\left|d_{n,m}-1\right|+\frac{m}{n+\beta}b_n\right)
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\lim_{n\to\infty}\left|S_{n-m}\left(f^{(m)};x\right)-\frac{d^m}{dx^m}S_n\left(f;x\right)\right|=0 \qquad (3.1.17)
$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d^m}{dx^m}S_n\left(f;x\right)-f^{(m)}\left(x\right)\right| &\leq \left|\frac{d^m}{dx^m}S_n\left(f;x\right)-S_{n-m}\left(f^{(m)};x\right)\right|\\
&\quad+\left|S_{n-m}\left(f^{(m)};x\right)-f^{(m)}\left(x\right)\right|
\end{aligned}
$$

olup, (3.1.15) ve (3.1.17) ifadesinden

$$
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{d^m}{dx^m}S_n\left(f;x\right)-f^{(m)}\left(x\right)\right|=0
$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.3 $[|f|]$, f sayısının tam kısmı olmak üzere

$$
\widetilde{S}_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left[\left|f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\right|\right] \qquad (3.1.18)
$$

şeklinde *tam katsayılarla genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi* tanımlanabilir.

(3.1.18) polinomlar dizisi gözönüne alındığında Lemma 2.5.1'in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.7 $\rho\left(x\right)=1+x^2$ olmak üzere $f\in C_\rho\left(\mathbb{R}\right)$ ise herhangi bir kapalı ve sınırlı $[\delta, A]$ $(0<\delta<1)$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S}_n(f;x) = f(x)$$

düzgün olarak gerçeklenir.

İspat: (3.1.1) ve (3.1.18) polinomlarının farkı

$$\begin{aligned}
S_n(f;x) - \widetilde{S}_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} \left[\left| f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) C_n^k \right|\right] \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) C_n^k - \left[\left| f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) C_n^k \right|\right]\right] \\
&\quad \times \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\{f\} = f - [|f|] \tag{3.1.19}$$

olsun.

Yukarıdaki toplam $k=0$ ve $k=n$ için açılırsa

$$\begin{aligned}
S_n(f;x) - \widetilde{S}_n(f;x) &= \left\{ f\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\right\} \left(\frac{x}{b_n}\right)^n + \left\{ f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}b_n\right)\right\} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) C_n^k \right\} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\left| S_n(f;x) - \widetilde{S}_n(f;x) \right| &\leq \left| \left\{ f\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\right\} \right| \left(\frac{x}{b_n}\right)^n + \left| \left\{ f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}b_n\right)\right\} \right| \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \left| \left\{ f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right) C_n^k \right\} \right| \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. (3.1.19) eşitliğinde $[|f|] = a$ denirse $a \leq f < a+1$ olduğundan

$\{f\} \leq 1$ olur. O halde $\forall\delta \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}
\max_{\delta\leq x\leq A}\left|S_n(f;x)-\widetilde{S}_n(f;x)\right| &\leq \max_{\delta\leq x\leq A}\left|\left\{f\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}b_n\right)\right\}\right|\left(\frac{x}{b_n}\right)^n \\
&\quad+\max_{\delta\leq x\leq A}\left|\left\{f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}b_n\right)\right\}\right|\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^n \\
&\quad+\max_{\delta\leq x\leq A}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\left\{f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\right\}\right|\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\leq \max_{\delta\leq x\leq A}\left(\frac{x}{b_n}\right)^n+\max_{\delta\leq x\leq A}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^n \\
&\quad+\max_{\delta\leq x\leq A}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\left\{f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\right\}\right|\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\leq \left(\frac{A}{b_n}\right)^n+\left(1-\frac{\delta}{b_n}\right)^n \\
&\quad+\max_{\delta\leq x\leq A}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\left\{f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\right\}\right|\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $\left\{f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\right\}$ ifadesini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
\left\{f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\right\} &= f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k-\left[\left|f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\right|\right] \\
&\leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

olup, $C_n^k \geq 1$ olduğundan

$$\left\{f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\right\} \leq \frac{1}{n}C_n^k$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\max_{\delta\leq x\leq A}\left|S_n(f;x)-\widetilde{S}_n(f;x)\right| &\leq \left(\frac{A}{b_n}\right)^n+\left(1-\frac{\delta}{b_n}\right)^n \\
&\quad+\frac{1}{n}\max_{\delta\leq x\leq A}\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\leq \left(\frac{A}{b_n}\right)^n+\left(1-\frac{\delta}{b_n}\right)^n+\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

olur. (2.4.2) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\max_{\delta\leq x\leq A}\left|S_n\left(f;x\right)-\widetilde{S}_n\left(f;x\right)\right|\leq\left(\frac{A}{b_n}\right)^n+\left(1-\frac{\delta}{b_n}\right)^n+\frac{1}{n}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq x\leq A}\left|S_n\left(f;x\right)-\widetilde{S}_n\left(f;x\right)\right| &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{A}{b_n}\right)^n+\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\delta}{b_n}\right)^n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\ &= 0 \qquad (3.1.20)\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer yandan Teorem 3.1.1 gereğince;

$$c_n=\max_{\delta\leq x\leq A}\left|S_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|$$

olacak şekilde bir (c_n) sıfır dizisi vardır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq x\leq A}\left|S_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|=0 \qquad (3.1.21)$$

olur. O halde (3.1.20) ve (3.1.21) ifadelerinden

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq x\leq A}\left|\widetilde{S}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &= \lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq x\leq A}\left|\widetilde{S}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)-S_n\left(f;x\right)+S_n\left(f;x\right)\right|\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq x\leq A}\left|\widetilde{S}_n\left(f;x\right)-S_n\left(f;x\right)\right|\\ &\quad+\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq x\leq A}\left|S_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $0<\delta<1$ olmak üzere $[\delta, A]$ aralığında istenen

$$\widetilde{S}_n\left(f;x\right)\rightrightarrows f\left(x\right)\quad\left(n\to\infty\right)$$

elde edilir.

3.2 II. Tip Genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky Polinomlar Dizisi ve Yaklaşımı

İzgi (2004) tarafından II. tip genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi tanımlanmış ve bu polinomlar dizisinin yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

Tanım 3.2.2 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif bir dizi olmak üzere

$$B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} ; \quad 0 \le x \le b_n \qquad (3.2.1)$$

şeklinde *II. tip genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi* tanımlanabilir. Burada $\alpha > 0$, $\beta > 0$ reel sayıları $\alpha + \beta = 1$ koşulunu gerçekler.

Lemma 3.2.1 (3.2.1) ile tanımlanan polinomlar dizisi

$$\begin{aligned} B_n^{\alpha,\beta}(1;x) &= 1 \\ B_n^{\alpha,\beta}(t;x) &= x \\ B_n^{\alpha,\beta}(t^2;x) &= x^2 + \beta^2 \frac{x(b_n - x)}{n} \end{aligned}$$

ifadelerini gerçekler.

İspat: $0 \le x \le b_n$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(t) = 1$ için Binom formülü kullanılarak

$$B_n^{\alpha,\beta}(1;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} = 1$$

elde edilir.

$f(t)=t$ için Binom formülü, (3.0.2) ifadesi ve $\alpha+\beta=1$ koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
B_n^{\alpha,\beta}(t;x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \alpha x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad +\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_nC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x
\end{aligned}$$

elde edilir.

$f(t)=t^2$ için Binom formülü, (3.0.2) ve (3.0.3) ifadeleri, $\alpha+\beta=1$ koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= (\alpha x)^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad +2\alpha\beta x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_nC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad +\beta^2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilip,

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right)=x^2+\beta^2\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}$$

olur.

Aşağıdaki teorem, (3.2.1) polinomlar dizisi gözönüne alındığında Lemma 2.5.1'in bir sonucu olarak verilebilir.

Teorem 3.2.1 $\rho(x)=1+x^2$ olmak üzere $f\in C_\rho(0,\infty)$ ise herhangi bir kapalı ve sınırlı $[0, A]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{\alpha,\beta}(f;x) = f(x)$$

düzgün olarak gerçeklenir.

İspat: Lemma 3.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{\alpha,\beta}(1;x) - 1 \right\|_{C(0,A)} &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{\alpha,\beta}(t;x) - x \right\|_{C(0,A)} &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_{C(0,A)} &= 0
\end{aligned}$$

olduğu açıkca görülür. Bu durumda Lemma 2.5.1'in koşulları sağlanmış olur. O halde Lemma 2.5.1 gereğince; $[0, A]$ aralığı üzerinde istenen ifade düzgün olarak gerçeklenir.

Aşağıda (3.2.1) polinomlar dizisinin $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonuna olan yaklaşım hızıyla ilgili bir teorem verelim.

Teorem 3.2.2 $\omega_f^{1+A}(\delta)$, f fonksiyonunun $[0, 1+A]$ aralığı üzerinde tanımlanan süreklilik modülü olsun. $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ ise kapalı ve sınırlı $[0, A]$ aralığı üzerinde

$$\left| B_n^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x) \right| \leq C\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliğini gerçekleyen f fonksiyonuna bağlı bir C sabiti vardır.

