T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
(MATEMATİK EĞİTİMİ PROGRAMI)

GEOGEBRA YAZILIMI ORTAMINDA İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GEOMETRİK İSPAT BİÇİMLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuba CEYLAN

Ankara

Şubat, 2012

T.C.

ANKARA ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

(MATEMATİK EĞİTİMİ PROGRAMI)

GEOGEBRA YAZILIMI ORTAMINDA İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GEOMETRİK İSPAT BİÇİMLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÖNERİSİ

Tuba CEYLAN

Danışman: Prof. Dr. Sinan OLKUN

Ankara

Şubat, 2012

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI RAPORU olarak kabul edilmiştir.

Başkan

....

Prof. Dr. Sinan OLKUN

Üye

Renan Sezer ....

Doç. Dr. Seniye Renan SEZER

Üye

....

Yrd. Doç. Dr. Muharrem AKTÜMEN

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylıyorum.

.../.../......

Prof. Dr. Nejla KURUL

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Hızlı bir şekilde gelişen teknoloji ile birlikte günlük hayat ve birçok iş alanında dünya şartları değişmiştir. Bu değişimin eğitim ortamlarında da uygulanması bireylerin okul dersleri ve günlük hayat arasında bağlantı kurmalarına yardımcı olarak daha kolay bir şekilde öğrenmelerini sağlamaktadır. Böylece hızlı bir şekilde gelişen dünyaya ayak uydurmanın en kolay yolu teknolojinin bize getirmiş olduğu sınırsız imkânlardan faydalanmaktır. Bu sebeple matematik eğitimi için hazırlanmış GeoGebra yazılımını tezimin uygulamalarında kullanarak teknolojinin eğitim ortamlarına yansımasının bir örneğini sunmak istedim.

Hazırlamış olduğum tez konumun belirlenmesinde, tezin her aşamasında ve akademisyenlik hayatımın başlangıcında değerli düşünceleriyle bana yol gösteren tez danışmanım Prof. Dr. Sinan OLKUN' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez hazırlama sürecinin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, zorlukları aşmama yardımcı olan değerli dostum Arş. Gör. Avni YILDIZ'a içtenlikle teşekkür ediyorum.

Uygulama sürecinde bana gerekli imkânları sağlayan Yrd. Doç. Dr. Muharrem AKTÜMEN'e ve Ahi Evran Üniversitesi'nde çalışan yardımlarını benden esirgemeyen araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Her zaman yanımda olan ve en umutsuz günlerimde bile beni yüreklendiren abime, anneme, babama ve kardeşime teşekkür ediyorum.

ÖZET

Bu çalışmanın amacı 2. sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra dinamik matematik yazılımı yardımıyla geometriye yönelik ispat yapma becerilerinin incelenmesi ve kullanmış oldukları ispat biçimlerinin belirlenmesidir. Yapılan çalışma nitel bir araştırma modeli olan durum çalışmasıdır. Araştırmanın katılımcılarını 2010-2011 eğitim öğretim yılında Orta Anadolu'da bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan farklı düzeylerde bulunan 2. sınıf 6 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Katılımcılar araştırmacı tarafından amaçsal örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Uygulama sürecinde öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerini belirlemek için yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Klinik mülakat sürecinde öğretmen adayları verilen ispat problemlerini GeoGebra yazılımını kullanarak çözmüşlerdir. Öğretmen adaylarının yapmış olduğu çözümler Wink programı ve ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Daha sonra ses kayıtları yazılı doküman haline getirilip Wink programı ile elde edilen ekranlarla karşılaştırılmıştır.

Araştırmanın sonucunda öğretmen adayları verilen bir ispat probleminde GeoGebra yazılımını amaçları doğrultusunda kullanabilmişler ve çözüm sürecinde doğru sonuca ulaşmak için yazılımda yer alan birçok araçtan yararlanmışlardır. Böylece öğretmen adaylarının farklı çözüm yolları arama, geometrik özelikleri keşfetme, genelleme ve akıl yürütme becerilerinin desteklendiği görülmüştür. Ayrıca GeoGebra yazılımı birçok özelliği ve araçları sayesinde öğretmen adaylarının varsayım yapmalarına yardımcı olmuş ve onları ispat yapmaya teşvik etmiştir. Öğretmen adaylarının yapmış olduğu 18 ispatın 9 tanesi deneysel gerekçelendirmeler, 9 tanesi de tümdengelimli gerekçelendirmeler ile yapılmıştır. Sonuç olarak yapılan ispatların yarısında deneysel gerekçelendirmelerden tümdengelimli gerekçelendirme biçimlerine geçişin gerçekleştiği görülmüştür.

Öğretmen adaylarının ispat sürecinde örneklerden yararlanmaları onların yeterli mantıksal çıkarımlara sahip olmadıkları anlamına gelebilir. Öğretmen adaylarının doğru varsayımı ortaya attıkları halde ispatı sonuçlandıramamalarının sebebi, ispat için yeterli gerekçe sunamamalarından kaynaklanmıştır. Ayrıca daha önceden öğrenilmiş yanlış bilgiler de öğretmen adaylarının ispatı sonuçlandıramamalarına neden olmuştur.

Anahtar Sözcükler: İspat, Geometrik İspat, Dinamik Geometri Yazılımları, GeoGebra, Varsayımda Bulunma, Gerekçelendirme Biçimleri

ABSTRACT

The purposes of this study were to determin the proof skills of 2nd year preservice mathematics teachers by means of GeoGebra dynamic mathematics software and to determine the types of proof they used. The study was a case study which was one of the qualitative research models. The participants of the study were composed of 6 preservice mathematics teachers studying at a university in central Anatolia. The participants were determined by means of criterion sampling method which was one of the purposive sampling methods. During the implementation process, a semi-structured clinical interview was applied to the preservice teachers in order to determine their geometric proof types. In the clinical interview period, the preservice teachers solved the proving problems using GeoGebra software. The solutions of the teachers were recorded using Wink software and a voice recorder. Then the voice recordings were transcribed and compared with the screens obtained by the Wink software.

At the end of the study, the pre-service teachers were able to use GeoGebra software in accordance with their objectives and they benefited many tools in the software in order to reach the correct solution in solving process. Thus, it was found that preservice teachers' skills of searching for different solutions, discovering geometrical features, generalization and reasoning were supported. Moreover, GeoGebra software helped preservice teachers to hypothesize with its many features and tools and encouraged them to prove. Nine of the 18 proofs that preservice teachers produced were experimental justification and 9 of them were deductive justification. As a result, it was observed that a transfer from experimental realizations to deductive justification styles in half of the proofs was accomplished.

It was concluded that preservice teachers did not have enough reasonable deductions since they benefited from the samples during the proving process. The preservice teachers posed the correct hypothesis; however, they could not complete the proving as they could not present enough reasons for the proof. Moreover, the misinformation the preservice teachers learned previously caused them not to be able to complete the proofs.

Key Words: Proof, Geometric Proof, Dynamic Geometry Softwares, GeoGebra, Conjecturing, Justification Types.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problemi, araştırmanın amacı, araştırmanın önemi, sınırlılıkları ve tanımlar yer almaktadır.

1.1 Araştırmanın Problemi

Öğrencilerin matematik öğrenme sürecinde yapmış oldukları genellemeler ve çıkarımlar akıl yürütme becerilerinin gelişimini sağlamaktadır. İlköğretim matematik öğretim programının süreç becerilerinden bir tanesi olan akıl yürütme öğrencinin hayatının her safhasında kullanacağı bir beceridir. Bu sayede öğrenci mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilir, daha sonra akıl yürütme becerilerini kullanarak matematikteki ve matematik dışındaki çıkarımlarının doğruluğunu savunabilir (MEB, 2009). Akıl yürütme çeşitli düşünme tarzlarını içeren bir etkinliktir ve her bireyin kendine özgü düşünme stratejileri vardır. Akıl yürütme becerisine sahip bireyler yeni karşılaştıkları durumları tüm boyutlarıyla inceler, mantıklı tahminlerde ve varsayımlarda bulunur, düşüncelerini gerekçelendirir (Umay, 2007). Hayatın her safhasında önemli olan akıl yürütme becerileri matematikte de öğrencilerin problem çözme, varsayımda bulunma ve ispat yapma gibi matematiksel etkinliklerde kullandığı bir beceridir.

İspat yapma ve varsayımda bulunma matematik öğretiminde son derece önemli (Hanna, 2000) ve bir o kadar da anlaşılması güç konulardır.

Matematiksel anlayışın gelişimini sağlayan ispatın öğretimi ve öğrenimindeki zorluklar, öğrenci ilgi ve motivasyonunu artırma çabaları, dinamik araçların geliştirilmesi araştırmacıları ispatın öğretiminde yeni yollar denemeye teşvik etmiştir (Hadas, Hershkowitz ve Schwarz, 2000). Bu yollardan bir tanesi belki de en etkilisi ispat öğretimine tamamen yeni yaklaşımlar getiren Dinamik Geometri Yazılımı (DGY) kullanımıdır (Hanna, 2000). DGY kullanımının son yıllarda artmasıyla birlikte, ispat dinamik ortamlara taşınmış ve öğrenciler varsayımlarını bu ortamlarda doğrulamışlardır. Varsayım ve ispatın deneysel biçimlerinden soyut biçimlerine hızlı bir şekilde geçiş yapamayan öğrenciler bilgisayar ortamlarında ispat problemlerinin anlamlı sunumları ve hızlı geri bildirimler sayesinde tümdengelimli gerekçelendirmeler yapabilmek için deneysel keşif yapma imkânı elde etmişlerdir (Marrades ve Gutiérrez, 2000). Böylece varsayımların dinamik ortamlara taşınması ile bireyin bir varsayımın doğruluğu hakkında kendini ve bir başkasını ikna etmesi DGY'de bulunan sürükleme ve ölçme araçları sayesinde hızlı ve oldukça kolay bir şekilde gerçekleşmektedir (Hadas, Hershkowitz ve Schwarz, 2000).

Tüm bu yeniliklerden hareketle bu araştırmanın problemini öğretmen adaylarının GeoGebra ile geometri problemlerinde kullandıkları ispat biçimlerinin belirlenmesi oluşturmaktadır. İspat biçimlerinin belirlenmesinde Marrades ve Gutiérrez'in (2000) yapmış oldukları sınıflama kullanılacaktır. Bu sınıflamanın seçilmesinin nedeni; Bell (1976), Harel ve Sowder (1998) ve Balacheff'in (1988) sınıflamalarının bir derlemesi olmasıdır.

Araştırmanın katılımcılarını 2010-2011 eğitim öğretim yılında Orta Anadolu'da bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan farklı düzeylerde bulunan 2. sınıf 6 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır.

1.2 Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı 2. sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra dinamik matematik yazılımı yardımıyla geometriye yönelik ispat yapma becerilerinin incelenmesi ve kullanmış oldukları ispat biçimlerinin belirlenmesidir. Bu amaç kapsamında aşağıdaki sorulara yanıt aranacaktır.

1. Öğretmen adayları kendilerine verilen bir geometrik ispat probleminin çözümünde GeoGebra'yı ispat yapmada nasıl kullanıyorlar?

   a) Öğretmen adayları GeoGebra'yı amaçlarına uygun bir şekilde kullanabiliyorlar mı?

   b) Öğretmen adayları ispat sürecinde GeoGebra'nın hangi araçlarından yararlanıyorlar?

   c) GeoGebra ispat yapma sürecinde öğretmen adaylarına ne tür kolaylıklar sağlıyor?

2. Öğretmen adayları yaptıkları ispatların varsayımda bulunma sürecinde;

   a) GeoGebra'yı nasıl kullanıyorlar?

   b) Varsayımlarını doğrulamak ya da doğru olmadığını göstermek için hangi gerekçelerden yararlanıyorlar?

3. Öğretmen adayları GeoGebra'yı kullanarak geometrik ispat problemleri çözme sırasında hangi tür ispat biçimlerini kullanıyorlar?

1.3 Araştırmanın Önemi

Son yıllarda teknolojinin matematik öğretiminde, özellikle de geometride kullanımı yaygınlaşmıştır. Ülkemizde 2005 tarihi itibariyle kullanılmaya başlanan MEB ilköğretim 6-8. sınıflar matematik öğretim programı dinamik geometri yazılımlarının kullanımını desteklemektedir. Programda 6-8. sınıflar düzeyinde dinamik geometri yazılımlarının kullanımıyla öğrencilerin geometrik çizimler oluşturabilecekleri ya da öğretmenin hazırladığı dinamik geometrik şekiller üzerinde etkileşimli incelemeler yapabilecekleri belirtilmiştir (MEB, 2009). Bu yüzden çoğu araştırmacı var olan matematik ve geometri konularını dinamik yazılımlar ile bütünleştirip uygulamışlardır. Dinamik ortamlara taşınan bu konulardan bir tanesi de ispattır.

Hanna'ya (2000) göre matematik eğitiminde ispat son derece önemlidir. Çünkü matematikte kesinlik sadece ispat ile sağlanabilir. Fakat ortaya atılan bir varsayımın doğru olup olmadığını gösteren ispat konusu hem öğrenciler tarafından anlaşılması hem de öğretmen tarafından anlatılması güç bir konudur (Bell, 1976; Balacheff, 2008; Harel ve Sowder, 2007; Hanna ve de Villiers, 2008; Hanna ve Barbeau, 2008). İspat yapma sürecinin zor olmasına karşılık öğrencinin ispat şemalarını belirlemek önemlidir. Çünkü ispat şemaları öğrencinin bir varsayımın doğruluğuna ya da yanlışlığına neyle ikna olduğunu ve karşısındakini neyle ikna ettiğini göstermektedir (Harel and Sowder, 2007). Bu yüzden ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bir varsayımın doğruluğunu ya da yanlışlığını hangi gerekçeye dayandırdığını belirlemek ileride öğretmen olacak bu adayların öğrencilerine vereceği ispat eğitimi hakkında bilgiler verebilir.

Dinamik yazılımların yaygınlaşması ile birlikte ispat süreci dinamik ortamlara aktarılmıştır (Wares, 2004; Hanna, 2000; Gonzàlez ve Herbst, 2009; Hoyles ve Jones, 1998; Laborde, 2001; Mariotti, 2000; de Villiers, 1999). Fakat ispat biçimlerinin dinamik ortamlarda belirlenmesi (Marrades ve Gutiérrez, 2000) ile ilgili çok az sayıda araştırma yer almaktadır. Ülkemizde de ispat biçimlerine ait farklı çalışmalar yer almakta (İskenderoğlu ve Baki, 2010; Akkuş, Onur ve Ertuna, 2010; Ören, 2007) ancak bu konuda dinamik ortamda yapılmış herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu sebeple bu çalışmada öğretmen adaylarının kullandıkları ispat biçimleri GeoGebra dinamik yazılımı kullanarak belirlenmek istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde dinamik yazılımları etkin bir şekilde kullanabilme becerilerinin ölçülmesine yardımcı olması beklenmektedir.

1.4 Sınırlılıklar

Araştırma çalışma grubu 2010-2011 eğitim öğretim yılında Orta Anadolu'da bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalında öğrenim görmekte olan 6 2. sınıf öğretmen adayları ile sınırlıdır. Ayrıca çalışmada kullanılacak olan yazılım GeoGebra dinamik matematik yazılımı ile sınırlıdır. Öğretmen adaylarının hangi geometri konusunu ne kadar bildiğini ifade eden ön bilgilerinin bilinmemesi de bir sınırlılık olarak kabul edilmektedir. Çünkü ispat problemlerinin çözümleri için gerekli geometrik özelliklerin hangi öğretmen adayları tarafından öğrenilmiş olduğu bilinmemektedir.

1.5 Tanımlar

Dinamik Geometri Yazılımları: Geometrik şekil oluşturulan, oluşturulan şekillerin özelliklerini belirlemek için ölçümleri yapılan, ekranda sürüklenebilmesini sağlayan, çeşitli yapılar oluşturulan, yapılar hakkında hipotezler kurulan, kurulan hipotezlerin test edilmesini sağlayan, genellemeler yapılan bilgisayar yazılımlarıdır (Baki ve diğerleri, 2001).

GeoGebra: Açık kaynak kodlu bir dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra, Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin (BCS) görselleştirme ve sembolik hesaplama yetenekleri ile bir DGY'nin değişebilirlik ve kullanım kolaylığı yeteneklerini birleştirmektedir. Böylece geometri, cebir hatta analiz matematiksel disiplinleri arasında bir köprü görevi görmektedir (Hohenwarter ve Preiner, 2007).

İspat: Ortaya atılan iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliğinin gösterilmesi durumudur (Baki, 2006).

Varsayımda Bulunma: Doğruluğundan emin olunmadan bir iddia ortaya atmaktır (Harel ve Sowder, 1998).

Gerekçelendirme Biçimleri: İspat yapma sürecinde varsayımları doğrulamak için dayandırılan otoritelerdir.

BÖLÜM II

ARAŞTIRMANIN KURAMSAL ÇERÇEVESİ

2. 1 Matematik Eğitiminde Dinamik Geometri Yazılımlarının Rolü

Matematiksel ifadeler ve formüller çoğu zaman öğrenciler için anlaşılması güç ve tuhaf görünen kavramlardır. Bu ifadelerin görsel bir temsille tarif edilmesi öğrencinin daha kolay anlayabilmesine yardımcı olmaktadır (CalGEO, 2007). Teknolojik araçların çizimsel (grafiksel) gücü, öğrencilerin tek başlarına yapamayacakları görselleştirmeleri kolaylaştırır (NCTM, 2000). Böylece yaygınlaşan teknoloji ile görsel temsiller daha net bir şekilde oluşturulabilir (CalGEO, 2007).

Günümüzde teknoloji büyük bir hızla gelişmekte ve anlamlı matematik öğretimi için yeni fırsatlar oluşturmaktadır. Bilgisayar teknolojisinin de sürekli gelişmesi sonucunda; öğretim yazılımlarının hem niteliği hem de niceliği artmakta, alternatifler sürekli çoğalmaktadır (MEB, 2009). Bu sayede bilgisayar yazılımlarının matematikte ve özellikle geometride kullanımı giderek yaygınlaşmaktadır. Ülkemizde ise; kullanılmakta olan ilköğretim 6-8. sınıflar matematik öğretim programı bilgisayar ortamında hazırlanan dinamik geometri yazılımları ile yapılan öğretimi desteklemektedir (MEB, 2009). Dinamik geometri yazılımları; geometrik şekil oluşturulan, bu şekillerin özelliklerini belirlemek için ölçümleri yapılan, ekranda sürüklenebilmesini sağlayan, çeşitli yapılar oluşturulan, yapılar hakkında hipotezler kurulan, kurulan hipotezlerin test edilmesini sağlayan, genellemeler yapan bilgisayar yazılımlarıdır (Baki ve diğerleri, 2001). Öğrenci, dinamik yazılımların bu özellikleri sayesinde matematiği daha kolay bir şekilde anlayabilir.

Dinamik geometri yazılımlarının gelişimi gibi diğer teknolojik araçların da gelişimi ile hesap yapma, denklem çözme gibi işlemlere odaklanma önemini kaybedip, öğrencilerin soyut düşünme becerilerinin geliştirilmesi amacı ön plana çıkmıştır (NCTM, 2000). Gelişen teknolojilerden bir tanesi olan bilgisayar ortamında kullanılan dinamik geometri yazılımları, öğrencilerin elektronik ortamlarda soyut matematiksel kavramları somutlaştırabilmelerine olanak sağlamaktadır. Böylece öğrenciler hesaplama, varsayımda bulunma, ispat yapma ve genelleme gibi soyut işlemleri etkin bir şekilde gerçekleştirebilmektedir (Baki, 2002). Bunun yanında öğrenciler DGY ile araştırma ortamı içerisine rahatça girerek keşfetme, test etme, reddetme, formüle etme, açıklama yapma olanaklarına da sahip olurlar (Güven ve Karataş, 2005). Bu yazılımlar sayesinde öğrenciler kâğıt kalemle yapılamayacak ve daha çok problem üzerinde çalışabilmektedir (NCTM, 2000). Ayrıca DGY sayesinde öğrenciler geometrik çizimler oluşturabilmekte ya da öğretmenin hazırladığı dinamik geometrik şekiller üzerinde etkileşimli incelemeler yapabilmektedir (MEB, 2009). Böylece öğrenciler etkileşimli bir ortamda matematiği keşfederek öğrenebilmektedir.

DGY'nin çeşitli özellikleri öğrencilerin kolay ve hızlı bir şeklide öğrenmelerini desteklemektedir. Örneğin öğrenci DGY ile bir geometrik şekil oluşturabilir ve bu şekli sürükleyerek, şeklin matematiksel özelliklerini araştırabilir (Furner ve Marinas, 2007). Ayrıca öğrenciler sürükleme özelliği ile oluşturdukları şekilleri hareket ettirerek nesnenin değişmez özelliklerini fark edip, bu nesnenin matematiksel özelliklerini keşfedebilirler (Furner ve Marinas, 2007; Santos-Trigo ve Cristóbal-Escalante, 2008). Bununla birlikte sürükleme özelliği öğrencilerin birkaç saniye içerisinde yeteri kadar çok örnek görmelerini sağlayarak öğrenciye kâğıt-kalem çalışmalarında olmadığı kadar hızlı geribildirimler sunabilir (Marrades ve Gutiérrez, 2000). Böylece öğrenciler dinamik yazılımların sürükleme ve çeşitli ölçme işlemlerini kullanarak çeşitli çıkarımlarda bulunur ve kendi çalışmalarında yeni matematiksel düşünceler geliştirebilirler (Gonzàlez ve Herbst, 2009).

Yazılımlar öğrencilerin geometrik şekiller üzerinde istenen ölçümleri ve karşılaştırmaları yapabilmelerini ve böylece çeşitli varsayım ve çıkarımlara ulaşmalarını sağlar (Bintaş ve Akıllı, 2008). Böylece geometrik şekillerin genel özelliklerine dair çıkarımlar yapabilirler (Üstün ve Ubuz, 2004; Santos-Trigo ve Cristóbal-Escalante, 2008). DGY aynı zamanda öğrencilerin kendi matematiksel düşüncelerinin gelişimini görmelerini ve bu gelişim sürecine aktif olarak katılabilmelerini sağlar (CalGEO, 2007). Bu sayede öğrencilerin bireysel öğrenmelerine katkı sağlayabilir.

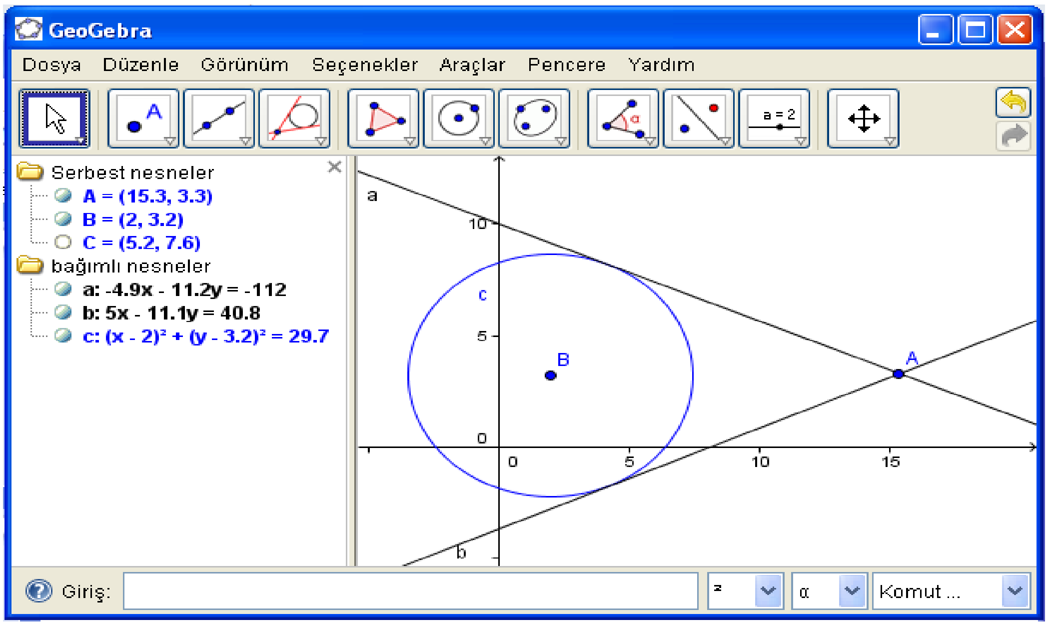
DGY uygun yöntem ve pedagojik yaklaşımlarla kullanıldığında yüksek düzeyde zihinsel etkinlik gerektiren matematiksel bilgiler kurulmasını sağlar (Baki, 2000). Örneğin matematikte yer alan çeşitli hesaplamalar, modellemeler, grafikler elektronik ortama döküldükçe yeni sezgilere, tahminlere, genellemelere ve keşiflere yol açmaya yardımcı olur (Baki,2002). Bu yazılımlarla çalışıldığında istenen matematiksel kavramlar ve ilişkiler keşfedilebilir ve ileri matematiksel kavramlar için önbilgiler oluşturulabilir (Köse ve Özdaş, 2009). Baki ve Özpınar (2007), derslerinde DGY kullanılan öğrencilerin matematiksel nesneleri ilişkilendirme becerisi kazandığını vurgulamıştır. Böylece DGY'nin derslerde kullanımı öğrencinin derse yönelik performansını artırır ve farklı bilişsel stiller geliştirmelerini sağlar (Pitta-Pantazi ve Christou, 2008). Ayrıca dinamik geometri yazılımlarının oluşturduğu ortamlarda yeterli problem çözme ve araştırma deneyimine sahip olan öğrenciler geometriye ve kendi için yeni olan matematiksel sorunlara cesaretle yaklaşabilir (Güven ve Karataş, 2005). Bu sayede öğrenciler geometrik kavramları günlük hayatla rahatlıkla ilişkilendirebilir (Köse ve Özdaş, 2009).

DGY soyut olan matematiksel kavramları somutlaştırdığı için derste öğrenci motivasyonunu artırarak öğrencilerin deneyerek, keşfederek öğrenme becerileri kazanmalarını sağlar (Baki ve Özpınar, 2007). Örneğin; Köse ve Özdaş (2009) öğrencilerin DGY ile çalışırken belirli yönlendirmelerle simetri kavramının temel bazı özelliklerini keşfettiklerini görmüştür. Bu da öğrencilerin ileri matematiksel kavramlar için gerekli önbilgiyi kazanmalarına yardımcı olmuştur.

DGY ile öğretim yapılan bir ortamda öğrenciler kendilerine sunulan yazılımları etkileşimli olarak kullanır, problemleri adım adım çözer, dönütler alarak yanlışlarını öğrenir. Bu anlamda yazılımlar öğrencilerin bilgi ve becerilerini ön plana çıkaran bir köprü rolü üstlenir. (Baki, 2002). Böylece bu yazılımlar öğrencinin daha üst bilişsel düzeye ulaşmasına yardımcı olur (Bintaş ve Akıllı, 2008). Yapılan eğitimin niteliğini artırır ve zamandan kazanç sağlar.

2. 2 GeoGebra Dinamik Matematik Yazılımı

GeoGebra; Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin (BCS) sembolik işlem ve görselleştirme becerileri ile Dinamik Geometri Yazılımlarının (DGY) dinamik değişkenlik özelliklerini sağlayarak cebir ve geometriyi bir araya getiren ücretsiz kullanımlı ve açık kaynak kodlu bir dinamik matematik yazılımıdır (Hohenwarter ve Preiner, 2007). İlk olarak Avusturya Salzburg Üniversitesi'nde Markus Hohenwarter tarafından 2002 yılında yüksek lisans tezi olarak geliştirilmiştir (Hohenwarter ve Lavicza, 2007). Geliştirilmesindeki temel amaç cebir ve geometriyi kullanımı kolay tek bir yazılımda (Şekil 1) birleştirmektir (Hohenwarter, 2004; Jones ve diğerleri, 2009; Edwards ve Jones, 2006; Hohenwarter ve Lavicza, 2007; Hohenwarter ve Preiner, 2007).



Şekil 1: GeoGebra'daki Cebir ve Grafik penceresi

Yazılım 2002 yılında internet aracılığıyla yayınlanmış ve karşılaştığı yoğun ilgi sayesinde 2002 Avrupa Akademik Yazılım Ödülü'nü almıştır.

Bunun üzerine Hohenwarter GeoGebra'yı geliştirmeye devam etmiş ve doktora çalışması olarak Avusturya'daki okullarda GeoGebra'nın pedagojik uygulamalarını yapmıştır. Geogebra hem matematiğin farklı yönlerini bir araya getiren hem de kolay kullanımlı bir yazılım olduğu için tüm dünyada öğretmenler ve araştırmacılar arasında hızlı bir şekilde yayılmıştır (Hohenwarter ve Lavicza, 2007). Zamanla geniş bir kullanıcı kitlesi kazanan yazılım açık kaynak kodlu bir yapıya sahip olduğu için (Hohenwarter, 2004; Jones ve diğerleri, 2009; Hohenwarter ve Lavicza, 2007: Hohenwarter ve Preiner, 2007; Hohenwarter ve Fuchs, 2005) teknoloji ile yakından ilgilenen kullanıcıları tarafından sürekli geliştirilmiştir ve halen de geliştirilmektedir.

GeoGebra öğrencilerin matematiği çift yönlü (cebirsel ve geometrik) deneysel bir yolla keşfetmelerini sağlamaktadır (Hohenwarter, 2004). Böylece matematik eğitimindeki potansiyeli ve kabiliyetleri ile okul müfredatında geometri ve cebir arasındaki ilişkiyi kurmakta önemli bir değer olarak ortaya çıkmaktadır (Hohenwarter ve Jones, 2007). Yazılımın müfredattaki kullanım amaçları: 1) Uygulama ve görsellik için GeoGebra 2) Yorumlama aracı olarak GeoGebra 3) GeoGebra ve matematiği keşif 4) Öğrenme materyalleri hazırlamak için GeoGebra'dır (Hohenwarter ve Fuchs, 2005; Hohenwarter, 2004). Fakat sürekli gelişmekte olan GeoGebra yazılımı farklı kullanım amaçlarına da olanak sağlamaktadır.

GeoGebra ilk açıldığında ekranda cebir penceresi, grafik penceresi, giriş alanı, menü çubuğu ve araç çubuğu yer almaktadır. Yazılımda nokta, doğru, çokgen, çember gibi araçların yanında çeşitli ölçümlerin yapıldığı ve matematiksel özelliklerin keşfedildiği bir takım araçlar da bulunmaktadır (Aktümen, Horzum, Yıldız ve Ceylan; 2010). GeoGebra'da diğer dinamik yazılımlarda olduğu gibi bilgisayardaki fare kullanılarak çeşitli dinamik matematiksel yapılar oluşturulabilir. Diğer DGY yazılımlarından farklı olarak nokta ve vektörlerin koordinatları, doğru denklemleri, parabol ve fonksiyonlar doğrudan giriş alanından girilebilir ve girilen kodların geometrik temsilleri grafik alanında görülebilir (Hohenwarter, 2004; Edward ve Jones, 2006). Matematiğin birden çok temsilini bir arada bulunduran GeoGebra öğrencilerin matematiğin sembolik ve görsel temsilleri arasında ilişki kurabilmelerini, böylece daha iyi bir matematiksel anlayış geliştirebilmelerini sağlar (Dikovic, 2009).

Öklit geometrisine dayanan GeoGebra (Hohenwarter, 2004), öğrencilerin matematiksel objeleri görselleştirmelerine, matematiksel kavramların görsel anlayışını geliştirmelerine ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri anlamalarına yardımcı olur (Karadağ ve McDougall, 2009). Böylece öğrenciler araştırma, düşünme ve matematik yapma olanağı elde ederler (ORelly, 2009).

GeoGebra'da oluşturulan nesneler cebir penceresinde bağımlı ve bağımsız olmak üzere iki kategoride gösterilir (Sangwin, 2008). Öğrenciler bu nesneleri sürükleme hareketi ile yönlendirebilir, bağımlı ve bağımsız nesnelerin sürükleme işleminden sonra nasıl hareket ettiğini gözlemleyebilirler (Dikovic, 2009). Bu sayede öğrenciler geometrik şekillerin özelliklerini keşfetme olanağı elde ederler ve geometrik özellikleri ezberleme çabasında olmayıp akıl yürütmeye odaklanabilirler. GeGebra aynı zamanda kâğıt kalemle yapılan çizimlerden daha hızlı çalışma ve daha net şekiller elde etme olanağı sağlar (Jones ve diğerleri, 2009). Öğrenciler bu olanaklar sayesinde matematiği doğru bir şekilde öğrenebilirler.

GeoGebra'da oluşturulan aktiviteler "Web Sayfası Olarak Dinamik Worksheet (html)" seçeneği ile internet sayfası olarak çıkarılabilir (Aktümen, Horzum, Yıldız ve Ceylan; 2010). Böylece internet erişimi bulunan yerlerde bu html sayfaları web ortamına yüklenebilir.

Her geçen gün yeni özellikler eklenen ve özellikleri sürekli güncellenen GeoGebra matematik eğitimcilerinin ve matematik öğrenenlerin artan ilgisi ile karşılaşmaktadır. Bu yazılımın tüm kullanıcılara açık ücretsiz bir yazılım olması, birçok dile çevrilmesi ve kolay kullanımı bu ilginin başlıca sebepleri arasında sıralanabilir.

2. 3 Matematiksel İspat

Matematik eğitiminde "neden?" sorusu çok önemlidir. Bu soruya karşılık yapılan açıklamalar ve bu açıklamaların sürekliliği matematiği net ve kesin bir bilim olarak görmemizi sağlar. Bu yüzden matematikte ispatların önemli bir yeri vardır. Çünkü ispatların amacı her durumda ve her koşulda ortaya atılan iddianın doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamaktır (Baki, 2006; Umay, 2007). Bu iddianın bütün şartlarda genellenebilirliği gösterildiğinde ise ispat tamamlanmış olur (Baki, 2006).

Harel ve Sowder'ın (1998) belirttiği ve bu araştırmada da kullanılacak olan terimler şu şekilde ifade edilmiştir: *Varsayım (conjecture)* doğruluğundan emin olunmadan ortaya atılan bir iddiadır. Ortaya atılan iddia ilk etapta bir varsayımdır, doğruluğundan emin olunduğunda ise bir gerçek haline gelir. Bu çalışmada sıkça kullanılacak olan *ispat yapma süreci* ise varsayımın doğruluğu hakkındaki kuşkuları ortadan kaldırma sürecidir. Bu ifade iki alt sürece ayrılmaktadır. Bunlar: *Anlama (ascertaining)* bireyin bir varsayım hakkındaki kendi kuşkularını silme, *ikna etme (persuading)* bireyin bir varsayım hakkındaki diğer insanların kuşkularını silme sürecidir. (Harel ve Sowder, 1998)

Bell (1976) ispatın üç anlam ifade ettiğini söylemiştir. Birincisi; önermenin doğruluğu ile ilgili *doğrulama* veya *savunma*, ikincisi; önermenin neden doğru olduğuna ilişkin *açıklama*, üçüncüsü ise aksiyomların, temel kavramların ve teoremlerin tümdengelimli bir sistem ile sonuçlarının organizasyonu, *sistemleştirilmesidir*. Bell'in (1976) ifade ettiği bu üç anlam aslında ispatın aşamalarıdır. Bu aşamaları Baki (2006) şu şekilde ifade etmiştir: Birinci aşamada iddianın doğruluğu araştırılır *(Doğrulama Aşaması).* İkinci aşamada iddianın niçin doğru olduğunun açıklaması yapılır *(Açıklama Aşaması).* Üçüncü aşamada ise genelleme koşulları kontrol edilerek soyutlama yapılır *(Genelleme Aşaması).*

2. 4 Gerekçelendirme Biçimleri

Çeşitli araştırmacıların yapmış oldukları ispat ve gerekçelendirme biçimleri aşağıda yer almaktadır.

