

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KESİRLİ TÜREVLER-İNTEGRALLER ve HİPERGEOMETRİK
FONKSİYONLAR**

Ertuğrul ÜNLÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2011**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Ertuğrul ÜNLÜ tarafından hazırlanan " **KESİRLİ TÜREVLER-İNTEGRALLER ve HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR** " adlı tez çalışması 27.07.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği / oy çokluğu** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: *Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL*

Jüri Üyeleri:

Başkan: *Doç. Dr. Ogün DOĞRU*
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç. Dr. Nuri ÖZALP*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Özer KOLSARICI
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek lisans Tezi

KESİRLİ TÜREVLER-İNTEGRALLER ve HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Ertuğrul ÜNLÜ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyonlarının elde edilişleri verildikten sonra hipergeometrik fonksiyonların bazı özellikleri ve birbirleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde kesirli türev operatörü yardımıyla Hipergeometrik fonksiyonlar için doğurucu fonksiyonlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise kesirli türev operatörü yardımıyla çok değişkenli Jacobi polinomları için doğurucu fonksiyonlar elde edilmiştir.

2011 , 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ortogonal polinomlar, Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Hipergeometrik fonksiyon, Doğurucu fonksiyon, Kesirli türevler ve integraller, Çok değişkenli Jacobi Polinomları

ABSTRACT

M. A. Thesis

FRACTIONAL DERIVATIVES-INTEGRALS and HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Ertuğrul ÜNLÜ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, preliminaries and some necessary definitions, lemmas and theorems that will be needed for later use are given.

In the third chapter, definitions of two variable Appell' s hypergeometric functions are given then, the properties of these hypergeometric functions and the relations between them are analysed.

In the fourth chapter, by using the fractional derivative operator, generating functions for hypergeometric functions are obtained.

In the fifth chapter, by using the fractional derivative operator, generating functions for multivariable Jacobi polynomials are obtained.

2011 , 50 pages

Key Words: Orthogonal polynomials, Gamma function, Beta function, Hypergeometric function, Generating function, Fractional derivatives and integralls, Multi-variable Jacobi polynomials

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen Danışman Hocam Sayın Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'a en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca maddi ve manevi olarak her zaman yanımdayken olan aileme de saygı ve sevgilerimi sunarım.

Ertuğrul ÜNLÜ
Ankara, Temmuz 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNBİLGİLER	2
2.1 Gamma Fonksiyonu	2
2.2 Genişletilmiş Gamma Fonksiyonu	3
2.3 Kompleks Değişkenli Gamma Fonksiyonu	4
2.4 Beta Fonksiyonu	4
2.5 Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyonlar	7
2.6 Önemli Bazı İfadeler	9
2.7 Doğrulucu Fonksiyonlar	11
3 APPELL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI	13
3.1 Appell Hipergeometrik Fonksiyonlarının İntegral Gösterimleri	14
3.2 Appell Hipergeometrik Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler	15
3.3 Appell Hipergeometrik Fonksiyonları ile Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu Arasındaki İlişkiler	18
4 KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR İÇİN DOĞRULUCU FONKSİYONLAR	21
4.1 Kesirli Türevin Hipergeometrik Fonksiyonlara Uygulanması	24
4.2 Lineer Doğrulucu Fonksiyonlar	29
4.3 Bilineer Doğrulucu Fonksiyonlar	32
5 KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA ÇOK DEĞİŞKENLİ JACOBİ POLİNOMLARI İÇİN DOĞRULUCU FONKSİYONLAR	40
5.1 Kesirli Türev Yardımıyla Çok Değişkenli Jacobi Polinomları	42
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	50

SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$\mathbf{B}(x, y)$	Beta fonksiyonu
${}_2F_1$	(Gauss) Hipergeometrik fonksiyonu
$(\alpha)_n$	Pochhammer sembolü
$I^{-\mu} f(z)$	Riemann-Liouville kesirli integrali
$K^{-\mu} f(z)$	$(-\mu)$ inci basamaktan Weyl kesirli integrali
$D_z^\alpha \{f(z)\}$	Kesirli türev operatörü
$F_D^{(3)}$	Lauricella fonksiyonu
F_1, F_2, F_3, F_4	Appell hipergeometrik fonksiyonları
$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	Klasik Jacobi polinomu
$P_n^{*(\alpha, \beta)}(x)$	Çok değişkenli Jacobi polinomu

1. GİRİŞ

α reel ya da kompleks bir sabit, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$(\alpha)_n = \alpha (\alpha + 1) (\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1), \quad (a)_0 = 1$$

şeklinde tanımlanan ifade Pochhammer simbolü olarak bilinir. $|x| < 1$ için yakınsak olan $1 + x + x^2 + \dots$ geometrik serisinden genelleştirilerek elde edilen ve

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 1$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna hipergeometrik fonksiyon denir. Kesirli türev tanımına en basit yaklaşım formülü,

$$\frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \{e^{az}\} = D_z^\alpha \{e^{az}\} = a^\alpha e^{\alpha z}$$

dir. Burada α reel ya da kompleks parametredir.

Tamsayı olmayan bir basamaktan türev veya integral alma fikri kalkulusün tarihi kadar eski olup Leibniz ve Newton'un diferansiyel hesaplama tekniği bulmalarına kadar uzanır (Baym 2004). Wilhelm Leibniz (1646-1716)'ın 1695 yılında Marquis de L'Hospital (1661-1704)'a sorduğu "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu kesirli diferansiyelin çıkış tarihi olarak gösterilebilir.

Literatürde kesirli türev ve integralin hipergeometrik fonksiyonlar teorisinde kullanımına yönelik birçok örnek mevcuttur.(Post (1930), Erdélyi (1939), Oldham and Spanier (1974), Ross (1975) ve Srivastava and Buschman (1977).) Bu tezde kesirli türev operatörünün hipergeometrik fonksiyonlarla ilgisi üzerinde durulmuştur. Ayrıca kesirli türev operatörleri kullanılarak hipergeometrik fonksiyonlar ve çok değişkenli Jacobi polinomları için lineer ve bilineer doğrulu Fonksiyonlar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNBİLGİLER

2.1 Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Bu fonksiyona *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir. Şöyle ki,

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-ut} dt = \frac{1}{u} \quad (2.1)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. $c > 0$ olmak üzere bu integral her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. (2.1) eşitliğinden u ya göre türevler alarak devam ettiğimizde n -inci türev için

$$(-1)^n F^{(n)}(u) = \int_0^\infty t^n e^{-ut} dt = \frac{n!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa;

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! = \int_0^\infty t^{(n+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(n+1)$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n nin $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O halde $x > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere;

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1)$$

yazılabilir. Buradan görülmektedir ki, -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gamma fonksiyonuna *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir.

$x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^\infty = -(0 - 1) = 1$$

dir. Bu sonuç $0!$ in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Elementer matematikte n faktöriyel, $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$ çarpımı ile verilir. Bu özellik, $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdigine göre, eğer $x = n$ bir tamsayı ise,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\ &= \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} (-t^x e^{-t})}_{0}^b + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

olduğundan Γ fonksiyonu,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.2)$$

eşitliğini tüm $x > 0$ değerleri için gerçekler. Bu özellik yardımıyla Gamma fonksiyonu için, argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçların bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri de kolayca hesaplanabilir.

2.2 Genişletilmiş Gamma Fonksiyonu

x in pozitif değerleri için tanımlanan Gamma fonksiyonu negatif x değerleri için de tanımlabilmektedir. Yani $\Gamma(x)$, tüm reel sayılara genişletilebilir.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

ozelligini kullanarak negatif x değerleri için $\Gamma(x)$ değeri, $-n < x < -n+1$ ise $0 < x+n < 1$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Buradan görülmektedir ki, Gamma fonksiyonu sıfır ve negatif tamsayılar için sınırsızdır. Yani değeri sonsuzdur.

Faktöriyel özelliği tüm pozitif x değerleri için bir anlam ifade etmektedir. Ancak negatif x ler için aynı şey söylemenemez. Çünkü x in negatif tamsayılarla yakın değerleri için $\Gamma(x)$ ler pozitif ve negatif değerler alarak sınırsız şekilde büyümektedir.

2.3 Kompleks Değişkenli Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonunun tanımındaki genelleştirilmiş integral ifadesinde x yerine z alınlarak, bu fonksiyon kompleks düzleme genişletilebilir. Yani, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt , \quad \operatorname{Re} z > 0$$

yazılabilir. Reel x lerde olduğu gibi, bu integral de $\operatorname{Re} z > 0$ için yakınsaktır.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.3}$$

ve

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)} , \quad m = 1, 2, 3\dots$$

ozellikleri burada da geçerliliğini korumaktadır. Bu son eşitlikten görülmektedir ki, Gamma fonksiyonu kompleks düzlemin negatif tamsayılarla karşılık gelen noktalarda ve $z = 0$ da birer *basit kutupa* sahiptir (Rainville 1973).

2.4 Beta Fonksiyonu

$\mathbf{B}(x, y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$\mathbf{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt ; \quad \operatorname{Re}(x) > 0 , \quad \operatorname{Re}(y) > 0 \tag{2.4}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyon olup

$$\mathbf{B}(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta \tag{2.5}$$

$$\mathbf{B}(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \tag{2.6}$$

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.7}$$

birimlerinde de ifade edilebilir.

(2.4) eşitliğinde $t = \sin^2 \theta$ alınırsa (2.5) eşitliği; $t = \frac{u}{1+u}$ alınırsa (2.6) eşitliği elde edilir. (2.7) eşitliğinde Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi verilmiştir. Bunu görmek için $\Gamma(x)$ in tanımlandığı integralde $t = s^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty s^{2x-1} e^{-s^2} ds$$

olur. $\Gamma(x)$ in bu ifadesinden dolayı

$$\Gamma(y) = 2 \int_0^\infty t^{2y-1} e^{-t^2} dt$$

yazılabilir. Buradan,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty s^{2x-1} t^{2y-1} e^{-(s^2+t^2)} dt ds$$

olup, $s = r \cos \theta$, $t = r \sin \theta$ kutupsal koordinatlarına geçilirse,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r^{2(x+y)-2} e^{-r^2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} r dr d\theta \\ &= \left[2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta \right] \left[2 \int_0^\infty r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr \right] \\ &= \mathbf{B}(x, y) \Gamma(x+y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise istenilendir. Ayrıca (2.7) eşitliğinden görülmektedir ki,

$$\mathbf{B}(x, y) = \mathbf{B}(y, x)$$

olup bu eşitlik Beta fonksiyonunun *simetri özelliği* olarak adlandırılır (Rainville 1973).

Tanım 2.1 α reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\alpha)_n$ ifadesi

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Bu ifade "Pochhammer sembolü" olarak bilinir.

Lemma 2.1 Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.9)$$

$$(\alpha)_{n+1} = \alpha (\alpha + 1)_n \quad (2.10)$$

İspat. (2.2) eşitliği kullanılarak $\Gamma(\alpha + n)$ ifadesi

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + n) &= (\alpha + n - 1) \Gamma(\alpha + n - 1) \\ &= (\alpha + n - 1) (\alpha + n - 2) \Gamma(\alpha + n - 2) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= (\alpha + n - 1) (\alpha + n - 2) \dots (\alpha + 1) \alpha \Gamma(\alpha) \\ &= (\alpha)_n \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile bölünürse (2.9) eşitliği elde edilir.
(2.9) eşitliğinde n yerine $n + 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} (\alpha)_{n+1} &= \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\alpha \Gamma(\alpha + n + 1)}{\alpha \Gamma(\alpha)} \\ &= \alpha \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &= \alpha (\alpha + 1)_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir. Özel olarak (2.9) da $n = 0$ alınırsa $(\alpha)_0 = 1$ olur.

Lemma 2.2

$$(1 - x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n, \quad |x| < 1 \quad (2.11)$$

dir.

İspat. (2.11) ifadesini ispat etmek için $f(x) = (1 - x)^{-\alpha}$ fonksiyonunu $x = 0$ noktası komşuluğunda Taylor serisine (Maclaurin serisi) açmak yeterlidir. $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ olması halinde (2.11) ifadesi sonlu binom açılımıdır.

2.5 Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (2.12)$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri $1+x+x^2+\dots$ geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan *hipergeometrik seri* adını alır. (2.12) ifadesinden görülmektedir ki, γ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olamalıdır. (2.12) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için iraksaktır. $|x| = 1$ olduğu zaman $\gamma > \alpha+\beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. $x = -1$ iken $\gamma > \alpha+\beta-1$ ise seri yakınsaktır.