İspat: $x \in [0, A]$ olmak üzere

$$E_1 = \left\{ k : \alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n \geq 1 + A \right\} \text{ ve } E_2 = \left\{ k : \alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n \leq 1 + A \right\}$$

kümeleri tanımlansın.

$$
\begin{aligned}
\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right| \\
&= \left|\sum_{k\in E_1}\left[f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right. \\
&\quad \left.+\sum_{k\in E_2}\left[f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right| \\
&\le \sum_{k\in E_1}\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad +\sum_{k\in E_2}\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= I_n^{(1)}+I_n^{(2)}
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir.

$I_n^{(1)}$ ve $I_n^{(2)}$ ifadelerini ayrı ayrı gözönüne alalım.

$k\in E_1$ ve $x\in[0,A]$ için f fonksiyonunun özelliklerinden

$$
\begin{aligned}
\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right| &\le M_f\left(2+\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2+x^2\right) \\
&\le M_f\left[\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right)^2+2x\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right)\right. \\
&\quad \left.+2\left(1+x^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right|\ge 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right| &\le 2M_f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right)^2\left[4+4x+x^2\right] \\
&\le 2M_f(A+2)^2\left((\alpha-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2
\end{aligned}
$$

olup, $B=2M_f\left(A+2\right)^2$ ile gösterilirse

$$\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f\left(x\right)\right|\leq B\left(\left(\alpha-1\right)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2$$

elde edilir. O halde Lemma 3.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
I_n^{(1)} &\leq B\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\alpha-1\right)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&= B\beta^2\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}\\
&\leq B\beta^2 A\frac{b_n}{n}
\end{aligned}$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$ olduğundan yeterince büyük n değerleri için $\frac{b_n}{n}\leq\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ yazılabilir. Özellik 2.2.6'dan

$$C_f\sqrt{\frac{b_n}{n}}\leq\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\Longrightarrow\sqrt{\frac{b_n}{n}}\leq\frac{1}{C_f}\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

olacak şekilde f fonksiyonuna ve (δ_n) dizisine bağlı $C_f>0$ sayısı vardır. O halde $M=\frac{B\beta^2 A}{C_f}$ olmak üzere

$$I_n^{(1)}\leq M\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\tag{3.2.2}$$

eşitsizliği elde edilir.

$k\in E_2$ ve $x\in[0,A]$ için süreklilik modülünün özelliklerinden

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f\left(x\right)\right| &\leq \omega_f^{1+A}\left(\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right|\right)\\
&\leq \omega_f^{1+A}\left(\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right|\right]
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Lemma 3.1.1 ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$I_n^{(2)}\leq\omega_f^{1+A}\left(\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right|C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right]$$

$$\leq \omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right)^2 C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}}\right]$$
$$= \omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\beta^2\frac{x(b_n-x)}{n}}\right]$$
$$\leq \omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\beta\sqrt{A}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right]$$

olarak bulunur. $\delta_n=\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ ve $K=1+\beta\sqrt{A}$ olarak belirlenirse

$$I_n^{(2)} \leq K\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \tag{3.2.3}$$

elde edilir. Bu durumda (3.2.2) ve (3.2.3) ifadelerinden $C=M+K$ olmak üzere

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \leq C\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

istenen eşitsizlik elde edilir.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİ İLE YAKLAŞIM

R^m de Korovkin Teoremi'nin geçerliliğini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 4.0.1 $X \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı bir bölge olmak üzere eğer (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $K \subset X$ kompakt bölgesinde $n \to \infty$ için

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &\rightrightarrows 1 \\ L_n(t_i;x) &\rightrightarrows x_i \quad (i = 1, 2, ...m) \\ L_n\left(|t|^2; x\right) &\rightrightarrows |x|^2 \end{aligned}$$

şeklindeki $(m+2)$ şartı sağlıyorsa X bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için K üzerinde $n \to \infty$ iken

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f$$

gerçeklenir. Burada $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ ve $\|x\| = |x| = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ şeklindedir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

f fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı olma şartı yerine, M_f, f ye bağlı bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f\left(1 + |x|^2\right) \tag{4.0.1}$$

şartını sağlaması durumunda Teorem 4.0.1'in geçerli olduğunu aşağıdaki teorem ile ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.0.2 Eğer (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $K \subset X$ kompakt bölgesinde $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &\rightrightarrows 1 \\ L_n(t_i;x) &\rightrightarrows x_i \quad (i = 1, 2, ...m) \end{aligned}$$

$$L_n\left(|t|^2;x\right) \rightrightarrows |x|^2$$

$(m+2)$ tane koşulu sağlıyorsa X bölgesinde sürekli, reel değerli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de (4.0.1) koşulunu sağlayan f fonksiyonu için K üzerinde $n \to \infty$ iken

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f$$

gerçeklenir.

İspat: f fonksiyonu sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|x-t| < \delta$ iken her $x, t \in X$ için

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \tag{4.0.2}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$t \in \mathbb{R}^m$ ve $x \in K$ için $|t-x| \geq \delta$ olduğunda f fonksiyonu (4.0.1) eşitsizliğini sağladığından

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(t)| &\leq M_f\left(2 + |t|^2 + |x|^2\right) \\
&= M_f\left(2 + |t-x|^2 + 2x(t-x) + 2|x|^2\right) \\
&= M_f\left(2 + |t-x|^2 + 2\sum_{k=1}^{m} x_k(t_k - x_k) + 2|x|^2\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(t)| &\leq M_f\left(2 + |t-x|^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(t_k - x_k)^2} + 2|x|^2\right) \\
&= M_f\left(2 + |t-x|^2 + 2|x||t-x| + 2|x|^2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$|t-x| \geq \delta \Longrightarrow \frac{|t-x|}{\delta} \geq 1 \text{ ve } \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(t)| &\leq M_f\left(2\frac{|t-x|^2}{\delta^2}+|t-x|^2+2|x|\frac{|t-x|^2}{\delta}+2|x|^2\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right)\\
&= M_f\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\left(2+\delta^2+2\delta|x|+2|x|^2\right)\\
&\leq M_f\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\left(4+\delta^2+4\delta|x|+4|x|^2\right)\\
&= M_f\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\left((2|x|+\delta)^2+4\right)
\end{aligned}$$

olur. Burada $x\in K$ olduğundan $|x|\leq C$ olacak şekilde $C>0$ sayısı vardır. O halde yukarıdaki eşitsizlik

$$|f(x)-f(t)|\leq M_f\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\left((2C+\delta)^2+4\right)$$

şeklinde yazılabilir. $H=\frac{M_f}{\delta^2}\left((2C+\delta)^2+4\right)$ olarak alınırsa

$$|f(x)-f(t)|\leq H|t-x|^2 \tag{4.0.3}$$

elde edilir. (4.0.2) ve (4.0.3) eşitsizlikleri gözönüne alınırsa $\forall t\in\mathbb{R}^m$ ve $\forall x\in K$ için

$$|f(x)-f(t)|\leq\varepsilon+H|t-x|^2$$

yazılabilir.

Diğer yandan (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin özelliklerinden

$$\begin{aligned}
L_n(f;x)-f(x) &= L_n(f;x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)-f(x)\\
&= L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)[L_n(1;x)-1]
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
|L_n(f;x)-f(x)| &\leq |L_n(f(t)-f(x);x)|+|f(x)||L_n(1;x)-1|\\
&\leq L_n(|f(t)-f(x)|;x)+|f(x)||L_n(1;x)-1|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varepsilon + HL_n\left(|t-x|^2;x\right) + |f(x)|\,|L_n(1;x)-1| \\
&= \varepsilon + H\left[L_n\left(|t|^2;x\right) - 2\sum_{k=1}^{m} x_k L_n(t_k;x) + |x|^2 L_n(1;x)\right] \\
&\quad + |f(x)|\,|L_n(1;x)-1| \\
&= \varepsilon + H\left[\left(L_n\left(|t|^2;x\right) - |x|^2\right) - 2\sum_{k=1}^{m} x_k\left(L_n(t_k;x) - x_k\right)\right. \\
&\quad \left. + |x|^2\left(L_n(1;x)-1\right)\right] + |f(x)|\,|L_n(1;x)-1| \\
&\leq \varepsilon + H\left[\left(L_n\left(|t|^2;x\right) - |x|^2\right) - 2\sum_{k=1}^{m} x_k\left(L_n(t_k;x) - x_k\right)\right. \\
&\quad \left. + \sup_{x\in K}|x|^2\left(L_n(1;x)-1\right)\right] + \sup_{x\in K}|f(x)|\,|L_n(1;x)-1|
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$\sup_{x\in K}|x|^2 = a \text{ ve } \sup_{x\in K}|f(x)| = b$$

olmak üzere, teoremin koşullarından

$$\lim_{n\to\infty}|L_n(f(t);x) - f(x)| = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$n,m>0$, $0\leq \alpha_{k,n},\beta_{j,m}\leq 1$ ve $P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$,

$$
\begin{aligned}
P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) &= x^k(1-x)^{n-k}\,y^j(1-y)^{m-j} \\
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) &= 1
\end{aligned}
$$

koşullarını sağlayan sürekli pozitif fonksiyonlar olsun. $X\subset\mathbb{R}^2$ kompakt bir küme ve $f\in C(X)$ olmak üzere

$$T_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \tag{4.0.4}$$

dizisini ele alalım.