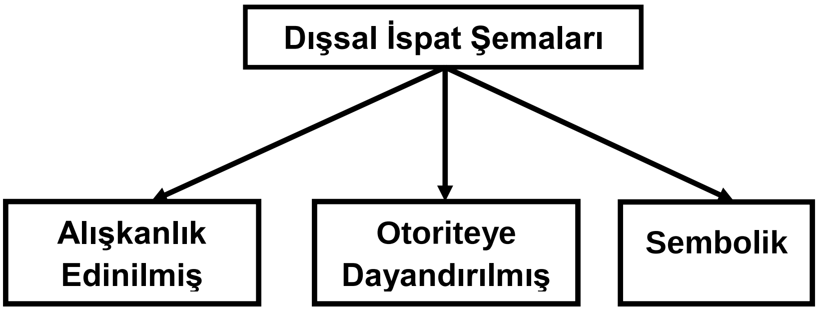
2.4.1 Bell'in Gerekçelendirme Biçimleri

Bell (1976) çalışmasında matematiksel gerekçelendirmeyi öğrenci cevaplarının analizine göre iki kategoriye ayırmıştır: *deneysel gerekçelendirme* iddianın doğruluğunun örnekler yardımıyla yapıldığı, *tümdengelimli gerekçelendirme* ise sonuçlarla bağlantılı çıkarımların kullanıldığı gerekçelendirmelerdir. Bell'e göre deneysel cevaplar iddianın doğruluğunun olası tüm örneklerin kontrolünü ifade eder. Tümdengelimli cevaplar da tümdengelimli iddiaların farklı derecelerini ifade eder.

2.4.2 Harel ve Sowder'ın İspat Şemaları Kategorileri

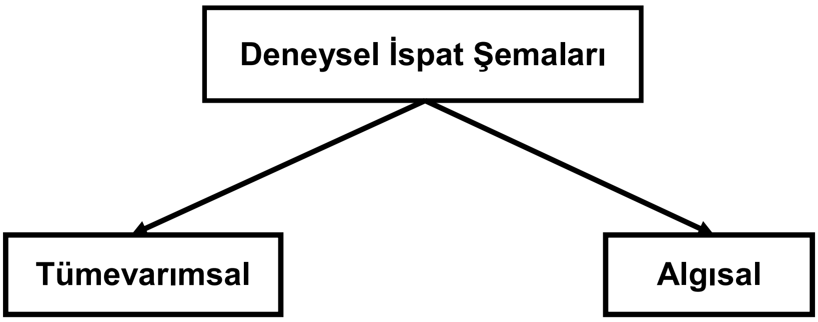
Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin gerekçelendirme biçimlerini üç genel kategoriye ayırmış ve bu kategorileri *ispat şemaları* olarak adlandırmıştır. *İspat şeması* her bireyin var olan bir iddianın doğruluğunu kendisinin anlamasından ve bu doğruluğa karşısındakini ikna etme sürecinden oluşmaktadır. Harel ve Sowder'ın belirledikleri ispat şemaları; *dışsal*, *deneysel* ve *analitik* ispat şemalarıdır ve bu üç şema da aşağıda belirtildiği gibi alt şemalara ayrılmıştır.

Dışsal ispat şemalarında öğrenci problemleri çözmek için formülleri bire bir uygular ve sonuca ulaşmak için yaratıcılıklarını kullanmak yerine gerekli kuralları ezberlemeyi seçer. Çözüme bu şekilde ulaştıklarında ise matematik yapma becerileri gelişmez ve bu konuda özgüven eksikliği hissederler. Bu tip şemalarda öğrenci kuşkularını ortadan kaldırmak için iddialarını; *a)* ortaya atılan iddianın *alışılagelmiş* sunumuna *(alışkanlık edinilmiş ispat şeması) b)* öğretmen ya da ders kitabı gibi bir *otoriteye (otoriteye dayalı ispat şeması) c)* iddianın *sembolik* formuna *(sembolik ispat şeması)* dayandırmaktadır (Şekil 2).



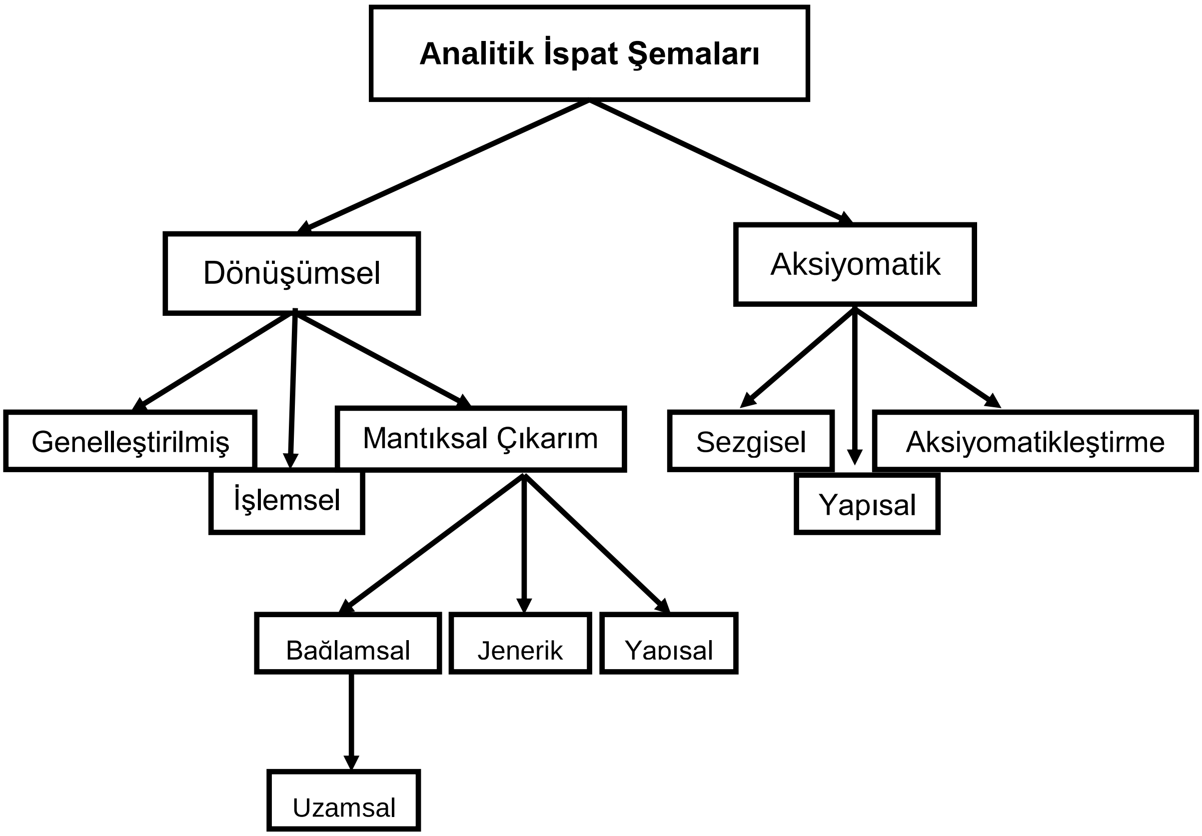
Şekil 2: Harel ve Sowder (1998) Dışsal İspat Şemaları

Deneysel ispat şemalarında varsayımlar, fiziksel doğrular veya algısal deneyimlere başvurularak kabul edilir ya da reddedilir. Deneysel ispat şemaları *tümevarımsal* ve *algısal ispat şemaları* olmak üzere iki alt şemadan oluşur (Şekil 3). Tümevarımsal ispat şemalarında varsayımın doğruluğunun araştırılması bir ya da birden fazla spesifik durumun nicel ölçümlerine dayandırılarak yapılır. *Algısal ispat şemaları* bireyin algıları ve bu algıların koordinasyonu ile oluşan temel zihinsel imgelerin kullanımıyla oluşturulur.



Şekil 3: Harel ve Sowder (1998) Deneysel İspat Şemaları

Analitik ispat şemalarında varsayımın ispatlanması mantıksal çıkarımlar aracılığıyla yapılır ve analitik ispat şemaları *dönüşümsel* ve *aksiyomatik* olmak üzere iki alt şemadan oluşur (Şekil 4). *Dönüşümsel ispat şemaları* matematiksel şekiller üzerindeki işlemleri ve işlemlerin sonuçlarını içerir. Buradaki işlemler belli bir amaç odaklı olmalıdır. Dönüşümsel denmesinin nedeni ise çıkarımlar aracılığıyla sözlü veya yazılı ifadelerle anlatılan şekillerin dönüşümlerini içermeleridir. Dönüşümsel ispat şeması a) varsayımın genel yönlerinin göz önünde bulundurulmasını *(genellik)* b) ileriye yönelik, amaç odaklı zihinsel işlemlerin uygulamalarını *(işlemsel düşünce)* c) çıkarım sürecinin bir kısmı olarak şekillerin dönüşümünü *(mantıksal çıkarım)* ifade etmektedir. *Aksiyomatik ispat şemaları* matematiksel gerekçelendirmenin daha önceden tanımlanmamış terim ve aksiyomlarla başladığı anlaşıldığı zaman kullanılır. Örneğin birey "nokta" ve "doğru" gibi tanımlanmamış terimler ile "kare" ve "daire" gibi tanımlanmış terimlerin farkında olmalıdır.



Şekil 4: Harel ve Sowder (1998) Analitik İspat Şemaları

2.4.3 Balachef'in Gerekçelendirme Kategorileri

Balacheff (Balachhef, 1988) ispatı, *pragmatik* ve *kavramsal* gerekçelendirme olmak üzere ikiye ayırmıştır. *Pragmatik gerekçelendirmeler* örneklerin kullanımına veya gösterimlere, *kavramsal gerekçelendirmeler* ise soyut formüllere ve matematiksel ifadelerin özellikleri arasındaki ilişkilere dayanmaktadır. *Pragmatik gerekçelendirme* kendi arasında üçe ayrılır: *Acemi Deneycilik (naive empiricism)* bir ifadenin rastgele seçilmiş birkaç örnek ile ispatlanmasıdır. *Kritik Deney (Critical experiment),* bir ifadenin bilinçli olarak seçilmiş bir örnek ile ispatlanmasıdır. *Jenerik örnek (generik example)* belirli bir sınıfın karakteristik özelliğini taşıyan bir örnek üzerindeki hesaplamalar ve dönüşümler ile yapılan ispattır. *Kavramsal gerekçelendirme* ise kendi arasında ikiye ayrılır. Bunlar: *Düşünce deneyi* davranışların içselleştirildiği ve düşünülen spesifik örneklerden ayrıştırıldığı ispat biçimidir. *Sembolik hesaplamalar,* daha önceden bilinen belirli örneklere dayanmaz, gerekçelendirme sembolik ifadelerin dönüşümü ve bu dönüşümün kullanımına dayanır.

2.4.4 Marrades ve Gutierrez'in Gerekçelendirme Kategorileri

Marrades ve Gutiérrez'in (2000) yapmış olduğu ve bu araştırmanın da kuramsal çerçevesini oluşturacak olan ispat biçimlerinin sınıflaması aşağıda yer almaktadır.

1. Deneysel Gerekçelendirme: Varsayımı desteklemek için başlıca unsur olarak örneklerin kullanıldığı gerekçelendirme biçimidir. Öğrenciler bir veya birden fazla örnekte bir kararlılık gözlemledikten sonra varsayım oluştururlar daha sonra çeşitli örnekler kullanarak ve bu örneklerin içindeki ilişkileri belirleyerek varsayımlarını doğrularlar. Deneysel gerekçelendirme diğer bir deyişle öğrencilerin geçerlik için kullandıkları özel örnekleri ve sezgisel desenleri içermektedir. Ayrıca varsayım problem ifadesi içerisinde yer aldığında öğrenciler varsayımı ispatlamak için sadece örnekleri kullanırlar. Deneysel gerekçelendirme üçe ayrılmıştır:

- ✓ *Acemi Deneycilik (Naive Empiricism):* Varsayımın belirli bir kritere göre seçilmemiş bir veya daha fazla örneğin doğruluğunu göstererek yapılan ispatlama biçimidir. Kontrol şekli örneklerin görsel algısını (algısal tip) içerebilir ya da örneklerde bulunan matematiksel özelliklerin veya ilişkilerin kullanımını (tümevarımsal tip) içerebilir.

- ✓ *Kritik Deney (Crucial Experiment):* Varsayımın, özellikle seçilmiş belirli bir örneğin doğruluğu gösterilerek ispatlanma biçimidir. Öğrenciler seçtikleri örneğin doğru olduğunda, ispatın her zaman doğru olacağını varsaymaktadırlar. Kritik örnek kullanımlarına göre dörde ayrılmıştır. Bunlar:

Örnek Tabanlı, varsayımın bir örneğin varlığı ya da karşıt örneğin olmadığı gösterilerek ispatlanmasıdır. *Yapılandırmacı* gerekçenin örnek elde etme yolları üzerinde odaklanmış biçimidir. *Analitik* deneysel olarak örnekte gösterilen özelliklere dayanan ispatlama biçimidir. *Entelektüel* örneğin deneysel gösterimine dayanan fakat genelde örneğin elemanlarının arasından kabul edilmiş özellikleri veya ilişkileri kullanır.

Analitik ve entelektüel ispatların arasındaki başlıca fark atıfta bulunulmuş ilişki veya özelliğin kaynağıdır: Analitik gerekçeler örneklerin deneysel gözlemleriyle oluşturulmuştur (örneğin; bir öğrenci eşkenar bir üçgen üzerinde bazı ölçümler yapar ve açıortayın karşı kenarı ikiye böldüğünü not eder). Entelektüel gerekçelerde ise deneysel gözlemlerin öğrenciyi daha önceden öğrenilmiş bir özelliğe sevk etmesi ile yapılır (örneğin öğrenci eşkenar üçgende aynı ölçümleri yapar ve eşkenar üçgende açıortayın aynı zamanda bir kenarortay olduğunu hatırlar).

Kritik deney ve acemi deneycilik arasındaki başlıca farklar: *i)* Spesifik örneğin durumu *ii)* Kritik deneyde belirli bir sınıfın temsilcisi seçilmiş bir örnek kullanılmasıdır.

- ✓ *Jenerik Örnek (Generic Example):* Gerekçenin kendi sınıfının karakteristik bir özelliği olarak görünen belirli bir örneğe dayandığında ve varsayımın doğruluğu için örnek üzerinde işlemler veya dönüşümler aracılığıyla soyut gerekçeler yapıldığında gerçekleşir. Gerekçe soyut özellikler ve bir sınıfın elemanlarını ifade eder, fakat açık bir şekilde örneklere dayandırılmıştır. Kritik deneyde ifade edilen dört gerekçe çeşidi (örnek tabanlı, yapısal, analitik, entelektüel) jenerik örnek için de geçerlidir. Kritik deney ile jenerik örnek arasındaki temel fark; kritik deneyde gerekçe seçilmiş örnekte varsayımın sadece deneysel doğrulamasından oluşması, jenerik örnekte gerekçenin örnek tarafından temsil edilen sınıfın soyut özelliklerini veya elemanlarını içermesidir.

- ✓ *Yanlış* cevapta, öğrenci bir ispat probleminin çözümünde deneysel stratejiler kullanır fakat doğru bir yargı oluşturmada başarısız olur ya da doğru bir yargı oluşturur fakat herhangi bir gerekçe üretemez.

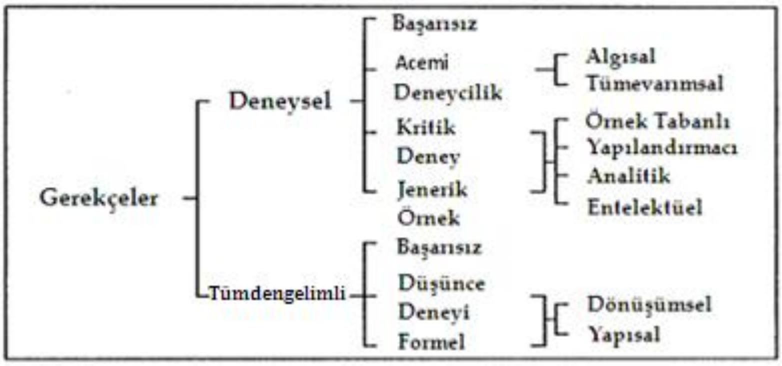
2. Tümdengelimli Gerekçeler, problemin jenerik görünüşüne, zihinsel hesaplamalara ve mantıksal çıkarımlara dayanan iddialar kullanılarak, varsayımı genel bir yolda doğrulamayı amaçlar. Örnekler iddiayı organize etmeye yardımcı olması için kullanılır fakat gerekçelendirme yapılırken örneğin belirli özellikleri gerekçe içinde düşünülmez. Tümdengelimli gerekçeler üç sınıfa ayrılır:

- ✓ *Düşünce Deneyinde (Thought Experiment),* gerekçeyi organize etmek için spesifik bir örnek kullanılır. Gerekçelerin stillerine dayanarak iki tip düşünce deneyine rastlarız (Harel ve Sowder, 1998): *Dönüşümsel Gerekçeler* var olan probleme eşdeğer başka bir probleme dönüştüren zihinsel işlemlere dayanır. Örneklerin rolü hangi dönüşümlerin uygun olduğunu öngörmektedir. Dönüşümler uzamsal şekillere, sembolik manipülasyonlara veya objelerin inşasına dayanabilir. *Yapısal gerekçelerde* mantıksal çıkarımların dizisi; problemler, aksiyomlar, tanımlar ve kabul edilmiş teoremlerden elde edilen verilerden türemektedir. Örneklerin rolü çıkarımların adımlarını organize etmeye yardımcı olmaktır.

- ✓ *Formal Çıkarım,* gerekçelendirmenin spesifik örneklerin yardımı olmadan yapılan zihinsel işlemlere dayanmasıdır. Formel çıkarımda tartışılan problemin sadece jenerik özelliklerinden bahsedilir. Bu yüzden matematik araştırmacılarının dünyasında bulunan bir formel matematiksel ispat biçimidir.

- ✓ *Başarısız* gerekçelendirmede öğrenciler ispat problemlerini çözerken tümdengelimli ispat stratejilerini kullanırlar fakat doğru bir yargı oluşturma konusunda başarısız olurlar veya doğru bir yargı oluştururlar fakat bir gerekçe oluşturma konusunda başarısız olurlar.

Marrades ve Gutiérrez'in (2000) ispat biçimleri tablosu aşağıdadır:



Şekil 5: İspat biçimleri (Marrades ve Gutiérrez, 2000)

Bu çalışmada öğrencilerin yapmış oldukları ispatlar *Marrades ve Gutiérrez'in (2000)* ispat biçimlerine göre sınıflandırılacaktır.

BÖLÜM III

İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde yapılan çalışma ile ilgili araştırmalar 1. GeoGebra Dinamik Matematik Yazılımı ile İlgili Yapılan Araştırmalar, 2. Matematik Eğitiminde İspat ile İlgili Yapılan Araştırmalar, 3. İspatlarda Dinamik Geometri Kullanımı ile İlgili Araştırmalar ve 4. İspat ve Gerekçelendirme Biçimlerinin Belirlenmesi ile İlgili Yapılan Araştırmalar olmak üzere dörde ayrılmaktadır.

3.1 GeoGebra Dinamik Matematik Yazılımı ile İlgili Yapılan Araştırmalar

2002 yılında internet aracılığıyla yayınlanmış olan GeoGebra cebir ve geometriyi bir araya getiren ücretsiz, açık kaynak kodlu ve kolay erişime sahip bir yazılım (Hohenwarter ve Lavicza, 2007) olduğu için çoğu araştırmacının ilgi odağı olmuş ve kullanıcı sayısı hızla artmıştır. Bu sebeple GeoGebra ile yapılan araştırmaların sayısı da gün geçtikçe çoğalmıştır.

GeoGebra ile matematik eğitiminin nasıl yapılacağı üzerinde yoğunlaşan Jones ve diğerleri (2009) 9 deneyimli matematik öğretmeninin işbirliğinde GeoGebra kullanımı ile yapılan matematik eğitimi için yeni yollar geliştirmek ve diğer öğretmenleri bu konuda desteklemek amacıyla bir çalışma yürütmüşlerdir. Bu çalışma National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics (NCETM) kurumunun desteklediği bir proje kapsamında yürütülmüştür. Çalışmaya katılan öğretmenler matematik öğretim programı ve GeoGebra'nın bütünleşmesini sağlamak amacıyla çeşitli yaklaşımlar denemişledir. Daha sonra diğer öğretmenleri eğitmek ve bilgilendirmek için çalıştaylar düzenlemişler ve böylece öğretmenlerin GeoGebra'nın matematik eğitiminde profesyonel kullanımlarını desteklemek için bir çalışma başlatmışlardır. Bu çalışmanın sonunda matematik öğretiminde kullanılabilecek materyaller oluşturulmuştur.

GeoGebra yazılımı çeşitli çalışmalar ve internet aracılığıyla kullanıcıya ulaştırılmakla birlikte kullanıcının karşılaştığı zorluklar da belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla Hohenwarter, Hohenwarter ve LavicZa (2008) GeoGebra ile ilgili en yaygın engelleri belirlemek istemişlerdir. Çalışmanın verileri 3 hafta boyunca ortaokul ve lise öğretmenleri ile yapılan profesyonel gelişim programında toplanmıştır. Çalışma süresince katılımcı öğretmenlerin karşılaştıkları zorluklar belirlenmiş ve GeoGebra araçlarının zorluk dereceleri ölçülmüştür. Katılımcılar genel itibariyle GeoGebra araçlarının kullanıcı dostu olduğunu vurgulamış fakat geometrik bir figür oluştururken, GeoGebra'yı tam anlamıyla kullanabilmek ve uygun cebirsel ifadeler girebilmek için bir yardımcıya ihtiyaç duyduklarını belirtmişlerdir. Bu sebeple yaygın olarak gerçekleşen zorluklar; GeoGebra için yeni materyaller geliştirilmesini ve bu materyallerin çalıştaylar aracılığıyla kullanıcılara ulaştırılmasını gerektirmiştir. Aynı şekilde Hohenwarter, Hohenwarter ve LavicZa (2010) bir diğer çalışmasında dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra'nın kullanılabilirliği ve yazılımda bulunan ortaokul matematik öğretmenlerinin kullanmada zorluk çektikleri dinamik geometri araçlarını belirlemek amacıyla bir çalışma yürütmüşlerdir. İlk çalışmalarının bir devamı niteliğinde olan bu çalışmada DGY araçlarının karmaşıklık kriterlerini kullanmışlardır. Araştırmanın sonucunda öğretmenler GeoGebra'da yer alan 21 araçtan 15'inin aynı karmaşıklık kriterinde, 5 tanesinin daha karmaşık bir kriterde ve 1 tanesinin diğerlerinden daha kolay bir karmaşıklık kriterde olduğunu söylemişlerdir. Yine aynı şekilde var olan zorlukların öğretmenler için düzenlenecek çeşitli çalıştaylarla giderilebileceğini dile getirmişlerdir.

Yapılan çalışmalarda öğretmen adayları ve öğretim elemanlarının da GeoGebra yazılımı hakkındaki görüşleri alınmıştır. Baydaş (2010) çalışmasında öğretim elemanlarının matematik öğretiminde GeoGebra'nın kullanımına yönelik algılarını, uygulanabilirliğini ve matematik öğretimine getirdiği muhtemel kazanımları ile sınırlılıkları ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Bunun yanında matematik öğretmen adaylarının da matematik öğretiminde

Geogebra kullanımına yönelik algıları ve GeoGebra projesi hazırlamada edindikleri kazanımları ortaya çıkarmak istemiştir. Çalışmada, mevcut durumu derinlemesine ortaya çıkarmak amacıyla nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması yöntemi kullanılmış ve veriler yüz yüze görüşmeler yoluyla toplanmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre; Geogebra literatürle paralel şekilde bilgisayar destekli matematik öğretimi araçlarının avantajlarını ve sınırlılıklarını yansıttığı gibi özel olarak cebir ve geometrik girişin farklı olması, inşa protokolünün yapısının aşamaları göstermesi avantaj olarak görülmüş, kullanımının kolay olması üzerinde durulmuştur (Baydaş, 2010).

Lu (2008) çalışmasında İngiliz ve Tayvanlı lise öğretmenlerinin GeoGebra kullanırken sergiledikleri tavır ve alıştırmaları karşılaştırmalı olarak incelemiştir. İki ülkeden öğretmenlerin teknoloji kavramı ile ilgili görüşleri ve matematiksel içerikleri GeoGebra ile nasıl birleştirdiklerini belirlemeyi amaçlamıştır. Bu amaçla 2 İngiliz, 2 Tayvanlı öğretmen ile klinik görüşmeler yapmıştır. Sonuç olarak Tayvanlı öğretmenlerin derslerinde teknoloji kullanma konusunda isteksiz davrandıklarını İngiliz öğretmenlerin ise teknoloji ile eğitime sıcak baktıklarını bulmuştur. Ayrıca Tayvanlı öğretmenlerin müfredatta yer alan konuları GeoGebra'ya uyarlama eğiliminde iken, İngiliz öğretmenlerin bu konuda daha yaratıcı ve esnek davrandıkları gözlemlenmiştir.

Araştırmalarda GeoGebra kullanımına yönelik eğilim bulunmaktadır. Ayvaz-Reis ve Özdemir (2010) çalışmasında, parabol konusunun öğretiminde GeoGebra kullanımının 12. Sınıf öğrencilerinin tutum ve başarılarına etkisini analiz etmişlerdir. Çalışmaya katılan öğrencileri iki homojen gruba ayırmış ve bir gruba geleneksel yolla ders anlatılırken diğer gruba GeoGebra ile parabol konusu anlatılmıştır. Eğitim sonunda ölçümler yapılmış ve değerlendirilmiştir. Sonuç olarak GeoGebra ile eğitim alan grupta görselleştirme ve dinamik şekillerin dinamikliğinin öğrencilerin daha kolay ve ilgi çekici bir şekilde öğrenmesini sağladığı sonucuna ulaşılmıştır. GeoGebra ile matematik konularının işlendiği bir diğer çalışma Kepceoğlu (2010) tarafından yürütülmüştür. Bu çalışmada limit ve süreklilik konularının öğretiminde, GeoGebra'nın öğretmen adaylarının başarısına ve limit ve süreklilik kavramlarının öğrenmelerine olan etkisi incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, 2010-2011 eğitim-öğretim yılında ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıfına kayıtlı 40 öğrenci ile deneysel bir çalışma yürütülmüş ve çalışmaya katılan 40 öğrenci eş özellikte iki gruba ayrılmıştır. Bir gruba geleneksel yöntem ile ders anlatımı uygulanmış, diğer gruba ise GeoGebra ortamında hazırlanan ders anlatımı uygulanmıştır. 6 ders saati süren anlatımların sonrasında son test uygulanmıştır. Elde edilen nicel veriler uygun parametrik istatistik testleri ile analiz edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının kavramsal öğrenmeleri üzerinde yorum yapılabilmesi için son testler nitel olarak analiz edilmiş ve katılımcılardan bazıları ile görüşmeler yapılarak bu veriler desteklenmiştir. Araştırmada elde edilen bulgulara göre deney grubunda yer alan öğretmen adayları GeoGebra destekli öğretim yapılan uygulama sonrası, kontrol grubunda yer alan öğretmen adaylarına göre uygulanan testte daha başarılı sonuç almışlardır. Ayrıca deney grubunda yer alan öğretmen adaylarının limit kavramına ilişkin bakış açılarına GeoGebra destekli öğretim yaklaşımının genel olarak olumlu yönde katkısı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Buna karşın, GoeGebra destekli öğretimin süreklilik kavramı açısından katkısı tam olarak bahsedilememektedir. Yapılan uygulama sonucunda, öğretmen adaylarının süreklilik kavramına bakış açılarındaki olumlu yönde değişiklikler olmasına karşın, limit kavramına oranla daha az olmuştur. Taş (2010) ise çalışmasında dinamik matematik yazılımı GeoGebra'yı eğrisel integraller konusunu görselleştirmek amacıyla kullanmıştır. Bu yazılımın eğrisel integrallerle ilgili kavramları görselleştirmek konusundaki başarısı incelenmiştir. Sonuç olarak görselleştirilen kavramların anlama ve anlatma etkinlikleri için yararlı olduğu tespit edilmiştir.

GeoGebra ilköğretim seviyesindeki matematik konularına uyarlanarak da ders anlatımlarında kullanılmıştır. Örneğin; Ayvaz-Reis (2010) ilköğretim 6. sınıf öğrencilerine zor gelen tamsayılar konusunun nasıl daha kolay ve akıcı bir şeklide öğrenebileceklerini araştırmıştır. Öğrenme süreci boyunca öğrencilerinde tamsayılar konusunda kalıcı bir öğrenme sağlamak amacıyla bu konuyu GeoGebra yazılımı ile kavramsallaştırmak istemiştir. Bu amaçla tamsayılar konusu eş özelliklere sahip iki sınıfta farklı metotla anlatılmıştır. Birincisi geleneksel metot ikincisinde ise GeoGebra ile öğretim yapılmıştır. Dersin sonunda öğrencilerin ne kadar öğrendiğini ölçebilmek için her iki gruba da test uygulanmıştır. Dersten iki hafta sonra öğrenmenin ne kadar kalıcı olduğunu belirlemek için tekrar bir test uygulanmıştır. Her iki sınıfın sonuçları analiz edildiğinde GeoGebra ile ders anlatılan sınıfın daha başarılı olduğu belirlenmiştir. Böylece GeoGebra öğrencilerin daha fazla duyu organına hitap ederek öğrencinin öğrenme süreci ile daha iç içe olmasını sağlamış ve böylece daha yüksek başarı elde edilmiştir. Bu sebeple GeoGebra'nın matematik derslerinde kullanımına yer verilmesi etkili ve kalıcı matematik öğretimini gerçekleştirmiştir.

Saha, Fauzi, Ayubb ve Tarmizi (2010) ise yaptıkları yarı deneysel çalışmada yüksek görsel uzamsal becerileri olan ve düşük uzamsal görsel becerileri olan öğrencilerin koordinat sistemini öğrenirken GeoGebra yazılımını kullanmanın etkilerini incelemişlerdir. Öğrencileri farklı uzamsal beceri seviyelerine ayırmak için Uzamsal Görselleştirme beceri testi kullanmışlardır. Bu çalışmanın katılımcılarını 53 ortaokul öğrencisi oluşturmuştur. Öğrenciler iki gruba ayrılmıştır; birincisi GeoGebra ile koordinat sistemi eğitimi almış, ikincisi ise geleneksel yolla eğitim almıştır. Öğrencilerin başarıları son test kullanılarak ölçülmüş ve GeoGebra ile eğitim gören öğrencilerin başarı ortalamaları geleneksel yolla eğitim gören öğrencilerin başarılarından yüksek çıkmıştır. Ayrıca iki grupta yüksek görsel uzamsal beceriye sahip olan öğrencilerin başarıları arasında fark görülmezken, düşük görsel uzamsal beceriye sahip öğrencilerden GeoGebra ile eğitim görmüş öğrencilerin daha yüksek başarı ortalamasına sahip oldukları görülmüştür. Böylece GeoGebra koordinat sisteminin öğrenimi sırasında öğrencilerin performanslarını arttırdığı sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışmasında GeoGebra'nın sunmuş olduğu çoklu temsillerden yararlanan Diković (2009) matematiksel yapıların aktif bir şekilde keşfi için dinamik bir ortam sağlamak ve öğrencilere matematiğin bazı yönlerini kâğıt kalemle göstermenin mümkün olmadığını ifade etmektedir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin GeoGebra ile oluşturulmuş materyaller ile diferansiyel hesaplamalar konusunun öğretiminde öğrencilerin üzerinde pozitif bir etki yarattığını bulmuştur. Ayrıca GeoGebra'nın matematik sürecini istenen şekilde görselleştirdiğini görmüştür. GeoGebra'nın araçları öğrencilerin diferansiyel hesaplamalardaki fonksiyonları daha geniş bir şekilde araştırmasını ve öğrencilerin sembolik ve görsel temsiller arasında ilişkiler kurabilmelerini sağladığı sonucuna ulaşmıştır.

Filiz (2009) yaptığı çalışmada GeoGebra ve Cabri Geometri II dinamik geometri yazılımlarının web destekli ortamlarda kullanılmasının öğrenci başarısına etkisini ve bu süreçte gerçekleşen öğrenmelerin nasıl geliştiğini araştırmıştır. Bu amaç doğrultusunda 8. sınıf geometri öğrenme alanının dört kazanımını seçerek dinamik geometri yazılımlarını içeren bir web sitesi ve konuyla ilişkili çalışma yaprakları hazırlamış ve öğrencilere uygulamıştır. Deney-kontrol gruplu yarı deneysel olarak tasarlanan bu çalışma Trabzon merkez ilköğretim okullarının birinde 12 deney, 13 kontrol grubu olmak üzere toplam 25 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmada veriler başarı testi, web destekli materyal ve araştırmacının hazırlamış olduğu çalışma yaprakları ile toplanmıştır. Çalışma sonucunda analiz edilen verilere göre, hazırlanan web destekli materyalleri kullanan grup lehine anlamlı bir fark bulunmuştur ($U=28.00$, $p<.05$). Bu bulgu doğrultusunda hazırlanan web destekli materyal ile öğrenim gören öğrencilerde geleneksel öğretim gören öğrencilere göre daha etkili bir öğrenme gerçekleştiği ifade edilebilir. Diğer yandan çalışmanın sonuçlarına dayanarak araştırmalar dinamik geometri yazılımlarının öğrencilerin çıkarım yapma ve varsayımda bulunma becerilerini arttırdığını ortaya koymuştur.

Görüldüğü gibi GeoGebra matematik yazılımı hızlı bir şekilde kullanıcıya ulaşmış ve kısa zamanda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalarda GeoGebra'nın birçok yönü vurgulanmıştır. Her geçen gün GeoGebra'ya yeni özellikler eklenmekte ve bu özellikler ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır.