(2.8) gösterimi dikkate alınarak, (2.12) hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir. (2.13) eşitliğinde görülen F nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F nin yapısında biri α ve β diğeri γ olmak üzere iki tip parametre bulunduğu ifade eder. (2.13) eşitliğinin genelleştirilmiş şekli

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

dir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine genellikle sadece F kullanılır. Yani,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

olup, bu fonksiyon *Gauss hipergeometrik fonksiyonu* olarak tanımlanır. (2.9) eşitliğinden açıkça görülmektedir ki, hipergeometrik fonksiyon α ve β ya göre simetriktir. Yani,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\beta, \alpha; \gamma; x)$$

sağlanır. (2.9) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 0) = 1$$

olduğu görülmektedir. Bilinen pek çok fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade etmek mümkündür.

Lemma 2.3 ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ fonksiyonu

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-ux)^{-\alpha} du \quad (2.14)$$

şeklinde bir integral gösterime sahiptir.

İspat. Beta fonksiyonunun

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du$$

tanımından ve Pochhammer sembolüniin özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} &= \frac{B(\beta + n, \gamma - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)} \\ &= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta+n-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} du \end{aligned} \quad (2.15)$$

yazılabilir. Buradan (2.15) ifadesi (2.13) de yerine yazılsrsa

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \int_0^1 u^{\beta+n-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} du$$

olur. Seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integral yer değiştirilirse

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} (ux)^n \right\} du$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.11) den

$$(1-ux)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} (ux)^n$$

olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Hipergeometrik fonksiyonun bir integral gösterimini veren bu formül $|x| < 1$ ve $\alpha > \beta > 0$ için geçerlidir.

2.6 Önemli Bazı İfadeler

Lemma 2.4 $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ için,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} = \frac{B(\beta, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)} \quad (2.16)$$

dir (Bailey 1964).

Lemma 2.5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n-k) \quad (2.17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n B(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B(k, n+k) \quad (2.18)$$

eşitlikleri geçerlidir (Rainville 1973).

Lemma 2.6 $|x| < \frac{1}{2}$ için

$${}_2F_1(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; x) = (1-x)^{-\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \gamma; -\frac{x}{1-x}\right) \quad (2.19)$$

dir.

İspat. (2.19) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade

$$\begin{aligned} (1-x)^{-\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \gamma; -\frac{x}{1-x}\right) &= (1-x)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} (-1)^n x^n (1-x)^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} (-1)^n x^n (1-x)^{-(\alpha+n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} (-1)^n x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)_r}{r!} x^r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)_r}{r!} x^{n+r} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (2.17) eşitliği gözönüne alınarak r yerine $r - n$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılrsa, son ifadenin eşti

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^r \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)_{r-n}}{(r-n)!} x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^r \frac{(\alpha)_n (\alpha)_r (\beta)_n}{(\alpha)_n (\gamma)_n n!} \frac{(-1)^n}{r!} \frac{(-r)_n (-1)^n}{n! (\gamma)_n} x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!} \sum_{n=0}^r \frac{(-r)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!} {}_2F_1(-r, \beta; \gamma; 1) x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \beta + r)}{\Gamma(\gamma + r) \Gamma(\gamma - \beta)} x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r (\gamma - \beta)_r}{(\gamma)_r r!} x^r \\
&= {}_2F_1(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; x)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 2.7 $n \geq r$ için

$$(\alpha + r)_{n-r} = \frac{(\alpha)_n}{(\alpha)_r} \quad (2.20)$$

dir (Slater 1985).

Lemma 2.8

$$\begin{aligned}
(-n)_k &= \begin{cases} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \\
&\quad (k, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned} \quad (2.21)$$

dir (Srivastava ve Karlsson 1985).

Ispat.

$$\begin{aligned}
(-n)_k &= (-n)(-n+1)\dots(-n+k-1) \\
&= (-1)^k (n)(n-1)\dots(n-k+1) \\
&= \frac{(-1)^k (n)(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots3.2.1}{(n-k)(n-k-1)\dots3.2.1} \\
&= \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n
\end{aligned}$$

dir. $k > n$ için $(-n)_k = (-n)(-n+1)\dots(-n+k-1)$ eşitliğinin sağ tarafı mutlaka sıfır olacaktır.

2.7 Doğurucu Fonksiyonlar

Tanım 2.7.1 $F(x, t)$ iki değişkenli fonksiyonu değişkenlerden birine göre örneğin t ye göre,

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x) t^n \quad (2.22)$$

birimde bir Taylor serisine açlıyor ise $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{\Phi_n(x)\}$ fonksiyonlar cümlesinin *doğurucu fonksiyonu* denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız olup n nin fonksiyonudurlar.

Örnek 2.7.1 $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k x^k}{(\alpha+1)_k k!}$$

şeklinde tanımlanan Laguerre polinomları için bilinen bazı doğurucu fonksiyonlar (Rassias and Srivastava 1993), $t < 1$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = (1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) \quad (2.23)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x) t^n = (1+t)^{\alpha} e^{-xt} \quad (2.24)$$

şeklindedir.

Tanım 2.7.2 (Bilateral doğurucu fonksiyon): Üç değişkenli $H(x, y, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$H(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) g_n(y) t^n \quad (2.25)$$

şeklinde bir seriye açılabiliyor ise $H(x, y, t)$ fonksiyonuna $f_n(x)$ ve $g_n(y)$ fonksiyon cümleleri için *bilateral doğurucu fonksiyon* denir.

Tanım 2.7.3 (Bilineer doğurucu fonksiyon): Üç değişkenli $G(x, y, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$G(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) f_n(y) t^n \quad (2.26)$$

şeklinde bir seriye açılabiliyor ise $G(x, y, t)$ fonksiyonuna $f_n(x)$ fonksiyon cümlesi için *bilineer doğurucu fonksiyon* denir.

3. APPELL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Parametrelerin sayısı artırılarak hipergeometrik serilerin iki değişkenli hipergeometrik serilere genişletilebileceği Appell ve Kampé de Fériet (1926) ve Horn (1931) tarafından gösterilmiştir. Şimdi

$${}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; x), {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; y)$$

hipergeomerik serilerini gözönüne alalım. Bu iki serinin çarpılmasıyla x ve y değişkenlerine bağlı

$${}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; x) {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_2)_n (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n} \frac{x^m y^n}{m! n!} \quad (3.1)$$

serisi elde edilir. $(\alpha)_m = (\alpha)_m (\alpha + m)_n$ özelliği dikkate alınır ve α_2, β_2 ve γ_2 değerleri yerine $\alpha_2 = \alpha_1 + m, \beta_2 = \beta_1 + m, \gamma_2 = \gamma_1 + m$ konulursa, bu durumda

$$(\alpha_1)_m (\alpha_2)_n, (\beta_1)_m (\beta_2)_n, (\gamma_1)_m (\gamma_2)_n$$

ikili çarpım ifadelerinin yerine sırasıyla

$$(\alpha_1)_{m+n}, (\beta_1)_{m+n}, (\gamma_1)_{m+n}$$

geleceklerinden

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; x) {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_1 + m)_n (\beta_1)_m (\beta_1 + m)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_1 + m)_n} \frac{x^m y^n}{m! n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m+n} (\beta_1)_{m+n}}{(\gamma_1)_{m+n}} \frac{x^m y^n}{m! n!} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N \frac{(\alpha_1)_N (\beta_1)_N}{(\gamma_1)_N} \frac{x^m y^{N-m}}{m! (N-m)!} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_N (\beta_1)_N}{(\gamma_1)_N N!} \left(\sum_{m=0}^N \frac{N!}{m! (N-m)!} x^m y^{N-m} \right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_N (\beta_1)_N}{(\gamma_1)_N} \frac{(x+y)^N}{N!} \\ &= {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; x+y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadelerde $N = m + n$ alınmış ve (2.18) özelliği kullanılmıştır.

(3.1) de $\alpha_2 = \alpha_1 + m, \gamma_2 = \gamma_1 + m$ alınarak elde edilen iki değişkenli hipergeometrik fonksiyona birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu denilmektedir ki

bu fonksiyonun serisel ifadesi

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \quad (3.2)$$

olur. Benzer şekilde (3.1) de $\alpha_2 = \alpha_1 + m$ konularak F_2 ikinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu, yine (3.1) de $\gamma_2 = \gamma_1 + m$ konularak F_3 üçüncü çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu ve son olarak (3.1) de $\alpha_2 = \alpha_1 + m$, $\beta_2 = \beta_1 + m$ konularak F_4 dördüncü çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu elde edilmektedir. Bu fonksiyonların açık ifadeleri aşağıda verilmektedir.

$$F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \quad (3.3)$$

$$F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\alpha_2)_n (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \quad (3.4)$$

$$F_4(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (\beta_1)_{m+n}}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \quad (3.5)$$

Bu seriler sırasıyla $D_1 = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$, $D_2 = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$, $D_3 = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$, $D_4 = \left\{(x, y) : |x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} < 1\right\}$ için yakınsaktır (Appell ve Kampé de Fériet 1926). Ayrıca

$$\begin{aligned} F_D^{(n)}[a, b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n] &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}, \\ \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} &< 1. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $F_D^{(3)}$ ler Lauricella fonksiyonlarıdır.

3.1 Appell Hipergeometrik Fonksiyonlarının İntegral Gösterimleri

F_1 , F_2 ve F_3 Appell hipergeometrik fonksiyonlarının çift katlı integraller yardımıyla integral gösterimleri elde edilebilir. Birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu için bir integral gösterimi,

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1 - \beta_1 - \beta_2)} \\ &\times \iint_D u^{\beta_1-1} v^{\beta_2-1} (1-u-v)^{\gamma_1-\beta_1-\beta_2-1} (1-ux-vy)^{-\alpha_1} dudv \quad (3.6) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradaki çift katlı integral $D = \{(u, v) : u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$ üçgensel bölgesi üzerindedir. Benzer şekilde F_2 ve F_3 Appell hipergeometrik fonksiyonlarının integral gösterimleri

$$F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1 - \beta_1)\Gamma(\gamma_2 - \beta_2)} \\ \times \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta_1-1} v^{\beta_2-1} (1-u)^{\gamma_1-\beta_1-1} (1-v)^{\gamma_2-\beta_2-1} (1-ux-vy)^{-\alpha_1} dudv \quad (3.7)$$

$$F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1 - \beta_1 - \beta_2)} \\ \times \iint_D u^{\beta_1-1} v^{\beta_2-1} (1-u-v)^{\gamma_1-\beta_1-\beta_2-1} (1-ux)^{-\alpha_1} (1-vy)^{-\alpha_2} dudv \quad (3.8)$$

şeklindedir. Son integralde yine yukarıda tanımlanan D üçgensel bölgesi üzerinden hesap edilir. F_4 Appell hipergeometrik fonksiyonu için benzer bir integral gösterimi elde edilemez. Ayrıca F_1 fonksiyonunun

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\gamma_1 - \alpha_1)} \\ \times \int_0^1 u^{\alpha_1-1} (1-u)^{\gamma_1-\alpha_1-1} (1-ux)^{-\beta_1} (1-uy)^{-\beta_2} du \quad (3.9)$$

şeklinde tek katlı integral yardımıyla ifade edilen bir başka integral gösterimi de vardır (Bailey 1964).