Teorem 4.0.3 (Volkov 1957): $\{T_{n,m}f\}$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(X)}=0 \tag{4.0.5}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(X)}=0 \tag{4.0.6}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(X)}=0 \tag{4.0.7}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^{2}+\beta_{j,m}^{2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-\left(x^{2}+y^{2}\right)\right\|_{C(X)}=0 \tag{4.0.8}$$

koşullarını gerçekliyorsa X bölgesinde sürekli, reel değerli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı her bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\|T_{n,m}f-f\|_{C(X)}=0 \tag{4.0.9}$$

ifadesi gerçeklenir.

İspat: (4.0.2) ile tanımlanan $T_{n,m}(f;x,y)$ polinomları (4.0.5)-(4.0.8) koşullarını gerçeklesin ve $f\in C(X)$ olsun.

(4.0.4) ifadesi gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-f(x,y)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-f(x,y)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(x,y)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(x,y)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\Big(f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)-f(x,y)\Big)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\Big)\\
&\quad+f(x,y)\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|T_{n,m}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right| &= \Bigg|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\Big(f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}-f\left(x,y\right)\right)P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)\Big) \\
&\quad +f\left(x,y\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)-1\right)\Bigg| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f\left(x,y\right)\right|P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right) \\
&\quad +\left|f\left(x,y\right)\right|\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)-1\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\max_{(x,y)\in X}\left|T_{n,m}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right| &\leq \max_{(x,y)\in X}\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f\left(x,y\right)\right|P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)\right| \\
&\quad +\max_{(x,y)\in X}\left|f\left(x,y\right)\right|\max_{(x,y)\in X}\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)-1\right|
\end{aligned}
$$

olup, $C\left(X\right)$ normu tanımından

$$
\begin{aligned}
\left\|T_{n,m}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right\|_{C(X)} &\leq \left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f\left(x,y\right)\right|P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)\right\|_{C(X)} \\
&\quad +\left\|f\right\|_{C(X)}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)-1\right\|_{C(X)}
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. $M>0$ için

$$
\left\|f\right\|_{C(X)}=M
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left\|T_{n,m}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right\|_{C(X)} &\leq \left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f\left(x,y\right)\right|P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)\right\|_{C(X)} \\
&\quad +M\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)-1\right\|_{C(X)} \\
&= \left\|I_{n,m}\right\|_{C(X)}+M\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right)-1\right\|_{C(X)} \quad (4.0.10)
\end{aligned}
$$

olur.

Diğer yandan $f \in C(X)$ olduğundan f fonksiyonu sınırlıdır. O halde $\forall (x,y) \in X$ için

$$|f(x,y)| \leq M$$

sağlanacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Bu durumda her $k = 0,1,...,n$ ve $j = 0,1,...,m$ için $\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right)$ noktaları X bölgesinde olduğundan

$$\left|f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right) - f(x,y)\right| \leq 2M$$

yazılabilir.

$$\mu_{k,j} = \left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right), \;\; \mu = (x,y)$$

$$\rho\left(\mu_{k,j}, \mu\right) = \sqrt{\left(\alpha_{k,n} - x\right)^2 + \left(\beta_{j,m} - y\right)^2}$$

gösterimlerini kullanalım.

f fonksiyonu kapalı X bölgesinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Düzgün süreklilik tanımı gereğince; her $\varepsilon > 0$ için $\rho\left(\mu_{k,j}, \mu\right) < \delta$ iken

$$\left|f\left(\mu_{k,j}\right) - f(\mu)\right| < \varepsilon$$

sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$\rho\left(\mu_{k,j}, \mu\right) \geq \delta$ için f fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\left|f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right) - f(x,y)\right| \leq 2M$$

gerçeklenir.

$$\frac{\rho\left(\mu_{k,j}, \mu\right)}{\delta} \geq 1$$

olmak üzere

$$\left|f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right) - f(x,y)\right| \leq 2M \frac{\rho^2\left(\mu_{k,j}, \mu\right)}{\delta^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\rho\left(\mu_{k,j}, \mu\right) < \delta \text{ ve } \rho\left(\mu_{k,j}, \mu\right) \geq \delta$$

olduğunda $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)-f\left(x,y\right)\right| < \varepsilon + 2M\frac{\rho^2\left(\mu_{k,j},\mu\right)}{\delta^2} \tag{4.0.11}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Şimdi (4.0.10) eşitsizliğindeki $I_{n,m}$ toplamını gözönüne alalım. (4.0.11) ifadesinden

$$\begin{aligned} I_{n,m} &< \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varepsilon + 2M\frac{\rho^2\left(\mu_{k,j},\mu\right)}{\delta^2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right) \\ &= \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right) + \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\rho^2\left(\mu_{k,j},\mu\right)P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right) \\ &= \varepsilon I'_{n,m} + \frac{2M}{\delta^2}I''_{n,m} \end{aligned}$$

olup, norm özelliklerinden

$$\left\|I_{n,m}\right\|_{C(X)} < \varepsilon\left\|I'_{n,m}\right\|_{C(X)} + \frac{2M}{\delta^2}\left\|I''_{n,m}\right\|_{C(X)} \tag{4.0.12}$$

şeklinde yazılabilir. $\varepsilon I'_{n,m}$ ifadesi

$$\begin{aligned} \varepsilon I'_{n,m} &= \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right) + \varepsilon - \varepsilon \\ &= \varepsilon\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right) - 1\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

olarak gözönüne alınırsa

$$\varepsilon\left\|I'_{n,m}\right\|_{C(X)} \leq \varepsilon\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}\left(x,y\right) - 1\right\|_{C(X)} + \varepsilon \tag{4.0.13}$$

olur.

$$\begin{aligned} \rho^2\left(\mu_{k,j},\mu\right) &= \left(\alpha_{k,n}-x\right)^2 + \left(\beta_{j,m}-y\right)^2 \\ &= \left(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2\right) - 2\alpha_{k,n}x - 2\beta_{j,m}y + \left(x^2+y^2\right) \end{aligned}$$

olduğundan $I''_{n,m}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
I''_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^{2}+\beta_{j,m}^{2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-2x\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \\
&\quad -2y\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)+\left(x^{2}+y^{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^{2}+\beta_{j,m}^{2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-\left(x^{2}+y^{2}\right)\right] \\
&\quad +2x\left[x-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right] \\
&\quad +2y\left[y-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right] \\
\left\|I''_{n,m}\right\|_{C(X)} &\le \left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^{2}+\beta_{j,m}^{2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-\left(x^{2}+y^{2}\right)\right\|_{C(X)} \qquad (4.0.14) \\
&\quad +2\|x\|_{C(X)}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(X)} \\
&\quad +2\|y\|_{C(X)}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(X)}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. (4.0.12) ifadesinde (4.0.13) ve (4.0.14) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|I_{n,m}\|_{C(X)} &< \varepsilon+\varepsilon\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(X)} \\
&\quad +\frac{2M}{\delta^{2}}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^{2}+\beta_{j,m}^{2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-\left(x^{2}+y^{2}\right)\right\|_{C(X)} \\
&\quad +\frac{4M}{\delta^{2}}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(X)} \\
&\quad +\frac{4M}{\delta^{2}}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(X)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (4.0.5)-(4.0.8) ifadelerinden

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right\|_{C(X)}=0$$

sonucunu verir.

Teorem 4.0.4

$$\Delta_2 = \{(k,m) : k,m \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m \geq 0, k+m \leq 2\}$$

olmak üzere keyfi $L_n : C_\rho\left(R_2^{++}\right) \to B_\rho\left(R_2^{++}\right)$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n f_{k,m} - f_{k,m}\right\|_\rho = 0; \quad (k,m) \in \Delta_2$$

koşulunu sağlar, fakat

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\|L_n f^* - f^*\right\|_\rho \geq \frac{1}{4}$$

ifadesini gerçekleyen $f^* \in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ fonksiyonu bulunur (İbikli 2005).

İspat: $f \in C_\rho\left(\mathbb{R}_2^{++}\right)$ olmak üzere

$$L_n(f;x,y) = \begin{cases} f(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[f(x+1,y+1) - f(x,y)\right] & ; \quad (x,y) \in \Delta_n \\ f(x,y) & ; \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2^{++} \diagdown \Delta_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı L_n operatörlerini gözönüne alalım.

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin $C_\rho\left(\mathbb{R}_2^{++}\right)$'dan $B_\rho\left(\mathbb{R}_2^{++}\right)$'ya bir dönüşüm olduğunu gösterelim.

$\forall f \in C_\rho\left(\mathbb{R}_2^{++}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_n(\rho;x,y) &= \rho(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[\rho(x+1,y+1) - \rho(x,y)\right] \\ &= \rho(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[1+(x+1)^2+(y+1)^2 - \left(1+x^2+y^2\right)\right] \\ &= \rho(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2} 2\left[x+y+1\right] \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $(x,y)\in\Delta_n$ olduğundan

$$L_n(\rho;x,y)\leq\rho(x,y)+\frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}2[n+1]$$

olur. $\rho(x,y)=1+x^2+y^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} L_n(\rho;x,y) &\leq \rho(x,y)+\frac{\rho(x,y)}{1+4n^2}2[n+1] \\ &= \rho(x,y)\left[1+\frac{2(n+1)}{1+4n^2}\right] \\ &\leq \rho(x,y)[1+1] \\ &= 2\rho(x,y) \end{aligned}$$

olup, (L_n) lineer pozitif operatörler dizisinin $C_\rho\left(R_2^{++}\right)$'dan $C_\rho\left(R_2^{++}\right)$'ya dönüşüm olduğu gösterilir.