3.2 Matematik Eğitiminde İspat ile İlgili Yapılan Araştırmalar

Matematik eğitiminde önemli bir konu olan ispat ve ispat yapma becerisi birçok araştırmaya konu olmuştur. Araştırmacılar öğrenciler için anlaşılması zor olarak nitelendiren ispatın eğitiminin nasıl ve hangi ortamlarda olması gerektiği konusunda çeşitli araştırmalar yapmışlardır. Bu araştırmacılardan bir tanesi olan Almeida (2000) çalışmasında geniş bir örneklem ile lisans matematik öğrencilerinin ispat konusundaki algılarını açıklamaya yardımcı olacak nicel bir uygulama ve bu örneklemden seçmiş olduğu belirli öğrenciler ile ispat çalışmalarını içeren nitel bir uygulama yapmıştır. Elde etmiş olduğu sonuçlara göre lisans matematik öğrencileri sorulan ispat problemlerini üniversiteye girerken öğrendikleri formal matematiksel ispat kavramlarına dayanarak çözmektedirler. Ayrıca yapılan görüşmelerde öğrencilerin bu formal pozisyondan ayrıldıkları gözlenmiştir. Öğrenciler ispatın formal olmayan metotlarına karşı eğilim gösterip açıklamalarında bu metotlara yer vermişlerdir. Almeida (2003) bir diğer çalışmasında öğrencilerin ispat anlayışında giderek artan yetersizlik sebebiyle öğrencilere modern matematiğin tarihsel başlangıcına dayanan bir kurs tasarımı önererek ispatı öğrenmelerini amaçlamıştır. Özellikle böyle bir tasarım ile öğrencilerin ispat algılarını keşfetmelerine ortam sağladığı tartışılmıştır. Böylece öğrenciler yönlendirilmiş matematik aktiviteleri ile varsayımda bulunmuş ve bu varsayımları doğrulamak için ispat yapmışlardır. Bu kurs böylece öğrencilerin ispat algılarına katkıda bulunmuştur.

Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006) yaptıkları çalışmada matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini araştırmışlardır. Araştırmanın örneklemini Dokuz Eylül Buca Eğitim Fakültesi'nde okuyan birinci ve dördüncü sınıf öğrencisi olan 337 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmada öğretmen adaylarının görüşlerini almak için Almeida'nın (2000) yapmış olduğu ölçek geliştirilerek uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin olmadığını ya da görüşlerinin yetersiz olduğunu ortaya çıkarmıştır. Stylianides ve Stylianides (2009) ise yaptıkları çalışmada 39 öğretmen adayının ispat oluşturma becerilerini incelemek ve oluşturdukları ispatları kendilerinin değerlendirmeleri amaçlanmıştır. İspat yapma-değerlendirme aktiviteleri ile öğretmen adaylarından yapılan ispatları değerlendirmelerini istemenin kendi yaptıkları ve başkalarının yaptıkları ispatı anlamak için yardımcı olacağı iddia edilmiştir. Bu amaçla öğretmen adaylarına ispat problemleri verilmiş ve elde edilen cevaplar; ispat, ispat olmayan fakat genel olarak geçerli ifadeler, genel olarak geçerli iddialar üretme konusunda başarısız, deneysel ifadele ve gerçek olmayan ifadeler olmak üzere 5'e ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının cevapları analiz edildiğinde büyük kısmı doğru ispatı oluşturmuş, bir kısmı genel olarak geçerli iddialar oluşturma konusunda başarısız olmuş ve bir kısmı da deneysel ifadeler üretmişlerdir. Az sayıda öğretmen adayı ise gerçek olmayan ifadeler kullanmıştır. Sonuç olarak yapılan araştırma öğretmen adaylarının kendi yapmış olduğu ispatları değerlendirebilmelerini sağlamış ve yapılan ispatları değerlendirme becerilerine olumlu katkılar sağlamıştır. Böylece öğretmen adaylarının gelecekteki öğrencilerinin ispata bakış açısını daha kolay anlayabilecekleri vurgulanmıştır.

Öğretmen adaylarıyla çalışılan bir diğer araştırma Stylianides, Stylianides ve Philippou (2007) tarafından yürütülmüştür. Yapılan çalışmada ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispatı daha etkili bir şekilde öğretebilmeleri için alan bilgileri hakkında bilgi toplanmak istenmiştir. Çalışmanın verileri 95 katılımcının yazılı cevapları ve bunların içinden 11 katılımcı ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler ile toplanmıştır. Elde edilen bulgulara göre katılımcıların tümevarımsal metodun temel aşamasında ve diğer adımlarında zorluklarla karşılaştıkları bulunmuştur. Tümevarımsal metodun aşamalarında yaşanan zorluklar matematik öğretmen adaylarına verilen eğitimde ispata yönelik kavramlar üzerinde yeterince durulmadığını ortaya çıkmıştır.

Larsen ve Zandieh (2007) Lakatos'un *Proof and Refutation* kitabında bulunan matematiksel keşif metotlarını, matematik öğretimine daha uygun hale getirmek için yeniden gözden geçirmiştir. Çalışma matematik bölümünde okuyan ve soyut cebir dersi alan öğrenciler ile yürütülmüştür. Bu dersin seçilmesinin amacı Lakotos'un anlattığı içeriğe paralel olmasıdır. Yapılan çalışma sonucunda Lakotos'un metotlarının sınıf içi matematiksel aktiviteler için güzel bir çerçeve olduğu yargısına ulaşılmıştır. Çünkü öğrenciler matematiksel fikirler geliştirme konusunda derslere aktif olarak katılmışlardır. Ayrıca bu metotlar matematik öğrenimini destekleyen buluşsal yöntemler geliştirme konusunda da yardımcı olmuştur. Jones (2000) ise çalışmasında öğrencilerin üniversite seviyesindeki matematiksel ispat deneyimlerini değerlendirmeyi amaçlamıştır. Üniversite öğrencileri ile yapılan çalışmada öğrencilerin çok az sayıda ispat gösterimleri yaptıklarını gözlemiştir. Bu sonuçlara göre üniversite öğrencilerinin etkili matematik eğitimi almamış olduğu vurgulanmıştır.

McCrone ve Martin (2010) ise yaptıkları çalışmada lise öğrencilerinin düşüncelerinin ispat kuralları ile uyuşmasını ve ispat yapma becerilerini araştırmışlardır. Veriler "İspat Kuralları Anketi" ve "İspat Oluşturma Başarı Testi" ile toplanmıştır. Elde edilen veriler öğrencilerin formal ispatın mantıksal gerektirmelerinin farkında olmadıklarını göstermiştir. Öğrenciler ispatın genel olması gerektiği düşüncesinde olmalarına rağmen, tek bir örnekten elde ettikleri yargıdan kolay bir şekilde etkilenebildiklerini vurgulamışlardır. Bazı öğrenciler prototip bir örneğin genel kuralları gerektirdiğini savunmuşlardır.

Knuth (2002) çalışmasında 17 ortaöğretim matematik öğretmeninin, ortaöğretim matematiği bağlamında ispat konusundaki düşüncelerini ve ortaöğretim matematiğinde ispatın nasıl oluştuğunu belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmaya göre öğretmenler ispatı her öğrencinin değil sadece belli bir düzeye gelmiş öğrencilerin kavrayabileceği düşüncesinde olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğretmenler ispatın bir konu olabileceğini değil matematiği çalışabilecekleri ve matematiksel iletişim kurabilecekleri bir araç olarak gördükleri sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmenlerle bir diğer çalışma Martin, McCrone, Bower ve Dindyal (2005) tarafından yapılmıştır. Yapılan çalışmada ispat anlayışının gelişmesini etkileyen faktörler araştırılmıştır. Çalışmada bir öğretmen ve öğrencilerinin davranışları 4 ay süre ile sınıf ortamında öğrencilerin matematiksel varsayımları, gerekçelendirme sürecini ve öğrencinin oluşturduğu ispatları tartıştığı süreçte belirlenmiş ve bu davranışlar yorumlanmıştır. Sonuçta öğretmenin pedagojik seçimleri ve davranışlarının öğrencilerin sınıf ortamında ispat ve akıl yürütme becerilerinin gelişimini etkilediği belirlenmiştir. Ayrıca öğretmenin seçtiği açık uçlu sorular, öğrencilerin akıl yürütmelerini geliştirecek diyaloglar kurgulamak, öğrencilerin ifadelerini analiz etmek; öğrencilerin varsayımlar oluşturmaları, gerekçelendirmeler yapmaları ve akıl yürütme dizileri oluşturmaları için ortam sağladığı görülmüştür. Böyle bir ortamda ders aktivitelerine etkin bir şekilde katılan öğrencilerin ispat yapma becerileri gelişmekte olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

İspatın matematik ders kitaplarındaki yeri ve nasıl olması gerektiğini araştıran Stylianides (2009), çalışmasında muhakeme ve ispat yapma aktivitelerinin öğrencilerin matematik öğreniminde önemli aktiviteler olmasına rağmen çoğu öğrencinin bu konuda zorluklar yaşadığını söylemektedir. Öğrencilerin muhakeme ve ispat yapma aktiviteleri ile ilişkilendirilmesi için ders kitaplarının önemli bir rol oynadığını ifade etmektedir. Buna rağmen ispat ve muhakeme becerilerinin ders kitaplarında nasıl geliştirileceğinin çok fazla bilinmediğini vurgulamıştır. Böylece ders kitaplarında bulunan ve öğrencilerin muhakeme ve ispat yapma aktiviteleri ile ilişkilendirilmesini sağlayan aktiviteleri belirlemeye yönelik bir analitik yaklaşım kullanılmıştır. Bu yaklaşım genel olarak örüntü bulma, varsayım oluşturma, ispat yapma ve ispat olmayan ifadeler kullanma olmak üzere 4’e ayrılmıştır. Araştırmacı kullanmış olduğu yaklaşımın yararlarını göstermek için Amerikan ders kitapları serisinden yararlanmıştır. Sonuç olarak ortaokul matematik ders kitaplarında deneysel gerekçelendirmelerin yer almadığı, rasyonel sayıların her düzey için önemli olduğu fakat düzey ilerledikçe yoğunluğunun azalması gerektiği, ispat sayılarının düzey ilerledikçe artması gerektiği ve kitapta yer alan gösterimlerin yüzdesinin jenerik örneklerin yüzdesine oranla daha fazla olması gerektiğini söylemişlerdir.

3.3 İspatlarda Dinamik Geometri Yazılımı Kullanımı ile İlgili Araştırmalar

Teknolojinin gelişmesiyle birlikte matematik eğitiminde kullanım oranı artan DGY'ler ispat konusunda öğrencilerin varsayımda bulunmaları ve çıkarım yapmalarına yardımcı olmaktadır. Bu yüzden araştırmacılar ispatların DGY ortamlarında yapıldığı çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bu amaçla Hoyles ve Jones (1998) DGY'nin matematikte zor bir konu olarak kabul edilen ispatın öğretimine etkisi ve matematiksel ispatın resmi olmayan formundan resmi formuna geçişini sağlayıp sağlamadığına dair bir çalışma yapmıştır. Ayrıca çalışmasında bilgisayarların öğrencilerin, ispat için bir kavramsal çerçeve geliştirmelerine yardımcı olup olmadığını da araştırmıştır. Sonuçta Cabri geometri yazılımında uygulanan genelleyici örnekler sayesinde öğrencilerin tümevarım ve tümdengelim kavramları arasındaki ilişkiyi görebildikleri ve bu sayede ispat için bir temel oluşturabildikleri vurgulanmıştır.

Hanna (2000) yapmış olduğu çalışmasında ispatın matematik eğitimindeki yerini belirlemeyi ve programdaki önemine dair gerekçeler sunmayı hedeflemiştir. Ayrıca dinamik geometri yazılımlarının bulgusal (heuristic), araştırma (exploration) ve görselleştirme (visualization) olmak üzere üç önemli uygulamasını, ispatın öğretimi ve ispatın öneminin vurgulanmasındaki rolünü tartışmıştır. Sonuç olarak DGY'nin sınıf ortamlarında bulgusal, araştırma ve görselleştirme imkânını sağladığını söylemiştir. Ayrıca öğretmenlerin DGY kullanımı konusundaki eğitiminin desteklenmesi ve böylece sınıflarda kullanılacak DGY aktivitelerinin niteliğinin arttırılması gerektiğini öne sürmüştür.

Hadas, Hershkowitz ve Schwarz (2000) çalışmalarında DGY'nin çeşitli özelliklerinin kullanılabileceği iki aktivite tasarlamışlardır. İlk aktivite öğrencinin hipotezi ile sonuçlar arasında çelişki yaratacak ve öğrenciyi açıklama yapmaya yönlendirecek şekilde tasarlanmıştır. İkinci aktivitede ise belirsizlik yer almakta ve öğrenci bu belirsizliği örneklerle açıklayabilmektedir. Bu aktiviteler sayesinde öğrencinin tümdengelimsel akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Öğrencinin verilen durumlarda ne sıklıkla tümdengelimsel açıklamalar yaptığı ve hangi durumlarda tümdengelimsel açıklamaları yapmaya teşvik ettiği araştırılmıştır. Sonuç olarak öğrencinin dinamik geometri öğrenme ortamlarında iyi tasarlanmış aktivitelerle çalışması sağlandığında, öğrencinin ispat yapma ve açıklama becerilerinin geliştiği bulunmuştur. Böylece öğrenci iyi tasarlanmış aktivelerle çalıştığında eski bilgilerini de kullanarak çelişkileri açıklayabilmiş, belirsizliklerle başa çıkmış ve böylece formal ispat yapmak için büyük adımlar atabilmiştir.

Jones (2000) ise 12 yaş öğrencilerinin çıkarımsal akıl yürütme ve geometrik nesneler arasında ilişkiler kurabilme becerilerinin DGY kullanımı ile nasıl geliştirilebileceği üzerine bir çalışma yapmıştır. Sonuç olarak araştırmacı öğrencilerin dinamik geometri yazılımları ile etkileşimleri sonucunda kullanmış oldukları gündelik dilin yazılım sayesinde çeşitli geometrik durumların matematiksel açıklamalarına dönüştüğünü gözlemlemiştir. Böylece dinamik yazılım öğrencinin açıklama biçimlerini iyi yönde etkilemiştir. Bu sebeple iyi düşünülmüş çalışmalar sayesinde varsayım yapmaya cesaretlendiren duyarlı öğretmenlerle ve DGY sayesinde kapsamlı tanımlarla bir araya gelen sınıf ortamları tümdengelimli akıl yürütmeyi geliştirici olanaklar sağlamıştır.

Wares (2004) çalışmasında dinamik geometri ortamlarında araştırılabilecek geleneksel olmayan varsayımlara örnekler sağlamayı amaçlamıştır. Araştırmacı geleneksel olmayan varsayımlar ile ders kitaplarında sıklıkla karşılaşılmayan varsayımları kastetmiştir. Wares'a göre dinamik geometri yazılımları, bir yandan bir geometrik şeklin çoklu temsillerinin manipülasyonunu sağlamakta diğer yandan geometrik şekildeki değişmemesi gereken yerlerin kontrolünü sağlamaktadır. Böylece dinamik bir figürde geometrik şekiller ve özellikler değişmemiştir. Bu sayede öğrencilerin dinamik ortamlarda yeni matematiksel varsayımlar üretme yeteneklerini geliştirebildikleri bulunmuştur. Ayrıca DGY öğrencilerin tümdengelimli akıl yürütmeye teşvik edilmesi için de kullanılabilmektedir. Bu şekilde matematik ve teknolojinin birleştirilmesi öğrencinin matematiksel bilgilerini zenginleştirmesini sağlamıştır.

Mariotti (2000), uzun süreli bir öğrenme deneyi ile 9 ve 10. sınıf lise öğrencilerini Cabri Geometri yazılımı kullanarak teorik düşünme ile tanıştırmayı amaçlamıştır. Vygostky bakış açısıyla Cabri Geometri yazılımı kullanımı sayesinde ispatın sosyal yapılandırılması ve semiyotik düşüncesi sağlanmış ve böylece ispatın gelişimi açıklanmıştır. Cabri Geometride bulunan sürükleme aracı sayesinde oluşturulan geometrik şeklin teorik olarak doğruluğu araştırılmıştır. Cabri ortamı sınıftaki sosyal aktiviteler ile ispatın semiyotik düşüncesini sağlamıştır.

Stylianides ve Stylianides (2005), çalışmalarında Dinamik geometri ortamlarında yapılan problem çözümlerinin geçerliliğini klasik olan kâğıt-kalem çalışmaları ile öklit geometrisinin kurulumunu karşılaştırmaktadır. Araştırmada dinamik geometri ortamında yapılan *sürükleme testi* kriteri ile bulunan veriler pergel cetvel kullanımı ile yapılan klasik geometride bulunan verilerle tutarsız bulunmuştur. Bu tutarsızlık dinamik geometride yapılan sürükleme testinin klasik geometri ölçümlerine karşı üstünlüğü konusunda şüphe oluşturmuştur. Bunun üzerine problem çözümlerinin tutarlılığı sürükleme testi ve DGY'de çözüm oluşturma aşamasının *uygunluk kriteri* göz önünde bulundurularak belirlenmeye çalışılmıştır. Böylece dinamik geometri ortamlarında geometrik yapı oluşturma ve geçerlilik çalışmalarında dinamik yazılımların rolünün farkındalığı oluşmuştur.

3.4 İspat ve Gerekçelendirme Biçimlerinin Belirlenmesi ile İlgili Araştırmalar

Öğrencilerin yapmış oldukları ispatlar ve gerekçelendirme biçimleri, öğrencilerin ispat becerilerini geliştirmek için yol gösterici niteliktedir. Bu yüzden öğrencilerin ispat ve gerekçelendirme kategorileri araştırmalara konu olmuştur. Örneğin Bell (1976) çalışmasında 14 yaş ortaokul öğrencilerinin yaptıkları ispatları ve açıklamaları analiz etmiş ve deneyimli matematikçilerin yapmış oldukları ispatlardan ne yönde farklılar ve eksikler olduğunu bulmaya çalışmıştır. Böylece öğrencilerin ispat becerilerini geliştirmek için verilen ispat problemlerine vermiş oldukları cevapları analiz etmiş ve bu cevapları deneysel ve tümdengelimsel olmak üzere iki genel kategoriye ayırmıştır.

Harel ve Sowder (1998) ise çalışmasında öğrencilerin yapmış oldukları matematiksel ispatların bilişsel şemalarını oluşturmayı ve matematik eğitimcilerine öğrencilerin matematiksel ispat anlayışlarını geliştirecek öneriler sunmayı amaçlamıştır. Bu amaçla ilköğretim, lise, üniversite düzeylerinden belirli gruplarla çalışmışlardır. Çalışmanın verileri, sınıfta yapılan etkinliklerin video kayda alınması, klinik mülakatlar, öğrencilerin ödevleri ve çalışma kâğıtları ile toplanmıştır. Elde edilen verilere göre öğrencilerin ispat şemaları dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç şemaya ve alt şemalara ayrılmıştır. Dışsal şemalarda öğrenciler matematikte öğrendiklerinin doğruluğunu kitaplara veya öğretmenine dayandırmıştır. Deneysel ispat şemaları öğrencilerin varsayımları doğrulamak için kullandıkları özel örnekleri ve sezgisel desenleri içermektedir. Analitik ispat şemaları ise mantıksal çıkarımlar ile tahminlerin geçerliğini sağlamayı içermektedir.

Marrades ve Gutiérrez (2000) yaptıkları çalışmada ortaokul öğrencilerinin ispat problemlerine vermiş oldukları cevapları analiz etmiş ve analitik bir çerçeve oluşturmuşlardır. Bu çerçeveyi DGY ile öğrencilerin matematiksel ispat yapma becerilerini geliştirmek için kullanmışlardır. Bu amaçla Cabri-Géomètre ile çalışarak verilen geometri ispat problemlerini çözen öğrencilerin cevapları analiz edilmiştir. Bu analiz sonucunda öğrencilerin yapmış oldukları gerekçelendirmeleri deneysel ve tümdengelimsel olmak üzere iki genel kategoriye ayırmışlar ve dinamik geometri ortamlarının öğrencilerin ispat becerilerini geliştirdiğini vurgulamışlardır.

İskenderoğlu ve Baki'nin (2011) yaptığı çalışmanın amacı, dördüncü sınıfta öğrenimlerine devam etmekte olan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür kanıt şemaları kullandıklarını tespit etmektir. Bu sebeple çalışmalarında dördüncü sınıfa devam etmekte olan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını ortaya koymak için yazılı sınavda 53 ve klinik görüşmelerde 4 kişiye uygulanmıştır. Çalışmanın sonucunda dördüncü sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının yazılı sınavda ve klinik görüşmelerde dışsal, deneysel ve analitik şemaların her üçünü de kullandıkları görülmüştür. Bunun yanında katılımcıların yazılı sınavda ve klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullandıkları ortaya çıkmıştır. Çalışma sonuçlarına dayanarak araştırmacılar, öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ve kanıt yapma becerilerinin nasıl geliştirileceğine dair ve ayrıca bu becerilerin lisans düzeyindeki programlarda olmasının gerekliliği düşünülerek program geliştiricilere ve araştırmacılara yol gösterilmiştir.

Weber (2004) ise çalışmasında lisans öğrencilerinin ispat oluşturma sürecinde kullandıkları biçimleri açıklamak ve bunları kategorize etmek için bir çerçeve oluşturmayı amaçlamıştır. Bu amaçla 14 lisans öğrencisinin yapmış olduğu toplam 176 ispatı analiz etmiştir. Analiz sonuçlarında lisans öğrencilerinin kullandıkları üç tip belirlenmiştir. Bunlar; prosedüre dayalı ispat oluşturma, sözdizimsel (syntactic) ispat oluşturma ve anlamsal (semantic) ispat oluşturmadır.

İspatların kategorilere ayrılması ile ilgili bir diğer çalışma da Aydoğdu, Olkun ve Toluk'un (2003) yapmış olduğu çalışmadır. Bu çalışmanın amacı ise ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıflardaki öğrencilerin matematik problemlerine buldukları sonuçlardan nasıl emin olduklarını araştırmaktır. Bu amaçla ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıflardan 4'er tane öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Veriler analiz edildiğinde öğrencilerin genellikle dışsal şemalardan otoriteyi kullandıkları görülmüştür. Bu da öğrencilerin matematiği öğrenirken kendi zihinsel yapılarını oluşturmaktan ziyade ezberleme yoluna gittiklerini göstermiştir.

Ören (2007), çalışmasında 10.sınıf öğrencilerinin geometri sorularında kullandıkları ispat şemaları ve öğrencilerin bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre ispat şemaları kullanımlarındaki farklılıkları araştırmıştır. Çalışmanın verilerini "Geometri İspat Testi" ve "Gizlenmiş Şekiller Grup Testi" ile toplamıştır. Verilerin analizi sonucunda öğrencilerin dışsal dayanaklı ve deneysel ispat şemalarını analitik ispat şemalarına göre önemli ölçüde daha fazla kullanmakta olduğunu bulmuştur. Kız öğrencilerin deneysel ispat şemalarını erkek öğrencilere göre önemli ölçüde daha fazla kullandığı sonucuna ulaşmıştır. Bu sonuçlara göre geometride ve matematikte, ispat kavramını öğretirken cinsiyet ve bilişsel sitil farklılığının göz önüne alınması gerektiğini ortaya koymuştur.

BÖLÜM IV

ARAŞTIRMADA KULLANILAN YÖNTEM

4.1 Araştırmanın Modeli

GeoGebra yazılımı kullanılarak öğretmen adaylarının geometride kullandıkları ispat biçimlerinin belirlendiği bu çalışma nitel bir araştırma modeli olan durum çalışmasıdır. Durum çalışmaları bir ya da daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olarak tanımlanır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel; 2008). Belirlenen duruma ilişkin etkenler (ortam, birey, olaylar, süreç, vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Durum çalışması örnek olay çalışması olarak da bilinir (Büyüköztürk ve diğerleri, 2008).

4.2 Çalışma Grubu

Araştırmanın katılımcılarını 2010-2011 eğitim öğretim yılında Orta Anadolu'da bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalında öğrenim görmekte olan 2. sınıfta okuyan 2 bayan 4 erkek olmak üzere toplam 6 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Katılımcılar araştırmacı tarafından *amaçlı örnekleme* yöntemlerinden *ölçüt örnekleme yöntemi* ile belirlenmiştir. Ölçüt örnekleme yönteminde temel anlayış önceden belirlenmiş ölçütleri karşılayan durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu amaçla bu grubun seçilmesinin esas sebebi bu adayların GeoGebra yazılımını etkin bir şekilde kullanabilmeleridir. Çalışmada yer alan öğretmen adayları "Dinamik Geometri

Yazılımları ile Matematikte Kavramların Keşfi" dersine giren öğretim üyesi ile görüşülüp, farklı bilgi beceri düzeylerinin olması açısından 2 zayıf, 2 orta, 2 iyi düzeyde olan toplam 6 öğretmen adayı çalışma grubu olarak belirlenmiştir.

4.3 Veri Toplama Araçları

Öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerini belirlemek için yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Yapılan görüşmelerde her bir öğretmen adayına araştırmacının hazırlamış olduğu geometrik ispat problemleri (EK1) verilmiştir. Öğretmen adayları verilen geometri problemlerini GeoGebra dinamik matematik yazılımı ortamında çözmüşlerdir. Her bir öğretmen adayının bilgisayar ortamında yapmış oldukları ispatlar "Wink" ekran kaydetme programı yardımıyla kaydedilmiştir. Ayrıca yapılan mülakatların ses kayıtları alınmıştır. Veri toplama araçları aşağıda sunulmuştur (Tablo 1).

Tablo 1: Veri Toplama Araçları

Veri Toplama Araçları
Geometrik İspat Problemleri
GeoGebra Dinamik Matematik Yazılımı
Wink Ekran Kaydetme Programı
Ses Kaydı

4.4 Araştırma Süreci

Yapılan araştırma 2010-2011 bahar döneminde uygulanmıştır. Araştırma süreci alanyazın taraması ile başlamıştır. GeoGebra, ispat, ispatlarda DGY kullanımı, ispat ve gerekçelendirme biçimleri ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir. Gerekli alanyazın incelendikten sonra derinlemesine bir araştırma için nitel bir çalışma yapılmasına karar verilmiştir. Uygulama sürecinde öğretmen adaylarının ispat biçimlerini belirlemek amacıyla GeoGebra yazılımı ile çözülebilen 3 ispat problemi belirlenmiştir. Çalışmanın katılımcıları GeoGebra matematik yazılımını kullanabilen 6 matematik öğretmen adayı olarak belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları çalışmada takma isimlerle adlandırılmıştır. Uygulama sürecinde nitel veri toplama tekniklerinden yarı yapılandırılmış klinik mülakat yöntemi kullanılmış ve araştırmacı görüşmeci rolünü üstlenmiştir. Klinik mülakatlar, belirlenmiş bir konu, kavram veya probleme odaklanarak yürütülür ve bu konuda derinlemesine bilgiler elde edildiği için, irdelenen konunun bütün boyutları açığa çıkarıldığı çalışmalardır (Çepni, 2010). Bu sebeple öğretmen adaylarının ispat biçimlerinin belirlenmesinde derinlemesine incelemeler yapabilmek amacıyla klinik mülakata başvurulmuştur.

Görüşmeler sırasında her öğretmen adayına hazırlanmış olan 3 geometrik ispat problemi verilmiştir. Öğretmen adayları GeoGebra yazılımı ile ispatlara başladığında Wink ekran kaydetme programı çalıştırılmış ve ses kaydı alınmaya başlanmıştır. Her bir öğretmen adayının mülakatı yaklaşık 2 saat sürmüştür. Öğretmen adayları bu süreçte GeoGebra yazılımını aktif bir şekilde kullanmışlar ve ihtiyaç duydukları anlarda kağıt kalem üzerinde de işlemler yapabilmişledir.

4.5 Verilerin Analizi

Çalışmada her bir öğretmen adayı için uygulama sürecinde elde edilen ses kayıtları yazılı doküman haline getirilmiş ve Wink programı ile elde edilen ekranlar ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar sonucunda veriler nitel veri analizi yöntemlerinden betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Betimsel analiz yönteminde eldeki veriler daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışmada ise toplanmış olan verilerin analizi Marrades ve Gutiérrez'in (2000) oluşturdukları ispat biçimleri tablosunda yer alan sınıflama göz önünde bulundurularak yapılmıştır. Yapılan sınıflamaların doğruluğundan emin olmak için ikinci bir araştırmacı veri analizlerini kontrol etmiştir.

BÖLÜM V

BULGULAR VE YORUM

5.1 İspat Problemleri ve Öğretmen Adaylarının Çözümleri

Bu bölümde matematik öğretmeni adaylarının kendilerine verilen bir geometrik ispat probleminin çözümünde GeoGebra'yı nasıl kullandıkları, geometrik ispat yapma sürecinde ne tür davranışlar sergiledikleri, verilen bir ispat probleminin çözümü için geçerli varsayımda bulunup, bu varsayımlar hakkında gerekçeler oluşturup oluşturamadıkları ve GeoGebra'yı kullanarak geometriye yönelik ispat problemleri çözme sırasında hangi tür ispat biçimlerini kullandıkları analiz edilmiştir. Bulgular Wink programında kaydedilen ekran görüntüleri, öğrencilerin GeoGebra'da yaptıkları çizimler ve öğrencilerin kâğıda yaptıkları çözümlerle desteklenmiştir.

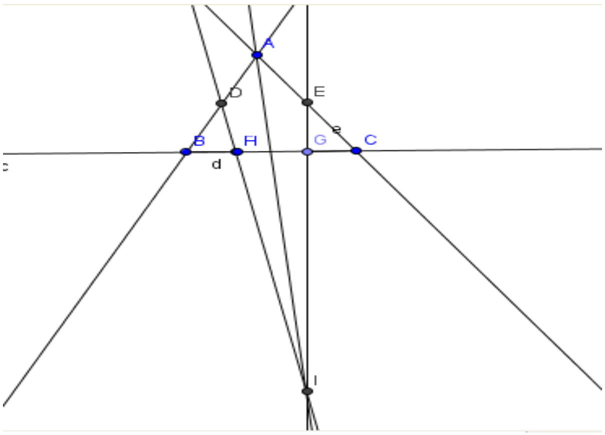
5.1.1 Birinci İspat Problemi

"Bir ABC üçgeninde D ve E noktaları sırasıyla $|AB|$ ve $|AC|$ doğru parçalarının orta noktalarıdır. F ve G noktaları $|BC|$ tabanına $|BG|=|CF|$ olmak üzere yerleştirilmiştir. $|DG|$ ve $|EF|$ doğru parçaları H noktasında kesiştiğine göre AH doğru parçasının, ABC üçgeninin hangi çeşit veya çeşitlerinde A açısının açıortayı olduğunu bulunuz ve neden açıortay olduğunu ispatlayınız."

5.1.1.1 Birinci Durum (Öğretmen Adayı Burak)

(1) Burak ilk olarak soruda istenen şekli kâğıt kalemle çizmiş, araştırmacının şekli GeoGebra'da oluşturmasını istemesi üzerine, dinamik ortamda tam olarak çizemeyeceğini ileri sürmüştür.

(2) Sonra GeoGebra'da üç tane doğruyu kullanarak bir üçgen çizmiş ve soruda istenenleri sırasıyla oluşturmuştur. Elde ettiği şekilde I kesim noktası üçgenin dışında oluşmuştur (Şekil 6).



Şekil 6: Öğretmen Adayı Burak'ın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(3) ABC üçgeninin ikizkenar ve ADIE dörtgeninin de deltoit olması halinde, AI doğru parçasının A açısının açıortayı olacağı varsayımında bulunmuştur. Şekli doğru oluşturup oluşturmadığını anlamak için istenen durumları tekrar kontrol etmiş ve BAI, IAC açılarını ölçmek istemiştir.

(4) DBH ve EGC üçgenlerinin eş olması gerektiği varsayımında bulunmuştur. Daha sonra AI doğrusunun BC kenarını kestiği noktayı J olarak işaretlemiş ve JAC açısını ölçmüştür. Aynı şekilde BAJ açısını da ölçmüş ve açıların farklı olduğunu görmüştür. Bu durumu ABC üçgeninin ikizkenar olmamasına dayandırmıştır. Bu sebeple çeşitli sürüklemeler yaparak ABC üçgenini ikizkenar üçgen haline getirmiştir.

(5) Açı ve kenar ölçümlerini yaptıktan sonra oluşturduklarının doğru olmadığını düşünmüş, yanlışlığın GeoGebra'yı etkin olarak kullanamamasından kaynaklandığını öne sürmüştür.

"Hangi üçgenlerde açıortay olduğunu sorduğunda açılara bakmak istedim. Eğer ikizkenarsa diklikten dolayı olduğunu söyleyebilmem için açılarını bilmem gerekirdi. Açıları farklı çıktı demek ki olmuyormuş.

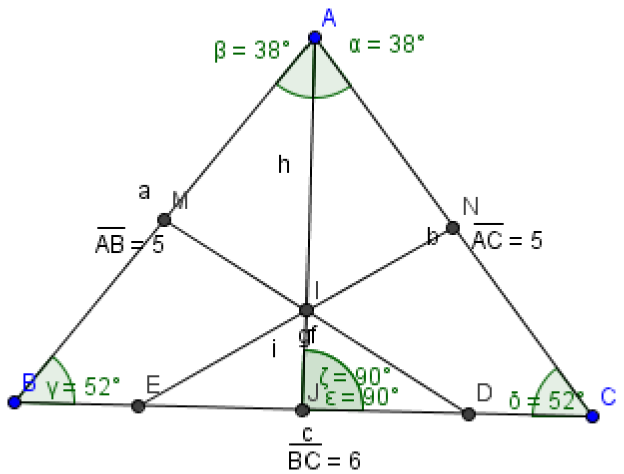
Ama önceki matematik bilgilerime göre mutlaka açıortay olması gerekiyordu. Şekli yanlış oluşturmuş olabilirim.”

(6) Daha sonra doğru parçalarını kullanarak bir ABC üçgeni oluşturmuş ve AB, AC kenarlarının orta noktalarını M ve N olarak belirlemiştir. “Merkez ve yarıçapla çember” den yararlanarak BC kenarında B ve C noktalarına eşit uzaklıkta D ve E noktaları almıştır. DM ve EN’yi birleştirdiğinde yine kesişmediğini görünce D ve E noktalarının yerlerini değiştirmesi gerektiğini anlamış ve noktaları değiştirmiştir. DM ve EN doğru parçalarını tekrar oluşturduktan sonra noktaların kesiştiklerini görüp kesim noktasını I olarak belirlemiştir.

(7) Üçgenin açılarını ölçmüş ve ABC üçgenini sürüklemeler yaparak ikizkenar üçgen haline getirmiştir. DE doğru parçasının orta noktasını J olarak belirlemiş daha sonra AJ doğru parçasını oluşturmuştur.

(8) AJ doğru parçasının BC kenarına dik olması halinde (ABC üçgeni ikizkenar olduğu için) açıortay olacağını söylemiştir.

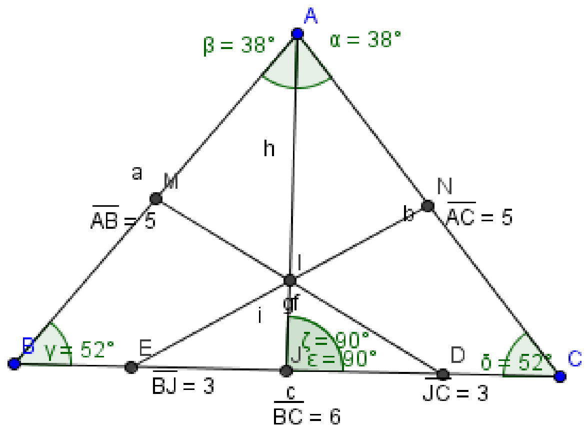
(9) A, I ve J noktalarının doğrusal olup olmadığı sorulduğunda AJC açısı ve IJC açısını ölçmüş, 90^0 ve eşit olduğunu görünce A, I, J noktalarının doğrusal olduğundan emin olmuştur (Şekil 7).