3.2 Appell Hipergeometrik Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler

Teorem 3.1 F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) = (1-x)^{-\beta_1} (1-y)^{-\beta_2} \quad (3.10) \\ \times F_1\left(\gamma_1 - \alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; -\frac{x}{1-x}, -\frac{y}{1-y}\right)$$

$$= (1-x)^{-\alpha_1} F_1\left(\alpha_1, \gamma_1 - \beta_1 - \beta_2, \beta_2; \gamma_1; -\frac{x}{1-x}, \frac{y-x}{1-x}\right) \quad (3.11)$$

$$= (1-x)^{-\alpha_1} F_1\left(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 - \beta_1 - \beta_2; \gamma_1; \frac{x-y}{1-y}, -\frac{y}{1-y}\right) \quad (3.12)$$

$$= (1-x)^{\gamma_1-\alpha_1-\beta_1} (1-y)^{-\beta_2} \\ \times F_1\left(\gamma_1 - \alpha_1, \gamma_1 - \beta_1 - \beta_2, \beta_2; \gamma_1; x, \frac{x-y}{1-y}\right) \quad (3.13)$$

$$= (1-x)^{-\beta_1} (1-y)^{\gamma_1-\alpha_1-\beta_2} \\ \times F_1\left(\gamma_1 - \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 - \beta_1 - \beta_2; \gamma_1; \frac{y-x}{1-x}, y\right) \quad (3.14)$$

İspat. (3.9) eşitliğindeki

$$\int_0^1 u^{\alpha_1-1} (1-u)^{\gamma_1-\alpha_1-1} (1-ux)^{-\beta_1} (1-uy)^{-\beta_2} du$$

integralini gözönüne alalım. Bu integralde sırasıyla

$$u = 1 - v, \quad u = \frac{v}{1-x+vx}, \quad u = \frac{v}{1-y+vy}, \quad u = \frac{1-v}{1-vx}, \quad u = \frac{1-v}{1-vy} \quad (3.15)$$

dönüşümleri yapılrsa istenilen sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.2 F_2 Appell hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = (1-x)^{-\alpha_1} F_2\left(\alpha_1, \gamma_1 - \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; -\frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-x}\right) \quad (3.16)$$

$$= (1-x)^{-\alpha_1} F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2 - \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \frac{x}{1-y}, -\frac{y}{1-y}\right) \quad (3.17)$$

$$= (1-x-y)^{-\alpha_1} \times F_2\left(\alpha_1, \gamma_1 - \beta_1, \gamma_2 - \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; -\frac{x}{1-x-y}, -\frac{y}{1-x-y}\right) \quad (3.18)$$

İspat. (3.7) formülüyle verilen

$$F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1 - \beta_1)\Gamma(\gamma_2 - \beta_2)} \\ \times \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta_1-1} v^{\beta_2-1} (1-u)^{\gamma_1-\beta_1-1} (1-v)^{\gamma_2-\beta_2-1} (1-ux-vy)^{-\alpha_1} dudv$$

eşitliğinin ikinci yandaki çift katlı integrale

$$\begin{aligned} u &= 1 - u', v = v' \\ u &= u', v = 1 - v' \\ u &= 1 - u', v = 1 - v' \end{aligned}$$

dönüşümleri sırasıyla uygulanırsa istenilen sonuçlar elde edilir.

Uyarı 3.1 F_3 ve F_4 fonksiyonları için benzer dönüşümler açıkça görülemez.

Ayrıca (3.9) ile verilen

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\gamma_1 - \alpha_1)} \\ &\times \int_0^1 u^{\alpha_1-1} (1-u)^{\gamma_1-\alpha_1-1} (1-ux)^{-\beta_1} (1-uy)^{-\beta_2} du \end{aligned}$$

integral gösteriminde $u = \frac{1}{v}$ dönüşümü yapılrsa, F_1 fonksiyonunun

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\gamma_1 - \alpha_1)} \\ &\times \int_1^\infty v^{\beta_1+\beta_2-\gamma_1} (v-1)^{\gamma_1-\alpha_1-1} (v-x)^{-\beta_1} (v-y)^{-\beta_2} dv \end{aligned}$$

şeklinde bir başka integral gösterimi elde edilmiş olur.

Theorem 3.3 F_1, F_2, F_3 Appell hipergeometrik fonksiyonları

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) & \quad (3.19) \\ &= (1-y)^{-\beta_2} F_3\left(\alpha_1, \gamma_1 - \alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, \frac{y}{y-1}\right) \\ &= (1-x)^{-\beta_1} F_3\left(\gamma_1 - \alpha_1, \alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; \frac{x}{x-1}, y\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) & \quad (3.20) \\ &= \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta_2} F_2\left(\beta_1 + \beta_2, \alpha_1, \beta_2, \gamma_1, \beta_1 + \beta_2; x, 1 - \frac{x}{y}\right) \\ &= \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta_1} F_2\left(\beta_1 + \beta_2, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \beta_1 + \beta_2; y, 1 - \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) & \quad (3.21) \\ &= (1-x)^{-\alpha_1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (\gamma_1 - \beta_1 + n)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n} m! n!} \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \left(\frac{y}{1-x}\right)^n \end{aligned}$$

bağıntılarını gerçekler.

Ispat. F_1 in (3.2) tanımından

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\alpha_1 + m)_n (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_1 + m)_n} \frac{x^m y^n}{m! n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!} {}_2F_1(\alpha_1 + m, \beta_2; \gamma_1 + m; y) x^m \end{aligned}$$

dir. Eşitliğin sağ yanındaki ${}_2F_1$ fonksiyonuna Lemma 2.6 daki (3.14) eşitliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!} (1-y)^{-\beta_2} {}_2F_1\left(\gamma_1 - \alpha_1, \beta_2; \gamma_1 + m; -\frac{y}{1-y}\right) x^m \\
&= (1-y)^{-\beta_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\gamma_1 - \alpha_1)_n (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n} m! n!} \left(-\frac{y}{1-y}\right)^n \\
&= (1-y)^{-\beta_2} F_3\left(\alpha_1, \gamma_1 - \alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, -\frac{y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir. (3.20) ifadesi, eşitliğin sağ tarafındaki hipergeometrik fonksiyonların serisel ifadeleri yerine yazılır ve basit serisel işlemler yapılrsa kolaylıkla elde edilebilir. (3.21) eşitliği de benzer işlemler yapılarak bulunabilir.

3.3 Appell Hipergeometrik Fonksiyonları ile Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu Arasındaki İlişkiler

Appell hipergeometrik fonksiyonları ile Gauss hipergeometrik fonksiyonu arasındaki ilişkileri görmek için bu fonksiyonların parametrelerinin ve değişkenlerinin özel durumlarını seçmek yeterlidir. (3.13) de $y = x$, (3.12) de $\beta_1 + \beta_2 = \gamma_1$ ve (3.16) da $\gamma_1 = \beta_1$ alınlarak sırasıyla

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= (1-x)^{\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2} {}_2F_1(\gamma_1 - \alpha_1, \gamma_1 - \beta_1 - \beta_2; \gamma_1; x) \\
&= {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1 + \beta_2; \gamma_1; x)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \beta_1 + \beta_2; x, y) = (1-y)^{-\alpha_1} {}_2F_1\left(\alpha_1, \beta_1; \beta_1 + \beta_2; \frac{x-y}{1-y}\right) \tag{3.23}$$

$$F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \beta_1, \gamma_2; x, y) = (1-x)^{-\alpha_1} {}_2F_1\left(\alpha_1, \beta_2; \gamma_2; \frac{y}{1-x}\right) \tag{3.24}$$

eşitliklerinin varlığı kolaylıkla gösterilebilir. (3.19) eşitliğinden

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) = (1-y)^{-\beta_2} F_3\left(\alpha_1, \gamma_1 - \alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, \frac{y}{y-1}\right)$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla F_1 fonksiyonu her zaman F_3 fonksiyonu cinsinden elde edilebilir. Tersine (3.19) ifadesinde $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ alınırsa F_3 fonksiyonu F_1 fonksiyonu cinsinden ifade edilmiş olur. (3.23) den, $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_2$ alınarak F_1 fonksiyonunun hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla ifade edilebileceği görülmektedir. Bu nedenle F_3 fonksiyonlarının ${}_2F_1$ fonksiyonları cinsinden ifadesini elde etmek için (3.19) ifadesinde $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ alınırsa

$$F_3(\alpha_1, \gamma_1 - \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 - \beta_1; \gamma_1; x, y) = (1-y)^{\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; x + y - xy) \quad (3.25)$$

elde edilir. Şimdi de F_2 fonksiyonunun F_1 fonksiyonu cinsinden ifade edilebileceğini gösterelim. (3.3) ile tanımlanan F_2 fonksiyonunda $\gamma_2 = \alpha_1$ ve $y = -\frac{y}{1-y}$ alınıp elde edilen bu hipergeometrik seri $(1-y)^{-\beta_2}$ ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$(1-y)^{-\beta_2} {}_2F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \alpha_1; x, -\frac{y}{1-y}\right)$$

Daha sonra F_2 nin serisel ifadesi yerine yazılır ve hipergeometrik fonksiyonlar için bilinen bazı özellikler kullanılsa,

$$\begin{aligned} & (1-y)^{-\beta_2} {}_2F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \alpha_1; x, -\frac{y}{1-y}\right) \\ &= (1-y)^{-\beta_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m (\alpha_1)_n m! n!} x^m \left(-\frac{y}{1-y}\right)^n \\ &= (1-y)^{-\beta_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!} x^m {}_2F_1\left(\alpha_1 + m, \beta_2; \alpha_1; -\frac{y}{1-y}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!} x^m {}_2F_1(\beta_2, -m; \alpha_1; y) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!} x^m \frac{(\alpha_1 - \beta_2)_m}{(\alpha_1)_m} {}_2F_1(\beta_2, -m; 1 + \beta_2 - \alpha_1 - m; 1 - y) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!} x^m \frac{(\alpha_1 - \beta_2)_m}{(\alpha_1)_m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_2)_n (-m)_n}{(1 + \beta_2 - \alpha_1 - m)_n} \frac{(1-y)^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_m (-m)_n (\beta_2)_n (\alpha_1 - \beta_2)_m}{m! n! (\gamma_1)_m (1 + \beta_2 - \alpha_1 - m)_n} x^m (1-y)^n \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $m \rightarrow n+s$ alınırsa bu ifadenin eşiti

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_{n+s} (-1)^n (\beta_2)_n (\alpha_1 - \beta_2)_{n+s}}{s! n! (\gamma_1)_{n+s} (1 + \beta_2 - \alpha_1 - n - s)_n} x^{n+s} (1-y)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_{n+s} (\alpha_1 - \beta_2)_s (\beta_2)_n}{s! n! (\gamma_1)_{n+s}} x^{n+s} (1-y)^n \\ &= F_1(\beta_1, \alpha_1 - \beta_2, \beta_2; \gamma_1; x, x(1-y)) \end{aligned}$$

olur ki buradan da

$$(1-y)^{-\beta_2} F_2 \left(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \alpha_1; x, -\frac{y}{1-y} \right) = F_1 (\beta_1, \alpha_1 - \beta_2, \beta_2; \gamma_1; x, x(1-y)) \quad (3.26)$$

yazılır. Bunun yanısıra, (3.26) nin sağ tarafındaki F_1 fonksiyonunda $\gamma_1 = \alpha_1$ alınarak ${}_2F_1$ fonksiyonuna indirgenebilir. Ayrıca (3.26) da $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_1$ alınırsa,

$$F_2 (\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \alpha_1, \alpha_1; x, y) = (1-x)^{-\beta_1} (1-y)^{-\beta_2} {}_2F_1 \left(\beta_1, \beta_2; \alpha_1; \frac{xy}{(1-x)(1-y)} \right) \quad (3.27)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ yanındaki ifade x ve y nin kuvvetleri cinsinden serİYE açıldığında birinci yandaki F_2 nin de elde edileceği de görülebilir.

4. KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR İÇİN DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Kesirli türevin tanımına basit bir yaklaşım

$$\frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \{e^{az}\} = D_z^\alpha \{e^{az}\} = a^\alpha e^{\alpha z} \quad (4.1)$$

formülü ile verilebilir. Burada α keyfi bir reel ya da kompleks sayıdır.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(a_n z)$$

fonksiyonu için Liouville, α yinci basamaktan kesirli türevi

$$D_z^\alpha \{f(z)\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a_n)^\alpha \exp(a_n z) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlar. Euler, (4.1) ile verilen türev formülünü

$$D_z^n \{z^\lambda\} = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) z^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda - n + 1)} z^{\lambda-n} (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlamıştır. (4.2) formülü ise Euler tarafından daha genel olarak

$$D_z^\mu \{z^\lambda\} = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda - \mu + 1)} z^{\lambda-\mu} (\mu \text{ keyfi kompleks sayı}) \quad (4.4)$$

şeklinde genişletilmiştir.

Kesirli analize bir başka yaklaşım

$$\begin{aligned} D_z^{-n} \{f(z)\} &= \int_0^z \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z f(t) (z-t)^{n-1} dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde Cauchy' nin iterasyon integrali ile başlar.