Şimdi ise $(k,m)\in\Delta_2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_nf_{k,m}-f_{k,m}\right\|_\rho=0$$

olduğunu gösterelim.

$f_{0,0}(x,y)=1$ için,

$$L_n(f_{0,0};x,y)-f_{0,0}(x,y)=\frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[f_{0,0}(x+1,y+1)-f_{0,0}(x,y)\right]=0$$

olup,

$$\sup_{x\geq0,y\geq0}\frac{\left|L_n(f_{0,0};x,y)-f_{0,0}(x,y)\right|}{\rho(x,y)}=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f_{0,0};x,y)-f_{0,0}(x,y)\right\|_\rho=0$$

elde edilir.

$f_{1,0}(x,y) = x$ için,

$$\begin{aligned}
L_n(f_{1,0};x,y) - f_{1,0}(x,y) &= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[x+1-x] \\
&= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2} \\
\frac{|L_n(f_{1,0};x,y) - f_{1,0}(x,y)|}{\rho(x,y)} &= \frac{1}{1+4n^2} \\
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{|L_n(f_{1,0};x,y) - f_{1,0}(x,y)|}{\rho(x,y)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4n^2} = 0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f_{1,0};x,y) - f_{1,0}(x,y)\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$f_{0,1}(x,y) = y$ için,

$$\begin{aligned}
L_n(f_{0,1};x,y) - f_{0,1}(x,y) &= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[y+1-y] \\
&= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2} \\
\frac{|L_n(f_{1,0};x,y) - f_{1,0}(x,y)|}{\rho(x,y)} &= \frac{1}{1+4n^2} \\
\sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{|L_n(f_{0,1};x,y) - f_{0,1}(x,y)|}{\rho(x,y)} &= \frac{1}{1+4n^2} \\
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{|L_n(f_{0,1};x,y) - f_{0,1}(x,y)|}{\rho(x,y)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4n^2} = 0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f_{0,1};x,y) - f_{0,1}(x,y)\|_\rho = 0$$

elde edilir.

$f_{2,0}(x,y) = x^2$ ve $f_{0,2}(x,y) = y^2$ olmak üzere

$$g(x,y) = f_{2,0}(x,y) + f_{0,2}(x,y)$$

fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}
L_n(g;x,y) &= g(x,y)+\frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[g(x+1,y+1)-g(x,y)\right] \\
&= g(x,y)+\frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[f_{2,0}(x+1,y+1)+f_{0,2}(x+1,y+1)\right. \\
&\quad \left.-f_{2,0}(x,y)+f_{0,2}(x,y)\right] \\
L_n(g;x,y)-g(x,y) &= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[(x+1)^2+(y+1)^2-x^2-y^2\right] \\
&= 2\frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[x+y+1\right]
\end{aligned}$$

olup,

$$\frac{|L_n(g;x,y)-g(x,y)|}{\rho(x,y)}=\frac{2}{1+4n^2}\left[y+x+1\right]$$

olarak yazılabilir. $(x,y)\in\Delta_n$ olduğundan

$$\sup_{x\geq 0,y\geq 0}\frac{|L_n(g;x,y)-g(x,y)|}{\rho(x,y)}\leq\frac{2(n+1)}{1+4n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 0,y\geq 0}\frac{|L_n(g;x,y)-g(x,y)|}{\rho(x,y)}=0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f_{2,0}+f_{0,2};x,y)-(f_{2,0}(x,y)+f_{0,2}(x,y))\right\|_\rho=0$$

elde edilir. Bu durumda istenilen ifadeye ulaşılır.

$$f^*(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\cos\pi(x+y)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
|f^*(x,y)| &= \left|x^2+y^2\right|\left|\cos\pi(x+y)\right| \\
&\leq \left(x^2+y^2+1\right)
\end{aligned}$$

olup, $\rho(x,y)=(x^2+y^2+1)$ olduğundan

$$|f^*(x,y)|\leq\rho(x,y)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $f^*(x,y) \in C_\rho\left(\mathbb{R}_2^{++}\right)$ olur.

$$
\begin{aligned}
L_n(f^*;x,y) - f^*(x,y) &= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[f^*(x+1,y+1) - f^*(x,y)\right] \\
&= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\Big[\left((x+1)^2+(y+1)^2\right)\cos\pi(x+y+2) \\
&\quad - \left(x^2+y^2\right)\cos\pi(x+y)\Big] \\
&= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\Big[\left((x+1)^2+(y+1)^2\right)\cos\pi(x+y)\cos 2\pi \\
&\quad - \left((x+1)^2+(y+1)^2\right)\sin\pi(x+y)\sin 2\pi \\
&\quad - \left(x^2+y^2\right)\cos\pi(x+y)\Big] \\
&= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\Big[\left((x+1)^2+(y+1)^2\right)\cos\pi(x+y) \\
&\quad - \left(x^2+y^2\right)\cos\pi(x+y)\Big] \\
&= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left[\left((x+1)^2+(y+1)^2-x^2-y^2\right)\cos\pi(x+y)\right] \\
&= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\Big\{\left[(x+y)^2-2xy-(x-1)^2-(y-1)^2\right] \\
&\quad \times \cos\pi(x+y)\Big\} \\
&\geq \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\left\{\left[-2xy-(x-1)^2-(y-1)^2\right]\cos\pi(x+y)\right\}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. $(x,y) \in \Delta_n$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{\left|L_n(f^*;x,y) - f^*(x,y)\right|}{\rho(x,y)} &\geq \frac{1}{1+4n^2}\left|-2xy-(x-1)^2-(y-1)^2\right|\left|\cos\pi(x+y)\right| \\
&= \frac{1}{1+4n^2}\left[2xy+(x-1)^2+(y-1)^2\right]\left|\cos\pi(x+y)\right| \\
&\geq \frac{1}{1+4n^2}\left[2xy+\left(\frac{x}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y}{2}-1\right)^2\right]\left|\cos\pi(x+y)\right| \\
\sup_{x\geq 0, y\geq 0}\frac{\left|L_n(f^*;x,y) - f^*(x,y)\right|}{\rho(x,y)} &\geq \frac{2n^2-2n+2}{1+4n^2}
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 0, y\geq 0}\frac{\left|L_n(f^*;x,y) - f^*(x,y)\right|}{\rho(x,y)} \geq \frac{1}{2}
$$

elde edilir. Bu da $f^*(x,y) \in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ fonksiyonu için yakınsaklığın gerçeklenmediğini gösterir.

5. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLAR DİZİSİ İLE YAKLAŞIM

5.1 Üçgensel Bölgede İki Değişkenli Bernstein-Chlodowsky Tipi Polinomlar Dizisi ve Yaklaşımı

İbikli (2005) tarafından üçgensel bölgede iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi tanımlanmış ve bu polinomların bazı yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

Tanım 5.1.1 (b_n), aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisi olsun.

Herhangi bir $a > 0$ sayısı için Δ_a ile

$$\Delta_a = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a\}$$

üçgensel bölgesini tanımlayalım. $a = b_n$ durumundaki üçgensel bölgeyi Δ_{b_n} ile gösterelim.

$(x,y) \in \Delta_{b_n}$ olmak üzere iki değişkenli bir f fonksiyonu için Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar

$$\begin{aligned} B_n^{**}(f;x,y) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} f\left(\frac{k-j}{n}b_n, \frac{j}{n}b_n\right) \\ &\quad \times C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Δ_{b_n} üçgensel bölgesi üzerinde sonsuz mertebeden diferensiyellenebilir

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

fonksiyonuna (5.1.1) ile tanımlanan polinomlar dizisi ile yaklaşım yapalım.

Gerçekten;

$$\begin{aligned}
B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y) &= x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} + y^2 + \frac{y(b_n - y)}{n} - x^2 - y^2 \\
&= \frac{x(b_n - x)}{n} + \frac{y(b_n - y)}{n} \\
\max_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \left| B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y) \right| &= \max_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \left\{ \frac{x(b_n - x)}{n} + \frac{y(b_n - y)}{n} \right\} \\
&= \frac{b_n^2}{2n}
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \left| B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y) \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{2n} = \infty$$

elde edilir. Bu da yakınsaklığın gerçeklenmediğini ortaya koyar.

Eğer yeterince büyük n değeri için Δ_{b_n} üçgeni herhangi bir Δ_a üçgenini oluşturursa Δ_{b_n} üçgeninin herhangi bir kapalı alt kümesinde

$$|f(x,y)| \leq M_f \left(1 + x^2 + y^2\right)$$

koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonlara (5.1.1) polinomlar dizisi ile yaklaşım gerçeklenir. Bunu aşağıdaki teorem ile verelim. Ayrıca bu teorem Teorem 4.2'nin bir sonucu olarak verilebilir.

Teorem 5.1.1 $a > 0$ keyfi sabit sayı olsun. $f \in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ ise Δ_a bölgesi üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y) \right\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

gerçeklenir.