Şekil 7: Öğretmen Adayı Burak’ın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra’da Oluşturduğu Şekil -2

(10) A, I, J’nin doğrusallığını gösterdikten sonra AJ doğru parçasının açıortay olduğunu göstermesinin yeterli olacağını söylemiştir. BJ ve

JC doğru parçalarını ölçmüş, eşit olduğunu görünce ikizkenar üçgende kenarortayın aynı zamanda yükseklik ve açıortay olduğunu söylemiştir (Şekil 8).



Şekil 8: Öğretmen Adayı Burak'ın Birinci İspat Problemi İçin GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -3

Öğretmen adayı Burak (6)'da herhangi bir ABC üçgeni oluşturmuş, soruda istenen şartları sağlayamadığını görünce çeşitli sürüklemeler yaparak bu üçgeni ikizkenar üçgen haline getirmiştir. ABC üçgeninin ikizkenar olması halinde AI doğru parçasının açıortay olacağı varsayımında bulunmuştur. Bunun üzerine AI doğru parçasına bağlı açıları ölçtüğünde eşit olduğunu görmüştür. Burak burada ilk olarak örneklerden yararlanmayı tercih etmiştir. Böylece ispatı gerçekleştirmek için *deneysel gerekçelendirmelere* başvurmuştur. Üçgen sınıfından ikizkenar üçgeni kullanarak *jenerik örnek* kullanmıştır.

Burak AI doğru parçasının açıortay olması için AJC açısının dik olması gerektiği varsayımında bulunmuş karşıt bir sonuçla karşılaşmadığı için varsayımını doğru kabul etmiştir (8) (9). Böylece *örnek tabanlı* gerekçelendirme yapmıştır.

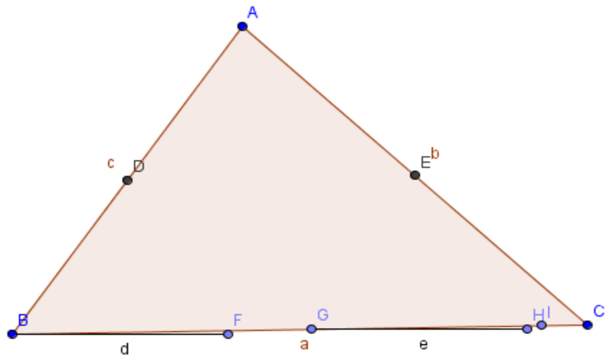
Burak varsayımını doğrulamak için *deneysel gerekçelendirme* biçimlerinden *örnek tabanlı jenerik örnek* kullanmıştır.

Burak soruda istenen şekli doğru oluşturup oluşturmadığını anlamak için ölçümler yapmıştır. Yaptıkları ölçümler sonucunda GeoGebra'nın hızlı geri bildirimler sunmasıyla doğru ya da yanlış yaptığını anında öğrenip düzeltme imkânı elde etmiştir (4) (6). Fakat yine de GeoGebra'yı etkin olarak kullanamadığını düşünmüştür (1).

İkizkenar üçgen oluşturmak için çeşitli sürüklemeler ve ölçümler yapması jenerik örnek oluşturmasında Burak'a yardımcı olmuştur (7). Diğer taraftan GeoGebra'da yapmış olduğu ölçümler varsayımı doğrulamada da Burak'a yardımcı olmuştur (9) (10).

5.1.1.2 İkinci Durum (Öğretmen Adayı Eda)

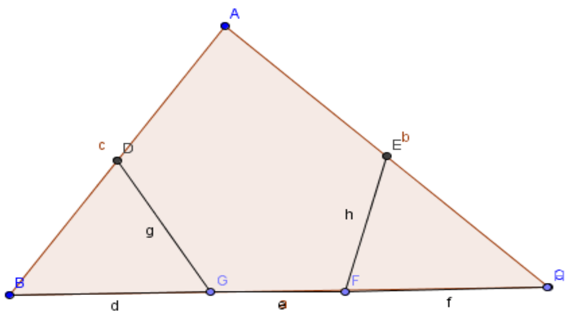
(1) Öğretmen adayı Eda iki noktadan geçen doğru parçası aracını kullanarak ABC üçgenini oluşturmuştur. Orta nokta veya merkez aracını tıklayarak AB ve AC kenarlarının orta noktalarını sırasıyla D ve E noktası olarak işaretlemiştir. │BG│=│CF│koşulunu sağlamak için verilen uzunlukta doğru parçasını kullanmayı düşünmüş, cebir penceresinden │BC│kenarının uzunluğuna bakmış ve 8 cm olduğunu görmüştür. B noktasından başlayan ve 3 cm uzunluğunda │BF│ doğru parçasını oluşturmuştur. B ve C noktalarının koordinatlarına bakarak F'den yaklaşık 2 cm uzaklıkta bir G noktası oluşturmuştur. Yine aynı şekilde G noktasından başlayan ve 3 cm uzunluğunda yeni bir doğru parçası oluşturmuştur. Fakat bu doğru parçası tahminlerinin aksine C noktasında bitmemiştir (Şekil 9).



Şekil 9: Öğretmen Adayı Eda'nın Birinci İspat Problemi İçin GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

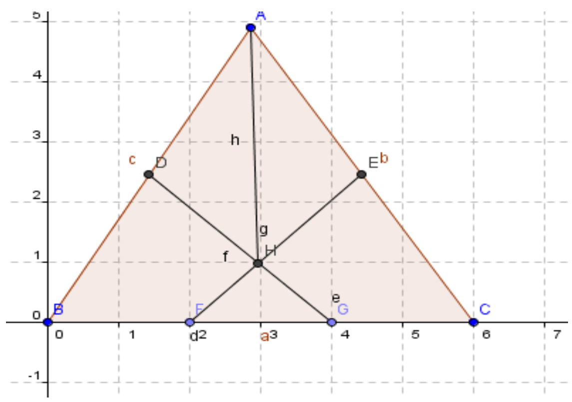
(2) Oluşan doğru parçalarını silip │BC│ kenarının orta noktasını bulmuştur. Daha sonra verilen uzunlukta doğru parçasını kullanarak 3

cm uzunluğundaki |BG|, |FC|'yi oluşturmuş ve |DG|, |EF|'yi birleştirmiştir (Şekil 10).



Şekil 10: Öğretmen Adayı Eda'nın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(3) Kesişmediklerini görünce şekli doğru oluşturup oluşturamadığını düşünmüş fakat |BG|=|CF| koşulunu sağladığını söylemiştir. Araştırmacının, başka hangi durumda |BG|=|CF| koşulunun sağlanabileceği sorusuna G ve F yer değiştirdiğinde yine koşulun sağlanacağını ifade etmiştir. B, G, F, C noktalarının doğrusallığı sağladığından emin olamayıp gridi açmayı düşünmüştür. Gridi açtıktan sonra F ve G noktalarını köşelerden 2 cm uzaklığa yerleştirmiş ve DG, EF doğru parçalarını çizdikten sonra yine kesişmediklerini görünce yerlerini değiştirmeyi düşünmüştür (Şekil 11). Bu durumda da istenen koşulu sağlayacağını ifade etmiştir. ABC üçgeninin köşelerinden sürükleyerek ikizkenar bir üçgen elde etmiştir.

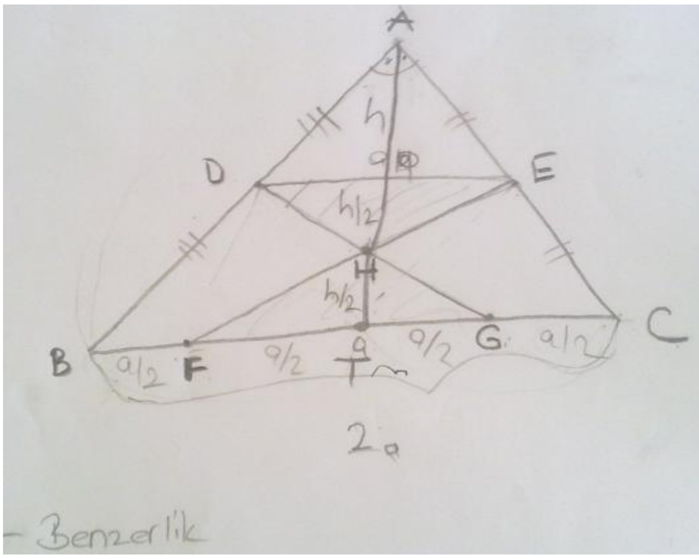


Şekil 11: Öğretmen Adayı Eda'nın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -3

(4) AH doğru parçasının ABC üçgeninin ikizkenar ve eşkenar olması halinde açıortay olacağı varsayımında bulunmuştur. AH doğru parçasını BC kenarına kadar uzattığında oluşan doğru parçasının yükseklik olacağını düşünmüştür.

(5) Daha sonra düşündüklerini kâğıt üzerinde yapmak istemiş ve DE doğru parçasını oluşturmuştur. │DE│ orta taban olduğu için │BC│'ye paralel olduğunu söylemiştir. Daha sonra bu paralelliği ve çeşitli benzerlikleri kullanarak AH doğru parçasını uzattığında oluşan doğru parçasının kenarortay olduğunu göstermiştir. İkizkenar üçgende kenarortayın aynı zamanda açıortay olacağını ifade etmiştir (Şekil 12). Eşkenar üçgende de aynı AH doğru parçasının açıortay olacağını söylemiştir. Nedeni sorulduğunda şu cevabı vermiştir:

"*Çünkü eşkenar üçgende de 30^0 30^0 ayırabiliriz (│AH│'nin A açısını eşit böleceğini ifade etmiştir). Burada bizim için önemli olan AB ve AC doğru parçasının eşitliğidir. Eşkenar üçgende de bu durumu sağlamış oluruz.*"



Şekil 12: Öğretmen Adayı Eda'nın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik Kâğıt Üzerinde Oluşturduğu Şekil

Eda ilk olarak çeşitkenar üçgen oluşturmuş (1) (2) ve açıortay koşulunu sağlamadığı için sürüklemeler yaparak ikizkenar üçgen oluşturmuştur (3). İkizkenar ve eşkenar üçgen olduğunda │AH│'nin açıortay olacağını ifade etmiştir (4). Soruda istenen koşulları oluşturduktan sonra işlemlerini kâğıt üzerinde yapmayı tercih etmiştir (5). Eda varsayımını doğrulamak için çeşitli sürüklemelerle oluşturduğu ikizkenar üçgenden yararlanarak *deneysel gerekçelendirme* biçimlerinden *jenerik örneği* tercih etmiştir.

Daha sonra bu örnek üzerinde çeşitli işlemler yapmış ve bu örneğin elemanları arasındaki ilişkilere bakmıştır. Bu ilişkileri benzerlik teoremi ve paralelliği kullanarak görmüş ve │AH│'nin açıortay olduğunu göstermiştir. Böylece varsayımın ispatı için *deneysel gerekçelendirme* biçimlerinden *entelektüel jenerik örnekten* yararlanmıştır.

GeoGebra istenen şeklin doğru oluşturulmaması durumunda yanlışlığı Eda'nın fark etmesini sağlayıp, doğru bir şekil oluşturmak için farklı yollar denemesine yardımcı olmuştur (3). Tam olarak istediği şekli ve ölçümleri oluşturamayan Eda grid özelliğini kullanarak üçgenin köşelerini grid üzerine sürükleyerek yerleştirmiş ve belli uzunlukta doğru parçaları alabilmiştir (4). Sadece 1 ders dönemi GeoGebra ile ders alan Eda (5) varsayımını doğrulamak için kâğıt kaleme geçmek istemesi eğitiminin büyük bir kısmını bu şekilde almasından kaynaklı olabilir.

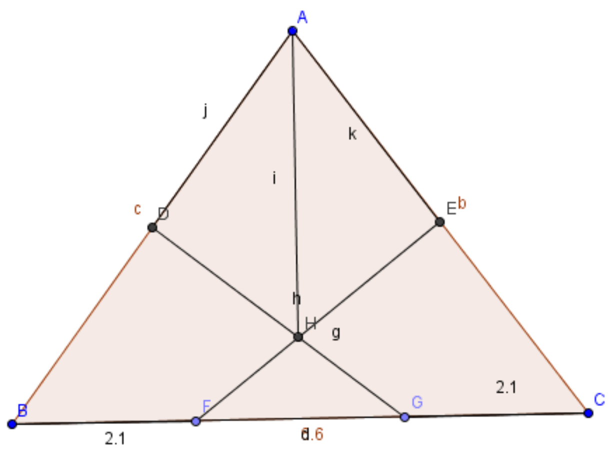
5.1.1.3 Üçüncü Durum (Öğretmen Adayı Alper)

(1) Alper soruyu okuduktan sonra istenen şekli kâğıt kalemle çizme ihtiyacı duymuştur. Araştırmacının yönlendirmesi üzerine GeoGebra ortamında çizmeye karar vermiştir.

(2) Çokgen aracını kullanarak herhangi bir üçgen oluşturmuş ve soruda istenen AB ve AC kenarlarının orta noktalarını "orta nokta veya merkez" aracını kullanarak oluşturmuştur. BC tabanını üçe bölmesi gerektiğini düşünmüş ve uzunluğunu bulmak istemiştir. Uzunluk ölçme aracını bulamayınca cebir penceresinden BC tabanının ölçüsünün 6,6 cm olduğunu görmüştür. Bir noktadan verilen uzunlukta doğru parçasını kullanarak B noktası başlangıç olmak üzere 2,2 cm uzunluğunda bir doğru parçası oluşturmuş ve oluşan BF doğru parçasını │BC│ üzerine sürüklemiştir. BF doğru parçasının tam olarak │BC│ üzerinde olup olmadığını anlamak için pencereyi yakınlaştırmış,

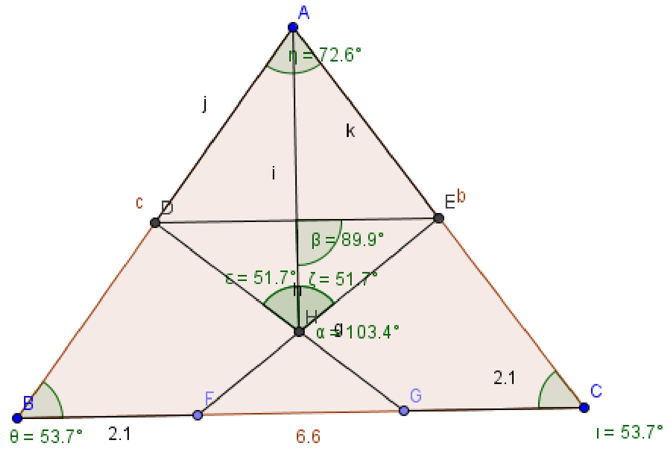
çok küçük de olsa bir sapmanın olduğunu görmüş ve BC tabanı üzerinde olmadığını anlamıştır. Bunun üzerine soruya tekrar döndüğünde │BG│=│CF│ şartını sağlamak için tabanı üçe bölmesi gerekmediğini görmüştür.

(3) Daha sonra │BC│ üzerinde F ve G noktaları oluşturup BF ve GC doğru parçalarını çizmiştir. Bu doğru parçalarının eşit olması için sürüklemeler yapmış ve eşitliği yakalamıştır. DG ve EF doğru parçalarını çizmiş ve kesim noktasını H olarak adlandırmıştır (Şekil 13).



Şekil 13: Öğretmen Adayı Alper'in Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(4) AH doğru parçasının ABC üçgenin ikizkenar veya eşkenar olması durumunda açıortay olacağı varsayımında bulunmuştur. DAH ve HAE açılarının ölçümlerinin eşit olmadığını görünce bu üçgenin ikizkenar veya eşkenar olmadığını söylemiştir. ABC üçgeninin ikizkenar bir üçgen olması için üçgenin köşelerinden tutup çeşitli sürüklemeler yapmıştır. DE doğru parçasını çizdiğinde ADE üçgeni ikizkenar üçgen olacağı için AH doğru parçasının DE doğru parçasını ikiye böldüğü ve dik kestiğini söylemiştir. Aralarındaki açıyı ölçtüğünde tam olarak ikizkenarlığı yakalayamadığı için $89{,}9^0$ olduğunu söylemiştir. (Şekil 14)



Şekil 14: Öğretmen Adayı Alper'in Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

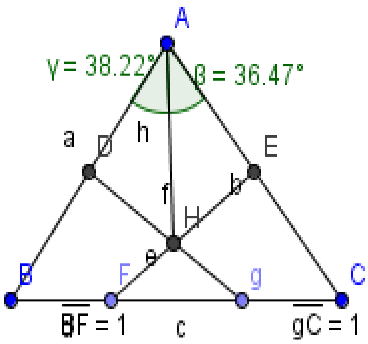
(5) Neden dik olması gerektiğini benzerlikten açıklamak istemiştir. $|DB|=|EC|$, $|BG|=|FC|$ ve B açısı C açısına eşit olduğu için KAK benzerliğinden DBG ve EFC üçgenlerinin benzer olduğunu göstermiştir. Daha sonra EDG ve DEF açılarının da eşit olacağını söylemiş ve böylece DHE üçgeninin ikizkenar olduğunu göstermiştir. Buradan $|AH|$'nin $|DE|$'yi iki eş parçaya böldüğünü yani kenarortay olduğunu söylemiştir. ADE ikizkenar üçgeninde $|AH|$ kenarortayının aynı zamanda açıortay olduğunu ifade etmiştir.

Öğretmen adayı Alper ilk olarak herhangi bir üçgen oluşturmuş fakat ikizkenar üçgende istenen şartları sağlayacağını düşündüğü için üçgeni sürükleyerek ikizkenar üçgen haline getirmeye çalışmıştır. Böylece Alper *jenerik örnek* oluşturmuştur. Daha sonra varsayımını doğrulamak için oluşturduğu şeklin özelliklerini araştırmış ve nesnelerin arasındaki ilişkilere bakmıştır. Bu ilişkileri bulmak için benzerlik teoreminden faydalanmıştır. Alper sorunun ispatını yapmak için örneklerden yararlandığı için *deneysel gerekçelendirme* biçimlerine başvurmuştur. Daha sonra ispatını tamamlamak için *entelektüel jenerik örnek* kullanmıştır.

GeoGebra burada Alper'e hızlı geri bildirimler sunarak oluşturduğu şekillerin doğru ya da yanlışlığı konusunda bilgi vermiştir (2) (4). Alper daha sonra oluşturduğu şekli istediği oranda yakınlaştırarak hata olup olmadığını kontrol etme olanağına sahip olmuştur (2).

5.1.1.4 Dördüncü Durum (Öğretmen Adayı Aslı)

(1) Aslı ilk olarak istenen şekli kâğıda çizmek istemiş ve ayrı ayrı üç doğru parçası oluşturmuştur. Soruya tekrar döndüğünde üçgen çizmesi gerektiğini anlamış ve doğru parçalarını kullanarak bir ABC üçgeni oluşturmuştur. AB ve AC kenarlarının orta noktalarını sırasıyla D ve E olarak belirlemiştir. │BG│=│CF│ koşulunu sağlamak için BC kenarı üzerinde bir F noktası almış ve B noktasından verilen uzunlukta doğru parçası oluşturarak FC doğru parçasının uzunluğunda olmasını sağlamıştır. Oluşan BG doğru parçasını sürükleyerek BC üzerine getirmeye çalışmıştır. DG ve EF doğru parçalarını oluşturduğunda kesişmediğini görünce G ve F noktalarının isimlerini değiştirdiği zaman bir kesişim elde edeceğini düşünmüştür. Kesim noktasını H olarak belirledikten sonra AH doğru parçasını oluşturmuştur.

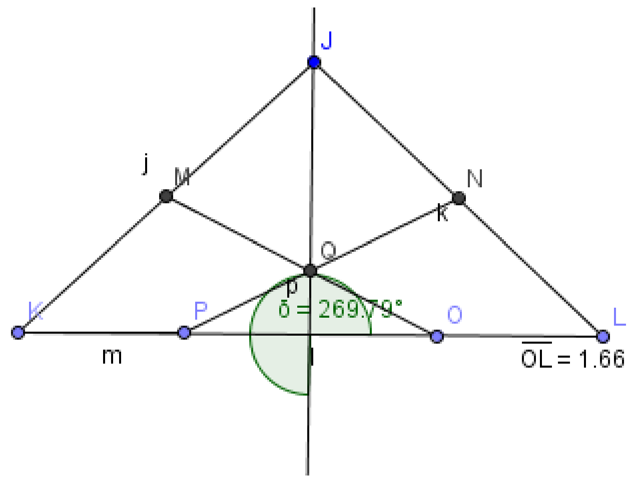


Şekil 15: Öğretmen Adayı Aslı'nın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(2) │AH│'nin açıortay olup olmadığını anlamak için DAH ve HAE açısını ölçmüş farklı olduğunu görünce ABC üçgeninin ikizkenar veya eşkenar üçgen olması halinde açıortay olacağını belirtmiştir.

(3) Bunun üzerine ikizkenar bir üçgen oluşturmak için grafik penceresinin boş olan tarafını kullanmıştır. İkizkenarlığı elde etmek için verilen uzunlukta doğru parçasından yararlanmış, böylece JK ve JL kenarlarını 4 cm olarak belirlemiştir. KL doğru parçasını da oluşturduktan sonra ikizkenar bir JKL üçgeni oluşturmuştur. KL kenarı üzerinde bir O noktası alıp │OL│ uzunluğunu 1,66 olarak ölçmüştür. Aynı şekilde K noktasından başlayan 1,66 uzunluğunda KP doğru parçası çizmiş ve │KL│ üzerine sürüklemiştir. MO ve NP doğru parçalarını oluşturup kesim noktasını Q olarak belirlemiştir. JQ doğrusunu çizdiğinde KL doğru parçasını 90^0 ile keseceğini düşünmüştür. Oluşan açıyı ölçtüğünde $269{,}79^0$ olduğunu görmüş ve neden 270^0 olmadığını anlamaya çalışmıştır (Şekil 16).

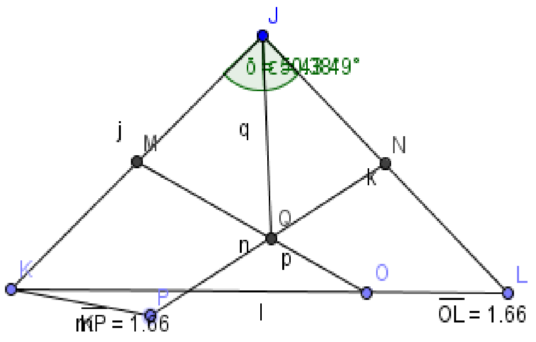
"*Açıortay koşulu ikizkenarda oluyorsa eşkenarda da olur diye düşünmüştüm. Yalnız ikizkenarda da sanki küçük bir sapma var onu bulamıyorum. Ama eşit çıkması gerekir. Çünkü ikizkenar da yukardan indirdiğimizde açıortay olmalı. Geometriden hatırlıyorum öyle olması gerekir.*"



Şekil 16: Öğretmen Adayı Aslı'nın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(4) K, P, O, L'nin doğrusal olduğundan nasıl emin olduğu sorulduğunda aldığı P ve O noktalarını tam olarak │KL│ üzerinde alamadığını düşünmüştür. P noktasını çok rahat hareket ettirebildiğini görünce bu noktayı │KL│ üzerinde nasıl sabitleyeceğini düşünmüştür.

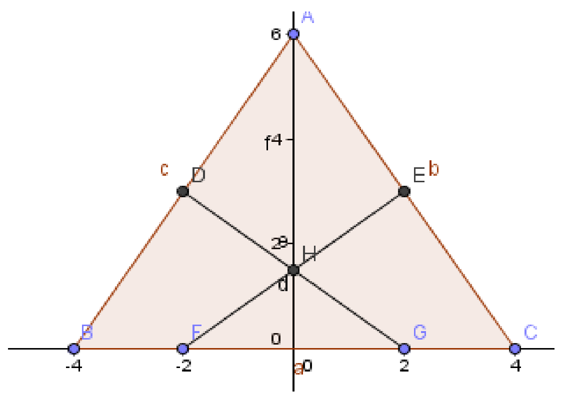
Doğrusallığı yakaladığı takdirde KJI ve IJL açılarının eşit olacağını ifade etmiştir (Şekil 17).



Şekil 17: Öğretmen Adayı Aslı'nın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -3

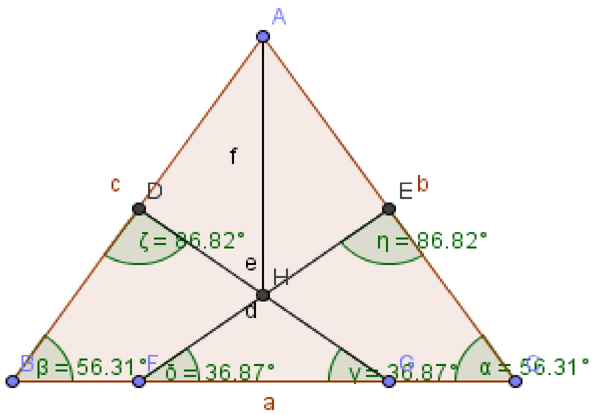
(5) K ve L'ye eşit uzunlukta ve KL kenarı üzerinde iki nokta alabilirse onların açıortay olacağını ve bu durumda bu ispatı hiç unutmayacağını ifade etmiştir.

(6) İstediği noktaları belirleyemeyince tüm oluşturduklarını silmiş ve ikizkenar ABC üçgenini eksenler üzerinde oluşturmuştur. Böylece noktaları tam olarak istediği gibi oluşturabileceğini düşünmüştür. Soruda belirtilen koşulları eksenler yardımıyla zorlanmadan oluşturmuş ve kesin değerler elde etmiştir (Şekil 18). DAH ve HAE açılarını ölçtüğünde eşit çıktığını görmüştür. Bunun üzerine AH doğru parçasının ikizkenar ve eşkenar üçgende açıortay olduğunu fakat çeşitkenar üçgende açıortay olmadığını söylemiştir.



Şekil 18: Öğretmen Adayı Aslı'nın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -4

(7) Geometrik ispatını yapması istendiğinde benzerlikten yararlanabileceğini düşünmüştür. Soruda verildiğine göre |DB|=|EC|, |BG|=|FC| ve B açısı ile C açısı eşit olduğu için kenar-açı-kenar eşliği olduğunu söylemiştir. Buradan da $_s$(HFG)=$_s$(HGF) ve $_s$(BDG)=$_s$(FEC) olduğunu ve eşitlikleri bulduğu için bu açıları ölçebileceğini söylemiştir. HFG ikizkenar üçgen olduğu için |HF|=|HG| olduğunu, aynı zamanda |DH|=|HE| olduğunu ifade etmiştir (Şekil 19).



Şekil 19: Öğretmen Adayı Aslı'nın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -5

(8) |AD|=|AE|, $_s$(ADH)=$_s$(AEH) ve |AH| de ortak kenar olduğunda ADH ile AHE üçgenlerinin kenar-açı-kenardan dolayı eş üçgenler olduğu aynı zamanda DAH ile HAE açılarının ölçülerinin eşit olacağını ifade etmiştir. Bu sayede AH doğru parçasının açıortay olacağını söylemiştir.

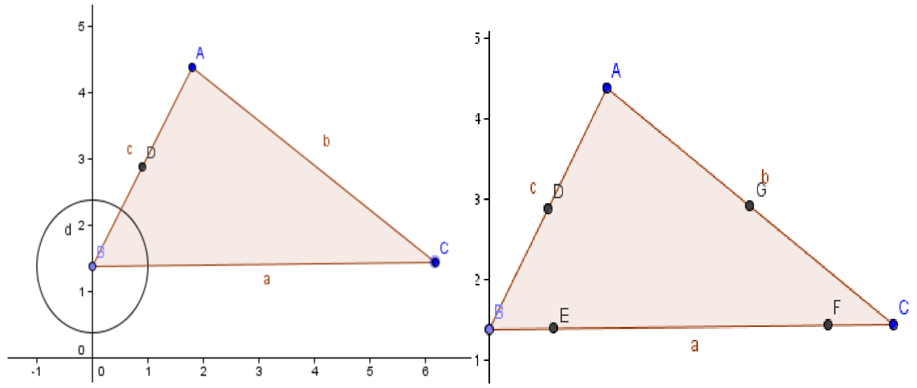
Öğretmen adayı Aslı (2)'de zihinsel hesaplamalar ve mantıksal çıkarımlar yaparak ABC üçgeninin ikizkenar veya eşkenar üçgen olması halinde açıortay olacağını belirtmiştir. Burada *tümdengelimsel gerekçelendirme* biçimine başvurmuştur. Bu düşüncesini gerekçelendirmek için (3)'te ikizkenar üçgen kullanmış ve gerekçesini organize etmek için spesifik bir örnekten yararlanarak *düşünce deneyine* başvurmuştur. AH doğru parçasının açıortay olduğunu göstermek için benzerlik teoreminden yararlanmıştır. Oluşturduğu çizimde çeşitli üçgenler arasında benzerlikler bularak DAH ve HAE açılarının ölçülerinin eşit olduğunu bulmuş ve böylece AH'nin ikizkenar ve eşkenar üçgende açıortay olacağını ifade etmiştir. Aslı'nın burada açıların eşitliğini benzerlik teoremine dayandırarak ve mantıksal çıkarımlarda bulunarak göstermesi *yapısal gerekçelerde* bulunduğunu göstermektedir.

Aslı sorunun ispatını *tümdengelimli gerekçelendirme* biçimlerinden *düşünce deneyi* ve *yapısal gereçlendirmelere* başvurarak oluşturmuştur.

GeoGebra ayrıntılı hesaplamalar yaptığı için en küçük bir hatayı bile kullanıcıya bildirmektedir (3). Bu durum doğrusallık konusunda sıkıntısı olan öğretmen adayının yaptıklarının doğru olup olmadığını GeoGebra ile kontrol edebilmesini sağlamıştır (4). Ayrıca GeoGebra doğru şekli oluşturma konusunda yeni yollar aramaya, varsayımlar yapmaya teşvik etmiştir (8) ve varsayımlarını doğrulamak için ortam oluşturmuştur (7). Ayrıca Aslı GeoGebra sayesinde öğrendiği bir bilginin kalıcı olacağını da düşünmektedir (5). Oluşturmak istediği şekilleri eksenleri ve koordinat sistemini kullanarak oluşturmuştur (6).

5.1.1.5 Beşinci Durum (Öğretmen Adayı Tamer)

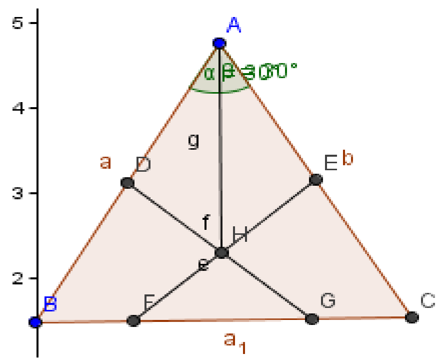
(1) Çokgen aracını kullanarak herhangi bir ABC üçgeni oluşturmuş ve AB, AC kenarlarının orta noktalarını sırasıyla D, G noktaları olarak belirlemiştir. BC tabanında $|DF| = |FC|$ olacak şekilde G ve F noktaları alabilmek için B köşesine kendisinin belirlediği x uzaklıkta ve yine C köşesine x uzaklıkta F ve G noktalarını alması gerektiğini söylemiştir. Noktaların harflendirmelerini ilk önce rastgele yapmış ve daha sonra bunları soruda verildiği şekilde düzenlemiştir. Belirtmiş olduğu x uzaklığını belirlemek için çemberi kullanmayı düşünmüş ve B, C köşelerinden yarıçapları 1 cm olan çemberler çizmiştir. Bu çemberlerle BC kenarının kesim noktalarını belirlemiş ve çemberleri gizlemiştir (Şekil 20).



Şekil 20: Öğretmen Adayı Tamer'in Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

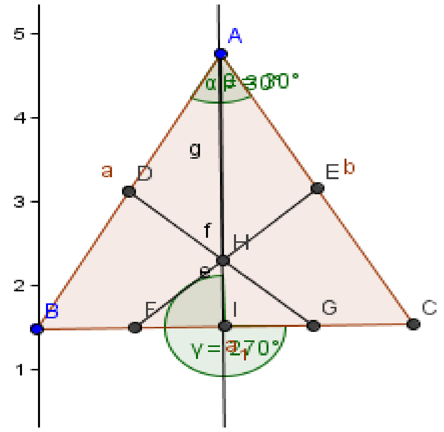
(2) DG ve EF doğru parçalarını oluşturduğunda kesişmediklerini görünce tüm noktaları soruda istendiği gibi adlandırıp F ve G noktalarının adlarını değiştirmiştir. Tekrar DG ve EF doğru parçalarını birleştirdiğinde kesiştiklerini gözlemlemiş, bu kesim noktasını H olarak adlandırmış ve AH doğru parçasını oluşturmuştur. Açıları ölçtüğünde AH doğru parçasının açıortay olmadığını görmüş ve bu üçgenin hangi çeşit üçgen olduğuna bakmak istemiştir. Cebir penceresinden tüm kenarların uzunluklarının farklı olduğunu, ABC üçgeninin çeşitkenar olduğunu ve çeşitkenar üçgende AH doğru parçasının açıortay olmayacağını ifade etmiştir.

(3) Sonra düzgün çokgen aracını kullanarak eşkenar üçgen çizmiş yine aynı şekilde sorunun çizimi için istenen şartları sağlamıştır. DAH ve HAE açılarını ölçtüğünde her ikisinin de 30^0 olduğunu görmüştür (Şekil 21).



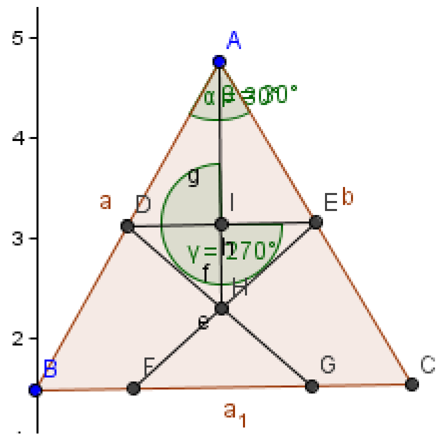
Şekil 21: Öğretmen Adayı Tamer'in Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(4) İspatını; BC kenarının orta noktasını bulacağı A ile bu orta noktayı birleştirip taban ile yaptığı açıyı ölçüp 90^{o} olması halinde AH doğru parçasının açıortay olacağını ifade etmiştir. Düşündüğü ölçümleri yaptığında açının 90^{0} olduğunu görmüştür (Şekil 22).