(4.5) formülünde $-n$ yerine μ alınırsa

$$D_z^\mu \{f(z)\} = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^z f(t) (z-t)^{-\mu-1} dt \quad (4.6)$$

elde edilir. İntegral yolu, kompleks t -düzleminde 0 dan z ye bir çizgi boyuncadır ve $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ dir.

(4.6) denklemi $(-\mu)$ yüncü basamaktan Riemann-Liouville kesirli integrali olarak tanımlanır ve $I^{-\mu}f(z)$ ile gösterilir.

$m - 1 < \operatorname{Re}(\mu) < m$ ($m = 1, 2, \dots$) olması durumunda (4.6) eşitliği

$$\begin{aligned} D_z^\mu \{f(z)\} &= \frac{d^m}{dz^m} D_z^{\mu-m} \{f(z)\} \\ &= \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\mu+m)} \int_0^z f(t)(z-t)^{-\mu+m-1} dt \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer (4.6) da $f(z) = z^\lambda$ alınırsa

$$\begin{aligned} D_z^\mu \{z^\lambda\} &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^z t^\lambda (z-t)^{-\mu-1} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} t = z\xi \\ dt = zd\xi \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 z^\lambda \xi^\lambda (z-z\xi)^{-\mu-1} zd\xi \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu}}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 \xi^\lambda (1-\xi)^{-\mu-1} d\xi \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu}}{\Gamma(-\mu)} B(\lambda+1, -\mu) \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu}}{\Gamma(-\mu)} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada $\operatorname{Re}(\mu) < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda) > -1$ dir.

Örnek 4.1 $f(z) = z$ fonksiyonunun $m = 1$ olmak üzere $\mu = \frac{1}{2}$ nci mertebeden türevini alalım.

(4.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
D_z^{\frac{1}{2}}\{z\} &= \frac{d}{dz} D_z^{\frac{1}{2}-1}\{z\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} \int_0^z t(z-t)^{-\frac{1}{2}+1-1} dt \right\} \left\{ \begin{array}{l} t = z\xi \\ dt = zd\xi \end{array} \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 z\xi(z-z\xi)^{-\frac{1}{2}} zd\xi \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{1-\frac{1}{2}+1} \int_0^1 \xi(1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{3}{2}} B\left(2, \frac{1}{2}\right) \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{4z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} \right\} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi ise elde edilen fonksiyonun $\mu = \frac{1}{2}$ nci mertebeden türevini alalım.

$$\begin{aligned}
D_z^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}}\right\} &= \frac{d}{dz} D_z^{\frac{1}{2}-1}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} \int_0^z \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} (z-t)^{-\frac{1}{2}+1-1} dt \right\} \left\{ \begin{array}{l} t = z\xi \\ dt = zd\xi \end{array} \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1} \int_0^1 \xi^{\frac{1}{2}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{2}{\pi} z \int_0^1 \xi^{\frac{1}{2}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{2}{\pi} z \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} \right\} = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{2}{\pi} z^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} \right\} = \frac{d}{dz}(x) = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da görüldüğü gibi $f(z) = z$ nin iki defa $\frac{1}{2}$ inci basamaktan türevi 1 i verir.

(4.5) iterasyon integralinden

$$\begin{aligned} {}_{\infty}D_z^{-n}\{f(z)\} &= \int\limits_z^{\infty} \int\limits_{t_n}^{\infty} \dots \int\limits_{t_3}^{\infty} \int\limits_{t_2}^{\infty} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_z^{\infty} f(t)(t-z)^{n-1} dt, \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir ve n yerine $-\mu$ alınırsa

$${}_{\infty}D_z^{\mu}\{f(z)\} = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int\limits_z^{\infty} f(t)(t-z)^{-\mu-1} dt \quad (\text{Re}(\mu) < 0) \quad (4.10)$$

ve

$$\begin{aligned} {}_{\infty}D_z^{\mu}\{f(z)\} &= \frac{d^m}{dz^m}({}_{\infty}D_z^{\mu-m}\{f(z)\}) \\ &= \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\mu+m)} \int\limits_z^{\infty} f(t)(t-z)^{-\mu+m-1} dt \right\} \\ &\quad (m-1 < \text{Re}(\mu) < m, (m = 1, 2, 3, \dots)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.10) denklemi $(-\mu)$ yüncü basamaktan Weyl kesirli integrali olarak tanımlanır ve genellikle $K^{-\mu}f(z)$ ile gösterilir.

4.1 Kesirli Türevin Hipergeometrik Fonksiyonlara Uygulanması

Terim terime kesirli diferensiyel alarak teoremleri ispatlamaya başlayalım.

Teorem 4.1 Eğer $f(z)$ fonksiyonu $|z| < \rho$ diskinde analitikse

$$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < \rho \quad (4.12)$$

şeklinde bir kuvvet serisine açılabilir. O halde

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\{z^{\lambda-1}f(z)\} &= \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n D_z^{\mu}\{z^{\lambda+n-1}\} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^n \end{aligned} \quad (4.13)$$

yazılabilir. Burada $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu) < 0$, $|z| < \rho$ dur.

İspat. (4.6) ve (4.12) den

$$\begin{aligned} D_z^\mu \left\{ z^{\lambda-1} f(z) \right\} &= D_z^\mu \left\{ z^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^z (z-t)^{-\mu-1} t^{\lambda-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad \left\{ \begin{array}{l} t = z\xi \\ dt = zd\xi \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 (z-z\xi)^{-\mu-1} z^{\lambda-1} \xi^{\lambda-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \xi^n \right) zd\xi \end{aligned}$$

yazabilirim. Görülebilir ki

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \xi^n$$

toplamlı integralin sınırladığı bölge üzerinde düzgün yakınsaktır ve

$$\int_0^1 |\xi^{\lambda-1} (1-\xi)^{-\mu-1}| d\xi$$

integrali $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ için yakınsaktır. Bu yüzden integral ile toplam yer değiştirebilir. Buradan

$$\begin{aligned} D_z^\mu \left\{ z^{\lambda-1} f(z) \right\} &= \frac{z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \int_0^1 \xi^{\lambda+n-1} (1-\xi)^{-\mu-1} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \frac{z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 \xi^{\lambda+n-1} (1-\xi)^{-\mu-1} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_z^\mu \left\{ z^{\lambda+n-1} \right\} \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \frac{\Gamma(\lambda+n)\Gamma(-\mu)}{\Gamma(\lambda+n-\mu)} \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \frac{(\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu-1}\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^n \\ &\quad (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, \operatorname{Re}(\mu) < 0, |z| < \rho) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Ayrıca (4.7) den görülebilir ki $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ kısıtlamasına gerek yoktur. Sonuç olarak

Teorem 4.1 aşağıdaki gibi yazılabilir.

Teorem 4.2 Teorem 4.1' in kabulleri altında

$$\begin{aligned}
 D_z^\mu \{z^{\lambda-1} f(z)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_z^\mu \{z^{\lambda+n-1}\} \\
 &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda - \mu)} z^{\lambda - \mu - 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\lambda)_n}{(\lambda - \mu)_n} z^n \\
 &\quad (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, |z| < \rho)
 \end{aligned}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
 D_z^\mu \{z^{\lambda-1} f(z)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_z^\mu \{z^{\lambda+n-1}\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^m}{dz^m} \{D_z^{\mu-m} \{z^{\lambda+n-1}\}\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\mu + m)} \int_0^z t^{\lambda+n-1} (z-t)^{-\mu+m-1} dt \right\}, \left\{ \begin{array}{l} t = z\xi \\ dt = zd\xi \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\mu + m)} \int_0^1 \xi^{\lambda+n-1} z^{\lambda+n-1} (1-\xi)^{-\mu+m-1} z^{-\mu+m-1} zd\xi \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\mu + m)} z^{\lambda-\mu+m+n-1} \int_0^1 \xi^{\lambda+n-1} (1-\xi)^{-\mu+m-1} d\xi \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\mu + m)} z^{\lambda-\mu+m+n-1} \frac{\Gamma(\lambda+n)\Gamma(m-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+m+n)} \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda-\mu+m+n)} \frac{d^m}{dz^m} z^{\lambda-\mu+m+n-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda-\mu+m+n)} \frac{\Gamma(\lambda-\mu+m+n)}{\Gamma(\lambda-\mu+m+n-m)} z^{\lambda-\mu+n-1} \\
 &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^{\lambda-\mu+n-1} \\
 &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^n, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, |z| < \rho
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3

$$\begin{aligned}
 & D_z^{\lambda-\mu} \{ z^{\lambda-1} (1-az)^{-\alpha} (1-bz)^{-\beta} (1-cz)^{-\gamma} \} \\
 = & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_D^{(3)} (\lambda, \alpha, \beta, \gamma; \mu; az, bz, cz), \\
 & (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, |az| < 1, |bz| < 1, |cz| < 1.)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
 & D_y^{\lambda-\mu} \left\{ y^{\lambda-1} (1-y)^{-\alpha} {}_2F_1 \left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{1-y} \right) \right\} \\
 = & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} y^{\mu-1} F_2 (\alpha, \beta, \lambda; \gamma, \mu; x, y) \\
 & (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, |x| + |y| < 1.)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

dir.

İspat. (4.14) eşitliğinin sol tarafındaki $(1-az)^{-\alpha}$, $(1-bz)^{-\beta}$, $(1-cz)^{-\gamma}$ mn serisel ifadesi yerine yazılır ve kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 & D_z^{\lambda-\mu} \{ z^{\lambda-1} (1-az)^{-\alpha} (1-bz)^{-\beta} (1-cz)^{-\gamma} \} \\
 = & D_z^{\lambda-\mu} \left\{ z^{\lambda-1} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_n (\gamma)_p}{m! n! p!} a^m b^n c^p z^{m+n+p} \right\} \\
 = & \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_n (\gamma)_p}{m! n! p!} a^m b^n c^p D_z^{\lambda-\mu} \{ z^{m+n+p+\lambda-1} \} \\
 = & \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_n (\gamma)_p}{m! n! p!} a^m b^n c^p \frac{\Gamma(m+n+p+\lambda)}{\Gamma(m+n+p+\lambda-\lambda+\mu)} z^{m+n+p+\lambda-1-\lambda+\mu} \\
 = & \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_n (\gamma)_p}{m! n! p!} \frac{(az)^m (bz)^n (cz)^p (\lambda)_{m+n+p}}{(\mu)_{m+n+p} \Gamma(\mu)} z^{\mu-1} \\
 = & z^{\mu-1} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m+n+p}}{(\mu)_{m+n+p}} \frac{(\alpha)_m (\beta)_n (\gamma)_p}{m! n! p!} (az)^m (bz)^n (cz)^p \\
 = & z^{\mu-1} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} F_D^{(3)} (\lambda, \alpha, \beta, \gamma; \mu; az, bz, cz) \\
 & (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, |az| < 1, |bz| < 1, |cz| < 1.)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $F_D^{(3)}$ ler Lauricella fonksiyonlarıdır.

(4.15) eşitliğinin sol tarafındaki ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonunun serisel ifadesi

yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılrsa

$$\begin{aligned}
& D_y^{\lambda-\mu} \left\{ y^{\lambda-1} (1-y)^{-\alpha} {}_2F_1 \left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{1-y} \right) \right\} \\
&= D_y^{\lambda-\mu} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m} \frac{x^m (1-y)^{-m-\alpha}}{m!} y^{\lambda-1} \right\} \\
&= D_y^{\lambda-\mu} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m} \frac{(m+\alpha)_n}{m! n!} y^{n+\lambda-1} x^m \right\} \\
&= D_y^{\lambda-\mu} \left\{ \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m}{(\gamma)_m} \frac{x^m}{m! n!} y^{n+\lambda-1} \right\} \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m}{(\gamma)_m} \frac{x^m}{m! n!} D_y^{\lambda-\mu} \{ y^{n+\lambda-1} \} \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m}{(\gamma)_m} \frac{x^m}{m! n!} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\lambda-\lambda+\mu)} y^{n+\lambda-1-\lambda+\mu} \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m}{(\gamma)_m} \frac{x^m}{m! n!} \frac{(\lambda)_n \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu) (\mu)_n} y^{n+\mu-1} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} y^{\mu-1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m (\lambda)_n}{(\gamma)_m (\mu)_n} \frac{x^m y^n}{m! n!} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} y^{\mu-1} F_2 (\alpha, \beta, \lambda; \gamma, \mu; x, y) \\
&\quad (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, |x| + |y| < 1.)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak (4.14) de $c = 0$ alırsısa

$$\begin{aligned}
& D_z^{\lambda-\mu} \{ z^{\lambda-1} (1-az)^{-\alpha} (1-bz)^{-\beta} \} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_n (\lambda)_{m+n}}{m! n! (\mu)_{m+n}} (az)^m (bz)^n \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_1 (\lambda, \alpha, \beta; \mu; az, bz)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Yine özel olarak (4.14) de $a = 1, b = c = 0$ alırsısa

$$\begin{aligned}
D_z^{\lambda-\mu} \{ z^{\lambda-1} (1-z)^{-\alpha} \} &= z^{\mu-1} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\lambda)_m}{m! (\mu)_m} z^m \\
&= z^{\mu-1} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} {}_2F_1 (\lambda, \alpha; \mu; z) \\
&\quad (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, |z| < 1.)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir.