İspat: k ve m pozitif tamsayılar olmak üzere

$$f_{k,m}\left(t;\tau\right)=t^{k}\tau^{m}$$

olsun.

$$B_n^{**}\left(f_{0,0};x,y\right)=1 \tag{5.1.2}$$

$$B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)=x \tag{5.1.3}$$

$$B_n^{**}\left(f_{0,1};x,y\right)=y \tag{5.1.4}$$

$$B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right)=x^2+\frac{x\left(b_n-x\right)}{n} \tag{5.1.5}$$

$$B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)=y^2+\frac{y\left(b_n-y\right)}{n} \tag{5.1.6}$$

ifadelerinin varlığını gösterelim.

$f_{0,0}\left(t;\tau\right)=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
B_n^{**}\left(f_{0,0};x,y\right) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}\\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}\\
&= \left(1-\frac{x+y}{b_n}+\frac{x+y}{b_n}\right)^{n}\\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

$f_{1,0}\left(t;\tau\right)=t$ olmak üzere

$$B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{k-j}{n}b_n\right) C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{k}{n}b_n\right) \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n}b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n}b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= I_1 - I_2
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi sırayla I_1 ve I_2 ifadesini hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= b_n \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&= b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&= b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&= b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&= b_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k+1} \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&= x+y
\end{aligned}
$$

olur.

I_2 ifadesi için

$$
I_2' = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n}b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}
$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
I_2' &= \frac{b_n}{n}\sum_{j=0}^{k} jC_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}\\
&= \frac{b_n}{n}\sum_{j=1}^{k} jC_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}\\
&= \frac{b_n}{n}\sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}\\
&= \frac{b_n}{n}\sum_{j=1}^{k} \frac{k}{k}\frac{k!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}\\
&= \frac{b_n}{n}k\sum_{j=1}^{k} \frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}\\
&= \frac{b_n}{n}k\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j+1}\\
&= \frac{b_n}{n}k\left(\frac{y}{b_n}\right)\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}\\
&= \frac{k}{n}y\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

olur. I_2' ifadesi I_2 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}yC_n^k\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\\
&= y\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\\
&= y\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_n^k\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\\
&= y\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\\
&= y\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\\
&= y
\end{aligned}$$

bulunur. I_1 ve I_2 ifadeleri $B_n^{**}(f_{1,0};x,y)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_n(f_{1,0};x,y) = x+y-y = x$$

olup, istenen ifade elde edilir.

$f_{0,1}(t;\tau) = \tau$ olmak üzere,

$$B_n^{**}(f_{0,1};x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n}b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$B_n^{**}(f_{0,1};x,y) = I_2$$

olduğundan

$$B_n^{**}(f_{0,1};x,y) = y$$

olur. O halde istenen ifade elde edilir.

$f_{2,0}(t;\tau) = t^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
B_n^{**}(f_{2,0};x,y) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{k-j}{n}b_n\right)^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&\quad -2\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} (kj)\left(\frac{b_n}{n}\right)^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&\quad +\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n}b_n\right)^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= P_1 - 2P_2 + P_3
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Eşitliğin sağ tarafındaki P_1, P_2, P_3 ifadelerini sırasıyla hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
P_1 &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^j \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k \\
&= b_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k \\
&= b_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k \\
&= b_n^2\left(\frac{x+y}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= b_n^2\left(\frac{x+y}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)+1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= b_n^2\left(\frac{x+y}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&\quad +b_n^2\left(\frac{x+y}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= b_n^2\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^2\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2} \\
&\quad +b_n^2\left(\frac{x+y}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= \frac{(x+y)^2}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-2)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2} \\
&\quad +b_n\left(\frac{x+y}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= \frac{(x+y)^2}{n}(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k \\
&\quad +b_n\left(\frac{x+y}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k \\
&= \frac{n-1}{n}(x+y)^2+\frac{b_n}{n}(x+y)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$P_2=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}k\left(\frac{b_n}{n}\right)^2\sum_{j=0}^{k}jC_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

olarak yazılabilir. Burada

$$P_2^{'}=\sum_{j=0}^{k}jC_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
P_2^{'} &= \sum_{j=1}^{k}jC_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^j\\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{k!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^j\\
&= k\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^j\\
&= k\left(\frac{y}{b_n}\right)\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j-1}\\
&= k\left(\frac{y}{b_n}\right)\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-1}^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1}\left(\frac{y}{b_n}\right)^j\\
&= k\left(\frac{y}{b_n}\right)\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade P_2 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_2 &= \sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}k\left(\frac{b_n}{n}\right)^2k\left(\frac{y}{b_n}\right)\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\\
&= \frac{b_n}{n^2}y\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\\
&= \frac{b_n}{n}y\sum_{k=1}^{n}k\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\\
&= \frac{b_n}{n}y\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,C_{n-1}^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b_n}{n} y \sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^{k} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&\quad + \frac{b_n}{n} y \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&= \frac{b_n}{n} y \sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^{k} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} + \frac{b_n}{n} y \\
&= \frac{b_n}{n} y \sum_{k=1}^{n-1} k C_{n-1}^{k} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} + \frac{b_n}{n} y \\
&= \frac{n-1}{n} b_n y \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(n-k-1)!\,(k-1)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} + \frac{b_n}{n} y \\
&= \frac{n-1}{n} b_n y \left(\frac{x+y}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-2} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} + \frac{b_n}{n} y \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right) y\,(x+y) + \frac{b_n}{n} y
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

$$
P_3 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{b_n}{n}\right)^2 \sum_{j=0}^{k} j^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}
$$

olmak üzere

$$
P_3^{'} = \sum_{j=0}^{k} j^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}
$$

ifadesini gözönüne alalım.

$$
\begin{aligned}
P_3^{'} &= \sum_{j=1}^{k} j^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= \sum_{j=1}^{k} j \frac{k!}{(k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= k \sum_{j=1}^{k} j \frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= k \sum_{j=1}^{k} \left[(j-1)+1\right] \frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= k\sum_{j=2}^{k}(j-1)\frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&\quad +k\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= k\sum_{j=2}^{k}\frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-2)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&\quad +k\frac{y}{b_n}\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j-1} \\
&= k\,(k-1)\sum_{j=2}^{k}\frac{(k-2)!}{(k-j)!\,(j-2)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&\quad +k\frac{y}{b_n}\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-1}^{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j} \\
&= k\,(k-1)\left(\frac{y}{b_n}\right)^{2}\sum_{j=0}^{k-2}C_{k-2}^{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-2}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j-2}+k\frac{y}{b_n}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= k\,(k-1)\left(\frac{y}{b_n}\right)^{2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}+k\frac{y}{b_n}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

olur. Bu ifade P_3 de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
P_3 &= \sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{b_n}{n}\right)^{2}\left\{k\,(k-1)\left(\frac{y}{b_n}\right)^{2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}\right. \\
&\quad \left.+\,k\frac{y}{b_n}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\right\} \\
&= \left(\frac{y}{n}\right)^{2}\sum_{k=0}^{n}k\,(k-1)\,C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2} \\
&\quad +\frac{b_n}{n^2}y\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= \left(\frac{y}{n}\right)^{2}\sum_{k=2}^{n}k\,(k-1)\,C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2} \\
&\quad +\frac{b_n}{n^2}y\sum_{k=1}^{n}kC_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{y^2}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-2)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2} \\
&\quad +\frac{b_n}{n}y\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= \frac{n-1}{n}y^2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&\quad +\frac{b_n}{n}y\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k} \\
&= \frac{n-1}{n}y^2+\frac{b_n}{n}y
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Hesaplanan P_1, P_2 ve P_3 ifadeleri $B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right) &= \frac{n-1}{n}\left(x+y\right)^2+\frac{b_n}{n}\left(x+y\right)-2\left(\frac{n-1}{n}\right)y\left(x+y\right)-2\frac{b_n}{n}y \\
&\quad +\frac{n-1}{n}y^2+\frac{b_n}{n}y \\
&= x^2+\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da istenen eşitliktir.

$f_{0,2}\left(t;\tau\right)=\tau^2$ olmak üzere

$$
B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)^2C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}
$$

ifadesini hesaplayalım.

$$
B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)=P_3
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right) &= \frac{n-1}{n}y^2+\frac{b_n}{n}y \\
&= y^2-\frac{1}{n}y^2+\frac{b_n}{n}y \\
&= y^2+\frac{y\left(b_n-y\right)}{n}
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. Bu da istenilen ifadedir.

(5.1.2) ifadesi kullanılarak

$$B_n^{**}\left(f_{0,0};x,y\right)-f_{0,0}\left(x,y\right)=0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{**}\left(f_{0,0};x,y\right)-f_{0,0}\left(x,y\right)\right\|_{C(\Delta_a)}=0$$

gerçeklenir.

(5.1.3) ifadesi kullanılarak

$$B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)-f_{1,0}\left(x,y\right)=0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)-f_{1,0}\left(x,y\right)\right\|_{C(\Delta_a)}=0$$

gerçeklenir.

(5.1.4) ifadesi kullanılarak

$$B_n^{**}\left(f_{0,1};x,y\right)-f_{0,1}\left(x,y\right)=0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{**}\left(f_{0,1};x,y\right)-f_{0,1}\left(x,y\right)\right\|_{C(\Delta_a)}=0$$

gerçeklenir.