Şekil 22: Öğretmen Adayı Tamer'in Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -3

(5) Başka bir şekilde DE doğru parçası çizildiğinde AH ile dik kesiştiklerini $|AD|=|AE|$ olduğu için ADHE'nin bir deltoit olduğunu bulmuştur. Deltoitte köşegenlerin aynı zamanda açıortay olduğunu $|AH|$'nin ADHE deltoitinin köşegeni aynı zamanda açıortayı olduğunu ifade etmiştir (Şekil 23).



Şekil 23: Öğretmen Adayı Tamer'in Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -4

Öğretmen adayı Tamer ilk olarak çeşitkenar bir üçgen oluşturmuş fakat yaptığı ölçümlerden sonra AH'nin açıortay olmadığını görmüştür (1) (2). Daha sonra eşkenar üçgen oluşturmuş ve açıları ölçtüğünde AH'nin açıortay olduğunu görmüştür (3). BC kenarının orta noktasını bulup A ile birleştirdiğinde oluşan AI doğrusuyla BC kenarının dik kesişeceğini iddia etmiş (4), açıyı ölçtüğünde 90^0 bulmuştur.

Burada Tamer ilk olarak çeşitkenar üçgen oluşturmuş ve istenen şartları sağlayamadığı için eşkenar üçgen oluşturarak ispatı yapmak istemiştir. Tamer örneklerden yararlandığı için *deneysel gerekçelendirme biçimlerine* başvurmuştur. İspatını gerçekleştirmek için üçgen sınıfından çeşitkenar ve eşkenar üçgeni kullandığı için *jenerik örneğe* başvurmuştur.

Daha sonra $|AD|=|AE|$ olduğu için ADEH dörtgeninin bir deltoit olduğunu söylemiştir. DE doğru parçasını oluşturmuş ve $|AH|$ ile $|DE|$'nin deltoitin köşegenleri olduğunu ve deltoitte köşegenlerin dik kesiştiğini ve ADE üçgeninin ikizkenar olduğunu, AH doğru parçasının hem yükseklik hem de açıortay olduğunu söylemiştir (5).

Tamer varsayımını doğrulamak için DE doğru parçasını oluşturarak çözüme yardımcı olacak ek bir çizim yapmıştır. Böylece Tamer *deneysel gerekçelendirme* biçimlerinden, *analitik jenerik örneğe* başvurmuştur.

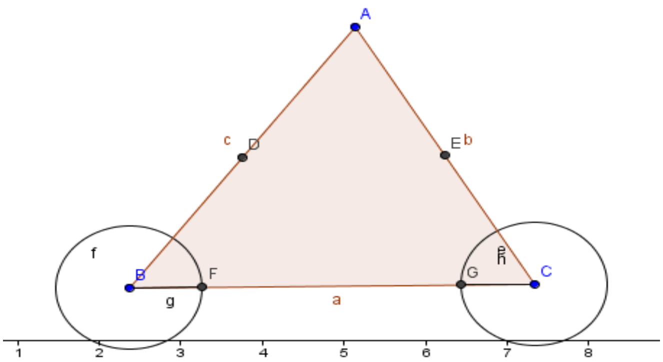
GeoGebra oluşturulan şeklin doğru ya da yanlışlığı konusunda hızlı geribildirimler ve oluşturduğu nesnelerin uzunluklarını cebir penceresinde görebilme imkanı sağlamıştır (2). Ayrıca GeoGebra oluşturduğu varsayımları doğrulamak için ortam oluşturmuştur (4) (5).

5.1.1.6 Altıncı Durum (Öğretmen Adayı Okan)

(1) Okan ABC üçgenini oluşturmuş, AB ve AC kenarlarının orta noktalarını D ve E olarak belirlemiştir. $|BG|$ ve $|CF|$ uzunluklarını eşit uzunlukta alabilmek için d sürgüsü oluşturmuş, B noktasından verilen uzunlukta doğru parçasını kullanarak BG doğru parçasını oluşturmuş ve uzunluğunu da d sürgüsüne bağlamıştır. Aynı şekilde C

noktasının da uzunluğunu d sürgüsüne bağlayarak CF doğru parçasını oluşturmuştur. Bu doğru parçalarının BC kenarı üzerinde oluşmadığını görünce BC kenarı üzerinde oluşturup doğrusallığı sağlayacak yollar düşünmeye çalışmıştır.

(2) Yaptıklarının doğru olmadığını düşününce çemberden yararlanmaya karar vermiştir. B ve C köşeleri merkez olan d yarıçaplı çemberler oluşturmuş ve bu çemberlerin BC kenarı ile kesişimlerini belirlemiştir (Şekil 24). Daha sonra çemberleri gizlemiştir.



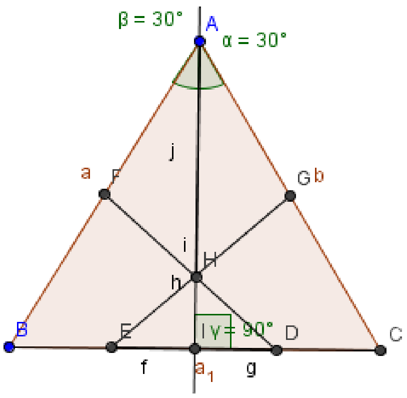
Şekil 24: Öğretmen Adayı Okan'ın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

DG ve EF doğru parçalarını oluşturmuş kesişmediklerini görünce d sürgüsünün oynatmış ve merkezin yarıçapını artırmıştır. Bu sefer kesiştiklerini gözlemleyince kesim noktalarını H olarak belirlemiş ve AH doğru parçasını oluşturmuştur.

(3) AH doğru parçasının ikizkenar ve eşkenar üçgende açıortay olacağını söylemiştir. Üzerinde çalıştığı çeşitkenar üçgende açıları ölçmüş ve farklı çıkınca çeşitkenar üçgende açıortay olmayacağını söylemiştir.

(4) Bunun üzerine eşkenar üçgen çizip soruda belirlenen durumları yine aynı şekilde çember ve sürgüyü kullanarak oluşturmuştur. Yine açıları ölçtüğünde 30'ar derece bulmuş ve eşkenar üçgende olacağını söylemiştir. Aynı şekilde ikizkenar üçgende de açıortay olma şartlarını sağlayacağını ifade etmiştir.

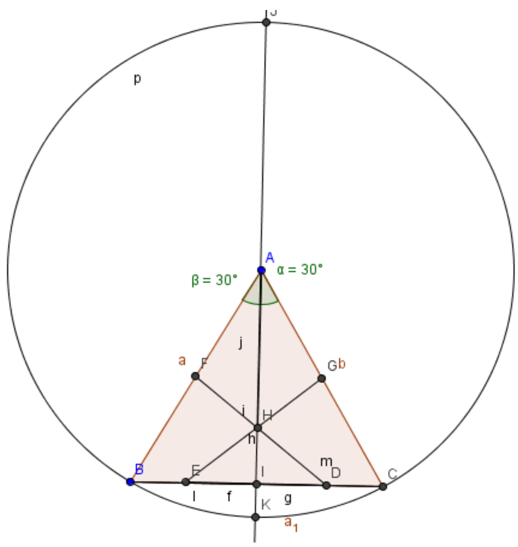
(5) AH doğru parçasını uzattığında BC kenarına dik olması koşulunda │AH│'nin açıortay olacağını ifade etmiştir. Oluşan açıyı ölçmüş ve 90^0 bulmuştur (Şekil 25).



Şekil 25: Öğretmen Adayı Okan'ın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(6) Aynı şekilde │BI│ ve │IC│ uzunluklarının eşit olduğunu gösterdiğinde │AH│'nin açıortay olacağını düşünmüştür. Sonra eşkenar üçgende kenarortayın aynı zamanda dik ve açıortay olduğunu söylemiştir.

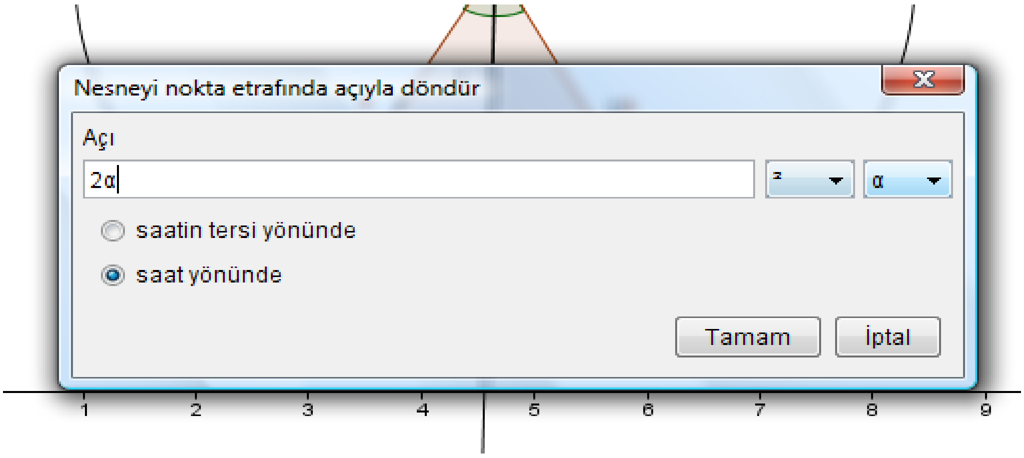
(7) Daha sonra yarıçapı AB kenarı olan bir çember çizmeyi düşünmüş ve merkez açı gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğu için BK ve KC yaylarının eşit olduğunu gösterip FAH ve HAG açılarının eşitliğini de göstermiştir.



Şekil 26: Öğretmen Adayı Okan'ın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -3

(8) Noktanın noktaya göre yansıması yani, B'nin I'ya göre yansıması C üzerinde olursa iki nokta arasındaki uzaklıklarının eşit olacağı böylece açıların eşliğinden dolayı AH doğru parçasının açıortay olduğunu bulmuştur.

(9) C noktası A noktası etrafında 2α kadar döndürüldüğünde B noktası üzerine geldiğinde yine açıların eşit olacağını belirleyebileceğini söylemiştir (Şekil 27).



Şekil 27: Öğretmen Adayı Okan'ın Birinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -4

Öğretmen adayı Okan soruda istenen |BG|=|CF| koşulunu sağlayabilmek için çemberden yararlanmıştır (5). ABC üçgeni ikizkenar veya eşkenar üçgen olduğunda AH'nin açıortay olacağını söylemiştir (3). Daha sonra eşkenar üçgen oluşturmuş ve bu üçgen üzerinde çalışmaya başlamıştır. AH'nin açıortay olduğunu gösteren çeşitli ölçümler yapmış ve eşkenar üçgende açıortay olduğunu görmüştür (4) (5) (6).

Okan varsayımını desteklemek için çeşitkenar ve eşkenar üçgenlerden yararlanmıştır. Sonra bir üçgen çeşidi olan eşkenar üçgen oluşturmuş ve bu üçgen üzerinde işlemler yapmıştır. Böylece Okan *deneysel gerekçelendirme* biçimlerinden olan *jenerik örneğe* başvurmuştur.

Okan daha sonra merkezi A ve yarıçapı |AB| olan bir çember oluşturmuş ve BAH, HAC açılarının eşitliğini; merkez açı ve bu açının gördüğü yayın eşit olması kuralını kullanarak göstermiştir (7). Böylece │AH│'nin açıortay olacağını söylemiştir.

Okan (7)'de varsayımını doğrulamak için bir çember oluşturmuş ve çeşitli ölçümler yaparak │AH│'nin açıortay olduğunu bulmuştur. Varsayımını doğrulamak için yeni bir şekil kullanarak *yapısal jenerik örnek* oluşturmuştur.

Okan varsayımını doğrulamak için *deneysel gerekçelendirme* biçimlerinden *yapısal jenerik örneği* kullanmıştır.

GeoGebra'da yer alan sürgüyü kullanarak daha önceden oluşturduğu uzunluğu değiştirebilme imkânı elde etmiş ve farklı durumları test etmek için bu sürgüden yararlanmıştır (2). Böylece varsayımlarının doğru ya da yanlış olduğunu kontrol etme olanağına sahip olmuştur (3) (4) (5). GeoGebra'nın kullanıcıya sunduğu "nesneyi nokta etrafında döndürme", "merkez ve yarıçapla çember", "nesnenin noktaya göre yansıması" özellikleri ile Okan farklı çözüm yolları düşünmüş ve bunları uygulamıştır (7) (8) (9).

Tablo 1: Öğretmen Adaylarının Birinci İspat Problemini Çözme Biçimleri

Öğretmen Adayları	İspat Biçimi
Burak	Deneysel-Örnek Tabanlı, Jenerik
Eda	Deneysel-Entelektüel, Jenerik
Alper	Deneysel-Entelektüel, Jenerik
Aslı	Tümdengelimli-Yapısal, Düşünce Deneyi
Tamer	Deneysel-Analitik, Jenerik
Okan	Deneysel-Yapısal, Jenerik

Tablo 1'e göre öğretmen adayları birinci ispat probleminin çözümünde daha çok deneysel ispat biçimlerini kullanmışlardır. Eda ise deneysel ispat biçimlerinden jenerik örnek ile ispata başlamış fakat ispatı tamamlayamamıştır. Öğretmen adaylarından sadece Aslı birinci ispat problemi için tümdengelimli ispat biçimlerine başvurmuştur. Aslı burada mantıksal çıkarımlar yaparak bir iddia ortaya atmıştır daha sonra bu iddiayı doğrulamak için örneklerden yararlanmıştır. Diğer öğretmen adayları ise ilk olarak jenerik örnek oluşturmuş daha sonra varsayımda bulunmuşlardır.

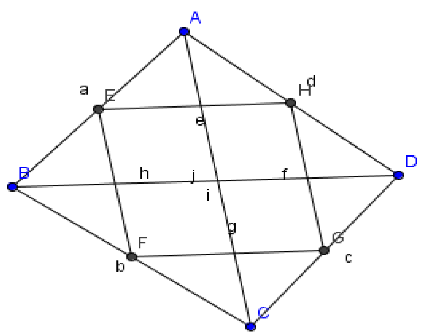
5.1.2 İkinci İspat Problemi

“ABCD herhangi bir dörtgen ve bu dörtgenin kenar orta noktaları M, N, E, P olsun. Oluşan MNEP dörtgenin çeşidi nedir? Cevabınızı gerekçelendiriniz.”

5.1.2.1 Birinci Durum (Öğretmen Adayı Burak)

(1) Herhangi bir dörtgen oluşturmuş ve bu dörtgenin tüm kenarlarının orta noktalarını belirlemiştir. Oluşan dört noktayı doğru parçaları yardımıyla birleştirerek yeni bir dörtgen oluşturmuştur.

(2) Oluşan dörtgenin eşkenar dörtgen veya paralelkenar olması gerektiğini söylemiştir. B ve D noktalarını “iki noktadan geçen doğru parçası” yardımıyla birleştirmiştir. Aynı şekilde A ve C noktalarını da birleştirmiştir. Bu noktaları neden birleştirdiği sorulduğunda paralellik durumlarına bakmak istediğini söylemiştir (Şekil 28).



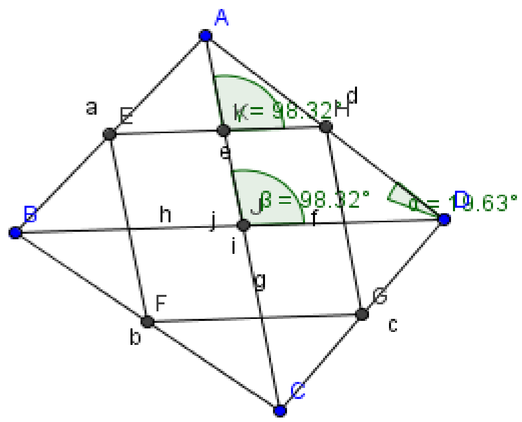
Şekil 28: Öğretmen Adayı Burak’ın İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra’da Oluşturduğu Şekil -1

(3) Çünkü $|EH|$, $|BD|$’ye paralel ve $|BD|$, $|FG|$’ye paralel ise $|EH|$, $|FG|$ ye paralel olduğu, yine aynı şekilde $|EF|$, $|AC|$’ye paralel ve

|AC|, |HG|'ye paralel olduğunda |EF|, |HG|'ye paralel olduğu sonucuna ulaşacağını söylemiştir.

(4) Bahsettiği paralellik durumlarını nasıl bulacağı sorulduğunda açılardan veya orandan bulabileceğini ifade etmiştir. GeoGebra'da cebir penceresine bakarak |EH|'nin 2,43, |BD|'nin 4,86 cm olduğunu, yani bunların aralarında ½ oranı olduğunu bulmuştur.

(5) Aynı zamanda açılara da bakabileceğini öne sürmüştür. Bunun üzerine |AC| ile |EH| kesişimini K olarak belirlemiş ve |AC| ile |BD| kesişimini de J olarak belirlemiştir. AKH ile AJD açılarını ölçmüş ve her ikisini de 98,32 bulmuştur. Açılardan dolayı da paralellik olduğunu söyleyebileceğini ifade etmiştir (Şekil 29).



Şekil 29: Öğretmen Adayı Burak'ın İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

Öğretmen adayı Burak (2)'de kenar orta noktaların birleştirilmesiyle oluşturulan şeklin eşkenar dörtgen veya paralelkenar olacağı varsayımında bulunmuştur. Burak varsayımını genel bir yolla doğrulamayı amaçlamış ve böylece *tümdengelimli gerekçelere* başvurmuştur.

Karşılıklı kenarların paralelliğini gösterebilmek için AC ve BD doğru parçalarını oluşturmuştur. Paralel olduklarını bulmak için |EH| ve |BD|'nin arasındaki orana bakmış ve oranı olduğunu görünce ilk olarak benzerliğe yönelmiş fakat daha sonra aynı yöne bakan AKH ile AJD açılarını ölçüp eşit çıktığını görünce paralellikten emin olmuştur. |EH|'nin |BD|'ye, |FG|'nin |BD|'ye, dolayısıyla |EH|'nin |FG|'ye paralelliğini göstermiştir. Aynı şekilde │EF│'nin │AC│'ye, │HG│'nin │AC│'ye, dolayısıyla │EF│'nin │HG│'ye paralelliğini göstermiştir (4) (5).

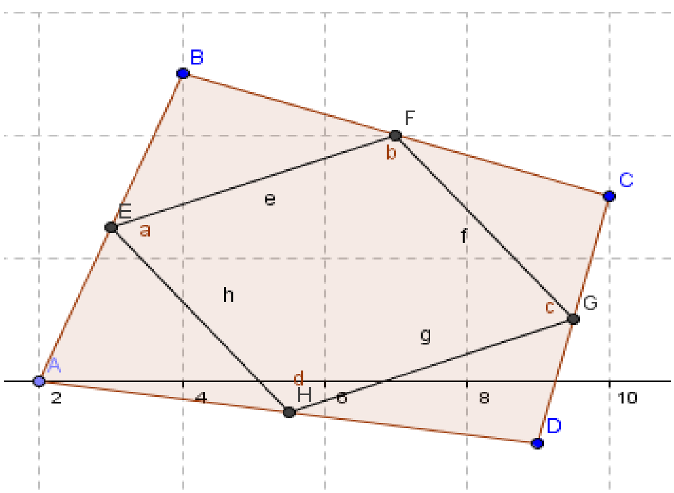
Burak burada gerekçeyi spesifik örneklerin yardımıyla değil zihinsel işlemlere dayandırarak oluşturmuştur. Böylece Burak ilk olarak *formal çıkarımlara*, daha sonra bir dizi mantıksal çıkarımda bulunarak (3) *yapısal gerekçelere* başvurmuştur.

Öğretmen adayı Burak ikinci ispat probleminin ispatını *tümdengelimli gerekçelendirme* biçimlerinden *formal çıkarımlar* ve *yapısal gerekçelendirmeler* yaparak gerçekleştirmiştir.

GeoGebra'da yer alan cebir penceresi sayesinde oluşturulan şekillerle ilgili ölçümleri hızlı bir şekilde görebilme ve yargıda bulunma imkânı elde etmiştir (4).

5.1.2.2 İkinci Durum (Öğretmen Adayı Eda)

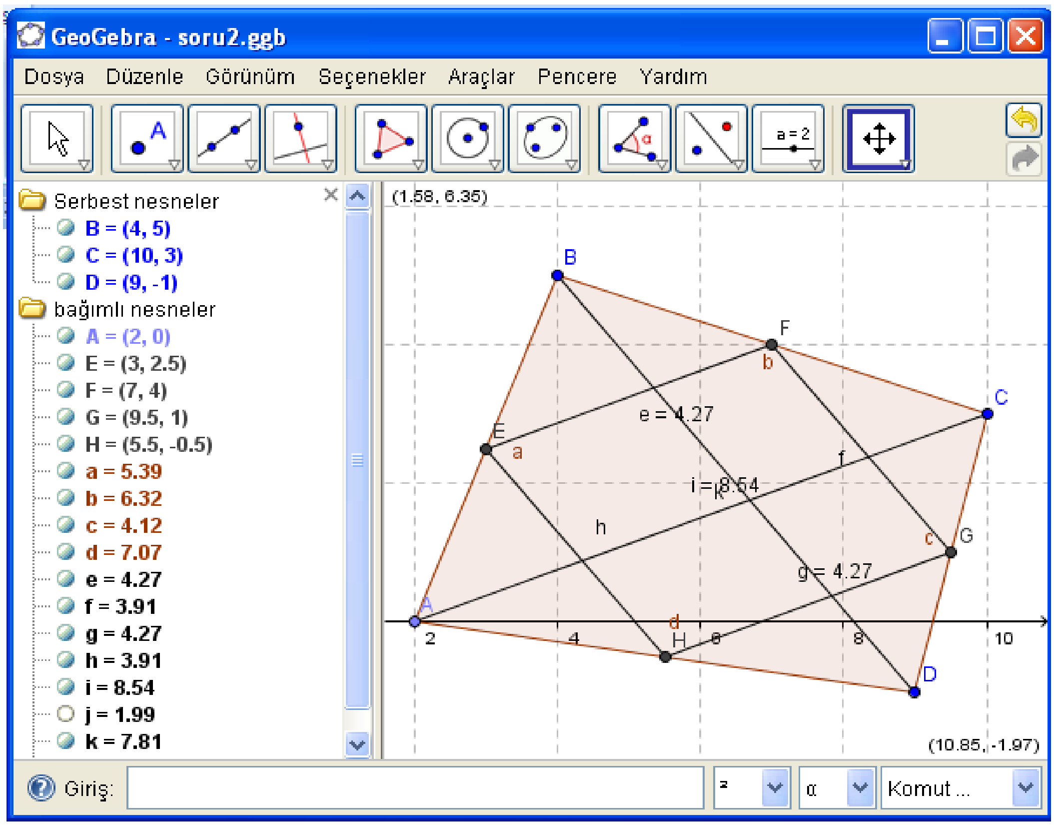
(1) Eda soruyu okuduktan sonra çokgen aracını kullanarak herhangi bir dörtgen oluşturmuştur. Orta nokta veya merkez aracıyla dörtgenin kenar orta noktalarını belirlemiş ve Şekil 30'daki gibi bu orta noktaları iki noktadan geçen doğru parçasını kullanarak birleştirmiştir.



Şekil 30: Öğretmen Adayı Eda'nın İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(2) Daha sonra paralellik durumuna bakmak için CA doğru parçasını oluşturmayı düşünmüş, aynı zamanda |EF| ve |CA| arasında bir oran olup olmadığına bakmak istemiştir. Aynı şekilde |BD| doğru parçasını da oluşturmuş |EH| arasında paralellik olup olmadığına bakmak istemiştir.

(3) Cebir penceresinden |EF|=4,27 cm, |AC|=8,54 cm olduğunu ve |EH|=3,91 cm, |BD|=7,81 cm olduğunu görmüştür (Şekil 31).



Şekil 31: Öğretmen Adayı Eda'nın İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

Bu kenarlar arasında biri diğerinin iki katı kadar bir oran olduğunu görünce paralellik olacağını ifade etmiştir. Bu paralelliği şu şekilde ifade etmiştir:

"Orta noktaları birleştirdiğimizde (BAC üçgeninde BA ve BC kenarlarının orta noktaları) tabana paralel şekilde oluşur. Burada taban dediğim AC doğru parçasıdır. Yani orta noktaları birleştiren doğru parçası (EF doğru parçası) tabanın (AC kenarının) yarısıdır."

(4) │HG│=4,27 cm olduğunu görünce de karşılıklı kenarların eşliğinden emin olmuştur. Böylece ABCD dörtgeninde kenar orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşturulan EFGH dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu söylemiştir.

Öğretmen adayı Eda soruda istenen durumları oluşturduktan sonra (2)'de AC doğru parçasını oluşturmak istemiş ve oluşturma gerekçesini │EF│ ve │AC│ arasında bir oran olup olmadığına bakmak istediği ile açıklamıştır. Aynı şekilde BD doğru parçasını da oluşturmuş ve │EH│ile │BD│ arasındaki orana bakmak istediğini söylemiştir. Eda burada mantıksal çıkarımlar yapmak istemiş ve *tümdengelimli gerekçelere* başvurmuştur. (3)'te doğru parçalarının uzunluklarını cebir penceresine bakarak öğrenmiş ve biri diğerinin iki katı kadar bir oran olduğunu görmüştür. Daha sonra orta taban özelliğini kullanarak │AC│'nin │EF│'ye paralel olduğunu göstermiştir. Eda böylece orta taban özelliğinden yararlanmış ve ispatın adımlarını göstermek için *formal çıkarımlar* yapmıştır. Diğer kenarların paralelliklerini de bu şekilde göstereceğini söylemiş ve böylece orta noktaların birleştirilmesiyle oluşan dörtgenin paralelkenar olacağını ifade ederek *yapısal gerekçeler* kullanmıştır.

Öğretmen adayı Eda problemin ispatını yaparken *tümdengelimli gerekçelere* başvurmuş, *formal çıkarımlar* yapmış ve *yapısal gerekçelerde* bulunmuştur.

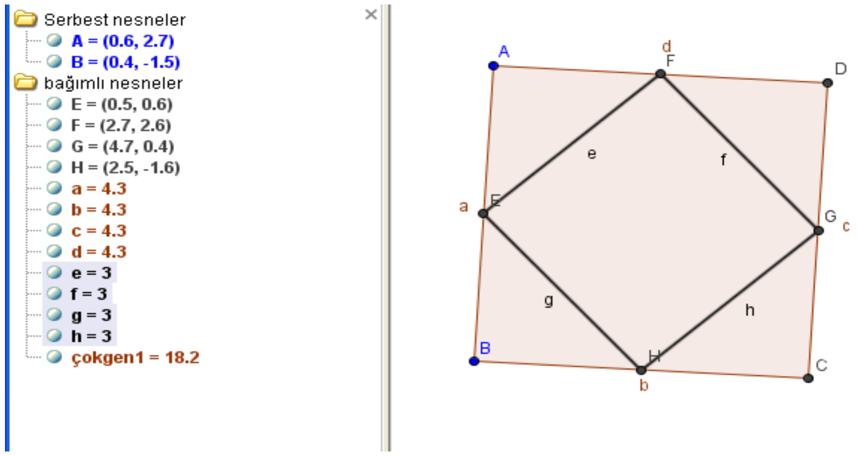
GeoGebra'da yer alan cebir penceresi sayesinde oluşturmuş olduğu şekillerin uzunluklarını kolay bir şekilde öğrenebilme imkanına sahip olmuştur (3).

5.1.2.3 Üçüncü Durum (Öğretmen Adayı Alper)

(1) Alper ilk olarak düzgün dörtgen çizmiş ve kenarların orta noktalarını belirlemiştir. Bu orta noktaları birleştirerek bir dörtgen oluşturmuştur. Oluşan dörtgenin kare olmasını şu şekilde ifade etmiştir:

“Tüm noktaları birleştirdim. Kenarlar eşit olduğu için kare oluştu ama ilk dörtgen kare olduğu için bu şekilde kare elde ettik. Başka şekiller (dörtgenler) çizdiğimizde ne olacak bakalım.”

Dörtgeni kare aldığı için oluşan dörtgenin de kare olduğunu ifade etmiştir (Şekil 32).

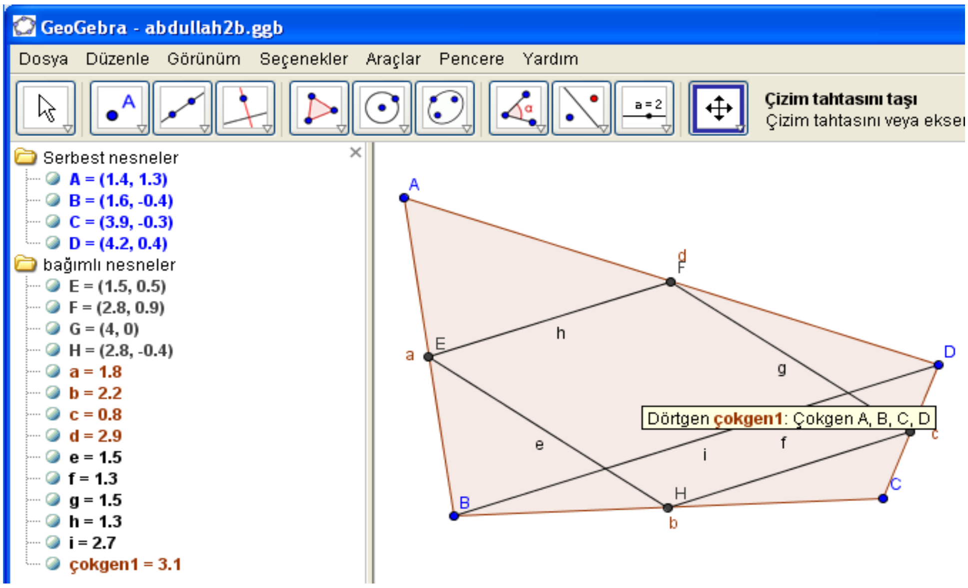


Şekil 32: Öğretmen Adayı Alper’in İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra’da Oluşturduğu Şekil -1

(2) Karenin köşelerinden tutup şeklini değiştirmeye çalışmış fakat bu köşelerin bağımlı nesneler olduğunu anlayınca yeni bir dörtgen oluşturmaya karar vermiştir.

(3) Herhangi bir dörtgen çizip kenarlarının orta noktalarını almış ve bunları birleştirmiştir. İlk olarak şekli kareye benzetip çeşitli sürüklemeler yaptıktan sonra kare olmayacağını anlamıştır. Birkaç sürükleme yaptıktan sonra bu şeklin paralelkenar olacağını düşünmüştür.

(4) Daha sonra bu düşüncesini doğrulamak için BD doğru parçasının oluşturmuştur. |AE| ile |EB| birbirlerine eşit olduğu için |BD| uzunluğunun |EF| uzunluğunun iki katı olduğunu söylemiş ve cebir penceresindeki değerleri göstererek bu varsayımını doğrulamıştır (Şekil 33). Aynı şekilde |HG|’nin de |EF|’ye eşit olacağını söylemiştir.



Şekil 33: Öğretmen Adayı Alper'in İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(5) AC doğru parçasını oluşturarak aynı şekilde |EH| ve |FG|'nin eşitliklerini bulabileceğini söylemiştir. Karşılıklı kenarlar eşit ve birbirlerine paralel olduğundan dolayı kenar orta noktaların birleştirilmesiyle her zaman bir paralelkenar elde edeceğini ifade etmiştir.

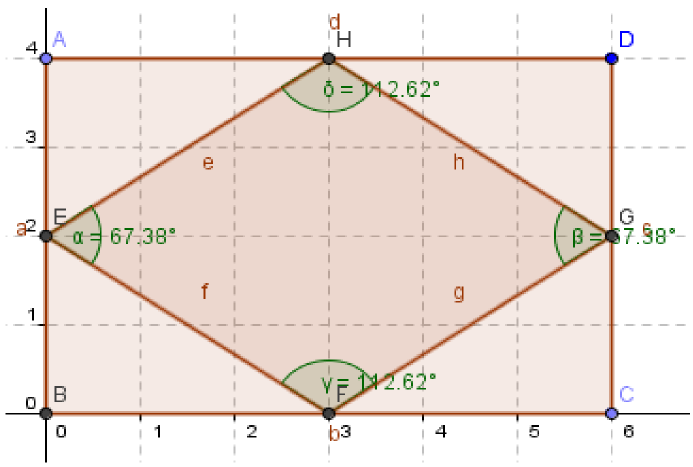
Öğretmen adayı Alper ilk olarak bir kare oluşturmuş ve bu karenin orta noktalarının birleşmesiyle yine bir kare oluştuğunu görmüştür. Bu durumu tüm dörtgenlere genelleyemeyeceğini düşününce herhangi bir dörtgen oluşturmuş, çeşitli sürüklemeler yaptıktan sonra oluşan dörtgenin paralelkenar olacağı varsayımında bulunmuştur. Alper burada ispatı oluşturmak için ilk olarak kareyi kullanmış, daha sonra herhangi bir dörtgenden yararlanmıştır. İspatını oluşturmak için örneklerden yararladığı için *deneysel gerekçelere* başvurmuştur. Aynı zamanda gerekçesini kendi sınıfının karakteristik bir özelliği olarak görülen belirli bir örneğe dayandırdığı için de yaptığı gerekçelendirme *jenerik örnek* olarak kodlanmıştır. Paralelkenar varsayımını desteklemek için BD doğru parçasını oluşturmuş ve |BD| ile |EF|'nin paralelliğini göstermiştir. Alper'in varsayımını desteklemesi için BD doğru parçasını çizmesi *analitik gerekçelendirmeye* başvurduğunu göstermiştir. Daha sonra paralellikleri göstererek ispatı tamamlamıştır.

Öğretmen adayı Alper verilen ikinci sorunun ispatı için *deneysel gerekçelendirmelere* başvurmuş daha sonra belirli bir sınıfın karakteristik özelliğini gösteren *jenerik örnekten* yararlanmış ve ispatını tamamlamak için ek çizimler yaparak *analitik gerekçelendirmeler* yapmıştır.

Alper GeoGebra'da yer alan bağımlı nesneleri değiştirememe sayesinde oluşturmuş olduğu şekillerin bağımlı ya da bağımsız nesneler olduklarını fark etmiştir (2). Diğer öğretmen adayları gibi sürüklemeler yaparak çok sayıda örnekler görme imkânına sahip olmuştur (3). Ayrıca cebir penceresi ortaya attığı iddiayı doğrulamada kendisine yardımcı olmuştur (4).

5.1.2.4 Dördüncü Durum (Öğretmen Adayı Aslı)

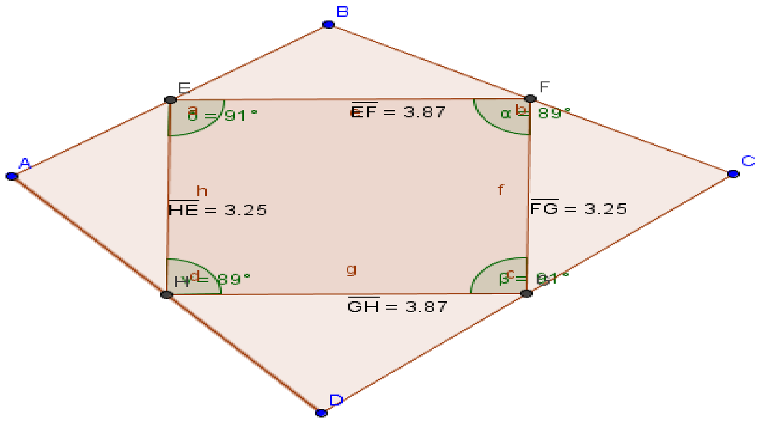
(1) Aslı ikinci soruyu okuduktan sonra çözümü önce dikdörtgende göstermeyi daha sonra genellemeyi düşünmüştür. Grid yardımıyla ABCD dikdörtgenini oluşturmuş ve kenar orta noktalarını belirleyerek EFGH dörtgenini oluşturmuştur (Şekil 34).