4.2 Lineer Doğrurucu Fonksiyonlar

$$[(1-x)-t]^{-\lambda} = (1-t)^{-\lambda} \left[1 - \frac{x}{1-t}\right]^{-\lambda} \quad (4.18)$$

$$[1-(1-x)t]^{-\lambda} = [1-t+xt]^{-\lambda} = [1-t]^{-\lambda} \left[1 + \frac{xt}{1-t}\right]^{-\lambda} \quad (4.19)$$

elemanter işlemlerini gözönüne alalım. (4.18) ifadesinden doğrurucu fonksiyon elde etmek için

$$\begin{aligned} [(1-x)-t]^{-\lambda} &= (1-x)^{-\lambda} \left[1 - \frac{t}{1-x}\right]^{-\lambda} \\ &= (1-x)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^n}, \quad \left|\frac{t}{1-x}\right| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} (1-x)^{-\lambda-n} t^n \\ &= (1-t)^{-\lambda} \left[1 - \frac{x}{1-t}\right]^{-\lambda} \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde yazalım. Bu ifadenin her iki yanı $x^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $D_x^{\alpha-\beta}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$D_x^{\alpha-\beta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} x^{\alpha-1} (1-x)^{-\lambda-n} t^n \right\} = (1-t)^{-\lambda} D_x^{\alpha-\beta} \left\{ x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{1-t}\right)^{-\lambda} \right\} \quad (4.21)$$

elde edilir. $|t| < |1-x|$ ve $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ olduğundan türevle toplam yer değiştirilebilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} D_x^{\alpha-\beta} \left\{ x^{\alpha-1} (1-x)^{-\lambda-n} \right\} t^n = (1-t)^{-\lambda} D_x^{\alpha-\beta} \left\{ x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{1-t}\right)^{-\lambda} \right\}$$

ve yukarıdaki ifadede (4.17) özelliği kullanılsa

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \beta; x) \frac{(\lambda)_n t^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \beta; x) t^n \\ &= (1-t)^{-\lambda} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} {}_2F_1\left(\lambda, \alpha; \beta; \frac{x}{1-t}\right) \\ &\quad (|x| < 1, |x| < |1-t|, |x| < \min\{1, |1-t|\}) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \beta; x) t^n = (1-t)^{-\lambda} {}_2F_1\left(\lambda, \alpha; \beta; \frac{x}{1-t}\right) \quad (4.22)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ yanı ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonları için bir doğrulucu fonksiyondur.

(4.19)' dan

$$[1 - (1 - x)t]^{-\lambda} = (1 - t)^{-\lambda} \left[1 + \frac{xt}{1 - t}\right]^{-\lambda}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} (1 - x)^n t^n = (1 - t)^{-\lambda} \left[1 + \frac{xt}{1 - t}\right]^{-\lambda}, \quad |1 - x| |t| < 1 \implies |t| < |1 - x|^{-1}$$

ifadesi eşitliğinin her iki tarafı $x^{\alpha-1} (1 - x)^{-\rho}$ ile çarpılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} x^{\alpha-1} (1 - x)^{n-\rho} t^n = (1 - t)^{-\lambda} x^{\alpha-1} (1 - x)^{-\rho} \left[1 + \frac{xt}{1 - t}\right]^{-\lambda}$$

ifadesi $|t| < |1 - x|^{-1}$ şartı sağlanmak üzere $D_x^{\alpha-\beta}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} D_x^{\alpha-\beta} \{x^{\alpha-1} (1 - x)^{n-\rho}\} t^n \\ &= (1 - t)^{-\lambda} D_x^{\alpha-\beta} \left\{ x^{\alpha-1} (1 - x)^{-\rho} \left(1 + \frac{xt}{1 - t}\right)^{-\lambda} \right\} \\ & \quad \left(|x| < 1, \left|\frac{xt}{1 - t}\right| < 1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.16) ve (4.17) den

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} x^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} {}_2F_1(\rho - n, \alpha; \beta; x) t^n \\ &= (1 - t)^{-\lambda} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} F_1 \left(\alpha, \rho, \lambda; \beta; x, \frac{-xt}{1 - t} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\rho - n, \alpha; \beta; x) t^n = (1 - t)^{-\lambda} F_1 \left(\alpha, \rho, \lambda; \beta; x, \frac{-xt}{1 - t} \right) \quad (4.23)$$

yazılabilir. (4.23) de $\lambda = \beta - \rho$ alınır ve

$$F_1(\alpha, \beta, \beta'; \beta + \beta'; x, y) = (1 - y)^{-\lambda} {}_2F_1 \left(\alpha, \beta; \beta + \beta'; \frac{x - y}{1 - y} \right)$$

bağıntısı kullanılsa, yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta-\rho)_n}{n!} {}_2F_1(\rho-n, \alpha; \beta; x) t^n &= (1-t)^{\rho-\beta} F_1\left(\alpha, \rho, \beta-\rho; \beta; x, \frac{-xt}{1-t}\right) \\
&= (1-t)^{\rho-\beta} \left(1 + \frac{xt}{1-t}\right)^{-\alpha} \\
&\quad \times {}_2F_1\left(\alpha, \rho; \beta; \frac{x + \frac{xt}{1-t}}{1 + \frac{xt}{1-t}}\right) \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta+\rho} (1-t+xt)^{-\alpha} \\
&\quad \times {}_2F_1\left(\rho, \alpha; \beta; \frac{x}{1-t+xt}\right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklinde yazılabilir. (4.24) de $\rho = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) t^n = (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} \tag{4.25}$$

elde edilir. Bu ifadeyi $t^{\gamma-1}$ ile çarpıp her iki tarafa $D_t^{\gamma-\delta}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&D_t^{\gamma-\delta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) t^{n+\gamma-1} \right\} \\
&= D_t^{\gamma-\delta} \{t^{\gamma-1} (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha}\} \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+\gamma-\gamma+\delta)} t^{n+\gamma-1-\gamma+\delta} \\
&= D_t^{\gamma-\delta} \{t^{\gamma-1} (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha}\} \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) \frac{(\gamma)_n \Gamma(\gamma)}{(\delta)_n \Gamma(\delta)} t^{n+\delta-1} \\
&= D_t^{\gamma-\delta} \{t^{\gamma-1} (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha}\} \\
&\quad \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} t^{\delta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{(\delta)_n} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) t^n \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} t^{\delta-1} F_1(\gamma, \beta-\alpha, \alpha; \delta; t, t-xt) \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{(\delta)_n} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) t^n = F_1(\gamma, \beta-\alpha, \alpha; \delta; t, t(1-x))
\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir.

4.3 Bilineer Doğurucu Fonksiyonlar

Bilineer doğurucu fonksiyonları elde etmek için bir önceki bölümde elde edilen Lineer doğurucu fonksiyonların bazı özellikleri kullanılacaktır.

Durum 4.1 t yerine $(1 - y)t$ alınarak elde edilen **Doğurucu Fonksiyonlar**

Alt bölümde elde edilen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda + n, \alpha; \beta; x) t^n = (1 - t)^{-\lambda} {}_2F_1\left(\lambda, \alpha; \beta; \frac{x}{1 - (1 - y)t}\right)$$

$$|x| < 1, \left| \frac{xt}{1 - t} \right| < 1$$

ifadesinde t yerine $(1 - y)t$ alınıp her iki taraf $y^{\gamma-1}$ ile çarpılıp $D_y^{\gamma-\delta}$ operatörü uygulanırsa,

$$D_y^{\gamma-\delta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda + n, \alpha; \beta; x) y^{\gamma-1} (1 - y)^n t^n \right] \quad (4.27)$$

$$= D_y^{\gamma-\delta} \left\{ y^{\gamma-1} (1 - (1 - y)t)^{-\lambda} {}_2F_1\left(\lambda, \alpha; \beta; \frac{x}{1 - (1 - y)t}\right) \right\}$$

elde edilir. $\operatorname{Re}(\gamma) > 0$ kısıtlaması, integralle, toplamın yer değiştirmesini sağlar.

$$|x| < 1, \left| \frac{1 - y}{1 - x} t \right| < 1 \text{ ve } \left| \frac{x}{1 - t} \right| + \left| \frac{yt}{1 - t} \right| < 1$$

kabulleri altında bilineer doğurucu fonksiyon elde etmek için (4.15) ve (4.17) formülleri (4.27) eşitliğine uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda + n, \alpha; \beta; x) D_y^{\gamma-\delta} \left\{ y^{\gamma-1} (1 - y)^n \right\} t^n$$

$$= D_y^{\gamma-\delta} \left\{ y^{\gamma-1} (1 - t)^{-\lambda} \left(1 + \frac{yt}{1 - t} \right)^{-\lambda} {}_2F_1\left(\lambda, \alpha; \beta; \frac{x}{1 + \frac{yt}{1 - t}}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \beta; x) \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} y^{\delta-1} {}_2F_1(\gamma, -n; \delta; y) t^n \\
&= (1-t)^{-\lambda} D_y^{\gamma-\delta} \left\{ y^{\gamma-1} \left(1 - \frac{-yt}{1-t}\right)^{-\lambda} {}_2F_1\left(\lambda, \alpha; \beta; \frac{x}{1-t}, \frac{-yt}{1-t}\right) \right\} \\
&= (1-t)^{-\lambda} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} y^{\delta-1} F_2\left(\lambda, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{x}{1-t}, \frac{-yt}{1-t}\right) \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\gamma, -n; \delta; y) t^n \\
&= (1-t)^{-\lambda} F_2\left(\lambda, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{x}{1-t}, \frac{-yt}{1-t}\right) \\
&\quad \left(|x| < 1, \left| \frac{x}{1-t} \right| + \left| \frac{yt}{1-t} \right| < 1, \left| \frac{x}{1-(1-y)t} \right| < 1 \right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir. Diğer yandan (4.25) eşitliğinde t yerine $(1-y)t$ alınır, her iki taraf $y^{\gamma-1}(1-wy)^{-\rho}$ ile çarpılır ve $D_y^{\gamma-\delta}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) t^n = (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} \\
& \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) D_y^{\gamma-\delta} \left\{ y^{\gamma-1} (1-y)^n (1-wy)^{-\rho} \right\} t^n \\
&= D_y^{\gamma-\delta} \left\{ (1-t+yt)^{\alpha-\beta} (1+t(x-1)-yt(x-1))^{-\alpha} y^{\gamma-1} (1-wy)^{-\rho} \right\} \\
& \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} y^{\delta-1} F_1(\gamma, -n, \rho; \delta; y, wy) t^n \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} \\
&\quad \times D_y^{\gamma-\delta} \left\{ \left(1 + \frac{yt}{1-t}\right)^{\alpha-\beta} \left(1 - \frac{yt(x-1)}{1-t+xt}\right)^{-\alpha} y^{\gamma-1} (1-wy)^{-\rho} \right\} \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} y^{\delta-1} F_D^{(3)} \left(\gamma, -\alpha + \beta, \alpha, \rho; \delta; \frac{-yt}{1-t}, \frac{yt(x-1)}{1-t+xt}, wy\right) \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) F_1(\gamma, -n, \rho; \delta; y, wy) t^n
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_D^{(3)} \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha, \rho; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{(x-1)yt}{1-t+xt}, wy\right)$$

elde edilir. Burada ρ keyfi parametredir.