(5.1.5) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right)-f_{2,0}\left(x,y\right) &= x^2+\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}-x^2\\ &= \frac{x\left(b_n-x\right)}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{(x,y)\in\Delta_a}\left|B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right)-f_{2,0}\left(x,y\right)\right| &= \max_{(x,y)\in\Delta_a}\frac{x\left(b_n-x\right)}{n} \\
&= \frac{a\left(b_n-\frac{a}{2}\right)}{2n}
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right)-f_{2,0}\left(x,y\right)\right\|_{C(\Delta_a)}=0$$

gerçeklenir.

(5.1.6) ifadesi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}\left(x,y\right) &= y^2+\frac{y\left(b_n-y\right)}{n}-y^2 \\
&= \frac{y\left(b_n-y\right)}{n} \\
\max_{(x,y)\in\Delta_a}\left|B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}\left(x,y\right)\right| &= \max_{(x,y)\in\Delta_a}\frac{y\left(b_n-y\right)}{n} \\
&= \frac{a\left(b_n-\frac{a}{2}\right)}{2n}
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}\left(x,y\right)\right\|_{C(\Delta_a)}=0$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 4.3'ün tüm koşulları gerçeklenir. O halde Teorem 4.3 gereğince; $f\in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{**}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right\|_{C(\Delta_a)}=0$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem, sınırsız Δ_{b_n} bölgesi üzerinde (5.1.1) polinomlar dizisi ile özel bir yaklaşımın varlığını ortaya koyar.

Teorem 5.1.2 $\forall\alpha>0$ için $f\in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}}\frac{\left|B_n^{**}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\alpha}}=0$$

gerçeklenir.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için $x + y > a$ olmak üzere

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} < \varepsilon \tag{5.1.7}$$

eşitsizliğini gerçekleyen yeterince büyük $\alpha > 0$ sayısı seçilebilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

olduğundan (b_n) dizisi sınırlıdır. O halde

$$\frac{b_n}{n} < C$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\alpha}} &\leq \sup_{(x,y)\in\Delta_a} \frac{\left|B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\alpha}} \\
&\quad + \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_a} \frac{\left|B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\alpha}} \\
&\leq \sup_{(x,y)\in\Delta_a} \left|B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right| \\
&\quad + \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_a} \frac{\left|B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\alpha}} \\
&= I_n^1(f) + I_n^2(f)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 5.1.1 gereğince;

$$\lim_{n\to\infty} I_n^1(f) = 0$$

olur.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\left|B_n^{**}(f;x,y)\right| &\leq B_n^{**}(|f|;x,y) \\
&\leq B_n^{**}\left(M_f\left(1+t^2+\tau^2\right);x,y\right) \\
&= M_f\left\{B_n^{**}(1;x,y)+B_n^{**}\left(t^2;x,y\right)+B_n^{**}\left(\tau^2;x,y\right)\right\} \\
&= M_f\left\{1+x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}+y^2+\frac{y(b_n-y)}{n}\right\} \\
&= M_f\left\{1+x^2+y^2+\frac{x(b_n-x)+y(b_n-y)}{n}\right\} \\
&= M_f\left\{1+x^2+y^2+\frac{b_n}{n}(x+y)-\frac{x^2+y^2}{n}\right\} \\
&\leq M_f\left\{1+x^2+y^2+C(x+y)-\frac{x^2+y^2}{n}\right\} \\
&\leq M_f\left\{1+x^2+y^2+2C\left(x^2+y^2+1\right)\right\} \\
&\leq M_f(1+2C)\left(x^2+y^2+1\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$$M_f' = M_f(1+2C)$$

denirse

$$\left|B_n^{**}(f;x,y)\right| \leq M_f'\left(x^2+y^2+1\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
I_n^2(f) &= \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_\alpha} \frac{\left|B_n^{**}(f;x,y)-f(x,y)\right|}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\alpha}} \\
&\leq \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_\alpha} \frac{\left|B_n^{**}(f;x,y)\right|+|f(x,y)|}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\alpha}} \\
&\leq \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_\alpha} \left\{\frac{M_f'\left(x^2+y^2+1\right)+M_f\left(1+x^2+y^2\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\alpha}}\right\} \\
&= \left(M_f'+M_f\right)\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_\alpha} \frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\alpha}}
\end{aligned}$$

olur. (5.1.7) ifadesinden $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall\alpha>0$ için

$$I_n^2(f) \leq \left(M_f'+M_f\right)\varepsilon^\alpha$$

gerçeklenir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} I_n^2(f) = 0$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{(1+x^2+y^2)^{1+\alpha}} &\leq \lim_{n\to\infty} \left\{ I_n^1(f) + I_n^2(f) \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} I_n^1(f) + \lim_{n\to\infty} I_n^2(f) \\ &= 0\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{(1+x^2+y^2)^{1+\alpha}} = 0$$

ifadesi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$\alpha = 0$ olması durumunda (5.1.1) polinomlar dizisi yalnızca Teorem 4.4'ün koşullarını gerçekler, fakat $f \in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ fonksiyonuna yakımsamayı gerçeklemez. Bunu aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 5.1.3 $f_{k,m}(x,y) = x^k y^m$ olmak üzere (5.1.1) ile tanımlanan iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi, $(k,m) \in \Delta_2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}(f_{k,m};x,y) - f_{k,m}(x,y)\right|}{1+x^2+y^2} = 0$$

ifadesini gerçekler.

İspat: $k = m = 0$ olmak üzere (5.1.2) ifadesi ve $f_{0,0}(x,y) = 1$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}B_n^{**}(f_{0,0};x,y) - f_{0,0}(x,y) &= 0 \\ \frac{\left|B_n^{**}(f_{0,0};x,y) - f_{0,0}(x,y)\right|}{1+x^2+y^2} &= 0 \\ \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}(f_{0,0};x,y) - f_{0,0}(x,y)\right|}{1+x^2+y^2} &= 0\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}}\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{0,0};x,y\right)-f_{0,0}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2}=0$$

olur.

$k=1$, $m=0$ olmak üzere (5.1.3) ifadesi ve $f_{1,0}\left(x,y\right)=x$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)-f_{1,0}\left(x,y\right) &= 0\\
\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)-f_{1,0}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} &= 0\\
\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}}\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)-f_{1,0}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} &= 0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}}\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)-f_{1,0}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2}=0$$

olur.

$k=0$, $m=1$ olmak üzere (5.1.4) ifadesi ve $f_{0,1}\left(x,y\right)=y$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
B_n^{**}\left(f_{0,1};x,y\right)-f_{0,1}\left(x,y\right) &= 0\\
\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{0,1};x,y\right)-f_{0,1}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} &= 0\\
\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}}\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{0,1};x,y\right)-f_{0,1}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} &= 0
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}}\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{0,1};x,y\right)-f_{0,1}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2}=0$$

olur.

$k=2$, $m=0$ olmak üzere (5.1.5) ifadesi ve $f_{2,0}\left(x,y\right)=x^2$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right)-f_{2,0}\left(x,y\right) &= x^2+\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}-x^2\\
&= \frac{x\left(b_n-x\right)}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right)-f_{2,0}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} &= \frac{x\left(b_n-x\right)}{n\left(1+x^2+y^2\right)} \\
&\leq \frac{\left(b_n-x\right)}{n} \\
\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right)-f_{2,0}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} &\leq \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left(b_n-x\right)}{n} \\
&\leq \frac{b_n}{n}
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right)-f_{1,0}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

elde edilir.

$k=0$, $m=2$ olmak üzere (5.1.6) ifadesi ve $f_{2,0}\left(x,y\right)=y^2$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}\left(x,y\right) &= y^2+\frac{y\left(b_n-y\right)}{n}-y^2 \\
&= \frac{y\left(b_n-y\right)}{n} \\
\frac{\left|B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} &= \frac{y\left(b_n-y\right)}{n\left(1+x^2+y^2\right)} \\
&\leq \frac{\left(b_n-y\right)}{n} \\
\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} &\leq \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left(b_n-y\right)}{n} \\
&\leq \frac{b_n}{n}
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}\left(x,y\right)\right|}{1+x^2+y^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanır.

5.2 Karesel Bölgede İki Değişkenli Bernstein-Chlodowsky Tipi Polinomlar Dizisi ve Yaklaşımı

Aşağıda vereceğimiz karesel bölgede iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisinin tanımı ve yaklaşım özellikleri, İzgi (2004) tarafından araştırılmıştır.

(b_n) sayı dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisi olsun.

$0 \leq x \leq b_n$ olmak üzere

$$P_{n,k}(x) = C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$\Phi_{n,m}^{k,j}(x,y) = P_{n,k}(x) P_{m,j}(y)$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) = 1,\ \sum_{j=0}^{m} P_{m,j}(y) = 1 \tag{5.2.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \Phi_{n,m}^{k,j}(x,y) = 1 \tag{5.2.2}$$

şeklinde tanımlansın.

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f\left(\alpha_1 x + \beta_1 \frac{k}{n} b_n, \alpha_2 y + \beta_2 \frac{j}{m} b_m\right) \Phi_{n,m}^{k,j}(x,y) \tag{5.2.3}$$

ile *iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisini* verelim. Burada $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i = 1$; $i = 1, 2$ şeklindedir.