Şekil 34: Öğretmen Adayı Aslı'nın İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(2) Oluşan eş dik üçgenlere bakarak EFGH'nin kenarlarının da birbirlerine eşit ve her birinin olacağını söylemiştir. Açılarını ölçtüğünde karşılıklı açıların birbirlerine eş, toplamlarının da 180^0 olduğu ve bu sebepten paralel olduğunu söylemiştir. Kenarlar birbirlerine eş ve paralel olduğunda bu dörtgenin eşkenar dörtgen olacağını ileri sürmüştür.

(3) Bu durumu genelleyebilmek için rastgele bir dörtgen oluşturması gerektiğini ifade etmiştir. Herhangi bir ABCD dörtgeni oluşturmuş, kenar orta noktalarını belirlemiş ve bunları birleştirmiştir. Oluşan EFGH dörtgeninin karşılıklı kenarları ve açılarını ölçtüğünde birbirlerine eşit çıktığını gözlemlemiş ve paralelkenar olduğunu öne sürmüştür (Şekil 35).



Şekil 35: Öğretmen Adayı Aslı'nın İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(4) Geometrik ispatı istendiğinde ispatı hatırlamakta zorluk çektiğini lisedeyken daha kolay bir şekilde ispat yapabildiğini ifade etmiştir. Kâğıda çizmeyi istemiş gerekçe olarak şunları söylemiştir:

"Soruyu kâğıtta görmek daha rahat geliyor. Ya da hep buna alıştık o yüzden GeoGebra zor geliyor. Gerçi kâğıtta da rastgele çiziyorum."

Hangisinin daha güvenilir olduğu sorulunca:

"GeoGebra daha güvenilir. Benim şekillerime baksanıza düzgün değil." Cevabını vermiştir.

(5) Kâğıtta yaptığı ispata göre AC ve BD doğru parçalarını birleştirmiştir. E ve F orta noktalar olduğu için benzerlik oranı olduğu ve │EF│’nin │AC│’ye paralel olduğunu söylemiştir. Aynı şekilde H ve G orta nokta olduğu için yine 1:2 benzerlik oranı olduğu ve │HG│’nin de │AC│’ye paralel olduğunu, buradan da │EF│’nin │HG│’ye paralel olacağını bulmuştur. Aynı işlemleri yaparak │EH│’nin de │FG│’ye paralel olduğunu, böylece EFGH dörtgeninin bir paralelkenar olacağını bulmuştur.

Öğretmen adayı Aslı ispatı yapmak için ilk olarak dikdörtgenden yararlanmayı ve daha sonra tüm dörtgenlere genellemeyi düşünmüştür. Böylece Aslı ispatı oluşturmak için örneklere başvurmuş ve *deneysel gerekçelendirme* yapmıştır. Çeşitli ölçümler yaptıktan sonra kenarların orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşturulan şeklin eşkenar dörtgen olacağını ifade etmiştir.

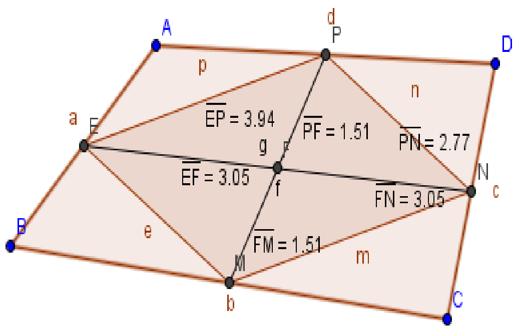
Aslı daha sonra ispatı tüm dörtgenlere genelleyebilmek için herhangi bir dörtgen oluşturarak yapmak istemiş ve oluşan şeklin paralelkenar olacağını ifade etmiştir (2). Burada dikdörtgen ve herhangi bir dörtgen oluşturarak *jenerik örnekten* yararlanmıştır. AC ve BD doğru parçalarını oluşturmuş ve benzerlik oranından yararlanarak karşılıklı kenarların birbirlerine paralelliklerini bulmuştur. Burada ispatını tamamlamak için ek çizimlere yer vererek *analitik gerekçelendirmelere* başvurmuştur.

Öğretmen adayı Aslı ispatını gerçekleştirmek için *deneysel gerekçelendirmeler* yapmış, bu ispatı tamamlamak için *jenerik örnekler* oluşturmuş *analitik gerekçelendirmelerle* ispatını tamamlamıştır.

Aslı ispatı kâğıt kalem ile yapmak istediğini ifade etmiştir. Yıllardır bu şekilde eğitim gördüğünü bu yüzden daha çok rahat edeceğini dile getirmiştir. Fakat yine de GeoGebra’da oluşturduğu şeklin doğruluğuna daha çok güvendiğini açıklamıştır (4). Aslı (1)’de dikdörtgen oluşturmak için GeoGebra’da bulunan gridden yararlanmıştır.

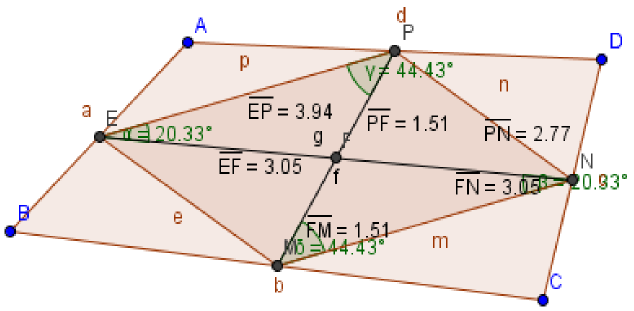
5.1.2.5 Beşinci Durum (Öğretmen Adayı Tamer)

(1) Tamer çokgen aracını kullanarak herhangi bir çokgen oluşturmuş ve bu çokgenin kenar orta noktalarını belirlemiştir. Oluşan orta noktaları birleştirerek MNPE dörtgenini oluşturmuştur. Bu çokgenin paralelkenar olabileceği yargısında bulunmuştur. MNPE dörtgeninin köşegenlerini çizip, kesim noktasını belirlemiştir. Köşegenlerin birbirlerini ortaladıklarını görmüştür. Köşegenlerin birbirlerini ortaladığı dörtgenleri düşünmüş, tüm kenarları eşit olmadığı için kareyi elemiş, açıları dik olmadığı için dikdörtgeni de elemiş ve paralelkenar olduğunu söylemiştir (Şekil 36).



Şekil 36: Öğretmen Adayı Tamer'in İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(2) Bu dörtgenin paralel olması için PEF açısı ile FNM açısının eşit olması gerektiğini ayrıca FPE açısı ile FMN açısının da eşit olması gerektiğini söylemiş ve bu açıları ölçtüğünde eşitliği görmüştür (Şekil 37). Böylece MNPE dörtgeninin paralelkenar olduğunu söyleyebilmiştir.



Şekil 37: Öğretmen Adayı Tamer'in İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

Öğretmen adayı Tamer (1)’de herhangi bir dörtgen oluşturmuş ve kenar orta noktalarını birleştirerek yeni bir dörtgen oluşturmuştur. Oluşan MNEP çokgeninin köşegenlerini belirlemiş ve köşegenlerin birbirlerini ortalayarak kestiğini bulmuştur. Köşegenlerin birbirlerini ortaladığı dörtgenleri düşünmüş, tüm kenarları eşit olmadığı için kareyi elemiş, açıları dik olmadığı için dikdörtgeni de elemiş ve paralelkenar olduğunu söylemiştir.

Paralel olması için iki paralel doğru ve bir kesenin oluşturduğu iç ters açıların eş olması gerektiği özelliğine başvurmuştur. (2)’de iç ters olacağını düşündüğü PEF açısı ile FNM açısını ölçüp eşip olduğunu görünce varsayımını doğruladığını düşünmüştür. Aynı şekilde FPE açısı ile FMN açısını ölçüp eşit olduğunu görünce karşılıklı kenarların paralelliğinden emin olmuştur.

Burada Tamer ispatını gerçekleştirmek için bir örnekten yararlanmış ve belirli kritere göre seçilmemiş bir dörtgen oluşturmuştur. Oluşan dörtgen çeşidinin özelliklerine bakmış, diğer dörtgenleri elemiş ve paralelkenar varsayımında bulunmuştur. Böylece Tamer *deneysel gerekçelendirme* yapmış ve *acemi deneycilik* (naive empiricism) ile varsayımını doğrulamıştır. Varsayımını doğrularken matematiksel özellikleri ve ilişkileri kullandığı için *tümevarımsal gerekçelendirmeden* yararlanmıştır.

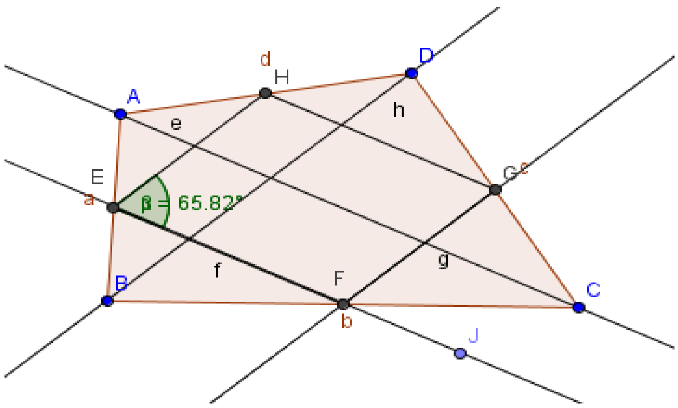
GeoGebra’nın ölçme özelliği kenar orta noktaların birleşmesi ile oluşan şeklin kare ve dikdörtgen olmadığını elemesinde ve varsayımını doğrulamasında Tamer’e yardım etmiştir (1).

5.1.2.6 Altıncı Durum (Öğretmen Adayı Okan)

(1) Okan soruyu okuduktan sonra oluşacak dörtgenin daha önceden öğrendiği bilgilere göre paralelkenar olması gerektiğini söylemiştir.

(2) Bir dörtgen oluşturmuş, bu dörtgenin kenar orta noktalarını belirlemiş ve bu noktaları birleştirmiştir. Okan F’den EH doğrusuna paralel bir doğru çizip bu doğrunun FG’ye de paralel olduğu gösterilirse dörtgenin paralelkenar olduğunu ifade etmiştir (Şekil 38). Aynı şekilde diğer kenarın paralelliğini de gösterebileceğini söylemiştir. Oluşan doğrunun

FG ile çakışıp çakışmadığını anlamak için açıları ölçmüş ve aynı olduğunu görünce paralellikten emin olmuştur.



Şekil 38: Öğretmen Adayı Okan'ın İkinci İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil

(3) Diğer bir şekilde ABD üçgeninde E ve H orta noktalar olduğu için BD doğru parçası EH doğru parçasının iki katı olduğunu ve her zaman paralel olduğunu söylemiştir. Aynı şekilde G ve F orta noktalar olduğu için |BD| |FG|'nin iki katı olduğu ve paralel olduğunu söylemiştir. Bu sayede |EH|=|GF| olduğunu ve aynı zamanda paralel olduğunu bulmuştur. Bu işlemlerin HG ve EF kenarları için de yapılabileceği ve aynı şekilde |HG| ve |EF|'nin birbirlerine paralel ve eşit çıkacağını söylemiştir. Bu yüzden EFGH dörtgeninin paralelkenar olduğunu ifade etmiştir.

Öğretmen adayı Okan daha önceki bilgilerine dayanarak oluşan dörtgenin paralelkenar olacağını ifade etmiştir (1). Okan burada bir iddia ortaya atmış ve *tümdengelimli gerekçelendirmelere* başvurmuştur. Bu iddiasını desteklemek için istenen şekli oluşturarak paralelliği göstermek istemiştir. Daha sonra BD doğrusunu oluşturmuş ve EFGH dörtgeninin köşelerinin ABCD'nin kenarlarının orta noktaları olduğu için orta taban özelliğinden yararlanarak EFGH'nin karşılıklı kenarlarının birbirlerine paralel olduğunu ifade etmiştir. Burada Okan ispatını zihinsel işlemler yaparak oluşturduğu için *formal çıkarımlar* oluşturmuştur. Bu gerekçesini orta taban özelliği ile desteklediği için de *yapısal gerekçelendirmelerden* yararlanmıştır.

Öğretmen adayı Okan ispatını yaparken *tümdengelimli gerekçelendirmelerden* yararlanmış ve ispatını desteklemek için *formal çıkarımlar* yapmış ve bu çıkarımları *yapısal gerekçelendirmelerle* desteklemiştir.

Tablo 2: Öğretmen Adaylarının İkinci İspat Problemini Çözme Biçimleri

Öğretmen Adayları	**İspat Biçimi**
Burak	Tümdengelimli-Yapısal,Formal Çıkarım
Eda	Tümdengelimli-Yapısal, Formal Çıkarım
Alper	Deneysel-Analitik, Jenerik
Aslı	Deneysel-Analitik, Jenerik
Tamer	Deneysel-Tümevarımsal,Naif Deneycilik
Okan	Tümdengelimli-Yapısal, Formal Çıkarım

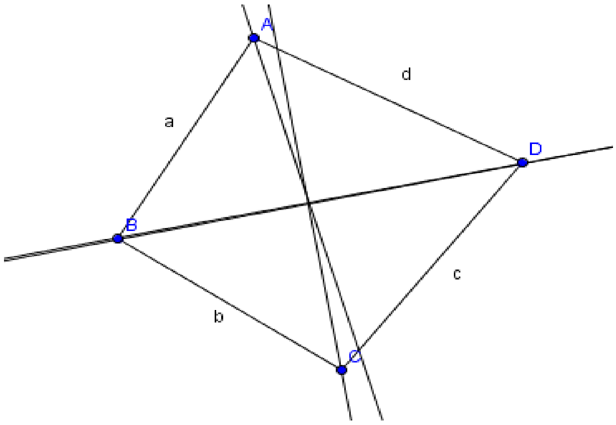
Tablo 2'ye göre öğretmen adayları ikinci ispat probleminin çözümünde deneysel ve tümdengelimli ispat biçimlerini eşit bir şekilde kullanmışlardır. Tümdengelimli ispat biçimlerini kullanan öğretmen adayları bu ispatı daha önceki bilgilerine dayanarak yapmışlardır. Böylece ilk olarak bir varsayım oluşturmuşlar ve bu varsayımı doğrulayacak çeşitli işlemlerden yararlanmışlardır. Deneysel ispat biçimlerinden yararlanarak ispatı yapan öğretmen adayları ispata örnekler çizerek başlamış ve bu örnekler üzerinde yaptıkları işlemlerden sonra varsayımda bulunmuşlardır.

5.1.3 Üçüncü İspat Problemi

"A, B ve C üç sabit noktadır. D noktası hareket ettirilerek hangi durumda ABCD dörtgenin iç açıortaylarının bir noktada kesişeceğini bulunuz. (ABCD dışbükey çokgendir)"

5.1.3.1 Birinci Durum (Öğretmen Adayı Burak)

(1) Burak ilk olarak herhangi bir dörtgen oluşturmuş ve bu dörtgenin köşelerine ait iç açıortayları belirlemiştir. D noktasını hareket ettirerek açıortayları bir noktada kesiştirmiştir (Şekil 39).



Şekil 39: Öğretmen Adayı Burak'ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

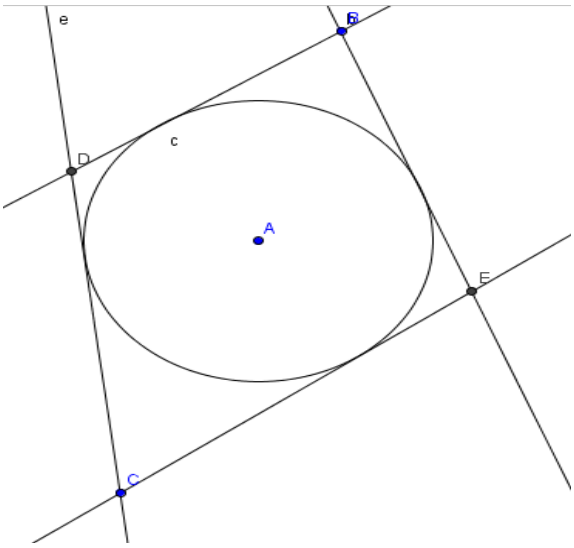
(2) Tam olarak tek noktada kesişip kesişmediğinden emin olamadığı için şekli büyütmüş ve kesişmediğini anlayınca a ile b'nin, d ile c'nin eşit olması halinde açıortayların tek bir noktada kesişeceği varsayımını yapmıştır.

(3) B noktasını hareket ettirerek a ile b'yi eşitlemiş ve buradan bir sonuç elde edemeyeceğini anlamıştır.

(4) Aklına şekli çember ile oluşturmak gelmiş, çember ile açıortayların bir bağlantısı olabileceğini düşünmüştür.

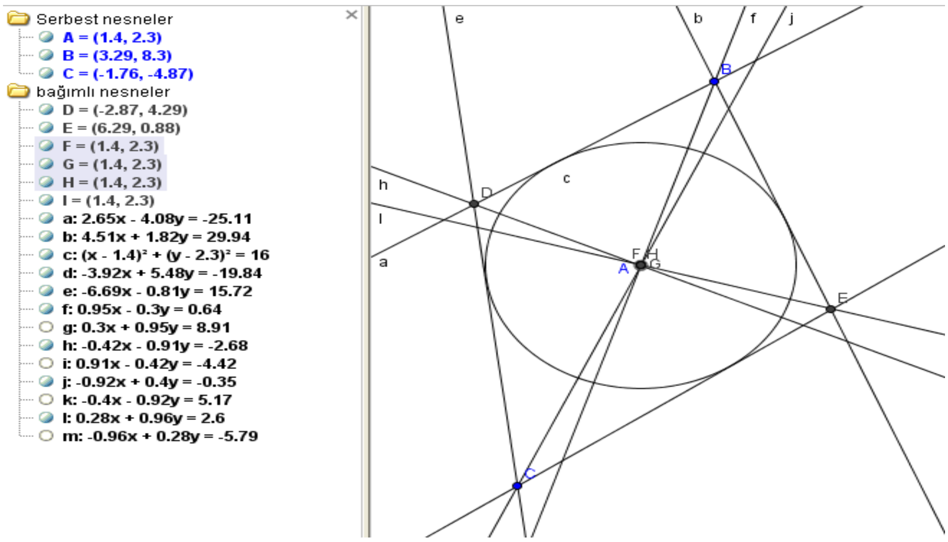
"İç teğet çemberin merkezi ile tüm açıortayların bir noktada kesişeceğini düşünüyorum." Varsayımında bulunmuştur.

(5) Daha sonra iç teğet çember ve teğet olan dörtgeni oluşturmuştur (Şekil 40).



Şekil 40: Öğretmen Adayı Burak'ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

İç teğet çemberin merkezi ile iç açıortayların bir noktada kesişeceğini varsayımını doğrulamak için dörtgenin iç açıortaylarını oluşturmuş ve bu açıortayları ikişer ikişer kesiştirmiştir. Cebir penceresindeki koordinatlara gözlemleyerek oluşan F, G, H noktaları ve iç teğet çemberin merkezi olan A noktasının koordinatının aynı olduğunu görmüştür (Şekil 41). Böylece iç teğet çemberin merkezinin açıortayların kesim noktası olduğunu bulmuştur.



Şekil 41: Öğretmen Adayı Burak'ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -3

Öğretmen adayı Burak (4) de çemberle açıortayların kesim noktaları arasında bir bağlantı olduğunu düşünmüş ve bu kuralı hatırlamaya çalışmıştır. Burada ispatı tümdengelimsel gerekçeler sunarak yapmaya başlamıştır. Çünkü Burak burada zihinsel hesaplamalara ve mantıksal çıkarımlara dayanan iddialar ortaya koymuştur. Böylece varsayımı genel bir yoldan doğrulamayı amaçlamıştır.

Burak daha sonra iddiasını doğrulamak için bir çember oluşturmuş (5) ve bu çember herhangi bir dörtgenin iç teğet çemberi olmuştur. Burada çemberi oluşturarak gerekçeyi organize etmek için spesifik bir örnek kullanmıştır. Böylece öğretmen adayının *düşünce deneyi* yapmış olduğu söylenebilir. Daha sonra mantıksal bir çıkarımda bulunarak açıortayları ikişer ikişer kesiştirmeyi böylece açıortayların tek bir noktada kesişip kesişmediği ve bu noktanın çemberin merkezi olup olmadığını kontrol etmiş ve böylece öğrenci *yapısal gerekçelere* başvurarak ispatı tamamlamış olmuştur.

Öğretmen adayı problemin ispatını *tümdengelimsel* gerekçelendirme biçimlerinden *düşünce deneyi* ve *yapısal* gerekçelendirmeler yaparak gerçekleştirmiştir.

Geogebra'daki nesneleri sürükleme özelliği sayesinde oluşturulan varsayımları hızlı bir şekilde kontrol etme olanağı elde etmiştir (1). Grafik penceresinde bulunan ekranı büyütme özelliğini kullanarak noktaları belirlerken oluşan sapmaları fark edebilmiştir (2). Açıortayların kesim noktalarını tam olarak belirleyebilmek için cebir penceresinde yer koordinatları gözlemlemiş ve eşit oldukları konumu bulmuştur (5).

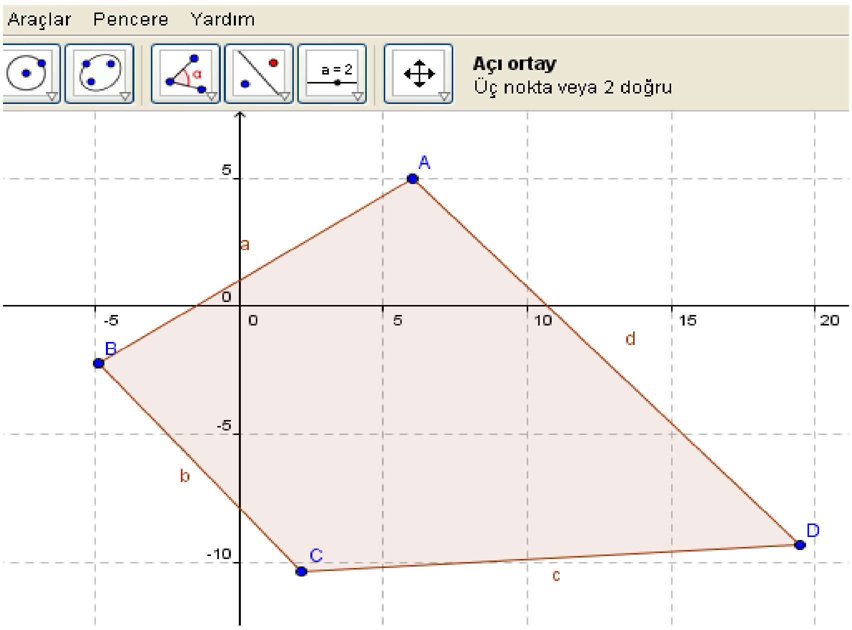
5.1.3.2 İkinci Durum (Öğretmen Adayı Eda)

(1) ABCD dörtgeninde üç sabit köşe olduğu ve D köşesi hareket ettirilerek iç açıortayların bir noktada kesiştirmesi gerektiğini düşünmüştür. Bu durumu daha önceden bildiği dörtgenlerle ilgili bir özelliğe benzetmiştir:

“Dörtgenlerle ilgili bir özellik vardı. Dörtgenin içerisinde aldığımız herhangi bir noktayla ilgili neydi acaba? Uzunluklar vardı karelerinin toplamı birbirlerine eşitti. Noktayı hareket ettirdiğimizde durum değişmiyordu.”

Daha sonra bu özelliğin bir dörtgen içerisinde alınan herhangi bir noktanın karşılıklı köşelere olan uzunluklarının kareleri toplamının birbirlerine eşit olacağı kuralı olduğunu hatırlamıştır.

(2) Oluşturmuş olduğu ABCD dörtgeninin A, B, C köşelerini noktanın özelliklerini kullanarak sabit nokta haline getirmiş ve iç açıortayları belirlemek için GeoGebra’nın açıortay aracından yararlanmıştır. Açıortayları nasıl oluşturması gerektiğini araçların yanında yer alan “üç nokta veya 2 doğru” açıklamasından öğrenmiş ve üç nokta kullanarak açıortayları oluşturmuştur.

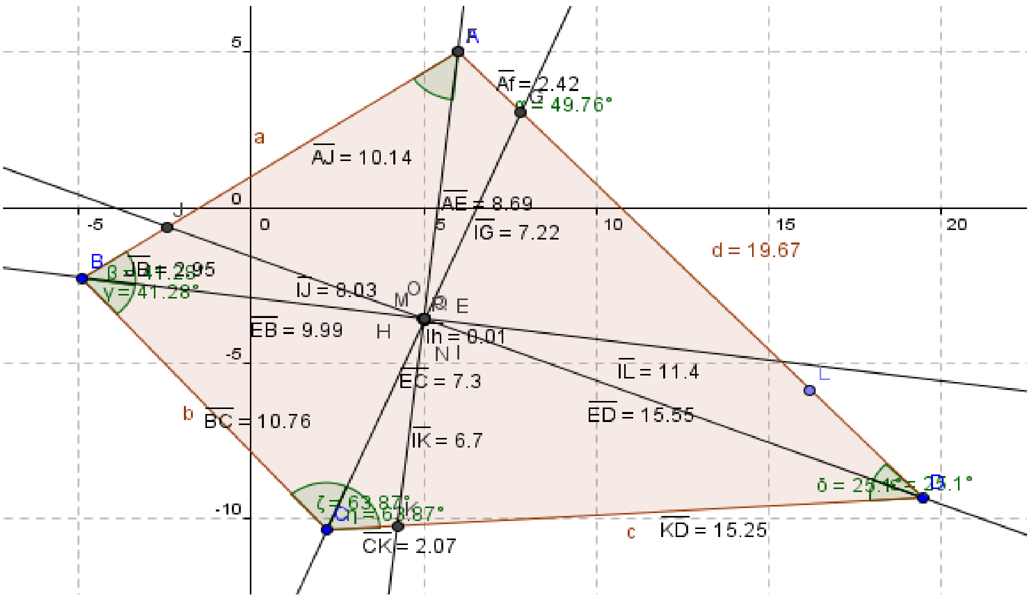


Şekil 42: Öğretmen Adayı Eda’nın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra’da Oluşturduğu Şekil -1

(3) D noktasını hareket ettirerek değişen değerlere bakmak istemiş ve doğru parçasına ya da noktaya bağlı değerlere bakmayı düşünmüştür. D noktasını hareket ettirirken cebir penceresine bakıp AD ve CD kenarlarının uzunluklarının değişken, diğer kenarların uzunluklarının sabit olduğunu gözlemlemiştir.

(4) Açıortayların kesim noktalarını tam olarak belirleyip bu noktanın köşelere olan uzaklıklarını ölçmek istemiştir. Burada $x^2+y^2=t^2+z^2$ gibi bir eşitlik elde etmeye çalıştığını, aldığı noktayı değiştirdiğinde bu eşitliğin bozulmayacağını söylemiştir. Kesim noktasından köşelere olan uzunlukların karelerini kâğıt kalem ile hesaplamış ve uzunlukların karelerine dair yaklaşık değerler almıştır. Fakat beklediği gibi bir eşitlik bulamamıştır.

(5) Düşündüğü eşitlik çıkmayınca bu sefer kesim noktasından kenarlara olan uzaklıkları ölçüp yine bu uzunluklar arasında bir ilişki bulmak istemiştir. Fakat dik uzaklık yerine açıortayların kenarları kestikleri noktalar ve kesim noktası arasında kalan doğru parçalarını ölçmüştür. Fakat yine beklediği gibi bir eşitlik bulamamıştır.



Şekil 43: Öğretmen Adayı Burak'ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(6) Açıortayların kesim noktasını tam olarak gösterebilmek için iki nesnenin kesişimini kullanarak açıortayları ikişer ikişer kesiştirmiş ve bu iki kesim noktasının aynı koordinatta olması için D noktasını hareket ettirmiştir.

(7) D noktasını hareket ettirdikçe bağlı olan kenar uzunluklarının değiştiğini görünce çokgenin kenarlarına odaklanması gerektiğini

düşünmüştür. Bunun üzerine karşılıklı kenarlar arasında bir bağlantı olabileceği tahmininde bulunmuştur.

(8) Karşılıklı kenarların uzunluklarını toplamış 30,4 ve 30,43 cm bulmuştur. Tam bir değer bulamamasının nedenini açıortayların kesim noktalarını tek bir nokta olarak belirleyememesine dayandırmış ve bu noktayı tam olarak aldığında karşılıklı kenarların birbirlerine eşit olacağını söylemiştir.

Öğretmen adayı Eda (1) ve (4)'te problemin ispatını daha önceden bildiği bir kuralın ispatına benzetmiştir. Böylece mantıksal çıkarımlara dayanan bir iddia ortaya atarak *tümdengelimli gerekçelendirmelere* başvurmuştur.

Oluşan açıortayların ikişer ikişer kesim noktalarını almış ve bu noktalar eş olana kadar D noktasını sürüklemiştir. Eda (3)'te D noktasını hareket ettirerek değişen değerlere bakmak istemiş ve hangi doğru parçasına ya da hangi noktaya bağlı değerler bulabileceğine bakmayı düşünmüştür. Böylece çeşitli zihinsel işlemler ve mantıksal çıkarımlar yapan Eda *formal çıkarımlara* başvurmuştur.

D noktasını hareket ettirdikçe kenar uzunluklarının değiştiğini görmüş ve çokgenin kenarlarına odaklanması gerektiğini düşünmüştür (7). Kenarlar arasında bir ilişki olabileceğini düşünen Eda, karşılıklı kenarların uzunluklarını ölçüp birbirlerine çok yaklaşık değerler bulduğunda, kesim noktasını tam olarak belirleyebilmiş olduğunda bu değerin de eşit olacağını söylemiştir. Bir takım mantıksal çıkarımlar dizisi oluşturan Eda ispatını tamamlamak için *yapısal gerekçelendirmelere* başvurmuştur.

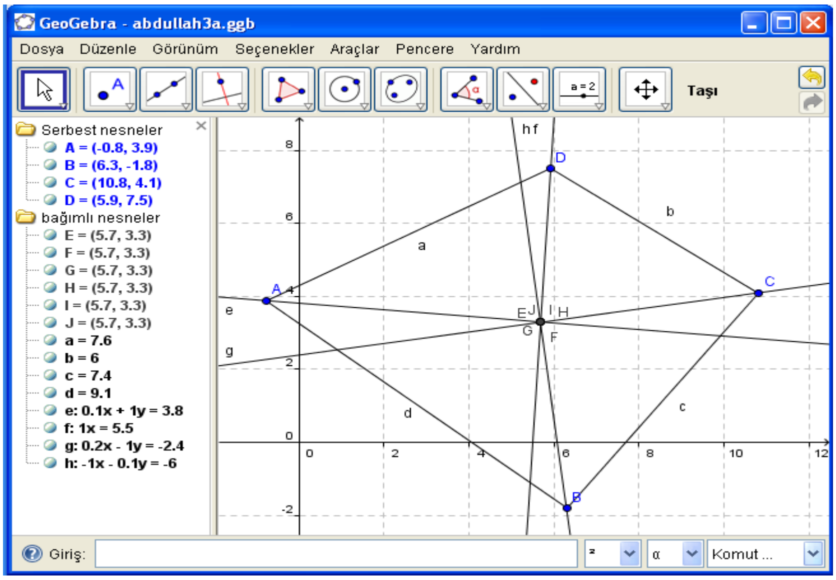
Eda problemin ispatında *tümdengelimli gerekçelendirme* biçimlerinden *formal çıkarım* ve *yapısal gerekçelendirmeleri* uygulamıştır.

Eda GeoGebra' da yer alan "nesneyi sabitle" özelliği ile istediği nesneleri sabitleyebilmiştir (2). Ayrıca GeoGebra araçlarının nasıl kullanacağını gösteren kısa açıklamalar kullanıcıyı yönlendirmiştir (2). Nesneleri hareket ettirerek birbirine bağlı değişkenleri keşfetme imkânı elde etmiş ve bu değişkenleri cebir penceresinde yer alan değerleri gözlemleyerek belirlemiştir (3) (7). GeoGebra yapılmış olan küçük hataları bile kullanıcıya bildirerek doğru ve eksiksiz bir öğrenim için yardımcı olmuştur (8). Diğer taraftan Eda çeşitli ölçümleri GeoGebra'da yapıp metin kutuları olarak ekleyebilmesine rağmen kâğıt kalem ile yapmayı tercih etmiştir (5). Bunun nedeni GeoGebra'nın özelliklerini tam olarak kullanamaması ya da bu şekilde eğitim aldığı için alışmış olduğu düzende yapmak istemesi olabilir.

5.1.3.3 Üçüncü Durum (Öğretmen Adayı Alper)

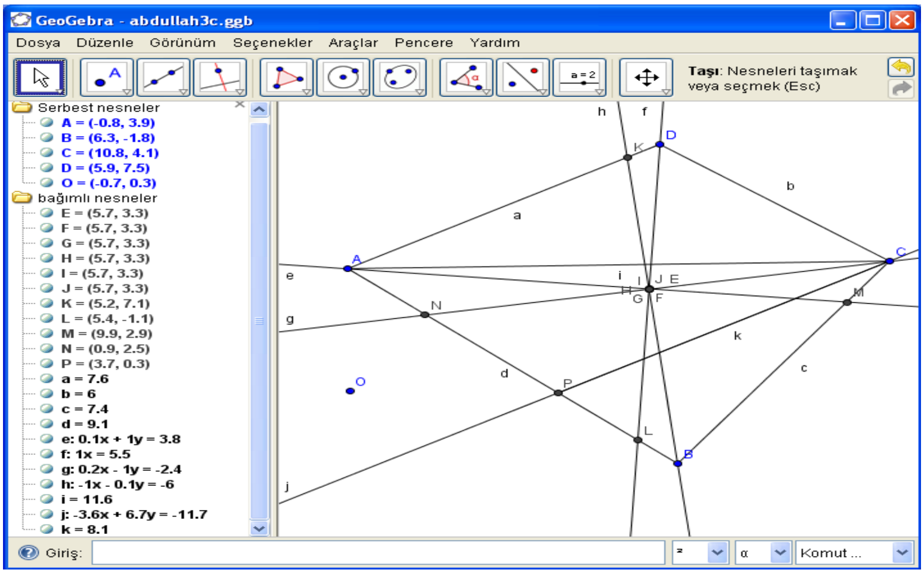
(1) Alper ilk olarak A, B, C, D noktaları oluşturmuş ve A, B, C noktalarını sabitlemiştir. Bu işlemi Geogebra'nın nesne özelliklerinden nesneyi sabitleyi işaretleyerek yapmıştır. Açıortayları çizmek için önce açıyı ölçüp sonra bir doğru ile ikiye ayırmayı düşünmüş fakat bu şekilde belirleyemeyeceğini anlayınca GeoGebra'da bulunan açıortay aracını kullanmayı düşünmüştür. Sırasıyla tüm açıların açıortaylarını çizdikten sonra D noktasını hareket ettirerek açıortayları tek noktada kesiştirmeye çalışmıştır.

(2) Açıortayların tam olarak kesişmediğini düşünen Alper açıortay denklemlerinin eşit olması gerektiğini düşünmüştür. Fakat sonra denklemlerin aynı olmasının açıortayların çakışık olması demek olduğunu anlamıştır. Daha sonra açıortayların ikişer ikişer kesim noktalarını almış, oluşan E, F, G, H, I, J noktalarının eşit olması gerektiğini söylemiştir. D'yi hareket ettirerek oluşan noktaları eşitlemeye çalışmış cebir penceresinde koordinatların eşit olduğunu görünce istenen durumu oluşturduğunu düşünmüştür (Şekil 44).



Şekil 44: Öğretmen Adayı Alper'in Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(3) İlk olarak bu durumun paralellikten kaynaklandığını düşünmüş karşılıklı kenarların paralelliklerine bakmış fakat bir sonuca varamamıştır. Sonra açıortayların kenarları kestikleri noktaları bulmuş oluşan AN, LB, KD ve CM doğru parçalarının eşit olabileceğini düşünmüş fakat yaptığı ölçümden sonra eşit olmadığını görmüştür.



Şekil 45: Öğretmen Adayı Alper'in Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(4) Çokgenin kenarlarına bakıp a kenarı ile c kenarı arasında bir eşitlik aramış çünkü uzunluklarının birbirlerine çok yakın olduğunu düşünmüştür. Fakat kesim noktasını tam olarak belirlediği için yaklaşık bir değer olmaması gerektiği fakat yine a ile c arasında bir ilişki olması gerektiğini söylemiştir.

Öğretmen adayı Alper açıortayların tam olarak kesim noktasını bulabilmek için açıortay doğrularını ikişer ikişer kesiştirmiş ve D noktasını hareket ettirerek oluşan kesim noktalarını eşitlemeye çalışmıştır (2). Alper bu durumun iki kenarının birbirlerine paralel olması yani dörtgenin yamuk olması durumunda gerçekleşeceği varsayımında bulunmuş fakat bunu destekleyememiştir. Daha sonra açıortayların kenarları kestiği noktaları belirlemiş ve bu noktaların köşelere olan uzaklıklarının birbirlerine eşit olacağını düşünmüş fakat yine iddiasını doğrulayacak yeterli gerekçeler sunamamıştır.

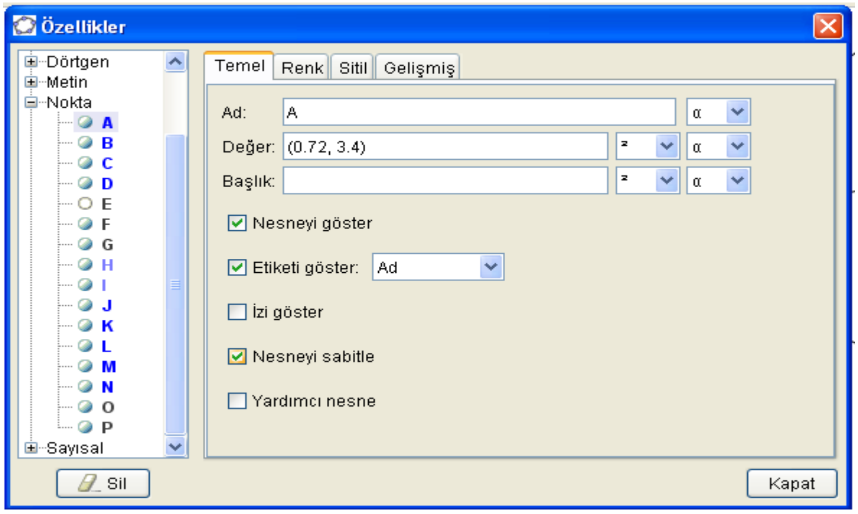
Bu soruda Alper belli iddialar ortaya atarak mantıksal çıkarımlarda bulunmak istemiş fakat yeterli gerekçeler sunamadığı için iddiasını doğrulayamamıştır. Alper ispatına *tümdengelimli gerekçe* biçimlerinden *formal gerekçeleri* kullanarak başlamış fakat ispatını tamamlayamamıştır.

GeoGebra’da grafik penceresinde yer alan nesnelerin cebirsel karşılıkları cebir penceresinde yer almaktadır. Alper bu özelliği kullanarak nokta ve doğru parçalarının uzunluklarını cebir penceresinden hızlı bir şekilde kontrol edebilmiştir (2) (3). Böylece istediği sonuca daha hızlı bir şekilde ulaşabilmiştir.

5.1.3.4 Dördüncü Durum (Öğretmen Adayı Aslı)

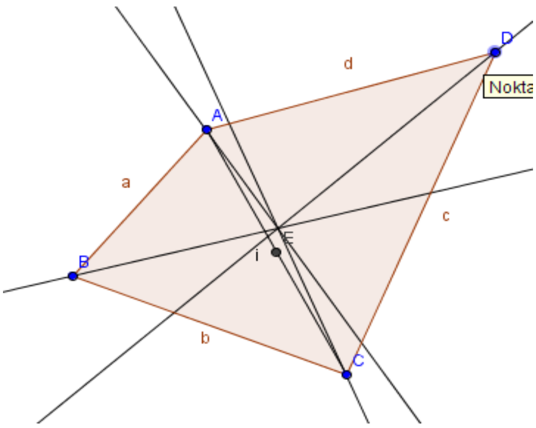
(1) Aslı üçüncü soruyu okuduktan sonra dört nokta belirleyip üçünü sabitleyeceğini, bunu da nesneyi sabitle özelliğinden yararlanarak yapacağını ifade etmiştir. ABCD dörtgenini oluşturmuş, A, B ve C noktalarını sabitlemiştir (Şekil 46). Bu dörtgenin açıortaylarını

oluşturmuş ve D noktasını sürükleyerek tek noktada kesiştirmeye çalışmıştır.



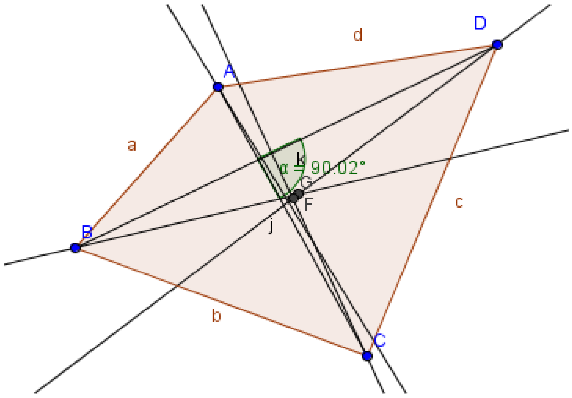
Şekil 46: Öğretmen Adayı Aslı'nın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(2) A ile C köşelerinin orta noktasında kesişebileceğini düşünmüş, AC doğru parçasını oluşturmuş ve orta noktasını belirlemiştir. Fakat bu nokta ile kesim noktasının kesişmediğini görmüştür (Şekil 47). Kesim noktasını tam olarak belirleyip belirlemediğini kontrol etmek için iki nesnenin kesişimini kullanmış fakat GeoGebra'da ikiden çok nesnenin kesişiminin alınabilir olması gerektiğini öne sürmüştür.



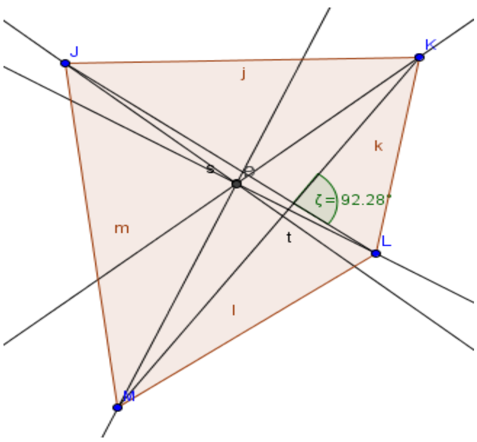
Şekil 47: Öğretmen Adayı Aslı'nın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(3) ABCD dörtgeninin köşegenlerini oluşturduğunda köşegenlerin birbirlerini 90,75^{0} lik bir açıyla kestiğini görmüştür. Bu açının tam olarak 90^{0} olduğunda açıortayların tek bir noktada kesişeceklerini öne sürmüştür. Tekrar sürükleme yaparak açının 90,02^{0} olmasını sağlamıştır (Şekil 48).



Şekil 48: Öğretmen Adayı Aslı'nın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -3

Fakat açıortaylar bu durumda tek noktada kesişmemişlerdir. Daha sonra açıortayları tek noktada kesiştirmiş yine köşegenlerin kesiştiği açıyı ölçüp 92,28^{0} bulmuştur (Şekil 49).



Şekil 49: Öğretmen Adayı Aslı'nın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -4

Kendini 90^{0} ye şartlandırdığı için Aslı ispatı başka bir şekilde yapamamıştır.

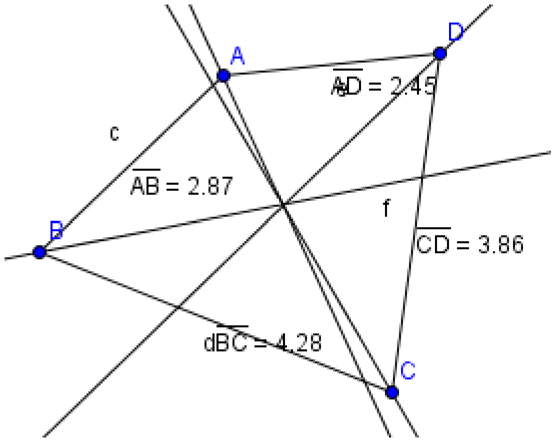
Öğretmen adayı Aslı açıortayların kesim noktalarını tam olarak alabilmek için açıortay doğrularının ikişer ikişer kesim noktalarını belirlemiş ve bunları eşitlemeye çalışmıştır. Oluşturduğu dörtgenin köşegenlerini almış ve aralarındaki açıyı ölçmüştür. Açının 90 dereceye çok yakın olması nedeniyle köşegenlerin dik kesiştiğinde açıortayların tek bir noktada kesişeceği varsayımında bulunmuştur. Sürüklemeler yaparak açının 90 dereceye en yakın olduğu durumda açıortayların tek bir noktada kesişmediğini görünce varsayımının doğru olmadığını anlamıştır.

Burada Aslı bir iddia ortaya atmış, bu iddiasını doğrulamak için çeşitli işlemler yapmış fakat iddiasının yanlış olduğunu görmüştür. Aslı *tümdengelimsel gerekçelendirme* biçimlerinden *formal çıkarım* ve *yapısal gerekçelendirmeler* yaparak varsayımını doğrulamak istemiş fakat iddiasının yanlış olduğunu bulmuştur.

Diğer öğretmen adayları gibi GeoGebra'da yer alan "nesneyi sabitle" özelliği ile kullanıcı istediği nesnelerin hareketlerini engelleme imkanına sahip olmuştur (1). Ayrıca görsellik özelliği açıortayların kesişip kesişmediğini belirlemeyi sağlamıştır (3).

5.1.3.5 Beşinci Durum (Öğretmen Adayı Tamer)

(1) Tamer rastgele A, B, C, D noktaları almış ve A, B ve C noktalarını sabitlemiştir. Bu noktaları birleştirerek ABCD dörtgenini oluşturmuş ve bu dörtgenin iç açıortaylarını bulmuştur. D noktasını sürükleyerek açıortayların tek noktada kesiştiği durumu bulmaya çalışmış daha sonra kenarlarını ölçmüştür (Şekil 50).



Şekil 50: Öğretmen Adayı Tamer'in Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil

(2) Karşılıklı kenarların kareleri toplamının eşit çıkacağını düşünmüş fakat herhangi bir eşitlik bulamamıştır.

"│BA│'nın karesi ile │DC│'nin karesini topladım, yaklaşık 23,14 çıktı. │BC│'nin karesi ile │AD│'nin karesini topladım, 24,32 çıktı. Demek ki bu şekilde değilmiş."

(3) Karşılıklı kenarların toplamına bakmayı düşünmüş ve 2,87+3,86=6,73 ve 2,45+4,28=6,73 bulmuştur. Bu durumda karşılıklı kenarların toplamının eşit olduğu zaman açıortayların tek noktada kesişeceklerini ifade etmiştir.

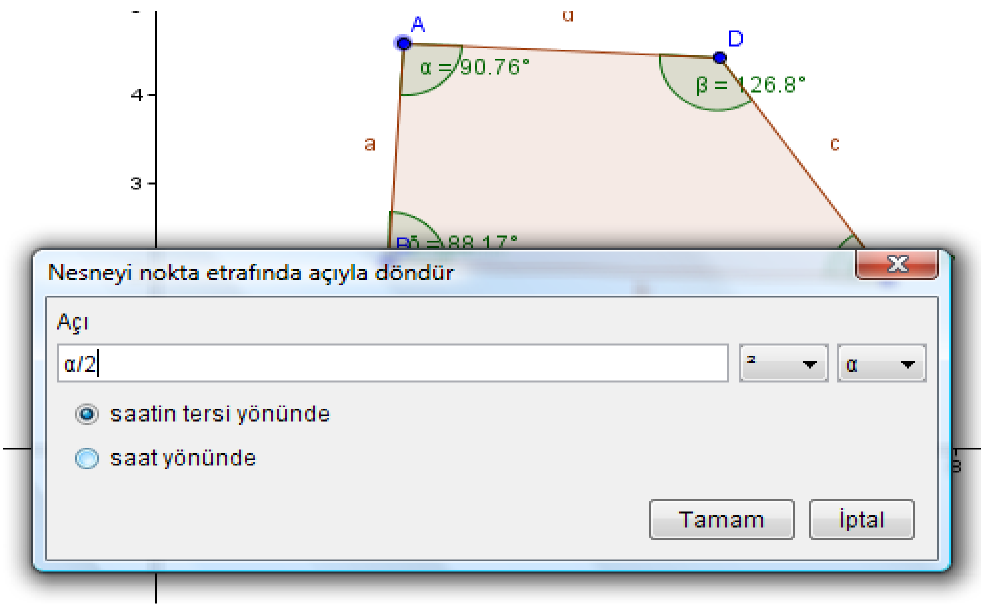
Öğretmen adayı Tamer ilk olarak soruda istenen şartları sağlamış ve karşılıklı kenarların karelerinin toplamlarının eşit olacağı varsayımında bulunmuştur. Böylece Tamer *tümdengelimsel gerekçelendirmeler* kullanarak ispatını yapmak istemiştir. Fakat kareler toplamının eşit olmadığını görünce uzunluklar toplamına bakmak istemiştir (2). Çeşitli ölçümler yaparak karşılıklı kenarların birbirlerine eşit olduğunu bulmuştur. Sonuç olarak dörtgende karşılıklı kenarların birbirlerine eşit olması durumunda açıortayların tek bir noktada kesişeceğini söylemiştir.

Tamer iddialar ortaya atarak çeşitli mantıksal çıkarımlar yapmıştır ve sorunun ispatını yapabilmek için *tümdengelimli gerekçelendirmelerden formal çıkarım* ve *yapısal gerekçelendirmelere* başvurmuştur.

İstediği hesaplamaları GeoGebra'da yer alan giriş alanına girerek elde edebilmesi Tamer'e varsayımını doğrulamasında yardım etmiştir (2).

5.1.3.6 Altıncı Durum (Öğretmen Adayı Okan)

(1) Okan ilk olarak ABCD dörtgeni oluşturmuş ve bu dörtgenin açılarını ölçmüştür. Açıortayları belirlemek için "nesneyi nokta etrafında açıyla döndür" aracından yararlanmıştır. Örneğin A açısının açıortayını bulmak için; B noktasını A etrafından α/2 kadar döndürmüş, oluşan B noktası ve A noktasından geçen doğruyu çizerek A açısının açıortayını oluşturmuştur (Şekil 51).

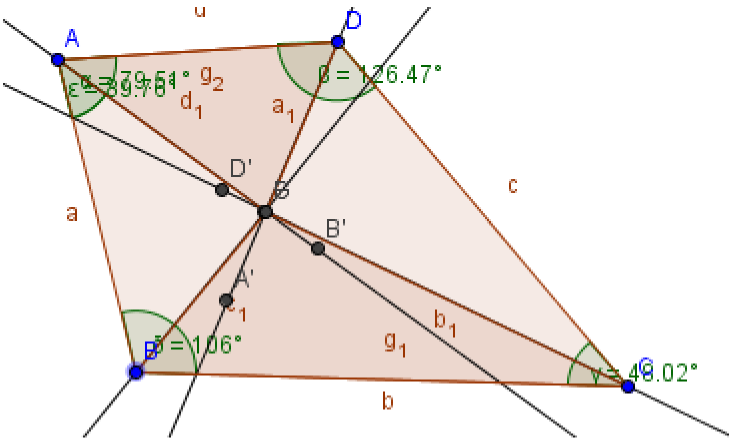


Şekil 51: Öğretmen Adayı Okan'nın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -1

(2) D noktasını hareket ettirerek dikdörtgene yakın bir şekil elde etmiş, açıortayların kesişmediğini görünce dikdörtgende istenen koşulu sağlamadığını söylemiştir. Daha sonra eşkenar dörtgende sağlayacağını düşünerek eşkenar dörtgen oluşturmak istemiştir. Düzgün çokgen aracını seçmiş ve bir kare oluşturmuştur. Karede köşegenlerin aynı zamanda açıortay olacağını ifade etmiş ve karede istenen durumun sağlandığını ifade etmiştir.

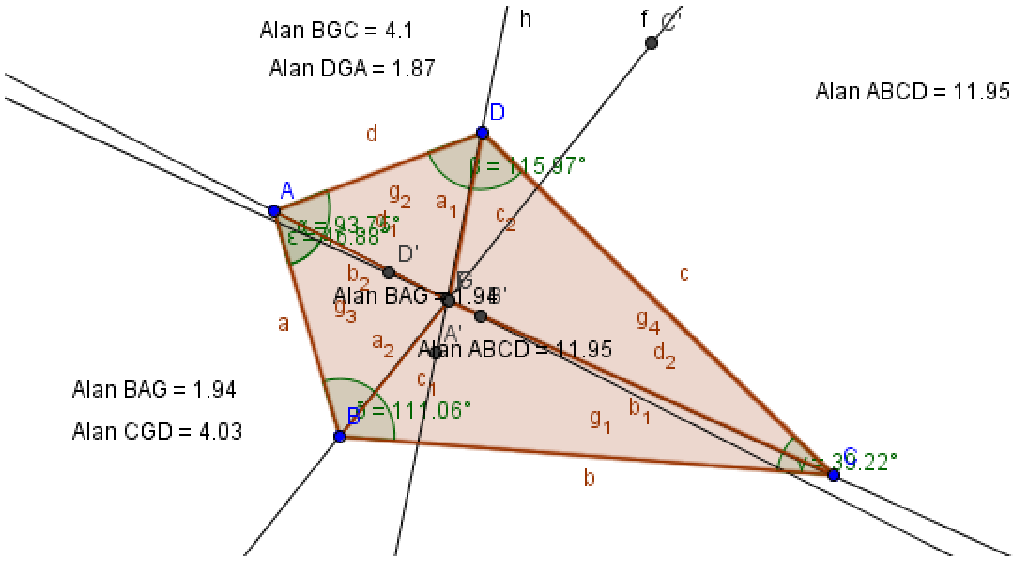
(3) Daha sonra rastgele belirlediği dörtgende de açıortayların tek noktada kesiştiklerini hatırlamış ve ilk oluşturduğu şekle geri dönmüştür. D noktasını hareket ettirerek açıortayları tek noktada kesiştirmeye çalıştırmıştır.

(4) Tam bir kesişim elde etmek için açıortayların ikişer ikişer kesim noktalarını almıştır. Kesim noktaları eşit olmayınca D noktasını hareket ettirerek oluşan F ve G noktalarının koordinatlarını eşitlemeye çalışmıştır (Şekil 52).



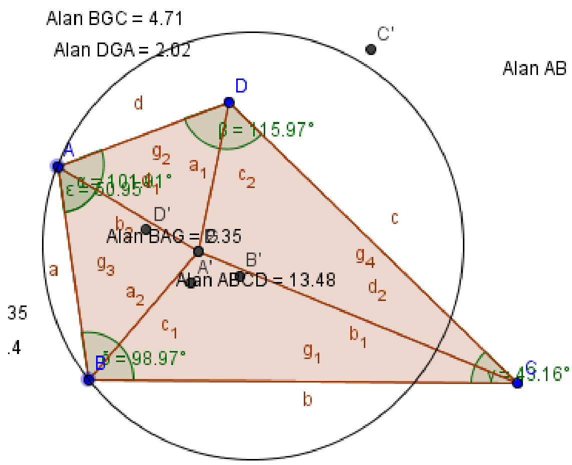
Şekil 52: Öğretmen Adayı Okan'ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -2

(5) Kesim noktası ve köşelerin oluşturduğu üçgenlerin alanlarını ölçüp bir ilişki bulmayı düşünmüştür. Oluşan karşılıklı üçgenlerin alanları toplamlarının eşit olduğunu görmüştür (Şekil 53). Daha sonra bu özelliğin sadece açıortayların kesim noktalarına ait olmayıp, dörtgen içerisinde alınan herhangi bir noktanın köşelerle birleştirilmesiyle oluşan tüm üçgenler için geçerli olacağını söylemiştir.



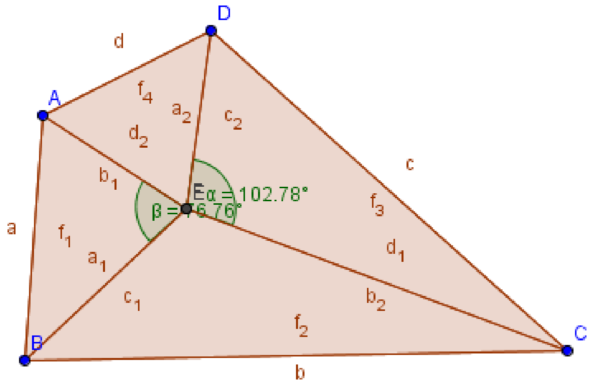
Şekil 53: Öğretmen Adayı Okan'ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -3

(6) Daha sonra ABCD dörtgeninin köşelerinden bir çember geçebileceğini düşünerek bir çember oluşturmuştur (Şekil 54). Fakat çember düşündüğü gibi dörtgenin tüm noktalarından geçmemiştir.



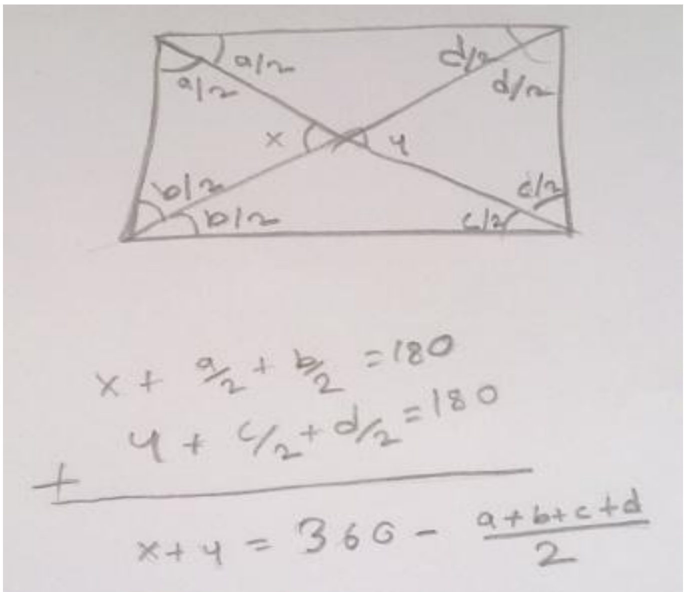
Şekil 54: Öğretmen Adayı Okan'ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra'da Oluşturduğu Şekil -4

(7) Açıortayların kesim noktasında oluşan karşılıklı açıların toplamını ölçmüş ve $179,54^0$ bulmuştur (Şekil 55). Bu sonucun açıortayların kesim noktasını tam olarak alamadığı için bu şekilde çıktığını, aslında 180^0 olması gerektiğini söylemiştir.



Şekil 55: Öğretmen Adayı Okan’ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik GeoGebra’da Oluşturduğu Şekil -5

(8) Daha sonra kâğıt üzerinde işlem yapmış ve 180^0 olması gerektiğini doğrulamıştır (Şekil 56). Böylece ters açıların toplamının 180^0 olduğu durumda açıortayların tek noktada kesişeceğini söylemiştir.



Şekil 56: Öğretmen Adayı Okan'ın Üçüncü İspat Probleminin Çözümüne Yönelik Kâğıt Üzerinde Oluşturduğu Şekil

Öğretmen adayı Okan ilk olarak rastgele bir dörtgen oluşturmuş (1) daha sonra sorunun çözümü için standart bir dörtgen ailesi aramıştır. Bu yüzden dikdörtgende ve karede varsayımını doğrulamaya çalışmıştır (2). Açıortaylar dikdörtgende kesişmemiş, karede tek bir noktada kesişmiştir. Fakat ilk oluşturduğu rastgele dörtgende de tek noktada kesiştiğini hatırlayınca farklı bir durum aramaya başlamıştır (3). Daha sonra oluşan üçgenlerin alanları arasında bir ilişki aramış fakat bu ilişkinin açıortayların tek noktada kesişme durumuna özgü olmadığını anlamıştır (5). (6)'da dış teğet çember çizmek istemiş fakat çizdiği çember tüm köşeleri kapsamamıştır. Son olarak açıortayların kesim noktasında oluşan karşılıklı açıların toplamları arasında bir ilişki olduğunu düşünmüş (7) ve işlemler yaparak karşılıklı açıların toplamının 180^0 olması durumunda açıortayların tek noktada kesişeceğini göstermiştir (8).

Okan burada bir dörtgen kullanarak çözüme ulaşmak istemiş ve böylece *jenerik örneğe* başvurmuştur. Daha sonra çeşitli ölçümler yaparak açıortayların kesim noktasında oluşan karşılıklı açıların toplamlarının 180^0 olduğu durumda açıortayların tek bir noktada kesiştiklerini bulmuştur. Böylece Okan oluşturmuş olduğu nesnelerin arasında bir ilişki bulmuştur. Okan varsayımını doğrulamak için *deneysel gerekçelendirme* biçimlerinden *entelektüel jenerik örnek* oluşturmuştur.

Okan GeoGebra'da var olan "açıortay" aracının varlığını bilmese bile "nesneyi nokta etrafında açıyla döndür" aracını kullanarak açıortayları oluşturabilmiştir (1). Böylece akıl yürütmeler ile GeoGebra'daki araçları etkin bir şekilde kullanabilmiştir. Ayrıca GeoGebra yapılan küçük bir sapmayı bile kullanıcıya göstermiş ve bu sebeple kullanıcıyı ispata yönlendirmiştir (7) (8).

Tablo 3: Öğretmen Adaylarının Üçüncü İspat Problemini Çözme Biçimleri

Öğretmen Adayları	İspat Biçimi
Burak	Tümdengelimli-Yapısal Düşünce Deneyi
Eda	Tümdengelimli-Yapısal Formal Çıkarım
Alper	Tümdengelimli-…….. Formal
Aslı	Tümdengelimli-Yapısal Formal
Tamer	Tümdengelimli-Yapısal Formal
Okan	Deneysel-Entelektüel Jenerik

Tablo 3’e göre öğretmen adayları üçüncü ispat problemini genel olarak tümdengelimli ispat biçimlerini kullanarak yapmışlardır. Öğretmen adayı Alper ise tümdengelimli ispat biçimlerini kullanarak problemin çözümüne başlamış fakat ispatı tamamlayamamıştır. Çünkü Alper ispat probleminin çözümü için doğru olmayan varsayımlar ortaya atarak ispata başlamıştır, bu yüzden ispatı tamamlayamamıştır. Öğretmen adaylarından sadece Okan deneysel gerekçelendirmelerle ispatı yapmıştır. Çünkü Okan dörtgen çeşitlerini kullanarak ispata başlamış ve daha sonra varsayımlar oluşturmuştur.

BÖLÜM VI

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde alt problemlere göre araştırmanın sonuçları tartışılmış, gelecekteki araştırmalar ve uygulamalar için önerilerde bulunulmuştur.

6.1 Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada farklı düzeylerdeki 2. sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra dinamik matematik yazılımı yardımıyla geometriye yönelik ispat yapma becerileri ve kullanmış oldukları ispat biçimleri incelenmiştir. Bu amaç kapsamında öğretmen adaylarının GeoGebra'yı ispat yapma sürecinde nasıl kullandıkları; a) amaçlarına uygun bir şekilde kullanıp kullanamadıkları b) GeoGebra'nın hangi araçlarını kullandıkları c) GeoGebra'nın ispat sürecinde ne tür kolaylıklar sağladığı tespit edilmeye çalışılmıştır. Bunun yanında GeoGebra'nın öğretmen adaylarının varsayımda bulunma sürecinde uygun ortam oluşturup oluşturmadığı ve öğretmen adaylarının varsayımlarını doğrulamak için hangi gerekçeleri kullandıkları araştırılmıştır. Tüm bu süreçte öğretmen adaylarının hangi tür ispat biçimlerini kullandıkları belirlenmek istenmiştir.

6.1.1 Öğretmen adayları kendilerine verilen bir geometri probleminin çözümünde GeoGebra'yı ispat yapmak için nasıl kullanıyorlar?

Yapılan çalışmada elde edilen bulgulara göre öğretmen adaylarının genel olarak ispat problemlerini çözerken GeoGebra'yı amaçlarına uygun bir şekilde kullanabildikleri görülmüştür. Öğretmen adayları uygulama süreci boyunca GeoGebra'da yer alan farklı özelikleri ispat problemlerini çözerken kullanmışlardır.

Yapılan araştırmaya göre öğretmen adayları yaklaşık her ispat probleminde GeoGebra'da bulunan sürükleme aracını kullanarak oluşturdukları şekillerin farklı durumlarını gözlemleyebilmişlerdir. Diković (2009), GeoGebra'da yer alan sürükleme aracı ile öğrencilerin çeşitli sürüklemeler sayesinde çok sayıda fonksiyon çeşidi ile karşılaştıklarını böylece öğrencilerin sembolik ve görsel temsiller arasında ilişki kurmalarının kolaylaştığını ifade etmiştir. Diğer dinamik yazılımlarla yapılan araştırmalara göre ise sürükleme aracı sayesinde öğrencilerin yeni matematiksel ilişkiler keşfedebildiği görülmüştür (Santos-Trigo ve Cristóbal-Escalante, 2008; Gonzàlez ve Herbst, 2009). Ayrıca araştırmalarda öğrenciler DGY'de oluşturdukları şekilleri sürükleme aracı ile hareket ettirdiklerinde geometrik şekillerin özelliklerini araştırarak bu özelliklerle ilgili genel sonuçlar çıkarmışlardır (Ubuz, Üstün ve Erbaş, 2009). Böylece dinamik yazılımlarda bulunan şekillerin dinamikliğini sağlayan sürükleme aracı ile öğrenciler farklı durumları gözlemleyebilmiş ve yeni matematiksel özellikler keşfedebilmiştir. Bu keşfettikleri özelliklerin her durumda geçerliliğini kontrol ederek tüm durumlara genelleyebilmişlerdir.

Sürükleme aracının yanında sadece GeoGebra'da yer alan sürgü aracı sayesinde de öğretmen adayları farklı durumları gözlemleyebilmiştir. Birinci ispat probleminde öğretmen adayı Okan sürgüye bağlı oluşturmuş olduğu şeklin uzunluğunu değiştirmiş ve nesnelerin sürgünün hareketine bağlı olarak değişimlerini gözlemleyebilmiştir. Böylece sürükleme ve sürgü araçları ile öğretmen adayları bağımlı bağımsız nesneleri ayırt edebilmişlerdir. Diković (2009) de yaptığı çalışmada basit bir sürükleme hareketi ile bağımlı ve bağımsız değişkenlerin nasıl hareket ettiğinin gözlenebileceğini ifade etmiştir.

GeoGebra'nın geometrik matematiksel kavram ve ilişkileri görselleştirme özelliği öğretmen adaylarının üç ispat probleminin çözümünde de yer alan şekilleri doğru bir şekilde oluşturabilmelerini sağlamıştır. Birinci ispat probleminde yer alan açıortayların kesim noktaları, problemlerin çözümlerinde yer alan dikliklerin görselleştirilmesi bu duruma örnek olarak verilebilir. İlgili alanyazın incelendiğinde GeoGebra'nın görselleştirme özelliği genel olarak soyut kavramlardan oluşan matematiği somutlaştırarak öğrencilerin matematiğe karşı ilgilerini artırdığı (Ayvaz-Reis ve Özdemir, 2010), matematiği anlama ve anlatma etkinliklerine yardımcı olduğu (Taş, 2010), matematiksel kavramların görsel anlayışını geliştirmelerine ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi anlamaya yardımcı olduğu (Karadağ ve McDougall, 2009) bulunmuştur. Ayrıca GeoGebra ile eğitim gören grupların görsel uzamsal becerilerinin daha çok geliştiği ve böylece geometrik kavramlar ve aralarındaki ilişkileri keşfetme imkânı elde ettikleri ifade edilmiştir (Saha, Ayub ve Tarmizi, 2010). GeoGegebra'nın görselleştirme özelliği bu çalışmada öğretmen adaylarına matematiksel ifadelerin görsel temsillerini doğru bir şekilde oluşturabilme imkânı sunmuştur.

GeoGebra, birinci ispat probleminin çözümünde öğretmen adayı Tamer'e hızlı geribildirimler sunarak yaptıklarının doğruluğu ve yanlışlığı hakkında fikir sahibi olmasını sağlamıştır. Yapılan çalışmalar GeoGebra'nın bu özelliğini destekler niteliktedir (Jones ve diğerleri, 2009; Saha, Ayubb ve Tarmizi, 2010). GeoGebra yazılımı hızlı geribildirimler sunması özelliği ile sınıf içi aktiviteler, ev ödevleri ve bireysel çalışmalarda kullanılabilecek bir yazılımdır. Ayrıca GeoGebra'nın sunduğu hızlı geribildirimler öğretmen adaylarının problem çözümü sırasında yaptıkları yanlışları hızlı bir şekilde fark ettirerek ispatı doğru bir şekilde yapmaları için zaman kazandırmıştır.