(4.28) in özel durumlarını elde etmek için ilk olarak bu eşitlikte $\lambda = \beta - \rho$ yazılır ve

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1 - z)^{-b} {}_2F_1\left(c - a, b; c; \frac{z}{z - 1}\right)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta - \rho)_n}{n!} {}_2F_1(\beta - \rho + n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(-n, \gamma; \delta; y) t^n \\ &= (1 - t)^{\rho - \beta} F_2\left(\beta - \rho, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{x}{1 - t}, \frac{-yt}{1 - t}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta - \rho)_n}{n!} {}_2F_1\left(\rho - n, \alpha; \beta; \frac{x}{x - 1}\right) {}_2F_1(-n, \gamma; \delta; y) t^n \\ &= (1 - x)^{\alpha} (1 - t)^{\rho - \beta} F_2\left(\beta - \rho, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{x}{1 - t}, \frac{-yt}{1 - t}\right) \end{aligned}$$

olur. Burada $\frac{x}{x - 1}$ yerine x alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta - \rho)_n}{n!} {}_2F_1(\rho - n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(-n, \gamma; \delta; y) t^n \\ &= (1 - x)^{-\alpha} (1 - t)^{\rho - \beta} F_2\left(\beta - \rho, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{x}{(x - 1)(1 - t)}, \frac{yt}{t - 1}\right) \quad (4.30) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \alpha; x, y) = (1 - y)^{-\beta'} F_1\left(\beta, \alpha - \beta', \beta'; \gamma; x, \frac{x}{1 - y}\right)$$

bağıntısı yardımıyla (4.30) un $\rho = 0$ özel durumu

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(-n, \gamma; \delta; y) t^n \\
&= (1-x)^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} F_2 \left(\beta, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{x}{(1-x)(t-1)}, \frac{yt}{t-1} \right) \\
&= (1-x)^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} F_2 \left(\beta, \gamma, \alpha; \delta, \beta; \frac{yt}{t-1}, \frac{x}{(1-x)(t-1)} \right) \\
&= (1-x)^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} \left(1 - \frac{x}{(1-x)(t-1)} \right)^{-\alpha} \\
&\quad \times F_1 \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{\frac{yt}{t-1}}{1 - \frac{x}{(1-x)(t-1)}} \right) \\
&= (1-x)^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} \left(\frac{t-1-xt+x-x}{(1-x)(t-1)} \right)^{-\alpha} \\
&\quad \times F_1 \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{yt}{t-1} \frac{(1-x)(t-1)}{t-1-xt} \right) \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_1 \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{-(x-1)yt}{t-1-xt} \right) \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_1 \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{(x-1)yt}{1-t+xt} \right) \quad (4.31)
\end{aligned}$$

şeklinde bilineer doğrulucu fonksiyonu verir. (4.31) de $\delta = \beta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(-n, \gamma; \beta; y) t^n \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_1 \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha; \beta; \frac{yt}{t-1}, \frac{(x-1)yt}{1-t+xt} \right) \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_1 \left(\gamma, \alpha, \beta - \alpha; \beta; \frac{(x-1)yt}{1-t+xt}, \frac{yt}{t-1} \right) \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} \left(1 - \frac{yt}{t-1} \right)^{-\gamma} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(\gamma, \alpha; \beta; \frac{\frac{(x-1)yt}{1-t+xt} - \frac{yt}{t-1}}{1 - \frac{yt}{t-1}} \right) \\
&= (1-t)^{\alpha-\beta+\gamma} (1-t+xt)^{-\alpha} (1-t+yt)^{-\gamma} \quad (4.32) \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(\gamma, \alpha; \beta; \frac{xyt}{(1-t+xt)(1-t+yt)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$F_1(a, b, b'; b + b'; x, y) = (1-y)^{-a} {}_2F_1 \left(a, b; b + b'; \frac{x-y}{1-y} \right)$$

özelliği kullanılmıştır.

(4.29) bilateral bağıntısının özel bir durum elde etmek için $w = 1$ alırsa ve

$$F_1(a, b, b'; c; x, x) = {}_2F_1(a, b + b'; c; x)$$

eşitliği kullanılırsa, (4.29) bağıntısı

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) F_1(\gamma, -n, \rho; \delta; y, y) t^n \\ &= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_D^{(3)} \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha, \rho; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{(x-1)yt}{1-t+xt}, y \right) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\gamma, \rho - n; \delta; y) t^n \\ &= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_D^{(3)} \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha, \rho; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{(x-1)yt}{1-t+xt}, y \right) \end{aligned}$$

haline dönüşür. $\rho = 0$ için bu bağıntı

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) F_1(\gamma, -n, \delta; y) t^n \\ &= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{m+n+p} (\beta - \alpha)_m (\alpha)_n (\rho)_p}{(\delta)_{m+n+p}} \frac{\left(\frac{yt}{t-1}\right)^m \left(\frac{(x-1)yt}{1-t+xt}\right)^n y^p}{m!n!p!} \\ &= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{m+n} (\beta - \alpha)_m (\alpha)_n}{(\delta)_{m+n}} \frac{\left(\frac{yt}{t-1}\right)^m \left(\frac{(x-1)yt}{1-t+xt}\right)^n}{m!n!} \\ &= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_1 \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{(x-1)yt}{1-t+xt} \right) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\gamma, \rho - n; \delta; y) t^n \\ &= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_1 \left(\gamma, \beta - \alpha, \alpha; \delta; \frac{yt}{t-1}, \frac{(x-1)yt}{1-t+xt} \right) \end{aligned}$$

(4.31) bağıntısına indirgenir.

Durum 4.2 t yerine $\frac{t}{1-y}$ alınarak elde edilen **Doğurucu Fonksiyonlar**

(4.22) eşitliğinin her iki tarafı $y^{\gamma-1}$ ile çarpılıp $D_y^{\gamma-\delta}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & D_y^{\gamma-\delta} \left\{ y^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \beta; x) (1-y)^{-\lambda-n} t^n \right\} \\ &= (1-t)^{-\lambda} D_y^{\gamma-\delta} y^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (\alpha)_n}{n! (\beta)_n} \left(-\frac{xy}{1-t} \right)^n [1-y/(1-t)]^{-\lambda-n} \cdot \\ & \quad \times {}_2F_1 \left(\lambda+n, \alpha+n; \beta+n; \frac{x/(1-t)}{1-y/(1-t)} \right) \end{aligned}$$

olur.

$$\operatorname{Re}(\gamma) > 0, |x| < 1, |y| < 1, \left| \frac{t}{(1-x)(1-y)} \right| < 1$$

şartları altında toplamla türev yer değiştirebilir. Bu yüzden (4.15) ve (4.17) formüllerinden

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\lambda+n, \gamma; \delta; y) t^n \\ &= (1-t)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (\alpha)_n (\gamma)_n}{n! (\beta)_n (\delta)_n} \left(\frac{xy}{t-1} \right)^n \\ & \quad \times F_2 \left(\lambda+n, \alpha+n, \gamma+n; \beta+n, \delta+n; \frac{x}{1-t}, \frac{y}{1-t} \right) \end{aligned}$$

bilineer bir ilişki elde edilir.

$$[(1-x)(1-y)-t]^{-\lambda} = (1-t)^{-\lambda} \left[\left(1 - \frac{x}{1-t} \right) \left(1 - \frac{y}{1-t} \right) - \frac{xyt}{(1-t)^2} \right]^{-\lambda}$$

elemanter eşitliğinden

$$\left| \frac{t}{(1-x)(1-y)} \right| < 1 \text{ ve } \left| \frac{xyt}{(1-x-t)(1-y-t)} \right| < 1$$

özelliklerinden

$$\begin{aligned} & D_x^{\alpha-\beta} D_y^{\gamma-\delta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} x^{\alpha-1} (1-x)^{-\lambda-n} y^{\gamma-1} (1-y)^{-\lambda-n} t^n \right\} \\ &= (1-t)^{-\lambda} D_x^{\alpha-\beta} D_y^{\gamma-\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n t^n}{n! (1-t)^{2n}} x^{\alpha+n-1} \left(1 - \frac{x}{1-t} \right)^{-\lambda-n} \\ & \quad \times y^{\gamma+n-1} \left(1 - \frac{y}{1-t} \right)^{-\lambda-n} \end{aligned}$$

elde edilir. $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma) > 0$ ve $\left| \frac{x}{1-t} \right| < 1$, $\left| \frac{y}{1-t} \right| < 1$ şartları altında

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\lambda+n, \gamma; \delta; y) t^n \\ &= (1-t)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (\alpha)_n (\gamma)_n}{n! (\beta)_n (\delta)_n} \left[\frac{xyt}{(1-t)^2} \right]^n \\ & \quad \times {}_2F_1 \left(\lambda+n, \alpha+n; \beta+n; \frac{x}{1-t} \right) {}_2F_1 \left(\lambda+n, \gamma+n; \delta+n; \frac{y}{1-t} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

yazılabilir. $\beta = \delta = \lambda$ için (4.33) eşitliği

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\lambda+n, \alpha; \lambda; x) {}_2F_1(\lambda+n, \gamma; \lambda; y) t^n \\ &= (1-t)^{\alpha+\gamma-\lambda} (1-x-t)^{-\alpha} (1-t-y)^{-\gamma} \\ & \quad \times {}_2F_1 \left(\alpha, \gamma; \lambda; \frac{xyt}{(1-x-t)(1-y-t)} \right) \end{aligned}$$

eşitliğine indirgenir. (4.23), (4.25) ve (4.26) doğurucu fonksiyonları kullanılarak benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1(\rho-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\lambda+n, \gamma; \delta; y) t^n \\ &= (1-t)^{-\lambda} F_M \left(\gamma, \alpha, \alpha, \lambda, \rho, \lambda; \delta, \beta, \beta; \frac{y}{1-t}, x, \frac{xt}{1-t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\lambda+n, \gamma; \delta; y) t^n \\ &= (1-t)^{\alpha-\beta} (1-t+xt)^{-\alpha} F_D^{(3)} \left(\gamma, \beta-\alpha, \alpha, \lambda-\beta; \delta; \frac{y}{1-t}, \frac{y}{1-t+xt}, y \right) \\ & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{n! (\delta)_n} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\gamma+n, \lambda; \mu; y) t^n \\ &= F_G(\gamma, \gamma, \gamma, \lambda, \beta, -\alpha; \mu, \delta, \delta; y, t, (1-x)t) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilebilir.

Durum 4.3 t yerine yt ya da $yt/1 - y$ alınarak elde edilen Doğurucu Fonksiyonlar

(4.25) de t yerine $yt/1 - y$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{n! (\delta)_n} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\lambda, \gamma + n; \delta + n; y) t^n \\ &= F_D^{(3)}(\gamma, \beta - \alpha, \alpha, \lambda; \delta; t, (1-x)t, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar (4.25) de t yerine $yt/1 - y$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{n! (\delta)_n} {}_2F_1(-n, \alpha; \beta; x) {}_2F_1(\beta + n, \gamma + n; \delta + n; y) t^n \\ &= F_1(\gamma, \beta - \alpha, \alpha; \delta; y + t, y + (1-x)t) \end{aligned}$$

bulunur ki bu eşitlikler bilineer doğrurucu fonksiyon olarak bilinir.

5. KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA ÇOK DEĞİŞKENLİ JACOBI POLİNOMLARI İÇİN DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Kesirli Kalkülüs konusu üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Geçmiş yıllarda, keyfi (kesirli) sınırları olan Laguerre polinomları, genelleştirilmiş Legendre polinomları ve genelleştirilmiş Gegenbauer fonksiyonları tanımlanmıştır ve çok değişkenli fonksiyonların kesirli türevleri (Riemann-Liouville) elde edilmiştir. Bunlara ek olarak pek çok alanda Matematiksel Analizin sahası olarak kesirli kalkülüs operatörlerinin uygulamaları tartışılmıştır. Hipergeometrik Fonksiyonlar Teorisinde, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerde ve integral denklemlerde kesirli türevin kullandığını içeren birçok örnek vardır. Kesirli kalkülüs teorisinde en çok tartışılan araçlardan bir tanesi differintegral operatörü ${}_cD_z^\mu$ dir ve daha önceki bölümde verildiği gibi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}_cD_z^\mu \{f(z)\} \quad (5.1)$$

$$:= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_c^z (z-\xi)^{-\mu-1} f(\xi) d\xi , & (c \in \mathbb{R}, \mathbb{R}(\mu) < 0) \\ \frac{d^m}{dz^m} {}_cD_z^{\mu-m} \{f(z)\} , & (m-1 \leq \operatorname{Re}(\mu) < m, m \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

integralin var olması koşuluyla. (5.1) de $c = 0$ alınırsa D_z^μ operatörü

$$D_z^\mu \{f(z)\} := {}_0D_z^\mu \{f(z)\} \quad (\mu \in \mathbb{C}) \quad (5.2)$$

olur. Temel olarak klasik Riemann-Liouville kesirli türevi (ya da integrali) μ ($-\mu$) sınırlıyla verilir:

$$D_z^\mu \{z^\lambda\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} z^{\lambda-\mu}$$

$$(\operatorname{Re}(\lambda) > -1),$$

dir. Benzer şekilde (5.1) de

$$f(z) = z^{\lambda-1} (1-az)^{-\alpha} (1-bz)^{-\beta} (1-cz)^{-\gamma}$$

alınırsa

$$D_z^{\lambda-\mu} \left\{ z^{\lambda-1} (1-az)^{-\alpha} (1-bz)^{-\beta} (1-cz)^{-\gamma} \right\} \quad (5.3)$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_D^{(3)} [\lambda, \alpha, \beta, \gamma; \mu; az, bz, cz]$$

$$(\operatorname{Re}(\lambda) > 0, |az| < 1, |bz| < 1, |cz| < 1)$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} & D_y^{\lambda-\mu} \left\{ y^{\lambda-1} (1-y)^{-\alpha} {}_2F_1 \left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{1-y} \right) \right\} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} y^{\mu-1} F_2 [\alpha, \beta, \lambda; \gamma, \mu; x, y] \\ & \quad (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, |x| + |y| < 1) \end{aligned} \quad (5.4)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu bölümün temel amacı kesirli türev yardımıyla çok değişkenli Jacobi polinomları için doğrulucu fonksiyonlar elde etmektir. $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ klasik Jacobi polinomları için Rodrigues formulü ve bu polinolamların hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesi sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(-1)^n (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta}}{2^n n!} \\ &\quad \times \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right\} \\ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, \alpha+\beta+n+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

tanımlanır. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar ise ${}_rF_s$ ile gösterilir:

$${}_rF_s (\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} \frac{x^n}{n!}$$

ve şeklinde tanımlanır.

Burada $(\lambda)_k := \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+k-1)$ ve $(\lambda)_0 := 1$ Pochhammer sembolünü göstermektedir. Bu polinomlar $(-1, 1)$ aralığında,

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta.$$

ağırlık fonsiyonuna göre ortogonaldır. Bunu sonucu olarak Jacobi polinomları,

$$P_n^{*(\alpha, \beta)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(2x-1)$$

$\omega(x) = x^\beta (1-x)^\alpha$ ağırlık fonsiyonuna göre $(0, 1)$ aralığında ortogonaldır. $P_n^{*(\alpha, \beta)}(x)$ çok değişkenli Genişletilmiş Jacobi Polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_r)}(x_1, \dots, x_r) &= P_{n_1}^{*(\alpha_1, \beta_1)}(x_1) \dots P_{n_r}^{*(\alpha_r, \beta_r)}(x_r) \\ &= P_{\mathbf{n}}^{*(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_r)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Burada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ ve $\mathbf{n} = n_1 + \dots + n_r$; $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0\} \cup \{1, 2, \dots\}$ dir. Çok değişkenli Jacobi polinomları $P_{\mathbf{n}}^{*(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_r)}(\mathbf{x})$,

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_r) : 0 < x_i < 1; i = 1, 2, \dots, r\}.$$

bölgesi üzerinde,

$$\omega(x_1, \dots, x_r) = \omega_1(x_1) \dots \omega_r(x_r) = (1 - x_1)^{\alpha_1} x_1^{\beta_1} \dots (1 - x_r)^{\alpha_r} x_r^{\beta_r}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

Çok değişkenli Jacobi polinomlarının genişletmeleri olan $P_n^{*(\alpha, \beta)}(x)$ polinomları, kesirli türev operatörleri yardımıyla tanımlandı ve polinomlar için çeşitli karışık doğruncu fonksiyonlar kesirli türev operatörleri yardımıyla elde edildi

5.1 Kesirli Türev Yardımıyla Çok Değişkenli Jacobi Polinomları

Bu bölümde kesirli türev operatörü yardımıyla Çok değişkenli Jacobi polinomları için çeşitli doğruncu fonksiyonlar elde edildi.

Teorem 5.1 Çok değişkenli Jacobi Polinomları

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{n}}^{*(\alpha - \boldsymbol{\rho} - \mathbf{n}; \beta + \boldsymbol{\rho})}(\mathbf{x}) &= P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha - \boldsymbol{\rho} - \mathbf{n}; \beta + \boldsymbol{\rho})}(x_1, \dots, x_r) \\ &= \prod_{i=1}^r \frac{(-1)^{n_i} \Gamma(\beta_i + \rho_i + n_i + 1) x_i^{-(\beta_i + \rho_i)}}{n_i! \Gamma(\alpha_i + \beta_i + 1)} \\ &\quad \times D_{x_1}^{\alpha_1 - \rho_1} \dots D_{x_r}^{\alpha_r - \rho_r} \left\{ \prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j + \beta_j} (1 - x_j)^{n_j} \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

eşitliğini sağlarlar. Burada $D_{x_i}^{\alpha_i - \rho_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) (5.2) de tanımladığı gibidir ve

$$\operatorname{Re}(\beta_i + \rho_i) > -1, \quad \operatorname{Re}(\alpha_i + \beta_i) > -1, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\rho} - \mathbf{n}; \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\rho}) = (\alpha_1 - \rho_1 - n_1, \dots, \alpha_r - \rho_r - n_r; \beta_1 + \rho_1, \dots, \beta_r + \rho_r).$$

dir.

Theorem 5.2 (5.7) ile tanımlanan $P_n^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)}(\mathbf{x})$ çok değişkenli Jacobi polinomları

(i)

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1)_{n_1} \dots (\lambda_r)_{n_r} (-1)^{\mathbf{n}}}{(\beta_1 + \rho_1 + 1)_{n_1} \dots (\beta_r + \rho_r + 1)_{n_r}} \\ & \times P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)}(x_1, \dots, x_r) t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r} \\ & = \prod_{i=1}^r (1 - t_i)^{-\lambda_i} {}_2F_1 \left[\alpha_i + \beta_i + 1, \lambda_i; \beta_i + \rho_i + 1; -\frac{x_i t_i}{1 - t_i} \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x_1, \dots, x_r) t^n$$

$$= \prod_{i=1}^r (1 - t)^{-\lambda_i} {}_2F_1 \left[\alpha_i + \beta_i + 1, \lambda_i; \beta_i + \rho_i + 1; -\frac{x_i t}{1 - t} \right] \quad (5.9)$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} & y_n(x_1, \dots, x_r) \\ & = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \dots \sum_{n_{r-1}=0}^{n-n_1-\dots-n_{r-2}} \delta_n(n_1, \dots, n_{r-1}) \\ & \times P_{n-(n_1+\dots+n_{r-1}), n_1, \dots, n_{r-1}}^{*(\alpha_1-\rho_1-n_1+\dots+n_{r-1}, \alpha_2-\rho_2-n_1, \dots, \alpha_r-\rho_r-n_{r-1}; \beta_1+\rho_1, \dots, \beta_r+\rho_r)}(x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

dir ve ayrıca

$$\delta_n(n_1, \dots, n_{r-1}) = \frac{(-1)^n (\lambda_1)_{n-(n_1+\dots+n_{r-1})} (\lambda_2)_{n_1} \dots (\lambda_r)_{n_{r-1}}}{(\beta_1 + \rho_1 + 1)_{n-(n_1+\dots+n_{r-1})} (\beta_2 + \rho_2 + 1)_{n_1} \dots (\beta_r + \rho_r + 1)_{n_{r-1}}}.$$

dir.

İspat. (i) Aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım.

$$\prod_{i=1}^r [1 - (1 - x_i) t_i]^{-\lambda_i} = \prod_{i=1}^r (1 - t_i)^{-\lambda_i} \left(1 + \frac{x_i t_i}{1 - t_i} \right)^{-\lambda_i}. \quad (5.10)$$

Eğer (5.10) ün sol tarafı tekrar yazılırsa

$$\sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1)_{n_1} \dots (\lambda_r)_{n_r}}{n_1! \dots n_r!} (1 - x_1)^{n_1} t_1^{n_1} \dots (1 - x_r)^{n_r} t_r^{n_r} = \prod_{i=1}^r (1 - t_i)^{-\lambda_i} \left(1 + \frac{x_i t_i}{1 - t_i} \right)^{-\lambda_i}. \quad (5.11)$$

elde edilir. (5.11) in her iki tarafını $x_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots x_r^{\alpha_r+\beta_r}$ ile çarpılır ve $D_{x_1}^{\alpha_1-\rho_1} \dots D_{x_r}^{\alpha_r-\rho_r}$ kesirli türev operatörü uygulanır ve (5.3) ve (5.7).gözönüne alınırsa (i) ile gösterilen

eşitlik elde edilir.

(ii) (5.10) de t_i ($i = 1, \dots, r$) yerine t alınırsa ve benzer hesaplamalar yapılınrsa, (5.9) eşitliği elde edilir.

Sonuç 5.1 Eğer Teorem 5.2 (i) de $\lambda_i = -k_i$ ($i = 1, \dots, r$) alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{k_1, \dots, k_r} \frac{(-k_1)_{n_1} \dots (-k_r)_{n_r} (-1)^{\mathbf{n}}}{(\beta_1 + \rho_1 + 1)_{n_1} \dots (\beta_r + \rho_r + 1)_{n_r}} P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)} (x_1, \dots, x_r) t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r} \\ &= \prod_{i=1}^r (1 - t_i)^{k_i} {}_2F_1 \left[\alpha_i + \beta_i + 1, -k_i; \beta_i + \rho_i + 1; -\frac{x_i t_i}{1 - t_i} \right]. \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer Teorem 5.2 (i) ye kesirli türev operatörleri uygulanırsa, çok değişkenli Jacobi polinomları $P_{\mathbf{n}}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)} (\mathbf{x})$ için aşağıdaki karışık doğurucu fonksiyonlar elde edilir:

Teorem 5.3 $P_{\mathbf{n}}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)} (\mathbf{x})$ çok değişkenli Jacobi polinomları ve F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonları için karışık doğurucu fonksiyonlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} (-1)^{\mathbf{n}} P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)} (\mathbf{x}) F_1 (\gamma_1, \rho_1, -n_1; \delta_1; w_1 y_1, y_1) \\ & \quad \times \dots \times F_1 (\gamma_r, \rho_r, -n_r; \delta_r; w_r y_r, y_r) t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r} \\ &= \prod_{i=1}^r \left\{ (1 - t_i)^{\alpha_i - \rho_i} (1 - t_i + x_i t_i)^{-(\alpha_i + \beta_i + 1)} \right. \\ & \quad \left. \times F_D^{(3)} \left(\gamma_i, \rho_i, -\alpha_i + \rho_i, \alpha_i + \beta_i + 1; \delta_i; w_i y_i, \frac{t_i y_i}{t_i - 1}, \frac{(x_i - 1) t_i y_i}{1 - t_i + x_i t_i} \right) \right\} \end{aligned}$$

İspat. $P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)} (\mathbf{x})$ çok değişkenli Jacobi polinomları için

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^r {}_2F_1 (-n_i, \alpha_i + \beta_i + 1; \beta_i + \rho_i + 1; x_i) \\ &= \prod_{i=1}^r \frac{n_i!}{(\beta_i + \rho_i + 1)_{n_i}} P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)} (\mathbf{x}) (-1)^{\mathbf{n}} \end{aligned} \tag{5.12}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} {}_2F_1 (-n, \alpha; \beta; x) t^n = (1 - t)^{\alpha - \beta} (1 - t + xt)^{-\alpha}.$$

eşitlikleri gözönüne alımlırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)}(\mathbf{x}) (-1)^{\mathbf{n}} t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r} \\ & = \prod_{i=1}^r (1-t_i)^{\alpha_i-\rho_i} (1-t_i+x_i t_i)^{-(\alpha_i+\beta_i+1)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.13) de $(1-y_i)t_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) yerine t_i alımlı, (5.13) nin her iki tarafı $y_i^{\gamma_i-1}(1-w_iy_i)^{-\rho_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) ile çarpılıp ve $D_{y_1}^{\gamma_1-\delta_1} \dots D_{y_r}^{\gamma_r-\delta_r}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa; çok değişkenli Jacobi polinomları ve F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonları için karışık doğruncu fonksiyonlar elde edilir.