Lemma 5.2.1 (5.2.3) ile tanımlanan polinomlar dizisi

$$B_{n,m}(1;x,y) = 1 \tag{5.2.4}$$

$$B_{n,m}(t_1;x,y) = x \tag{5.2.5}$$

$$B_{n,m}(t_2;x,y) = y \tag{5.2.6}$$

$$B_{n,m}\left(t_1^2 + t_2^2;x,y\right) = x^2 + y^2 + \beta_1^2 \frac{x(b_n - x)}{n} + \beta_2^2 \frac{y(b_m - y)}{m} \tag{5.2.7}$$

ifadelerini gerçekler.

İspat: $t_1,\, t_2 \in [0, b_n]$ olmak üzere

$f(t_1, t_2) = 1$ için (5.2.2) kullanılarak

$$B_{n,m}(1; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \Phi_{n,m}^{k,j}(x, y) = 1$$

elde edilir.

$f(t_1, t_2) = t_1$ için (5.2.1) ve $B_n^{\alpha,\beta}(t; x) = x$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} B_{n,m}(t_1; x, y) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\alpha_1 x + \beta_1 \frac{k}{n} b_n \right) \Phi_{n,m}^{k,j}(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha_1 x + \beta_1 \frac{k}{n} b_n \right) P_{n,k}(x) \sum_{j=0}^{m} P_{m,j}(y) \\ &= x \end{aligned}$$

elde edilir.

$f(t_1, t_2) = t_2$ için (5.2.1) ve $B_n^{\alpha,\beta}(1; y) = y$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} B_{n,m}(t_2; x, y) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\alpha_2 y + \beta_2 \frac{j}{m} b_m \right) \Phi_{n,m}^{k,j}(x, y) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \left(\alpha_2 y + \beta_2 \frac{j}{m} b_m \right) P_{m,j}(y) \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \\ &= y \end{aligned}$$

elde edilir.

$f(t_1, t_2) = t_1^2 + t_2^2$ için $B_n^{\alpha,\beta}(t^2; x) = x^2 + \beta^2 \frac{x(b_n - x)}{n}$ eşitliği kullanılarak

$$B_{n,m}\left(t_1^2 + t_2^2; x, y\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left[\left(\alpha_1 x + \beta_1 \frac{k}{n} b_n \right)^2 + \left(\alpha_2 y + \beta_2 \frac{j}{m} b_m \right)^2 \right] \Phi_{n,m}^{k,j}(x, y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_1 x+\beta_1\frac{k}{n}b_n\right)^2 P_{n,k}(x)+\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_2 y+\beta_2\frac{j}{m}b_m\right)^2 P_{m,j}(y)\\
&= x^2+y^2+\beta_1^2\frac{x(b_n-x)}{n}+\beta_2^2\frac{y(b_m-y)}{m}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda istenen ifadeler elde edilmiş olur.

Aşağıdaki teorem, (5.2.3) polinomlar dizisi gözönüne alındığında Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'ün bir sonucu olarak verilebilir.

Teorem 5.2.3 $D_{ab}=[0,a]\times[0,b]$ olmak üzere $f\in C_b(D_{ab})$ ve $f\in C_\rho(D_{ab})$ ise D_{ab} üzerinde

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} B_{n,m}(f;x,y)=f(x,y)$$

eşitliği düzgün olarak gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.2.1 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\left\|B_{n,m}(1;x,y)-1\right\|_{C(D_{ab})} &= 0\\
\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\left\|B_{n,m}(t_1;x,y)-x\right\|_{C(D_{ab})} &= 0\\
\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\left\|B_{n,m}(t_2;x,y)-y\right\|_{C(D_{ab})} &= 0\\
\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\left\|B_{n,m}\left(t_1^2+t_2^2;x,y\right)-\left(x^2+y^2\right)\right\|_{C(D_{ab})} &= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Teorem 4.0.3 gereğince $f\in C_b(D_{ab})$ için ispat gerçeklenir. Teorem 4.0.2 gereğince de $f\in C_\rho(D_{ab})$ için ispat tamamlanır.

Şimdi (5.2.3) polinomlar dizisinin $f\in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ fonksiyonuna olan yaklaşım hızıyla ilgili bir teorem verelim.

Teorem 5.2.4 $f\in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ ise $\forall(x,y)\in D_{ab}$ olmak üzere yeterince büyük n ve

m değerleri için

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq C\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}+\frac{b_m}{m}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat: (5.2.3) polinomlar dizisi için

$$U_n^k(t)=\alpha_1 t+\beta_1\frac{k}{n}b_n \text{ ve } V_m^j(t)=\alpha_2 t+\beta_2\frac{j}{m}b_m$$

kısaltmalarını kullanalım. $(x,y)\in D_{ab}$ için $A^{'}=1+A$ ve $B^{'}=1+B$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{(k,j):U_n^k(x)\geq A^{'},V_m^j(y)\geq B^{'}\right\}\\
E_2 &= \left\{(k,j):U_n^k(x)\leq A^{'},V_m^j(y)\geq B^{'}\right\}\\
E_3 &= \left\{(k,j):U_n^k(x)\geq A^{'},V_m^j(y)\leq B^{'}\right\}\\
E_4 &= \left\{(k,j):U_n^k(x)\leq A^{'},V_m^j(y)\leq B^{'}\right\}
\end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Tanımlanan kümeler yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| &\leq \sum_{\substack{k=0\\(k,j)\in E_1}}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(U_n^k(x),V_m^j(y)\right)-f(x,y)\right|\Phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\\
&\quad+\sum_{\substack{k=0\\(k,j)\in E_2}}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(U_n^k(x),V_m^j(y)\right)-f(x,y)\right|\Phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\\
&\quad+\sum_{\substack{k=0\\(k,j)\in E_3}}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(U_n^k(x),V_m^j(y)\right)-f(x,y)\right|\Phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\\
&\quad+\sum_{\substack{k=0\\(k,j)\in E_4}}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(U_n^k(x),V_m^j(y)\right)-f(x,y)\right|\Phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\\
&= I_{n,m}^{(1)}+I_{n,m}^{(2)}+I_{n,m}^{(3)}+I_{n,m}^{(4)}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi $I_{n,m}^{(1)}, I_{n,m}^{(2)}, I_{n,m}^{(3)}, I_{n,m}^{(4)}$ ifadelerini sıra ile ele alalım.

$I_{n,m}^{(1)}$ için $f \in C_\rho\left(R_2^{++}\right)$ olup, $|f(x,y)| \leq M_f\left(1+x^2+y^2\right)$ koşulu sağlandığından

$$\begin{aligned}
\left|f\left(U_n^k(x), V_m^j(y)\right) - f(x,y)\right| &\leq M_f\left[2+\left(U_n^k(x)\right)^2+\left(V_m^j(y)\right)^2\right] \\
&\leq M_f\left[2+\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right. \\
&\quad + 2x\left(U_n^k(x)-x\right)+2y\left(V_m^j(y)-y\right) \\
&\quad \left. + 2\left(x^2+y^2\right)\right] \\
&\leq M_f\left[2+\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right. \\
&\quad + 2x\left|U_n^k(x)-x\right|+2y\left|V_m^j(y)-y\right| \\
&\quad \left. + 2\left(x^2+y^2\right)\right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. $(x,y) \in D_{ab}$ ve $(k,j) \in E_1$ için

$$\left|U_n^k(x)-x\right| \geq 1 \quad \text{ve} \quad \left|V_m^j(y)-y\right| \geq 1 \tag{5.2.8}$$

olduğundan

$$\left|U_n^k(x)-x\right| \leq \left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2 \tag{5.2.9}$$

$$\left|V_m^j(y)-y\right| \leq \left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2 \tag{5.2.10}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\left|f\left(U_n^k(x), V_m^j(y)\right) - f(x,y)\right| &\leq M_f\left\{\left[2\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right]\right. \\
&\quad + \left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2 \\
&\quad + 2x\left[\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right] \\
&\quad + 2y\left[\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right] \\
&\quad \left. + 2\left(x^2+y^2\right)\left[\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M_f\left[3+2x+2y+2\left(x^2+y^2\right)\right]\\
&\quad\times\left[\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right]\\
&\leq 4M_f(2x+2y+1)^2\left[\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right]\\
&\leq 4M_f(2a+2b+1)^2\left[\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $C_1=4M_f(2a+2b+1)^2$ denirse

$$
\left|f\left(U_n^k(x),V_m^j(y)\right)-f(x,y)\right|\leq C_1\left[\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right] \tag{5.2.11}
$$

elde edilir.

Lemma 4.2.1 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\left(U_n^k(x)-x\right)^2+\left(V_m^j(y)-y\right)^2\right]\Phi_{n,m}^{k,j}(x,y) &= \beta_1^2\frac{x(b_n-x)}{n}+\beta_2^2\frac{y(b_m-y)}{m}\\
&\leq \beta_1^2a\frac{b_n}{n}+\beta_2^2b\frac{b_m}{m}\\
&\leq \left(\beta_1^2a+\beta_2^2b\right)\left(\frac{b_n}{n}+\frac{b_m}{m}\right)
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $C_2=C_1\left(\beta_1^2a+\beta_2^2b\right)$ denirse

$$
I_{n,m}^{(1)}\leq C_2\left(\frac{b_n}{n}+\frac{b_m}{m}\right)
$$

elde edilir.

$I_{n,m}^{(2)}$ için $(x,y)\in D_{ab}$ ve $(k,j)\in E_2$ olmak üzere (5.2.8) geçerli olduğundan (5.2.9) ve (5.2.10) eşitsizlikleri sağlanır. Bu durumda (5.2.11) ifadesi yine geçerli olup,

$$
I_{n,m}^{(2)}\leq C_2\left(\frac{b_n}{n}+\frac{b_m}{m}\right)
$$

elde edilir.

$I_{n,m}^{(3)}$ için $(x,y)\in D_{ab}$ ve $(k,j)\in E_3$ olmak üzere $(5.2.8)$, $(5.2.9)$, $(5.2.10)$ eşitsizlikleri geçerli olup, (5.2.11) ifadesi sağlandığından

$$I_{n,m}^{(3)} \leq C_2 \left(\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m} \right)$$

elde edilir. Bu durumda

$$I_{n,m}^{(1)} + I_{n,m}^{(2)} + I_{n,m}^{(3)} \leq 3C_2 \left(\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m} \right)$$

yazılabilir. $\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m} \to 0$ $(n, m \to \infty)$ olduğundan yeterince büyük n ve m değerleri için $\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m} \leq \sqrt{\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m}}$ olur. Tam süreklilik modülünün 2.2.6 özelliğinden C_f, f fonksiyonu ve $\sqrt{\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m}}$ ifadesine bağlı olmak üzere

$$\omega_2 \left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m}} \right) \leq C_f \sqrt{\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m}}$$

yazılabilir. Buradan

$$I_{n,m}^{(1)} + I_{n,m}^{(2)} + I_{n,m}^{(3)} \leq 3 \frac{C_2}{C_f} \omega_2 \left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n} + \frac{b_m}{m}} \right)$$

elde edilir.

$I_{n,m}^{(4)}$ için $(x, y) \in D_{ab}$ ve $(k, j) \in E_4$ olsun. Tam süreklilik modülünün özelliklerinden

$$\left| f\left(U_n^k(x), V_m^j(y)\right) - f(x, y) \right| \leq \omega_2 (f; \delta_{n,m}) \left[1 + \frac{1}{\delta_{n,m}} \sqrt{\left(U_n^k(x) - x\right)^2 + \left(V_m^j(y) - y\right)^2} \right]$$

eşitsizliği yazılabilir. Cauchy-Schwartz eşitsizliği ve Lemma 4.2.1 kullanarak

$$\begin{aligned} I_{n,m}^{(4)} &\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ \omega_2 (f; \delta_{n,m}) \left[1 + \frac{1}{\delta_{n,m}} \sqrt{\left(U_n^k(x) - x\right)^2 + \left(V_m^j(y) - y\right)^2} \right] \right\} \\ &\quad \times \Phi_{n,m}^{k,j}(x, y) \\ &= \omega_2 (f; \delta_{n,m}) \left[1 + \frac{1}{\delta_{n,m}} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sqrt{\left(U_n^k(x) - x\right)^2 + \left(V_m^j(y) - y\right)^2} \Phi_{n,m}^{k,j}(x, y) \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \omega_2\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\left(U_n^k\left(x\right)-x\right)^2+\left(V_m^j\left(y\right)-y\right)^2\right]\Phi_{n,m}^{k,j}\left(x,y\right)}\right] \\
&= \omega_2\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\sqrt{\beta_1^2\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}+\beta_2^2\frac{y\left(b_m-y\right)}{m}}\right] \\
&\leq \omega_2\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\sqrt{\beta_1^2 a\frac{b_n}{n}+\beta_2^2 b\frac{b_m}{m}}\right] \\
&\leq \omega_2\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\sqrt{\beta_1^2 a+\beta_2^2 b}\sqrt{\frac{b_n}{n}+\frac{b_m}{m}}\right]
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. $\delta_{n,m}=\sqrt{\frac{b_n}{n}+\frac{b_m}{m}}$ olarak seçilirse

$$
I_{n,m}^{(4)}\leq\left(1+\sqrt{\beta_1^2 a+\beta_2^2 b}\right)\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}+\frac{b_m}{m}}\right)
$$

elde edilir.

Bu durumda $C=3\frac{C_2}{C_f}+\left(1+\sqrt{\beta_1^2 a+\beta_2^2 b}\right)$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
\left|B_{n,m}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right| &\leq I_{n,m}^{(1)}+I_{n,m}^{(2)}+I_{n,m}^{(3)}+I_{n,m}^{(4)} \\
&\leq C\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}+\frac{b_m}{m}}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

KAYNAKLAR

Bernstein, S. 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass. Fondeé sur le calcul des probabilités. Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 13, 1-2.

Bleimann, G., Butzer, P.L. and Hahn, L. 1980. Bernstein-type operator approximating continuous functions on semi-axis. Indag. Math., 42, 255-262.

Büyükyazıcı, İ. 2003a. İki Değişkenli Bernstein Polinomları Üzerine. G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi, 16, 63-67.

Büyükyazıcı, İ. 2003b. İki Değişkenli Bernstein Polinomlarının Yaklaşma Hızı Üzerine. G.Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi, 11, 165-174.

Büyükyazıcı, İ. and İbikli, E. 2004. Some Properties of Generalized Bernstein Polynomials of Two Variables. Applied Mathematics and Computation, 156, 367-380.

Chlodowsky, I. 1937. Sur le développment des fonctions définies dans un interval infini en séries de polynômes de M. S. Bernstein. Compositio. Math., 4, 380-393.

Gadjiev, A.D. 1974. The Convergence Problem for a Sequence of Positive Linear Operators on Unbounded Sets and Theorems Analogous to that of P.P. Korovkin. Dokl. Akad. Nauk SSSR, tom 218, N5.

Gadjiev, A.D. 1995. On Generalized Bernstein-Chlodowsky Polynomials. Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering, 24, 31-40.

Gadjiev, A.D. 1998. Generalized Bernstein-Chlodowsky Polynomials. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 28, 1267-1277.

Gadjiev, A.D. and İbikli, E. 1999. Weighted approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials. Indian J. Pure Appl. Math., 30, 83-87.

Groetsch, C.W. and King, J.T. 1973. The Bernstein polynomials and finite differences. Math. Mag., 46, 280-282.

Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H.H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. 1-71p., Ankara.

İbikli, E. 2001. On Stancu type generalization of Bernstein-Chlodowsky polynomials. Mathematica, 42, 37-43.

İbikli, E. 2003. On approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials. Math.

Balkanica, 17, 259-265.

İbikli, E. 2005. On approximation for functions of two variables on a triangular domain. Rocky Mountain J.Math., 5, 1523-1531.

İzgi, A. 2004. İki değişkenli fonksiyonlar sınıfında Bernstein-Chlodowsky tipi lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklık özellikleri. 74 p.

Kampiti, M. and Altomare, F. 1994. Korovkin-type approximation theory and its applications. Walter de Gruyter. 118-476p., New York.

Kannan, R. and King, K.C. 1996. Advanced analysis on the real line. Springer Verlag. 259p., New York.

Khan, R.A. 1988. A note on a Bernstein-type Bleimann, Butzer and Hahn. Journal of Approximation Theory, 53, 295-303.

Korovkin, P.P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S), 90, 961-964.

Korovkin, P.P. 1960. Linear Operators and Approximation Theory. Russian Monographs and Texts on advanced Math., III, 1-63p., Gordon&Breach.

Kurt, M. and Stefan, N. 1990. Bounded ordered dictionaries in O(loglogn) time and O(n) space. Information Processing Letters, 35, 183-189.

Lorentz, G.G. 1953. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press. 36p., Toronto.

Martinez, F.L. 1989. Some properties of two-demansional Bernstein polynomials. Journal of Approximation Theory, 59, 300-306.

Museyev, B., Alp, M., Mustafayev, N. ve Ekincioğlu, İ. 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I. Tekağaç Eylül Yayıncılık. 366p., Ankara.

Natanson, I.P. 1961. Theory of Functions of a Real Variable. Frederick Ungar Publishing Company. 215-218p., New York.

Natanson, I.P. 1964. Constructive Function Theory. Frederick Ungar Publishing Company. 75-78p., New York.

Rudin, W. 1921. Functional Analysis. Kingsport Press, Inc. 6p., United States of America.

Saraçoğlu, B. ve Çevik F. 1995. Matematiksel İstatistik, Olasılık ve Önemli Dağılımlar. Gazi Büro Kitabevi. 528-545p., Ankara.

Stancu, D.D. 1983. Approximation of functions by means of a new generalized Bernstein operator. Estratto da Calcola, XX, 211-229.

Totik, V. 1984. Uniform approximation by Bernstein-type operators. Indag. Math., 46, 87-93.

Volkov, V.I. 1957. Convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 115, 17-19.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Neşe İŞLER
Doğum Yeri	:	MARMARİS
Doğum Tarihi	:	02.03.1984
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Marmaris Halıcı Ahmet Urkay Anadolu Lisesi (2002)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2006)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2006 – Ocak 2009)