Ayrıca diğer DGY'lerden farklı olarak GeoGebra yazılımında yer alan cebir penceresi birinci ispat probleminde öğretmen adayı Tamer'e oluşturduğu nesnelerin uzunluklarını cebir penceresinde görebilme imkânı sunmuştur. İkinci ispat probleminin çözümünde öğretmen adayı Burak ve Eda oluşturulan şekillerle ilgili ölçümleri hızlı bir şekilde görebilme ve yargıda bulunma imkânı elde etmişlerdir. Üçüncü ispat probleminde öğretmen adayı Burak açıortayların kesim noktalarını doğru bir şekilde bulabilmek için cebir penceresinde noktaların koordinatlarının eşitliğini gözlemlemiştir. Böylece öğretmen adayları grafik penceresinde yer alan geometrik şekillerin ölçümlerinin doğruluğu veya yanlışlığını anında görebilme imkânı elde etmişlerdir. Edwards ve Jones (2006), eşitliklerin ve koordinatların cebir ekranından kontrol edilip düzenlenebildiği için kullanıcıya zaman kazandırdığını belirtmiştir. Bununla birlikte GeoGebra yazılımı yapılan yanlışlığı öğretmen adaylarına bildirerek onların farklı çözüm yolları aramalarına da yardımcı olmuştur. Öğretmen adayı Okan birinci ispat probleminde GeoGebra'da yer alan "nesneyi nokta etrafında döndürme", "merkez ve yarıçapla çember", "nesnenin noktaya göre yansıması" özelliklerini kullanarak farklı çözüm yolları düşünmüş ve bunları uygulamıştır. Bu bulguyla paralel olarak Jones ve diğerleri (2009) yaptıkları çalışmada öğrencilerin GeoGebra ile çalışarak problem çözme ve yaratıcı düşünme becerilerinin geliştiğini gözlemlemiştir. GeoGebra yazılımında yer alan cebir penceresi problemlerin çözümünde kullanıcıya kolaylık sağlamıştır. Ayrıca grafik penceresinde yer alan geometrik şekillerin cebirsel temsillerini de kullanıcıya göstermesi cebir ve geometri arasında ilişki kurmayı kolaylaştırmıştır.

GeoGebra yazılımı, öğretmen adaylarına oluşturulan şekillerin doğruluğunu kontrol amaçlı ölçümler yapabilme olanağı sunmuştur. Birinci ispat probleminde öğretmen adayı Burak ve Alper GeoGebra'nın bu özelliğinden yararlanarak oluşturduğu şekillerin doğruluğunu kontrol etmişlerdir. Gonzàlez ve Herbst (2009) çalışmasında DGY'de bulunan ölçme özelliğinin öğrencilerin geometrik nesneleri sadece şekil olarak değil özellikleri ile de öğrenmelerini, böylece öğrencilerin şekillerle ilgili daha derin araştırmalar yapabilmelerine olanak sağladığını ifade etmiştir. Bu sebeple GeoGebra'da şekillerin doğruluğunu kontrol etmek için yapılan ölçümler şekillerin özelliklerine odaklanmayı sağlamıştır.

Öğretmen adayları GeoGebra'da yer alan araçları kullanarak geometrik özellikleri keşfedebilmiş ve bu özellikleri genelleyebilmişlerdir. Üçüncü ispat probleminde öğretmen adayı Eda nesneleri hareket ettirerek bağımlı ve bağımsız özellikleri keşfedebilme imkânı elde etmiştir. Literatürde GeoGebra yazılımı sayesinde öğrencilerin matematiği çift yönlü (cebirsel ve geometrik) deneysel bir yolla keşfedebildiği ifade edilmiştir (Hohenwarter, 2009). Ayrıca Sinclair (2003), lise öğrencileri ile yaptığı çalışmada DGY ile hazırlanmış aktivitelerin öğrencilerin geometrik özellikleri keşfetmelerini sağlayarak akıl yürütme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olduğunu vurgulamıştır. Böylece GeoGebra ve diğer DGY'ler öğrencilerin matematiği özgürce keşfetmeleri için bir ortam sağlamıştır.

Yapılan çalışmada öğretmen adayı Tamer 3. ispat probleminin çözümünde varsayımını doğrulamak için giriş alanından yararlanmıştır. Şekillerin cebirsel eşitlikleri GeoGebra'da yer alan giriş alanına yazılarak, bu şekillerin kolay bir şekilde grafik alanında oluşturabildiği görülmüştür. Böylece matematiksel özelliklerin cebirsel ve geometrik temsillerini aynı anda görebilme imkânı elde edilmiştir. Diković'in (2009) yaptığı çalışma da GeoGebra'nın matematiğin çoklu temsillerini bir araya getirdiğini desteklemiştir. Ayrıca Edwards ve Jones (2006) çalışmasında GeoGebra yazılımının giriş kısmına yazılan denklem ve eşitliklerin geometrik temsillerinin grafik alanında belirdiğini ifade etmiştir. GeoGebra'da yer alan giriş alanı kullanıcının geometri ve cebir arasında bağlantı kurmasını ve geometrik şekillerin özelliklerini daha kolay anlamalarını sağlayabilmiştir.

Öğretmen adayları istedikleri özellikteki geometrik şekilleri GeoGebra'da yer alan grid özelliği ve eksenler yardımı ile oluşturabilmişlerdir. Birinci ispat probleminde öğretmen adayı Eda GeoGebra'nın grid özelliğini kullanarak üçgenin köşelerini grid üzerine sürükleyerek yerleştirmiş ve belli uzunlukta doğru parçaları alabilmiştir. İkinci ispat probleminde öğretmen adayı Aslı yine gridden yararlanarak dikdörtgen oluşturmuştur. Ayrıca GeoGebra'da yer alan istenen oranda yakınlaştırma aracı ile oluşabilecek küçük hataları önleyebilmişlerdir. Birinci ispat probleminde öğretmen adayı Alper oluşturduğu şekli istediği oranda yakınlaştırarak hata olup olmadığını kontrol etme olanağına sahip olmuştur. Böylece GeoGebra öğretmen adayının şekli doğru oluşturmasına yardımcı olmuştur. İlgili alanyazında da GeoGebra yardımıyla net ve doğru şekiller oluşturulduğu belirtilmiştir (Wei ve İsmail, 2010; Jones ve diğerleri, 2009). Bununla birlikte GeoGebra'da bulunan araçların kullanımına dair kısa açıklamalar öğretmen adaylarına yol gösterici nitelikte olmuştur. Üçüncü ispat probleminin çözümünde öğretmen adayı Eda GeoGebra'nın bu özelliğinden yararlanmıştır.

Öğretmen adayları aynı zamanda GeoGebra yazılımını kullanarak sorular çözerken bir takım sorunlar yaşamışlardır. Teknolojinin günümüzde çok gelişmiş ve hayatımızın birçok alanına girmiş olmasına rağmen matematik problemlerini GeoGebra yazılımı ile çözmek öğretmen adaylarından bazılarının ilk olarak tercih ettikleri bir yöntem olmamıştır. Aslı ve Alper birinci sorunun çözümüne kâğıt kalemle başlamak istemişlerdir. Eda ise birinci sorunun çözümünün doğruluğunu kontrol etmek amacıyla kâğıt kalemle başvurmuştur. İkinci sorunun çözümünü kâğıtta da görmek isteyen Aslı bunun sebebini yıllardır kâğıt kalem çözümüne alışkın olduğu için bu çözümün daha rahat geldiğini ifade etmiştir. Bu sebeple kâğıt kalemle çözümün alışılagelmiş bir çözüm olduğu ve DGY ile çözümün öğrencilerin ilk etapta tercih etmek istemedikleri bir yöntem olduğu düşünülmüştür.

GeoGebra'da ondalık hanede bulunan basamak sayılarını azaltmak (yuvarlama) öğretmen adaylarının kesin olarak doğru çözüme ulaşmalarını engellemiştir. Alper birinci soruda ondalık haneyi bir basamağa düşürdüğü için istediği ölçüme ulaşamamıştır.

GeoGebra yazılımını kullanarak açıları ölçme konusunda öğretmen adayları saatin ters yönü ve saat yönü kavramları konusunda sorun yaşamışlardır. Aslı ve Eda birinci soruda açıları ölçmek istediklerinde noktaları seçme işlemini farklı yönde yaptıkları için istedikleri açıyı değil bütünleyen açıyı ölçebilmişlerdir. Bunun sebebi olarak öğretmen adaylarında açı tanımının tam olarak bilinmediğinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarının "Dinamik Geometri Yazılımları ile Matematikte Kavramların Keşfi" dersi notları göz önünde bulundurulduğunda iyi düzeyde bulunan Burak ve Okan GeoGebra programına hakimiyet konusunda diğerlerine oranla daha iyi düzeyde yer almaktadır. GeoGebra araçlarını daha iyi tanıdıkları için farklı araçlardan yararlanarak farklı çözümler üretebilmişlerdir. Zayıf düzeyde yer alan Alper ve Aslı düşündükleri çözümleri GeoGebra'da oluşturma konusunda sıkıntı yaşamışlardır.

Sonuç olarak öğretmen adayları verilen bir ispat probleminde bir takım zorluklar yaşasalar da GeoGebra yazılımını amaçları doğrultusunda kullanabilmişler ve çözüm sürecinde doğru sonuca ulaşmak için yazılımda yer alan birçok araçtan yararlanmışlardır. Böylece öğretmen adaylarının farklı çözüm yolları arama, geometrik özelikleri keşfetme ve genelleme becerilerinin desteklendiği düşünülmektedir.

6.1.2 Öğretmen adayları GeoGebra yardımıyla verilen bir ispat probleminin çözümü için geçerli varsayımda bulunup, bu varsayımlar hakkında gerekçeler sunabiliyorlar mı?

Yapılan çalışmaya göre öğretmen adayları verilen ispat problemlerinin çözümlerini GeoGebra yazılımı ile yapabilmek için ilk olarak varsayımlar oluşturmuşlardır. Öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımının özelliklerini kullanarak oluşturdukları geçerli ve geçerli olmayan varsayımlar ispatı yapabilmek için ilk adım niteliğinde olmuştur. Böylece GeoGebra yazılımı birçok özelliği ve aracı sayesinde öğretmen adaylarının varsayım yapmalarına yardımcı olmuş ve onları teşvik etmiştir. İlgili literatüre bakıldığında DGY'nin öğrencilerin çıkarım yapma ve varsayımda bulunma becerilerini artırdığı vurgulanmıştır (Filiz, 2009). DGY'nin öğrencilerin bir yargı hakkında varsayımlar oluşturmalarını ve bu varsayımları destekleyecek gerekli iddialar elde etmelerine yardımcı olduğu ifade edilmiştir (Santos-Trigo ve Cristóbal-Escalante, 2008). Ayrıca DGY'nin öğrencilerin geometrik şekiller arasında ilişkiler kurmaya odaklanmasına ve geometrik şekillerin aralarındaki ilişkiler hakkında varsayımlar yapmalarına yardımcı olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Hoyles ve Jones, 1998). İspat problemlerinin çözümünde GeoGebra ve diğer DGY'lerin kullanılması öğrencilerin varsayımda bulunmalarına yardımcı olmuştur.

GeoGebra yazılımı ile varsayımda bulunan öğretmen adayları bu varsayımlarını doğrulamak için GeoGebra yazılımını amaçlarına uygun bir şekilde kullanabilmişlerdir. Yapılan çalışmalara bakıldığında Hoyles ve Jones (1998) çalışmalarında öğrencilerin dinamik ortamlarda örüntüler bulması, çeşitli yapılar oluşturması, uzunluk ve açıları ölçmeleri için yer alan araçlar öğrencilerin varsayımlarını doğrulamada kullandıkları araçlar olduğunu söylemiştir. Böylece öğrenciler DGY ile bir varsayımın doğruluğu ve yanlışlığı ile ilgili gerekçeler sunmuş ve duruma uygun yeni varsayımlar oluşturabilmişledir (Hadas, Hershkowitz ve Schwarz, 2000). Araştırmanın sonucuna göre GeoGebra yazılımı ve diğer DGY'lerin öğrencilerin varsayımlarını doğrulayabilecekleri uygun ortam oluşturduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ayrıca öğretmen adaylarının bu çalışmada verilen geometri problemleri için varsayımlar ortaya atıp bunlar hakkında çözümler oluşturmaları onların pür ispat yerine gerekçelendirmeler yaptıklarını göstermiştir. Bu gerekçelendirmeleri yaparken de GeoGebra'dan yararlanmışlardır.

6.1.3 Öğretmen adayları GeoGebra'yı kullanarak geometriye yönelik ispat problemleri çözme sırasında hangi tür ispat biçimlerini kullanıyorlar?

Her öğrencinin akıl yürütme biçimi farklı olduğu için ispat yapma şekilleri de farklı olabilir. Hadas, Hershkowitz ve Schwarz (2000) öğrencilerin yaptıkları varsayımların doğruluğunu göstermek için oluşturdukları gerekçelerin genel anlayışa ve daha önceki öğrenmelerine dayandığını vurgulamıştır. Harel ve Sowder'a (1998) göre ispat dışsal şemalar veya deneysel şemalarla başlamalı ve öğrencinin eğitim süresi boyunca analitik şemalara geçilmelidir. Çünkü dışsal şemalar dersin öğretmenine veya başka herhangi bir otoriteye, deneysel şemalar ise örneklere dayanmaktadır. Analitik şemalar ise öğrencinin yapacağı mantıksal çıkarımlara dayanmaktadır. Öğrencinin mantıksal çıkarımlar yapabilecek seviyeye ulaşması için belli bir altyapısının oluşması gerekmektedir. Bu sebeple ispatın öğretim süreci öğrencinin alt yapısı göz önünde bulundurularak planlanmalıdır. Diğer yandan ispat öğretiminde dinamik yazılım kullanılması öğrenciler için soyut olan ispatın öğrenimini kolaylaştırabilmektedir. Ayrıca Jones (2000) çalışmasında DGY'nin öğrencilerin geometrik kavramların yapısındaki hiyerarşik düzeni görmelerini kolaylaştırdığını ve böylece tümdengelimsel çıkarımlar yapmak için temel oluşturduğunu vurgulamıştır.

Öğretmen adayları verilen ispat problemlerinin çözümü için GeoGebra yardımıyla oluşturdukları varsayımları gerekçelendirmek için farklı yollar denemişlerdir. 6 öğretmen adayının 3 ispat problemi için yaptığı toplam 18 ispatın 9 tanesi deneysel gerekçelendirmeler, 9 tanesi de tümdengelimli gerekçelendirmeler ile yapılmıştır. Birinci ispat probleminin çözümü için genel olarak deneysel gerekçelendirme biçimlerinden jenerik örnek kullanılmıştır. Hoyles ve Jones (1998) çalışmasında öğrencilerin DGY ortamlarında jenerik örnek oluşturmalarının, öğrencilerin örnekleri oluşturma sürecinde geometrik şekiller arasındaki ilişkilere odaklanmaları gerektiğini ve böylece ispat için bir temel oluşturduğunu öne sürmüştür. Öğretmen adaylarının birinci ispat problemi için jenerik örnek ile ispata başlamaları bu problem için yeterli mantıksal çıkarımlara sahip olmadıklarını göstermektedir. Bu sebeple örneklerden yararlanarak varsayımlarda bulunmayı tercih etmişlerdir. Birinci ispat probleminin çözümü için 5 öğretmen adayı ispatını örneklere dayandırmış fakat Aslı ilk olarak bir varsayım oluşturmuştur ve daha sonra örneklerle bu varsayımını desteklemiştir. Böylece birinci ispat probleminin çözümünde sadece Aslı tümdengelimli gerekçelendirme biçimlerine başvurmuştur. İkinci ispat probleminde üç öğretmen adayı deneysel gerekçelendirme biçimlerine başvururken üç öğretmen adayı tümdengelimli ispat biçimlerine başvurmuştur. Deneysel gerekçelendirmeler jenerik örnek ve acemi deneyciliğe dayanırken, tümdengelimli gerekçelendirmeler yapısal formal çıkarımlarla yapılmıştır. Üçüncü ispat probleminde öğretmen adayları genel olarak tümdengelimli gerekçelendirmelere başvurmuşlardır. Sadece Okan deneysel gerekçelendirmelerden jenerik örneği kullanmıştır. Bunun sebebi Okan’nın üçüncü ispat problemi için yeterli mantıksal çıkarımlar yapamaması ve bunun için örneklerden yararlanmak istemesidir. Literatüre bakıldığında Marrades ve Gutiérrez (2008) lise öğrencileriyle yaptığı çalışmasında öğrencilerin verilen ispat problemlerinin çözümünde genel olarak deneysel gerekçelendirmelere başvurduklarını ifade etmiştir. Deneysel gerekçelendirmelere başvuran öğretmen adayları problemlerinin çözümüne örneklerle başlamış ve daha sonra varsayımlar oluşturup bu varsayımları doğrulayacak gerekçeler üretmişlerdir. Tümdengelimli gerekçelendirmelerden yararlanan öğretmen adayları ise ilk olarak bir varsayımda bulunmuş, daha sonra varsayımlarını doğrulamak için örnekler ve mantıksal çıkarımlardan yararlanmışlardır. Öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımı ile çalışırken hangi gerekçelendirme biçimlerini kullandıkları, kendi öğrenmeleri ve ilerideki öğrencilerinin öğrenmeleri hakkında bilgi sahibi olmaları bakımından önemli olduğu düşünülmektedir. Böylece soyut olan ispatın öğrencilere öğretimi GeoGebra yazılımı sayesinde daha da somutlaştırılabilmektedir. Ayrıca günlük hayatta ve eğitimde teknoloji kullanımının artmasıyla birlikte öğrencilerin zor olan ispat konusuna bile yazılımlar sayesinde ilgilerinin çekilebileceği ve böylece başarılarının artırılacağı düşünülmüştür.

Diğer taraftan elde edilen bulgulara bakıldığında üçüncü ispat probleminde Alper'in bir varsayım ortaya attığı fakat bu varsayımı destekleyecek yeterli gerekçeler sunamadığı görülmüştür. Bunun nedeni problemin ispatı için doğru düşünceye sahip fakat yetersiz açıklamalar yapması olabilir (Harel ve Sowder, 1998). Yine aynı problemde Aslı bir varsayım ortaya atmış fakat varsayımı yanlış olduğu için ispatı tamamlayamamıştır. Bunun nedeni ise problemin çözümü ile ilgili yeterli önbilgileri bulunmadığı için gerekli tümdengelimsel çıkarımları yapamaması olabilir (Yerushalmy, Chazan ve Gordon, 1988). Ayrıca Aslı problemin çözümü için oluşturduğu varsayımın yanlış olduğunu fark ettiği halde varsayımını terk etmemiş ve bu sebeple doğru bir varsayım oluşturamamıştır. Bu durum ise daha önceden var olan yanlış bilgilerinin Aslı'nın ispatı yapabilmesini engellediği görülmüştür.

Deneysel gerekçelendirme biçimlerinden tümdengelimli gerekçelendirme biçimlerine geçiş öğrencinin ispat becerilerinin gelişimine bağlıdır. Yapılan çalışmada öğretmen adaylarının yapmış oldukları 18 ispatın yarısında bu geçişin tamamlanmış olduğu görülmüştür. Çünkü öğretmen adayları verilen bir ispat problemi için mantıksal çıkarımlar yapıp varsayımlar üretebilmiştir.

6.2 Öneriler

6.2.1 Uygulamaya Yönelik Öneriler

İspat problemleri için kullanılan farklı gerekçelendirme biçimleri problemlerin çözümü için yapılan akıl yürütmeler hakkında bilgi sahibi olmamıza yardımcı olmuştur. Böylece derslerde ispat öğretimi bu gerekçelendirme biçimlerine göre şekillendirilebilir. Ayrıca derslerde planlanan ispat süreci öğrencilerin var olan önbilgileri göz önünde bulundurularak yapılmalıdır. Bu sayede öğrencilerin deneysel gerekçelendirme biçimlerinden tümevarımsal gerekçelendirme biçimlerine geçişleri sağlanabilir.

Üniversite düzeyindeki öğrencilerin GeoGebra ile ispat yapmak ve soru çözmek yerine kâğıt kalemle çözmeyi tercih ettikleri görülmüştür. Bu durumun gördükleri eğitim sisteminden kaynaklandığı düşünülmüştür. Bu sebeple ilköğretim ve lise düzeyinde yapılan eğitimin DGY ile desteklenmesi gerektiği düşünülmektedir. Bu sayede öğrenciler DGY'nin getirdiği kolaylıklardan yararlabilirler.

6.2.2 Araştırmaya Yönelik Öneriler

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat biçimleri GeoGebra yazılımı kullanılarak belirlenmeye çalışılmıştır. Yapılan çalışmada öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde deneysel gerekçelendirmelerden tümevarımsal gereçlendirmelere geçişlerde sorun yaşadıkları görülmüştür. İlerideki çalışmalarda öğretmen adaylarının ispat becerilerini GeoGebra yazılımı kullanılarak nasıl geliştirilebileceğine yönelik bir araştırma yapılması önerilmektedir.

Yapılan çalışmada GeoGebra kullanılarak belirlenen ispat biçimleri GeoGebra olmadan yapılan ispat biçimleri hakkında merak duyulmasına yol açmıştır. İlerideki çalışmalarda GeoGebra kullanılarak belirlenen ispat biçimleri ile kâğıt kalemle belirlenen ispat biçimlerinin farkları incelenebilir. Her iki durumun avantaj ve dezavantajları tartışılabilir.

GeoGebra'yı öğrenen öğretmen adaylarının öğretmenlik hayatında GeoGebra'yı ne oranda ve hangi durumlarda kullanmayı tercih ettikleri araştırılabilir. Baz alınan yazılımın Geogebra olmasının sebebi sürekli geliştirilen ve her geçen gün yeni özellikler eklenen, ücretsiz ve kolay erişimli bir yazılım olmasıdır.

İlköğretim öğrencilerinin daha iyi bir öğrenim görebilmesi için onların yaptıkları ispat ve akıl yürütme biçimleri incelenebilir. Ayrıca ilköğretimde, ortaöğretimde ve üniversite düzeyinde ayrı ayrı GeoGebra ile yapılan eğitim ve GeoGebra olmadan yapılan ispat eğitimi arasındaki farklar araştırılabilir. Bu farkların öğrenci düzeyleri değiştikçe nasıl değişkenlik gösterdiği tespit edilebilir. Böylece GeoGebra'nın ispatın konusunda hangi seviyedeki öğrenciler için daha yararlı ve etkili olduğu tespit edilebilir.

KAYNAKÇA

Akkuş, R., Onur, F. Z. & Ertuna, L. (20-22 Ekim 2010). *Problem Çözme SürecindeYazma Etkinliklerinin Artışı İle Birlikte Gerekçelendirme Seviyelerindeki Değişim*. 9. Matematik Sempozyumu Sergi ve Şenliklerinde sunuldu, Trabzon.

Aktümen, M., Horzum, T., Yıldız, A. & Ceylan T. (2010). Bir Dinamik Matematik Yazılımı: Geogebra ve İlköğretim 6-8. Sınıf Matematik Dersleri için Örnek Etkinlikler, ISBN: 978-605-125-189-9, Tam Metin ve Etkinlik Dosyaları.

Almeida, D. (2001). "Pupils' proof potential", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 32, no.1, p. 53-60.

Almeida, D. A. (2000). Survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6),869-890.

Ayvaz-Reis, Z. & Özdemir Ş. (2010). Using Geogebra as an information technology tool: parabola teaching, *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 9, 565–572.

Ayvaz-Reis, Z. (29-31 Ekim 2010). *Computer supported mathematics with Geogebra*, World Conference on Learning, Teaching and Administration, Cairo, Egypt.

Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. A. (January 28th-February1st 2009). Conjecturıng And Provıng In Dynamıc Geometry: The Elaboratıon Of Some Research Hypotheses. *Proceedigs of CERME6, France, 231-240*

Baki, A. (2000). Bilgisayar Donanımlı Ortamda Matematik Öğrenme. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19,* 186-193.

Baki, A. (2002).*Öğrenen Ve Öğretenler İçin Bilgisayar Destekli Matematik***.** İstanbul: Ceren Yayın- Dağıtım.

Baki, A. (2002).*Öğrenen Ve Öğretenler İçin Bilgisayar Destekli Matematik***.** İstanbul: Ceren Yayın- Dağıtım.

Baki, A. (2006). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Trabzon: Derya Yayıncılık.

Baki, A. ve Özpınar, İ. (2007). Logo Destekli Geometri Öğretimi Materyalinin Öğrencilerin Akademik Başarılarına Etkileri Ve Öğrencilerin Uygulama ile ilgili Görüşleri. Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 34(3), 153-163.

Baki, A., Güven, B. & Karataş, İ. (2001). Dinamik Geometri Yazılımı Cabri ile Yapısalcı Öğrenme Ortamlarının Tasarımı, *1. Uluslar arası Öğretim Teknolojileri Sempozyumu ve Fuarı*, Sakarya.

Balacheff, N. (1988), 'Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics', in D. Pimm (ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, Hodder & Stoughton, London, pp.216–235

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of prof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 501–512.

Baydaş, Ö. (2010). Öğretim elemanlarının ve öğretmen adaylarının görüşleri ışığında matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı. Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupil's Proof Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics* 7(1), 23–40.

Bintaş, J. & Akıllı, B. (2008). *Bilgisayar Destekli Geometri.* Ankara: Pegem Yayınevi.

Büyüköztürk,Ş., Çakmak Kılınç, E., Akgün Erkan,Ö., Karadeniz, Ş., & Demirel, F., (2008). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (2.Baskı). Ankara: Pegem A Akademi.

CalGeo.(2007). (Teaching Calculus Using Dynamic Geometric Tools).http://www.math.uoa.gr/calgeo/ sitesinden erişilebilir.

Çepni, S. (2010). *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş*(5. Baskı),Trabzon: Üçyol Matbaacılık.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Pythagoras,* 24, 17-24.

Dikovic, Lj. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. ComSIS, *6*(2), December 2009.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S. &Choustoulakis, E., (2007). Developing a proof-writing tool for novice lyceum geometry students, *The Teaching Of Mathematics*, Vol. X, 2, 87–106.

Edwards, J.-A. & Jones, K. (2006). Linking Geometry and Algebra with GeoGebra. In: Mathematics Teaching,194.

Filiz, M. (2009). GeoGebra ve Cabri Geometri II dinamik geometri yazılımlarının web destekli ortamlarda kullanılmasının öğrenci başarısına etkisi. Yüksek Lisans Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Furner, J. M. & Marinac, C. A. (2007). Geometry Sketching Software for Elementary Children: Easy as 1, 2, 3.*Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 3 (1), 83-91.

González, G., & Herbst, P. (2009). Students' Conceptions of Congruency Through the Use of Dynamic Geometry Software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*, 153-182.

Güven, B. & Karataş, İ. (2005). Dinamik Geometri Yazılımı Cabri ile Oluşturmacı Öğrenme Ortamı Tasarımı: Bir Model, *İlköğretim-Online*,4(1), 62-72.

Hadas, N.,Hershkowitz, R. &Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studiesin Mathematics,* 44, 127-150.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40 (3), 345-353.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education, 40:329–336.*

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studiesin Mathematics, 44*(1), 5–23.

Harel, G. & Sowder, L. (1996). Classifying Processes of Proving, *Proceedings ofPME XX*, Valencia,v.3, 59-66.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American MathematicalSociety, 7*, 234–283.

Harel, G., & Sowder, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof, In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematic Teaching and Learning,* National Council of Teachers of Mathematics.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., Lavicza, Z. (2009) Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* (2009), 28(2), 135-146.

Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of Linking Geometry andAlgebra: The Case of GeoGebra, *Proceedings of British Society forResearch into Learning Mathematics*, 27,3, November 2007.

Hohenwarter, M. & Preiner J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. Journal of Online Mathematics and its Applications. Vol. 7: Article ID 1448.

Hohenwarter, M. & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*, MAA, ID 1448, vol.7.

Hohenwarter, M. (2004). Bidirectional Dynamic Geometry and Algebra with GeoGebra. *Proceedings of the German Society of Mathematics Education's annual conference on Mathematics teaching and Technology*. Soest, Germany.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2005). Combination of Dynamic Geometry, Algebra and Calculus in the Software System GeoGebra. Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference 2004, Pecs, Hungary.

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. 27(3). University of Northampton, UK: BSRLM.

Hollebrands, K. F. (2007). The Role of a Dynamic Software Program for Geometry in the Strategies High School Mathematics Students Employ. *Journal for Research Mathematics Education.* 38 (2), 164-192.

Hoyles, C & Jones, K. (1998), Proof in Dynamic Geometry Contexts. In: C. Mammana and V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Dordrecht: Kluwer. pp121-128.

İskenderoğlu, T. & Baki, A. (20-22 Ekim 2010). *Dördüncü Sınıf İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Fonksiyonlar Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemaları*. 9. Matematik Sempozyumu Sergi ve Şenliklerinde sunuldu, Trabzon.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 55-85.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level, *International Journal of Mathematical Education Sicience and Technology*, 31(1), 53-60.

Jones, K., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Lu, A., Dawes, M., Parish, A. & Borcherds, M. (2009) Establishing a professional development network to support teachers using dynamic mathematics software GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 29(1), 97-102.

Karadağ, Z. & McDougall, D. (2009) Dynamic worksheets: visual learning with the guidance of Polya MSOR Connections, 9(2) 13-16.

Kepceoğlu, İ. (2010). GeoGebra yazılımıyla limit ve süreklilik öğretiminin öğretmen adaylarının başarısına ve kavramsal öğrenmelerine etkisi. Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education,*5, 61–88.

Köse, N. Y. & Özdaş, A. (2009). İlköğretim 5. Sınıf Öğrencileri Geometrik Şekillerdeki Simetri Doğrularını Cabri Geometri Yazılımı Yardımıyla Nasıl Belirliyorlar. *İlköğretim-Online*, 8(1), 159-175.

Laborde, C. (2000), Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 151-161.

Larsen, S. & Zandieh, M. (2007). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*. 67 (3) 205-216.

Lu, Y.W. A. (2008). English and Taiwaneses upper secondary teachers' approaches to the use of GeoGebra, Acta Scientiae, v.10, n.2, jul./dez. 2008, Canoas, Brazilya.

Mariotti, M. A. (2000), Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, *Educational Studies in Mathematics,* 44, 25-53.

Marrades, R. & Gutierrez, A. (2000). Proofs Produced By Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment, *Educational Studies in Mathematics 44* (1/2), 87-125.

Martin, T. S.,. Mccrone, S. M. S., Bower, M. L. W. *&* Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof, *Educational Studies in Mathematics,* 60: 95–124.

McCrone, S. M. S & Martin, T. S. (2004). Assessing High School Stuedents' Understanding of Geometric Proof, *Canadian Journel of Science, Mathematics and Technology Education,* 4(2), 223-242.

MEB (2009). İlköğretim Matematik Dersi 6–8. Sınıflar Öğretim Programı. 02.12.2010tarihindehttp://ttkb.meb.gov.tr/ adresinden alınmıştır.

Moralı, S., Uğurel, I, Türnüklü, E. & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*(1), 147–160.

Mudally, V. & de Villers, M. (2000). Learners' Needs For Conviction And Explanation Within The Context Of Dynamic Geometry*. Pythagoras, 52, pp. 20-23*

NCTM (2000). Principles and Standarts for School Mathematics.USA.

Olivero, F. & Robutti, O. 2007. Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International journal of Computers for Mathematical Learning*, 12, 135-156.

OReilly, M. (2009) A complex thing made simple with GeoGebra / Maurice OReilly MSOR Connections, 9(2) 11-12.

Öner, D. (2008). Supporting Students' Participation In Authentic Proof Activities İn Computer Supported Collaborative Learning (CSCL) Environments*. Computer-Supported Collaborative Learning,* 3, 343-359.

Ören, D. (2007). An investigation of 10th grade students prof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender. Yüksek Lisans Tezi. ODTÜ, Ankara.

Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2008). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics, 70,* 5-26.

Reis, Z. A. & Karadag, Z. (2008). A proposal for developing online collaborative environment for learning mathematics. *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 2008*(sy. 5123-5128).

Saha, R. A., Ayubb, A. F. M. & Tarmizi, R. A. (2010). The Effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning, *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* 8, 686–693.

Sangwin, C. (2008). Geometrical functions: tools in GeoGebra. In: MSOR Connections Vol 8, No. 4, 17-20.

Santos-Trigo, M. & Cristóbal-Escalante, C. (2008). Emerging high school students´ problem solving trajectories based on the use of dynamic software. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 27(3): 325-340.

Sinclair, M. P. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials.*Educational Studies in Mathematics, 52,*289–317.

Stylianides G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks, *Mathematical Thinking and Learning*, 11: 258–288.

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations, *Educational Studies in Mathematics*. 72(2), 237-253.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2005). Validation Of Solutions Of Construction Problems In Dynamic Geometry Environments, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 10, 31-47.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 145-166.

Ubuz, B., Üstün, I., &Erbaş, A. K. (2009). Effect of dynamic geometry environment on immediate and retention level achievements of seventhgrade students. *Eğitim Araştırmaları-Eurasian Journal of* Educational Research,. 35, 147-164.

Umay, A. (2007). *Eski Arkadaşımız Okul Matematiğinin Yeni Yüzü*. Ankara: MF Yayıncılık.

Üstün, I. & Ubuz, B. (2004). Students Development of Geometrical Concepts Through a Dynamic Learning Environment. *The 10th International Congress on Mathematics Education.*

Wares, A. (2004). Conjectures and proofs in a dynamic environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(1), 1-10.

Wei, C. S. &. İsmail, Z. (2010). Peer interactions in computer-supported collaborative learning using dynamic mathematics software, *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* 8, 600-608.

Witter, j. & Seinkbel, M. (2008).Is Students' Computer Use At Home Related to Their Mathematical Performance At School. *Computers and Education*, Vol. 50, No. 4, 1558-1571.

Yerushalmy, M., Chazan, D,, and M. Gordon: 1988, *Posing Problems: One Aspect of Bringing Inquiry into Classrooms,* Technical Report 88-21, Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education, Cambridge, MA.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (6. Baskı), Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Taş, M. (2010). Dinamik matematik yazılımı geogebra ile eğrisel integrallerin görselleştirilmesi. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul Üniversitesi, İstanbul.

McCrone, S. M. S. & Martin, T. S. (2004). Assessing High School Students' Understanding of Geometric Proof, *Canadian Journel of Science, Mathematics and Technolojy Education*, 4 (2), 223-242.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.

Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 4, 425-432.

EK1.

GEOMETRİK İSPAT PROBLEMLERİ

1) Bir ABC üçgeninde D ve E noktaları sırasıyla │AB│ ve │AC│doğru parçalarının orta noktalarıdır. F ve G noktaları │BC│tabanına │BG│=│CF│olmak üzere yerleştirilmiştir. │DG│ ve │EF│doğru parçaları H noktasında kesiştiğine göre AH doğru parçasının, ABC üçgeninin hangi çeşit veya çeşitlerinde A açısının açıortayı olduğunu bulunuz ve neden açıortay olduğunu ispatlayınız.

2) ABCD herhangi bir dörtgen ve bu dörtgenin kenar orta noktaları M, N, E, P olsun. Oluşan MNEP dörtgenin çeşidi nedir? Cevabınızı gerekçelendiriniz.

3) A, B ve C üç sabit noktadır. D noktası hareket ettirilerek hangi durumda ABCD dörtgenin iç açıortaylarının bir noktada kesişeceğini bulunuz (ABCD dışbükey çokgendir*).*