Sonuç 5.2 Teorem 5.3 de $\rho_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$) alımlısa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} (-1)^{\mathbf{n}} P_{n_1, \dots, n_r}^{*(\alpha-\mathbf{n}; \beta)}(\mathbf{x}) {}_2F_1(\gamma_1, -n_1; \delta_1; y_1) \\ & \times \dots \times {}_2F_1(\gamma_r, -n_r; \delta_r; y_r) t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r} \\ & = \prod_{i=1}^r \left\{ (1-t_i)^{\alpha_i} (1-t_i+x_i t_i)^{-(\alpha_i+\beta_i+1)} \right. \\ & \left. \times F_1 \left(\gamma_i, -\alpha_i, \alpha_i + \beta_i + 1; \delta_i; \frac{t_i y_i}{t_i - 1}, \frac{(x_i - 1) t_i y_i}{1 - t_i + x_i t_i} \right) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{n}; \boldsymbol{\beta}) = (\alpha_1 - n_1, \dots, \alpha_r - n_r; \beta_1, \dots, \beta_r).$$

dr.

Teorem 5.4 Çok değişkenli Jacobi polinomları ve ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonları için diğer bir doğruncu fonksiyon

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} H(n_1, \dots, n_r) P_{\mathbf{n}}^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)}(\mathbf{x}) {}_2F_1(\gamma_1, \lambda_1 + n_1; \delta_1; y_1) \\ & \times \dots \times {}_2F_1(\gamma_r, \lambda_r + n_r; \delta_r; y_r) t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r} \\ & = \prod_{i=1}^r (1-t_i)^{-\lambda_i} F_2 \left(\lambda_i, \alpha_i + \beta_i + 1, \gamma_i; \beta_i + \rho_i + 1, \delta_i; \frac{-x_i t_i}{1 - t_i}, \frac{y_i}{1 - t_i} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Burada,

$$H(n_1, \dots, n_r) = \prod_{i=1}^r \frac{(\lambda_i)_{n_i} (-1)^{n_i}}{(\beta_i + \rho_i + 1)_{n_i}}.$$

dir.

İspat. Teorem 5.2 (i) de, eğer t_i ($i = 1, 2, \dots, r$) yerine $\frac{t_i}{1 - y_i}$ alınıp, $y_1^{\gamma_1 - 1} \dots y_r^{\gamma_r - 1}$ çarpılıp, $D_{y_1}^{\gamma_1 - \delta_1} \dots D_{y_r}^{\gamma_r - \delta_r}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa, istenilen karışık doğrucu fonksiyon elde edilir.

Teorem 5.5 $P_n^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)}(\mathbf{x})$ çok değişkenli Jacobi polinomları olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} l(n_1, \dots, n_r) P_n^{*(\alpha-\rho-\mathbf{n}; \beta+\rho)}(\mathbf{x}) y_1^{\lambda_1+n_1} \dots y_r^{\lambda_r+n_r} t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r} \\ &= \prod_{i=1}^r \frac{\Gamma(\lambda_i + \delta_i)}{\Gamma(\lambda_i + \gamma_i)} \frac{\Gamma(\gamma_i)}{\Gamma(\delta_i)} (-t_i)^{-\lambda_i} F_2 \left(\lambda_i, \alpha_i + \beta_i + 1, \gamma_i; \beta_i + \rho_i + 1, \delta_i; x_i, \frac{1}{y_i t_i} \right) \end{aligned}$$

bir. Burada

$$l(n_1, \dots, n_r) = \prod_{i=1}^r \frac{(\lambda_i)_{n_i} (-1)^{n_i}}{(\beta_i + \rho_i + 1)_{n_i}} \frac{(\lambda_i + \gamma_i)_{n_i}}{(\lambda_i + \delta_i)_{n_i}}.$$

dir.

İspat. Teorem 5.2 (i) de $y_i t_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) yerine t_i alınıp, (5.8) in her iki tarafı $y_1^{\lambda_1 + \gamma_1 - 1} \dots y_r^{\lambda_r + \gamma_r - 1}$, ile çarpılıp, $D_{y_1}^{\gamma_1 - \delta_1} \dots D_{y_r}^{\gamma_r - \delta_r}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa ve sonra (5.4) kullanılırsa, istenilen sonuç elde edilir.

(5.7) de $r = 1$ alınırsa $P_n^{*(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_r)}(x_1, \dots, x_r)$ çok değişkenli Jacobi polinomları, $P_n^{*(\alpha-\rho-n, \beta+\rho)}(x)$ klasik Jacobi polinomlarına indirgenir. ve bu polinomlar kesirli türev yardımıyla

$$\begin{aligned} P_n^{*(\alpha-\rho-n, \beta+\rho)}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma(\beta + \rho + n + 1) x^{-(\beta+\rho)}}{n! \Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &\times D_x^{\alpha-\rho} \{ x^{\alpha+\beta} (1-x)^n \} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırlar. Burada $\Re(\beta + \rho) > -1$ ve $\Re(\alpha + \beta) > -1$ dir. $P_n^{*(\alpha-\rho-n, \beta+\rho)}(x)$ Jacobi polinomları için

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (-1)^n}{(\beta + \rho + 1)_n} P_n^{*(\alpha-\rho-n, \beta+\rho)}(x) t^n \\ &= (1-t)^{-\lambda} {}_2F_1 \left[\alpha + \beta + 1, \lambda; \beta + \rho + 1; -\frac{xt}{1-t} \right] \end{aligned} \tag{5.14}$$

dir ve aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (-1)^n}{(\beta + \rho + 1)_n} P_n^{*(\alpha - \rho - n, \beta + \rho)}(x) t^n \\ &= (1-t)^k {}_2F_1 \left[\alpha + \beta + 1, -k; \beta + \rho + 1; -\frac{xt}{1-t} \right] \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (-1)^n}{(\beta + \rho + 1)_n} P_n^{*(\alpha - \rho - n, \beta + \rho)}(x) t^n \\ &= \frac{(t-1)^k k!}{(\beta + \rho + 1)_k} P_k^{*(\alpha - \rho - k, \beta + \rho)} \left(-\frac{xt}{1-t} \right) \end{aligned}$$

dir. (5.14) eşitliği (Srivastava, p. 108, Eq. (16)) daki eşitliğin özel bir durumunu verir. Yukarıda elde edilen teoremlerin sonucu olarak $P_n^{*(\alpha - \rho - n, \beta + \rho)}(x)$ Jacobi polinomları için aşağıdaki bilateral doğruncu fonksiyonlar elde edilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{*(\alpha - \rho - n, \beta + \rho)}(x) F_1(\gamma, \rho, -n; \delta; wy, y) (-t)^n \\ &= (1-t)^{\alpha - \rho} (1-t+xt)^{-(\alpha+\beta+1)} \\ &\quad \times F_D^{(3)} \left(\gamma, \rho, -\alpha + \rho, \alpha + \beta + 1; \delta; wy, \frac{ty}{t-1}, \frac{(x-1)ty}{1-t+xt} \right) \\ &\quad \left(\max \left\{ |y|, |wy|, \left| \frac{ty}{t-1} \right|, \left| \frac{(x-1)ty}{1-t+xt} \right| \right\} < 1 \right), \\ \\ & \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{*(\alpha - n, \beta)}(x) {}_2F_1(\gamma, -n; \delta; y) (-t)^n \\ &= (1-t)^{\alpha} (1-t+xt)^{-(\alpha+\beta+1)} F_1 \left(\gamma, -\alpha, \alpha + \beta + 1; \delta; \frac{ty}{t-1}, \frac{(x-1)ty}{1-t+xt} \right), \\ \\ & \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n (-1)^n P_n^{*(\alpha - \rho - n, \beta + \rho)}(x) {}_2F_1(\gamma, \lambda + n; \delta; y) t^n \\ &= (1-t)^{-\lambda} F_2 \left(\lambda, \alpha + \beta + 1, \gamma; \beta + \rho + 1, \delta; \frac{-xt}{1-t}, \frac{y}{1-t} \right) \\ &\quad \left(|y| < 1, \left| \frac{xt}{1-t} \right| + \left| \frac{y}{1-t} \right| < 1 \right), \\ \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (-1)^n (\lambda + \gamma)_n}{(\beta + \rho + 1)_n (\lambda + \delta)_n} P_n^{*(\alpha - \rho - n, \beta + \rho)}(x) y^{\lambda+n} t^n \\ &= \frac{\Gamma(\lambda + \delta)}{\Gamma(\lambda + \gamma)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} (-t)^{-\lambda} F_2 \left(\lambda, \alpha + \beta + 1, \gamma; \beta + \rho + 1, \delta; x, \frac{1}{yt} \right) \\ &\quad (|x| + |yt|^{-1} < 1). \end{aligned}$$

KAYNAKLAR

- Aktaş, R., Şahin, R. and Taşdelen, F. 2010. Multivariable Jacobi Polynomials via Fractional Calculus, (submitted to *Questiones Mathematicae*.)
- Appell, P. et Kampé de Fériet, J. 1926. Fonctions hypergéométriques et hypersériques. Polynomes d'Hermite. Paris, Gauthier-Villars et Cie.
- Askey, R. 1975. Orthogonal Polynomials and Special Functions, Pennsylvania, 113.
- Bailey, W. N. 1964. Generalized Hypergeometric Series Stechert-Hafner Service Agency, New York and London.
- Chaurasia, V. B. L. and Godika, A. 2001. A. Fractional derivatives of certain special functions, *Tamkang J. Math.*, 32 (2), 103-109.
- Chen, M. and Srivastava, H. M. 1997. Fractional calculus operators and their applications involving power functions and summation of series, *Appl. Math. Comput.*, 81, 287-304.
- El-Sayed, A. M. A., 2000. Laguerre polynomials of arbitrary (fractional) orders, *Appl. Math. Comput.*, 109 (1), 1-9.
- Erdélyi, A., W. Magnus, Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G. 1955. Higher Transcendental Functions, Vol. III, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London.
- Miller, K. S. and Ross, B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto and Singapore.
- Moustafa, O. L. 1999. On the generalized Legendre polynomials of arbitrary (fractional) orders, *J. Fract. Calc.*, 16 , 13-18.
- Oldham, K. B. and Spanier, J. 1974. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Academic Press, New York and London.
- Rainville, E. D. 1973. Special Functions, The Macmillan Company, New York.

- Rassias, T.M. and Srivastava, H. M. 1993. Some general families of generating functions for the Laguerre polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 174; 528-538.
- Rice, S. O. 1940. Some properties of ${}_3F_2(-n, n+1, \zeta; 1, p; v)$, *Duke Math. Journal*, 6 108-119.
- Rida, S. Z. 2004. On the generalized ultraspherical or Gegenbauer functions of fractional orders, *Appl. Math. Comput.*, 151 (2), 543-565.
- Ross, B. 1975. Fractional Calculus and Its Applications (Proceedings of the International Conference held at the University of New Haven, June 1974), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.
- Slater, L. J. 1966. Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge.
- Srivastava, H. M. and Manocha, H. L. A. 1984. Treatise on Generating Functions, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, 284-300.
- Srivastava, H. M. and Karlsson, P. W. 1985. Multiple Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press (John Wiley and Sons), New York.
- Srivastava, H. M. and Owa, S. (Eds.) 1989. Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, and Toronto.
- Szegö, G. 1975. Orthogonal polynomials, fourth ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23.
- Şahin, R. and Altın, A. 2010. An extension of F_1 , F_2 , F_3 Appell's hypergeometric functions, *Ars Combinatoria*, In press.
- Şahin, R. 2011. Çok değişkenli Hipergeometrik fonksiyonlar, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Ens. Doktora Tezi.
- Taşdelen, F. and Altın, A. 2003. Some solutions and Almansi expansion for a class of higher order equations with variable coefficients. *Int. J. Comput. Numer. Anal. Appl.*, 4 no.4; 355-369.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ertuğrul ÜNLÜ

Doğum Yeri: Yenimahalle

Doğum Tarihi: 12.10.1985

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Yahya Kemal Beyatlı Lisesi (2002)

Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Anabilim Dalı (2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

- Türk Amerikan Derneği,
Danışma, Kütüphane Görevlisi (2007-2010)
- Türkiye İş Bankası Meşrutiyet Şubesi,
Memur (Ocak 2011-...)

Yayınları: